UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Andressa dos Santos Ferreira

ÁLGEBRA ELEMENTAR:
DO VERBAL AO SIMBÓLICO

Porto Alegre
2013

Andressa dos Santos Ferreira

ÁLGEBRA ELEMENTAR:
DO VERBAL AO SIMBÓLICO

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana.

Porto Alegre
2013

Andressa dos Santos Ferreira

ÁLGEBRA ELEMENTAR:
DO VERBAL AO SIMBÓLICO

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana – Orientadora
Instituto de Matemática – UFRGS

____

Prof. Dr. Jean Carlo Pech de Moraes
Faculdade de Educação – UFRGS

____

Prof.ª Dr.ª Luisa Rodriguez Doering
Instituto de Matemática – UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

A Deus, que me criou e salvou desde antes da fundação do mundo e por ter mandado seu filho, Jesus Cristo, a quem também agradeço, para completar sua obra em minha vida.

À minha mãe, Angela, por ter me dado à vida, seu tempo, sua disposição, sua força, seu carinho, seu apoio e tudo quanto pode por amor a mim. Também agradeço a sua preocupação, em especial nos últimos dias de escrita desse trabalho. Amo-te.

À minha irmã, Priscila, por ser a pessoa em que eu me espelho, por ter sido, em diversos momentos, minha voz da consciência e por ter amadurecido rapidamente para ajudar a me educar. Também por ser, utilizando-me de algumas palavras de Pedro Bial, minha melhor "ponte com o passado e possivelmente quem vai sempre me apoiar no futuro".

Aos meus professores de graduação, em especial, à professora Marilaine Sant'Ana, pela paciência ao ser minha orientadora neste trabalho, aos professores Luisa Doering e Jean Carlo de Moraes, por terem aceitado ser banca deste TCC, e a professora Elisabeth Burigo, pelos diversos momentos que me motivou a aprofundar minhas pesquisas e basear minhas posições em algo mais firme do que minhas reflexões.

A todos meus tios e tias, primos e primas e outros familiares pelo incentivo e auxilio em vários momentos. Em especial a tia Marinês, que esteve presentes nos momentos mais difíceis e alegres da minha história e a minha prima Anelise, por ser, irresponsavelmente, uma das motivadoras de minha escolha profissional.

Aos meus avós, João Batista e Loreci dos Santos e Ignês Vicentini, por terem tanto orgulho de mim, mesmo eu não sendo merecedora de tanto, e por me incentivarem muito.

Ao meu futuro esposo, Jean Rodrigo Teixeira, por ser um companheiro incrível, muito compreensível e por ser a pessoa que não me deixou desistir nestes últimos anos, quando já não queria mais estudar. Amo-o Sherek. Também, aos meus futuros sogros, Sérgio e Celestina Teixeira, por serem pais do nosso amado Rodrigo e por serem tão bons para mim.

Ao meu querido amigo e colega Gilberto dos Santos por ter me auxiliado na realização da prática deste trabalho, disponibilizando-me um espaço na escola onde trabalhava e ajudando-me a chamar alguns de seus alunos a participar do Projeto. Ainda agradeço aos onze alunos participantes do projeto.

Aos meus amigos da igreja Encontros de Fé, do Tudo Fácil Centro 2007, do CEPSRM da UFRGS, da Pedaço de Céu, da UFRGS, do antigo A&Ω e do λόγος. Também aos meus ex-colegas da Escola Estadual de Ensino Médio Presidente Costa e Silva por serem os grandes responsáveis pela minha escolha profissional. E, por fim, mas não menos importantes, os meus amigos do Grupo Escoteiro Charruas, movimento e pessoas responsáveis por boa parte de minha formação como cidadã. SAPS.

RESUMO

O presente trabalho expõe uma proposta de ensino para a introdução da álgebra elementar no ensino fundamental que visa à compreensão, por parte dos alunos, da necessidade da linguagem algébrica utilizando, inicialmente, a língua materna. Elaboramos esta proposta após um estudo teórico sobre as aproximações existentes entre a língua materna e a matemática, sobre as dificuldades mais frequentes entre os alunos e sobre a evolução histórica da notação algébrica. Para uma melhor compreensão do tema, também definimos o que chamaremos de ensino, comunicação, linguagem, língua, álgebra, pensamento algébrico e linguagem algébrica.

A motivação para escrever sobre o presente tema surgiu por acreditarmos que a linguagem algébrica, utilizada pelo professor no ensino básico, pode estar sendo incompreensível para os alunos e a álgebra pode estar lhes parecendo um conteúdo inútil. Supondo que estas situações podem ser advindas de uma falta de entendimento de aplicações práticas da álgebra e do motivo de se utilizar letras na matemática, a proposta de ensino, aqui apresentada, procura usar a língua materna dos alunos em soluções de situações problema para mostrar-lhes a necessidade da álgebra e da linguagem algébrica.

Palavras chaves: Álgebra Elementar; Escola Básica; Metodologia de Ensino; Linguagem algébrica; Língua Materna.

ABSTRACT

This paper presents a teaching proposal for the introduction of elementary algebra in the middle school which aims the students' understanding of the necessity of algebraic language using, initially, the native language. We developed this proposal after a theoretical study about the existent approaches between the native language and mathematics, about the most frequent difficulties among students and about the historical evolution of algebraic notation. For a better understanding of the issue, we also defined what we'll call as teaching, communication, speech, language, algebra, algebraic thinking and algebraic language.

The motivation to write about this subject arose because we believe that algebraic language, which is used by the teacher in elementary and high school, may be incomprehensible to the students, and algebra may be like a useless content to them. Assuming that these conditions may be coming from a lack of understanding of algebra practical applications and from the reason of using letters in mathematics, the teaching proposal presented here seeks to use the students' native language in solutions for problem-situations to show them the necessity of algebra and of algebraic language.

Keywords: Elementary Algebra; Elementary and High School; Teaching Methodology; Algebraic Language; Native Language.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Não é simples determinar quando comecei a me interessar pela questão da linguagem algébrica no ensino de álgebra elementar. O que posso dizer é que, durante minha graduação em Licenciatura em Matemática, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, presenciei várias situações em que algumas pessoas, enquanto ensinavam conceitos tidos como algébricos, abusavam da linguagem algébrica em suas explicações. Também pude constatar, em outras ocasiões, que nos momentos de resolução de alguns exercícios algébricos (por exemplo, $x + 1 = 2$), vários alunos os interpretavam a seu modo (no caso, como "um número que somado a um é igual a dois"). Deste jeito conseguiam buscar a resposta (na maioria das vezes informalmente) com mais eficiência, mas costumavam aumentar suas dificuldades em compreender o que o professor estava ensinando. Em outros momentos, deparei-me com imagens engraçadas na internet, frequentemente expostas por estudantes do ensino básico em redes sociais, referindo-se a utilização das letras na matemática.

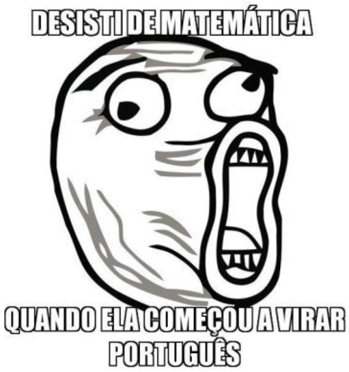


Figura 1 - Imagens de redes sociais
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

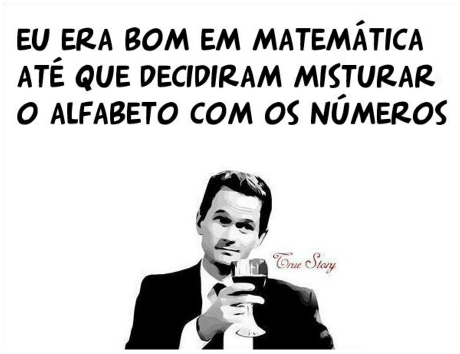


Figura 2 - Imagens na internet
Fonte: http://melhorestirinhas.com.br/eu-era-bom-em-matematica/

Essas ocasiões me inquietaram profundamente quando me questionei: como alunos que estão aprendendo álgebra pela primeira[1] vez entendem essa linguagem extremamente simbólica?

Acredito que os usuários da linguagem algébrica dispõem de algumas concepções relacionadas ao seu conhecimento algébrico quando lançam mão desta forma de comunicação. Afinal, é mais comum alguém se expressar em linguagens que conhece e se sente seguro em sua utilização do que em linguagens ainda não consideradas (pelo indivíduo) como dominadas.

Mas se os ouvintes destes usuários não entendem as propriedades envolvidas nessa forma de comunicação, essa conversação passa a estar morta, passa a ser como a

[1] Segundo a escola onde estudam, estão no primeiro ano em que a álgebra será lecionada na disciplina de matemática.

comunicação entre duas pessoas de idiomas diferentes, que pouco ou nada sabem do idioma do seu interlocutor. Essa analogia, no entanto, mascara o problema real desta situação: os alunos (enquanto interlocutores dessa comunicação) serão pressionados a responder o que entenderam do que ouviram do professor em provas e trabalhos, sob pena de serem reprovados caso não tenham entendido nada ou não realizem essas provas e trabalhos. Portanto, não podem se conformar em simplesmente não compreender o "idioma" de seu professor.

O que afirmo é que os conceitos algébricos não precisam ser expressos apenas em linguagem simbólica (algébrica). A história da notação algébrica (como veremos adiante) já demonstra isso. No momento que uma pessoa processa, mental ou verbalmente, generalizações de conceitos aritméticos, métodos gerais para a resolução de certos tipos de problemas (ou exercícios), noções de equivalências, noções de variação, suposições com respeito ao comportamento dos números e operações, substituição de informações por símbolos etc., em seu cotidiano, estará demonstrando deter um conhecimento tipicamente algébrico (talvez) de maneira informal (não escolarizada).

Ponderando sobre essa afirmação, suponho que as crianças, na faixa etária que vai até os 12 anos, já se utilizam de conhecimentos algébricos menos formais que o de estudantes de álgebra escolar. Suponho isso pensando que elas também programam generalizações de conceitos aritméticos e métodos gerais para a resolução de certos tipos de problemas (ou exercícios); que elas têm noções de equivalência e de variação; que elas supõem como será o comportamento de sequências numéricas no infinito e o comportamento de uma sequência de operações aritméticas; que elas agrupam e caracterizam objetos, se sentirem necessidade, enquanto se comunicam etc. Deste modo, penso que os professores apenas precisem auxiliar os alunos a tomar consciência desse tipo de conhecimento, já existente em seu dia-a-dia, e não tentar lhes ensinar como se os alunos fossem tabulas rasas.

Mas, "apenas precisam auxiliar"? Essa frase tem mais implicações do que pode aparentar. É preciso levar o aluno a reconhecer esse conhecimento que já dispõe, a perceber o que pode ser tratado como algébrico, a observar que nem sempre apenas um valor numérico satisfaz algumas equações, em suma, a tratar de problemas rotineiros, se possível, e deixar o simbolismo somente para depois, quando o aluno compreender o motivo de se utilizar letras ou qualquer[2] outro símbolo em álgebra.

[2] Não numérico indo-arábico e, até então, não definido como matemático.

Também suponho de que os alunos que passam a não querer aprender algum conteúdo, na escola, reagem assim por que seu interesse e/ou sua curiosidade não foram despertados.

Então, partindo dessas observações e ponderações, comecei a questionar-me se haviam meios para nós, professores de matemática, expressarmos parte do simbolismo algébrico de forma menos abstrata. Mais especificamente, perguntei-me sobre como as aproximações existentes entre a língua materna e a linguagem algébrica poderiam ajudar os alunos a compreender, melhor, a necessidade da álgebra (e de sua linguagem)?

Ao fim desta pesquisa espero, pelo menos em minha prática futura: vencer a linguagem puramente simbólica, levando meus alunos a perceberem a álgebra presente em diversos problemas diários, a fim de que compreendam por que inserimos “o alfabeto” na matemática; utilizar conhecimentos anteriores dos alunos para tornar seu aprendizado de álgebra o mais prazeroso e efetivo possível; ajudar os estudantes (que ensinarei) a produzirem suas próprias traduções algébricas para a linguagem, a ultrapassarem seus preconceitos com respeito à álgebra e a verem a álgebra como base para novos aprendizados e incitar, em alguns professores (que possam ter contato com esse trabalho), o desejo de melhorar seu ensino se utilizando de uma adaptação do que proporei ou refletindo sobre o que escrevi das pesquisas na área.

No capítulo de fundamentação teórica, definirei alguns termos importantes para melhor explicitar a temática aqui abordada. Também exporei as afinidades entre o ensino de álgebra e de língua materna. Logo após, discorro sobre o que os pesquisadores em educação matemática já identificaram como causas fontes de dificuldades em álgebra para os alunos. A seguir, virá uma descrição da história do desenvolvimento da notação algébrica e das suas utilizações. No capítulo seguinte, será abordada a construção da proposta de ensino (objetivo principal deste trabalho) e a metodologia que utilizei para avaliar as respostas dos alunos às atividades aplicadas. Por fim, descreverei como foram os dias de aplicação da proposta de ensino, as analises das atividades realizadas e as considerações que fiz a partir dessa experiência.

As atividades propostas estão no anexo I deste trabalho, o termo de consentimento informado no anexo II e o termo de consentimento institucional no anexo III.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Iniciamos este capítulo definindo os termos ensino, comunicação, linguagem, álgebra, pensamento algébrico e linguagem algébrica, que serão utilizados neste trabalho e exercem profunda importância para a compreensão do tema que será abordado aqui.

Como o objetivo principal deste trabalho é propor um método de ensino que focalize o desenvolvimento da linguagem algébrica nos alunos (entendendo essa como uma facilitadora no processo de formalização dos conhecimentos algébricos), não nos estenderemos nas discussões de cada definição e nem nas justificativas de escolhermos tais definições. Depois será mostrado o que pesquisadores já falaram sobre as aproximações existentes no estudo de álgebra e língua materna.

As dificuldades dos alunos, mais frequentemente documentadas, no aprendizado de álgebra elementar são o assunto seguinte. Essas são abordadas com a intenção de proporcionar uma ideia de como está se desenvolvendo o pensamento da maioria dos alunos, enquanto estudantes de álgebra elementar, nas resoluções de exercícios e problemas escolares. Ao fim, apresentaremos como se deu o desenvolvimento da notação algébrica ao longo da história e alguns motivos que levaram variadas civilizações a estudar esta ciência.

2.1 ENSINO, COMUNICAÇÃO E LINGUAGEM

No dicionário Aurélio (1993) está registrado que o ensino é uma “transmissão de conhecimentos” de um individuo para outro. De acordo com Martins e Zilberknop (1986, p. 21), a comunicação é a “busca de entendimento, de compreensão. [...] É uma ligação, transmissão de sentimentos e ideias.” Temos então que o ensino se dá por intermédio da comunicação, e, portanto, torna-se imprescindível estudar como esta se estabelece e qual a sua importância nas aulas de álgebra.

Martins e Zilberknop (1986, p. 25, grifo das autoras) escreveram que mesmo que seja comprovado que plantas e animais se comunicam, isso provavelmente não mudará “o critério adotado pelos teóricos da comunicação [...] [de que] **só o ser humano se comunica através da língua como um código.**” Para as autoras, os humanos possuem uma predisposição para adquirirem a linguagem, mas sem uma convivência social essa predisposição se atrofia. Vygotsky (2002, p. 9), em sua pesquisa aponta que “a função primordial da linguagem é a comunicação, intercâmbio social”. Já Saussure (2006, p.

16) escreveu que “a linguagem implica ao mesmo tempo um sistema estabelecido e uma evolução”. Então, para um avanço do ensino, sendo esse sempre baseado na comunicação, precisamos acomodar ideias, mas, também, precisamos evoluir nossa linguagem (individual) socialmente.

Em seu trabalho, Vygotsky (2002) discorre sobre a semelhança que as crianças demonstram ter, em um estágio de seu desenvolvimento, com os chimpanzés. Ele diz que, assim como esses animais usam instrumentos para conseguirem algo que almejam e mostram destrezas mecânicas para manejar ferramentas, as crianças também o fazem. Outra semelhança entre os chimpanzés e as crianças, apontada pelo pesquisador, é que os dois também desenvolvem uma espécie de linguagem mecânica perceptível no momento em que emitem sons ou fazem gestos para outros de sua espécie. Segundo Vygotsky (2002), a diferença passa a existir, entre esses dois seres vivos, quando as crianças iniciam a fase de “descobertas” e, nesta, percebem a linguagem como uma ferramenta que podem utilizar para conseguirem o que desejam através da comunicação com seus semelhantes. A partir de então, as crianças “descobrem” que sua espécie deu nome para a maioria das coisas com que elas se deparam e/ou sentem e, assim, passam a procurar conhecer cada nome, cada palavra inventada por sua espécie. Disso, podemos extrair que a principal diferença entre o homem e os outros animais é que o primeiro é um “vivente dotado de palavra”. (LARROSA, 2002, p. 21).

Concordando com o que foi posto sobre ensino, comunicação e linguagem, entenderemos, nesse trabalho, que a linguagem oral humana foi uma forma encontrada por essa espécie para tentar explicitar seus sistemas de pensamentos e suprir suas necessidades de comunicação e de ensino.

2.2 ÁLGEBRA, PENSAMENTO ALGÉBRICO E LINGUAGEM ALGÉBRICA

“Não é fácil definir a álgebra.” (USISKIN, 1995, p. 9). De fato, diversos autores, problematizaram este assunto, deixando suas contribuições na busca de uma definição sem, no entanto, criarem-na efetivamente.

Para Usiskin (1995), os diferentes usos das variáveis (que podem ser entendidas, nesse caso, como letras) denotam diferentes concepções de álgebra. Este autor cita as seguintes concepções: aritmética generalizada, estudo de procedimentos para resolver problemas, estudo das relações entre quantidades e estudo das estruturas. Em cada concepção ele também identifica as diferentes funções das letras: generalizadoras de modelos, incógnitas ou constantes, argumentos ou parâmetros e sinais arbitrários.

Amerom (2002)[3] divide a álgebra, em sua tese, de maneira semelhante à de Usiskin (1995). As categorias que ela usa são: ferramenta para generalizações, ferramenta para resolver problemas, ferramenta para modelagem de fenômenos físicos e estudo de funcionalidades. Esta autora, ainda, atenta para outras duas utilidades da álgebra: (1) o estabelecimento de descrições, em estilo computacional, dos processos de resolução de equações e (2) simbolizar, de diferentes formas, suposições matemáticas, bem como proceder alternâncias entre essas formas de simbolizar, para escolher a que parece ser mais simples de ser aplicada a determinados problemas. Buscando completar a lista de diferentes funções das letras registradas por Usiskin (1995), esta autora traz: o símbolo como um “espaço reservado (um símbolo em uma sentença aberta aritmética como $3 + \bullet = 5$), o símbolo como um representante de constantes indeterminadas (como π e e) e rótulo (letra para abreviar um objeto, ou uma unidade de medida).” (AMEROM, 2002, p. 5). Amerom (2002, p. 5) também escreveu que “o National Council of Teachers of Mathematics (1997) identifica quatro temas para álgebra escolar:” estrutura, funções e relações, linguagem e representação e modelagem.

Lins e Gimenez (1997, apud GIL, 2007) registraram uma importante questão[4] sobre a presença ou não dos gráficos em definições do que é álgebra. Davidov (1988, apud SCARLASSARI, 2007), acredita que a generalização tem uma profunda importância para se formar os conceitos escolares. Para os PCN’s[5] de Matemática (BRASIL, 1998, apud GIL, 2007), a álgebra que deve ser ensinada na escola pode ser caracterizada como “aritmética generalizada, funcional, equações e estrutural.” Baumgart (1992) escreve que a álgebra, em seu principio, estava relacionada com a resolução de equações (álgebra elementar), mas atualmente ela está relacionada com o estudo das estruturas matemáticas – grupos, anéis e corpos – (álgebra abstrata).

Gil (2007, p. 1) aborda a questão de definir álgebra dizendo que “os matemáticos foram lentamente aprendendo a substituir as palavras por letras e por pequenos sinais [...], surgindo assim as noções da Álgebra – as equações expressas totalmente em símbolos”. Ela coloca o reconhecimento de “padrões em sucessões numéricas e geométricas; [o] cálculo de áreas, volume e perímetros; [o] preenchimento de planilhas;

[3] Todas as traduções dessa autora foram feitas por mim.
[4] “gráficos são ou não parte da álgebra?” (LINS E GIMENES, 1997, apud GIL, 2007).
[5] Está é a sigla conhecida, nacionalmente, dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Brasil.

[a] análise de gráficos" e o processo de generalizações como partes da álgebra. (GIL, 2007, p. 8).

Já, para Miorim, Miguel e Fiorentini (1993a, p. 83 - 83, grifos dos autores), a álgebra se divide nas seguintes concepções:

> [...] *processológica*, [...] conjunto de procedimentos (técnicas, artifícios, processos e métodos) específicos para abordar certos tipos de problemas. Esses procedimentos específicos consistem em *técnicas algorítmicas* ou processos interativos que se aplicam a problemas ou conjuntos de problemas, cuja resolução se baseia no seguimento de uma sequência padronizada de passos.
> [...] *linguístico-estilística*, [...] uma linguagem específica, artificialmente criada com o propósito de expressar concisamente aqueles procedimentos específicos [citados acima].
> [...] *linguístico-sintática-semântica*, concebe a Álgebra como uma linguagem específica e concisa, mas cujo poder criativo e instrumental não reside propriamente em seu domínio estilístico, mas em sua dimensão sintático-semântica. [...]
> [...] *linguístico-postolacional*, concebe a Álgebra como 'a ciência das estruturas gerais comuns a todas as partes da Matemática, incluindo a Lógica' (PIAGET E GARCIA, 1987, apud MIORIM, MIGUEL E FIORENTINI, 1993a).

Escrevendo sobre o que entendem por pensamento algébrico, esses autores ressaltam que a álgebra envolve "a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, as tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização" (MIORIM, MIGUEL e FIORENTINI, 1993b, p. 37) que podem ser expressos através "da linguagem natural, [...] da linguagem aritmética, [...] da linguagem geométrica ou da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica." (MIORIM, MIGUEL e FIORENTINI, 1993a, p. 88).

Eles também se utilizam de três caracterizações para explicar a educação algébrica ao longo da história: *linguístico-pragmática*, que entende "que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo 'transformismo algébrico'[6] seria necessária e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas" (MIORIM, MIGUEL e FIORENTINI, 1993a, p. 83); *fundamentalista-estrutural*, entende que a álgebra deve ser a área fundamentadora de todos os outros campos da matemática; *fundamentalista-analógica*, "tenta efetuar uma síntese entre as duas anteriores, uma vez que procura, por um lado, recuperar o valor instrumental da álgebra

[6] Miorim, Miguel e Fiorentini (1993a, p. 83) escreveram, em nota: "Estamos utilizando a expressão transformismo algébrico para designar o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas."

e, por outro, manter o caráter fundamentalista de justificação das passagens presentes no transformismo algébrico" (MIORIM, MIGUEL e FIORENTINI, 1993a, p. 84).

Scarlassari (2007, p. 53), interpretando o que é colocado por esses autores, se refere à álgebra como uma "atividade de procurar padrões em sequências". Esta autora também coloca que este campo da matemática "envolve abstração, criação, entendimento da operacionalidade presente na aritmética, noção de equivalência, de movimento, de variação [...]". (SCARLASSARI, 2007, p. 54), e que se pode notar traços de uma atividade tipicamente algébrica "quando novas questões são colocadas a partir de expressões numéricas, até então trabalhadas na aritmética." (SCARLASSARI, 2007, p. 67).

Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), escrevendo sobre quando interpretam que uma criança está demonstrando um tipo de pensamento algébrico, chamam nossa atenção para os seguintes aspectos da álgebra: estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; expressar estruturas aritméticas de uma situação-problema; produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema ou produzir vários significados para uma mesma expressão numérica; estabelecer, nas igualdades, relações de equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; justificar as possibilidades de se transformar expressões aritméticas em outras mais simples; ser ferramenta para o desenvolvimento de qualquer processo de generalização; ser ferramenta para expressar regularidades ou invariâncias e ser uma linguagem mais concisa para expressar conceitos matemáticos.

Podemos observar, então, que existem alguns pontos de concordância entre esses autores. Estes pontos são: parte do estudo algébrico pode ser assumido como uma generalização da aritmética; a álgebra é um meio para se resolver problemas; o conceito de equivalência é fundamental em álgebra; as variáveis são outro conceito muito importante da álgebra; a álgebra é uma ferramenta muito útil para se estudar o comportamento dos números e das operações em casos especiais (em que vários números ou operações podem estar envolvidos), ou seja, estudar as estruturas matemáticas; a álgebra torna a modelagem de fenômenos físicos mais fácil (ou possível) de ser realizada; e, por fim, a álgebra cria uma linguagem para podermos nos referenciar a, e lidar com, diversos campos da matemática.

Esses pontos de concordância serão as partes componentes da definição de álgebra deste trabalho. Com esta definição de álgebra, iremos entender que o pensamento algébrico será utilizado, para estruturar e/ou resolver algum problema cotidiano ou exercícios escolares, quando algum indivíduo organizar seu sistema de pensamento levando em consideração qualquer um dos pontos de concordância apontados acima em manipulações de informações. A linguagem algébrica, de "natureza estritamente simbólica", por sua vez, será uma manifestação avançada desse estilo de pensamento.

É importante dizer que a linguagem algébrica será assim denominada, pois a álgebra não pode constituir-se em uma língua. Segundo Machado (1990), as línguas são compostas de oralidade e escrita. Esse autor destacou que a oralidade é um importante "suporte de significações" (MACHADO, 1990, p. 107) para o aprendizado da escrita. Já a álgebra, quando entendida como uma linguagem formal[7], é constituída apenas por uma linguagem escrita, presidindo apoiar-se em uma língua natural para ter uma base oral, que funcione como "degrau intermediário na passagem do pensamento à escrita". (MACHADO, 1990, p. 107).

> Sobretudo na forma escrita, as palavras já nascem prenhes de significação. Assim, enquanto suporte de tais significações, a língua falada configura um degrau natural [intermediário na passagem do pensamento à escrita] para a aprendizagem do sistema de representação da escrita. A minimização do papel deste degrau é responsável por grande parte das dificuldades que se manifestam na capacidade de expressão escrita. (MACHADO, 1990, p. 107).

Definidos estes termos, podemos avançar na discussão sobre as interações existentes entre matemática e língua materna, ou, mais especificamente, álgebra e língua materna.

2.3 APROXIMAÇÕES ENTRE LÍNGUA MATERNA E ÁLGEBRA

Segundo Machado (1990, p. 15)

> [...] os elementos constituintes dos dois sistemas fundamentais para a representação da realidade – o alfabeto e os números – são apreendidos conjuntamente pelas pessoas em geral, mesmo antes de chegarem à escola, sem distinções rígidas de fronteiras entre disciplina ou entre aspectos qualitativos e quantitativos da realidade.

Ou seja, na escola passa a existir uma fronteira do que é aprendizado de matemática e do que é aprendizado da língua materna. Machado (1990) também mostra que culturalmente o aprendizado matemático é associado a quantificações e cálculos, tendo como referencial as suas aplicações práticas. Por sua vez, o aprendizado de língua materna é associado a qualificações, significações do que falamos e em como as

[7] Linguagens que foram criadas com a intenção de vencer a falta de lógica de muitas línguas naturais e ambiguidades presentes nestas. Sem oralidade própria, as linguagens formais se restringem a "operações sintáticas sobre seus próprios símbolos". (MACHADO, 1990, p. 105)

escrever, tendo como referencial a própria fala. Mesmo quando expressamos alguns termos matemáticos em português (como, por exemplo, menos), poucas vezes seu significado muda em relação ao seu significado em matemática (no exemplo, subtração, diminuição de algo).

Desta maneira, as únicas interações que parecem existir entre matemática e língua materna são: a ordenação existente nas letras e nos números, a necessidade dos seus aprendizados para podermos nos comunicar com nossos semelhantes, o ensino destas ciências começar antes mesmo da escola e estar presente na maioria das escolas desde os primeiros anos de vida acadêmica de uma criança e as aplicações a situações práticas (fala e cálculos). Mas, como também é abordado por Machado, a matemática e a língua materna dividem mais características do que essas que a cultura sugere. Como, por exemplo:

- As regras que envolvem o aprendizado da escrita são uma dificuldade para as duas disciplinas. (VYGOTSKY, 2002).
- Exatidão e inexatidão podem ser encontradas nas duas formas de se comunicar quando o que está sendo exposto é ou não colocado de maneira clara. (MACHADO, 1990).
- Para se aprender as relações entre as palavras em uma frase e as letras em uma palavra a memorização de regras e a prática de exercícios são necessárias, tanto quanto para se efetuar cálculos usando a tabuada.
- Generalizações são atividades feitas, tanto em língua materna quanto em matemática. (MACHADO, 1990)
- O aprendizado de algumas regras de propriedades da escrita em língua materna e de cálculos se justifica por si só, sem a necessidade de aplicações práticas. (MACHADO, 1990).
- A qualificação e a quantificação, a unificação e a diversificação de conjuntos (não necessariamente numéricos) também podem ser feitas por intermédio de qualquer um dos sistemas de comunicação. (MACHADO, 1990)
- As atividades desenvolvidas nas duas disciplinas são responsáveis por desenvolver o raciocínio (e não só em matemática) e por estimular o aluno a desenvolver suas próprias técnicas de aprendizado. (MACHADO, 1990). Etc.

Academicamente, as crianças aprendem a relacionar as letras aos fonemas que pronunciam, enquanto se alfabetizam e a usar os dedos, objetos concretos ou até ábacos para fazer os cálculos matemáticos. Mais uma vez, os referenciais da disciplina de língua materna (a fala) e de matemática (as aplicações no cotidiano) estão sendo reforçados.

Na simplicidade dos conteúdos inicialmente abordados nessas disciplinas, podemos ver os alunos buscando suas técnicas de entendimento do que fora ensinado. Nos momentos que não compreendem o que devem fazer, em algum exercício escolar, técnicas são fornecidas por algum professor ou por outras pessoas que já sabem como resolver aquele tipo de problema. Geralmente são regras informais conhecidas por várias pessoas e que incitam o aluno a criar as suas próprias. Nestas, também, costumam ser marcantes as presenças dos referenciais (fala e aplicações práticas).

Quando na multiplicação aparecem algumas dificuldades, por ser o primeiro conteúdo escolar de matemática que aparenta ter mais relações com as propriedades dos números do que com aplicações práticas, professores buscam problemas que demonstrem suas aplicações práticas. Se, ainda assim, isso não funcionar, não é difícil encontrarmos exemplos de professores e pais que afirmam às crianças que a tabuada precisa ser decorada.

Já em álgebra acontece o espanto de utilizar as letras junto com os números. Neste momento, a formalização da notação algébrica acontece muito rapidamente (AMEROM, 2002), artificialmente, e poucas vezes as crianças entendem por que precisam usar as letras na matemática. Mais que isso, poucas vezes entendem que a letra representa um ou vários números e quando entendem não são raras as vezes em que pensam em substituir a letra pelo número cardinal de sua posição no alfabeto.

Entendemos que, por esta rápida formalização, da notação algébrica, o referencial das aplicações no cotidiano aparentemente não é mais perceptível para as crianças (que agora tem de calcular o valor da letra e não de um exercício matemático ou de um problema cotidiano específico), que recorrem as mais diversas técnicas para “resolver” os exercícios escolares até começarem a, apenas, gravar mentalmente as falas de seu professor, como será abordado na próxima seção.

Não basta apenas informa-lhes que a letra representa um ou vários números. Como disse Dienes (1974 apud GIL, 2007).

> Não adiantará por uma variável à frente de uma criança até que esta a veja variar. Quando a variável tiver realmente variado na experiência da criança, então haverá sentido colocar o nosso número escolhido, em lugar de todos os números diferentes que já representaram o nosso número escolhido, e não será necessário muito tempo para convencê-la de que, como economia de expressão, pode usar-se uma letra-código para o nosso número escolhido.

Os alunos precisam sentir a necessidade de utilizar as letras e isso pode ser feito através do uso de situações problemas. A utilização de situações problemas poderá fazer com que o aluno perceba o significado da letra em matemática (SCHOEN, 1995; DEMANA e LEITZEL, 1995) e o apoio da língua materna poderá ajudá-lo a interpretar o que é requisitado em um exercício ou problema. (MACHADO, 1990).

Também é preciso que os problemas não foquem apenas na utilização de incógnitas, pois para muitos desses problemas uma resolução aritmética pode ser aplicada e funciona muito bem (AMEROM, 2002).

2.4 AS DIFICULDADES QUE OS ALUNOS PODEM APRESENTAR NO APRENDIZADO DE ÁLGEBRA ELEMENTAR

Em muitos trabalhos que abordam a temática das dificuldades dos alunos no aprendizado de álgebra elementar, o artigo de Lesley Booth (1995) é uma das principais referências. Dentre as leituras que fazem parte do suporte teórico deste trabalho, pouco foi acrescentado a esse tema por outros autores. Assim, seguindo um modelo de organização semelhante ao de Booth (1995), descrevemos, a seguir, as dificuldades registradas pelos pesquisadores em educação matemática reunidas em quatro grupos de acordo com suas possíveis origens (a aritmética ensinada antes da álgebra, a ênfase no cálculo das soluções, a memorização de frases de ordem e a linguagem algébrica ser utilizada prematuramente).

2.4.1 A ARITMÉTICA ENSINADA ANTES DA ÁLGEBRA

Nas pesquisas de Booth (1995), Pinto (1997), Scarlassari (2007) e Gil (2007) podemos observar que a prática de trabalhar a aritmética antes da álgebra, comum há varias escolas, é uma das possíveis origens das dificuldades que os alunos costumam demonstrar em álgebra elementar.

Segundo Booth (1995, p. 24) "em aritmética o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na álgebra, [...] o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral". Essa mudança de foco, unida com uma falsa ideia de continuidade na transição da aritmética para a álgebra, gerada pelo fato de uma ser ensinada posterior à outra, sem muitas considerações do que se modifica e o que se mantêm do conteúdo ensinado na primeira, faz com que os alunos já iniciem seu aprendizado formal em álgebra tendenciosos a efetuar operações, buscando um único resultado numérico, pensando "que o que se espera é uma resposta com um único termo" (SCARLASSARI, 2007 p. 44).

Neste momento, os que apresentam essa inclinação, já mostram uma das possíveis dificuldades que terão em álgebra: entender os símbolos operatórios ($+, -, \cdot$ e/ou $\times, \div$ etc.) como uma ordem, como uma ação que deve ser efetuada, e não como apenas um indicativo de operação ou de uma relação que está sendo estabelecida entre grandezas. Essa dificuldade se manifesta quando os alunos não conseguem "aceitar a ausência de fechamento" (COLLINS, apud BOOTH, 1995, p. 27) das expressões algébricas. Ou seja, quando se deparam com uma expressão algébrica (por exemplo, do tipo $b + 2$) como resposta de algum cálculo, não a admitem como tal e se empenham na busca de alternativas para transformá-la em um número.

Booth (1995) pondera que a ausência de fechamento, também, pode ser ocasionada pelo aspecto de que as expressões algébricas ainda "podem representar o procedimento ou a relação pela qual se obteve a resposta" (BOOTH, 1995, p. 27). Assim, gera-se, aqui, o chamado "dilema nome-processo" (DAVIS, apud BOOTH, 1995, p. 27), em que um símbolo, ou uma série de símbolos relacionados, significam tanto procedimentos a serem efetuados como as próprias respostas. Para essa autora, a "maneira restrita de se ler o símbolo operatório também é subjacente ao 'dilema nome-processo' já descrito" (BOOTH, 1995, p. 28).

Outro símbolo comum à álgebra e à aritmética, porém com tratamentos diferentes em cada uma dessas áreas, é o de igualdade. Na álgebra, o rigor formal do significado deste símbolo é acentuado, sendo que, a partir de então, ele tem reforçado o seu sentido de indicação de equivalência existente entre os dois termos de uma equação (BOOTH, 1995; FREITAS, 2002; PINTO, 1997; SCARLASSARI, 2007), isto é, o símbolo de igualdade tem valor bidirecional, indicando tanto equivalência entre duas expressões quanto a possibilidade de se efetuar a mesma operação nos dois lados da equação. Já, na aritmética, este símbolo é considerado como unidirecional, significando apenas um indício de que, posterior a ele, será escrita a resposta encontrada de uma operação efetuada (geralmente à sua destra). Booth (1995) ainda coloca que muitas vezes os professores, quando leem este símbolo em resoluções de exercícios e problemas aritméticos, o traduzem como *dá* (por exemplo, três mais cinco *dá* oito).

Scarlassari (2007, p. 44) atenta para o fato de que "os alunos também apresentam dificuldades em aceitar expressões sem sinal de igual". O que, segundo Chalouh e Herscovics (1995), também é uma demonstração da dificuldade em "aceitar ausência de fechamento".

O rigor formal na álgebra não aparece acentuado apenas com o uso do símbolo de igualdade. Booth (1995, p. 29) diz que

> [...] as consequências de improbidades [...] [em aritmética] podem ser menores se o aluno sabe o que se pretende e efetua a operação correta, independentemente, do que está escrito. Em aritmética faz pouca diferença o aluno escrever $12 \div 3$ ou $3 \div 12$, desde que ele efetue corretamente o cálculo. Em álgebra, porém, é crucial a diferença entre $p \div q$ e $q \div p$.

De acordo com a autora, não só a falta de rigor pode ser vista neste exemplo como uma interpretação errônea, por parte de alguns alunos, de que, assim como pode-se trocar a posição dos números quando relacionados com os sinais de adição e multiplicação sem acarretar danos ao cálculo, também pode-se proceder desta maneira com os sinais de divisão e subtração. Esse fato também foi registrado por Freitas (2002) em sua pesquisa, considerando apenas que nesse trabalho a manipulação cega dos símbolos pode ser uma das causas dos exemplos que o autor encontrou. De tal modo, o aluno traz, consigo, "para o contexto algébrico, dificuldades herdadas do aprendizado no contexto aritmético ou [...] procedimentos aritméticos que não procedem". (GIL, 2007, p. 5). Pinto (1997, p. 9), por sua vez, documentou "que grande número [das dificuldades] acontecem em decorrência da falta de compreensão ou da deturpação de conceitos aritméticos básicos".

O uso dos parênteses (ou a falta dele) é mais uma dificuldade apresentada em álgebra decorrente de uma concepção errada vinda da aritmética. Scarlassari (2007, p. 45) escreveu que, como muitos alunos "acreditam que as operações devem ser realizadas na ordem em que aparecem", durante seu aprendizado em aritmética, tendem a encarar como dispensável o uso dos parênteses em alguns exercícios escolares ou em algumas de suas resoluções de exercícios. Já em álgebra, a utilização dos parênteses pode ser um facilitador na compreensão de muitos conceitos importantes, como a propriedade distributiva (DEMANA e LEITZEL, 1995).

Outra dificuldade que pode ser gerada quando a aritmética é ensinada anterior e separadamente da álgebra, acontece quando os alunos resolvem alguns tipos de problemas. Um exemplo é apresentado por Usiskin (1995, p. 14): “adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número”. Ele explica que

> Ao resolver problemas desse tipo, muitos alunos têm dificuldade na passagem da aritmética para a álgebra. Enquanto a resolução aritmética [...] consiste em subtrair 3 e dividir por 5, a forma algébrica $5x + 3$ envolve a multiplicação por 5 e a adição de 3, [...] [o uso do elemento inverso (simétrico) da soma e da multiplicação, isto é, para escrever] a equação, devemos raciocinar exatamente de maneira contrária à que empregaríamos para resolver o problema aritmeticamente. (USISKIN, 1995, p. 15).

A justaposição é mais uma convenção existente na aritmética e na álgebra. Mas, as duas convenções (a aritmética e a algébrica) são completamente diferentes. Enquanto a primeira indica somas (na grafia de números mistos, como, por exemplo, $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, e na forma de representação de nossos numerais com o valor posicional, como $21 = 20 + 1$) a segunda indica multiplicação (por exemplo, $ax = a \cdot x$). Esse fato é apontado por Booth (1995), Chalouh e Herscovics (1995), Demana e Leitzel (1995), Gil (2007), Pinto (1997) e Scarlassari (2007) como mais uma dificuldade apresentada pelos alunos enquanto estudantes de álgebra elementar. Além disso, a grafia do símbolo “·” representando a multiplicação é pouco explorada na aritmética, ficando um enorme espaço para o símbolo “×”, parecido com o tradicional “x” usado, muito frequentemente, como incógnita ou variável na álgebra.

Booth (1995), Gil (2007) e Pinto (1997) ainda alertam para o caso de que na aritmética também há letras, mas para rotular unidades de medida (cm para centímetros e R$ para reais) ou como abreviaturas (MMC e MDC). Na álgebra as letras passam a fazer parte dos cálculos, passam a simbolizar valores numéricos que podem ser variados ou não. Por esse motivo as letras na álgebra também são outro fator de complicação porque já são conhecidas pelos alunos da disciplina de língua materna (onde não representam números, mas se relacionam ordenadamente). Desta maneira, quando eles não compreendem o que foi pedido por um determinado exercício ou problema, recorrem a seus conhecimentos a respeito das letras e da matemática para atender ao que pensam que lhes foi solicitado.

“Porém, a álgebra não é isolada da aritmética; na verdade é, em muitos aspectos, a ‘aritmética generalizada’.” (BOOTH, 1995, p. 33). Isso significa que a álgebra e a aritmética não podem ser ensinadas, aos alunos, de maneira estanque. O processo de ensinar primeiro uma depois a outra, sem interação entre esses dois sistemas de pensamentos matemáticos, abre espaço para que dúvidas de aritmética sejam caladas durante o aprendizado de álgebra. Então, no instante em que dificuldades aparecerem, derivadas de problemas no aprendizado aritmético, se criará o dilema de regredir e buscar resolver o problema ou avançar, esperando que ele desapareça. Esse dilema não afetará somente o professor, que ensina mais de um aluno por turma e tem de inventar maneiras de avançar seu conteúdo dado juntamente com todos apesar das deficiências de aprendizado de alguns, mas afetará, também, o aluno, que poderá se sentir excluído do grupo de colegas por ter uma dificuldade que, em principio, não condiz com o nível de estudo em que se encontra.

Depois de todas essas considerações, é válida a observação de que é necessário, sim, ensinar aritmética antes da álgebra, mas que em algumas situações do ensino aritmético os alunos poderiam ser estimulados a pensar como seria a resposta de um determinado exercício ou problema se um dos valores variasse ou como escreveriam, matematicamente, algumas generalizações de propriedades aritméticas. Fica evidente que é indispensável uma interação entre as duas áreas, bem como a adaptação de explicações de uma e de outra para facilitar o aprendizado que os alunos podem adquirir quando as relacionam (BOOTH, 1995; CHALOUH e HERSCOVICS, 1995; DEMANA e LEITZEL, 1995; SCARLASSARI, 2007).

2.4.2 ÊNFASE NO CÁLCULO DAS SOLUÇÕES

Há muitos anos, diversos pesquisadores em educação matemática alertam que o que está acontecendo no ensino de álgebra das escolas é um “treinamento” (HOUSE, 1995) de resolução de exercícios e problemas extremamente baseado no simbolismo algébrico. Esse foco nos processos de resolução, nos quais é, inegavelmente, necessária a manipulação simbólica, cria a sensação de que a álgebra é um conjunto de técnicas inventado misteriosamente (DEMANA e LEITZEL, 1995) para se trabalhar com símbolos que até então não faziam parte dos cálculos matemáticos e não eram necessários (AMEROM, 2002). Ou seja, para muitos alunos, o que é ensinado não só deixou de ser matemática como deixou de ter utilidade ou aplicabilidade em seu cotidiano. Essa impressão os leva a questionar o motivo de aprender tais técnicas.

Evidentemente, a ênfase na manipulação de símbolos literais pode ser explicada pela facilidade que esta trouxe para a comunicação dos matemáticos, bem como pela formação acadêmica do professor que a faz (SCARLASSARI, 2007). O problema é que, como o ensino, em diversos locais do mundo, é baseado na comunicação do professor com os alunos, e estes, quando não compreendem o que lhes está sendo ensinado, comumente, lançam mão de artifícios que os ajudem a dar continuidade aos seus estudos. Na maioria dos casos, esses artifícios são a “memorização de regras e procedimentos” (KIERAN apud SCARLASSARI, 2007, p. 43), a imitação e a repetição do que acreditam terem visto o professor fazer (DEMANA e LEITZEL, 1995; SIMON e STIMPSON, 1995) ou a tentativa de adaptar conhecimentos adquiridos em aritmética na álgebra (AMEROM, 2002). Acontece que, depois de utilizar todas essas táticas, os alunos passam a ter dificuldades até para resolver problemas que envolvem situações de seu dia-a-dia quando a resolução destes é solicitada em aula (DEMANA e LEITZEL, 1995), pois tentam encaixar os procedimentos memorizados em sua resolução, e não o que sabem sobre aquelas situações.

Não só o ensino de álgebra se torna inútil e descontextualizado, considerando essa extremada manipulação simbólica, como é frustrante, motivo de horror para uma grande quantidade de estudantes, “ponto crítico [...] [na hora de decidir] continuar ou não estudando matemática” (HOUSE, 1995, p. 7) etc.

2.4.3 A MEMORIZAÇÃO DE FRASES DE ORDEM

Como mencionado acima, a memorização é uma tática utilizada por muitos estudantes para dar continuidade aos seus estudos algébricos escolares. Um problema causado por essa memorização é que nem sempre os alunos gravam corretamente os procedimentos ou lembram-se dos procedimentos corretos, e, assim, utilizam, em diversas ocasiões, regras que não são válidas em álgebra ou naquela situação algébrica específica.

Outro problema da memorização é a quantidade de diferentes situações que podem aparecer e utilizar outras regras que não as que o aluno gravou na memória, como, por exemplo, na pesquisa realizada por Freitas (2002). O autor constatou que muitas vezes os alunos “isolam” a variável como as da equação $-ax = b$ retirando o coeficiente $-a$ do lado da incógnita x e multiplicando b por $\frac{1}{a}$ (que é o inverso multiplicativo do simétrico de $-a$) no outro membro da equação, pois muitos entendem que toda vez que mudam o símbolo de lado precisam trocar o sinal (positivo ou negativo) que os acompanha. Agindo assim, esses alunos mostraram ter memorizado falas do professor e estão procurando encaixar essas frases, ditas pelo professor em aula, em todos os seus procedimentos de resolução de exercícios apresentados nesta pesquisa.

O que podemos observar é que os alunos demonstram ter uma boa disponibilidade em memorizar procedimentos, mas esta os está atrapalhando quando o que gravam não é um procedimento correto. Essa disponibilidade em memorizar procedimentos está atrapalhando os alunos, principalmente por não saberem, ou não terem entendido, que em álgebra é preciso, primeiramente, analisar o problema a ser solucionado para, posteriormente, procurar algum algoritmo que se encaixe naquela situação. Freudenthal (1983, apud AMEROM, 2002, p. 8) escreveu que, mesmo que os alunos tenham entendido que devem analisar o formato do exercício e/ou problema, não sabem como devem fazê-lo e não se sentem autorizados a ler “$a + b, a - b, a \times b$ e a^2 como a mais b, a menos b, a vezes b e a ao quadrado”.

2.4.4 A LINGUAGEM ALGÉBRICA

“Em relação à passagem da aritmética para a álgebra, a novidade nesta última é o é o uso das letras.” (PINTO, 1997, p. 8) Vários autores afirmam que muitas dificuldades dos alunos são originadas pela utilização das letras na álgebra. Milton (1988, apud PINTO, 1997, p. 8, grifos do autor) diz

> As crianças têm dificuldades em estabelecer significado às letras em álgebra. De fato, algumas crianças não percebem que uma letra é usada para significar um número generalizado, embora outras pensem que o valor numérico de uma letra varia conforme a posição que essa letra ocupa no alfabeto, significando que y é maior que a.

Esse trecho do texto de Milton (1988) reforça o que tinha já sido observado anteriormente, sobre as crianças já conhecerem as letras de outras disciplinas, e ainda abre espaço para outra questão, também levantada por Booth (1995), de que para os alunos, letras diferentes significam valores diferentes.

Amerom (2002) e Scarlassari (2007) indicam a falta de definição sobre o que é álgebra como um agravante nas dificuldades dos alunos. Gil (2007) e Usiskin (1995) abordam o fato de que se referir aos símbolos literais como variáveis ou incógnitas, sem explicar seus diferentes usos, cria mais uma dificuldade, nos alunos, quando buscam uma explicação do que representam as letras na matemática. Quanto ao ensino das variáveis, é perceptível a necessidade de generalização e capacidade para simbolização.

Para Booth (1995), outra dificuldade para o aprendizado algébrico são as práticas comuns a vários professores de enfatizarem apenas o uso das letras enquanto representantes de valores incógnitos. Amerom (2002), como já foi referenciado acima, aborda a rápida formalização da sintaxe algébrica.

Sobre o comportamento do professor com a linguagem algébrica, vale ressaltar que, como já discutimos acima, os alunos gravam mentalmente o que ele diz ou as atitudes que diz ter tomado em alguma resolução de exercícios ou problemas, muitas vezes por não compreenderem sua linguagem. Lochhead e Mestre (1995, p. 144) abordam esse tema da seguinte maneira

> Sem a capacidade de interpretar expressões, os alunos não dispõem de mecanismos para verificar se um dado procedimento é correto. Assim, muitas vezes eles têm de recorrer a lembranças dos procedimentos automatizados para resolver problemas [e exercícios].

Como escreveu Scarlassari (2007), o conhecimento das concepções algébricas ensinadas na escola não é inato, sendo necessário um avanço gradual no ensino desta nova ciência. Corroborando com o que fora escrito por ela, Gil (2007, p. 4) diz que "é necessário que o trabalho de conceitos e procedimentos algébricos [...] seja gradual, passando por uma fundamentação verbal, a fim de que estes sejam apropriados pelo aluno de forma efetiva."

Todos os autores consultados dizem ser importante valorizar o conhecimento prévio do aluno. Sobre isso, Schoen (1995, p. 137) fala que

> [...] as mentes dos alunos não são tabulas rasas quando eles começam o primeiro ano de álgebra. Além de já terem conhecimentos adquiridos em cursos anteriores de matemática, os alunos têm muitas crenças e preconceitos sobre a álgebra, sobre problemas e sobre os conceitos do mundo real descritos nos problemas.

Outro problema com a linguagem algébrica ocorre nas ocasiões que professores dizem que $2a + 5b$ é o mesmo que 2 abacaxis mais 5 bananas (BOOTH, 1995). Nestes momentos eles reforçam as dificuldades dos alunos, pois abacaxis e bananas são rótulos e não representações de números (imagine um abacaxi ao quadrado?!).

2.5 A EVOLUÇÃO DA NOTAÇÃO ALGÉBRICA

O relato sobre a história da evolução algébrica, neste trabalho, começa pela Mesopotâmia, o "berço das civilizações", pois lá foram encontrados os primeiros vestígios do que se entende por vida em sociedade. Diversos povos a compunham, como os acadianos, elamitas, sumérios e babilônicos. Estes últimos se tornaram famosos, dentre vários historiadores da matemática, pois deixaram muitas tabuletas de argila de escrita cuneiforme com seus estudos matemáticos. Boyer (1974) conta que, em meio a esses registros encontrados (alguns produzidos em, aproximadamente, 2000 a. C.), podemos perceber que os babilônios sabiam resolver equações lineares, quadráticas e cúbicas e, ainda, tinham noção da existência de equações de quarto e oitavo grau bem como da solução de um tipo dessas duas últimas.

Nestes documentos, eles descreviam, também, os métodos para solucionar essas equações. Segundo Baumgart (1992), para a resolução de equações quadráticas os babilônios apresentaram dois métodos: o paramétrico (que concebe as incógnitas iniciais em termos de uma nova), que era o mais comum; e o método por substituição (o mesmo que utilizamos atualmente em várias escolas, que define uma incógnita em função da outra).

A álgebra usada por essa civilização, baseada nas informações retiradas desses documentos históricos, é chamada, por vários historiadores, de “álgebra retórica”, pois utiliza palavras para representar os números ou grandezas desconhecidas. Essa ideia, unida com o conceito de valor posicional (estendido até para frações) e com a percepção de “transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores” (BOYER, 1974, p. 22) pode ter facilitado todo o desenvolvimento algébrico na Babilônia.

Os egípcios, outra civilização com uma álgebra considerada retórica, escreveram uma grande quantidade de documentos sobre resoluções de equações lineares, mas não avançaram tanto na álgebra quanto a civilização apresentada anteriormente. Baumgart (1992, v.4, p.6) atenta para o fato de que o “sistema de numeração egípcio, relativamente primitivo em comparação com o dos babilônios, ajuda a explicar a falta de sofisticação da álgebra egípcia”.

Os “europeus posteriormente deram o nome [...] de ‘regra de falsa posição’” (BAUMGART, 1992, v.4, p. 6) ao método mais utilizado pelos egípcios nas suas resoluções. Boyer (1974, p.12) nos traz uma explicação sobre esse método (entendendo, na citação abaixo, “aha” como uma incógnita):

> Um valor específico, provavelmente falso, é assumido para aha, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta.

Por volta de 800 a. C., com o declínio intelectual na Mesopotâmia e no Egito, os gregos assumiram o domínio cultural “na região mediterrânea [...] [e dos] principais vales fluviais” (BOYER, 1974, p. 33) das imediações. Com um desejo ardente por aprender novos assuntos, dedicaram-se em conhecer a cultura dos povos com quem tinham contato. Talvez por esse motivo, a álgebra grega, “formulada pelos pitagóricos ([...] 540 a. C.) e por Euclides ([...] 300 a. C.)” (BAUMGART, 1992, p. 6), em relação à álgebra babilônica, "seguia o mesmo método de solução – traduzida, entretanto, em termos de segmentos de retas e áreas e ilustrada por figuras geométricas" (BAUMGART, 1992, p. 5). Essa "tradução" ocorria possivelmente porque os gregos "tinham dificuldades conceituais com frações e números irracionais" (BAUMGART, 1992, p. 8). O estilo algébrico dos gregos é conhecido, por muitos historiadores, como "álgebra geométrica" exatamente por essas traduções.

Com Diofanto (250 a 350 d. C.), a álgebra voltou a ser mais próxima ao estilo retórico dos babilônios (BAUMGART, 1992), mas este autor passou a utilizar-se de abreviações de palavras, iniciando o estilo sincopado da notação algébrica. Sua proximidade com o estilo babilônico está mais sobre os métodos paramétricos de resolução que utilizou em sua obra *Arithmetica* do que sobre seus interesses em desenvolver métodos para solucionar equações. Por essa motivação maior, por apenas achar respostas a problemas, Diofanto não recebeu, por parte de muitos pesquisadores, o título de "pai da álgebra". (BOYER 1974).

Possivelmente contemporânea às civilizações "dos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates" (BOYER, 1974, p. 33), a Índia também mostrou ter uma atividade de estudos matemáticos bastante avançada nos documentos históricos encontrados pelos pesquisadores. Infelizmente, "pouco se sabe sobre a matemática hindu antes dos séculos IV ou V d. C., devido à carência de registros históricos do período antigo" (BAUMGART, 1992, v.4, p.10), mas, dentre o que é conhecido:

> Brahmagupta ([...] 628 [d. C.]) e Bhaskara ([...] 1150 [d. C.]) foram os mais [...] [proeminentes] algebristas hindus. Os hindus resolviam equações quadráticas completando quadrados, e aceitavam números negativos e raízes irracionais; também tinham conhecimento de que uma equação quadrática (com raízes reais) tem duas raízes.
> [...] Eles tentavam achar todas as soluções inteiras possíveis [das equações indeterminadas,] e foram, talvez, os primeiros a dar métodos gerais de solução.[...] E eles mostraram como obter uma infinidade de soluções a partir de uma dada solução x, y (desde que $xy \neq 0$). (BAUMGART, 1992, v.4, p.10)

Também Brahmagupta, além de Diofanto, utilizou o estilo sincopado em suas resoluções de problemas algébricos, mas podemos dizer que o hindu foi além de seu antecessor grego por muitos motivos, sendo um desses o fato de ter fornecido "*todas* as soluções inteiras da equação linear diofantina". (BOYER, 1974, p.161, grifo do autor). Há duas possíveis explicações para essas proximidades entre Diofanto e Brahmagupta, ou o segundo teve contato com a obra do primeiro ou os dois derivaram seus estudos da mesma fonte (possivelmente a babilônica). (BOYER, 1974).

Entre os séculos VII e VIII d. C., os árabes expandiram seu império, conquistando “Índia, Pérsia, Mesopotâmia, Norte da África e Espanha” (BAUMGART, 1992, p. 11). Assim, essa civilização apoderou-se dos escritos desenvolvidos por todos os outros povos que agora eram cativos a eles. Inicialmente, os árabes destruíram parte do que encontraram nesses territórios, mas, posteriormente, passaram a interessar-se por algumas obras, o que lhes fez começar a traduzir vários desses escritos capturados para o árabe. (BOYER, 1974).

É nesse período de traduções e estudos sobre as antigas descobertas de outras civilizações que surge “Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizmi)”(BAUMGART, 1992, p. 1), matemático, astrônomo e mestre na Bait al-hikma (“Casa da Sabedoria” de Bagdá). Este matemático fora autor de alguns livros sobre astronomia e matemática. *De numero hindorum* (Sobre a arte hindu de calcular) é uma copia latina de um dos livros dele, que teve o original perdido, provavelmente baseado numa tradução árabe de Brahmagupta. Al-Khowarizmi expôs com tanta propriedade os numerais hindus que pode ser o responsável pela ideia de que nosso sistema de numeração moderno seja de origem árabe. (BOYER, 1974).

Al-Khowarizmi também escreveu *Hisab al-jabr w’al-muqābalah*, e, por causa deste livro, ficou conhecido como “pai da álgebra”. Sobre o nome deste livro, Baumgart (1992, p. 1) diz que “uma tradução literal do título completo do livro é ‘ciência da restauração (ou reunião) e redução’, mas matematicamente seria melhor ‘ciência da transposição e cancelamento’”.

Boyer (1974, p. 167, grifos do autor) também fala sobre a tradução do título deste livro:

> Não se sabe bem o que significam os termos *al-jabr* e *muqābalah* [...]. A palavra *al-jabr* presumivelmente significa algo como ‘restauração’ ou ‘completação’ e parece referir-se a transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação, a palavra *muqābalah*, ao que se diz, refere-se a ‘redução’ ou ‘equilíbrio’ − isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação.

O mesmo autor registra, ainda, em uma nota de roda pé, que Solomon Grandz questionou essa tradução, pois entendia que “‘jabr’ era uma palavra assíria, para equação e que *al-muqābalah* é simplesmente a tradução árabe de *al-jabr*’”.(BOYER, 1974, p. 167, grifos do autor).

A palavra *al-jabr*, integrante do título desse livro, também escrita como *al-jebr*, ganhou uma variante latina, “álgebra” (BAUMGART, 1992), “pois foi por esse livro que mais tarde a Europa aprendeu o ramo da matemática que tem esse nome." (BOYER, 1974, p. 167).

Abaixo apresentamos duas curiosidades com respeito a uma derivação da palavra álgebra: a primeira foi escrita por Baumgart (1992, p. 3, grifos do autor):

> Os árabes marroquinos introduziram a palavra *algebrista* ('restaurador [,] [...] isto é, consertador [...] de ossos quebrados') na Espanha moura. Como consertar ossos quebrados e sangrias eram serviços adicionais oferecidos em barbearias, o barbeiro local era conhecido como *algebrista*. Daí, também, os mastros de barbearia vermelhos.

E a segunda por Boyer (1974, p. 167): "A influência árabe na Espanha muito depois do tempo de al-Khowarizmi pode ser vista no *Don Quixote*[8], onde a palavra algebrista é usada para indicar um 'restaurador' de ossos."

Em *Hisab al-jabr w'al-muqābalah* a álgebra voltara a ser tratada de maneira retórica, regredindo bastante se compararmos com a notação sincopada utilizada por Diofanto e Brahmagupta. Entretanto, o livro de al-Khowarizmi trazia problemas menos elementares que os expostos por Diofanto e mostrava uma clara e organizada apresentação das resoluções que continha, o que nem hindus nem gregos faziam. (BOYER, 1974). Possivelmente, por essa organização na escrita de al-Khowarizmi, derivou-se de seu nome a palavra algoritmo, que significa qualquer processo especial de calcular. (BAUMGART, 1992; BOYER, 1974).

Por volta do século XI d. C., os cristãos começaram a espalhar-se pela Europa, sendo que no século XII d. C., com muitos territórios já dominados, eles procuraram aprender árabe para compreender as obras que encontravam nos territórios que passavam a ocupar. Tal como seus antecessores, destruíram muitas obras arábicas até perceberem as vantagens que teriam dedicando-se ao estudo e aprendizagem das mesmas. (BOYER, 1974).

Em 1202, Fibonacci (Leonardo de Pisa), escreveu *Liber abaci*, onde deu continuidade ao estilo retórico de al-Khowarizmi. Esse livro é considerado o responsável por difundir o sistema de numeração pela Europa (até porque seu autor fez uma defesa a sua utilização no livro) e por introduzir a álgebra na Europa. (BAUMGART, 1992; BOYER, 1974).

---

[8] Boyer (1974) não explicita em qual edição de Dom Quixote aparece a palavra algebrista dando a entender que é a primeira. De fato, visualizando a primeira edição, de 1615, da *Segunda parte del ingenioso cauallero Don Quixote de la Mancha*, escrita por Miguel de Cervantes Saavedra, disponível em http://www.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/05814067588047095332268/ima0000.htm, podemos encontrar a palavra *algebrista* na página 54 do capítulo XV.

Séculos mais tarde, já na renascença, com o sistema de numeração hindu-arábico bastante conhecido e utilizado na Europa e com a "invenção da imprensa com tipos móveis [...] [(por volta de 1450), que auxiliou na] padronização do simbolismo mediante melhoria das comunicações, baseada em ampla distribuição" (BAUMGART, 1992, p.12), a notação algébrica voltou a desenvolver-se rumando para a diminuição do que era escrito, primeiro com a abreviação de palavras e, depois, com a criação de símbolos. Nesse período, de criação de símbolos, houve uma disputa entre germânicos e italianos sobre a hegemonia dos símbolos para indicar soma e subtração. Os germânicos, que utilizavam os símbolos que conhecemos até hoje, saíram vencedores.

Tratando dos símbolos que não foram criados, mas inseridos de maneira "bem pensada", temos o francês François Viète (1540 -1603). Alguns matemáticos europeus, antecessores a ele, até já haviam utilizado letras em álgebra, mas sem muita clareza se estas representavam números dados ou incógnitos. Viète, ou Vieta como também é conhecido, então, passou a utilizar uma vogal para representar uma quantidade desconhecida ou indeterminada e uma consoante para representar um número conhecido. (BOYER, 1974).

Muitos outros matemáticos fizeram suas contribuições para o avanço da notação simbólica moderna da álgebra, mas o livro *La géométrie* (1637) de René Descartes (1596-1650) é apontado como o princípio desta. (BOYER, 1974). Boyer diz que "quase que o único símbolo arcaico no livro é o uso de $\propto$ em vez de = para igualdade".

Então, como registrou Schoen (1995, p. 135)

> [...] o desenvolvimento histórico do simbolismo algébrico começou com um período de álgebra verbal ou retórica, que durou pelo menos três milênios. Ao período retórico surgiu-se um outro, de mais de um milênio, em que o discurso algébrico caminhou gradualmente da fase retórica para a simbólica.

Por fim, faz-se necessário observar que, historicamente, a humanidade não iniciou seus estudos algébricos apenas por necessidades diárias como o pode ter feito por recreação ou puro interesse na matemática pela matemática, como escreveu Boyer (1974, p. 31)

> As culturas pré-helênicas também têm sido estigmatizadas como puramente utilitárias, com pouco ou nenhum interesse pela matemática por ela mesmo. [...] O lazer era muito mais raro do que hoje, mas mesmo assim havia no Egito e na Babilônia problemas que têm a característica de matemática de recreação. Se um problema pede a soma de gatos e medidas de trigo, ou de um comprimento e uma área, não se pode negar a quem o perpetrou ou um certo humor ou uma procura de abstração. Naturalmente muito da matemática pré-helênica era prática, mas certamente não toda. [...]
> Na prática de cálculos, que se estendeu por um par de milênios, as escolas de escribas usaram muito material de exercícios, frequentemente, talvez, como puro divertimento.

Assim, a história não fornece um argumento favorável às tendências educativas que entendem que os conteúdos ensinados em matemática precisam sempre ter aplicações no cotidiano. Há vários exemplos históricos que demonstram que o estudo de matemática por ela mesma já resultou em diversos avanços para a humanidade como, por exemplo, a invenção do aparelho de tomografia computadorizada.

> Ele nasceu da exploração criativa de uma fórmula matemática deduzida pelo naturalista francês George Louis Leclerc (1707-1788), o Conde de Buffon, a partir de uma brincadeira desprovida de qualquer intenção utilitária. Deixando cair agulha sobre um feixe de retas paralelas traçadas sobre um papel em branco, ele descobriu que, em uma série de tentativas, a probabilidade p de a agulha cortar uma das linhas (em vez de cair entre as linhas) era dada por $\frac{2a}{\pi d}$ onde a é o tamanho da agulha e d é a distância entre as linhas paralelas (a < d). Cerca de 200 anos depois dessa brincadeira um matemático, um físico e um engenheiro vislumbraram uma aplicação para a fórmula de Buffon, construindo, a partir dela, o primeiro tomógrafo. (Machado, 2008, p. 14)

Mudando de perspectiva, os inventores do tomógrafo analisaram a situação que tinham (precisavam determinar o tamanho de um corpo estranho no interior da cabeça de uma pessoa) e pensaram na utilização da fórmula $p = \frac{2a}{\pi d}$, imaginando “lançar as linhas sobre a agulha”. Como não poderiam medir de maneira direta o corpo estranho, pensaram em lançar feixes de radiações paralelas em diferentes direções sobre a cabeça da pessoa examinada, tornando-se possível contar o número de vezes que esses feixes cruzariam a “agulha” e quando não a cruzariam. Considerando o número obtido na contagem como a probabilidade p de as linhas cruzarem a agulha ficava simples determinar o comprimento a desta, usando a fórmula de Buffon.

Enfim, sobre a evolução da notação algébrica e sua necessidade ao longo do tempo podemos dizer que o pensamento inúmeras vezes precede a escrita; esta é inventada de acordo com a necessidade (BAUMGART, 1992).

3. A CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Partindo dos pontos levantados pelas pesquisas que fazem parte da fundamentação teórica deste trabalho e das observações da autora (comentadas na introdução do mesmo), decidimos que esta proposta deveria conter situações cotidianas que apenas pudessem ser resolvidas utilizando conceitos algébricos e que o modo de agir da pesquisadora/autora precisava ser o mais diferente possível do que é feito por vários professores.

Formulamos essa proposta pensando que os alunos que participassem de sua aplicação prática precisavam entender o motivo de adotarmos letras na matemática e, caso outros professores venham a se inspirar nela, possam facilmente adaptá-la para sua realidade de ensino, sem necessitar utilizar mídias ou materiais concretos. Essas considerações sobre os professores que podem ler essa proposta se baseiam, também, no interesse que não só alunos tenham facilidade em aprender álgebra, mas que seus professores tenham facilidade para modificar sua prática.

Abaixo, explicamos de onde extraímos e por que escolhemos as questões utilizadas nas atividades presentes no anexo I. Em seguida, exemplificamos quais atitudes a pesquisadora/autora tomou no desenvolvimento da prática da proposta e, enfim, apresentamos como seria uma proposta de ensino que levasse em consideração as ponderações deste trabalho.

3.1 SITUAÇÕES DO COTIDIANO

No capítulo anterior, foi definido o que seria entendido por álgebra neste trabalho. Assim, pensando que generalizações, variações e incógnitas estão presentes também em nosso dia-a-dia, buscamos exercícios e problemas no banco de questões da OBMEP[9], em notícias de jornais e em situações que os alunos podem vivenciar.

A estratégia de inserir problemas do cotidiano nas atividades aplicadas é justificada pelos pedidos dos alunos de aprenderem conteúdos relacionados com sua vida extra-escolar e pela inquietação que a frase “a matemática está em tudo” causa na autora deste trabalho. Esta frase é, repetidas vezes, declarada por diversos professores com a intenção de motivar seus alunos a estudarem matemática ou para justificar seu ensino. Mas, se a matemática está em tudo, por que pouco ou nada desse “tudo” é visto no aprendizado de álgebra (pelo menos nas aulas que a autora presenciou, ministrou ou

[9] Está é a sigla utilizada, nacionalmente, para identificar a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Publicas.

em que foi aluna não foram vistas essas aplicações que, se são tão evidentes, deveriam ser mais frequentes)?

Procurando mostrar que de fato “a matemática está em tudo”, fomos à busca de situações que demonstrassem essa aplicabilidade da matemática (álgebra) em “tudo”.

Mas a utilização de problemas para introduzir a álgebra no ensino fundamental pode, isoladamente, auxiliar os alunos a se auto responderem por que é preciso utilizar letras na matemática? Se o professor iniciar essa introdução com problemas que “treinem” seus alunos a buscarem o que é x e o que é y, a resposta é não. Afinal, ainda restará a dúvida de “por que preciso procurar o x e o y”?

Assim, é importante que os problemas propostos apresentem situações em que a resolução aritmética não seja simplesmente aplicada e que o professor conduza os alunos a descreverem o que estão procurando calcular, bem como, quais operações estão envolvidas nesse cálculo, de acordo com o problema.

Pensando sobre isso, a autora deste trabalho procurou tomar atitudes, durante a aplicação da prática da proposta, que conduzissem os alunos, participantes dessa, a escrever os problemas que seriam resolvidos, primeiramente, usando palavras, para só depois irem diminuindo o que escreviam, até chegarem à utilização das letras.

3.2 PROPOSTA DE ENSINO

Partindo de todas as considerações apresentadas anteriormente, o que propomos para o ensino de álgebra elementar é:

- Que a álgebra seja introduzida com a utilização de situações problema que, preferencialmente, os alunos possam encontrar em seu cotidiano.
- Que a linguagem algébrica surja nas aulas de matemática como ponto final de um processo em que primeiro os alunos utilizam palavras, depois abreviações e por fim os símbolos.
- Também para a utilização dos símbolos é recomendado, por alguns pesquisadores de educação matemática, que haja um processo em que primeiro os alunos utilizem símbolos de sua preferência para depois conhecerem os internacionalmente adotados.
- Para cada utilização (palavras, abreviaturas e símbolos), o tempo pode ser o mesmo ou maior para as atividades com palavras e abreviaturas.
- Que as diferenças da aritmética para a álgebra sejam pontuadas (justaposição, equivalência, letras etc.).

4. A APLICAÇÃO DA PROPOSTA

A presente proposta foi aplicada com o nome de projeto **"Equações: do verbal ao simbólico"**, no turno da tarde (inverso ao das aulas dos alunos participantes) em uma escola de ensino fundamental de Porto Alegre. Durante as tardes dos dias 4, 5, 6 e 7 de junho de 2013 foram realizadas oficinas com duração de duas horas e com a participação de alunos convidados, do professor de matemática destes alunos (nos dois primeiros dias de oficina e na divulgação do projeto) e da pesquisadora/autora deste trabalho.

Os dez alunos que participaram da prática, tomaram conhecimento desta após seu professor de matemática divulgá-la para as turmas de sétimo, oitavo e nono ano[10], atendendo a uma solicitação da autora deste trabalho. A maioria que se candidatou às vagas do projeto era da turma de sétimo ano, algo curioso para mim, para o professor deles e para a direção da escola, pois esta turma ainda não viu nenhum conteúdo de álgebra escolar.

Durante a "propaganda" do projeto, os alunos foram informados que esse iria tratar do "por que as letras começam a ser utilizadas na matemática?" e "como a gente opera com elas?". Para o sétimo ano o enfoque foi diferente, por eles ainda não terem aprendido álgebra na escola. Para eles, foi dito que o projeto trataria de um assunto que eles ainda não estudaram, mas que muitas pessoas encontram dificuldades quando o aprendem na escola. Também lhes foi dito que a pretensão do projeto era tentar amenizar essas dificuldades. No dia 3 de junho do presente ano, os alunos levaram para casa o termo de consentimento informado, para que seus pais assinassem, e uma primeira atividade, para que procurassem resolver sozinhos. Neste dia também, a diretora da escola assinou o termo de consentimento institucional.

Abaixo poderemos ver o relato do desenvolvimento de cada aula e uma análise das atividades realizadas pelos alunos.

4.1 PRIMEIRO DIA

Na tarde de 4 de junho, a pesquisadora chegou à escola e demorou a encontrar os alunos que participariam da atividade que começaria às 13h. Ela passou, aproximadamente, dez minutos organizando a sala, testando o computador que gravaria os diálogos de sala de aula e perguntando ao professor de matemática dessas turmas se ele sabia quem iria e se alguém, de fato, apareceria. Depois desse período, quatro alunos

[10] Esta escola ainda funciona no sistema de séries. Portanto são as turmas de sexta, sétima e oitava séries.

chegaram à sala, já informando que não haviam conseguido resolver nenhum dos problemas e exercícios. Alguns contaram que nem seus irmãos, tios e amigos, que já tinham concluído os estudos básicos, conseguiram realizar as tarefas.

Todos esses alunos que chegaram, até aquele momento, eram do sétimo ano. Esta turma estava totalmente "crua" como disse o seu professor. Ainda estavam iniciando o estudo dos números inteiros (informação que só foi comunicada a pesquisadora no segundo dia de atividade e atrapalhou um pouco a compreensão desses alunos, do sétimo ano, neste dia e nos seguintes).

Depois de entrarem e sentarem-se próximos ao computador, esse grupo de alunos disse que não havia compreendido nada do que era para ser feito na atividade que levaram para casa. Estes alunos foram questionados, então, se queriam resolver uma das questões no quadro com o auxílio da pesquisadora. Após uma resposta afirmativa, a resolução do problema três foi iniciada, atendendo aos pedidos de algumas alunas. Enquanto a resolução deste problema era feita, mais cinco alunos entraram na sala (duas do oitavo ano e os outros três do sétimo).

O terceiro problema, o primeiro a ser solucionado no dia, colocava as seguintes situações e questões:

1. *Uma empresa de construção civil estuda reformar a calçada que fica ao redor de um de seus empreendimentos. Ela pretende colocar canteiros, como os da figura*  *, com plantas pequenas cortando placas de concreto com 2 m de largura por 1,6 m de comprimento. Sabendo que cada canteiro terá um formato quadrado, responda:*
    a. *Qual é o tamanho máximo que podemos dar ao lado dos canteirinhos?*
    b. *Qual é o tamanho mínimo?*
    c. *Se os canteirinhos têm lado 60 cm, qual é o perímetro da parte restante?*
    d. *Como podemos representar o perímetro da parte restante do azulejo utilizando o menor número de palavras possível?*
    e. *Se o perímetro da parte restante for de 9 m, qual é o lado dos quadradinhos?*
    f. *Como podemos representar o lado dos canteirinhos sabendo o perímetro da parte restante?*

O objetivo deste problema era investigar como os alunos interpretariam as variações dos quadradinhos, como lidariam com as informações fornecidas pelo problema e como generalizariam outras informações.

Todas as informações deste problema foram escritas no quadro com a utilização de uma grande quantidade de palavras e de símbolos matemáticos conhecidos pelos alunos (números e símbolos operatórios). Também foi redesenhada a figura do problema, que estava ruim na cópia que os alunos tinham recebido (Figura 3).

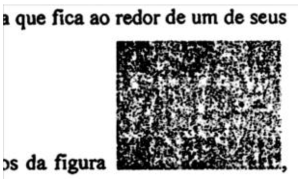


Figura 3 – Figura da questão três no xerox dos alunos.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Durante a resolução, a pesquisadora mostrou que a medida da largura da placa de concreto (2 m) era igual à soma de três lados de quadrados iguais e de dois restos (espaços que ficariam entre os quadrados dependendo de sua medida lateral). Buscando diminuir as somas escritas no quadro, a pesquisadora perguntou aos alunos como poderia reescrever as somas de lados e de restos de uma maneira mais “reduzida”. Em suas respostas, os alunos testaram diversos valores numéricos. Incomodada com esses “chutes”, a pesquisadora perguntou por que os alunos continuavam insistindo em testar valores numéricos para tentarem resolver o problema. A aluna P6 respondeu essa última indagação dizendo que os alunos procediam desta maneira, pois não sabiam solucionar equações sem números.

Após várias tentativas de respostas dos alunos e de “dicas” fornecidas pela pesquisadora, a aluna B6 disse que as somas dos lados eram o mesmo que três vezes lado. Depois dessa afirmação, o aluno L6 disse que a soma dos restos poderia ser reescrita como duas vezes resto.

Na continuação desta resolução foi preciso explicar aos alunos que os lados dos quadradinhos poderiam ser modificados até não sobrar nada em um dos lados da placa de concreto ou até não ter canteiros nessa placa. Assim, em conjunto com a pesquisadora, a turma concluiu que no caso de tamanho máximo não sobraria resto no lado de medida dois metros da placa de concreto, pois era o lado que sobrava menos espaço entre os quadradinhos quando suas medidas de lado eram aumentadas.

Com esta conclusão, a resolução do exercício culminou na equação, escrita no quadro, $2m = 3 \times lado$, para o caso do tamanho dos lados dos quadradinhos ser o maior possível. Neste momento, esperando facilitar o entendimento dos alunos, a pesquisadora lhes sugeriu que modificassem o 2 *m* por sua medida em *cm*.

Os alunos demonstraram bastante dificuldade para lembrar a medida de um metro em *cm*. Tentando auxiliá-los nessa construção, a pesquisadora pegou uma régua de 30 *cm*, com o aluno L6, e foi posicionando-a, sobre uma mesa, como se a estivesse colocando ao lado do espaço ocupado pela régua anteriormente. Mesmo assim, a pesquisadora precisou informar os alunos que o metro tem 100 *cm*, pois alguns ainda disseram que o metro tinha 120 *cm*, 150[11] *cm* ou até 1000 *cm*.

Quanto à equação $200cm = 3 \times lado$, novamente os alunos tiveram dificuldade em perceber o que precisavam fazer para encontrarem apenas o valor de um dos lados. Após testarem diversos valores, a pesquisadora disse à turma que não queria ouvir um valor numérico, mas sim como obter aquele valor, e deu algum tempo para que eles descobrissem sozinhos, esse método. Enquanto passava por entre as mesas a pesquisadora percebeu que alguns alunos já faziam uma ideia de como conseguir solucionar o problema (Figura 4).

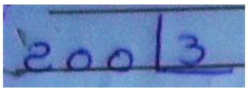


Figura 4 – Aluna P7 tentando calcular o valor de um único lado do problema em discussão.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Um tempo depois, a pesquisadora foi ao quadro e mostrou que, para descobrir o valor de um lado, era preciso dividir o valor dos três lados por três. A aluna P6, procurando explicar como havia chegado ao valor que testou, disse ter se lembrado da demonstração da construção do metro com a régua. Ainda sim o valor que disse era aproximado ao resultado.

Abaixo, podemos ver uma estratégia da aluna C6 para tentar entender como funcionava o avanço do tamanho do perímetro em função dos lados de um quadrado (Figura 5).

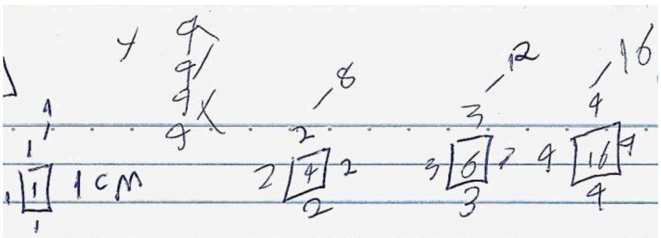


Figura 5 – Aluna C6 testando diversos valores para o perímetro do quadrado.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

[11] Suspeitamos que os 120 *cm* e 150 *cm* que alguns alunos disseram que o metro tinha pode ter relação com os 30 *cm* da régua que foi usada.

Após a resolução do problema três, os alunos foram liberados para resolverem, sozinhos, outros problemas enquanto o professor de matemática deles e a pesquisadora andavam pela sala para auxiliá-los.

Alguns alunos começaram resolvendo o problema um da primeira atividade, que abordava a seguinte situação:

1. *Tarifa de táxi fica 8,09% mais cara nesta terça-feira. [...] O reajuste de 8,09% na tarifa dos táxis de Porto Alegre começou a valer nesta terça-feira a partir da 0h01min, com o início da entrega das novas tabelas para os taxistas. O quilômetro rodado passou de R$ 1,95 para R$ 2,11, na bandeira 1, e de R$ 2,54 para R$ 2,74, na bandeira 2. A bandeirada inicial, que era de R$ 3,90, passou para R$ 4,22. (Notícia retirada do site http://jcrs.uol.com.br/site/noticia.php?codn=122795 no dia 20/05/2013, às 07:40. Adaptada, especialmente, para esta lista de exercícios.).*
    a. *Qual é o valor mínimo que o passageiro pagará?*
    b. *Podemos determinar um valor de máximo a ser pago pelos passageiros?*
    c. *Uma senhora pegou um táxi na zona norte e desceu na zona sul de Porto Alegre. Se no trajeto o táxi percorreu 25 km, qual foi o preço pago por essa senhora pela corrida?*
    d. *Um rapaz pagou R$ 42,20. Quantos quilômetros ele andou?*
    e. *Como podemos representar o método utilizado pelos taxímetros para registrar o preço da corrida utilizando o menor número de palavras possível?*
    f. *Como podemos saber quantos quilômetros rodamos de taxi sabendo o preço que pagamos?*

Com este problema, a pesquisadora/autora e a professora orientadora deste trabalho pretendiam investigar como os alunos trabalhariam com questões que não fornecem informações diretas para o cálculo de uma solução e como eles lidariam com generalizações.

A aluna C6 apresentou dificuldades com a leitura deste problema. Ela não teve facilidade em identificar o que era importante para o problema que resolveria, atrapalhando-se com os valores de bandeirada antiga e nova. Já quando respondeu qual era o valor máximo que um passageiro pagaria, ela não demonstrou dificuldades em entender que haveria um valor a ser pago e respondeu que "*é infinito o valor, pois não sabemos quantos quilômetros ele andou.*" (Figura 6).

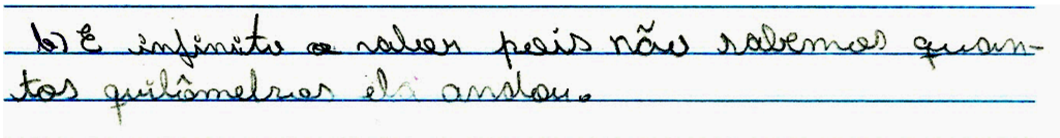


Figura 6 – Resposta da aluna C6 a questão (b) do 1º problema da 1ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Em suas resoluções das questões (*c*) e (*d*), nas quais cálculos eram necessários, podemos ver que ela teve dificuldades em usar a multiplicação e de utilizar-se de resultados anteriores (Figuras 7 e 8). Contudo, foi a única aluna a obter a resposta correta para a questão (*c*) deste problema, talvez por ter resolvido esta com um método que lhe trazia segurança e que ela conhecia bem.

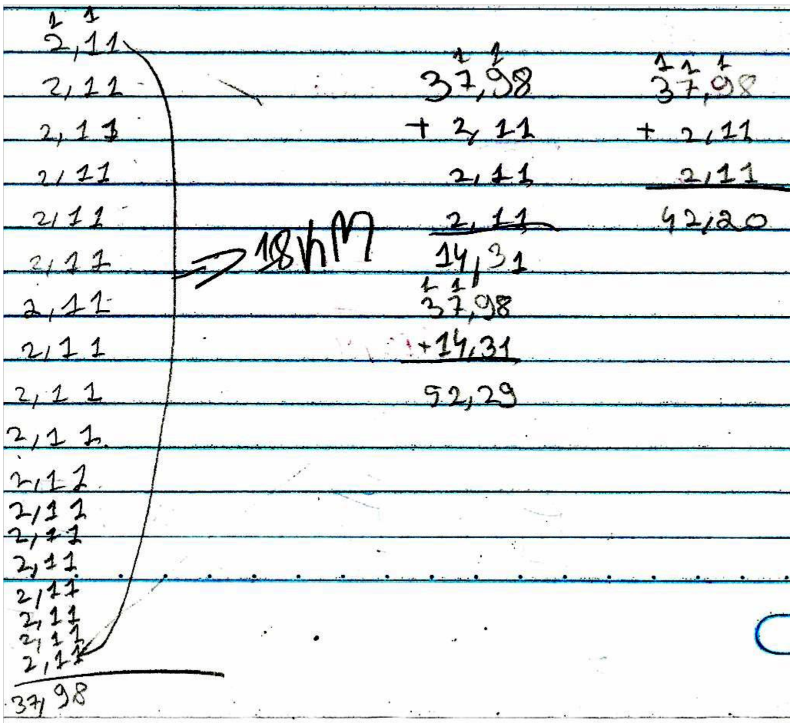


Figura 7 – Aluna C6 calculando somas com várias parcelas.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

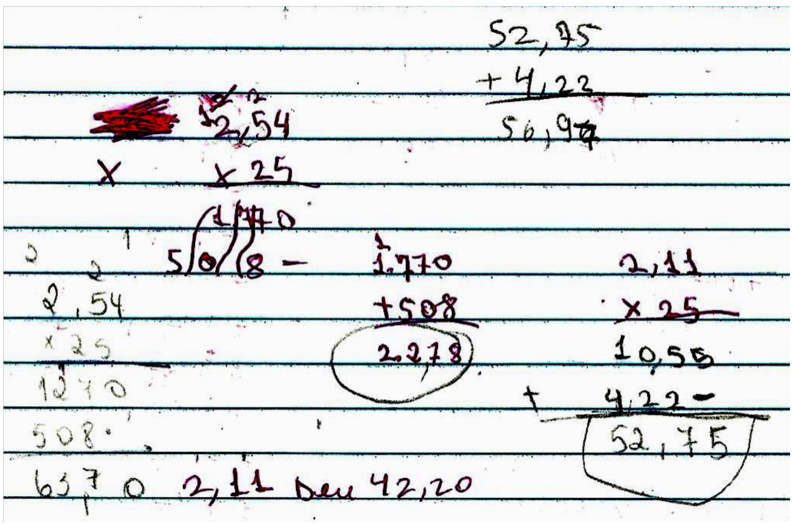


Figura 8 – Aluna C6 utilizando a multiplicação.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

O aluno J6 demonstrou, inicialmente, certa resistência em escrever seus procedimentos de resolução. Apesar disso, foi o único a escrever que o valor mínimo, que será pago por um passageiro em um táxi, depende de quanto ele andar. Essa foi uma pergunta comum entre os alunos (quantos quilômetros o passageiro andou nesse “mínimo”?), mas todas as explicações foram que ou o passageiro não pagava nada (caso ele não andasse de táxi) ou ele pagaria apenas o valor da bandeirada se não houvesse quilômetro rodado.

Este aluno também foi o único a não demonstrar estranheza ao escrever e trabalhar com equações matemáticas, em palavras, neste dia, procedendo assim, com ajuda da pesquisadora, na resposta da questão (*f*) deste problema. Juntos, chegaram a equação “*a banderada + o valor do quilômetro = o valor do pagamento*” (Figura 9). Sozinho, o aluno J6 procurou exemplificar em números esta equação escrevendo

“Ex. [1km]: $\begin{array}{r} 4{,}22 \\ +2{,}11 \\ \hline 6{,}33 \end{array}$*”* (Figura 9).

A pesquisadora perguntou para este aluno se ele havia compreendido que o passageiro poderia andar vários quilômetros e não apenas um e ele respondeu que sim, e ainda deu a entender que bastava calcular o valor dos quilômetros e somar com a bandeirada.

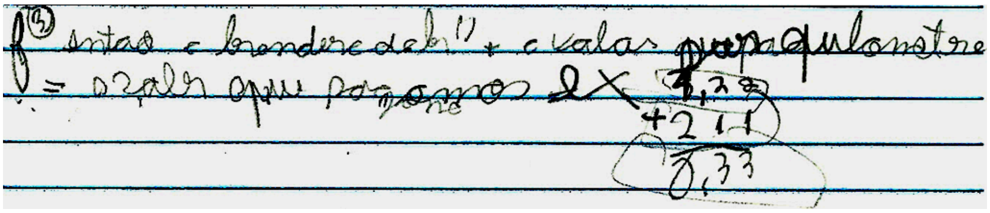


Figura 9 – Resposta do aluno J6 a questão (f).
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Os alunos N6 e P6 estavam sentados em mesas próximas. Talvez esta seja a justificativa para suas respostas iguais (Figuras 10 e 11). Esse fato não foi apontado na fundamentação teórica, mas é algo que precisa ser pensado por nós professores: muitos alunos, por não entenderem o que precisam fazer ou para confirmarem o que estão fazendo, conferem suas respostas com os colegas. Infelizmente esses alunos erraram suas respostas da questão (*c*), mas é interessante observar como eles procederam nesta resolução: sendo o valor do quilômetro rodado R$ 2,11, eles começaram multiplicando a quantidade de quilômetros rodados por 2. Seu erro foi somar os centavos referentes a um quilômetro rodado com o valor da bandeirada em vez de multiplicá-lo por 25 km também.

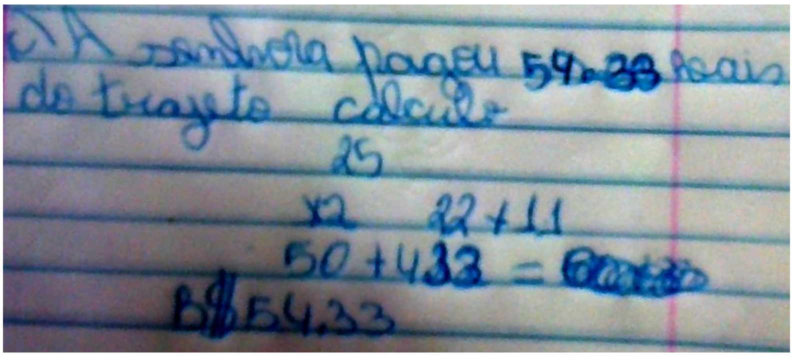


Figura 10 – Resposta da aluna N6 a questão (c).
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

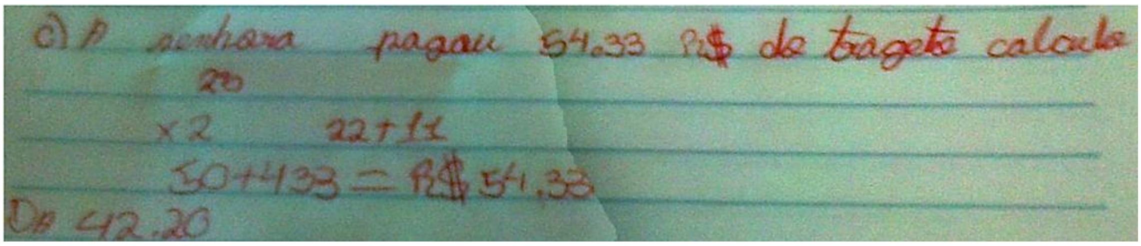


Figura 11 – Resposta do aluno P6 a questão (c).
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

A aluna D6 escolheu resolver o problema quatro que trazia a seguinte situação:

2. *Em quase todas as escolas, todos os anos, as turmas do nono ano do ensino fundamental começam a pensar em maneiras de arrecadar dinheiro para a formatura. Uma das alternativas que escolhem é vender lanches para os outros alunos da escola durante o recreio e em datas especiais (festas juninas, campeonatos etc). Geralmente, como bebida, esses estudantes vendem refrigerante.*

   Uma turma decidiu comprar, todos os dias de aula, 3 garrafas de 2 litros de um refrigerante sabor cola, que custam 3,79 reais cada no supermercado mais próximo à escola. Essa turma venderá o refrigerante em copos plásticos de 300 ml cada, custando R$ 1,25.

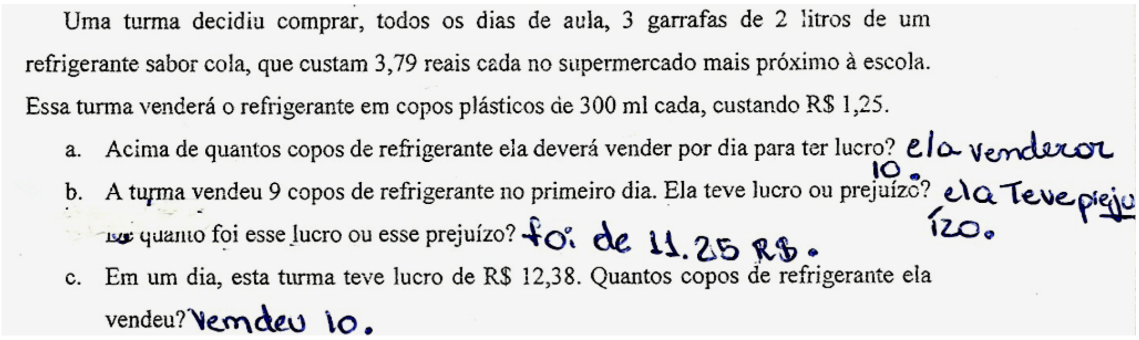
   a. *Acima de quantos copos de refrigerante ela deverá vender por dia para ter lucro?*
   b. *A turma vendeu 9 copos de refrigerante no primeiro dia. Ela teve lucro ou prejuízo? De quanto foi esse lucro ou esse prejuízo?*
   c. *Em um dia, esta turma teve lucro de R$ 12,38. Quantos copos de refrigerante ela vendeu?*
   d. *Represente, com o menor número de palavras que conseguir, o cálculo que a turma tem de fazer para descobrir se teve lucro ou prejuízo no dia.*
   e. *Durante uma semana da escola (5 dias), a turma vendeu 12 copos de refrigerante por dia. Qual foi o seu lucro ou prejuízo?*

f. *A turma vendeu 8 copos de refrigerante por dia em duas semanas (10 dias). Qual foi o seu lucro ou prejuízo depois desses dias?*

g. *Expresse, com o menor número de palavras que você conseguir, o lucro ou prejuízo que a turma terá depois de certa quantidade de dias.*

Novamente, as pretensões das idealizadoras deste problema eram avaliar como os alunos lidavam e explicavam generalizações.

Podemos ver, na figura 12, que a aluna não compreendeu que o lucro é diferente do valor recebido, respondendo quanto a turma ganhou pela venda dos 9 copos. Ao mesmo tempo, pode-se ver que ela entende que, para ter lucro, o valor da venda tem de ser maior que o da compra de materiais para vender, como se pode observar na resposta da primeira pergunta de (*b*).



Uma turma decidiu comprar, todos os dias de aula, 3 garrafas de 2 litros de um refrigerante sabor cola, que custam 3,79 reais cada no supermercado mais próximo à escola. Essa turma venderá o refrigerante em copos plásticos de 300 ml cada, custando R$ 1,25.

a. Acima de quantos copos de refrigerante ela deverá vender por dia para ter lucro? ela venderá 10.

b. A turma vendeu 9 copos de refrigerante no primeiro dia. Ela teve lucro ou prejuízo? ela Teve prejuízo 120.
De quanto foi esse lucro ou esse prejuízo? foi de 11.25 R$.

c. Em um dia, esta turma teve lucro de R$ 12,38. Quantos copos de refrigerante ela vendeu? Vendeu 10.

Figura 12 – Respostas da aluna D6 ao problema 4 da 1ª atividade
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

A frase em português que essa aluna escreveu (“*o lucro é o que eu ganhei menos o que eu gastei*”), que pode ser vista na Figura 13, bem como a equação com palavras, foram cópias de falas da pesquisadora. Mas, mesmo com essa “ajuda”, a aluna achou que deveria calcular a diferença entre R$ 12,38 (que era o lucro) e 11,37 (que era o gasto do dia) ao invés de sua soma. O cálculo em que realiza a soma também foi feito após ajudas dos professores presentes.

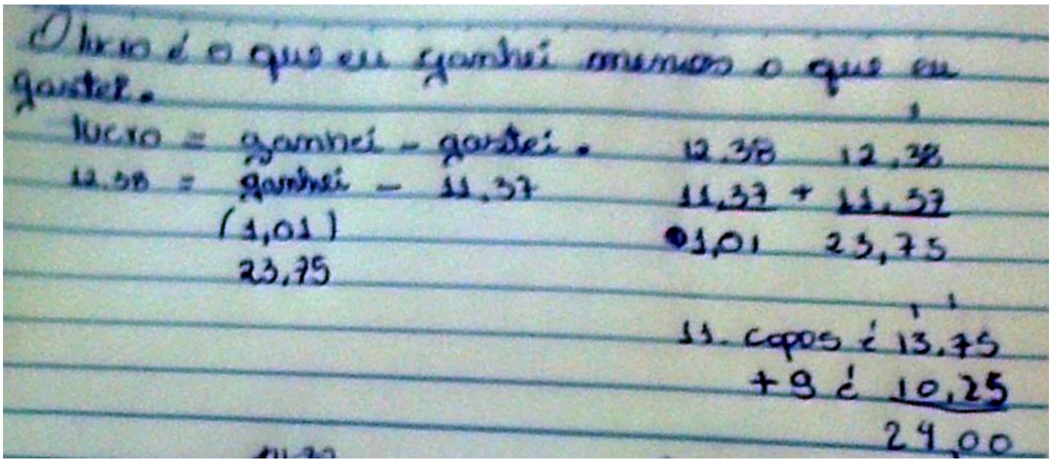


Figura 13 – Resoluções, da aluna D6, do problema 4 da 1ª atividade
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Com o problema cinco desta atividade, as idealizadoras deste intencionavam investigar quantos alunos do sétimo ano tentariam resolver equações com símbolos e como fariam estas resoluções. Também tinham a intenção de investigar qual era o nível de compreensão das alunas do oitavo ano sobre a resolução de exercícios algébricos.

Na resolução da questão *(a)* do exercício cinco ($7y + 8y + 364 = 28y$), as duas alunas do oitavo ano, P7 e J7, consideraram $7y$ como um número de dezena 7 e unidade y e que $8y$ era um número de dezena 8 e unidade y. Ainda consideraram, após várias tentativas de somar números com dezena sete a números com dezena oito, que y deveria valer algo entre "6, 7, 8 ou 9" (Figuras 16, 17 e 18). Elas alegaram que esses números, quando somados, chegariam mais próximos a duzentos e oitenta e "algumas coisa" ou a 364 quando somados a duzentos e oitenta e "alguma coisa" (Figuras 14 e 15). Quando pediram para a pesquisadora lhes ajudar neste exercício, as duas alunas já haviam, também, conjecturado que os y's deveriam ser iguais (já que a letra era a mesma) (Figura 19).

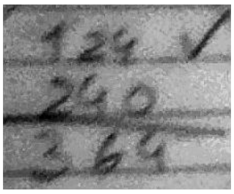


Figura 14 – Cálculos das alunas P7 e J7.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Figura 15 – Cálculos das alunas P7 e J7.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

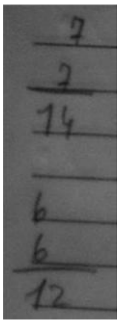


Figura 16 – Cálculos das alunas P7 e J7.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Figura 17 – Cálculos das alunas P7 e J7.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

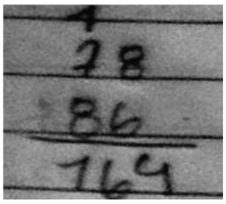


Figura 18 – Cálculos das alunas P7 e J7.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

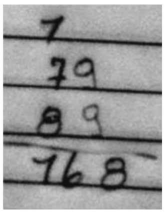


Figura 19 – Cálculos das alunas P7 e J7.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Essa dificuldade, apresentada pelas alunas do oitavo ano, tem relação com a justaposição algébrica. Este exemplo confirma o que foi levantado por muitos autores da fundamentação teórica deste trabalho, que alguns alunos interpretam a justaposição sendo uma soma (no caso, o valor posicional dos nossos númerais indo-arábicos).

Vale observar que os alunos do sétimo ano não tentaram resolver estes exercícios. Alguns até disseram que mostraram para seus parentes, mas eles mesmos não arriscaram-se. Isso pode ser um indício de que os alunos que já trabalharam com a álgebra na escola preferem resolver exercícios escritos em linguagem algébrica do que problemas. Lochhead e Mestre (1995) trazem que, realmente, os alunos, que já estudaram álgebra na escola, fogem da resolução de problemas.

Depois de ouvir as colocações das alunas do oitavo ano, a pesquisadora lhes solicitou que fizessem outra atividade, pois aquela seria discutida, mais profundamente, na sexta-feira. Assim, essas alunas começaram a solucionar a primeira questão da segunda folha de atividades, que já havia sido entregue para ser feita por eles em casa e no outro dia. Essa questão tinha o seguinte enunciado:

1. *Em uma escola...*
   a. *20% dos alunos dos 8º anos tiraram 10 na última prova de matemática. Sabendo-se que os oitavos têm ainda 28 alunos que não tiraram 10, quantos alunos estão no 8º ano dessa escola?*

Decidindo o que era relevante para a resolução deste problema, essas alunas tiveram alguma dificuldade em relacionar os dados do problema. Se mostraram capazes de dizer o que o problema pedia e o que fornecia como informações, mas não entendiam como calculariam o total de alunos sabendo apenas o valor de uma parte e a porcentagem que representava a outra parte. Com ajuda da pesquisadora escreveram (Figura 20):

“$\frac{20}{100}y^{\text{a quantidade de alunos}}$ + 28 = É quantidade de alunos”.

O y apareceu nesta resolução, pois a pesquisadora disse às alunas que essa resolução parecia-se com a que elas tentaram resolver, anteriormente, isto é, havia uma quantidade desconhecida de um lado e do outro da igualdade.

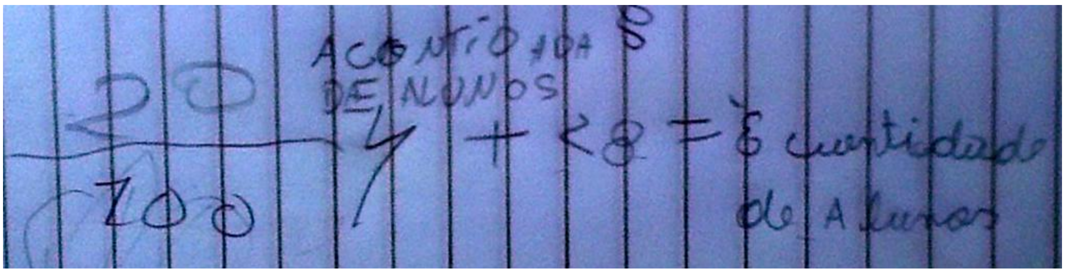


Figura 20 – Equação escrita pelas alunas P7 e J7.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Como o que haviam escrito não lhes foi útil, essas alunas pediram ajuda ao seu professor. Com ele, pensaram o quanto que os 28 alunos representavam na turma em porcentagem.

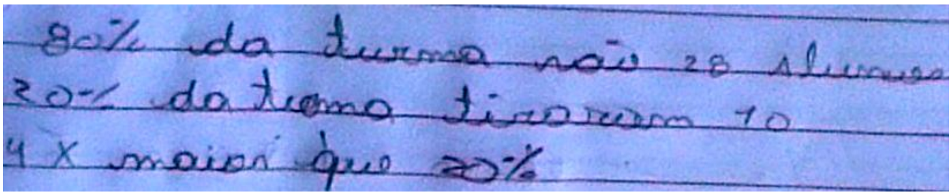


Figura 21 – Dados levantados pelas alunas P7 e J7.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Inicialmente, não entenderam as implicações do que escreveram, partindo, assim, à busca de uma maneira alternativa para encontrarem quantos alunos eram os 20% da turma.

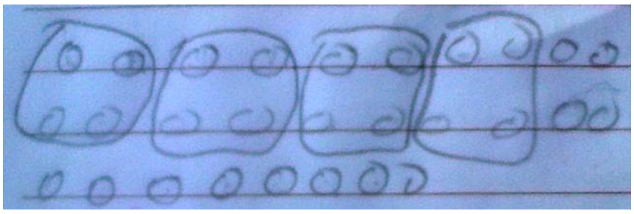


Figura 22 – Maneira alternativa das alunas P7 e J7 para tentar resolver o 1º problema da 2ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Enquanto trabalhavam em cima desta maneira alternativa, perceberam que deveriam dividir o número 28 por 4 e assim obteriam quantos alunos faziam parte dos 20%, já que 80% era 4 vezes maior que 20%. Procedendo desta maneira, as alunas do oitavo ano demonstraram que muitos estudantes não encontram problemas em transitar por diversas formas de representação, desde que entendam o que e porque estão utilizando tal forma.

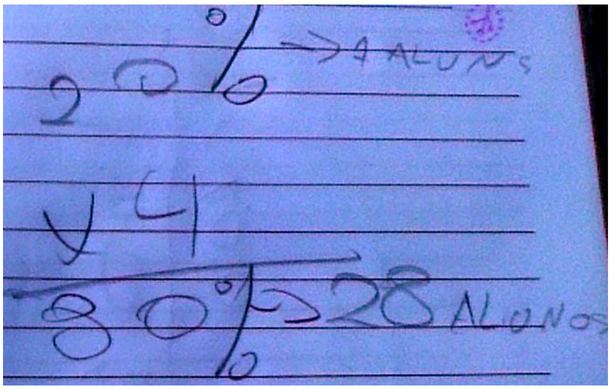


Figura 23 – Cálculos das alunas P7 e J7.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

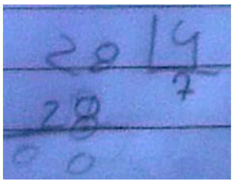


Figura 24 – Cálculos das alunas P7 e J7.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Na análise do primeiro encontro, entendemos que a atividade, entregue no dia anterior para ser resolvida em casa, criou nos alunos uma curiosidade de "como fazer". Essa curiosidade foi fundamental para as tentativas dos alunos neste dia. Agindo desta forma, esses alunos reforçaram nossa suposição de que os alunos que passam a não querer aprender algum conteúdo na escola reagem assim por que seu interesse, sua curiosidade não foi despertada. Pensamos que essa curiosidade também se deve ao fato de que a maioria dos problemas, que compunham a atividade, relacionavam situações que os alunos poderiam se deparar ao ler/ver um jornal de notícias. Outro fator que pode ter causado essa curiosidade, na maioria destes alunos, é que a atividade trazia um conteúdo que só seria aprendido na escola futuramente.

Também podemos observar que a dificuldade de leitura de muitos desses alunos lhes atrapalhou no levantamento dos dados relevantes ao problema e na escrita de algumas conclusões. Essa dificuldade liga diretamente a álgebra e a língua materna destes alunos, visto que esse problema de leitura também acarretava dificuldades em escrever, mesmo em sua língua materna, o que o problema pedia e os dados que fornecia. Assim, não nos pareceu estranha a dificuldade que esses alunos demonstravam em escrever em linguagem algébrica retórica (com a utilização de palavras em vez de símbolos).

O objetivo principal deste primeiro encontro foi alcançado. Este objetivo era que os alunos trabalhassem com situações problema em que não se pode aplicar, facilmente, conhecimentos aritméticos. Assim, esses alunos tiveram a oportunidade de perceber que uma nova "ferramenta", para resolver esse tipo de problema, se faz necessária.

4.2 SEGUNDO DIA

No segundo dia de projeto, o aluno J6 se ausentou e a aluna K6 compareceu. Neste dia, a oficina foi realizada na biblioteca da escola, pois a sala que tinha sido utilizada no primeiro dia de projeto seria ocupada por outra professora. A sala da biblioteca contava com um quadro negro em péssimo estado e seus livros distraíram os alunos em vários momentos.

Nesta tarde a temperatura ambiente estava relativamente alta e a sala da biblioteca logo ficou abafada. O ventilador desta sala não funcionava e isso tornou mais difícil a realização da atividade. Supomos, baseados nas alegações da turma, que por conta do calor, os alunos ficaram agitados e com menos disposição para a realização de tarefas. O calor e algumas barreiras no desenvolvimento das resoluções dos exercícios chegaram a irritar os alunos em diversos momentos, ao ponto da aluna C6 escrever, duas vezes, em letras garrafais, a expressão "*não sei*" no lugar da resposta de algum exercício (Figura 25).

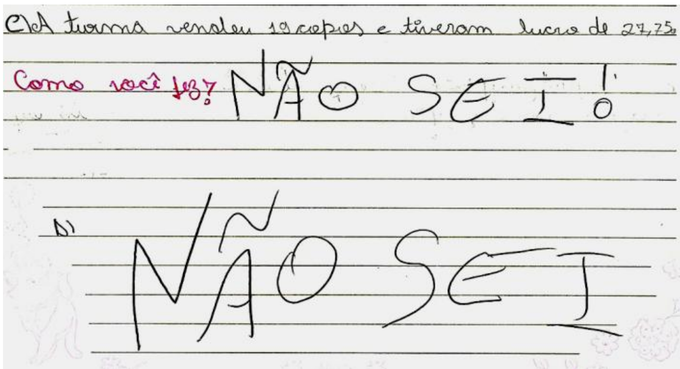


Figura 25 – Aluna C6 irritada com o calor e com as dificuldades que estava encontrando.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Foi solicitado aos alunos, no início de suas resoluções, que escrevessem o máximo que pudessem sobre seus métodos de resolução. Pensando que estavam atendendo a esse pedido, eles detalharam mais suas respostas. Isso pode ter-lhes auxiliado na construção de alguns cálculos (Figura 26).

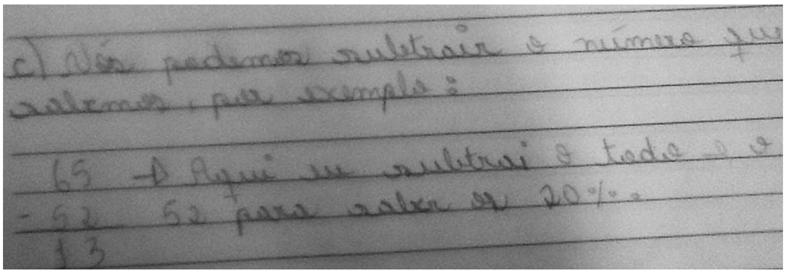


Figura 26 – Resposta detalhada da aluna B6 referente ao 1º problema da 2ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Quanto às estratégias de resolução dos problemas temos, como exemplo, a adotada pela aluna D6 que procurou organizar os resultados, que já tinha obtido, para cálculos futuros (Figura 27).

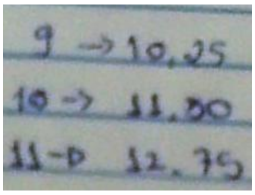


Figura 27 – Cálculos da aluna D6 referentes ao 4º problema da 1ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Também foi solicitado aos alunos que se sentassem mais próximos para trabalharem juntos e para que o computador pudesse captar suas falas. Essa tarefa não foi difícil para eles, pois a sala da biblioteca já contava com oito mesas agrupadas. Foi solicitado, ainda, que fizessem os mesmos problemas para que a pesquisadora tivesse mais dados sobre as mesmas alternativas de resolução. A turma e a pesquisadora, então, decidiram iniciar esta oficina resolvendo o problema quatro da primeira atividade (que já havia sido parcialmente solucionado pela aluna D6), mas a dificuldade que os alunos demonstraram ter com o conceito de lucro não lhes permitiu muitos avanços na resolução deste problema.

Individualmente, os alunos do sétimo ano denotaram bastante insegurança em utilizar a multiplicação (Figura 28), mas, em grupo, foram aos poucos recorrendo a essa operação para diminuírem o que escreviam (Figuras 29 e 30).

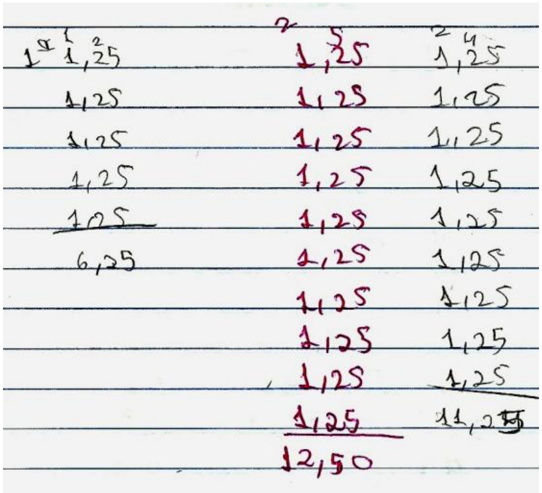


Figura 28 – Cálculos da aluna C6 referentes ao 4º problema da 1ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

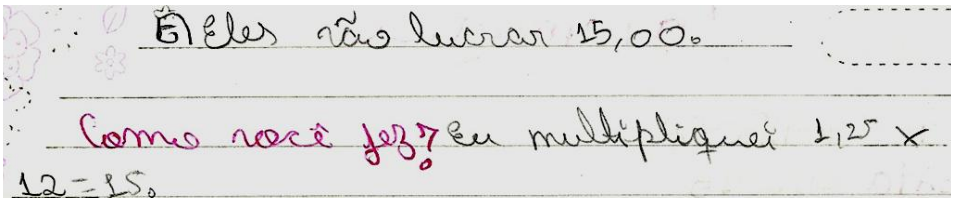


Figura 29 – Respostas da aluna C6 referentes ao 4º problema da 1ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

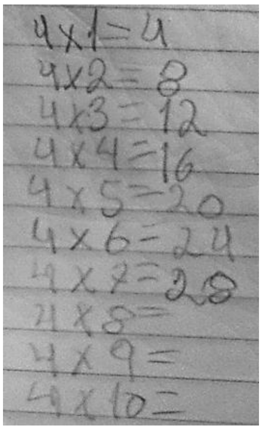


Figura 30 – Cálculos da aluna K6 referentes ao 1º problema da 2º atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Por estarem sentados próximos, novamente, os alunos copiaram bastante as respostas uns dos outros. Mas desta vez, isso trouxe um benefício para a pesquisa. Copiando a resposta da aluna B6, a aluna K6 abreviou a equação $Prejuízo \times dias = prejuízo\ total$ (Figura 31), para $P \times D = prejuízo\ total$ (Figura 32). Isso nos parece uma resposta afirmativa à questão "quando os alunos começam a trabalhar com equação escritas em palavras, tenderão ao simbolismo?" A aluna não manipulou os símbolos matematicamente, mas isso já supõe que a dificuldade dos alunos não está no fato de usarmos letras, mas sim, no fato de não terem tido experiências que os levassem a entender a utilidade/necessidade das letras na matemática.

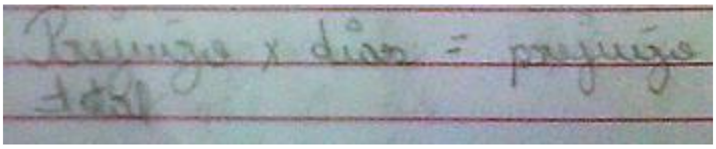


Figura 31 – Resposta da aluna B6 referente ao 4º problema da 1ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

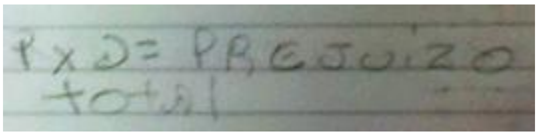


Figura 32 – Resposta da aluna K6 referente ao 4º problema da 1ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Da aluna K6 podemos observar, também, que as crianças podem, naturalmente, trabalhar com equivalências (Figura 33). Só que precisam vê-las em problemas ou exercícios escolares.

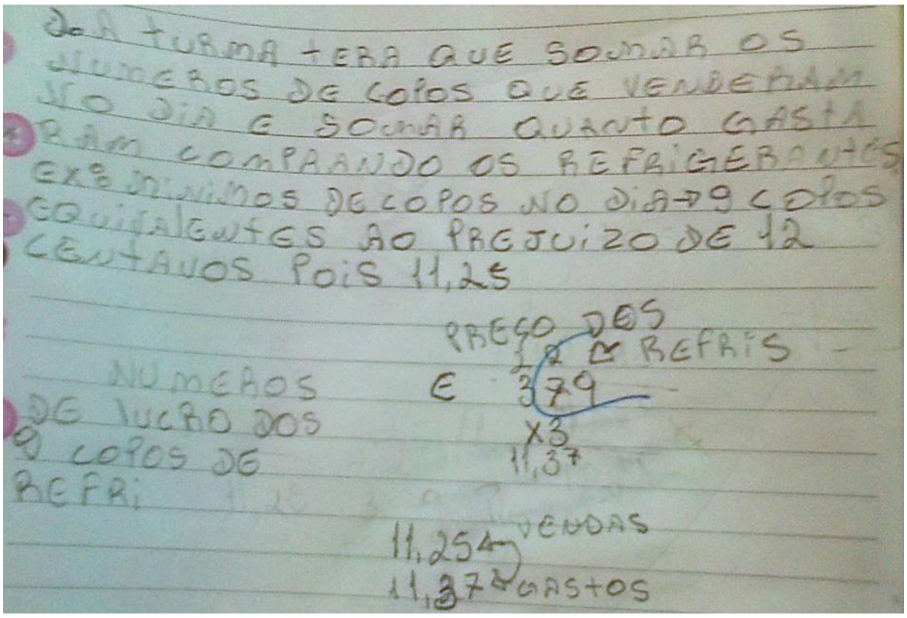


Figura 33 – Resposta da aluna K6 referente ao 4º problema da 1ª atividade
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Na resolução da questão *(b)* os alunos enfrentaram mais dificuldades, pois ainda não haviam aprendido os números inteiros. A pesquisadora procurou explicar-lhes que prejuízo era o contrário de lucro e que na matemática os contrários são representados por um sinal de menos em frente ao número. Ainda sim os alunos estranharam realizarem uma conta de menos em que o subtraendo era menor que o minuendo.

Outra barreira à compreensão dos alunos foi não perceberem que deviam somar 11,37 ao valor de 12,38 que a questão (c) dizia ser o lucro. Mas a pesquisadora acreditou que isso se devia mais ao fato de os alunos não terem compreendido o conceito de lucro.

Depois da correção das questões do problema quatro, os alunos começaram a resolver as questões do primeiro e do segundo problemas da segunda atividade. Essas questões eram:

2. *Em uma escola...*
   a. *20% dos alunos dos 8º anos tiraram 10 na última prova de matemática. Sabendo-se que os oitavos têm ainda 28 alunos que não tiraram 10, quantos alunos estão no 8º ano dessa escola?*
   b. *Há 65 professores. 20% são de matemática e 52 são professores de outras matérias. Quantos são os professores de matemática?*
   c. *Nos exemplos acima, é nos dado uma porcentagem de algo e o restante. Represente, com o menor número de palavras que conseguir, um modo de*

calcular uma quantidade (alunos, professores etc.) sabendo o valor de uma parte e que a outra representa 20%.

3. *Planejando seus gastos, Ângela separou 25% de seu salário para pagar dívidas, 43% para alimentação, 20% para transporte e ainda lhe restou R$ 104,25 para gastar como quisesse no mês. Quanto Ângela recebeu de salário?*
   a. *Agora, digamos que não sabemos quanto sobrou para Ângela de seu salário. Represente, com o menor número de palavras que conseguir, o planejamento de Ângela.*
   b. *E se Ângela separasse 32% para pagar suas despesas com transporte em um mês. Quanto sobraria de seu salário?*

Com esses problemas a pesquisadora/autora queria investigar como os alunos resolveriam problemas onde eles sabiam o valor de uma parte e quanto a outra parte desconhecida representava do total. Ela também gostaria de investigar, com este problema, qual era o entendimento dos alunos sobre porcentagem, além de utilizar este conteúdo matemático que têm muita utilidade no cotidiano, mas parece, na suposição da autora, pouco explorado na escola.

As resoluções destas questões foram especialmente difíceis para os alunos, justamente, por envolverem porcentagem. O professor deles e a pesquisadora precisaram chamar suas atenções para o caso de 80% ser maior que 20%. A partir daí, a turma conseguiu caminhar para uma solução, mesmo que em alguns casos dissessem que 35 alunos eram 35% do total (Figura 34).

Figura 34 – Resposta da aluna K6 referente ao 1º problema da 2ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Ao final deste encontro foi perguntado aos alunos, do sétimo ano, principalmente, o que eles haviam encontrado de diferente nos problemas que estavam resolvendo no projeto que não encontraram, até aquele momento, nas aulas de matemática da escola. Sua primeira resposta foi "*porcentagem*" (conteúdo que já estudaram na escola). Isso reflete que assuntos "polêmicos" de aritmética (a tabuada, a divisão, o mínimo múltiplo comum etc.) podem desviar a atenção dos alunos do foco dos problemas em álgebra.

Discutindo sobre as atividades que seriam aplicadas na prática deste trabalho, a pesquisadora/autora e a professora orientadora decidiram procurar problemas que não trouxessem para as atividades discussões que se desviassem da matemática. O que foi interessante notar, no parágrafo acima, é que mesmo dentro da matemática existem conteúdos que desviam a atenção dos alunos da álgebra. Sou uma entusiasta da utilização de problemas e/ou exercícios que envolvam o máximo de conteúdos já trabalhados com os alunos em anos anteriores. Mas neste momento, preciso reconhecer que alguns destes conteúdos podem dificultar ainda mais o aprendizado dos alunos do que facilitá-lo.

Podemos observar, como já foi argumentado por vários pesquisadores na fundamentação teórica, que as dificuldades que os alunos carregam desde que aprenderam alguns conteúdos em aritmética, realmente, acarretam em dificuldades em álgebra, mas não pelos conteúdos de álgebra em si.

Além dessas dificuldades, mais uma vez, a dificuldade de leitura e escrita dos alunos em sua língua materna trouxe-lhes uma desorganização enquanto decidiam quais eram os dados importantes dos problemas que estavam resolvendo. Essa falta de organização também é um ponto contra o desenvolvimento da álgebra, pois a álgebra também se baseia na observação de regularidades. Sem muita organização no que estão escrevendo, os alunos podem acabar não percebendo regularidades em suas resoluções.

Terminamos a análise das atividades desse dia ponderando que as dificuldades que os alunos trazem da aritmética precisam ser cuidadosamente tratadas antes do início do aprendizado de álgebra escolar. Talvez a dificuldade não vá desaparecer por completo, mas apenas com a prática de exercícios e/ou problemas que envolvam este conteúdo difícil e com a reflexão de quais são suas barreiras de aprendizagem é que os alunos poderão se atentar para o que precisam enfatizar em matemática.

Também podemos observar que, já em aritmética, os alunos precisam ser acostumados a detalhar mais suas respostas em matemática e organizarem o que escrevem. Muitos adultos podem escrever seus métodos de resolução de somas, multiplicações etc. de maneira desordenada, mas as crianças precisarão perceber aspectos que se repetem em álgebra, sendo a organização da escrita uma grande aliada para isso.

Outro ponto que levantamos é que a interação em grupo pode ser uma ajuda ao desenvolvimento da notação algébrica. Na *internet* é frequente a criação de novas gírias e jeitos de escrever. Os alunos que têm contato com computadores devem estar acostumados a se adaptar a novos modos de escrever que surgem em sua interação virtual. Assim, em sala de aula, eles podem começar a desenvolver uma notação algébrica de um jeito muito parecido com a evolução histórica desta.

Vale ressaltar, também, que a desmotivação e o cansaço dos alunos é outra barreira que enfrentam em seu aprendizado. Como pode ser visto nas respostas da aluna C6, tentar ensinar algum conteúdo a uma criança cansada, com sono, com calor ou que esteja se desmotivando por não encontrar logo o resultado de um exercício ou problema não será uma tarefa simples.

4.3 TERCEIRO DIA

Quinta-feira, dia 6 de junho de 2013, o professor da turma já não mais pode estar presente na realização do projeto. Neste dia a aluna K6 e o aluno L6 não compareceram, mas o aluno J6, que havia estado ausente na outra tarde, retomou sua participação no projeto.

Talvez pelo frio, que fez neste dia, os alunos permaneceram mais quietos e rapidamente começaram a realizar as tarefas. Foi solicitado, aos alunos, então, que começassem a escrever os dados dos problemas com abreviaturas.

Após 23 minutos do início da oficina na biblioteca, uma professora pediu para utilizar aquela sala, pois ela gostaria de fazer a “hora do conto” ali. Assim, a turma do projeto e a pesquisadora mudaram-se para a sala do segundo[12] ano. Esta sala era mais fria que a biblioteca, mas isto não atrapalhou tanto os alunos quanto o calor da outra tarde.

Essa sala tinha um quadro negro em melhores condições do que o da biblioteca e giz, o que permitiu uma participação maior da pesquisadora nas resoluções dos problemas com os alunos. Os alunos tomaram a iniciativa de arrumar as mesas dessa sala como as da biblioteca e, logo, voltaram a resolver os problemas.

Nesta aula, foram realizadas as resoluções de nove problemas, um número elevado se comparado com os quatro que foram resolvidos entre as duas outras aulas somadas. Esta tarde de atividades foi iniciada com a resolução do primeiro problema da terceira atividade. Este problema tinha como enunciado:

1. *Um cofrinho contém 9 moedas de R$ 1,00, algumas moedas de R$ 0,50 e 12 moedas de R$ 0,25, totalizando R$ 22,00. Quantas moedas de R$ 0,50 há no cofre?*

O objetivo da pesquisador/autora com este problema era testar como os alunos utilizariam as informações fornecidas no problema para investigarem as informações

[12] Conhecida, assim, pela escola.

ausentes. Ela também estava pesquisando como os alunos utilizariam informações que conheciam do dia-a-dia em atividades escolares.

O grupo de alunos apresentou algumas dificuldades em descobrir quantas moedas de 50 centavos havia no cofrinho. Rapidamente, utilizando os dados do problema, eles conseguiram calcular que faltavam 10 reais. Assim, alguns alunos entenderam que havia 10 moedas de 50 centavos no cofrinho (Figura 35).

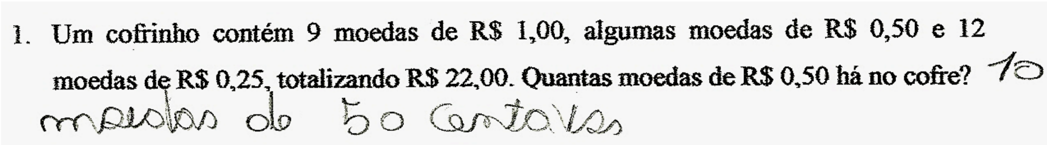

1. Um cofrinho contém 9 moedas de R$ 1,00, algumas moedas de R$ 0,50 e 12 moedas de R$ 0,25, totalizando R$ 22,00. Quantas moedas de R$ 0,50 há no cofre? 10 moedas de 50 centavos

Figura 35 – Resposta do aluno C6 referente ao 1º problema da 3ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

O aluno N6, então, auxiliou os colegas, dizendo que para cada real havia duas moedas de 50 centavos, portanto tinha que ter 20 moedas de 50 centavos no cofrinho (Figura 36). O aluno N6 foi questionado como tinha pensado nessa solução. Sua resposta foi que já havia ajudado sua avó no mercadinho que esta tem. Esse exemplo mostra o quanto é importante para os alunos utilizarem conhecimentos anteriores, mesmo que não tenham sido aprendidos na escola.

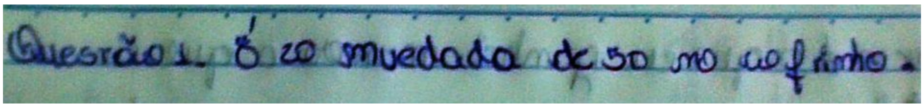
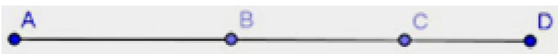

Questão 1. É 20 muedada de 50 no cofrinho.

Figura 36 – Resposta da aluna D6 referente ao 1º problema da 3ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Foi perguntado, aos alunos, como eles calculariam a quantidade de moedas de R$ 0,25 se esse fosse o problema. Dessa vez o aluno N6 se atrapalhou um pouco, mas os outros alunos rapidamente pensaram em multiplicar por quatro. Quando a pesquisadora perguntou como eles haviam pensado nisso, responderam que quatro moedas de 25 centavos somam um real. Essa discussão foi encerrada pela pesquisadora que lembrou os alunos que, assim como R$ 0,50 é a metade de um real, R$ 0,25 é a metade da metade de um real e, portanto, apenas se estaria dividindo um real em quatro partes. Para conseguir a quantidade de moedas, era necessário saber quantos reais se deveria multiplicar por dois ou quatro se fossem, respectivamente, moedas de R$ 0,50 ou R$ 0,25.

O problema resolvido logo em seguida, por escolha dos alunos, foi o problema seis da terceira atividade, exposto abaixo.

6. As quatro cidades A, B, C e D foram construídas à beira de uma rodovia reta, conforme a ilustração.



A distância entre A e C é de 50 km e a distância entre B e D é de 45 km. Além disso, sabe-se que a distância entre a primeira e a última cidade é de 80 km. Qual é a distância, em quilômetros, entre as cidades B e C?

A resolução deste problema envolvia uma dedução de informações a partir dos dados fornecidos e algumas operações aritméticas. Mas a pesquisadora gostaria de explorar com ele qual seria a reação dos alunos ao se depararem com os nomes dados as cidades. Quando ela perguntou a turma se o fato de o problema apresentar o nome das cidades como letras lhes causava estranheza, a resposta foi negativa e a aluna P6 ainda disse que era como se fossem siglas. Esse é mais um exemplo de que estes alunos, pelo menos, não encontram problemas quanto a trocas de representações, desde que soubessem o que os novos símbolos estão representando.

Durante a resolução deste problema, algumas alunas lembraram-se da reta numérica que estavam aprendendo em aula. Mesmo assim, encontraram dificuldades para resolver o problema (Figura 37). Isso foi algo surpreendente para a pesquisadora, pois esta considerava este problema um dos mais simples de ser resolvido.

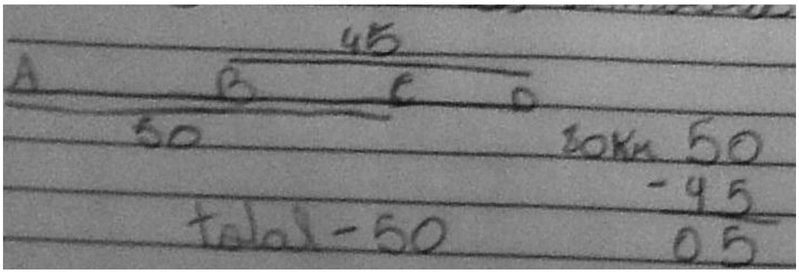
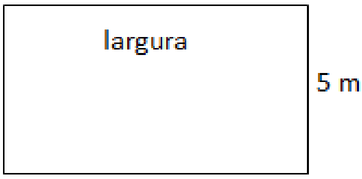


Figura 37 – Resposta da aluna P6 referente ao 6º problema da 3ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

O problema três também começou a ser realizado com dificuldade pelos alunos. O enunciado deste problema era:

3. *A área de um retângulo é dada pela fórmula $Área = largura \times comprimento$. Se o retângulo da figura abaixo tem 65 m^2 de área, determine o tamanho da largura desse retângulo.*



Com este problema a pesquisadora/autora gostaria de investigar como os alunos lidavam com informações fornecidas pelos problemas, como entendiam equações e se percebiam as relações existentes entre os números.

Após algumas tentativas e erros os alunos “descobriram” que 13 vezes 5 resultaria em 65. Quando perguntaram a pesquisadora se o resultado estava correto ela disse-lhes que sim, mas que gostaria de saber como poderia obter esse resultado de maneira mais direta, sem ser por tentativa e erro. Então a aluna B6 falou que era possível dividir o 65 por 5 e obter, assim, o número 13 (Figura 38).

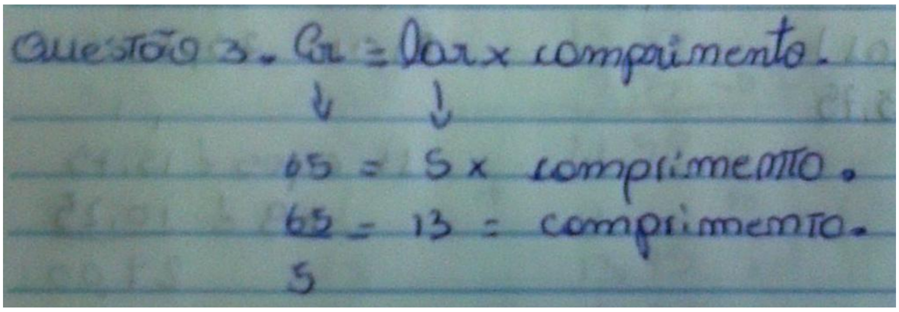


Figura 38 – Cópia que a aluna D6 fez da resolução feita no quadro.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Depois dessa colocação, da aluna B6, foi realizada a resolução desta questão no quadro. A pesquisadora começou lembrando os alunos dos problemas das primeiras aulas ($200 = 3 \times lado$ e $28\, alunos = 4 \cdot 20\%\, de\, alunos$) e escrevia, no quadro, as palavras que estavam no problema, utilizando abreviaturas. Assim, a turma percebeu que quando temos uma multiplicação em um lado de uma igualdade, podemos dividir os dois lados por um número conhecido em algum dos membros.

Em seguida, os alunos realizaram o problema cinco da quarta atividade que tinha como objetivo investigar qual era o entendimento alcançado pelos alunos, até aquele momento, sobre a resolução de equações que apresentam de um lado uma multiplicação e do outro um resultado qualquer. O enunciado deste problema colocava:

5. *Uma turma do sexto ano decidiu tirar uma foto de turma em frente ao quadro negro. Quando um dos alunos mostrou a foto para seu pai, que é contador, ele viu que atrás deles havia a seguinte conta escrita no quadro:* $8 \times ... = 96$. *Onde encontra-se os três pontinhos estava a cabeça da professora. Por gostar de enigmas matemáticos o pai desse aluno resolveu calcular o número que estava escondido pela professora. Qual foi o valor que ele encontrou?*

Os alunos rapidamente procuraram pelo número que multiplicado a 8 resultava em 96. Alguns realizaram divisões, outros ainda usaram a tentativa e erro. De qualquer maneira, a resposta deste problema foi velozmente obtida depois da discussão sobre a resolução do problema três da terceira atividade.

Com a intenção de concluírem a atividade três, os alunos pediram para que o problema dois fosse resolvido. Esse problema expunha a seguinte situação:

2. *Uma lanchonete vende hambúrgueres a certo preço. Sabendo que a metade desse preço corresponde ao custo da carne e do pão, 1/5 corresponde a outras despesas e que o lucro obtido em cada hambúrguer vendido é de R$ 1,80, calcule o preço pelo qual a lanchonete vende cada hambúrguer.*

O objetivo da pesquisadora/autora, ao colocar este problema na lista da terceira atividade, era investigar como os alunos lidavam com situações onde havia falta de informações diretas, mas que os resultados poderiam ser obtidos a partir de deduções e cálculos.

A aluna B6 iniciou a leitura do enunciado deste problema, mas antes de terminá-la pediu para que a pesquisadora lesse de novo. Ela falou aos colegas que era mais fácil de entender quando a pesquisadora lia os enunciados. Como já foi discutido, nas análises dos dias anteriores, a dificuldade em ler em sua língua materna pode ser mais uma causa das dificuldades que os alunos encontram em álgebra.

Como os alunos não conseguiam compreender o que o problema pedia (já que este envolvia lucro, um conceito não muito bem compreendido por esse grupo de alunos, e frações, outro conteúdo matemático que esses estudantes também não entenderam até este momento) a pesquisadora resolveu realizar essa resolução no quadro negro com a turma. Foi combinado com os alunos que a multiplicação seria indicada pelo pontinho (·) e que as informações seriam abreviadas. A aluna D6 copiou a resolução da pesquisadora (Figura 39).

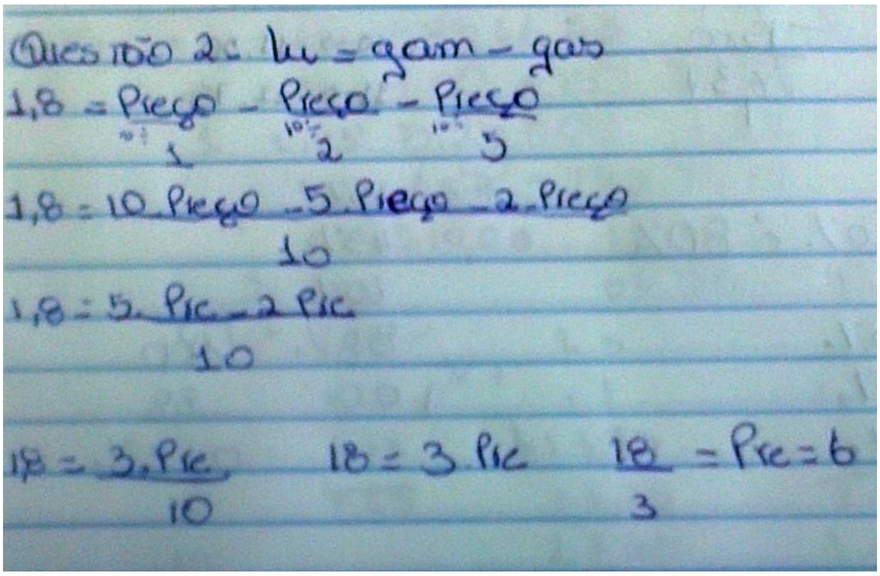


Figura 39 – Cópia da aluna D6 da resolução que fiz no quadro do problema 2 da 3ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Antes de concluir esta resolução, a pesquisadora apagou parte das abreviações, deixando apenas a primeira letra, e perguntou aos alunos se aquilo lhes trazia algum espanto. A resposta geral da turma foi não, e ainda disseram que entendiam o que as letras queriam dizer. A aluna D6 ainda falou que era evidente que "*pre era preço, gan era ganho e gas era gasto".*

A pedido dos alunos foi iniciada a resolução do quarto problema da terceira atividade, que tinha como enunciado:

4. *Uma mulher iniciou uma dieta, que lhe disseram que elimina 2,5 kg por semana, quando estava pesando 81 kg. Quantas semanas, no mínimo, ela deve perseverar nessa dieta para chegar aos 60 kg?*

O objetivo deste problema era investigar como os alunos obteriam a resposta do mesmo sendo que precisariam, primeiramente, obter outros dados não explícitos. Os alunos, novamente, tiveram dificuldades em resolver este problema. Talvez esta tenha sido gerada pela quantidade de informações que precisavam obter para a resolução do mesmo (quantos quilos a mulher eliminaria, em quantas semanas ela eliminaria 20 quilos e em quantos dias ela eliminaria 1 quilo). Outro fator que pode ter contribuído para dificultar a resolução deste problema é a divisão por 7 (quantidade de dias em uma semana).

Para terminar a terceira atividade, foi solucionado o problema cinco, que tinha como objetivo investigar quais as estratégias que os alunos utilizariam para resolver um problema que envolve conceitos geométricos e tinha o seguinte enunciado:

5. *Um tonel, onde se armazena vinagre, está preenchido até sua metade. Retirando-se 30 L desse vinagre, a quantidade que resta nesse tonel corresponde a 20% de sua capacidade total. Qual a capacidade desse tonel?*

Os alunos não conseguiram coletar os dados relevantes ao problema. Isso pode ter ocorrido por dois motivos: a porcentagem presente neste problema e a falta de um desenho para os alunos poderem riscar. É claro que os alunos poderiam ter desenhado um tonel, mas a pesquisadora/autora acreditou que eles não se sentiram autorizados a isso, bem como, não pensaram nesta possibilidade.

Então, foi iniciada a solução deste problema no quadro, pela pesquisadora. Quando concluíram que a capacidade do tonel era de 100 L (Figura 40), os alunos perguntaram o que aconteceria se a capacidade do tonel fosse diferente. Isso sugere que os alunos têm noções de variação.

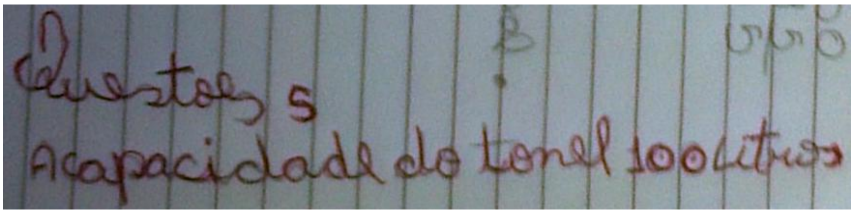


Figura 40 – Resposta da aluna P6 referente ao 5º problema da 3ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Logo após, foi solucionado o problema um da quarta atividade. Este problema trazia a seguinte situação:

1. *Os organizadores de uma festa de formatura consultaram duas bandas: a primeira tocaria por R$ 2500,00 mais a metade da arrecadação, a segunda tocaria pelo preço fixo de R$ 5000,00. Se o preço do convite for R$ 15,00, quantas pessoas devem comparecer a essa festa para que o preço cobrado pela primeira banda seja igual ao preço cobrado pela segunda?*
    a. *E se o preço da segunda fosse de R$ 5500,00?*
    b. *E se a primeira banda cobrasse R$ 1500,00 mais a metade da arrecadação?*
    c. *Represente, com o menor número de palavras que puder, a forma de calcular o preço da primeira banda dependendo da quantidade de pessoas que irão a festa?*

Outra vez a pesquisadora tinha como objetivo, com a aplicação deste problema, investigar como os alunos lidariam com generalizações. Ela também procurou levantar dados sobre as noções de equivalência dos alunos. A pesquisadora, ainda, auxiliou os alunos, com a resolução deste problema, utilizando o quadro negro (Figura 41).

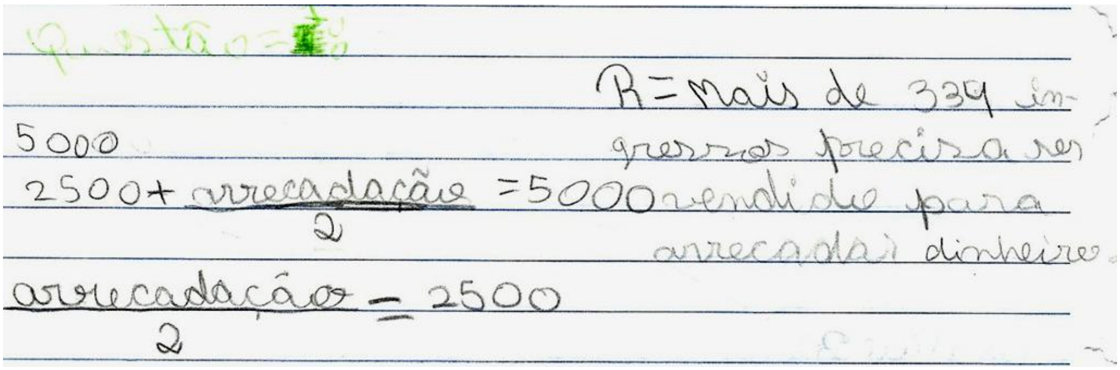
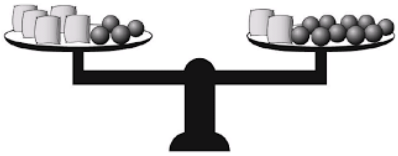


Figura 41 – Cópia da aluna C6 da resolução que fiz do 1º problema da 4ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Por fim, a pesquisadora sugeriu que a turma realizasse a resolução do problema quatro da quarta atividade, também com o objetivo de analisar as noções de equivalência destes alunos. Abaixo o enunciado deste problema:

4. *A balança da figura está em equilíbrio com bolas e saquinhos de areia em cada um de seus pratos.*



As bolas são todas iguais e os saquinhos também. O peso de um saquinho de areia é igual ao peso de quantas bolas?

Novamente o grupo de alunos, participantes do projeto, teve dificuldades em dizer quantas bolinhas pesavam o mesmo que um saquinho de areia. De repente, o aluno J6 levantou-se e dirigiu-se ao quadro para dizer a pesquisadora que se de um lado haviam cinco saquinhos e de outro dez bolinhas, cada saquinho pesava o mesmo que duas bolinhas. Ele ainda mostrou sua conclusão dizendo que, também, havia quatro bolinhas de um lado e dois saquinhos do outro.

Os colegas de J6 demoraram um pouco mais de tempo para compreenderem o que era posto pelo problema. Alguns alegaram que não estavam entendendo porque não tinha números para calcularem. Então, a pesquisadora sugeriu a turma que fosse excluído do desenho o que estivesse igual e em pratos diferentes da balança. Assim, foram eliminamos dois saquinhos de cada lado e quatro bolinhas. Observando que sobraram três saquinhos no lado esquerdo e 6 bolinhas no lado direito, o restante da turma também conseguiu enxergar que um saquinho tinha o mesmo peso que duas bolinhas.

Esta última resolução e a frase da aluna P6 durante a resolução do primeiro exercício do primeiro dia de atividade indicam que os alunos podem não conseguir ver a matemática envolvida em problemas que não trazem números explicitamente. Mas, como pôde ser observado, ao longo das análises dos dias de atividade e da resolução deste último exercício, estes alunos mostraram que têm, sim, noções de equivalência.

4.4 QUARTO DIA

No último dia de atividade, o projeto voltou a ser realizado na biblioteca e a aluna K6 voltou a participar do projeto. Das alunas do oitavo ano, apenas a aluna P7 apareceu no fim da oficina para aprender a resolver o exercício 5. (*a*), da primeira atividade, que tentou resolver no primeiro dia. Neste dia, também, tivemos a ausência do professor de matemática destes alunos, da aluna D6 e do aluno L6. O aluno N6 retirou-se da oficina após meia hora do início da aula.

Para comemorarem o término do projeto os alunos levaram uma garrafa de refrigerante. Antes de completar meia hora de aula, a turma já o havia bebido todo.

Neste dia, a pesquisadora pediu que os alunos representassem apenas por letras os cálculos que iriam fazer. O aluno J6 perguntou se isso tinha alguma relação com latitude e longitude. A pesquisadora respondeu que sim, mas futuramente, por enquanto eles apenas trabalhariam com a utilização das letras.

A pedido dos alunos foi resolvido o exercício *6. (d)* que expunha a equação $11 = -b + \frac{1}{2}$. Ao inserir este exercício na lista da última atividade, a pesquisadora tinha, como objetivo, investigar se realizar operações com letras causaria algum espanto aos alunos.

A resolução deste exercício foi realizada de maneira verbal. Assim, foi perguntado aos alunos quanto que ½ representava em decimais. Depois de pensarem por um breve momento os alunos responderam que um dividido por dois era igual a 0,5.

Curiosamente, o aluno N6 teve dificuldade em perceber que ½ era igual a 0,5 (este aluno é o mesmo que sabia trabalhar bem com moedas de 50 centavos no segundo dia de atividade). É preciso considerar que neste dia este aluno se disse cansado e estava ansioso para ir para outra atividade que aconteceria na escola. Também, segundo a aluna B6, ele ainda não havia estudado números decimais. Mas, sua dificuldade em reconhecer que 1 dividido por 2 resulta em 0,5 sugere que seus conhecimentos extra-acadêmicos não estão sendo relacionados com as suas habilidades escolares.

A pesquisadora seguiu a resolução do exercício, perguntando quanto que deveria valer um número que somado a 0,5 resultaria em 11. A aluna K6 respondeu que deveria ser 10,5. Depois, os alunos tiveram uma ligeira dificuldade em compreender que $-b$ era igual a 10,5. A pesquisadora procurou não se aprofundar neste assunto para não dar margem para os alunos memorizarem suas falas, o que poderia atrapalhá-los na escola posteriormente.

Logo após o término desta resolução, insistentemente, os alunos solicitaram que o problema um fosse resolvido. Abaixo, segue o enunciado deste problema.

1. *Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?*

A pesquisadora pretendia, com este problema, investigar as noções dos alunos de variação e de divisão em partes iguais.

Como o problema pedia para que se dividisse a quantidade de livros de português e a quantidade de livros de matemática em grupos iguais, os alunos começaram propondo que cada número (130 livros de matemática e 195 livros de português) fosse dividido por dois. Depois que a pesquisadora explicou-lhes que fazendo isso eles teriam que dividir ao meio um livro de português, os alunos passaram a testar outros valores.

O aluno J6, então, falou que o divisor deveria ser 65. Respondendo como havia encontrado este valor, ele disse que era a diferença de livros de matemática e português. Podemos inferir que o aluno J6 não conhecia o conceito de módulo *m*, mas ele parece ter tentado seguir algo que a pesquisadora falou bastante a eles nestes dias: na matemática os números sempre estão relacionados de alguma maneira.

Então, foi escrito no quadro:

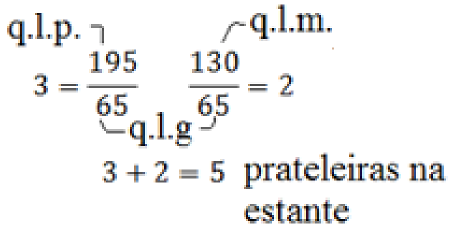


Figura 42 – Início da resolução do problema 1 da 5ª atividade.
Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Nesta resolução, a pesquisadora foi traduzindo aos alunos que *q.l.m* significava quantidade de livros de matemática, *q.l.p.* significava quantidade de livros de português e *q.l.g.* significava quantidade de livros por grupo que caberiam em cada prateleira.

Após um breve momento que tiveram para copiar esta resolução, foi perguntado aos alunos se seria possível colocar menos livros em cada grupo de livros. Eles, então, ficaram indecisos.

O aluno J6, outra vez, sugeriu o número 13. Depois de confirmarem, na calculadora, que 195 também poderia ser dividido por 13, além do 130, eles disseram que o grupo de livros poderia ter 13 livros. Aproveitando do que já estava escrito no quadro, a pesquisadora apenas apagou os números 65 e os resultados das divisões e da soma. Ela escreveu, no lugar desses números, o número 13 e os resultados das novas divisões e da nova soma.

Outra vez perguntou aos alunos se existiria mais um número que dividisse igualmente as quantidades de livros. Os alunos demoraram a perceber que o 5 seria o próximo número, mas, depois de encontrarem este valor, o aluno J6 disse que novamente os resultados das divisões e da soma mudariam. Completando o que este aluno falou, a aluna P6 disse que esses resultados iriam “variar”.

Da conclusão destes alunos, podemos observar que eles têm conhecimento do conceito de variação, mas ainda é um conceito informal. O fato de perceberem que, modificando os divisores, a quantidade de prateleiras na estante mudaria, sugere que existem alunos com conceitos informais de concepções algébricas importantes. Este fato reforça a reflexão de que os alunos, antes de trabalharem com álgebra na escola, já se utilizam de concepções algébricas em seus pensamentos diários.

Ainda sobre essa resolução, a aluna C6 lembrou-se que seu professor de matemática utiliza a sigla *n. d. a.* em aula. Esta sigla significa *“nenhuma das alternativas”* e parece não ter relação com os cálculos matemáticos. De fato, a relação que esta sigla tem com o que foi escrito no quadro é que ela é mais um exemplo de que há muito tempo os alunos vêm aprendendo abreviações e outras formas de representar o que estão comunicando, na escola. Portanto, as dificuldades que os alunos enfrentam em álgebra, com a linguagem algébrica, podem não estar relacionadas com as utilizações das letras, mas, sim, com a falta de entendimento da necessidade destas ou de seu significado em álgebra.

Por fim, realizamos a solução dos exercícios 6. *(a)* $(-8 = 2 - 5x)$ e 6.*(b)* $\left(\frac{3}{2} = -\frac{y}{2}\right)$.

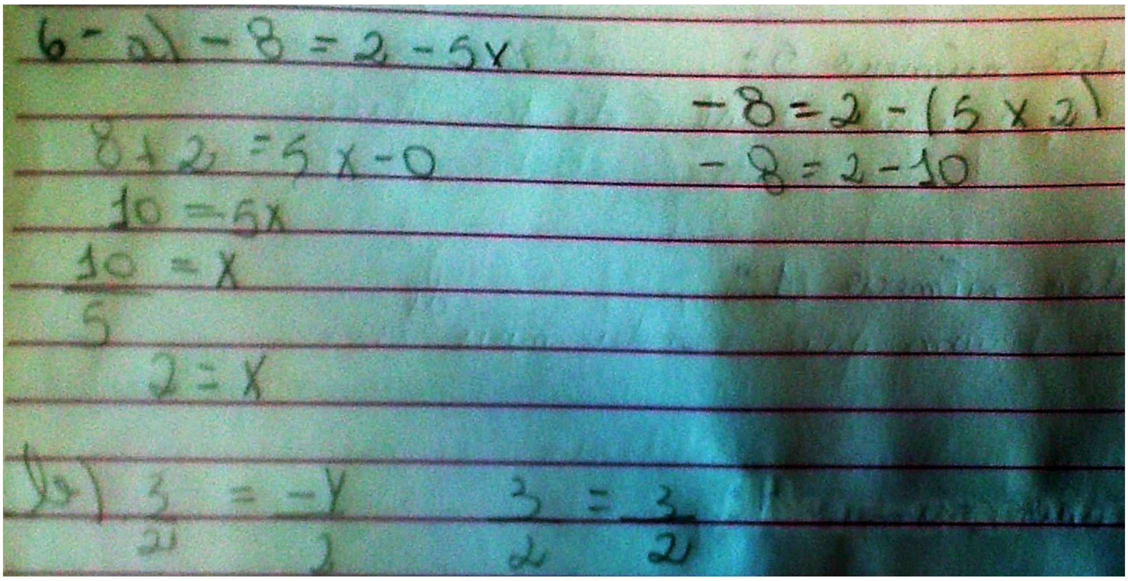


Figura 43 – Cópia da aluna B6 da resolução feita no quadro dos exercícios 6.a) e 6.b) da 5ª atividade.

Fonte: Andressa dos Santos Ferreira

Na resolução do exercício 6. *a)*, a pesquisadora trocou os sinais dos números sem explicar muito aos alunos o motivo de fazer isso, apenas disse que as duas equações eram equivalentes. A turma não encontrou muitas dificuldades em obter o valor de *x* nesta resolução. Então, acreditando ser algo importante para o aprendizado desses alunos, a pesquisadora disse-lhes que, para confirmarem suas respostas daquele tipo de exercício, eles poderiam substituir o valor que encontraram para a letra na primeira equação.

A aluna B6, vendo a pesquisadora fazer isso, falou um sonoro "*aaah que fácil! É só trocar e fazer a conta.*" Assim, acreditamos que pelo menos essa aluna tenha entendido um meio de confirmar seus cálculos em álgebra, sem precisar repetir toda sua resolução como fazem diversos estudantes (FREITAS, 2002).

Na resolução da questão (*b)*, a turma tentou encaixar diversos valores para a letra *y*. Posteriormente, a pesquisadora interveio e disse-lhes para observarem que em um lado da equação havia um $\frac{3}{2}$ e do outro um $-\frac{y}{2}$. Rapidamente, os alunos disseram que $-y$ era, então, igual a 3. Outra vez a aluna B6 achou a resolução "*fácil*".

Infelizmente, a pesquisadora não alterou a atividade deste dia para adequá-la a esses alunos que não viram números inteiros na escola. Assim, pode aproveitar pouco desta atividade. Apesar disso, os alunos disseram que não tiveram problemas com as letras que foram escritas no quadro, apenas às vezes perguntavam o que determinada letra estava representando, por não terem escutado quando a pesquisadora tinha dito isso.

Cansados de resolverem exercícios e problemas, os alunos sugeriram a pesquisadora que eles poderiam fazer depoimentos sobre as aulas. Desses depoimentos, temos a aluna B6 dizendo que gostou das aulas e que eram bem divertidas "*apesar de serem dificeizinhas em alguns momentos*".

A pesquisadora perguntou, então, se a álgebra tinha aplicação no dia-a-dia e os alunos responderam, em grupo, que sim. Cada um deu um exemplo de situações em que poderiam utilizar seus conhecimentos algébricos (shoppings, supermercados, lojas, tempo, calendário, dinheiro, medidas etc.). A aluna P6 resolveu falar bem alto que "*principalmente na matemática*".

A aluna B6 foi questionada se havia estranhado muito fazer contas de matemática com letras. Ela disse: "*a gente se assusta um pouco quando vê assim... Nossa! O que é isso? Mas, não é difícil, não, e estou louca para aprender com o 'sor'*".

Antes de acabar a aula, a pesquisadora lembrou-se do refrigerante. As meninas disseram que já haviam tomado tudo. Então a pesquisadora disse-lhes: "*y é a quantidade de refrigerante que a professora bebeu. Quanto vale y?"* Em coro, eles responderam, *"zero"*. Retribuindo a brincadeira, a aluna P6 disse que o *y* dela valia 3 litros.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Revisando as aulas da prática deste trabalho e analisando as resoluções dos exercícios e problemas, concluímos que alguns destes problemas poderiam não ter sido resolvidos com os alunos ou terem sido resolvidos mais para o fim do projeto, pois dificultaram o desenvolvimento das aulas. Também pensamos que o professor precisa se dedicar mais aos planejamentos, retirando os exercícios e problemas que estejam em um nível muito além do conhecimento dos alunos.

Contudo, podemos confirmar que o ensino de álgebra elementar, quando iniciado com a utilização de situações problema e com menos simbolismo, pode gerar no aluno o desejo de uma escrita reduzida.

Também podemos confirmar que os alunos, antes de iniciarem seu trabalho com álgebra, já têm noções de equivalência, variação e representação simbólica de informações. Assim, há um vasto campo a ser explorado dos conhecimentos pré-algébricos dos alunos que podem auxiliar em um aprendizado com mais fundamentação.

Muitos alunos já carregam pré-conceitos a respeito da álgebra ou conhecimentos de concepções algébricas antes de estudá-la. Quando esse estudo começa por um código não contextualizado, por um “idioma” estranho, pode gerar mais dificuldades nos alunos e repudio à álgebra. Nós, professores, que estamos preocupados com o aprendizado de álgebra no ensino fundamental, precisamos mostrar aos alunos por que ela é importante e por que é mais fácil lidar com sua linguagem em comparação com a linguagem materna antes de nos expressarmos em linguagem algébrica exacerbadamente.

Iniciar o estudo de álgebra com situações problemas e com uma álgebra verbal (usando palavras), poderá mostrar aos alunos por que começamos a usar o alfabeto em conjunto com os números e que isso trouxe mais simplicidade para a comunicação em matemática. Precisamos lembrar que muitos alunos já trabalham com siglas na escola (como o MMC). Assim, símbolos para representar outras coisas não são novidades para os alunos. Eles só sentem a necessidade de entender o que aquele símbolo está representando.

Outra consideração a se fazer é que o referencial no aprendizado da maioria das ciências é importante. Pelo menos até a quinta série as situações do cotidiano costumam ser esse referencial na matemática. Tirar esse referencial (sem colocar outro no lugar), em álgebra, pode gerar, nos alunos, a impressão de inutilidade deste conteúdo e irritação por ter de aprender algo inútil. Acreditamos que devemos trabalhar com o referencial do cotidiano, mas buscando, sempre, trabalharmos com a álgebra pela álgebra. A manipulação dos símbolos não pode ser renegada, pois, à medida que os estudos acadêmicos dos alunos avançarem, será difícil encaixar situações do cotidiano em seu aprendizado algébrico. Mas apenas a manipulação algébrica tem, historicamente, causado pânico em muitos estudantes.

Também podemos usar o referencial da língua materna, mostrando, assim, que em matemática é preferível uma linguagem mais reduzida, menos ambígua.

Não pretendemos, com este trabalho, reduzir a álgebra a sua linguagem, mas pensar em como melhorar o ensino de álgebra utilizando a linguagem algébrica. Acreditamos que essa reflexão seja extremamente necessária, visto que, o ensino ocorre por meio da comunicação e que algebristas utilizam-se, e muito, da linguagem algébrica para se comunicarem. Então, precisamos pensar em como iremos nos comunicar com alunos que ainda não entendem o que falamos.

Um construtor dificilmente saberá edificar uma casa vendo outras prontas. Quiçá nem estudando como se faz isso, conseguirá. Talvez, somente quando esse construtor passar pela experiência de montar uma casa, ele poderá aprender a edificá-la. Entendemos que o mesmo ocorre com a álgebra. Seu simbolismo foi historicamente criado. Então, não é fácil para os alunos saberem trabalhar com a álgebra sem construí-la em sua mente.

Pensamos que os alunos desejarão uma linguagem mais “enxuta” em qualquer sistema de ensino, em qualquer comunicação com outros (eles estão demonstrando isso nas redes sociais). Acreditamos que eles só precisam ver o que estão “enxugando”.

REFERÊNCIAS

AMERON, B. A. **Reinvention of early algebra**: Reinvention of early algebra developmental research on the transition from arithmetic to algebra [S.l.]: [s.n.], 2002 - Tekst. - Proefschrift Universiteit Utrecht. Disponível em: <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2002-1105-161148/inhoud.htm>. Acesso em: 27 jun. 2013.

BAUMGART, J. **História da Álgebra**. Trad. Higino H. Rodrigues. São Paulo: Atual. (Tópicos de história da matemática para o uso em sala de aula, 4). 1992.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

CHALOUH, L; HERSCOVICS, N. Ensinando expressões algébricas de maneira significativa In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

DEMANA, F; LEITZEL, J. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

FERREIRA, A. B. H. **Minidicionário Aurélio da língua portuguesa (Aurélio)**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1993

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Seminário Luso-Brasileiro**: Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores. Lisboa, 2005. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm>. Acesso em: 27, jun., 2013.

FREITAS, M. A. **Equações do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio.** Dissertação. PUC, SP, 2002. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marcos_agostinho_freitas.pdf>. Acessado em 27, jun., 2013.

GIL, K. H.; PORTANOVA, R. Reflexões **sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. Belo Horizonte, Junho 2007. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO53964543004T.doc>. Acessado em 27, jun., 2013.

HOUSE, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

LARROSA, J. B. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. In: **Revista Brasileira de Educação**, nº 19, jan/fev/mar/abr, 2002. pp. 20-28.

LOCHHEAD, J; MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**: a análise de uma impregnação mútua. São Paulo, Cortez, 1990.

________________. Mateologia, zero. Matemática dez. **Revista Pátio**. Ano XII, ago/out 2008, p. 13 – 15.

MARTINS, D. S., ZILBERKNOP, L. S. **Português instrumental**. 2 ed. Porto Alegre: Graphé, 1986

MIORIM, M. A; MIGUEL, A; FIORENTINI, D. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pró-Posições**, v. 4, n. 1(10), p. 78-91, mar. 1993a.

____. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 19 – 39, 1993b.

PINTO, R. A. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra: o tratamento dado por professoras de 7ª série em aula**. Dissertação. Faculdade de Educação, CEMPEM, Unicamp, Campinas, 1997. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000121507&fd=y>. Acessado em 27, jun., 2013.

SAUSSURE, F. **Curso de Lingüística Geral**. Trad. de A. Chelini; J. P. Paes e I. Blikstein. 27ª Ed. São Paulo: Cultrix, 2006. **Cours de linguistique general**. Charles Bally e Albert Sechehaye (orgs.), com a colaboração de Albert Riedlinger. Disponível em: <http://uepaingles1.files.wordpress.com/2011/03/curso-de-linguc3adstica-geral-saussure1.pdf>. Acessado em 27, jun., 2013.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. Dissertação. Faculdade de Educação, Unicamp. Campinas, 2007. Disponível em: <http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000421677>. Acessado em 27, jun., 2013.

SCHOEN, H. L. A resolução de problemas em álgebra. In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

SIMON, M. A; STIMPSON, V. C. Desenvolvimento da representação algébrica através de diagramas. In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

USISKIN, Z. O que é álgebra da escola média? In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. Edição eletrônica: Ridendo Castigat Mores. 2002. Disponível em: <http://www.institutoelo.org.br/site/files/publications/5157a7235ffccfd9ca905e359020c413.pdf>. Acessado em 19, jun., 2013.

ANEXO I

PRIMEIRA ATIVIDADE

1. Tarifa de táxi fica 8,09% mais cara nesta terça-feira. [...] O reajuste de 8,09% na tarifa dos táxis de Porto Alegre começou a valer nesta terça-feira a partir da 00h01min, com o início da entrega das novas tabelas para os taxistas. O quilômetro rodado passou de R$ 1,95 para R$ 2,11, na bandeira 1, e de R$ 2,54 para R$ 2,74, na bandeira 2. A bandeirada inicial, que era de R$ 3,90, passou para R$ 4,22. (Notícia retirada do site http://jcrs.uol.com.br/site/noticia.php?codn=122795 no dia 20/05/2013, às 07:40. Adaptada, especialmente, para esta lista de exercícios.).
    a. Qual é o valor mínimo que o passageiro pagará?
    b. Podemos determinar um valor máximo a ser pago pelos passageiros?
    c. Uma senhora pegou um táxi na zona norte e desceu na zona sul de Porto Alegre. Se no trajeto o táxi percorreu 25 km, qual foi o preço pago por essa senhora pela corrida?
    d. Um rapaz pagou R$ 42,20. Quantos quilômetros ele andou?
    e. Como podemos representar o método utilizado pelos taxímetros para registrar o preço da corrida utilizando o menor número de palavras possível?
    f. Como podemos saber quantos quilômetros rodamos de taxi sabendo o preço que pagamos?
2. Em um torneio de futebol, multiplica-se por 2 os gols marcados por um time quando visitante. Os Leões, um time que estava participando desse toneio, marcou 1 gol e sofreu 3 em casa (totalizando -5 pontos). Agora ele jogará de visitante. Vamos chamar de pontos os gols multiplicados por 2 e gol será o que acontece no jogo de futebol.

    (Nas perguntas abaixo, considere que o outro time não faz gol no jogo de volta.)
    a. Qual é o mínimo de pontos que os Leões podem fazer quando visitantes?
    b. Existe uma pontuação máxima que os Leões podem atingir quando visitantes?
    c. Quando visitantes, os Leões marcaram 6 gols. Quantos pontos eles têm, somando os dois jogos?
    d. Os Leões somaram 13 pontos nas duas partidas. Quantos gols eles marcaram na partida de volta?

e. Como podemos representar a quantidade de pontos dos Leões, com o menor número de palavras possível, sabendo quantos gols eles marcaram na partida de volta?
f. Como podemos representar a quantidade de gols marcados pelos Leões, com o menor número de palavras possível, sabendo a quantidade de pontos?

3. Uma empresa de construção civil estuda reformar a calçada que fica ao redor de um de seus empreendimentos. Ela pretende colocar canteiros, como os da figura , com plantas pequenas cortando placas de concreto com 2 m de largura por 1,6 m de comprimento. Sabendo que cada canteiro terá um formato quadrado, responda:
   a. Qual é o tamanho máximo que podemos dar ao lado dos canteirinhos?
   b. Qual é o tamanho mínimo?
   c. Se os canteirinhos têm lado 60 cm, qual é o perímetro da parte restante?
   d. Como podemos representar o perímetro da parte restante do azulejo utilizando o menor número de palavras possível?
   e. Se o perímetro da parte restante for de 9 m, qual é o lado dos quadradinhos?
   f. Como podemos representar o lado dos canteirinhos sabendo o perímetro da parte restante?

4. Em quase todas as escolas, todos os anos, as turmas do nono ano do ensino fundamental começam a pensar em maneiras de arrecadar dinheiro para a formatura. Uma das alternativas que escolhem é vender lanches para os outros alunos da escola durante o recreio e em datas especiais (festas juninas, campeonatos etc). Geralmente, como bebida, esses estudantes vendem refrigerante.

   Uma turma decidiu comprar, todos os dias de aula, 3 garrafas de 2 litros de um refrigerante sabor cola, que custam 3,79 reais cada no supermercado mais próximo à escola. Essa turma venderá o refrigerante em copos plásticos de 300 ml cada, custando R$ 1,25.

   a. Qual é o número mínimo copos de refrigerante que ela deverá vender por dia para ter lucro?
   b. A turma vendeu 9 copos de refrigerante no primeiro dia. Ela teve lucro ou prejuízo? De quanto foi esse lucro ou esse prejuízo?

c. Em um dia, esta turma teve lucro de R$ 12,38. Quantos copos de refrigerante ela vendeu?

d. Represente, com o menor número de palavras que conseguir, o cálculo que a turma tem de fazer para descobrir se teve lucro ou prejuízo no dia.

e. Durante uma semana da escola (5 dias), a turma vendeu 12 copos de refrigerante por dia. Qual foi o seu lucro ou prejuízo?

f. A turma vendeu 8 copos de refrigerante por dia em duas semanas (10 dias). Qual foi o seu lucro ou prejuízo depois desses dias?

g. Expresse, com o menor número de palavras que você conseguir, o lucro ou prejuízo que a turma terá depois de certa quantidade de dias.

5. Calcule o valor da letra

   a. $7y + 8y + 364 = 28y$

   b. $\frac{x}{10} + 18 = 22$

   c. $2 + z = \frac{1}{8} + \frac{z}{4}$

   d. $-a + 2 = 5a - 40$

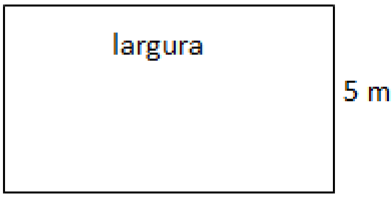
   e. $-s - 23 = 22s$

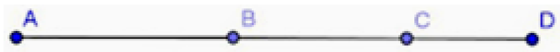
SEGUNDA ATIVIDADE

1. Em uma escola...
    a. 20% dos alunos dos 8º anos tiraram 10 na última prova de matemática. Sabendo-se que os 8º anos têm ainda 28 alunos que não tiraram 10, quantos alunos estão no 8º ano dessa escola?
    b. Há 65 professores. 20% dos professores são de matemática e 52 professores são de outras matérias. Quantos são os professores de matemática?
    c. Nos exemplos acima, é nos dado uma porcentagem de um conjunto e o restante deste conjunto. Represente, com o menor número de palavras que conseguir, um modo de calcular uma quantidade (alunos, professores etc) sabendo o valor de uma parte e que a outra representa 20%.
2. Planejando seus gastos, Ângela separou 25% de seu salário para pagar dívidas, 43% para alimentação, 20% para transporte e ainda lhe restou R$ 104,25 para gastar como quisesse no mês. Quanto Ângela recebeu de salário?
    a. Agora, digamos que não sabemos quanto sobrou para Ângela de seu salário. Represente, com o menor número de palavras que conseguir, o planejamento de Ângela.
3. Um papel de presente com 1,96 m de comprimento deve ser dividido em duas partes. O comprimento da parte maior deve ser o triplo do comprimento da parte menor. Determine o comprimento de cada uma das partes.
4. Em um estacionamento há carros e motos, num total de 38 veículos e 136 rodas. Quantos carros e quantas motos há no estacionamento?
5. "No encerramento do pregão da última quinta-feira (16 **de maio**) os papéis **(das ações do Facebook)** valiam cerca de 30% a menos: as ações fecharam o dia vendidas a US$ 26,13. [...] Apesar da queda, a situação já esteve pior para as ações da empresa de Zuckerberg. Em setembro, os papéis chegaram a ser negociados por cerca de US$ 17, uma queda de mais de 50% em relação ao preço de lançamento." (Notícia retirada do site http://g1.globo.com/economia/mercados/noticia/2013/05/um-ano-apos-lancamento-acoes-do-facebook-valem-30-menos.html no dia 17/05/2013, às 19:17. Adaptada, especialmente, para esta lista de exercícios.).
    a. Qual era o valor das ações do Facebook na data de lançamento (considere que o valor, no dia 16 de maio, é de US$ 26,60)?
    b. Se US$ 17 é uma queda de mais de 50% das ações, quanto é a metade do valor das ações e quanto US$ 17 é menor que esse valor?

TERCEIRA ATIVIDADE

1. Um cofrinho contém 9 moedas de R$ 1,00, algumas moedas de R$ 0,50 e 12 moedas de R$ 0,25, totalizando R$ 22,00. Quantas moedas de R$ 0,50 há no cofre?
2. Uma lanchonete vende hambúrgueres a certo preço. Sabendo que a metade desse preço corresponde ao custo da carne e do pão, 1/5 corresponde a outras despesas e que o lucro obtido em cada hambúrguer vendido é de R$ 1,80, calcule o preço pelo qual a lanchonete vende cada hambúrguer.
3. A área de um retângulo é dada pela fórmula $Área = largura \times comprimento$. Se o retângulo da figura abaixo tem 65 m^2 de área, determine o tamanho da largura desse retângulo.

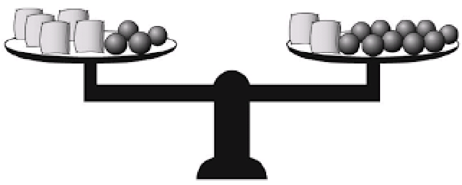


4. Uma mulher iniciou uma dieta, que lhe disseram que elimina 2,5 kg por semana, quando estava pesando 81 kg. Quantas semanas, no mínimo, ela deve perseverar nessa dieta para chegar aos 60 kg?
5. Um tonel, onde se armazena vinagre, está preenchido até sua metade. Retirando-se 30 *l* desse vinagre, a quantidade que resta nesse tonel corresponde a 20% de sua capacidade total. Qual a capacidade desse tonel?
6. As quatro cidades A, B, C e D foram construídas à beira de uma rodovia reta, conforme a ilustração. 

A distância entre A e C é de 50 km e a distância entre B e D é de 45 km. Além disso, sabe-se que a distância entre a primeira e a última cidade é de 80 km. Qual é a distância, em quilômetros, entre as cidades B e C?

QUARTA ATIVIDADE

1. Os organizadores de uma festa de formatura consultaram duas bandas: a primeira tocaria por R$ 2500,00 mais a metade da arrecadação, a segunda tocaria pelo preço fixo de R$ 5000,00. Se o preço do convite for R$ 15,00, quantas pessoas devem comparecer a essa festa para que o preço cobrado pela primeira banda seja igual ao preço cobrado pela segunda?
    a. E se o preço da segunda fosse de R$ 5500,00?
    b. E se a primeira banda cobrasse R$ 1500,00 mais a metade da arrecadação?
    c. Represente, com o menor número de palavras que puder, a forma de calcular o preço da primeira banda dependendo da quantidade de pessoas que irão a festa?
2. Um produtor levava a uma central de abastecimento certo número de caixas de tomate, que pretendia vender a R$ 5,20 cada uma. Num pequeno incidente na estrada, 9 delas se perderam. Ao chegar à central de abastecimento, as caixas restantes foram vendidas a R$ 6,40 cada uma, obtendo-se, assim, o mesmo lucro previsto inicialmente. Qual era o número de caixas com que o produtor saiu de sua propriedade, antes do incidente?
3. Dois pilotos de Fórmula 1 largam juntos num determinado circuito e completam cada volta em 72 segundos e 75 segundos, respectivamente. Mantendo constante esse tempo, depois de quantas voltas, contadas a partir da largada, o mais rápido terá dado uma volta a mais que o outro piloto?
4. A balança da figura está em equilíbrio com bolas e saquinhos de areia em cada um de

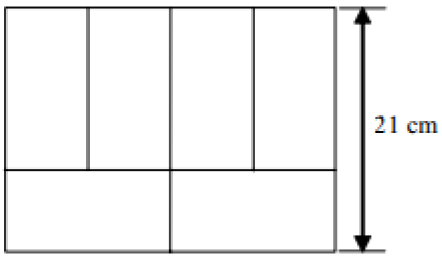


seus pratos.

As bolas são todas iguais e os saquinhos também. O peso de um saquinho de areia é igual ao peso de quantas bolas?
5. Uma turma do sexto ano decidiu tirar uma foto de turma em frente ao quadro negro. Quando um dos alunos mostrou a foto para seu pai, que é contador, ele viu que atrás deles havia a seguinte conta escrita no quadro: $8 \times ... = 96$. Onde encontra-se os três pontinhos estava a cabeça da professora. Por gostar de enigmas matemáticos o pai desse aluno resolveu calcular o número que estava escondido pela professora. Qual foi o valor que ele encontrou?

QUINTA ATIVIDADE

1. Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?
2. A sexta parte dos alunos de uma classe usam óculos. Dentre os que usam óculos, uma terça parte são meninas; além disso, quatro meninos usam óculos. Quantos são os alunos dessa classe?
3. Com a energia fornecida por um litro de mel, uma abelha consegue voar 700 km. Quantas abelhas conseguiram voar um quilômetro, cada uma, com a energia fornecida por 10 litros de mel?
4. Com seis retângulos idênticos formamos um retângulo maior, com um dos lados medindo 21 cm, como na figura. Qual é a área do retângulo maior em cm^2?



5. Adriano, Bruno, César e Daniel são quatro bons amigos. Daniel não tinha dinheiro, mas os seus amigos tinham. Adriano deu a Daniel um quinto do seu dinheiro, Bruno deu um quarto do seu dinheiro e César deu um terço do seu dinheiro. Cada um deu a Daniel a mesma quantia. A quantia que Daniel possui agora representa que fração da quantia total que seus amigos possuíam inicialmente?
6. Calcule o valor da letra
   a. $-8 = 2 - 5x$
   b. $\frac{3}{2} = -\frac{y}{2}$
   c. $0 = 5j - 8$
   d. $11 = -b + \frac{1}{2}$
   e. $\frac{9}{4}c + 10 = 0$
   f. $\frac{v}{5} + 2 = -\frac{v}{6} + 21$

ANEXO II

UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ______________ ,

responsável pelo(a) aluno(a) ____ , da turma

__________ , declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada ***"Equações: do verbal ao simbólico"***, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) ***Andressa dos Santos Ferreira***. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por ***Marilaine de Fraga Sant'Ana***.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmico do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Mediar o envolvimento dos alunos no estudo da álgebra, utilizando problemas e situações reais que apresentem incógnitas e/ou variáveis.
- Desenvolver o ensino de equações avançando do verbal ao uso dos símbolos literais, procurando mostrar aos alunos a necessidade das letras na matemática.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas por uma letra e pelo ano escolar.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio da participação em encontros, em que ele(ela) será observado e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos e vídeos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, sites acadêmicos, e outros, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora responsável no e-mail ltdessa2@yahoo.com.br ou em algum dos telefones 92883568 e 33541258.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, 03 de junho de 2013.

Assinatura do responsável: ______________________.

Assinatura da pesquisadora: Andressa dos Santos Ferreira

Assinatura da Orientadora da pesquisa: ______________________.

ANEXO III

UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INSTITUCIONAL

A ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL BAEPENDI, com o endereço nesta capital, na Estrada dos Alpes, sem número, neste ato representada por sua Diretora Tânia Regina Carvalho dos Santos, por intermédio do presente instrumento, **autoriza** Andressa dos Santos Ferreira, brasileira, estudante, residente e domiciliada na Avenida Arnaldo Bohrer, 560 – fundos, em Porto Alegre, RS, a utilizar o projeto ***"Equações: do verbal ao simbólico"*** em seu trabalho de conclusão na Faculdade de Matemática na Universidade do Rio Grande do Sul.

A autorizada, por sua vez, se obriga a manter absoluto sigilo a identidade dos discentes que participaram do referido projeto.

Porto Alegre, 03 de junho de 2013.

Tânia Regina S. de Carvalho

Tânia Regina Carvalho dos Santos

Tânia Regina S. de Carvalho
Diretora
ID. 1687522/01
Esc Est Ens Fun Baependi

De acordo:

Andressa dos Santos Ferreira

Andressa dos Santos Ferreira