UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MIURI BRUM PESTANO

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE ENVOLVENDO PROBLEMAS DE LÓGICA-MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Porto Alegre
2013

MIURI BRUM PESTANO

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE ENVOLVENDO PROBLEMAS DE LÓGICA-MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Porto Alegre

2013

MIURI BRUM PESTANO

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE ENVOLVENDO PROBLEMAS DE LÓGICA-MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana
Instituto de Matemática - UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Instituto de Matemática - UFRGS

Prof. Dr. Carlos Hoppen - Orientador
Instituto de Matemática – UFRGS

Dedico este trabalho à minha avó Anna, que há pouco tempo partiu desse mundo deixando imensa saudade. Cujo incentivo aos estudos foi de grande importância para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, em especial ao meu pai que, mesmo distante, não mediu esforços para que eu chegasse até aqui e que me apoiou em todas as decisões que tomei.

Ao professor Carlos Hoppen, que me acolheu neste trabalho com a sua orientação. Pela paciência, incentivo e explicações, que foram essenciais para a realização deste trabalho.

Aos amigos queridos Nanda e Giba, pela amizade sincera e demonstrações diárias de carinho. Obrigada pelas conversas “filosóficas”.

À querida amiga Luciana Lima que, por diversas vezes me acolheu dentro de sua casa, compartilhando comigo seus momentos em família. Obrigada por chorar comigo sempre que o cansaço acumulado era maior do que a nossa cabeça podia aguentar.

Ao querido Fernando que se mostrou um ótimo amigo nesses momentos finais de graduação, cujas conversas propiciaram agradáveis momentos de descontração.

À querida tia Terezinha que, em momentos difíceis, me acolheu como uma filha, cuja admiração como mãe e mulher é infinita. À amiga Márcia que, em nenhum momento, se importou em dividir comigo o carinho da sua mãe.

Aos professores Alvino Alves Sant’Ana e Marcus Vinicius de Azevedo Basso, por aceitarem contribuir na construção deste trabalho, participando da banca examinadora.

Ao professor Chico que, com sua tranquilidade e seus discursos, abriu meus olhos para à Filosofia.

E, por último, mas não menos importante, à minha querida avó Anna (*in memorian*), cujo sentimento de gratidão, carinho e respeito é imenso.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta de atividade envolvendo problemas lógico-matemáticos no Ensino Médio. Escolhemos este tema por perceber a importância que ele representa fora da escola e o fato de ser pouco explorado dentro da mesma. A prática teve duração de três horas-aula e foi realizada em duas turmas do 2º ano do Ensino Médio EJA de uma escola da Rede Estadual de Ensino de Porto Alegre. Pretende-se com a proposta verificar a receptividade dos estudantes com relação aos problemas sugeridos e, através do registro das produções faladas e escritas, realizar uma análise comparativa entre os tipos de resolução esperados e as resoluções que efetivamente se obteve.

Palavras-chave: Problemas lógico-matemáticos; Lógica Matemática; Raciocínio Lógico-dedutivo; Lógica.

ABSTRACT

This paper aims to presenting a proposal involving logical- mathematical problems at high school. We chose this topic to realize the importance that it represents out of school and the fact that it's underexplored within schools. The practice lasted three class hours and was realized in two second grade classes of the high school from EJA (young adult education) at a school of the States Schools from Porto Alegre. The intention of this proposal is to verify the receptivity of students respecting the suggested problems and through the recorded spoken and written productions, make an analysis comparing the espected results and the efective results obtained.

Keywords: Logical-mathematical problems; Mathematical Logic; Logical Deductive Reasoning; Logic.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma atividade envolvendo a resolução de problemas lógico-matemáticos, realizada com turmas de alunos do segundo ano do Ensino Médio no programa de Educação de Jovens e Adultos (EJA) de uma escola da Rede Estadual de Ensino de Porto Alegre, bem como relatar e analisar a forma como a atividade foi percebida e desenvolvida pelos estudantes.

Com a aproximação da conclusão da graduação, inúmeras dúvidas surgiram. A escolha de sobre o que escrever no Trabalho de Conclusão de Curso foi uma das mais difíceis, deixando-me por muitas vezes inquieta. Acredito que essa escolha acabou sendo fortemente influenciada pelo tema que maior curiosidade produziu em mim durante os anos de faculdade.

Quando ingressei na UFRGS, já me preocupava com o momento no qual teria que desenvolver alguma prática, aplicá-la em sala de aula e escrever o trabalho de conclusão. Para mim, escrever nunca foi tarefa fácil, por isso essa preocupação logo no início do curso. Nesse início de graduação, já pensava em um possível tema para desenvolver no meu trabalho final, e ainda que não soubesse exatamente o que seria, imaginava escrever algo que envolvesse Geometria Espacial, devido ao fascínio que este assunto sempre me inspirou nas aulas de matemática no Ensino Médio. Ao longo desses quatro anos e meio, muitas coisas aconteceram e acabei cursando disciplinas que ajudaram na mudança de foco sobre a decisão de qual tema seguir.

Em breve serei Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande Sul e lá se passaram quatro anos e meio desde que ingressei nessa Universidade. Não foram poucos os assuntos estudados no curso de Matemática: Álgebra, Aritmética, Geometria, Psicologia, História, Filosofia são apenas alguns poucos exemplos. Foram-me apresentadas várias possibilidades de estudo e diversos temas que poderiam servir de base temática para este trabalho.

Da mesma forma que vários colegas de curso, sempre tive muita facilidade na disciplina de matemática quando aluna do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Quando ingressei pela primeira vez no curso de graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Pelotas, o qual viria a trancar após um ano, logo no primeiro semestre fui apresentada à disciplina de **Introdução à Lógica**. Esse foi meu primeiro contato com esse assunto, que jamais foi abordado diretamente nos outros níveis de Ensino, e nesse momento pude compreender que a Matemática que eu havia aprendido, e que era fácil nos níveis anteriores de Ensino, agora seria bem mais complexa.

O professor iniciou a disciplina apresentando símbolos que são próprios do Cálculo Proposicional para iniciarmos o estudo dessa temática. "O **Cálculo Proposicional** é a parte da Lógica Matemática que estuda a validade de argumentos apresentados em uma linguagem própria, a linguagem proposicional" (BISPO; CASTANHEIRA; FILHO, 2011, p. 2, grifo do autor). Conectores como "$\wedge$" e "$\vee$" ("e" e "ou" respectivamente) são alguns exemplos, e também definições como: sentenças, premissas, conclusão, etc.. Aprendemos como chegar a conclusões através de premissas dadas anteriormente. Trabalhamos formas de reescrever frases em linguagem simbólica e realizar determinados cálculos com essa simbologia completamente nova para muitos. A lembrança mais marcante de tudo que foi visto na disciplina foi com relação à Tabela Verdade que é utilizada para determinar o valor-verdade de (V) ou (F) de uma proposição composta.

Pouco da simbologia ou das definições apresentadas na disciplina era conhecida anteriormente por mim e, nesse primeiro momento, não levei em consideração o fato de esse assunto ser um tema interessante para futuros trabalhos de pesquisa, artigos ou trabalho de conclusão de curso. O fato que mais chamou a minha atenção foi o de que a grande maioria dos meus colegas, incluindo eu, ter apresentado grande dificuldade em aplicar o que foi ensinado pelo professor para resolver as atividades que eram propostas no transcorrer da disciplina. A cada aula, o nível de dificuldade das atividades aumentava e cada vez se tornava mais difícil chegar às conclusões corretas. Era fácil cometer erros, afinal, era algo completamente novo e com alto grau de dificuldade.

Na época, tive grandes dificuldades em compreender o motivo pelo qual estudávamos aquela disciplina. Só mais tarde, consegui perceber que toda a Matemática é definida e demonstrada de maneira lógica, e que a Lógica Formal é um meio de se chegar nessas demonstrações. “A Lógica Formal trata das formas dos argumentos válidos, ou seja, dos modos legítimos de chegar a conclusões a partir de um conjunto de premissas” (CUNHA; MACHADO, 2008, p. 31). Com o passar do tempo e com o meu retorno ao curso de Licenciatura em Matemática, agora na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, também no primeiro semestre, tive a disciplina de Fundamentos de Matemática I, e nela foi trabalhado muito conteúdo relacionado com a lógica e simbologia matemática ao qual eu já tinha sido apresentada na disciplina de Introdução à Lógica na outra Universidade.

No sétimo semestre do curso, quando cursava a disciplina de Laboratório de Prática e Ensino Aprendizagem em Matemática III, ao escrever comentários sobre uma aula dada pelos meus colegas de curso e ao expor a dificuldade apresentada por um aluno ao resolver um exercício que poderia ser resolvido apenas com a utilização de um determinado raciocínio, sem a necessidade de esboçar nenhum cálculo, essa experiência vivida na antiga universidade foi relembrada e associada a outra situação também envolvendo a temática lógica-matemática quando eu estudava para a prova de um concurso público.

Nesse concurso específico, o edital incluía no plano programático para estudos, conteúdos sobre Matemática e Raciocínio Lógico-Matemático. Quanto a este último, o conteúdo avaliado era:

> Estrutura lógica de relações arbitrárias entre pessoas, lugares, objetos ou eventos fictícios; deduzir novas informações das relações fornecidas e avaliar as condições usadas para estabelecer a estrutura daquelas relações. Compreensão e elaboração da lógica das situações por meio de: raciocínio verbal, raciocínio matemático, raciocínio sequencial, orientação espacial e temporal, formação de conceitos, discriminação de elementos. Compreensão do processo lógico que, a partir de um conjunto de hipóteses, conduz, de forma válida, a conclusões determinadas. (EDITAL TRF4, 2009, p. 32)

Com base nesse encadeamento de situações envolvendo o mesmo tema, quando cursava a disciplina de Pesquisa em Educação Matemática, decidi que utilizaria essa temática para escrever o Projeto de Pesquisa, base para este trabalho, pois essa temática alinhava diversas situações ocorridas ao longo da minha carreira acadêmica e também algumas situações vividas fora dela.

Para a realização da atividade, proporemos a resolução de problemas lógico-matemáticos e dividiremos a atividade em dois encontros. No primeiro encontro, a metodologia de trabalho será a de solucionar os problemas propostos com a participação dos presentes e com a minha intervenção no apoio das resoluções, buscando assim um contato maior com os mesmos nesse primeiro momento e uma forma de deixar o clima mais tranquilo. No segundo encontro, os problemas serão entregues aos estudantes para que os mesmos resolvam sozinhos ou em duplas. Pretende-se com a aplicação dessa atividade, verificar se é viável trabalhar com esse tipo de problema sem que os alunos possuam um conhecimento prévio sobre os mesmos ou sobre conteúdos específicos de lógica-matemática.

O objetivo deste trabalho não é analisar de forma cognitiva em qual idade haveria maior aptidão para realização da atividade. Optou-se por trabalhar com estudantes de Ensino Médio pela proximidade destes com provas de concurso, e também por toda bagagem matemática que estes trazem consigo e que podem ser utilizadas na resolução de problemas.

Como exemplo da bagagem matemática à qual nos referimos anteriormente, podemos citar o conteúdo relacionado a Teoria de Conjuntos, conteúdo este geralmente ensinado nas séries finais do Ensino Fundamental, em que boa parte do aprendizado que relaciona relações entre conjuntos pode ser utilizada como ferramenta na resolução de problemas próprios da lógica-matemática.

Por questões de horários e locais para aplicação da prática, decidiu-se por realizar a atividade em turmas de Ensino Médio EJA, ambiente esse que está sempre propício a uma variedade enorme de alunos, com as mais diferentes idades e realidades de vida. Alunos esses que trazem consigo uma bagagem que pode ser favorável para a aplicação da prática aqui exposta.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> A matemática do Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as

> atividades humanas. Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 1999, p. 82)

Acredita-se que atividades semelhantes a que estamos propondo possuem capacidade de favorecer os alunos com relação à estruturação do seu pensamento e também no aprimoramento do seu raciocínio dedutivo, visto que, para solucionar os problemas que serão propostos, será preciso que os alunos consigam pensar de forma clara, organizando as informações que possuem, e através de uma cadeia de raciocínios interligados, possam chegar à resposta que consideramos correta.

Cabe salientar que o PCN do Ensino Médio sugere as seguintes competências e habilidades a serem desenvolvidas na disciplina de Matemática, com relação à investigação e compreensão:

> Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
> Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
> Formular hipóteses e prever resultados.
> Selecionar estratégias de resoluções de problemas.
> Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
> Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> Discutir ideias e produzir argumentos convincentes. (Ibid., p. 93)

Através do papel desempenhado pelos problemas de lógica-matemática na sala de aula, acreditamos que várias das habilidades e competências sugeridas pelo PCN podem ser alcançadas. O objetivo dessa proposta não é a de que esses estudantes atinjam as habilidades e competências mencionadas acima, mas a de verificar se vale a pena trabalhar com esse tipo de problemas na sala de aula, bem como de verificar se alguns estudantes já possuem essas características de alguma maneira. Também verificar quais os tipos de raciocínio esses estudantes utilizam para resolver os problemas. E qual a receptividade para trazer esses conceitos de um ponto de vista mais formal.

Dessa forma justifica-se a escolha de turmas do Ensino Médio para aplicação da proposta desenvolvida com caráter mediador em relação a tudo que se busca de resultados propiciados na escola, mais especificamente com a disciplina de Matemática.

O presente trabalho será organizado da seguinte forma. No segundo capítulo, falaremos sobre a Lógica e onde ela surgiu como ciência formal. Também definiremos Lógica-matemática como a vimos nesse trabalho. O objetivo do terceiro capítulo é explicar como se deu a criação da proposta, bem como as pesquisas na busca de coleta de problemas, suas respostas, resoluções e os resultados esperados. No quarto capítulo apresentaremos um relato sobre a atividade realizada, as turmas onde a atividade foi aplicada e as suas características mais marcantes. Também será relatado como a atividade foi recebida e desenvolvida pelos estudantes, a participação dos mesmos e uma análise dos encontros e dos resultados obtidos. No último capítulo, apresentaremos algumas considerações acerca dos resultados esperados e resultados obtidos, procurando responder as questões inicias apresentadas.

2. A LÓGICA E O RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO

> "É lógico que eu vou!"; "Lógico que ela disse isso!". Quando dizemos frases como essas, a expressão "é lógico que" indica, para nós e para a pessoa com quem falamos, que se trata de alguma coisa evidente. A expressão aparece como se fosse a conclusão de um raciocínio implícito, compartilhado pelos interlocutores do discurso. Ao dizer "É lógico que eu vou!", estou supondo que quem me ouve sabe, sem que isso seja dito explicitamente, que também estou afirmando: "Você me conhece, sabe o que eu penso, gosto ou quero, sabe o que vai acontecer no lugar *x* e na hora *y* e, *portanto*, não há dúvida de que vou estar lá".
>
> Ao dizer "É lógico que ela disse isso!", a situação é semelhante. A expressão seria a conclusão de algo que eu e outra pessoa sabemos, como se eu estivesse dizendo: "Sabendo quem ela é, o que pensa, gosta, quer, o que costuma dizer ou fazer, e vendo o que está acontecendo agora, *concluo* que é evidente que ela disse isso, pois era de esperar que ela o dissesse."
>
> Nesses casos, estamos tirando uma conclusão que nos parece óbvia, e dizer "é lógico que" seria o mesmo que dizer "é claro que" ou "não há dúvida que".
>
> Em certas ocasiões, ouvimos, lemos, vemos alguma coisa e nossa reação é dizer: "Não. Não pode ser assim. Isso não tem lógica!" Ou, então: "Isso não é lógico!". Essas duas expressões indicam uma situação oposta as anteriores, ou seja, agora uma conclusão foi tirada por alguém, mas o que já sabemos (de uma pessoa, de um fato, de uma ideia, de um objeto) nos faz julgar que a conclusão é indevida, está errada, deveria ser outra. É possível, também, que as duas expressões estejam indicando que o conhecimento que possuímos sobre alguma coisa, sobre alguém ou sobre um fato não é suficiente para compreendermos o que estamos ouvindo, vendo, lendo e por isso nos parece "não ter lógica". (CHAUI, 2010, p. 134)

É fácil compreender as palavras de Chaui, afinal é realmente muito comum vivenciarmos situações em que a expressão "é lógico" é utilizada. Quando expressamos frases como as do texto acima, estamos procurando agir segundo um encadeamento de informações que já são de nosso conhecimento para chegar a uma determinada conclusão.

Não existe apenas uma definição para o que chamamos de Lógica. Isso pode variar de acordo com o campo teórico que estamos estudando. Até mesmo porque dentro da Lógica, encontraremos vários ramos de estudo. Para Bianchi:

> A Lógica é a arte de pensar, a arte de raciocinar, sendo o raciocínio o pensamento em movimento, o encadeamento de juízos. É a ciência que trata das operações que o espírito humano usa na busca da verdade. Incluídas estão as operações secundárias, usadas para raciocinar, como comparar, classificar, analisar, sintetizar, abstrair, supor, etc... (2007, p. 7)

O fato é que o pensamento é uma característica fundamental da humanidade. Desde os primórdios, o homem se preocupa com a forma de pensar e argumentar, e Aristóteles (384 a.C.) ficou conhecido pela sua procura em organizar as formas válidas de argumentação.

> A Lógica teve origem como disciplina com Aristóteles, entre 300 e 400 antes de Cristo. Naturalmente, os homens não eram irracionais antes disso, tendo sido transformados em seres racionais pelos estudos aristotélicos: eles sempre pensaram, raciocinaram, escolheram, decidiram. Com Aristóteles, no entanto, tem início a caracterização das formas legítimas de argumentação, em contraposição a outras que poderiam parecer corretas, mas que eram inadequadas – as falácias. (CUNHA; MACHADO, 2008, p. 14)

Em uma de suas principais obras, o Órganon, Aristóteles desenvolveu a base da Lógica que conhecemos hoje. Ele foi um dos primeiros a formalizar as formas do pensamento. Cabe destacar que, em sua obra, Aristóteles jamais utilizou a palavra Lógica, mas sim Analítica, como assim a chamou.

> Aristóteles elaborou uma teoria do raciocínio como *inferência*. Inferir é obter uma proposição como conclusão de uma outra ou de várias outras proposições que a antecedem e são sua explicação ou sua causa. O raciocínio realiza inferências.
>
> O raciocínio é uma operação do pensamento realizada por meio de juízos e enunciada por meio de proposições encadeadas, formando um **silogismo**.
>
> Raciocínio e silogismo são operações *mediatas* de conhecimento, pois a *inferência* significa que só conhecemos alguma coisa (a conclusão) por meio de outras coisas. Em outras palavras, o raciocínio e o silogismo diferem da intuição, que [...] é um conhecimento direto ou imediato de alguma coisa ou de alguma verdade. (CHAUI, 2010, p. 141, grifo do autor)

Quando falamos em raciocínio lógico, estamos nos referindo ao raciocínio lógico dedutivo e estaremos tomando como significado para esse termo o processo coerente de utilizar o raciocínio a fim de se chegar a certos resultados com base em informações iniciais, seguindo certas regras pré-estabelecidas, aceitas como válidas através dos axiomas da lógica. Para isso, é chamado de *conclusão* o que se conclui e de *premissa* uma das informações iniciais que fornecem condições de dedução à determinada conclusão. Um exemplo de raciocínio lógico dedutivo é o seguinte:

Todos os números pares são divisíveis por 2.

100 é um número par.

Logo, 100 é divisível por 2.

No exemplo da página anterior podemos verificar que temos duas premissas que nos fornecem informações suficientes para deduzirmos o que chamamos de conclusão. A validade das premissas, nesse caso, garante a validade da conclusão.

A partir dessa, várias lógicas se ramificam. Muitas delas permanecem no campo da Filosofia, onde surgiu, mas entre elas, a Lógica Matemática também é bastante conhecida e muito utilizada.

> A partir de 1930 até nossos dias, a evolução da lógica caminha em uma direção de maior integração à matemática, atingindo uma complexidade técnica elevada e ampliando consideravelmente o seu domínio com aplicações nas mais diversas áreas, como Informática, Administração de Empresas. Física, Economia, Engenharia etc. (BISPO; CASTANHEIRA; FILHO, 2011, p. xiii)

Essa integração da Lógica com a Matemática e a aplicação em diversas áreas de conhecimento é uma justificativa relevante para explicar o motivo pelo qual esse conteúdo é tão abordado em provas de concursos públicos. Cabe ressaltar que a Matemática e a Lógica Matemática são fundamentais para a Lógica Computacional, servindo como base para esta. O que consequentemente acaba contribuindo para a era da informatização na qual vivemos.

> A Lógica Matemática trata da relação entre proposições, considerando *a forma* que essa relação assume e *não o seu conteúdo*. Em função disso, as proposições são representadas por letras maiúsculas do alfabeto latino. [...]
>
> É importante assinalar que a Lógica Matemática é uma ciência não empírica, isto é, não depende de observações como nas ciências naturais. Portanto, tem afinidades com a Matemática e dela se aproxima. (BISPO; CASTANHEIRA; FILHO, 2011, p. 6, grifo do autor)

A Lógica Matemática procura representar simbolicamente o que é expresso em linguagem comum. Em outras palavras, procura uma forma de abstrair de uma situação restrita, para uma situação geral, mais ampla. O Cálculo Proposicional e a Tabela-verdade são componentes lógicos da Lógica Matemática, que possibilitarão uma maior compreensão dos significados lógico-matemáticos.

O cálculo proposicional, como mencionado anteriormente, estuda a validade de argumentos a partir de uma linguagem matemática. Chamamos de **proposição** toda sentença declarativa que pode assumir dois valores-verdade: verdade (V) e falsidade (F). Toda proposição será representada simbolicamente, assumindo letras maiúsculas do alfabeto latino (A, B,..., Z) e símbolos para representar os conectivos proposicionais, os quais podemos chamar de conectivos lógicos: ∧ "e"; ∨ "ou"; → "se..., então..."; ↔ "se, e somente se", ¬ "não".

Cabe também chamar atenção para o fato de a Lógica Matemática assumir como regras fundamentais do pensamento válido três princípios básicos, a saber:

Princípio da Identidade: Toda proposição é idêntica a si mesma. "P é P"

Princípio da Não Contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. "não (P e não P)"

Princípio do Terceiro Excluído: Toda proposição ou é verdadeira ou falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir. "P ou não P"

Abaixo, incluo um pequeno exemplo de tabela-verdade e como se dá sua configuração através da linguagem proposicional:

		Conjunção	Disjunção	Condicional	Bicondicional
P	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Tabela 1: Tabela-verdade

Para evidenciar a importância da Lógica na Matemática, podemos falar um pouco sobre os teoremas. "A princípio, um ***teorema*** é uma sentença matemática condicional 'Se P, então Q' ou implicativa 'P → Q', cuja validade é garantida por uma demonstração. Nesse caso, chama-se ***hipótese*** a sentença P e ***tese*** a sentença Q" (FILHO, 2007, p. 71, grifo do autor). Da mesma forma que na Lógica utilizamos premissas para chegar a uma determinada conclusão, na Matemática, para demonstrar teoremas, vamos nos valer daquilo que chamamos de hipótese, e de tudo que é consequência dela, para provar a tese.

No próximo capítulo, quando estivermos mostrando como se deu a construção da atividade, perceberemos que o conjunto de problemas selecionados foi elaborado com um padrão de premissas que fossem suficientes para dedução das suas conclusões. Observaremos que, para chegar a uma forma válida de conclusão, não será possível utilizar apenas a intuição. As premissas terão que ser observadas e interpretadas de maneira coerente e lógica para obter conclusões corretas.

Conteúdos relacionados à Lógica na sala de aula

É possível observar que alguns conteúdos ensinados na escola, possuem uma forte ligação com a Lógica-Matemática da qual tanto falamos. Dentre eles, podemos inicialmente destacar a Teoria de Conjuntos. “Na Lógica, os conjuntos têm grande aplicabilidade ao se prestarem com eficácia para sintetizar e organizar o raciocínio lógico, além da vantagem de ser possível efetuar operações com eles (união, interseção, etc.)” (FILHO, 2007, p. 31).

Quando estudamos esse conteúdo, somos apresentados a algumas relações que contribuem para o desenvolvimento da capacidade de visualização de algumas situações problema através de diagramas, conhecidos como Diagramas de Venn. Tais diagramas servem para auxiliar a visualização de afirmações. Por exemplo, pode-se verificar se um grupo de elementos faz parte de outro, se está contido em outro grupo de elementos ou se não existe nenhuma relação entre os referidos grupos de elementos.

Por exemplo, quando dizemos que alguns Matemáticos são Filósofos, podemos interpretar essa afirmação através da linguagem de conjuntos. Podemos começar definindo o grupo dos Matemáticos como um conjunto **M** e o grupo dos Filósofos como um conjunto **F**. Como a frase afirma que alguns Matemáticos são Filósofos, podemos representar essa afirmação através do seguinte diagrama:

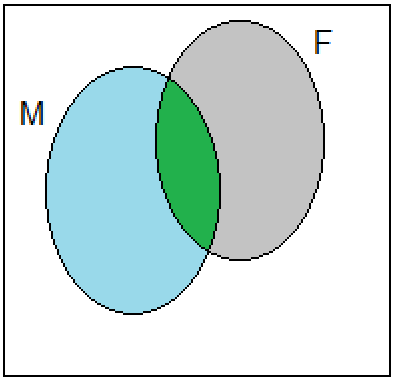


Diagrama 1: “Alguns Matemáticos são Filósofos”

Podemos observar que a área representada pela cor verde no diagrama acima representa justamente o que estamos afirmando com relação aos Matemáticos e Filósofos, isto é, que **alguns** Matemáticos são Filósofos. A palavra “alguns” indica que há uma ligação entre os dois conjuntos do qual falamos, essa relação chamamos de Intersecção, simbolicamente conhecida por “∩”. A intersecção entre dois conjuntos é formada pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos simultaneamente.

Da mesma forma que representamos apenas uma frase através de diagramas, é possível também representar um conjunto de premissas, possibilitando facilitar que se chegue a uma determinada conclusão.

Intersecção não é a única operação estudada dentro da teoria de conjuntos. Vários conceitos contribuem no aprendizado da Teoria de Conjuntos e também podem contribuir na resolução de problemas lógico-matemáticos. Identificamos alguns exemplos:

- União de conjuntos “∪” – chamamos de união de dois conjuntos A e B o conjuntos formado pelos elementos pertencentes a A ou B;

- Inclusão de conjuntos “⊂” – Se todos os elementos de um conjunto A também pertencem a um conjunto B, dizemos que A está contido em B, ou ainda que A é subconjunto de B;

- Diferença entre conjuntos – Dados dois conjuntos A e B, chamamos de diferença "A – B" o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B;

- Complementar de um conjunto – Dado um conjunto A e o conjunto universo U, tal que $A \subset U$, dá-se o nome de complementar de A em U à diferença U – A.

O conteúdo relacionado à Teoria de Conjuntos é muito vasto, entretanto como o objetivo aqui é apenas mostrar que esse conteúdo tem forte ligação com a lógica-matemática, vamos nos restringir às definições acima.

Cabe ressaltar que formalmente há uma correspondência entre a Teoria de Conjuntos e o Cálculo Proposicional, que podem ser vistos como casos particulares da Álgebra Booleana. "Uma álgebra de Boole é um conjunto B no qual estão definidas duas operações binárias, **+** e **·**, e uma operação uniária, ´, e que contém dois elementos distintos, 0 e 1, tais que as propriedades de comutatividade, associatividade, distributividade, existência de elementos neutros e propriedade do complemento são válidas. Na Teoria de Conjuntos, as duas operações binárias para formar uma Álgebra de Boole são a união e a interseção, enquanto que, a complementação é a operação unária e seus elementos diferenciados são o conjunto vazio (ø) e o conjunto universo (U). No Cálculo Proposicional, a disjunção e a conjunção são as operações binárias enquanto que a negação é a operação unária. Os elementos diferenciados do Cálculo Proposicional são Verdade Universal (Tautologia) e Falsidade Universal (Contradição).

Outro conteúdo que pode favorecer o desenvolvimento dos raciocínios próprios da lógica-matemática é a Análise Combinatória. Como veremos na proposta de atividade que apresentaremos no próximo capítulo, alguns enunciados sugerem classificar ou ordenar objetos (ou pessoas) de forma a seguir determinadas regras. Para resolver esses problemas, é possível que o estudante utilize-se de alguns conhecimentos combinatórios. Mesmo que o estudante ainda não tenha sido apresentado ao conteúdo de Análise Combinatória, acredita-se que propor problemas lógicos desse tipo pode também favorecer quando no aprendizado de conteúdos combinatórios. O motivo para isso é que conhecimentos dedutivos de combinatória podem contribuir na habilidade de formalizar um conjunto de informações, simplificando enunciados, ignorando detalhes, extraindo as informações fundamentais e generalizando situações antes específicas.

Para dar um último exemplo da ligação entre a Lógica e assuntos tradicionalmente estudados na escola, podemos falar sobre a Geometria, seja ela plana ou espacial. Na Geometria, existem definições primitivas, como: ponto, reta e plano. Dessas definições primitivas, alguns fatos adicionais são propostas e aceitas sem demonstração chamadas de axiomas. As definições e axiomas não precisam ser demonstrados, pois segundo Filho: "... o nome do objeto definido está diretamente associado às propriedades que o caracterizam, e essas propriedades, por sua vez, identificam plenamente esse objeto, de modo que ele não possa ser confundido" (2007, p. 56). A partir de definições e axiomas iniciais, toda Geometria é construída e demonstrada de maneira Lógica. Com base em informações que já temos ou conhecemos, poderemos demonstrar teoremas, podendo assim representar a consequência lógica.

> Uma das mais importantes noções da Lógica é a de *consequência lógica*. Essa noção está na raiz da ideia de raciocínio que vulgarmente pode ser entendido como um encadeamento de pensamentos e juízos. Evidentemente, esse encadeamento obedece a certa ordem na qual um pensamento se segue a outro. [...] Um argumento é um conjunto de proposições, ou de fórmulas, nas quais uma delas (conclusão) deriva, ou é consequência, das outras (premissas). Essa derivação, também chamada de *dedução*, é de natureza puramente formal na Lógica Matemática. (BISPO; CASTANHEIRA; FILHO, 2011, p. 31, grifo do autor).

Como já mencionamos anteriormente, Teoremas são demonstrados de maneira lógica, de forma que podemos deduzi-los de definições e axiomas inicialmente estabelecidos. A noção de consequência lógica está diretamente relacionada com essas demonstrações e, consequentemente, com a Matemática em si.

Cabe ressaltar que os conteúdos mencionados acima não são os únicos que possuem relação com a lógica matemática, mas nesses casos é possível observar claramente essa relação e o favorecimento que ambos apresentam na resolução de problemas lógicos.

3. CONSTRUÇÃO DA ATIVIDADE E RESULTADOS ESPERADOS

Quando, com o apoio do meu professor orientador, cheguei à conclusão de que uma atividade envolvendo questões de concursos seria algo interessante para ser aplicado e analisado, surgiu uma dúvida: Por onde começamos?

Como a ideia inicial sempre foi trabalhar com questões de concursos públicos, o primeiro passo tomado foi a busca por editais de concursos que tivessem em seu conteúdo programático o assunto Matemática e Raciocínio lógico-matemático. Essa busca ficou restrita a três bancas com as quais eu tinha uma maior familiaridade, sendo elas a Fundação Carlos Chagas, o CespeUnB e a Cesgranrio.

Num segundo momento, após encontrar os editais com o padrão inicialmente estabelecido, começamos a busca pelas provas aos quais eles deram origem. Assim foi realizada uma coleta dos mais variados tipos de questões que estivessem vinculadas ao conteúdo lógico-matemático.

Como a temática que envolve Lógica é muito variada e como o objetivo desse trabalho não é voltado ao Ensino da Lógica e sim a uma análise do desenvolvimento de problemas lógico-dedutivos, procurou-se trabalhar com questões onde não fosse necessário um conhecimento prévio formal sobre Lógica, mas cuja resolução envolvesse o raciocínio dedutivo conforme abaixo.

> A lógica estuda, em especial, **o raciocínio dedutivo**, raciocínio que, se for válido, a verdade das suas premissas garante a verdade de sua conclusão, unicamente a custa de sua forma lógica. Isto não acontece com os outros tipos de raciocínio. Um raciocínio por analogia (por exemplos), ou indutivo pode ser correto e ter premissas verdadeiras e, no entanto, a sua conclusão ser falsa. Tudo que um argumento indutivo correto com premissas verdadeiras pode garantir é que é provável que a conclusão seja verdadeira; mas não pode garantir que o seja. (BIANCHI, 2007, p. 65, grifo meu)

Dessa forma procuramos escolher problemas variados que pudessem ser desenvolvidos através de uma abordagem de raciocínio lógico-dedutivo, com foco em enunciados com premissas consistentes, que permitissem a chegada até a conclusão.

Cabe salientar que a coleta de questões não ficou restrita às provas de concursos públicos. Num terceiro momento, ainda na busca de questões que viessem a complementar as questões já selecionadas, também foram utilizadas apostilas de cursos preparatórios para concursos e também livros com coletâneas de questões que abordavam a mesma temática.

Dessa forma chegou-se a um grupo específico de questões onde, através da leitura, da interpretação e do desenvolvimento do raciocínio de acordo com as proposições dadas, seria possível chegar a um resultado, sem que pra isso, houvesse a necessidade de um conhecimento prévio sobre Lógica Matemática formal. Por este motivo, evitamos problemas com os símbolos próprios do cálculo proposicional, problemas que envolvessem a construção de uma tabela-verdade, bem como questões envolvendo assuntos teóricos a respeito de definições próprias da lógica, ou mesmo questões que poderiam apresentar resultados diferentes dependendo da forma de interpretação, problemas geralmente utilizados em testes psicológicos onde o objetivo principal é determinar padrões simples.

No final foram escolhidas nove questões para a realização da prática. Esse grupo de questões foi dividido em duas atividades, ficando a primeira atividade com quatro questões e a segunda com cinco questões.

A proposta é realizar as atividades em dois encontros com cada turma participante. O objetivo do primeiro encontro é favorecer uma aproximação com a turma e motivar os alunos a abordarem problemas com os quais não tiveram contato prévio. Portanto, idealizamos uma atividade voltada para uma discussão em grupo, favorecendo assim que se "quebre o gelo" a partir de um primeiro contato mais informal. Nessa atividade, os problemas serão propostos e será sugerido que sejam resolvidos em conjunto, onde todos possam argumentar e participar de uma discussão. Ao final, espera-se chegar a uma solução consensual com base nos argumentos apontados.

O ideal é que o primeiro encontro seja realizado em dois períodos de aula. Caso necessário, buscando adequar-se a realidade de cada turma, a primeira parte da atividade poderá ser dividida em dois encontros de um período cada. Inicialmente será distribuída aos alunos uma folha com os quatro problemas selecionados. Na sequência será solicitado que eles leiam o primeiro problema e assim possam participar com sugestões para a resolução do mesmo. O meu papel será o de questionar as sugestões para a resolução, bem como o de fazer anotações no quadro conforme a sugestão dos alunos. Também procurarei realizar questionamentos conforme andamento do grupo, buscando gerar maiores discussões sobre a atividade.

A partir do momento que, em grupo, concordarmos com uma resposta, será realizado o mesmo processo de leitura e troca de ideias com as outras três questões.

Para o segundo encontro com os estudantes, pretende-se realizar uma atividade diferente que chamaremos de Atividade 2. Será entregue aos alunos, individualmente ou em duplas dependendo do tamanho da turma e da receptividade dos mesmos com relação à proposta, uma folha com os cinco problemas selecionados, bem como uma folha em branco para que os mesmos possam descrever os passos e raciocínios utilizados na resolução. Incentivarei os mesmos a escreverem tudo o que foi pensado a respeito de cada questão, e não somente marcar as respostas, pois esse material será de grande importância para a análise e o desenvolvimento deste trabalho.

Até o final do capítulo, discutirei os problemas escolhidos para cada uma das duas atividades propostas, bem como suas respostas, possibilidade de resolução e resultados que se espera encontrar nas resoluções dos estudantes:

3.1 ATIVIDADE 1

1) Um grupo de quatro jovens foi encontrado por um policial que passava pelo local em frente a um muro recém pichado. O policial, tentando encontrar o autor do vandalismo, pergunta: - Quem pichou o muro? Jorge, um dos jovens, responde: - Não fui eu. Eu estava apenas de passagem por aqui, assim como o senhor. Marcelo responde em seguida, apontando para outro rapaz: - Quem pichou o muro foi Marcos. Pedro defende o amigo: - Marcelo está mentindo. Marcos se manifesta, acusando outra pessoa: - Eu jamais picharia o muro, quem pichou foi Pedro. O policial percebe que apenas um deles mentiu. a) Quem mentiu? b) Quem pichou o muro?

Quadro 1: Problema 1 – Atividade 1

As respostas corretas para cada pergunta são (a) Marcelo e (b) Pedro e uma possibilidade de resolução seria:

Podemos verificar, com base nas premissas presentes no enunciado do problema, algumas situações.

1º Podemos perceber que tanto Marcelo, quanto Marcos acusam pessoas diferentes de terem pichado o muro. Como o policial diz que apenas uma pessoa mentiu, podemos concluir que Marcelo ou Marcos estão mentindo, pois duas pessoas não podem ter pichado o muro ao mesmo tempo.

2º Como sabemos que apenas uma pessoa mentiu e que Marcelo ou Marcos mente, podemos concluir que Jorge e Pedro dizem a verdade.

3º Como Pedro diz a verdade, e o mesmo acusa Marcelo de Mentiroso, concluímos que Marcelo é o mentiroso no grupo de jovens.

4º Como Marcelo é o mentiroso, então Marcos fala a verdade. Como Marcos acusa Pedro de ter pichado o muro, podemos concluir que essa informação é verdadeira.

Como esse será o primeiro problema proposto, espera-se que surjam algumas dúvidas com relação a como procederemos com a atividade. Acredita-se também que surgirão respostas que não tenham sido deduzidas através de uma análise aprofundada do enunciado do problema.

2) Considere a seguinte análise, feita por um comentarista esportivo durante um torneio de futebol. Se o Brasil vencer ou empatar o jogo contra a Argentina, então estará classificado para a semifinal, independentemente dos outros resultados. Classificando-se para a semifinal, a equipe brasileira vai enfrentar o Uruguai. De acordo com essa análise, conclui-se que se o Brasil: a) Não se classificar para a semifinal, terá necessariamente empatado o jogo com a Argentina. b) Enfrentar o Uruguai, necessariamente terá vencido ou empatado seu jogo contra a Argentina. c) Perder seu jogo contra a Argentina, necessariamente não se classifica para a semifinal. d) Se classificar para a semifinal, então necessariamente não terá sido derrotado pela Argentina. e) Não enfrentar o Uruguai, necessariamente terá perdido o jogo para a Argentina.

Quadro 2: Problema 2 – Atividade 1

A resposta correta para o problema acima corresponde a alternativa “e”. Para resolver o problema, acredita-se ser necessária uma análise individual das alternativas propostas a fim de verificar qual está correta.

a) Esta alternativa não está correta, pois o enunciado afirma que se o Brasil empatar com a Argentina ele se classificará para a semifinal, independente dos outros resultados e a alternativa propõe exatamente o contrário, que ele não se classifica porque empatou o jogo.

b) Nesse caso, a palavra “necessariamente” garante com exclusividade que o Brasil teria que empatar ou vencer o jogo contra a Argentina para enfrentar o Uruguai na semifinal. Excluindo a possibilidade de o Brasil ter perdido o jogo contra a Argentina e, com a ajuda de resultados paralelos, ainda ter se classificado para a semifinal.

c) Semelhante à alternativa b, aqui é afirmado que, se o Brasil perder, ele não se classifica para a semifinal. O que não é verdade, pois o Brasil ainda poderia contar com a possibilidade de favorecimento de resultados paralelos para se classificar para a semifinal.

d) Nessa alternativa afirma-se que, no caso de classificação para a semifinal, “necessariamente” não pode ter sido derrotado. Já foi justificado nas alternativas b e c que é sim possível se classificar mesmo com derrota.

e) Se o Brasil não enfrentar o Uruguai, significa que não se classificou para a semifinal. A única maneira de o Brasil não se classificar para a semifinal é sendo derrotado pela Argentina, pois o enunciado afirma que nos casos de vitória ou empate, ele obrigatoriamente se classifica.

Podemos observar que nesse problema, existem expressões e palavras chave que podem causar dúvidas cabíveis com relação ao significado das alternativas. A frase: “Independentemente dos outros resultados”, poderá passar despercebida facilmente, e dessa maneira, a alternativa b poderia ser considerada verdadeira por alguns alunos. A palavra “Necessariamente” aparece duas vezes nas alternativas. Essa palavra tem papel fundamental nas alternativas, pois se não for interpretada no sentido de “obrigatoriedade”, pode levar também a uma resposta errada.

Nesse problema, esperamos que muitas discussões sejam geradas, visto que estaremos tratando de um tema bastante popular na vida de muitos brasileiros, que é o futebol. Como existe uma rivalidade futebolística entre as seleções do Brasil e Argentina, acredito que os estudantes fugirão um pouco das informações que o problema traz em seu enunciado, partindo para deduções espontâneas, e portanto não obedecendo necessariamente às premissas do problema para chegar à conclusão com um argumento válido.

3) Sabe-se que não é verdade que Bruno cometeu um crime e Fernando fugiu. Mas sabe-se que Fernando fugiu, logo conclui-se que é verdade que Bruno ______________________________.

Quadro 3: Problema 3 – Atividade 1

Através da análise do enunciado do problema, podemos extrair como informação principal que duas situações não podem ocorrer ao mesmo tempo, isto é, Bruno cometer um crime e Fernando fugir. Entretanto, o enunciado afirma que Fernando fugiu, mas se Fernando fugiu, podemos concluir que Bruno não cometeu um crime. Dessa forma, a resposta correta seria que “Bruno não cometeu um crime”.

Nesse problema aparecem as expressões “não” e “e”, que deixam evidente que uma situação não pode ocorrer ao mesmo tempo em que a outra acontece. Como vimos anteriormente, na lógica-matemática, essas expressões representam conectivos proposicionais, que são representados simbolicamente como “¬” (negação) e “∧” (conjunção) respectivamente e que são muito utilizados em cálculos proposicionais.

Por se tratar de um enunciado pequeno, sem muitas premissas, espera-se que os estudantes não apresentem grandes dificuldades para interpretar e sugerir uma resposta coerente para esse problema.

4) O rapaz afirmou à sua namorada que se casará com ela ou que vai enganá-la eternamente. a) O rapaz não se casará com a namorada, então ... b) O rapaz não vai enganá-la eternamente, então ... c) O rapaz se casará com a namorada, então ... d) O rapaz vai enganá-la eternamente, então ...

Quadro 4: Problema 4 – Atividade 1

Podemos observar que o enunciado afirma que, entre duas situações, uma "ou" outra acontecerá, logo, podemos concluir que se uma não ocorrer, a outra obrigatoriamente acontecerá.

a) Como nessa alternativa afirma-se que o rapaz não se casará, então obrigatoriamente ele enganará a namorada eternamente.

b) Nessa alternativa, o rapaz afirma que não vai enganar a namorada eternamente, logo ele obrigatoriamente se casará com ela.

Analisando o enunciado dos itens c) e d) do problema da perspectiva da Lógica Formal, podemos observar que o conectivo "ou" não garante exclusividade das proposições, muito embora essa conclusão possa facilmente acontecer na linguagem comum. Nos itens a) e b), a resposta não seria influenciada pela interpretação. Dessa forma, para solucionar os itens c) e d), teremos que considerar a "Disjunção" simples e não a disjunção exclusiva.

> Quando duas proposições simples são ligadas pelo conectivo ***ou***, a proposição composta resultante é a DISJUNÇÃO das proposições simples iniciais. A partícula ***ou***, na linguagem natural, pode traduzir tanto a ideia de possibilidades mutuamente exclusivas (ou ocorre isso, ou ocorre aquilo), como a de que pelo menos uma das hipóteses ocorre. Por exemplo, "Irei ao cinema ou ao teatro" traduz uma ideia de exclusão, enquanto que em "Amanhã choverá ou fará frio" o que se pretende garantir é a ocorrência de pelo menos um dos fenômenos, sendo possível que ambos ocorram. Na Lógica Formal, no entanto, o conectivo ***ou*** é sempre usado com o sentido não exclusivo. (CUNHA; MACHADO, 2008, p.54-55, grifo do autor)

c) Como mencionado acima, o "ou" do enunciado não garante que, se uma situação acontecer, a outra também não possa acontecer. Podemos concluir então, que o rapaz poderá ou não enganar a sua namorada eternamente.

d) Com a mesma forma de pensar do item c), podemos concluir que o rapaz poderá ou não casar com a sua namorada.

Nesse problema somos apresentados a outras duas expressões, "ou" e "então". Como vimos no capítulo 2, na Lógica Matemática também representam conectivos sentenciais bastante importantes, e que simbolicamente são representados por "$\vee$" (disjunção) e "$\rightarrow$" (implicação).

Acredito que os estudantes apresentarão uma maior dificuldade para resolver os itens c e d desse problema, procurando resolver de forma semelhante aos dois itens anteriores. Uma possível justificativa para isso é que pode existir uma falta de familiaridade com a distinção lógica entre o "ou" e o "ou exclusivo". Além disso, o uso do "ou" na linguagem corrente é muitas vezes interpretado com o significado lógico de "ou exclusivo".

Portanto, não se espera que os estudantes consigam resolver os problemas c e d da forma imaginada já na primeira tentativa de resolução, mas que, ao se discutir a ambiguidade na interpretação do significado de "ou", os alunos percebam a necessidade lógica desta distinção.

3.2 ATIVIDADE 2

1) Ana, Bia e Clara têm, cada uma delas, um único animal de estimação. Sabe-se que: - esses animais são um mico, um gato e um cachorro; - Ana não é dona do gato; - o mico pertence à Clara. De acordo com essas informações, pode-se afirmar que: a) Clara é dona do gato; b) Bia é dona do mico; c) Bia é dona do cachorro; d) Ana é dona do gato; e) Ana é dona do cachorro.

Quadro 5: Problema 1 – Atividade 2

A resposta correta para o problema acima é alternativa "e" e uma possibilidade de resolução seria:

Afirma-se no enunciado que Ana não é dona do gato e que o mico pertence à Clara, dessa forma resta o cachorro para ser o animal de estimação de Ana. E conclui-se que o gato pertence à Bia.

Como esse problema é relativamente simples, acredito que a maioria dos alunos acertará o mesmo.

2) Há cinco objetos alinhados numa estante: um violino, um grampeador, um porta-retrato, um relógio e um livro. Conhecemos as seguintes informações quanto a ordem dos objetos:

- O grampeador está entre o livro e o relógio.
- O violino não é o primeiro objeto e o relógio não é o último.
- O porta-retrato está separado do relógio por dois outros objetos.

Qual a posição do violino?

a) Segunda posição
b) Terceira posição
c) Quarta posição
d) Quinta posição
e) Sexta posição

Quadro 6: Problema 2 – Atividade 2

A resposta correta para o problema acima é a alternativa “d”. Buscando facilitar a resolução do problema, identificaremos cada objeto pela sua letra inicial.

1º A primeira informação a que devemos atentar é que, como temos cinco objetos diferentes, teremos cinco posições que cada um deles poderá ocupar.

2º Quando é afirmado que o grampeador está entre o livro e o relógio, conclui-se que esses três objetos estão em sequência, porém com duas possibilidades diferentes:

L - G - R ou R - G - L

Esses cinco objetos podem ocupar diferentes posições:

i) ___ - ___ - L - G – R

ii) ___ - ___ - R - G - L

iii) ___ - L - G - R - ___

iv) ___ - R - G - L - ___

v) L – G – R - ___ - ___

vi) R – G – L - ___ - ___

3º A terceira informação do enunciado, diz que o porta-retrato está separado do relógio por dois objetos, logo podemos descartar as possibilidades (ii) e (v).

4º A segunda informação do enunciado nos diz que o relógio não é o último objeto. Dessa forma, podemos descartar a possibilidade (i).

5º Também da segunda informação, sabemos que o violino não é o primeiro objeto, então ficamos com as seguintes possibilidades para os itens iii, iv e vi:

iii) P - L - G - R - V

iv) P - R - G - L – V (não pode ser essa possibilidade, pois o porta-retrato está separado do relógio por apenas um objeto).

vi) R - G - L - V - P ou R – G - L - P - V (não pode ser a primeira possibilidade do item vi), pois o porta-retrato está separado do relógio por três objetos).

Ficamos então com duas possibilidades de ordenamento para os objetos na estante, a saber:

iii) P - L - G - R - V

vi) R - G - L - P - V

Ambos os ordenamentos acima obedecem ao que o enunciado expõe e, em ambos, o violino encontra-se na quinta posição.

Para esse problema, além de uma simplificação dos nomes dos objetos em letras que os representem, possibilitando assim sintetizar o enunciado para resolver o problema, espera-se também que os alunos analisem as possíveis combinações de posições em que os objetos podem estar de acordo com as informações do enunciado, excluindo combinações que não obedecem a todas as afirmações.

3) Sabe-se que existem pessoas desonestas e que existem corruptos. Se todos os corruptos são desonestos, podemos concluir que: a) Quem não é corrupto, é honesto. b) Existem corruptos honestos. c) Alguns honestos podem ser corruptos. d) Existem mais corruptos do que desonestos. e) Existem desonestos que são corruptos.

Quadro 7: Problema 3 – Atividade 2

A alternativa que representa a resposta correta do problema acima é a representada pela letra “e” e uma possibilidade de resolução é a seguinte.

Buscando desenvolver a questão através de conjuntos, podemos separar o enunciado em dois conjuntos. O conjunto das pessoas desonestas (D) e o conjunto das pessoas corruptas (C).

Como o enunciado afirma que todos os corruptos são desonestos, podemos expressar essa informação através de Diagrama de Venn da seguinte forma:

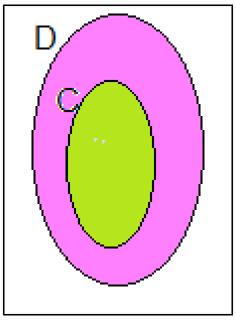


Diagrama 2: "Todos os corruptos são desonestos"

Com base na visualização do diagrama acima, podemos analisar as alternativas:

a) Não podemos afirmar que quem não é corrupto é honesto, pois não sabemos se o conjunto de corruptos é igual ao de desonestos. Dessa forma, podem existir pessoas que não são corruptas, porém são desonestas.

b) Pelo enunciado essa possibilidade já é descartada, pois sabemos que todos os corruptos são desonestos, logo, não existe corrupto honesto.

c) É falso afirmar que alguns honestos são corruptos, pois todos os corruptos são desonestos.

d) Não é possível afirmar que existem mais corruptos do que desonestos. Como todos os corruptos são desonestos, o máximo que poderia acontecer é o número de corruptos ser igual ao número de desonestos, mas nunca maior.

e) Podemos afirmar que existem desonestos que são corruptos, pois como podemos observar no diagrama, o conjunto de pessoas corruptas está inserido no conjunto de pessoas desonestas e o enunciado afirma que existem pessoas corruptas.

Espera-se que, na resolução desse problema, algum tipo de abordagem de resolução envolvendo o conhecimento prévio sobre conjuntos e seus conteúdos associados (continência, união e intersecção de conjuntos) seja utilizado. Pois, como menciona Haack “algumas teorias matemáticas, especialmente a teoria dos conjuntos, têm aplicação muito geral, e parecem ter fortes afinidades com a lógica, [...]” (2002, p. 31)

4) Se Guilherme disse a verdade, Gabriela e Lucas mentiram. Se Lucas mentiu, Bruna falou a verdade. Se Bruna falou a verdade, Maria está dormindo. Ora, Maria não está dormindo. Logo: a) Guilherme e Gabriela disseram a verdade. b) Lucas e Bruna mentiram. c) Lucas mentiu ou Bruna disse a verdade. d) Lucas e Gabriela mentiram. e) Guilherme e Bruna mentiram.

Quadro 8: Problema 4 – Atividade 2

A alternativa “e” é a solução para o problema acima e podemos resolvê-lo como sugerido abaixo:

Reescrevendo o que o enunciado dia temos:

Se Guilherme disse a verdade, então Gabriela e Lucas mentiram;

Se Lucas mentiu, então Bruna falou a verdade;

Se Bruna falou a verdade, então Maria está dormindo;

Maria não está dormindo, então ...

Como Maria não está dormindo, podemos concluir que <u>Bruna mentiu</u>, pois se Bruna tivesse dito a verdade, Maria estaria dormindo. Se Bruna mentiu, <u>então Lucas falou a verdade</u>, pois se Lucas tivesse mentido, Bruna teria falado a verdade. Se Lucas falou a verdade, <u>então Guilherme mentiu</u>, pois se Guilherme tivesse dito a verdade, Lucas teria mentido.

Dessa forma, com base na análise do enunciado, somente a alternativa “e” está correta.

No Cálculo Proposicional, a contraposição pode ser definida formalmente como segue.

Princípio da Contrapositividade: Para quaisquer duas sentenças P e Q tem-se $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

Quadro 9: Definição do Princípio da Contrapositividade

No problema de número 4 acima, podemos observar que através da contraposição conseguimos deduzir sentenças equivalentes às que o enunciado traz, facilitando assim a dedução da conclusão. Nesse caso chegamos a sequências equivalentes por contraposição.

5) Em um dado momento, apenas cinco pessoas - Alceste, Benjamim, Casimiro, Dora e Elza - se encontram em uma fila formada no balcão de atendimento ao público de uma Unidade do Tribunal Regional do Trabalho. Sabe-se que: - Alceste ocupa o primeiro lugar na fila; - Casimiro está na posição intermediária entre Alceste e Benjamim; - Dora encontra-se a frente de Benjamim, enquanto que Elza está imediatamente atrás de Casimiro. Nessas condições, é correto afirmar que, nesse momento: a) Casimiro ocupa o segundo lugar na fila. b) Dora é a segunda pessoa na fila. c) Dora ocupa o penúltimo lugar na fila. d) Elza se encontra no segundo lugar da fila. e) Elza está na posição intermediária da fila

Quadro 10: Problema 5 – Atividade 2

A alternativa “b” é a resposta do problema acima. E uma possibilidade de resolução do problema seria:

Buscando facilitar a visualização do que está escrito no enunciado, identificaremos cada pessoa pela letra inicial do seu nome, A, B, C, D e E respectivamente. Como A está no primeiro lugar da fila e C está na posição intermediária entre A e B, temos duas possibilidades:

i) A - ___ - C - ___ - B

ii) A - C - B - ___ - ___

Como D está na frente de B, já podemos descartar a possibilidade (ii). Em (i), D pode estar tanto na segunda quanto na quarta posição, e mesmo assim estaria na frente de B. Como E deve estar imediatamente atrás de C, a única possibilidade para que isso aconteça é quando E ocupar a quarta posição, logo resta a segunda posição para D. Então ficamos com a seguinte estrutura na fila:

A - D - C - E – B

Dessa forma, a única alternativa possível para satisfazer as premissas do problema é a letra “b”.

Podemos observar que o problema número 2 é bastante semelhante ao problema 5 em termos de estratégia de resolução.

Entretanto, enquanto acreditamos que o problema número 2 pode gerar uma melhor visualização dos objetos (por se tratarem de objetos comuns), sendo mais próximo da realidade da maioria, o problema número 5 propõe nomes não tão comuns para as pessoas. Espera-se encontrar resultados onde, para ambos os problemas, os estudantes tenham procurado resolver de forma semelhante. Também esperamos, com a utilização de conceitos combinatórios, encontrar construções de resolução com a utilização das letras iniciais de cada objeto (citados no problema 2) ou letras iniciais dos nomes (citados no problema 5) mostrando que estão sendo utilizadas formas mais sintéticas para resolver os problemas.

Apesar de, na construção da atividade, termos procurado problemas onde não fosse necessário um conhecimento prévio sobre lógica-matemática, é possível observar que na maioria dos problemas é apresentada uma abordagem que pode possibilitar a introdução da lógica proposicional, própria da lógica-matemática, na sala de aula.

Com relação a aplicação das duas atividades propostas, dois fatos importantes a serem analisados são a participação dos alunos e a receptividade dos mesmos ao que está sendo proposto. Espera-se que os alunos fiquem curiosos, pois acredito que, a maioria deles ainda não teve a oportunidade de trabalhar com esse tipo de problemas, visto que o conteúdo que escolhemos para a construção da atividade não é comumente trabalhado em sala de aula. Além disso, espera-se que aja interesse na resolução dos problemas, pois buscou-se trabalhar com enunciados interessantes, próximos da realidade das pessoas, permitindo o uso da intuição na resolução. Também acredita-se que, por não envolverem métodos mecânicos, os problemas possam ser considerados desafios por parte dos estudantes, favorecendo assim o empenho em resolver os problemas.

4. RELATO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Os relatos e análises que serão descritos na sequência deste capítulo serão divididos de acordo com a turma e o número de encontro por turma, ficando aqui registradas as situações mais marcantes durante o desenvolvimento dos problemas propostos.

As práticas foram realizadas em duas turmas distintas, ambas do segundo ano do Ensino Médio EJA de uma escola da Rede Estadual de Ensino de Porto Alegre. Para garantir o anonimato dos estudantes participantes da atividade, não serão mencionados os seus nomes em nenhum diálogo descrito.

Na escola onde as práticas foram realizadas, os alunos do Ensino Médio EJA possuem três períodos semanais da disciplina de Matemática. Cada período possui duração de 40 minutos. As aulas nessa escola começam às 19h e terminam às 22h30min, com um intervalo de 10 minutos entre o segundo e terceiro períodos. Foi a terceira vez em que tive a oportunidade de realizar atividades nessa escola, que sempre se mostrou aberta a receber estagiários, e nessa etapa final também se mostrou bastante receptiva com relação à atividade que foi proposta.

4.1 Primeiro encontro na turma 202

O primeiro encontro na turma 202 foi realizado em uma segunda-feira, nos dois últimos períodos do turno noturno, ou seja, das 21h10min até às 22h30min. Nessa aula estavam presentes 15 alunos, de um total de 21 alunos constantes na folha de chamada.

Nesse encontro a professora regente falou aos alunos sobre a atividade, descreveu a proposta e demonstrou muito interesse pela atividade para os alunos, definindo a atividade como uma “experiência de vida”. Num segundo momento, apresentei-me aos mesmos e expliquei como funcionaria o primeiro encontro.

A turma era bastante heterogênea. Havia vários alunos com idades entre 18 e 25 anos, mas também alunos com mais de 50 anos. Comentei que a maioria dos problemas que iríamos trabalhar haviam sido retirados de provas de concursos e apostilas preparatórias para concursos. Perguntei se já haviam visto aquele tipo de problema antes. Em geral eles balançaram a cabeça dizendo que não. Brinquei com eles que não precisavam se assustar, e que não havia números nos problemas. Uma aluna perguntou: - *É matemática sem número?* Então eu expliquei que, nesse caso, era uma parte da matemática envolvendo alguns tipos de problemas específicos, e que não teríamos necessariamente que resolver cálculos com números como estávamos acostumados. Mas que, da mesma forma que analisamos um problema de um conteúdo específico que envolve números, nesse caso também teríamos que interpretá-los para chegar na resposta.

Quando comentei que aqueles problemas faziam parte da Matemática, um aluno fez a seguinte pergunta: - *É lógica né?* Então eu confirmei que sim, que se tratava de problemas de lógica matemática.

Os alunos se mostraram bastante interessados e curiosos com relação à atividade, e assim que pedi que os mesmos lessem o primeiro problema, eles procuraram realizar essa atividade.

Quando pedi que descrevessem a situação do primeiro problema, houve um momento de silêncio na sala de aula. Então reforcei a pergunta, questionando o que poderíamos extrair do enunciado e alguns comentários surgiram. Por exemplo: *"A pichação do muro"*, *"Prende todo mundo"*. Podemos perceber nesse primeiro momento que um dos estudantes expressa um comentário pessoal, quando diz para prender todo mundo, não utilizando o que está no enunciado para responder as perguntas do primeiro problema. Por outro lado, outro estudante levantou o tópico principal do problema, que foi a pichação do muro.

Após esse primeiro momento, perguntei aos estudantes se não seria possível analisar o que o enunciado trazia, buscando uma forma diferente de organizar o mesmo e se não poderíamos juntar as informações para encontrar a solução. Então uma aluna sugeriu: "Primeiro destacar quem mentiu", então perguntei se já sabíamos quem mentiu, e a mesma afirmou "Não, a gente tem que procurar". Então perguntei como poderíamos juntar as informações, e nesse momento os alunos começaram a ler as afirmações que o enunciado continha para que eu fizesse um pequeno resumo no quadro. Quando foi citado que o policial afirmou que apenas um dos quatro possíveis pichadores havia mentido, um aluno disse *“Que foi o Pedro”*, então questionei se o policial disse que foi o Pedro e o mesmo aluno disse que não, corrigindo a afirmação equivocada mencionada anteriormente. A partir do momento que havíamos feito um pequeno resumo no quadro, várias afirmações começaram a ser mencionadas, sem uma análise aprofundada de tudo que o enunciado continha e sim através de análises individuais das premissas. Alguns disseram “Acho que é o Jorge”, então expliquei que não poderíamos “achar”, precisávamos ter certeza de quem havia mentido e quem havia pichado o muro. Demorou até que os estudantes percebessem que se o enunciado afirmava que apenas um mentia, então os outros três estavam dizendo a verdade. Entretanto após algumas discussões e análises do que o enunciado propunha, conseguimos chegar juntos nas respostas. Apesar da dificuldade inicial apresentada pela turma, no final desse problema, os estudantes demonstraram concordar com o raciocínio realizado para solucionar o problema.

Quando terminamos, um dos alunos fez a seguinte pergunta: *“Num concurso tu fazer essa questão sozinho, tu leva quanto tempo?”* Então eu disse que não levava tanto tempo assim, que era questão de prática. Perguntei se eles conheciam aquele tipo de problema, e nenhum deles se mostrou conhecedor.

Na resolução do problema 2, surgiu o seguinte diálogo, em que um dos alunos comentou

Alunos A: - Essa é bem mais fácil que a outra.

Pesquisadora: - É mais fácil?

Aluno A: - Se eu acertei, é!

Pesquisadora: - Só por que ela é mais curta?

Aluno A: - Não. Porque se tu pensar já na hora de montar aí a pergunta, tu lê a pergunta e já sabe.

Pesquisadora: - Que alternativa tu marcou?

Aluno A: - A última.

Aluna B: - É a mais lógica né!

Apesar de esse aluno ter acertado a resposta, propus que analisássemos o problema e as outras alternativas para que verificássemos se era a alternativa “e” a correta. Quando li a alternativa “b”, alguns alunos disseram que aquela resposta poderia ser a correta também. Após algumas considerações dos mesmos, questionei se não haveria a possibilidade de o Brasil se classificar para a semifinal mesmo perdendo contra a Argentina, e os alunos que responderam ao meu questionamento disseram que não. Então salientei sobre os resultados de jogos paralelos, se não poderiam influenciar em um resultado de derrota do Brasil para a Argentina e mesmo assim o Brasil se classifica para a semifinal e questionei: *“Vocês não acham então que ele tem chance de perder e mesmo assim ir pra semifinal?”* e um aluno disse que poderia sim influenciar. Então reforcei a leitura do item “b” dando ênfase na palavra “necessariamente”, então um aluno disse: *“Necessariamente descarta a possibilidade de ele ter perdido”.* Nesse ponto, foi possível observar que aquele aluno especificamente havia compreendido o significado daquela palavra tão importante para diferenciar se a alternativa era correta ou não. Como as alternativas “c” e “d” se assemelham à alternativa “b”, os alunos descartaram elas assim que realizei a leitura em voz alta das mesmas. E, após a leitura da alternativa “e”, chegamos a conclusão que a mesma estava de acordo com o que o enunciado do problema afirmava. Na sequência, dois alunos apresentaram as seguintes opiniões:

Aluno C: - “Oh” “sora” é semifinal, quarta de final, final e “mata-mata”, “sora”. Não depende do jogo dos outros.

Alunos D: - Azar do jogo dos outros!

Alunos C: - É isso aí! Não tem “sora”!

Pesquisadora: Mas e se esse campeonato não tiver considerando quarta de final como “mata-mata”?

Alunos D: - É assim “sora”!

Aluno C: - Então como é que vai ser?

Pesquisadora: De repente até a quarta de final é por pontuação. Então pegamos os melhores e a partir da semifinal é “mata-mata”. Pode ser!

Aluno C: - É o único!

Pesquisadora: - Na Copa, não tem uma parte que é por pontuação?

Aluno B: - É a partir de um ponto “sora”. É até as oitava ”sora”!

Aluno E: - É que a questão foi feita não pensando nisso!

Pesquisadora: - Não!

Alunos C: - É claro que é “sora”!

Pesquisadora: - Eu entendo vocês. Eu entendo que em geral nos campeonatos, as quartas de final é “mata-mata”. A Copa, quartas de final é “mata-mata”?

Alunos D: A Copa é “mata-mata” direto.

Pesquisadora: Não, não é “mata-mata” direto! Começa com grupos de quatro times. Não vem me enganar, eu entendo um pouquinho!

(Risos na sala de aula)

Através do diálogo acima, é possível verificar que os alunos trazem para a sala de aula, o que estão acostumados a ver fora dela. Buscam relacionar situações conhecidas de campeonatos de futebol com o enunciado do problema, criticando o mesmo. Deixando de levar em consideração que o enunciado traz uma situação fictícia e que o campeonato sugerido no mesmo, ao afirmar “independente dos outros resultados”, garante que aquele campeonato, pelo menos até aquele ponto está sendo considerado por pontuação.

Apesar das indagações feitas por um grupo de alunos ao final da resolução do problema 2, e também da crítica de um aluno quanto a formulação do problema, aparentemente os estudantes se mostraram satisfeitos com a resposta encontrada, até mesmo pelo fato de um grupo de alunos inicialmente ter encontrado essa resposta. Como previmos no capítulo anterior, por se tratar de um enunciado com um tema bastante popular fora da escola, observou-se um envolvimento e uma participação bastante grande dos alunos.

No problema 3, houve uma dificuldade com relação à interpretação do enunciado do problema. No início, os estudantes não leram a sentença “Sabe-se que não é verdade que Bruno cometeu um crime e Fernando fugiu” como uma frase inteira, então várias respostas aleatórias surgiram.

Aluno E: - Bom...

Pesquisadora: - Diga!

Aluno E: - Ele já sabe que Bruno é inocente. Isso é fato, tá ali.

Pesquisadora: - Tu sabe que o Bruno é inocente?

Aluno E: - Sim. Já se sabe que Bruno não cometeu o crime.

Pesquisadora: - Como é que tu chegou a essa conclusão?

Aluno E: - Por que tá escrito ali.

(Risos na sala)

Pesquisadora: - Onde tá escrito que Bruno não cometeu o crime?

Aluno E: - Sabe-se que não é verdade que Bruno cometeu um crime. Fala que não é verdade, se não é verdade, é mentira.

Pesquisadora: - Tá. Olha só. Ok. Eu entendi teu raciocínio. Mas tu não leu a frase inteira.

Aluno E: - Sim. E Fernando fugiu. Não foi?

Aluno F: - Acabou a frase.

Aluno E: - Cometeu “um” crime.

Pesquisadora: - Eu vou ler: Sabe-se que não é verdade que Bruno cometeu um crime e Fernando fugiu. As duas coisas.

Aluno F: - Então tem uma ambiguidade aí.

Pesquisadora: - Ambiguidade? Tá faltando vírgula?

Aluno E: - Ah, então o Bruno disse que Fernando fugiu.

Pesquisadora: - Bruno disse que Fernando fugiu?

[...]

Aluna G : - Mas esse “não é verdade” é ambiguidade.

Pesquisadora: - Ambiguidade?

Aluno F: - Não sabe o que é ambiguidade “sora”? Sora!

Aluna G: - É matemática misturado com português.

Aluno E: - É uma frase com duplo sentido.

Pesquisadora: - Pois é pessoal, eu não sei. É interpretação.

[...]

Aluno E: - Tá se contradizendo.

Após a interação descrita no diálogo acima, os alunos continuavam confusos e pediram que eu fizesse o resumo no quadro. Então, com a ajuda deles, fiz um pequeno resumo. Quando perguntei o que significava o “e” no meio da frase, um aluno afirmou: *“Que as duas coisas não são verdade. Não estavam juntas. Não aconteceram na mesma hora”*. Após essa afirmação, conclui com os mesmos que elas não aconteceram ao mesmo tempo, e a maioria concordou.

Quando conseguimos chegar à solução, o mesmo aluno que, no início do desenvolvimento do problema, apresentou sua opinião lendo a primeira frase do enunciado separadamente, retomou a leitura de forma separada. Quando fui ler novamente a frase e explicar ao estudante, outro colega mencionou: *“É que tem um “e” lá”*. Procurando auxiliar o colega a compreender o enunciado. Então, o colega que estava com dúvidas ainda disse: “Então tu tá dizendo que as duas coisas não vão acontecer ao mesmo tempo? É só isso?”. Nesse momento concordei com o estudante, explicando que não poderíamos ler só um pedaço da frase, a não ser que tivéssemos uma vírgula separando elas. Quando perguntei o que eles acharam do problema, o aluno em questão, que iniciou toda a discussão, afirmou: *“Eu gostei sora”.*

Esse problema contrariou um pouco o que havíamos previsto para o mesmo, pois acreditávamos que, por se tratar de um enunciado curto e relativamente simples, os estudantes não apresentariam grandes dificuldades de resolução, o que se mostrou diferente após termos aplicado o problema em sala de aula e percebido a dificuldade em ler de forma clara o enunciado.

No problema 4, os alunos não apresentaram muitas dificuldades para solucionar os itens a) e b), mas o que mais me chamou atenção, foi que por duas vezes, um estudante afirmou: *Ou é um, ou é outro.* Isso confirmou as expectativas que tínhamos com relação ao desenvolvimento do problema. Aqui podemos observar bem o fato de interpretação do conectivo “ou” como sendo o “ou” exclusivo, o que na Lógica Formal não é uma conclusão válida. Porém, como nos itens a) e b) estamos afirmando que uma das duas situações não ocorreu, essa distinção não se aplica e em geral os raciocínios foram corretos. Na resolução dos itens c) e d) houve maior confusão, pois os estudantes interpretaram o “ou” do enunciado como exclusivo, não permitindo chegar à conclusão correta.

Quando questionei no item c), se o rapaz, mesmo casando com a namorada, poderia ou não enganar a mesma, mais uma vez um dos estudantes salientou o fato de “ser ou um, ou outro”. E mais uma vez observei o uso da linguagem comum para justificar a resposta exclusiva. Cabe salientar que essa é a ferramenta que eles têm, pois como esperado, eles não possuem conhecimento de Lógica Formal.

Cerca de 10 minutos após o sinal tocar para o último período, alguns alunos já começaram a falar em ir embora. Mas todos ficaram até o momento que encerramos o último problema, embora, pela pressa que apresentavam em sair da sala, percebi que não coseguimos chegar a um acordo com a maioria com relação as respostas das letras c e d do problema 4.

Após todos os alunos saírem da sala, um comentário da professora regente foi o que me chamou mais a atenção naquela noite. Ela virou para mim e disse: *- O que mais me impressionou foi com a aluna lá do fundo. Ela nunca participa de nenhuma atividade. E hoje ela falou bastante.*

Esse comentário, associado à análise do desenvolvimento da atividade, mostrou que alcançamos parte do que se esperava com relação a aplicação da prática, que era a participação dos alunos.

4.2 Segundo encontro na turma 202

O segundo encontro com a turma 202 ocorreu na terça-feira da mesma semana do primeiro encontro, no quinto período do dia.

Quando cheguei à sala de aula com a professora regente, dois alunos estavam prontos para ir embora. Depois de uma brincadeira com eles, dizendo que eles iriam matar justamente a minha aula, os dois resolveram ficar e participar da atividade.

Nesse encontro, conforme previsto, foi distribuída aos alunos a Atividade 2 e solicitado que eles procurassem resolver os problemas.

Por se tratar do último período, assim como a experiência no encontro anterior, pude perceber que alguns alunos já queriam ir embora e não davam a devida atenção para a atividade. Por outro lado, outros alunos absorveram aquela atividade como forma de desafio e procuravam resolver os problemas como se o tempo para terminar não fosse um problema.

Nesse encontro a professora regente, procurando me deixar mais a vontade com a turma, deixou-me sozinha com os alunos, o que não influenciou no comportamento dos mesmos, pois em geral, mesmo que em alguns casos houvesse desinteresse, os alunos ficaram resolvendo os problemas ou marcaram alternativas aleatórias para terminar a atividade.

Cabe salientar que alguns alunos que estavam nessa aula não haviam participado do encontro anterior e que nesse segundo encontro tínhamos 10 alunos presentes em aula. Também é importante mencionar que foi permitido aos alunos ficarem sentados com as suas duplas para realização da proposta, assim evitaríamos confusão, troca-troca de cadeiras e economizaríamos um tempo precioso.

Os resultados obtidos pela turma 202 aparecem no gráfico abaixo, que apresenta o número de acertos para cada uma das cinco questões.

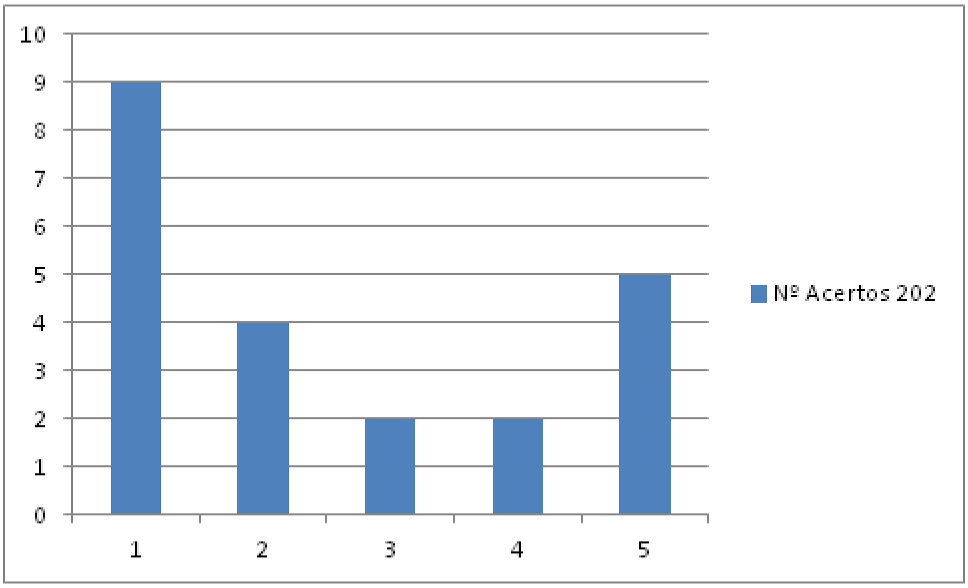


Gráfico 1: Número de acertos por problema (turma 202)

Supondo que cada aluno tivesse escolhido uma resposta aleatoriamente, o número esperado de respostas corretas seria dois (razão do número de alunos pelo número de questões). Com base nisso, podemos intuir que a maioria dos alunos compreendeu bem o que foi problematizado no problema 1. Nessa primeira análise, nada podemos afirmar com relação aos problemas 3 e 4. Com relação aos problemas 2 e 5, como já mencionado anteriormente, apesar de o número de acertos não estar muito acima da média, as duas questões são muito semelhantes, o que sugere que o resultado acima da média não seja um acaso.

No gráfico a seguir, procuramos ser mais precisos e tabulamos os tipos de acerto de três formas distintas: acertos com argumentos completos, que justificam a escolha da resposta correta, acertos com indícios de argumentos e acertos sem argumento nenhum.

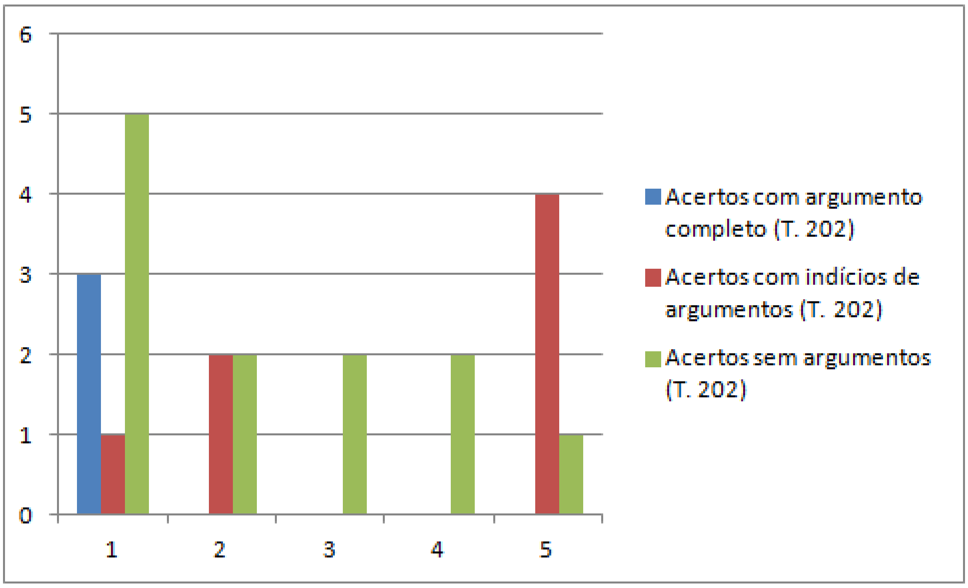
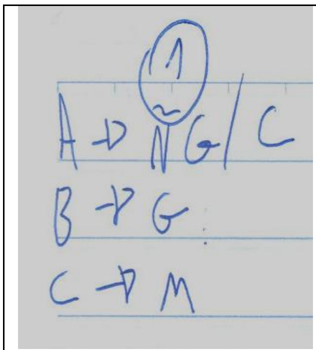
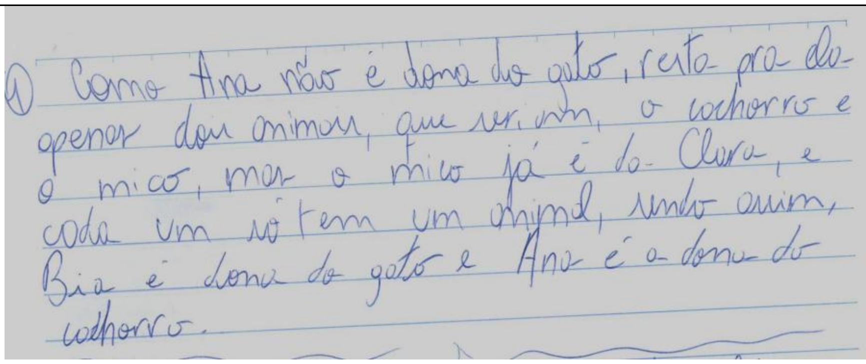


Gráfico 2: Três análises de acertos (turma 202)

Com base na análise do gráfico acima, reforçamos a pressuposição de nada poder afirmar com relação aos problemas 3 e 4, pois nos dois casos, os acertos obtidos não tiveram nenhum tipo de justificativa para escolha de tal resposta. Também podemos reforçar em parte o que foi sugerido com relação aos problemas 2 e 5. Das quatro respostas certas, duas apresentam indícios de argumentação e no problema 5, de cinco respostas certas, 4 apresentam indícios de argumentos.

Com relação ao problema 1, dois argumentos são bastante interessantes e são apresentados no quadro a seguir:



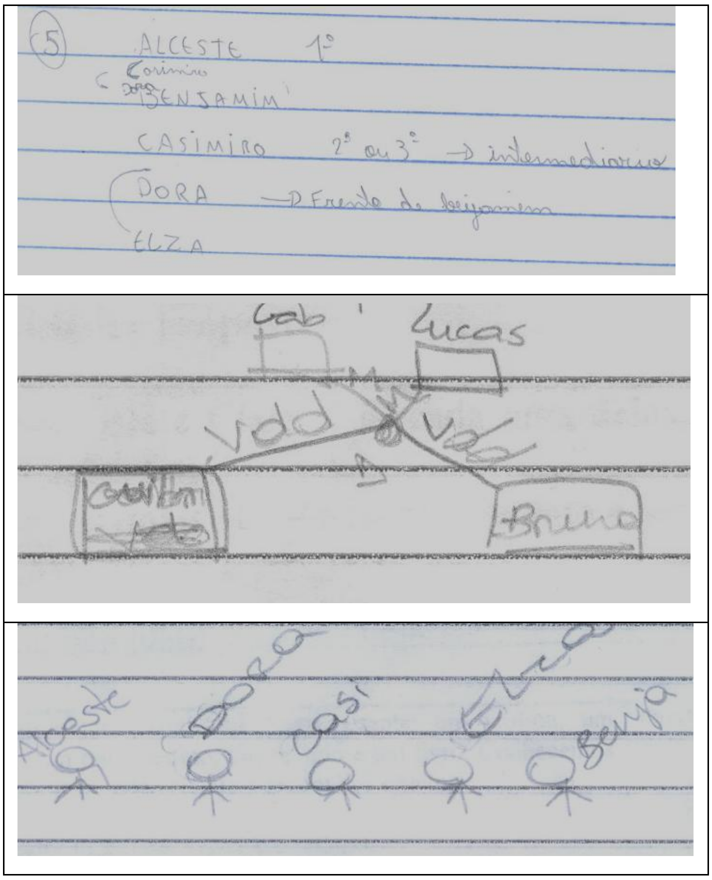


Quadro 11: Acertos com argumentos completos (turma 202)

Podemos verificar que, na imagem do lado esquerdo do quadro acima, o estudante simplifica os nomes do enunciado, reescreve a sentença “Ana não é dona do gato” na forma Ñ G, e conclui que o gato pertence a Bia e que o cachorro pertence a Ana. O estudante demonstra facilidade em trabalhar numa linguagem mais reduzida e abstrata. Já na imagem apresentada no lado direito do quadro acima, podemos verificar que o estudante também apresenta um bom desenvolvimento do raciocínio para resolver o problema, porém em nenhum momento ele realiza simplificações para representar o que compreende do enunciado.

Com relação aos acertos sem argumento, podemos verificar que eles ocorreram nos cinco problemas sugeridos. Nada podemos concluir a respeito dos mesmos, pois poderiam ser chutes, sugestões de outros colegas ou até mesmo resoluções que os estudantes não fizeram na folha de rascunho sugerida.

Alguns acertos apresentaram tentativa de resolução por parte dos estudantes, porém não apresentaram argumentos completos, o que nos impede de concluir se houve compreensão do enunciado. No quadro a seguir, há alguns exemplos de soluções com indícios de argumentos.



Quadro 12: Acertos com indícios de argumento (turma 202)

Da mesma forma que analisamos os tipos de acertos, no gráfico a seguir tabulamos os erros apresentados de duas formas diferentes, sendo elas os erros com indícios de argumento e os erros sem indícios de argumentos.

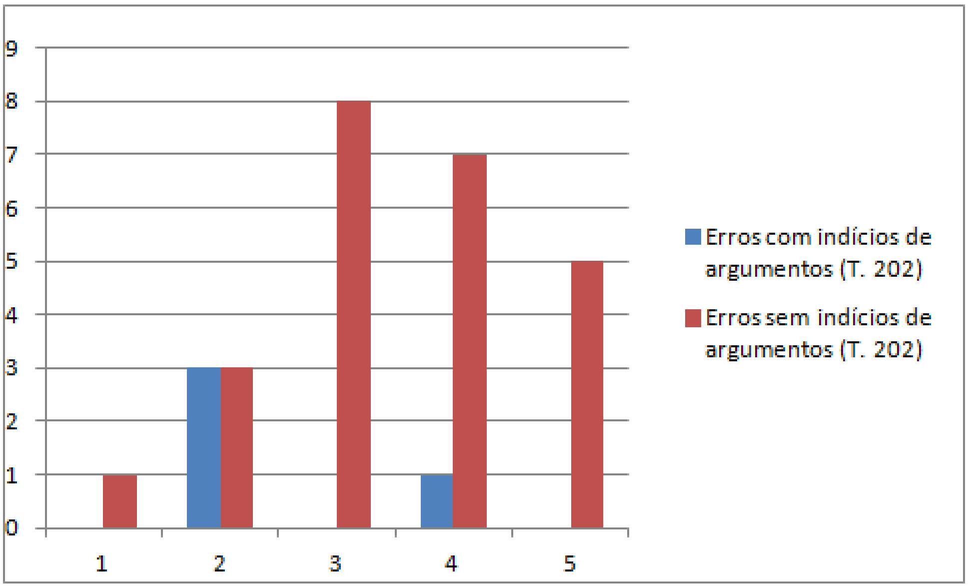
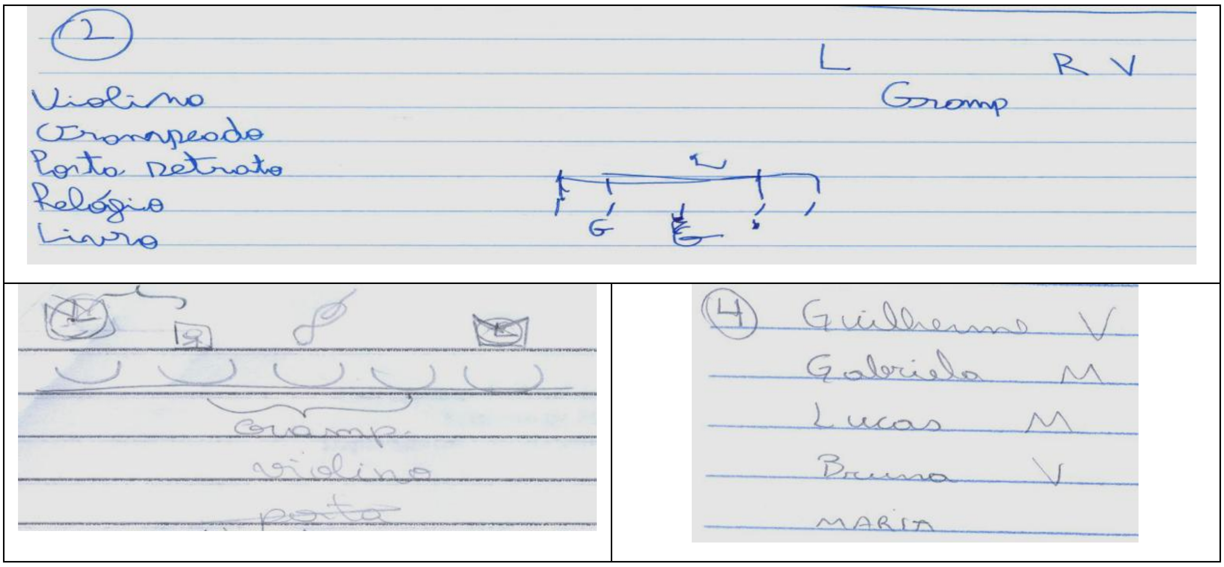


Gráfico 3: Duas análises de erros (turma 202)

Podemos observar que, em todos os problemas, os alunos tiveram erros sem indícios de argumentos, porém nos problemas 3, 4 e 5, o número de erros foi bastante elevado. Talvez eles não entenderam as questões ou não conseguiram resolvê-las. Outra possibilidade é que, como a atividade foi realizada no último período de aula, alguns alunos já estavam sem disposição para resolver os problemas e preferiram chutar alternativas aleatórias.

No quadro a seguir, apresentamos alguns indícios de argumentos dos problemas 2 e 4, que foram os únicos que apresentaram algum indício.



Quadro 13: Erros com indícios de argumentos (turma 202)

4.3 Primeiro encontro na turma 203

O primeiro encontro com a turma 203 ocorreu em uma terça-feira, no terceiro e quarto períodos do turno noturno. Nesse encontro a professora regente havia marcado prova, e, quando chegamos à sala de aula e a mesma comunicou aos alunos que não teria prova naquele dia e que outra atividade seria realizada, os alunos ficaram bem agitados e demonstraram grande alívio. Havia 14 alunos em sala de aula de um total de 18 alunos na folha de chamada.

Apresentei-me e expliquei aos alunos a atividade que pretendia realizar. Na sequência, distribui as folhas com os problemas para que os mesmos pudessem ler o primeiro problema e déssemos andamento ao trabalho.

Com relação a idades, essa turma era mais homogênea que a turma 202. A maior parte dos alunos tinha entre 18 e 25 anos. Poucos com idade superior a 30 anos. Também havia uma aluna com Síndrome de Down, o que me chamou bastante a atenção, pois, apesar de termos uma disciplina no currículo que trata justamente sobre o tema da inclusão da escola, eu ainda não havia tido a oportunidade de estar em uma sala de aula com alunos deficientes.

Os alunos dessa turma, assim como os da turma 202, se mostraram bastantes participativos com relação à atividade. Várias discussões surgiram ao discutirmos os problemas. Na sequência deste trabalho, alguns diálogos serão transcritos e discutidos em detalhe.

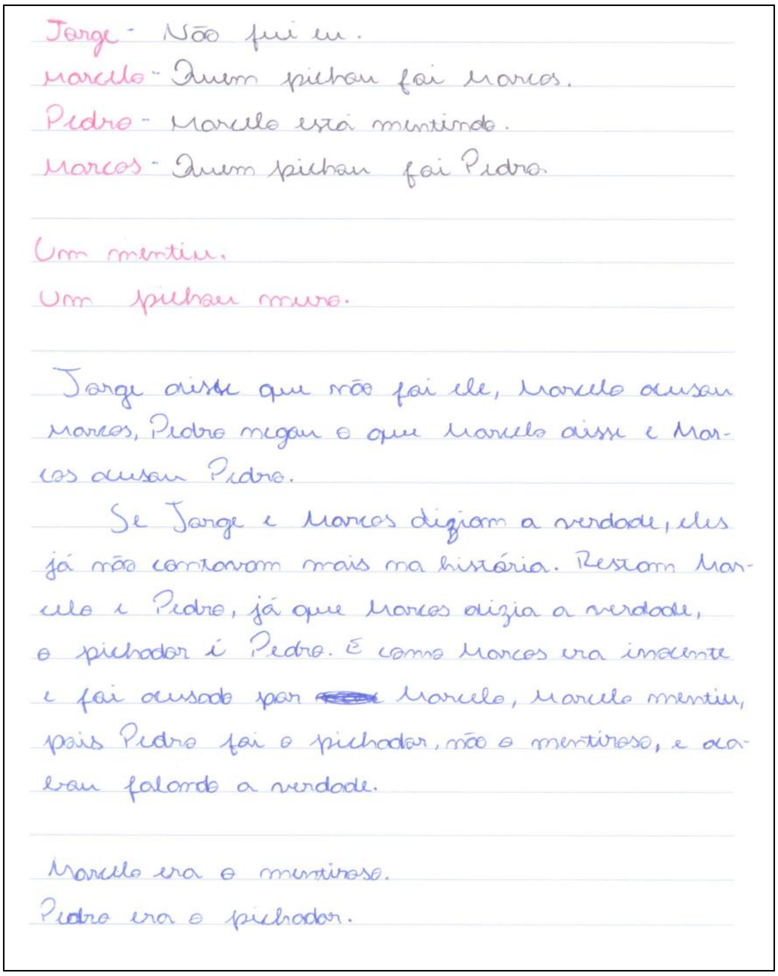
Uma das alunas sugeriu para o primeiro problema que os quatro personagens poderiam ter pichado o muro. Como defesa para sua resposta, propôs argumentos que compunham a sua realidade profissional.

Aluna A: *Por experiência entendeu? Pela minha profissão como vigilante entendeu? Então eu tenho uma tese assim, que vem de fora. Pela minha profissão, quem acusa... Entendeu? Pela minha profissão! Aí na tua lógica já não sei. Quem acusa geralmente tem culpa no cartório.*

Apesar de os argumentos sugeridos pela estudante não estarem de acordo com as premissas que o problema propunha, ela buscou trazer situações que considerava relevantes para de alguma forma resolver o problema. Porém, a mesma aluna, ao afirmar: "*Pela minha profissão, aí na tua lógica já não sei",* deixa evidente que não sabe se dentro da sala de aula aquele raciocínio é válido.

Na sequência, falei à aluna que, no caso em questão, precisávamos seguir as informações contidas no enunciado para chegar à conclusão de quem pichou o muro. E que apenas um dos quatro personagens acusados era o pichador. Após continuarmos a analisar os enunciados, outra aluna disse que mais de uma pessoa poderia ter pichado o muro. Nesse caso, percebo que o enunciado poderia realmente confundir os estudantes, possibilitando que eles concluíssem que mais de uma pessoa poderia ter pichado o muro, porém, na pergunta: "Quem pichou o muro?" fica subentendido que apenas uma pessoa pichou o muro.

Nesse mesmo problema, um dos alunos sugeriu um método diferente de resolução para o primeiro problema, diferente do método de resolução pensado por mim. Para facilitar a visualização da explicação, pedi que o aluno fosse até o quadro e explicasse a todos o seu raciocínio para resolução do problema. Também pedi ao mesmo que escrevesse em uma folha o seu raciocínio para que eu pudesse analisar esse material posteriormente. A explicação do estudante está no quadro a seguir.



Jorge - Não fui eu.
Marcelo - Quem pichou foi Marcos.
Pedro - Marcelo está mentindo.
Marcos - Quem pichou foi Pedro.

Um mentiu.
Um pichou muro.

Jorge disse que não foi ele, Marcelo acusou Marcos, Pedro negou o que Marcelo disse e Marcos acusou Pedro.

Se Jorge e Marcos diziam a verdade, eles já não contavam mais na história. Restam Marcelo e Pedro, já que Marcos dizia a verdade, o pichador é Pedro. E como Marcos era inocente e foi acusado por Marcelo, Marcelo mentiu, pois Pedro foi o pichador, não o mentiroso, e acabou falando a verdade.

Marcelo era o mentiroso.
Pedro era o pichador.

Quadro 14: Resolução de um aluno (turma 203)

Podemos perceber que o estudante chega à conclusão inicial de que Marcelo e Pedro estão se contradizendo, por este motivo afirma que Jorge e Marcos diziam a verdade. E, a partir dessa conclusão, desenvolve um argumento coerente e, com base em um raciocínio por inferência, conseguindo chegar à conclusão correta.

No problema 2, alguns alunos disseram que a alternativa correta era a de letra “e” e outros a letra “b”. Nesse momento uma das alunas justificou a escolha pela alternativa “b”.

Aluna B: - Porque seguinte, se empatar ou vencer, vai dar na mesma. Por que aqui diz assim: Se o Brasil vencer ou empatar o jogo com a Argentina. Se ele vencer ou empatar, igual ele vai.

Aluno C: - Tanto faz, ele vai passar para a semifinal.

Aluna B: - E a “b” diz que enfrentar o Uruguai necessariamente terá vencido ou empatado o jogo com a Argentina.

Nesse momento salientei que eles haviam pulado uma parte do enunciado que dizia: “independentemente dos outros resultados”. Com base nessa frase, outro aluno fez considerações importantes.

Aluno D: Mas sora, se independente dos outros resultados, quer dizer que o Brasil no caso, digamos assim, dependendo dos outros resultados, o Brasil vai passar.

Como uma derrota do Brasil, não garante que ele se classifica, mas sim que ele pode ou não se classificar, mais uma vez repeti o que o enunciado afirmava e questionei se, mesmo com a derrota, o Brasil não teria chance de se classificar.

Aluno C: Não! Porque ele diz só se empatar ou ganhar.

Mais uma vez salientei o que o texto diz: “Independentemente dos outros resultados”.

Aluno C: Então ele vai cair fora!

Aluno D: Então quer dizer que se o Brasil perder, dependendo do resultado, “pode” classificar.

[...]

Aluna E: Mas se perder talvez...

Pesquisadora: Mas se perder talvez?

Aluno C: Cai fora! Ele é eliminado.

Aluna E: Talvez, depende dos pontos. Mas se ele não tiver pontos suficientes, não vai conseguir.

Nesse momento afirmei aos alunos que o Brasil pode ou não se classificar, dessa forma concluímos que a alternativa “b” não era a alternativa correta. Nesse momento vários alunos que haviam sugerido a letra “e” reforçaram a resposta inicial. Da mesma forma que fizemos com a alternativa “b”, descartamos as alternativas “c” e “d” também, pois as mesmas eram bastante semelhantes.

Dúvidas e conclusões semelhantes às geradas pela turma 202 durante a resolução do problema 3, surgiram na turma 203. Mais uma vez, os estudantes leram a primeira frase do problema separadamente, dificultando assim que se chegasse na conclusão. Em um dado momento, após várias respostas “chutadas”, uma aluna afirmou: “De repente, o Bruno tentou matar o Fernando”, e nesse momento toda turma começou a rir. Na sequência procurei explicar que aquele “e” significava que aquelas duas situações não poderiam ocorrer simultaneamente, então, se uma delas estava acontecendo, a outra não poderia ocorrer. Após ler novamente o enunciado, uma das alunas solucionou o problema. Mas mesmo após a conclusão correta da aluna, outras soluções aleatórias surgiram, e mesmo quando expliquei novamente, percebi que alguns estudantes não aceitaram a solução correta.

Para resolver os itens a) e b) do problema quatro, os estudantes não apresentaram maiores dificuldades. Somente com a leitura do enunciado, os estudantes apresentaram as soluções e não houve críticas quanto a essas soluções. Já com relação aos itens c e d, novamente foi possível observar que os estudantes não compreenderam que o “ou” não significava um “ou exclusivo”. A afirmação feita por uma aluna representa bem a busca de situações que possivelmente podem ocorrer na vida comum, mas não estão de acordo com o que o enunciado e afirma. “*Ele tá afirmando que vai casar com ela tá? Ele vai casar com ela! Mas ele também vai enganar ela! Ele vai casar, mas ele vai também trair ela”.* Enquanto que outra aluna afirmou: *“No momento que ele tá dizendo que vai casar e nunca trair, ele já tá enganando ela”.*

Ao final, mais uma vez percebe-se que o nível de dificuldade desse problema foi muito elevado, e que, para solucionar o mesmo, seria necessário que os estudantes apresentassem um conhecimento prévio de Lógica Formal.

Outro ponto que deve ser ressaltado em comparação à turma 202 é que como os encontros com a turma 203 ocorreram no terceiro e quarto períodos, os alunos não tinham pressa para ir embora, ao contrário do que aconteceu na primeira turma onde a prática foi realizada. Trabalhamos com calma e, como terminamos a atividade antes do final dos períodos da disciplina de Matemática, precisei improvisar e entreguei aos alunos o primeiro problema da segunda parte da proposta e pedi que os mesmos resolvessem e me entregassem. A análise de acertos e erros desse problema proposto prematuramente será realizado juntamente aos resultados do segundo encontro.

4.4 Segundo encontro na turma 203

No segundo encontro com a turma 203, a professora permitiu que eu ficasse sozinha com a turma. O encontro ocorreu no terceiro período da quinta-feira na mesma semana da realização do primeiro encontro.

Os alunos estavam bastante calmos e, quando entreguei a segunda parte da atividade proposta e pedi que resolvessem, todos procuraram resolver os problemas para me entregar. Nessa turma, muitos alunos ficaram curiosos com relação às respostas dos problemas, visto que no primeiro encontro tínhamos chegado juntos às respostas. Assim como na turma 202, me propus a enviar as resoluções por e-mail e para quem tivesse interesse nas soluções, bastando colocar o seu e-mail atrás da folha de soluções. Uma aluna trouxe para esse segundo encontro uma revista com enigmas matemáticos para me mostrar e, no final da aula, ela me deu a revista.

Assim como na turma 202, permiti que os alunos trabalhassem em duplas para realizar a atividade e percebi que alguns alunos que terminaram antes e me entregaram procuraram ajudar os colegas com explicações para chegar às respostas que consideravam corretas. Nesse encontro, 13 alunos estavam presentes.

Os acertos da turma 203 na Atividade 2 estão tabelados no gráfico a seguir.

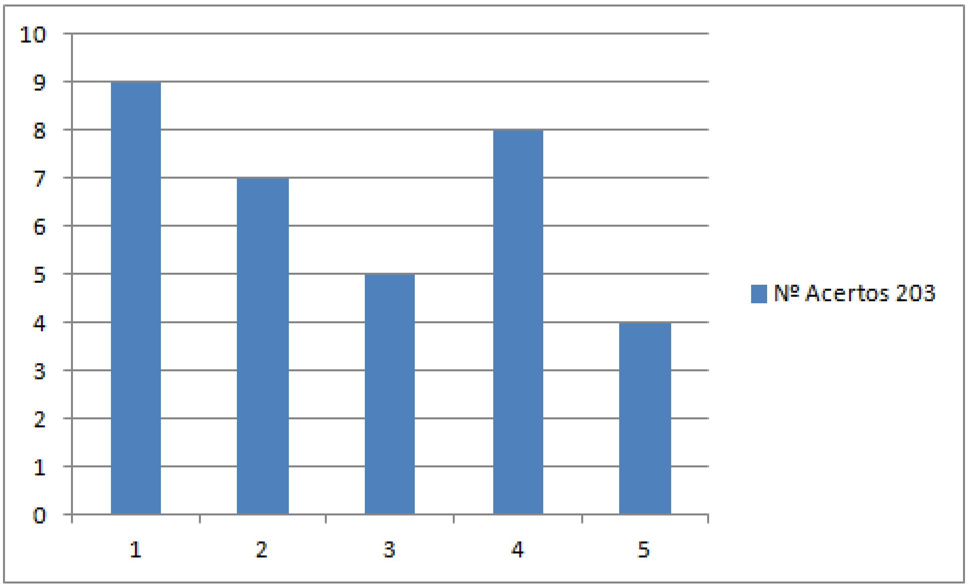


Gráfico 4: Número de acertos por problema (turma 203)

Da mesma maneira que analisamos os resultados obtidos na turma 202, supondo que cada aluno tivesse escolhido uma resposta aleatoriamente, o número esperado de respostas corretas seria $\frac{14}{5}$ para o primeiro problema e $\frac{13}{5}$ para os problemas seguintes (razão do número de alunos, pelo número de questões). Podemos observar que em todos os problemas estamos acima dessa média.

Procurando ser mais precisos, no gráfico a seguir, tabulamos os tipos de acertos de três formas distintas, como realizamos na turma 202.

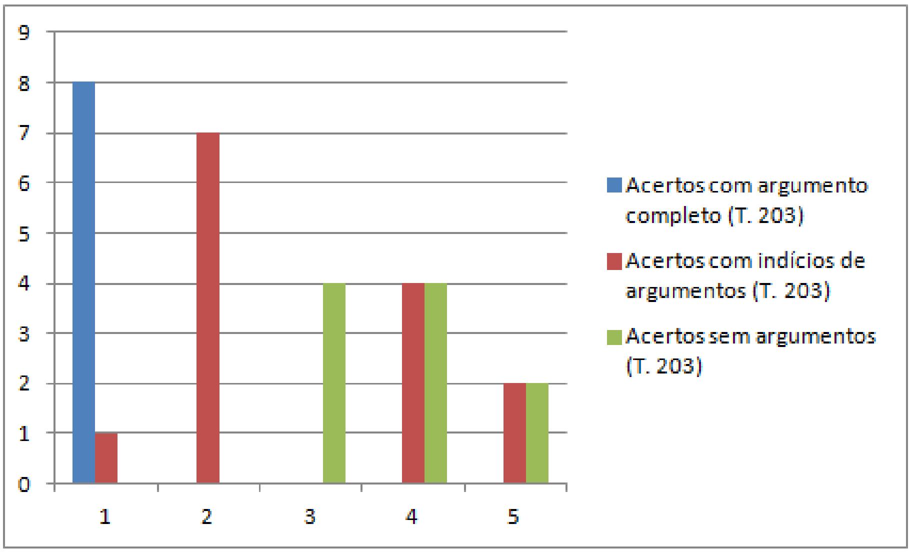
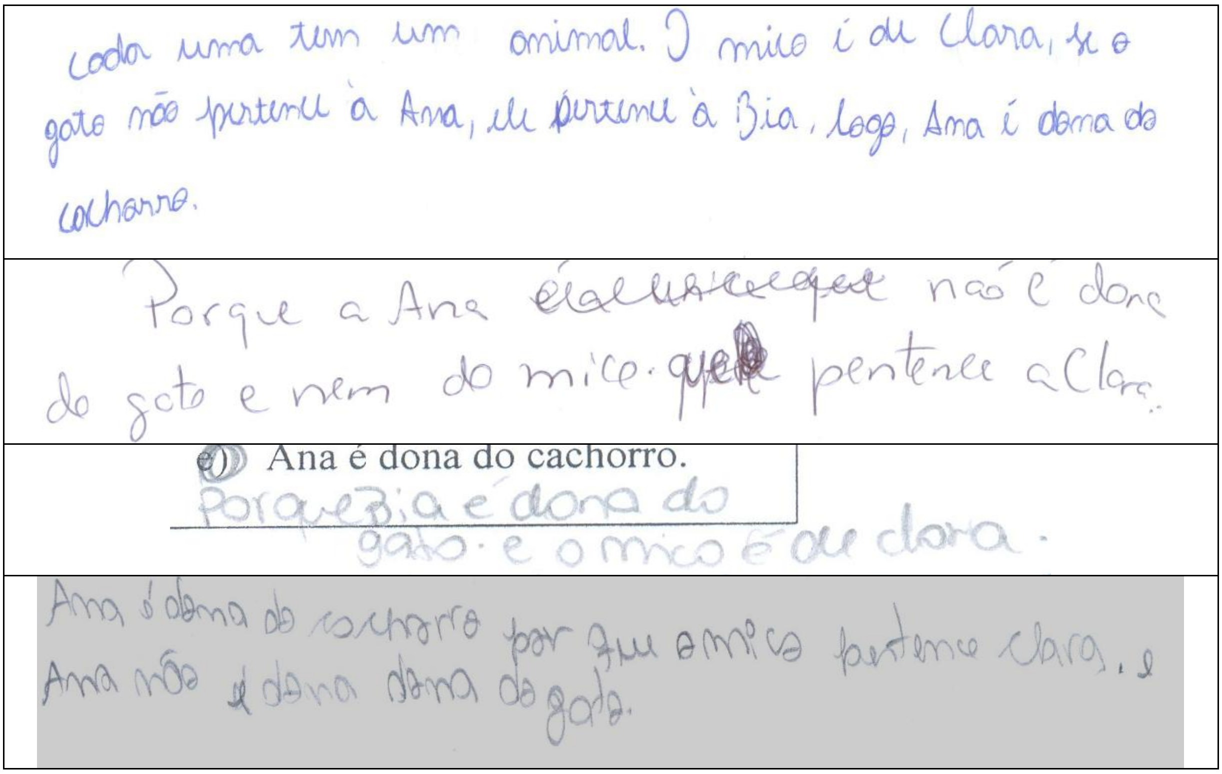


Gráfico 5: Três análises de acertos (turma 203)

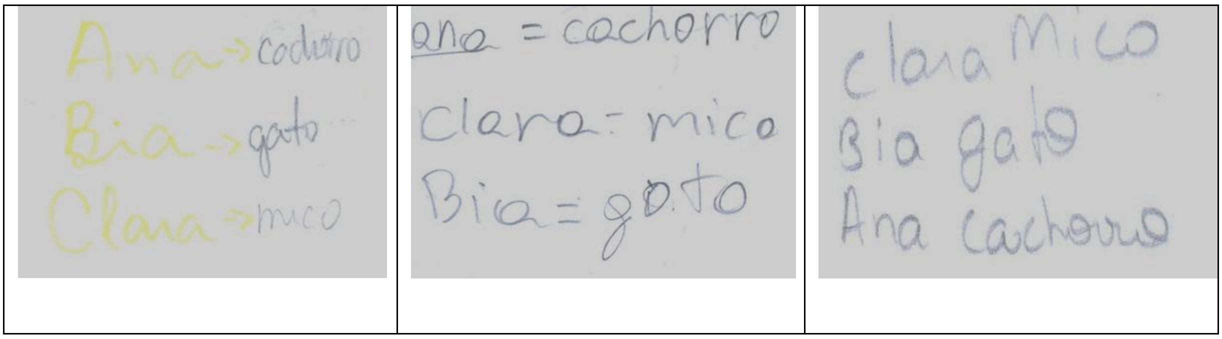
Podemos perceber que, assim como na turma 202, somente no problema 1 foi possível encontrar soluções com argumentos completos. Na sequência poderemos observar alguns desses argumentos e suas particularidades.

Nas quatro resoluções abaixo, é possível observar que os estudantes desenvolvem os seus argumentos com justificativas, observando as proposições que o problema fornece. Na primeira delas, podemos observar que a palavra “logo”, utilizada pelo estudante, fornece uma conclusão para a análise realizada de acordo com as premissas do enunciado. Já nas três últimas, podemos observar o uso do “por que”, como justificativa pela resposta que estão sendo dadas. Os estudantes demonstraram um desenvolvimento bastante coerente, produzindo conclusões válidas. Conseguindo dessa forma chegar a raciocínios coerentes.



Quadro 15: Acertos com argumentos completos (turma 203)

Nos três desenvolvimentos a seguir podemos observar que os estudantes procuraram relacionar o animal que pertencia a cada personagem do problema. O primeiro exemplo com flecha direcionando o animal correspondente, o segundo com o símbolo de igualdade e o terceiro somente com os nomes lado a lado. As três situações representam que os estudantes conseguiram relacionar os animais as suas respectivas donas com base nas informações do enunciado.



Quadro 16: Acertos com argumentos completos - 2ª parte (turma 203)

É possível constatar que, no caso do problema 1, confirmando a nossa suposição inicial, os estudantes apresentaram facilidade para resolver o problema. Também foi possível observar que resoluções diferentes apareceram, apesar de não termos imaginado que haveria tantas soluções.

Da mesma forma que analisamos os tipos de acertos, no gráfico a seguir tabulamos os erros apresentados de duas formas diferentes, sendo elas os erros com indício de argumento e os erros sem indícios de argumentos.

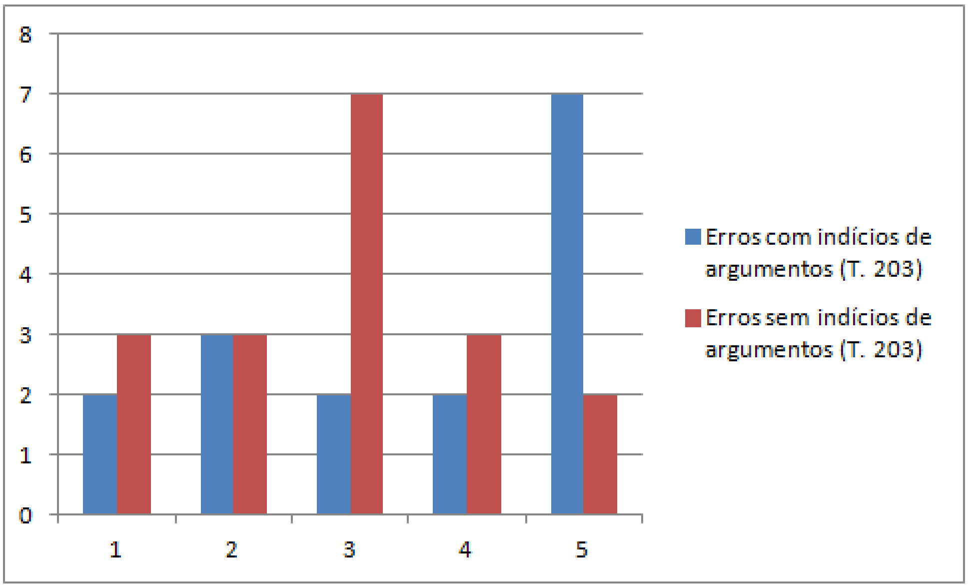
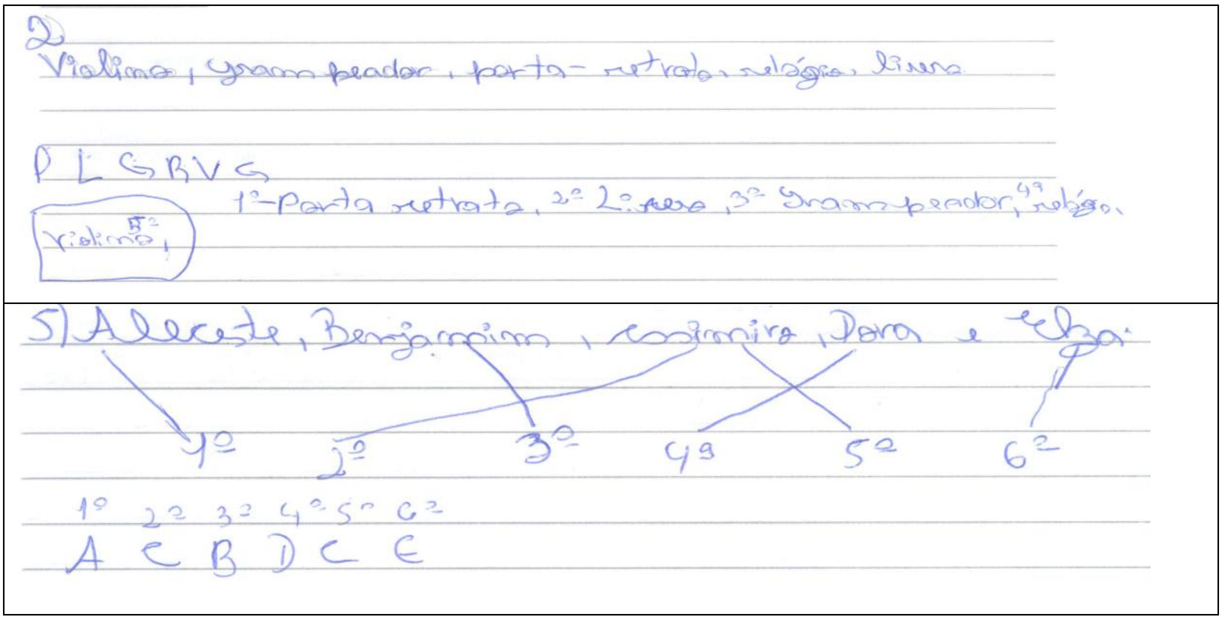


Gráfico 6: Duas análises de erros (turma 203)

Podemos observar que, em todos os problemas, obtivemos os dois tipos de erros analisados. Diferentemente da turma 202, em todos os problemas existem indícios de argumentos para resolução dos problemas. O problema 3 é o que apresenta maior índice de erro sem indício de argumento, o que pode significar que os alunos não tenham compreendido o enunciado do problema. Ainda em relação a este problema, em nenhum momento os alunos procuraram resolver o mesmo através dos Diagramas de Venn, seja com respostas corretas ou erradas. Era imaginado que isso aconteceria, pois o enunciado possibilita que o problema seja resolvido por associação com conjuntos e que esse tipo de diagrama é comumente trabalhado em sala de aula quando o conteúdo sobre conjuntos é ensinado.

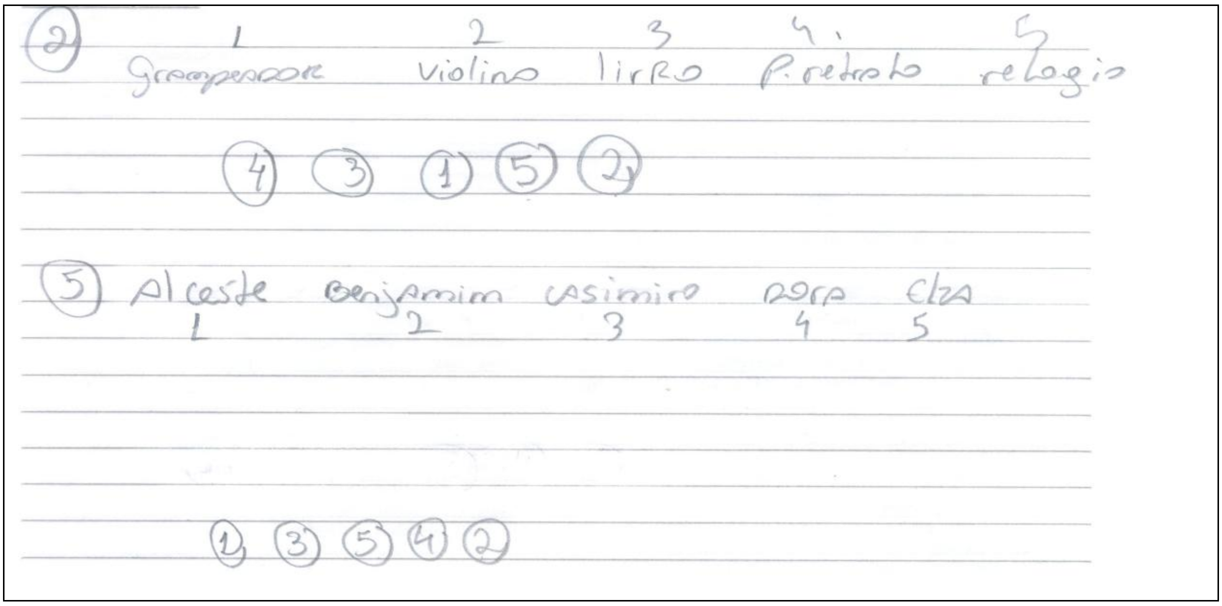
Também é possível perceber que o problema 5 possui mais indícios de argumentos do que o problema 2, aqui mais uma vez, contrariando a nossa suposição inicial de que os estudantes teriam maior facilidade para compreensão do problema 2 ao 5, pelo fato de o problema 2 apresentar uma situação envolvendo objetos simples.

Ainda relacionando os problemas 2 e 5, em que esperávamos modelos semelhantes de solução, temos algumas situações onde isso ocorre.



Quadro 17: Indícios de argumentos – 1ª parte (turma 203)

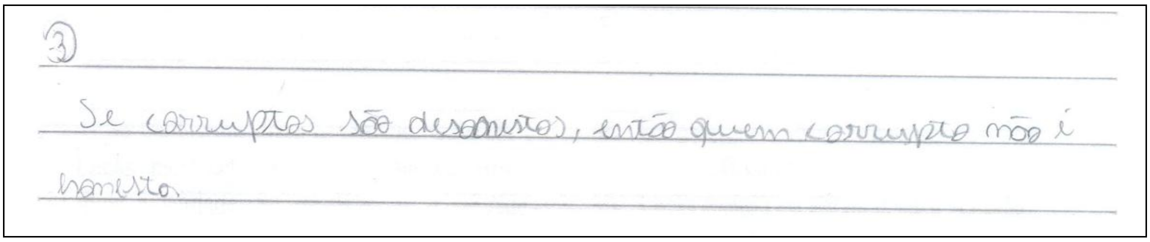
Nos desenvolvimentos acima é possível observar que, assim como era o esperado ao desenvolver a atividade, o estudante procurou simplificar o nome dos objetos e pessoas pela primeira letra de cada nome. Entretanto, ao invés de se utilizar de combinações a fim de chegar ao resultado, procurou relacionar as posições de uma única maneira, realizando relações entre os objetos (e pessoas) com as posições que elas, estariam ocupando.



Quadro 18: Indícios de argumentos – 2ª parte (turma 203)

Já no quadro 18, podemos perceber que o estudante não utiliza as letras iniciais para realizar a análise principal do enunciado, mas sim, procura indicar um número para cada objeto ou pessoa que fazem parte dos enunciados. Percebemos que o estudante realiza uma combinação em cada um dos problemas, acertando o problema 2 e errando o 5, porém não utiliza várias combinações, o que leva a crer que o seu acerto no problema 2 foi o que podemos considerar “sorte”.

A seguir, apresentamos um indício de tentativa de resolução do problema 3.



Quadro 19: Indícios de argumentos – 3ª parte (turma 203)

Podemos observar que, apesar de o estudante ter chegado a uma conclusão válida com base em apenas uma das premissas do enunciado, essa resposta não está de acordo com o enunciado completo, nem está entre as alternativas propostas.

Com relação ao problema 4, os indícios de argumentos apresentados foram basicamente cópias fiéis do enunciado do problema. Como nesse problema tivemos quatro acertos sem indício nenhum de argumento e dois indícios de argumentos inválidos, é possível supor que, como a alternativa correta era a letra “e”, a chance de que alguns deles tenham sido “chutes” dos alunos é grande. Podemos aqui observar que o Princípio da Contrapositividade, até mesmo por não ser de conhecimento dos alunos, não pareceu ter sido compreendido.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presença significativa de problemas lógico-matemáticos em provas de concursos públicos, aliada ao significado que essa temática representou ao longo da minha trajetória ao cursar Matemática e a presença não tão significativa dessa temática no Ensino Médio, levou-me a propor a aplicação e a análise de uma atividade que envolvesse esse tipo de problema em duas turmas do Ensino Médio EJA de uma escola da Rede Estadual de Porto Alegre. Os objetivos principais foram verificar a receptividade dos estudantes a esse tipo de proposta, o seu desempenho na resolução dos problemas sugeridos e as estratégias utilizadas nessas resoluções.

O principal ponto positivo ao longo da atividade foi a participação dos estudantes, pois em geral, mostraram-se bastante participativos, e também muito curiosos. Outro fato positivo observado foi a capacidade de argumentação apresentada por vários estudantes quando solucionavam alguns dos problemas. Isso mostrou que alguns dos estudantes já são capazes de, com base em um encadeamento de raciocínios, argumentar e justificar as suas conclusões de forma correta.

Apesar de termos vários pontos positivos, alguns pontos negativos também merecem ser mencionados. Em primeiro lugar, alguns enunciados deixaram algumas informações implícitas, que levaram a uma certa confusão por parte dos estudantes. Como exemplo, cito os enunciados do problemas 1 e 2 da Atividade 1. No primeiro, não estava claro que apenas uma pessoa havia pichado o muro e, no segundo, não estava claro que o campeonato de futebol descrito era por pontos corridos. Outro fato a ser considerado, foi a escolha de alguns problemas excessivamente complexos nas duas partes da proposta. No problema 4 da Atividade 1, observou-se que seria ideal que os alunos possuíssem um conhecimento formal da diferença entre o "ou" e o "ou exclusivo", visto que foi possível observar que muitos estudantes não apresentaram raciocínios coerentes para solucionar os problemas. Já na Atividade 2, problemas mais simples, porém semelhantes aos escolhidos, poderiam propiciar uma maior compreensão do que estava sendo proposto.

Como sugestão para realizar atividade semelhante em outro momento, procuraria realizá-la em um número maior de encontros em cada turma, propiciando assim um maior contato com os estudantes. Também procuraria realizar a mesma atividade em turmas regulares do Ensino Médio que, em geral, possuem estudantes da mesma faixa etária, a fim de realizar um comparativo entre estudantes do EJA e do Ensino regular.

Como análise geral, verificou-se que a proposta atingiu seu objetivo principal, que era o de verificar se haveria receptividade dos estudantes em solucionar problemas lógico-matemáticos. Foi possível observar que houve esse interesse e, em geral, uma forte participação dos estudantes durante as atividades. Também, conseguimos realizar um comparativo em relação aos tipos de solução esperados e os que efetivamente foram utilizados.

Por fim, cabe salientar que as análises aqui relatadas, estão restritas às duas turmas participantes da proposta, e que, os resultados aqui obtidos, não garantem resultados semelhantes em futuras propostas semelhantes.

REFERÊNCIAS

BIANCHI, Cezira. **A lógica no desenvolvimento da competência argumentativa**. Rio Claro, 2007. Tese, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. Disponível em: http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2007/bianchi_c_dr_rcla.pdf

BISPO, Carlos Alberto F.; CASTANHEIRA, Luiz B.; FILHO, Oswaldo Melo S., **Introdução à Lógica Matemática.** São Paulo: Editora Cengage Learning, 2011.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 1999

CHAUI, Marilena. **Convite à Filosofia.** 14. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

CUNHA, Marisa Ortegoza da; MACHADO, Nílson José. **Lógica e linguagem cotidiana:** verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2008.

FILHO, Daniel Cordeiro de Moraes. **Um Convite à Matemática:** Fundamentos Lógicos com Técnicas de Demonstração, Notas Históricas e Curiosidades. Campina Grande: Editora EDUFCG, 2007.

HAACK, Susan. **Filosofia das Lógicas.** São Paulo: Editora UNESP, 2002.

Tribunal Regional Federal 4ª Região. **Edital de Concurso Público Nº 01/2009**. Fundação Carlos Chagas. São Paulo, 2009. Disponível em: http://fcc.telium.com.br/concursos/trf4r109/EditaldeAbertura.pdf

REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES

COSTA, Newton Carneiro Affonso. Introdução aos Fundamentos da Matemática. Porto Alegre: Gráfica da Livraria do Globo, 1962.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática.** 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2009.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana.** 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.

GERSTING, Judith L., **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação:** um tratamento moderno de matemática discreta. Rio de janeiro: Editora LTC, 2008.

PAES, Rui Santos. **Coleção Concursos Públicos:** o passo decisivo para sua aprovação, v. 2. São Paulo: Editora Gold, 2008.

RACIOCÍNIO LÓGICO DESCOMPLICADO: Mais de 400 questões resolvidas, comentadas e com gabarito oficial. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

ZECCHIN, Ivan. Apostila preparatória: Matemática e Raciocínio Lógico, Curso Preparatório para Concursos. Porto Alegre, 2009.