

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Estudo de um modelo mínimo para a Matéria Escura

Augusto Medeiros da Rosa

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a
orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef.

Porto Alegre
Novembro de 2012.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Dimiter Hadjimichef, meu orientador, por ter aceitado desenvolver este trabalho de conclusão comigo, sempre certificando-se de que cada etapa fosse mais desafiadora e interessante que a anterior, tendo assim contribuído muito para o meu ainda parco entendimento da Teoria Quântica de Campos.

Agradeço também ao professor Pedro Luis Grande, pelas inúmeras discussões, sempre iluminadoras, e por ter-me dado a motivação para explorar uma área nova e desconhecida. Acima de tudo, agradeço-o por ter-me feito *pensar*. Aproveito para também agradecer ao amigo Jonier Amaral Antunes, que me fez refletir sobre a estrutura das coisas e me guiou através de muitas crises.

Sou grato ao meu amigo Felipe Leite Antunes, por ter questionado cada afirmação que fiz quando lhe apresentei esse trabalho. Termino essa seção agradecendo à minha namorada, Natália de Lima Calleya, pela companhia e, sobretudo, pela paciência.

Resumo

Fazemos uma revisão do modelo padrão das interações eletrofracas, devido a Glashow, Weinberg e Salam, o qual constitui a base para extensões do Modelo Padrão (MP) que incluem WIMPs (*Weakly Interacting Massive Particles*). Supõe-se que essas partículas compõem a Matéria Escura, responsável por 90% do conteúdo de massa do Universo que, no entanto, ainda não foi detectada diretamente em eventos de raios cósmicos ou em aceleradores de partículas.

Introduzimos um modelo mínimo para a matéria escura, que consiste de três singletos do MP: um escalar, um férmion de Dirac e um bóson vetorial massivo. O escalar implementa quebra espontânea de simetria no setor escuro, além de ser responsável por conectar a matéria escura às partículas do MP através de interações com o bóson de Higgs. Calculamos algumas seções de choque e taxas de decaimento nesse modelo; em particular estudamos a produção de bósons vetoriais massivos em colisões fóton-fóton utilizando a fórmula de Breit-Wigner.

Abstract

We review the standard electroweak model of Glashow, Weinberg and Salam, which forms the basis for extensions of the Standard Model (SM) including Weakly Interacting Massive Particles (WIMPs). These particles are supposed to compose the Dark Matter responsible for 90% of the mass content of the Universe, but have not yet been directly detected in cosmic ray events or in particle colliders.

We then introduce a minimal model of dark matter, consisting of three SM gauge singlets: a scalar, a Dirac fermion and a massive vector boson. The scalar implements spontaneous symmetry breaking in the dark matter sector, and is also responsible for connecting dark matter with SM particles by interacting with the Higgs boson. We calculate some cross sections and decay rates within this framework, in particular we study the production of massive vector bosons in photon-photon collisions by using the Breit-Wigner formula.

Índice

Introdução	3
1. Preliminares	5
1.1 Notação e convenções	5
1.2 Equação de Dirac	6
1.3 Teoria Clássica de Campos	7
1.4 Teoria Quântica de Campos	8
2. O Modelo de Glashow, Weinberg e Salam	10
2.1 Introdução	10
2.2 Uma teoria de gauge para a interação fraca	12
2.2.1 A escolha do grupo de simetria	12
2.2.2 Uma densidade lagrangeana com simetria de gauge $SU(2) \times U(1)$	14
2.3 Quebra Espontânea de Simetria	15
2.3.1 Introdução: escolhendo um campo de Higgs	15
2.3.2 Quebrando simetrias globais	16
2.3.3 Quebrando simetrias locais	17
2.4 Construção do modelo GWS	19
2.4.1 Quebra de simetria e geração de massa para os bósons de gauge	19
2.4.2 A densidade lagrangeana no modelo GWS	20
3. Matéria Escura Fermiônica	24
3.1 Uma proposta de densidade lagrangeana	24
3.2 O decaimento $h \rightarrow \chi\bar{\chi}$	26
4. Um modelo com matéria escura vetorial	28
4.1 Introdução	28
4.2 O decaimento $h_1 \rightarrow VV$	28
4.3 Produção de pares $\chi\bar{\chi}$ em colisões e^+e^-	30

Índice	2
4.4 Produção de pares de V	32
4.4.1 Via colisões e^+e^-	32
4.4.2 Via colisões $\gamma\gamma$	32
5. Conclusões e Perspectivas	36
A. O Teorema de Goldstone	38
Referências	40

Introdução

O problema da matéria escura foi identificado pela primeira vez por Fritz Zwicky, em 1934, ao estudar a distribuição de velocidades de estrelas em galáxias[1]. Se uma estrela possui uma distância orbital média r do centro de sua galáxia, podemos utilizar a gravitação Newtoniana para estimar que sua velocidade orbital seja $v(r) \sim \sqrt{\frac{M(r)}{r}}$, onde $M(r)$ é a massa da galáxia que dista menos do que r do centro galáctico. Para objetos orbitando a galáxia além de sua parte visível, deveríamos ter $v(r) \sim \sqrt{\frac{1}{r}}$. O que se observa é que $v(r)$ tende para uma constante, e medidas indicam que 90% da massa das galáxias poderia ser atribuída à matéria escura[2].

Uma proposta mais conservadora para explicar a matéria escura é a da existência dos MACHOs (Objetos Compactos Massivos do Halo), os quais poderiam ser, por exemplo, anãs marrons, que não são luminosas e, portanto, seriam difíceis de observar. Estudos detalhados de nucleossíntese do Big Bang indicam, no entanto, que a densidade de bárions do universo não pode dar conta completamente da densidade observada de matéria escura [3]. Propostas de modificação da interação gravitacional para escalas galácticas [4] não são capazes de explicar fenômenos de lentes gravitacionais relatados em [5]. Somos forçados, então, a aceitar a existência da matéria escura.

Como a matéria escura não é visível, não pode interagir eletromagneticamente. Além disso, estudos da anisotropia na radiação cósmica de fundo e de nucleossíntese do Big Bang indicam que a matéria escura não interage fortemente [3, 6]. Observações também indicam que as partículas da matéria escura sejam bastante massivas e *frias*, ou seja, não relativísticas. Caso essas partículas não sejam singletos MP, só poderão interagir fracamente. As únicas partículas do MP que interagem somente via força fraca são os neutrinos, os quais não podem compor matéria escura fria [2]. Sendo assim, o MP não possui um candidato para resolver o problema da matéria escura.

Ainda, se admitirmos que a matéria escura é uma *reliquia térmica* do universo, juntamente com outras suposições, pode-se calcular a densidade do candidato a matéria escura em função de sua seção de choque de aniquilação[3]. Para ajustarmos a densidade calculada às medidas experimentais, devemos tomar $\langle\sigma v\rangle \sim 1pb$, o que é consistente com a seção de choque de processos fracos [2].

Outra constatação de interesse vem ao estudarmos a física do bóson de Higgs. O estudo das correções radiativas no MP mostra que estas podem introduzir grandes correções à sua massa [7] e, inclusive, tornar o vácuo da teoria instável para altas energias [8]. A introdução de física além do MP na escala eletrofraca permitiria restaurar a estabilidade do vácuo [8]. Uma postura otimista é, então, a de assumir que as evidências da cosmologia para física nova estão relacionadas às da Física de Partículas, e tentar explicá-las de uma maneira unificada.

Neste trabalho, fazemos uma revisão da construção do modelo de Glashow, Weinberg e Salam para a unificação eletrofraca, o qual constitui a base para estudarmos as extensões do MP relevantes para o problema da matéria escura, ao tomarmos a “postura otimista” citada anteriormente. A seguir, apresentamos um modelo mínimo para a matéria escura, para o qual propomos uma extensão. Para finalizar, calculamos algumas seções de choque e taxas de decaimento a nível árvore, com o intuito de, futuramente, ajustar os parâmetros do modelo e fazer uma análise de estabilidade de seu vácuo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notação e convenções

Neste trabalho, utilizamos $\hbar = c = 1$. Isso significa que é lícito escrever expressões como $E = \omega = m$, sendo ω uma frequência angular e m uma massa. Também nos permite expressar seções de choque em unidades de inverso de quadrado de energia, e larguras de decaimento em unidades de energia. Densidades lagrangeanas tem dimensão de m^4 e a ação é adimensional, bem como o momentum angular.

Utilizamos também a convenção de Einstein para soma de índices repetidos, da seguinte maneira: em uma expressão com índices gregos repetidos, somas estão implícitas quando os índices repetidos estão em posições distintas, um índice em cima e um embaixo. Dessa forma, $V^\mu V_\mu = \sum_{n=0}^3 V^n V_n$ e $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \sum_{m,n=0}^3 g^{mn} R_{mn}$. Tais somas são feitas sempre com os índices mudos variando entre 0 e 3.

Quando for desnecessário salientar o caráter quadrivetorial, um quadrivetor V_μ poderá ser representado simplesmente como V , e também iremos escrever $V_\mu V^\mu \equiv V^2$. Representamos por $g_{\mu\nu}$ a matriz $\text{diag}(1,-1,-1,-1)$ e por $g^{\mu\nu}$ sua inversa, que satisfaz $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$, ou seja, 1, quando $\mu = \sigma$ e 0 caso contrário. Definimos também $\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \phi_{,\mu}$

Somas sobre índices latinos repetidos estão sempre implícitas, e podem ser usadas para representar somas sobre componentes espaciais de um quadritensor (isto é, de 1 a 3), sobre índices espinoriais de um campo fermiônico (com os índices variando entre 1 e 4) ou somas sobre os índices de algum grupo. Dessa forma, se p_μ é o quadrimomentum (E, \mathbf{p}) de uma partícula, então $p_i p^i = -|\mathbf{p}|^2$ e $F_{i\mu\nu} F_i^{\mu\nu} = \sum_{j=1}^N F_{j\mu\nu} F_j^{\mu\nu}$ para o termo cinético de uma teoria de gauge, com N a dimensão do grupo de Lie a ela associado.

Dado um quadrivetor A , definimos $\not{A} = A \cdot \gamma = \gamma^\mu A_\mu$. Para um campo de Dirac ψ , definimos $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ e $\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi$, bem como $\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi$. Os projetores de helicidade exatos para partículas massivas nunca serão usados. Para simplificar a notação, poderemos representar o campo de Dirac associado ao férmion “ X ” (e sua antipartícula)

como X , ao invés de ψ_X . Deve ficar claro do contexto quais letras representam espinores e quais representam quadrivetores.

Dessa forma, fazemos $X \equiv \psi_X$ e $\bar{X} \equiv \bar{\psi}_X$. Quando estivermos usando essa notação, a carga elementar será representada como $q_e (> 0)$. Quando utilizarmos ψ_X para identificar o campo do férmion “ X ”, a carga elementar será indicada simplesmente como “ e ” (> 0).

1.2 Equação de Dirac

A equação de Dirac descreve férmions de spin $1/2$, cujo estado é representado por um campo de quatro componentes $\psi(x)$. Para um férmion de massa m , livre, ela se escreve $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$, onde $\{\gamma^\mu\}$ é um conjunto qualquer de quatro matrizes que satisfaça $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Nessa última expressão, bem como na expressão da equação de Dirac, a matriz identidade, Id , não está escrita explicitamente. A partir dessas definições, podemos verificar as seguintes propriedades [17]:

$$Tr[Id] = 4 \tag{1.1}$$

$$Tr[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\alpha}_{2k+1 \text{ fatores}}] = 0 \tag{1.2}$$

$$Tr[\gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4g^{\alpha\beta} \tag{1.3}$$

$$Tr[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta] = 4(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \tag{1.4}$$

$$Tr[A\cancel{B}] = 4A \cdot B \tag{1.5}$$

$$Tr[A\cancel{B}\cancel{C}\cancel{D}] = 4[(A \cdot B)(C \cdot D) - (A \cdot C)(B \cdot D) + (A \cdot D)(B \cdot C)] \tag{1.6}$$

Definimos também a matriz $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Vale que $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, (\gamma^5)^2 = Id$ e $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, donde segue que $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$ são dois projetores ortogonais P_L (sinal -) e P_R (sinal +). Vale $P_L P_R = P_R P_L = 0$ e $P_L + P_R = Id$. Sendo assim, $\bar{\psi}\psi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L$, pois $\bar{\psi}_R\psi_R = \psi^\dagger P_R \gamma^0 P_R \psi = \bar{\psi} P_L P_R \psi = 0$, e semelhantemente $\bar{\psi}_L\psi_L = 0$. Da mesma maneira, mostra-se que $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$. No limite de altas energias (ou para partículas sem massa), ψ_L e ψ_R representam as projeções de ψ em autoestados de helicidade [18].

Espinores representados por $u_{(r)}(\mathbf{p})$ correspondem a soluções de energia positiva (e componente z do spin r) da equação de Dirac no espaço de momentum [19] para o férmion descrito por $\psi(x)$, enquanto os espinores representados por $v_{(s)}(\mathbf{p})$ correspondem ao antiférmion (com componente z do spin s). Esses espinores satisfazem as relações de completude [20]:

$$\sum_r u_{(r)a}(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p})_{(r)b} = \Lambda_{ab}^{(+)} = \frac{(\not{p} + m)_{ab}}{2m} \quad (1.7)$$

$$-\sum_r v_{(s)a}(\mathbf{p})\bar{v}(\mathbf{p})_{(s)b} = \Lambda_{ab}^{(-)} = \frac{(\not{p} - m)_{ab}}{2m} \quad (1.8)$$

Onde por $u_{(r)b}$ estamos nos referindo à b-ésima componente do espinor $u_{(r)}$. Dada uma matriz qualquer Γ , utilizamos o método descrito em [17] para reduzir somas do tipo $\sum_r \bar{u}_{(r)}\Gamma u_{(r)}$ ao cálculo de traços de matrizes.

1.3 Teoria Clássica de Campos

Utilizaremos o formalismo lagrangeano da teoria clássica de campos: descreveremos um conjunto $\{\phi_r\}$ de campos, definidos em uma região Ω do espaço-tempo através de uma função $\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r, x)$ dependente dos campos, de suas derivadas e, eventualmente, da posição no espaço-tempo. Assumiremos que um princípio variacional é satisfeito pelos campos: estes são tais que a ação $\mathcal{S} = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}$ é extremizada. Isso conduz às equações de movimento [17]:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0 \quad (1.9)$$

Um resultado que será importante é o Teorema de Noether: caso a transformação infinitesimal $\phi_r \rightarrow \phi_r + \delta\phi_r$ (juntamente com as transformações induzidas por esta) mantenha \mathcal{L} invariante, então temos que $\partial_\mu j^\mu = 0$, onde $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \delta\phi_r$, o que significa que a *carga de Noether* $Q = \int d^3x j^0$ é constante no tempo e, além disso, é um escalar [21].

O último resultado que necessitamos diz respeito às teorias com invariância de gauge *local*, nas quais tomamos um conjunto de campos

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

Para os quais temos que \mathcal{L} é invariante frente uma transformação tipo $\varphi \rightarrow U\varphi$, onde U é uma matriz constante, a qual pertence a algum grupo de Lie e pode ser escrita em termos de seus geradores T_a como $U = e^{-ig\theta_a T_a}$, com g uma constante. Podemos obter uma teoria invariante frente transformações em que a matriz U dependa da posição se fizermos a substituição [22]:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igA_{a\mu}T_a \quad (1.10)$$

Os campos vetoriais $A_{a\mu}$ se transformam, frente uma transformação de gauge infinitesimal, via [22]:

$$A_{a\mu} \rightarrow A_{a\mu} + \partial_\mu \theta_a + g f_{abc} \theta_b \theta_c \quad (1.11)$$

Onde os f_{abc} são definidos via $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$. Além disso, para dar dinâmica aos campos introduzidos, adicionamos à \mathcal{L} o termo invariante de gauge $-\frac{1}{4} F_{i\mu\nu} F_i^{\mu\nu}$, no qual [22]:

$$F_i^{\mu\nu} = \partial^\mu A_i^\nu - \partial^\nu A_i^\mu - g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (1.12)$$

1.4 Teoria Quântica de Campos

Dada uma teoria de campos clássica sem vínculos e descrita por campos $\{\phi_r\}$, ao quantizá-la transformamos os campos em operadores, os quais deverão satisfazer $[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}, t)] = \delta_{rs} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, onde π_s é o momentum canônico conjugado a ϕ_r , $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,0}}$. Impomos também $[\phi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{x}', t)] = 0$ e $[\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = 0$. Essas relações são usadas caso esses campos descrevam bósons [17]. Se estivermos tratando de campos fermiônicos $\psi(x)$, impomos relações de anticomutação entre suas componentes espinoriais: $\{\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = \delta_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, bem como $\{\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b(\mathbf{x}', t)\} = 0$ e $\{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = 0$ [17].

Estaremos interessados em teorias quânticas de campos interagentes e desejamos calcular seções de choque para certos processos, além de taxas de decaimento de partículas instáveis. Fazemos isso utilizando uma expansão do operador S , definido como $U(\infty, -\infty)$ (U é o operador de evolução temporal), a qual é devida a Dyson [17]. A saber, escrevemos

$$S = \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} \int \cdots \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n T \{ \mathcal{H}(x_1) \cdots \mathcal{H}(x_n) \} \quad (1.13)$$

Na expressão acima, T é o operador de ordenamento temporal, para o qual $T\{\phi(x)\xi(x')\} = \phi(x)\xi(x')$ se $t > t'$ ou $\epsilon_{\phi\xi}\xi(x')\phi(x)$ se $t' > t$, e $\epsilon_{\phi\xi}$ depende do caráter fermiônico/bosônico dos campos envolvidos, podendo valer 1 ou -1. Dessa expansão, podemos obter a interpretação diagramática de Feynman para os processos físicos da teoria interagente. Dados dois estados quânticos $|i\rangle$ e $|f\rangle$, $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$ dá a amplitude de probabilidade que o estado inicial $|i\rangle$ evolua (assintoticamente) para o estado final $|f\rangle$. É lícito escrever [17]

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta(p_i - p_f) \prod_i \left(\frac{1}{2VE_i} \right)^{1/2} \prod_f \left(\frac{1}{2VE_f} \right)^{1/2} \prod_l (2m_l)^{1/2} \mathcal{M}, \quad (1.14)$$

onde p_i, p_f é o quadrimomentum total dos estados i e f , e os produtórios em i e f devem se estender sobre todas as partículas presentes nos estados i e f . O produtório em l se faz sobre todos os campos de Dirac massivos presentes no processo, cada um tendo massa m_l . V é um volume de normalização e \mathcal{M} é a chamada amplitude invariante do processo. Para um processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, pode-se obter a seção de choque no referencial do centro de massa em termos de \mathcal{M} [17]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{A}{64\pi^2 s} \frac{|\mathbf{p}'_1|}{|\mathbf{p}_1|} \left(\prod_l 2m_l\right) |\mathcal{M}|^2, \quad (1.15)$$

onde introduzimos a variável de Mandelstam $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$, que é igual à energia total do processo no referencial CM. Os vetores \mathbf{p}'_1 e \mathbf{p}_1 são, respectivamente, o momentum de uma das partículas emergentes e de uma das partículas incidentes. O fator estatístico A depende das partículas do estado final serem idênticas ou não. Para um decaimento $1 \rightarrow 2 + 3$, obtemos sua taxa (no referencial de repouso de 1) via [17]:

$$\Gamma = \frac{A|\mathbf{p}|}{8\pi m_1^2} \left(\prod_l 2m_l\right) |\mathcal{M}|^2, \quad (1.16)$$

onde \mathbf{p} é um dos momenta emergentes após o decaimento.

Capítulo 2

O Modelo de Glashow, Weinberg e Salam

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é, partindo do primeiro modelo de interação fraca, motivar e construir a densidade lagrangeana da teoria de Glashow, Weinberg e Salam, a qual fornece uma descrição unificada das interações fracas e eletromagnéticas. A descrição das interações fracas inicia com a teoria de Fermi para o decaimento beta, proposta em 1934. A característica mais marcante dessa interação é que ela pode mudar a identidade de partículas que a sofrem: o próprio decaimento beta foi modelado como $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

Além disso, as taxas de decaimentos em reações fracas eram muito pequenas, e incompatíveis com as forças eletromagnética e forte [18]. Uma outra característica a reproduzir é que as interações fracas são de *curto alcance*: observamos o decaimento beta e outros decaimentos fracos de hádrons em escalas de distância da ordem do tamanho de um núcleon. Fermi propôs descrever todas essas características utilizando uma *interação de contato*, na qual todas as interações de um processo elementar (como o decaimento beta) ocorrem em um ponto, como ilustrado nos diagramas abaixo.

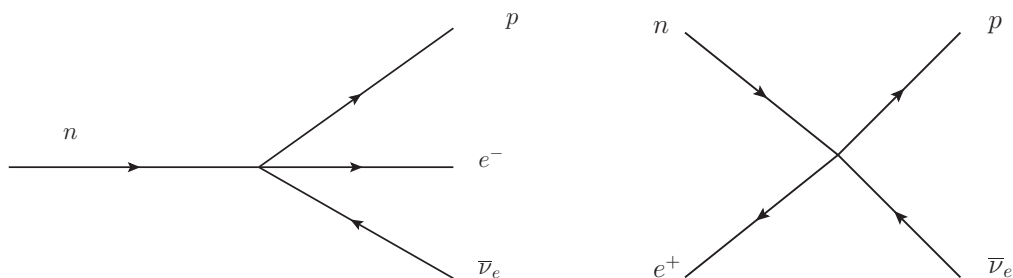


Fig. 2.1: Alguns processos elementares na teoria de Fermi

Heuristicamente, obtemos esse tipo de interação propondo que a amplitude invariante

de uma reação como a captura de elétron por um núcleo (resumida como $e^- + p \rightarrow n + \bar{\nu}_e$) tenha a seguinte forma:

$$\mathcal{M} = G_F [\bar{n} \gamma^\mu p] [\bar{\nu} \gamma_\mu e] \quad (2.1)$$

Esta deve ser comparada com a amplitude do espalhamento elétron-múon em eletrodinâmica quântica, na qual a interação é mediada pelo fóton, como no diagrama abaixo, com amplitude $\mathcal{M} = -ie^2 [\bar{e} \gamma^\sigma e] \frac{g_{\sigma\nu}}{q^2} [\bar{\mu} \gamma^\nu \mu] = -i \frac{e^2}{q^2} j_{(e)}^\alpha j_{(\mu)\alpha}$, onde q^2 é o quadrimomentum transferido entre as partículas e $j_{(e)}^\alpha = \bar{e} \gamma^\alpha e$, com $j_{(\mu)}^\alpha$ é definido analogamente. Escrevendo a amplitude nessa forma fica claro que temos uma interação entre correntes mediada pelo fóton, que “conecta” os dois vértice através do propagador $iD_{F\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$.

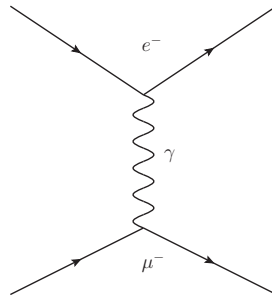


Fig. 2.2: Espalhamento elétron-múon segundo a QED

É fácil ver que a amplitude (2.1) pode ser escrita na forma de um produto de duas correntes: uma (que leva o nêutron no próton) aumentando a carga da partícula de saída e a outra diminuindo-a (leva o pósitron no antineutrino), para conservar a carga elétrica. A teoria de Fermi, apesar de bem sucedida, tinha problemas graves: um cálculo da seção de choque de espalhamento elétron-neutrino mostra que $\sigma \sim s$ para a onda S, ao passo que argumentos de unitariedade mostram que devemos ter $\sigma \leq \frac{4\pi}{s}$ no limite de altas energias [23].

Há outro aspecto no qual a teoria de Fermi não está completa: essa não incorpora a *violação de paridade* descoberta experimentalmente em 1954. Isso pode ser feito facilmente fazendo a substituição $\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu(1 - \gamma^5)$, levando assim a uma teoria em que a amplitude não é invariante sob paridade, devido à presença da matriz γ^5 : termos tipo $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ transformam-se como vetores, e termos tipo $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ transformam-se como pseudo-vetores. Assim, ao somarmos um vetor e um pseudo-vetor na expressão da amplitude, introduzimos violação de paridade. [25].

Numa tentativa de aproximar a descrição das interações fracas com a de uma teoria renormalizável tipo QED, Glashow propõe em 1957 um modelo no qual as interações fracas

também são mediadas por bósons. Dado o curto alcance das interações fracas, esses bósons devem ser muito massivos. Ainda, a hipótese desses bósons serem massivos era consistente com sua não detecção experimental (que só ocorreu em 1983), a qual requer $\sqrt{s} \geq 2m_W$. Utilizando o propagador correto para um bóson vetorial massivo podemos escrever a amplitude para o processo $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e$ como

$$\mathcal{M} = g_W [\bar{e}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\nu] \frac{-ig_{\mu\alpha} + \frac{q_\mu q_\alpha}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2} [\bar{\nu}\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)e] \quad (2.2)$$

Para baixas energias ($q^2 \ll m_W^2$), evidencia-se que obtemos uma teoria tipo a de Fermi fazendo $G_F = \frac{g_W}{m_W^2}$. Seria a teoria de Glashow uma resposta para o problema da unitariedade? Mostra-se que esse não é o caso: a teoria de Glashow não é renormalizável. Isso evidencia-se do fato que o propagador do bóson vetorial massivo tende para uma constante para momenta de módulo (Euclideano) muito grande, o que dá origens a divergências quadráticas quando diagramas com laços estão envolvidos [17].

Uma observação importante para o desenvolvimento teórico foi dada por Mahmoud e Konopinski em 1953: as interações fracas aparentam conservar quantidades denominadas *números leptônicos*, que podem ser definidas como $L_e = N(e) - N(e^+) + N(\nu_e) - N(\bar{\nu}_e)$, e números para múons e tauons podem ser definidos de maneira análoga. Essa lei de conservação pode ser usada para explicar, por exemplo, porque a reação $\mu \rightarrow e\gamma$ não ocorre [19]. Poder-se-ia obter alguma informação da natureza da interação a partir dessa conservação? Restringindo-nos, deste ponto em diante, a interações leptônicas, procuramos por interações que respeitem a conservação das correntes $J^\mu = \bar{e}\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2}\nu$ e $J^{\mu\dagger}$, que podem ser usadas para a construção de densidades lagrangeanas que conservam número leptônico [17]. A única maneira que conhecemos de obter interações a partir de simetrias é o *princípio de gauge*, o qual tem o benefício de gerar teorias *renormalizáveis* [22].

2.2 Uma teoria de gauge para a interação fraca

2.2.1 A escolha do grupo de simetria

Ao construir uma teoria de gauge, necessitamos de dois ingredientes: um grupo de simetria e um conjunto de campos que se transforme segundo uma representação desse grupo [22]. O princípio de gauge então nos permite obter, a partir de uma teoria livre, uma teoria interagente, na qual as interações são mediadas por bósons vetoriais, em número igual ao número de geradores do grupo. Como os bósons vetoriais W^\pm possuem carga elétrica, isso significa que eles interagem entre si. Isso indica a necessidade de construirmos uma teoria de gauge não-abeliana [25]. Para isso, o menor grupo que podemos usar é $SU(2)$, o qual

tem três geradores, um a mais que o número de bósons introduzidos por Glashow. Nessa seção o limite de altas energias estará implícito, para facilitar a discussão das componentes “left” e “right” dos campos fermiônicos.

Notemos, no entanto, a sutil conexão entre a interação eletromagnética e a interação fraca: os vértices carregados da teoria eletrofraca mudam a carga das partículas em exatamente uma unidade para cima ou para baixo. Isso sugere que, ao contrário da interação forte, a interação fraca está de alguma maneira “ciente” da interação eletromagnética. De fato, em 1957 Schwinger propõe um modelo eletrofraco, e Glashow, em 1961, propõe que a unificação é o caminho para obter uma teoria renormalizável para as interações fracas. Incluindo o fóton com os bósons W^\pm , podemos utilizar o grupo $SU(2)$, com três geradores, para construirmos uma teoria.

É necessário, então, que as cargas de Noether cuja conservação foram propostas, i.e, as cargas associadas à conservação de J^μ , $J^{\mu\dagger}$ e a corrente eletromagnética, gerem um grupo de simetria, formando uma álgebra fechada ao tomarmos seus comutadores. Restringindo-nos, a partir desse ponto, a uma única família leptônica, para ilustrar a teoria da maneira mais simples possível, definimos:

$$T = \frac{1}{2} \int d^4x \nu^\dagger (1 - \gamma^5) e \quad ; \quad T^\dagger = \frac{1}{2} \int d^4x e^\dagger (1 - \gamma^5) \nu \quad (2.3)$$

$$Q_{em} = - \int d^4x e^\dagger e \quad (2.4)$$

No entanto, utilizando as relações de anticomutação canônicas para os férmions, obtemos:

$$\begin{aligned} [T, T^\dagger] &= \int d^3x d^3x' [\nu_L^\dagger(x) e_L(x), e_L^\dagger(x') \nu_L(x)] \\ &= \int d^3x d^3x' [\nu_{L_i}^\dagger(x) \{e_{L_i}(x), e_{L_j}^\dagger(x')\} \nu_{L_j}(x') - e_{L_i}^\dagger(x') \{ \nu_{L_i}(x'), \nu_{L_j}^\dagger(x) \} e_{L_j}(x)] \\ &= \int d^3x [\nu_L^\dagger(x) \nu_L(x) - e^\dagger(x) e(x)] \equiv 2T_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde é claro que T_3 não é combinação linear de T , T^\dagger e Q_{em} . Notemos que os geradores de $SU(2)$ (as matrizes de Pauli) têm traço zero, correspondendo ao fato de que a carga $SU(2)$ dentro de um multipletto é zero ($1/2 - 1/2$), ao passo que estamos, implicitamente, construindo multipletos utilizando o elétron e o neutrino, que não formam um conjunto de carga neutra. Sendo assim, temos duas escolhas: ou introduzimos novas partículas em nossa teoria, para manter os multipletos neutros [25], ou introduzimos uma nova *corrente neutra* em nossa teoria, que leve à conservação da carga T_3 . Escolheremos aqui a segunda abordagem, ampliando o grupo de simetria para $SU(2) \times U(1)$. Isso pode ser feito pois

mostra-se que $Y = 2(Q_{em} - T_3)$ comuta com T , T^\dagger e T_3 . É usual tomar os geradores de uma álgebra de Lie como operadores hermitianos. Para isso, definamos:

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^\dagger) \ ; \ T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^\dagger) \quad (2.6)$$

Obtemos, então:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \int d^3x [\nu_L^\dagger(x) e_L(x) + e_L^\dagger(x) \nu_L(x)] \\ T_2 &= \frac{1}{2} \int d^3x [ie_L^\dagger(x) \nu_L(x) - i\nu_L^\dagger(x) e_L(x)] \\ T_3 &= \frac{1}{2} \int d^3x [\nu_L^\dagger(x) \nu_L(x) - e_L^\dagger(x) e_L(x)] \end{aligned}$$

Torna-se claro que podemos usar $\Psi_L^T = (\nu_L \ e_L)$ como um multiplete de $SU(2)$ na nossa teoria. De fato, sendo σ_i as matrizes de Pauli, as cargas acima se escrevem como $T_i = \int d^3x \Psi_L^\dagger \sigma_i \Psi_L$. Assim, encontramos uma maneira simples de obter uma teoria de gauge na qual a paridade é explicitamente violada: introduzimos Ψ_L como um dubleto de $SU(2)$ e postulamos que as componentes e_R e ν_R (caso exista) sejam singletos de $SU(2)$. Como vale $Q_{em} = T_3 + \frac{Y}{2}$, a componente e_R do campo do elétron deve possuir carga $U(1)_Y$.

Antes de escrevermos o lagrangeano da teoria eletrofraca, notemos o seguinte: processos neutros de interações fracas foram descobertos no CERN em 1973, os quais poderiam ser, em princípio, atribuídos a um campo de se acoplasse com a carga T_3 . No entanto, estes processos neutros não acoplam somente as componentes de mão esquerda, como ocorre em T_3 . Sendo assim, vemos que a unificação eletrofraca efetivamente ocorre através das correntes neutras: nem Y nem T_3 representam cargas físicas, e sim uma combinação linear dessas correntes neutras dará as cargas físicas.

2.2.2 Uma densidade lagrangeana com simetria de gauge

$$SU(2) \times U(1)$$

Partindo da densidade lagrangeana livre para campos fermiônicos, modificamos seu termo cinético,

$$\mathcal{L}_K = \bar{\nu} i \not{\partial} \nu + \bar{e} i \not{\partial} e \quad (2.7)$$

Fazendo a separação $\bar{\psi} i \not{\partial} \psi \rightarrow \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R$ e, no primeiro termo, substituindo, $\partial_\mu \rightarrow D_\mu^{(L)} = \partial_\mu + ig \frac{\sigma_i}{2} W_{i\mu} + ig' \frac{Y}{2} B_\mu$, onde introduzimos os campos W_i e B , os quais implementam a simetria de gauge [22]. No segundo termo, fazemos a substituição $\partial_\mu \rightarrow$

$D_\mu^{(R)} = \partial_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu$. Introduzimos também termos cinéticos para os bósons de gauge, os quais serão definidos mais adiante em (2.16).

Temos, agora, que lidar com dois problemas em exigir que a densidade lagrangeana possua simetria de gauge local $SU(2) \times U(1)$. O primeiro, bem conhecido, é que termos de massa do tipo $m^2 B_\mu B^\mu$ ou $m^2 W_\mu W^\mu$ não são invariantes de gauge [22]. O segundo problema decorre da violação de paridade. Sabemos que $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L$. Como ψ_L e ψ_R tem propriedades de transformação distintas, é impossível construir um termo invariante de gauge a partir de seu produto. Se por um lado, então, o princípio de gauge nos permite obter interações a partir de simetrias, o seu acoplamento à violação de paridade exclui todos os termos de massa da teoria.

A pergunta que devemos nos fazer, então, é a seguinte: como introduzir uma *escala de massa* na teoria? De fato, a densidade lagrangeana acima só possui acoplamentos *adimensionais*, então não há uma escala que possamos utilizar para incluir as massas na teoria de uma maneira invariante de gauge. O mecanismo mais simples que permite fazer isso nas teorias de gauge não abelianas foi proposto após trabalhos de Anderson e Nambu [14, 15], os quais indicavam que a *quebra espontânea de simetria* poderia fornecer uma maneira de introduzir as massas mantendo a renormalizabilidade, que é perdida quando os termos de massa são introduzidos arbitrariamente [22]. O fato de a quebra da simetria $SU(2) \times U(1)$ ser plausível vê-se pois os dubletos $SU(2)$ indicam uma simetria entre elétron e neutrino que não é observada na natureza - em particular, suas massas são muito diferentes.

2.3 Quebra Espontânea de Simetria

2.3.1 Introdução: escolhendo um campo de Higgs

Resumidamente, o mecanismo de quebra espontânea de simetria introduzirá um campo Φ , chamado campo de Higgs, o qual irá interagir com todas as partículas massivas da teoria. Os termos de massa serão obtidos fazendo com que o valor esperado do vácuo do campo Φ seja não trivial, $\langle 0|\Phi(x)|0\rangle = v(x) \neq 0$. Como esperamos que o vácuo seja homogêneo e isotrópico, v deve ser uma constante e o campo Φ deve ser escalar, para que não se introduza uma direção preferencial com o spin. Resta agora escolher o caráter de Φ frente $SU(2) \times U(1)$ para termos todos os ingredientes necessários para introduzir a quebra de simetria eletrofraca. Queremos obter um termo do tipo $f(\phi)\bar{\psi}\psi$ que seja invariante de gauge e que forneça massa ao elétron.

Vemos que $\bar{\psi}\psi$ se transforma segundo a representação fundamental de $SU(2)$, a de spin $1/2$. Caso escolhamos o campo de Higgs como um dubleto de $SU(2)$, um termo do tipo $\bar{\psi}_L\Phi\psi_R + h.c.$ se transforma segundo o produto de duas representações de spin $1/2$. A

conhecida decomposição de Clebsch-Gordan $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$ permite concluir que é possível extrair um termo singlete dessa combinação. É fácil ver que a escolha $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ dá massa ao elétron ao fazermos a expansão $\Phi = v + \delta\Phi$. Resta, então, escolher a hipercarga de Φ . Como desejamos que o vácuo da teoria seja eletricamente neutro, devemos fazer $Y = 1$ para o campo de Higgs.

Agora que temos todos os números quânticos internos do campo de Higgs podemos implementar a quebra de simetria na teoria eletrofraca. Para entender como se faz isso, mostraremos o mecanismo de quebra espontânea de simetria (global e local) em um contexto mais simples, usando uma teoria abeliana.

2.3.2 Quebrando simetrias globais

Definimos $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ como um campo escalar complexo, ao qual associamos a densidade lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi), \\ V(\phi^\dagger \phi) &= \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^4. \end{aligned} \tag{2.8}$$

A lagrangeana acima é claramente invariante frente $\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi$, com θ constante. Para termos uma teoria razoável, devemos ter $\lambda > 0$. Caso $\mu^2 > 0$, temos a densidade lagrangeana de um campo escalar complexo de massa μ . O que acontece se $\mu^2 < 0$? Primeiramente, notemos que, se $\mu^2 > 0$, $V(\phi^\dagger \phi)$ possui um único extremo, ocorrendo para $\phi = 0$. No entanto, com $\mu^2 < 0$, não só a interpretação do termo quadrático não é clara, por corresponder a um quadrado de massa negativo, como também a forma do potencial fica alterada, tendo agora V mínimos para $|\phi| = v \equiv \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$.

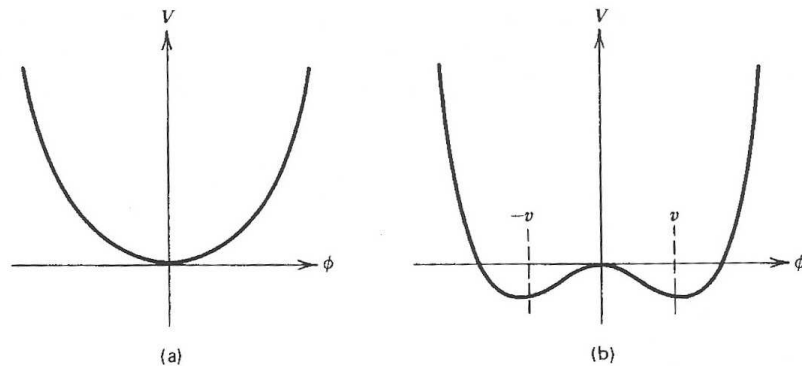


Fig. 2.3: Corte unidimensional de $V(\phi^\dagger \phi)$ para $\mu^2 > 0$ e $\mu^2 < 0$, respectivamente

A maneira como interpretamos os termos da densidade lagrangeana, utilizando diagramas de Feynman, vem da expansão da matriz S , a qual é uma boa descrição de uma teoria

no regime perturbativo. Sendo assim, é razoável que desloquemos o campo, escrevendo \mathcal{L} em termos de $\phi = v + \eta + i\xi$, expandindo \mathcal{L} em torno de um de seus pontos de mínimo. Os campos η e ξ medem as flutuações de ϕ em torno do equilíbrio e, assim, sua interpretação pode ser feita da maneira convencional.

É importante notar que o estado fundamental desse campo, com $\phi = ve^{i\delta}$ não possui a invariância frente transformações de fase que \mathcal{L} possui. Quando isso acontece, dizemos que ocorreu *quebra espontânea de simetria*, apesar de ser mais apropriado dizer que a simetria foi “escondida”, e não explicitamente quebrada, pois a escolha de um vácuo em torno do qual fazer a expansão possui uma arbitrariedade justamente por causa da simetria de \mathcal{L} . Efetuando a expansão, obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \dots, \quad (2.9)$$

onde (...) indica termos de mais alta ordem ou constantes. Em termos dessas variáveis, o espectro da teoria fica claro: estamos lidando com um campo escalar massivo (lembramos que $\mu^2 < 0$) e um campo escalar sem massa (ξ), o qual surge justamente devido à quebra de simetria. Intuitivamente, podemos compreender sua existência da seguinte maneira: uma perturbação infinitesimal que faça $v \rightarrow (1 + i\theta)v$ leva o vácuo da teoria em outro vácuo, ou seja, a variação de energia ao realizar essa perturbação é nula.

Em termos de análise de Fourier, estamos adicionando ao campo uma onda de comprimento de onda infinito ao campo original. Interpretando essa perturbação em termos de partículas através de $E = \omega = m$, vemos que ela corresponderia a uma partícula de massa zero. De fato (cf. Apêndice A), podemos generalizar a situação exposta acima e vemos que a quebra de simetrias globais implica na existência de partículas sem massa na teoria, denominadas bósons de Goldstone. Os bósons de Goldstone não são observados na natureza. Veremos, no entanto, que ao quebrarmos uma simetria *local*, a solução do problema criado pelos bósons de Goldstone é exatamente a geração de massa para os bósons vetoriais da teoria.

2.3.3 Quebrando simetrias locais

Ainda nos restringindo ao campo complexo, escrevamos uma densidade lagrangeana invariante frente transformações de gauge *locais*, introduzindo um campo A_μ

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - V(\phi^\dagger\phi) \quad (2.10)$$

$$D_\mu\phi = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (2.11)$$

Escrevendo $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \phi_1 + i\phi_2)$, vemos que $D_\mu\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\partial_\mu\phi_1 + iqv(A_\mu + \frac{1}{qv}\partial_\mu\phi_2) + iqA_\mu(\phi_1 + i\phi_2)]$. Notemos que o segundo termo tem exatamente a forma da transformação de gauge (1.11), dando a esperança de podermos eliminar completamente a dependência em ϕ_2 da teoria, o qual se torna intimamente ligado a A_μ . Adicionar um grau de liberdade escalar a A_μ forneceria a este campo uma componente de spin zero a qual, no espaço de momentum, pode ser interpretada como um grau de liberdade longitudinal, que é exatamente o grau de liberdade associado á massa não nula de um campo vetorial. Partindo dessa constatação, tentaremos obter uma transformação de gauge que elimine ϕ_2 .

Estaremos, assim, fixando o gauge no chamado gauge unitário. É importante perceber o seguinte: um campo escalar complexo, bem como um campo vetorial sem massa, possui 2 graus de liberdade. Dessa forma, \mathcal{L} descreve 4 graus de liberdade. É importante, então, que fixemos um gauge para descrever a teoria com o bóson vetorial massivo, pois esse campo tem 3 graus de liberdade, e não queremos introduzir graus de liberdade espúrios na teoria.

Façamos, então, $\phi' = e^{-iq\Lambda(x)}\phi = [\cos(q\Lambda)(v + \phi_1) - \phi_2\sin(q\Lambda)] + i[-\sin(q\Lambda)(v + \phi_1) + \phi_2\cos(q\Lambda)]$. Vemos que a escolha $q\Lambda = \tan^{-1}\frac{\phi_2}{v+\phi_1}$ nos permite tornar nula a segunda componente. Como \mathcal{L} possui invariância de gauge local, calculamos o termo $|D_\mu\phi|^2$ no calibre novo, onde introduzimos $\phi'_1 \equiv H(x)$, obtendo:

$$\begin{aligned} |D_\mu\phi'|^2 &= \frac{1}{2}[\partial_\mu H + iqA_\mu(v + H)][\partial^\mu H - iqA_\mu(v + H)] \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H + \frac{1}{2}(q^2v^2 + 2q^2vH + q^2H^2)A_\mu A^\mu. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Torna-se explícito que nossa teoria descreve, agora, um bóson escalar (massivo, como se vê expandindo V), e um bóson vetorial de massa $m_A = qv$. Podemos dizer que o bóson de Goldstone ϕ_2 foi “engoblado” por A_μ , o qual, no processo, adquire massa. É possível provar, inclusive, que a teoria resultante é renormalizável [22]. Sendo assim, vemos que a quebra espontânea de simetria consegue uma façanha notável: partimos de uma teoria invariante de gauge local, sem massa, e obtemos uma teoria com bósons vetoriais massivos que é renormalizável.

No caso não abeliano, com um grupo de dimensão N e um vácuo invariante frente transformações de um subgrupo de dimensão M, mostra-se que também existe um calibre unitário [22, 16] e que a teoria resultante possui M bósons vetoriais sem massa e N-M bósons vetoriais massivos. Ilustramos isso na seção seguinte para construir o modelo de Glashow, Weinberg e Salam.

2.4 Construção do modelo GWS

2.4.1 Quebra de simetria e geração de massa para os bósons de gauge

Vimos, na seção 2.3.1, que o Higgs da teoria eletrofraca deverá ser um dubleto de SU(2) com hipercarga $Y=1$. Escrevemos, então,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Introduzimos, então, $\mathcal{L} = |D_\mu^{(L)}\Phi|^2 - V(\Phi^\dagger\Phi) - \frac{1}{4}F_{a\mu\nu}F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$, onde $B_{\mu\nu}$ e $F_a^{\mu\nu}$ são definidos seguindo a prescrição de (1.12). Assumindo a existência de um gauge unitário, faremos a expansão $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix}$, na qual utilizamos o gauge unitário para nos livrarmos dos três bósons de Goldstone associados às não invariâncias do vácuo da teoria. Daí, obtemos:

$$D_\mu^{(L)}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu h \end{pmatrix} + \frac{ig}{2\sqrt{2}}\sigma \cdot \mathbf{W}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} + \frac{ig'}{2\sqrt{2}}B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \right].$$

Introduzindo $W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} - iW_{2\mu})$ e W^\dagger , temos que:

$$\sigma \cdot \mathbf{W}_\mu = \begin{pmatrix} W_{3\mu} & \sqrt{2}W_\mu \\ \sqrt{2}W_\mu^\dagger & -W_{3\mu} \end{pmatrix},$$

donde obtemos

$$D_\mu^{(L)}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{ig}{2}W_\mu(v+h) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu h + \frac{i(v+h)}{2\sqrt{2}}(g'B_\mu - gW_{3\mu}) \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Tomando o módulo quadrado, obtemos, finalmente:

$$|D_\mu^{(L)}\Phi|^2 = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \left(\frac{gv}{2}\right)^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{v^2}{8}(g^2W_3^2 - 2gg'W_3 \cdot B + g'^2B^2) + \dots \quad (2.14)$$

onde, novamente, (...) representa os termos de mais alta ordem. Vemos que o campo complexo W tem massa $m_W = \frac{gv}{2}$ e que os campos $W_{3\mu}$ e B_μ se misturam, não sendo estes os autoestados de massa da teoria, leia-se, os campos físicos. Para obtê-los, diagonalizamos a *matriz de massa* M^2 , definida de maneira que a forma quadrática de W_3 e B acima escreva-se $\frac{1}{2}M_{ij}^2Q_i \cdot Q_j$, com $Q_1 = W_3$ e $Q_2 = B$. É fácil ver que

$$M^2 = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizando a matriz de massa, encontraremos os estados físicos como autovetores de M^2 . Como M^2 é real e simétrica, pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal O , donde podemos definir os autoestados físicos Z e A da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Z &= \cos \theta_W W_3 - \sin \theta_W B \\ A &= \sin \theta_W W_3 + \cos \theta_W B, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde introduzimos o *ângulo de Weinberg* θ_W . Por inspeção, podemos verificar que $\det(M^2)=0$, ou seja, um dos campos físicos não tem massa. Isso ocorre pois, como exposto na seção 2.3.1, o vácuo da teoria eletrofraca é neutro, ou seja, é invariante frente as transformações geradas por Q e, como exposto em [22], a presença de invariâncias do vácuo implica em bósons sem massa na teoria. Obtermos um bóson sem massa (o fóton) é, então, uma condição de compatibilidade com nossa construção da quebra de simetria.

Usando o fato que $\text{Tr}(M^2)=\lambda_1 + \lambda_2$, onde os λ_i são os autovalores de M^2 , obtemos rapidamente a massa do bóson neutro Z : $m_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}$. Exigindo que o campo A corresponda ao bóson sem massa, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta_W \\ \cos \theta_W \end{pmatrix} = 0.$$

Donde obtemos, tomando a equação para a primeira componente, $\tan \theta_W = \frac{g'}{g}$, de onde obtemos $\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}$; $\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}$.

2.4.2 A densidade lagrangeana no modelo GWS

Podemos, finalmente, escrever a densidade lagrangeana para a teoria eletrofraca de Glashow, Weinberg e Salam, para o caso de uma única família leptônica, e sem quarks. A renormalizabilidade da teoria completa foi provada por t'Hooft e Veltman em 1971. Inicialmente, façamos algumas definições preliminares, escrevendo-a em termos dos campos não físicos (W_i, B, Φ). Definamos:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ F_{a\mu\nu} &= \partial_\mu W_{a\nu} - \partial_\nu W_{a\mu} - g\epsilon_{abc}W_{b\mu}W_{c\nu} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} = \frac{m_e}{v}, \quad (2.17)$$

onde v é o VEV do campo de Higgs e m_e a massa do elétron. Então, a densidade lagrangeana da teoria GWS é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GWS} = & \bar{\Psi}_L i \not{D}^{(L)} \Psi_L + \bar{e}_R i \not{D}^{(R)} e - \lambda_e (\bar{\Psi}_L \Phi e_R + \bar{e}_R \Phi^\dagger \Psi_L) + [D_\mu^{(L)} \Phi]^\dagger [D^{\mu(L)} \Phi] \\ & - V(\Phi^\dagger \Phi) - \frac{1}{4} F_{a\mu\nu} F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

O próximo passo é escrever \mathcal{L}_{GWS} em termos dos campos físicos, fazendo $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h(x) \end{pmatrix}$ e introduzindo os campos vetoriais W , W^\dagger , A e Z definidos na seção anterior. Obtemos uma densidade lagrangeana que pode ser separada em termos correspondentes aos campos livres, e termos correspondentes às interações entre as partículas. Ilustraremos como os termos correspondentes aos acoplamentos dos férmions com o fóton e os bósons W e Z podem ser obtidos a partir de \mathcal{L}_{GWS} , expandindo os termos das derivadas covariantes que possuem dependência nos campos de gauge.

Começamos com a parte correspondente a Ψ_L , onde usamos a expressão explícita para $\sigma \cdot W_\mu$ já exposta anteriormente, obtendo que a densidade lagrangeana de interação entre os férmions e os bósons de gauge é

$$\mathcal{L}^{FB} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{g}{2} W_3 - \frac{g' Y}{2} \not{B} & -\frac{g}{\sqrt{2}} \not{W} \\ -\frac{g}{\sqrt{2}} \not{W}^\dagger & \frac{g}{2} W_3 - \frac{g' Y}{2} \not{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} - \frac{g' Y'}{2} \bar{e}_R \not{B} e_R,$$

onde Y é a hipercarga do dubleto $SU(2)$ e Y' a carga do singlete $SU(2)$. Fazendo os produtos matriciais, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{FB} = & \bar{\nu}_L \left(-\frac{g}{2} W_3 - \frac{g' Y'}{2} \not{B} \right) \nu_L - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \not{W} e_L - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \not{W}^\dagger \nu_L \\ & + \bar{e}_L \left(\frac{g}{2} W_3 - \frac{g' Y}{2} \not{B} \right) e_L - \frac{g' Y'}{2} \bar{e}_R \not{B} e_R. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Agora, utilizando a expressão $Q_{em} = T_3 + \frac{Y}{2}$ e notando que a carga do elétron (em unidades de e) é -1 , identificamos $Y = -1$ e $Y' = -2$. Definindo, também, $j_W^\mu = 2\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L$, invertemos a expressão de A e Z em termos dos campos não físicos para obter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{FB} = & -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L (g \sin \theta_W \not{A} + g \cos \theta_W \not{Z} - g' \cos \theta_W \not{A} + g' \sin \theta_W \not{Z}) \nu_L \\ & + \frac{1}{2} \bar{e}_L (g \sin \theta_W \not{A} + g \cos \theta_W \not{Z} + g' \cos \theta_W \not{A} - g' \sin \theta_W \not{Z}) e_L \\ & + g' \cos \theta_W \bar{e}_R \not{A} e_R - g' \sin \theta_W \bar{e}_R \not{Z} e_R \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} (j_W^\mu W_\mu^\dagger + j_W^{\mu\dagger} W_\mu). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Notando que $g' \cos \theta_W = g \sin \theta_W$, vemos que o acoplamento do neutrino com o fóton é nulo. Exigindo, então, que o termo que acopla o elétron ao campo A corresponda à corrente eletromagnética $j_{em}^\mu = -\bar{e}\gamma^\mu e$, somos forçados a tomar $g' \cos \theta_W = q_e$, a carga elementar. Escrevendo explicitamente os projetores de helicidade, calculemos os termos correspondentes ao acoplamento do neutrino e do elétron ao bóson Z, \mathcal{L}^{NC} , utilizando que $g' = g \tan \theta_W$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{NC} &= -\frac{1}{2}\bar{\nu}_L(g \cos \theta_W + g \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W})\not{Z}\nu_L + \frac{1}{2}\bar{e}_L(g \cos \theta_W - g \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W})\not{Z}e_L, \\
 &\quad -g \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W}\bar{e}_R\not{Z}e_R, \\
 &= -\frac{g}{4 \cos \theta_W}\bar{\nu}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\nu Z_\mu, \\
 &\quad +\frac{g}{4 \cos \theta_W}\bar{e}\gamma^\mu((\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W)(1 - \gamma^5) - 2 \sin^2 \theta_W(1 + \gamma^5))e Z_\mu, \\
 &= -\frac{g}{4 \cos \theta_W}\bar{\nu}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\nu Z_\mu + \frac{g}{4 \cos \theta_W}\bar{e}\gamma^\mu(1 - 4 \sin^2 \theta_W - \gamma^5)e Z_\mu. \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Utilizando, agora, a notação mais tradicional, que identifica e com a carga elementar e ψ_f com o campo do férmion “f”, inserimos \mathcal{L}^{NC} em \mathcal{L}^{FB} para obter, finalmente,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{FB} &= -\frac{g}{2\sqrt{2}}(\bar{\psi}_\nu\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\psi_e W_\mu + \bar{\psi}_e\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\psi W_\mu^\dagger) + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\
 &\quad -\frac{g}{4 \cos \theta_W}\bar{\psi}_\nu\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\bar{\psi}_\nu Z_\mu + \frac{g}{4 \cos \theta_W}\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1 - 4 \sin^2 \theta_W - \gamma^5)\bar{\psi}_e Z_\mu \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

A partir de uma medida experimental de θ_W , da constante de estrutura fina e da constante de Fermi, G_F , podemos determinar todos os outros parâmetros livres em \mathcal{L}^{FB} , inclusive a massa dos bósons de gauge W e Z, a menos de correções radiativas [17]. Fazendo as definições usuais:

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\
 F_{W\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu, \\
 Z_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu,
 \end{aligned}$$

é possível escrever $\mathcal{L}_{GWS} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, onde o primeiro termo corresponde aos campos livres e o segundo gera as interações. Temos que (admitindo que os neutrinos tenham massa nula):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}_\nu i\not{\partial}\psi_\nu + \bar{\psi}_e(i\not{\partial} - m_e)\psi_e - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}F_W^{\mu\nu\dagger} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{1}{2}(-2\mu^2)h^2. \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Já o termo de interação pode ser decomposto em 5 partes, \mathcal{L}^{FB} , calculada anteriormente, e outros quatro termos: \mathcal{L}^{BB} , \mathcal{L}^{HB} , \mathcal{L}^{HH} , \mathcal{L}^{HF} , os quais representam, respectivamente, as interações entre os bósons de gauge, as interações do Higgs com os bósons de gauge, a auto-interação do Higgs e a interação do Higgs com os férmions da teoria. Um longo cálculo mostra que [17]:

$$\mathcal{L}^{HH} = -\frac{1}{4}\lambda h^4 - \lambda v h^3, \quad (2.24)$$

$$\mathcal{L}^{HF} = -\frac{m_e}{v} h \bar{\psi}_e \psi_e, \quad (2.25)$$

$$\mathcal{L}^{HB} = \frac{1}{2} v g^2 W_\mu^\dagger W^\mu h + \frac{1}{4} g^2 W_\mu^\dagger W^\mu h^2 + \frac{v g^2}{4 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu h + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu h^2, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{BB} = & ig \cos \theta_W [(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu) \partial^\mu Z^\nu + (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) W^{\nu\dagger} Z^\mu \\ & - (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger) W^\nu Z^\mu] \\ & + ie [(W_\mu^\dagger W_\nu - W_\nu^\dagger W_\mu) \partial^\mu A^\nu + (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) W^{\nu\dagger} A^\mu \\ & - (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger) W^\nu A^\mu] \\ & + g^2 \cos^2 \theta_W [W_\mu W_\nu^\dagger Z^\mu Z^\nu - W_\mu W^{\mu\dagger} Z_\nu Z^\mu] \\ & + e^2 [W_\mu W_\nu^\dagger A^\alpha A^\beta - W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu A^\nu] \\ & + eg \cos \theta_W [W_\mu W_\nu^\dagger (Z^\mu A^\nu + A^\mu Z^\nu) - 2W_\mu W^{\mu\dagger} A_\nu Z^\nu] \\ & + \frac{1}{2} g^2 W_\mu^\dagger W_\nu [W^{\mu\dagger} W^\nu - W^\mu W^{\nu\dagger}]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

É possível estender a teoria exposta aqui para incluir as outras famílias leptônicas e os quarks. Feito isso, e incluindo a QCD na teoria, expandimos a simetria de gauge para uma simetria $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ e obtemos o Modelo Padrão da Física de Partículas.

Capítulo 3

Matéria Escura Fermiônica

3.1 Uma proposta de densidade lagrangeana

Introduzimos nesta seção o modelo de Lee, Kim e Shin [9] para a matéria escura. Faremos uma breve descrição dos autoestados de massa da teoria e ilustraremos como se faz o cálculo de um observável de interesse, a taxa de decaimento do bóson de Higgs em um par de partículas de matéria escura. No próximo capítulo, proporemos uma extensão deste modelo.

São introduzidas duas partículas novas: um escalar S e um férmion χ , ambos singletos de $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ do MP. Para evitar que haja mistura cinética entre χ e os férmions do MP, exigimos que o número fermiônico associado à simetria de fase global da equação de Dirac livre seja conservado na teoria. Dessa maneira, χ não pode estar acoplado diretamente à nenhuma das partículas do modelo padrão.

Resta, então, a possibilidade de que a interação entre o setor escuro e o MP ocorra através do escalar. Propõe-se que a interação de S com o MP ocorra exclusivamente através do bóson de Higgs, o que inclui o modelo numa classe de teorias conhecidas como *Higgs portal dark matter*. Além disso, o escalar terá um potencial que permite quebra de simetria no setor escuro, gerando uma correção de massa para o férmion χ . Podemos escrever, então [9]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{MP} + \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_S - g_\varphi S \bar{\chi} \chi + \mathcal{L}_{Int}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{L}_\chi = \bar{\chi}(i\cancel{\partial} - m_{\chi_0})\chi, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}\partial_\mu S \partial^\mu S - \underbrace{\left(\frac{m_0^2}{2}S^2 + \frac{\lambda_3}{3!}S^3 + \frac{\lambda_4}{4!}S^4\right)}_{\equiv V_S}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}_{Int} = -\lambda_1 \Phi^\dagger \Phi S - \lambda_2 \Phi^\dagger \Phi S^2, \quad (3.4)$$

onde \mathcal{L}_{MP} é a densidade lagrangeana do MP. A forma do potencial presente em \mathcal{L}_S indica claramente a possibilidade de quebra espontânea de simetria no modelo, a qual parametrizaremos introduzindo $\langle S \rangle = x_0$. Ao explicitarmos a quebra espontânea de simetria em

ambos os setores, escrevendo o campo de Higgs como no capítulo anterior e $S = x_0 + \varphi$, vê-se que \mathcal{L} conterà uma forma quadrática em h e φ , indicando que esses não são os autoestados de massa da teoria. Definimos $\mathcal{V} = V_S + V(\Phi^\dagger\Phi)$ e nessa seção escreveremos $V(x) = -\mu^2 x^2 + \lambda x^4$, ou seja, faremos $\mu^2 > 0$. Exigindo que $\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial h} \right|_{v, x_0} = \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} \right|_{v, x_0} = 0$, podemos isolar μ^2 e m_0^2 , eliminando-os dos cálculos a seguir. Obtém-se:

$$m_0^2 = -\frac{\lambda_3}{2}x_0 - \frac{\lambda_4}{6}x_0^3 - \lambda_2 v^2 - \frac{\lambda_1 v^2}{2x_0} \quad (3.5)$$

$$\mu^2 = \lambda v^2 + x_0(\lambda_1 + \lambda_2 x_0) \quad (3.6)$$

Além disso, sabemos que a matriz de massa M^2 obedece $M_{ij}^2 = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial^2 q_i q_j}$ [22], onde definimos $q_1 = h$ e $q_2 = S$, as derivadas parciais sendo calculadas no ponto de mínimo. Sendo assim, utilizando as relações acima podemos obter expressões para os elementos da matriz de massa:

$$M_{hh}^2 = 2\lambda v^2 \quad (3.7)$$

$$M_{ss}^2 = \frac{\lambda_3 x_0}{2} + \frac{\lambda_4}{3}x_0^2 - \frac{\lambda_1 v^2}{2x_0} \quad (3.8)$$

$$M_{hs}^2 = M_{sh}^2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2 x_0)v \quad (3.9)$$

Introduzimos os estados físicos da teoria, h_1 e h_2 , os quais serão parametrizados por um ângulo θ via

$$h_1 = \varphi \sin \theta + h \cos \theta \quad (3.10)$$

$$h_2 = \varphi \cos \theta - h \sin \theta. \quad (3.11)$$

Esses estados serão autoestados de M^2 . Definindo $y = \frac{2M_{hs}^2}{M_{hh}^2 - M_{ss}^2}$ e utilizando a fórmula $m_{1,2}^2 = \frac{1}{2}Tr M^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{Tr M^2 - 4Det M^2}$, obtemos as massas como

$$m_{1,2}^2 = \frac{M_{hh}^2 + M_{ss}^2}{2} + \frac{M_{hh}^2 - M_{ss}^2}{2}\sqrt{1 + y^2}.$$

Associaremos m_1^2 ao autovalor com sinal +, que será a massa ao quadrado do estado h_1 . Introduzindo essa condição na matriz de massa obtemos $\tan \theta = \frac{y}{1 + \sqrt{1 + y^2}}$, donde vemos que, se exigirmos $\theta > 0$, vale $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, donde concluimos que h_1 é sempre “tipo MP” e h_2 é sempre “tipo singlete escuro”.

3.2 O decaimento $h \rightarrow \chi\bar{\chi}$

Para ilustrar a teoria acima, calcularemos a taxa de decaimento $\Gamma(h_1 \rightarrow \chi\bar{\chi})$ em nível de árvore. Introduzimos h_1 e h_2 na densidade lagrangeana, obtendo um termo de interação entre h_1 e χ dado por $-g_\varphi \text{sen}\theta h_1 \bar{\chi}\chi$. Precisamos encontrar um termo da expansão da matriz S (1.13) que represente essa interação. O termo de primeira ordem dessa expansão contém precisamente a lagrangeana de interação (a menos de um sinal), então aproximaremos:

$$S = S_1 = -ig_\varphi \text{sen}\theta \int d^4x : h_1(x) \bar{\chi}(x) \chi(x) : \quad (3.12)$$

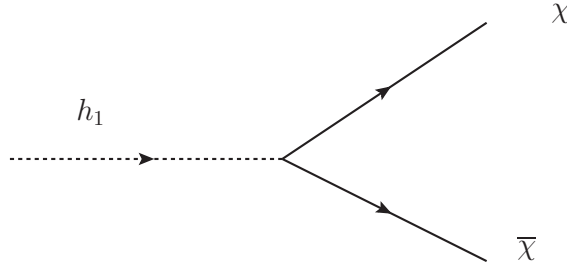


Fig. 3.1: Diagrama de Feynman correspondente ao termo de primeira ordem para $h_1 \rightarrow \chi\bar{\chi}$

Precisamos calcular o termo de matriz $\langle f|S|i\rangle$, onde $|i\rangle = a_H^\dagger(0)|0\rangle$ e $|f\rangle = c^\dagger(\mathbf{k}_1)d^\dagger(\mathbf{k}_2)|0\rangle$ representam, respectivamente, o estado inicial (uma partícula h_1 em repouso) e o estado final (um par $\chi\bar{\chi}$). A dependência de spin foi suprimida em c^\dagger (que cria χ) e d^\dagger (que cria $\bar{\chi}$). Introduzimos, agora, as decomposições em ondas planas:

$$h(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} (e^{-ikx} a_H(\mathbf{k}) + e^{ikx} a_H^\dagger(\mathbf{k})) \quad (3.13)$$

$$\chi(x) = \sum_{r,\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m_\chi}{V\omega_{\mathbf{p}}}} (c_r(\mathbf{p}) u_{(r)}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_{(r)}(\mathbf{p}) e^{ipx}). \quad (3.14)$$

Utilizando o fato que $a_H|0\rangle = 0$ e denominando $k_0 = (m_{h_1}, 0)$ o quadrimomentum do h_1 em repouso, a parte relevante de $S|i\rangle$ é

$$\begin{aligned} S|i\rangle &= -ig_\varphi \text{sen}\theta \int d^4x \bar{\chi}\chi \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} e^{-ikx} [a_H(\mathbf{k}), a_H^\dagger(0)]|0\rangle, \\ &= \frac{-ig_\varphi \text{sen}\theta}{\sqrt{2V E_H}} \int d^4x e^{-ik_0 x} \bar{\chi}\chi|0\rangle. \end{aligned}$$

Essa é a parte de $S|i\rangle$ que corresponde ao fato de termos um h_1 no estado inicial e nenhum no estado final (só recebe contribuições da parte de “frequência positiva” definida em [17]). Agora, tomamos o produto dessa expressão com o bra $\langle f|$ e, como esse bra só tem contribuição de operadores de aniquilação, mantemos em $\bar{\chi}\chi$ somente as partes com os operadores de criação c^\dagger e d^\dagger . Obtemos, então

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= \langle 0|d_{s'}(\mathbf{k}_2)c_2(\mathbf{k}_1)\frac{-ig_\varphi\text{sen}\theta}{\sqrt{2V}E_H}(\sqrt{2m_\chi})^2 \times \\ &\times \int d^4x e^{-ik_0x} \sum_{r,r',\mathbf{p},\mathbf{p}'} \frac{1}{\sqrt{2V}\omega_{\mathbf{p}}\sqrt{2V}\omega_{\mathbf{p}'}} c_r^\dagger(\mathbf{p})\bar{u}_{(r)}e^{ipx}d_{(r')}^\dagger(\mathbf{p}')e^{ip'x}|0\rangle. \end{aligned}$$

Utilizando as relações de anticomutação canônicas, podemos agrupar os operadores em termos do tipo aa^\dagger , e substituímos o produto pelo anticomutador (pois o termo $a^\dagger a$ tem valor esperado de vácuo nulo). Isso nos permite eliminar as somas, ficando com uma parte totalmente independente da posição no espaço tempo e uma integral de exponenciais que claramente dá uma delta de conservação de energia. Obtemos, então,

$$S_{fi} = \frac{(2\pi)^4\delta(k_1+k_2-k_0)}{\sqrt{2V}E_H\sqrt{2V}E_\chi\sqrt{2V}E_{\bar{\chi}}}(\sqrt{2m_\chi})^2(-ig_\varphi\text{sen}\theta\bar{u}_{(s)}v_{(s')}), \quad (3.16)$$

donde obtemos a importante expressão (cf. 1.14)

$$\mathcal{M} = -ig_\varphi\bar{u}_{(s)}v_{(s')}. \quad (3.17)$$

Somando sobre os spins segundo o método descrito em [17], com $\Gamma = Id$ e usando os teoremas de traço para matrizes de Dirac, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g_\varphi^2\text{sen}^2\theta}{4m_\chi^2} \text{Tr}[(k_2 - m_\chi)(k_1 + m_\chi)], \\ &= \frac{g_\varphi^2\text{sen}^2\theta}{m_\chi^2} (k_1 \cdot k_2 - m_\chi^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como estamos no referencial do centro de massa, vale que $k_1 \cdot k_2 = 2E_\chi^2 - m_\chi^2$ e $E_\chi = E_{\bar{\chi}} = \frac{m_{h_1}}{2}$. Utilizando $E_\chi^2 - |\mathbf{p}|^2 = m_\chi^2$, juntamente com a expressão (1.16), obtemos

$$\Gamma = \frac{g_\varphi^2\text{sen}^2\theta m_{h_1}}{8\pi} \left(1 - \frac{4m_\chi^2}{m_{h_1}^2}\right)^{3/2}. \quad (3.19)$$

Medidas diretas da taxa de decaimento do bóson de Higgs, juntamente com estimativas da massa propostas em [9] poderiam ser usadas para tentar obter limites sobre g_φ e excluir mais regiões do espaço de parâmetros do modelo aqui introduzido.

Capítulo 4

Um modelo com matéria escura vetorial

4.1 Introdução

Iremos estender o modelo apresentado na seção anterior incluindo um bóson vetorial massivo. A motivação principal para fazê-lo são os experimentos que estão sendo planejados no JLAB para a detecção desse tipo de partícula, bem como o fato de certos modelos de matéria escura vetorial permitirem que se vincule a massa do bóson Higgs a estar muito próxima do valor de 125 GeV [10]. Esse bóson irá obter sua massa a partir da quebra de simetria no setor escuro. Adicionamos à densidade lagrangeana do capítulo anterior o seguinte termo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V &= -\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + g'_V S V_\mu V^\mu - g_V \bar{\chi} \not{V} \chi, \\ V_{\mu\nu} &= \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu.\end{aligned}$$

As expressões acima mostram que V implementa uma simetria de gauge local U(1), sob a qual o férmion χ é carregado. Explicitando a quebra de simetria no setor escuro podemos ver que a massa m_V é tal que $\frac{m_V^2}{2} = g'_V x_0$. Deste ponto em diante eliminamos a constante g'_V em favor do parâmetro de quebra de simetria x_0 e exploramos alguns dos processos elementares desse modelo. Apresentamos também uma discussão da produção dos bósons vetoriais da matéria escura em uma colisão de dois fótons.

4.2 O decaimento $h_1 \rightarrow VV$

O termo que descreve a interação entre V e S é $g'_V S V_\mu V^\mu$. Utilizando o valor da massa de V obtido na seção acima, escrevemos a interação de V com φ via $\mathcal{L}_I = \frac{m_V^2}{2x_0} \varphi V_\mu V^\mu$. Para

obter a interação de V com h_1 simplesmente escrevemos φ em termos dos campos físicos, e obtemos

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{m_V^2}{2x_0} \sin \theta h_1 V_\mu V^\mu. \quad (4.1)$$

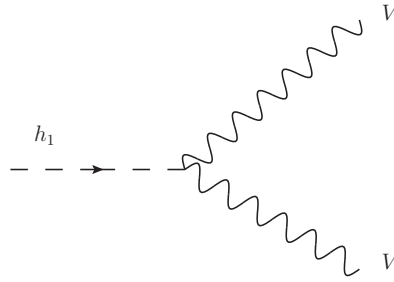


Fig. 4.1: Decaimento $h_i \rightarrow VV$ diagramaticamente.

Substituímos \mathcal{L}_{int} na expansão da matriz S (1.13), como foi feito no capítulo anterior, para obter a taxa de decaimento em primeira ordem. Sendo b^\dagger o operador que cria o bóson V , teremos um estado inicial $a_H^\dagger(0)|0\rangle$ novamente, e o estado final será $|f\rangle = b^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1)b^\dagger(\mathbf{k}_2, \lambda_2)|0\rangle$, com λ_i representando a polarização dos V . Utilizando a prescrição do ordenamento normal, só vamos precisar da parte do operador h_1 que contém operadores de aniquilação e, em V_μ , da parte que contém operadores de criação. Introduzimos a expansão em ondas planas para $V_\mu^{(-)}$ [24], que é a parte relevante ao cálculo.

$$V_\mu^{(-)} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\mathbf{k}x} b^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda). \quad (4.2)$$

Nessa expressão, ϵ é um vetor de polarização, correspondendo ao um dos três graus de polarização de V . Delinearemos, agora, algumas particularidades do cálculo, que é feito da mesma maneira que o do decaimento $h \rightarrow \bar{\chi}\chi$ do capítulo anterior: introduzimos a expansão em ondas planas para calcular o elemento de matriz $\langle f|S|i\rangle$. O cálculo da parte dependente de h_1 é exatamente igual ao feito no capítulo anterior, e simplesmente introduz um fator $\frac{e^{-ik_0x}}{\sqrt{2V E_H}}$ na integral. Como V é sua própria antipartícula, os operadores de criação que aparecem na expansão em ondas planas podem ser aniquilados por qualquer um dos dois operadores de aniquilação no bra do estado final. Isso introduz dois fatores semelhantes aos que aparecem quando inserimos o operador $\bar{\chi}\chi$ no capítulo 3. A saber, obtemos:

$$2 \times \left[\frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}_1}} \sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}_2}}} e^{i(k_1+k_2)x} \right], \quad (4.3)$$

onde ϵ_i é o vetor de polarização da partícula i . Salientamos o fator 2, o qual é devido à estatística bosônica obedecida por V . O termo que aparece acima tem duas contribuições: uma do próprio fator entre colchetes, e a outra de permutarmos as duas partículas do estado final, e ocorre que, como o termo entre colchetes é simétrico frente essa permutação, um fator 2 é obtido. Inserindo esse termo, obtemos, então

$$S_{fi} = \frac{im_V^2 \sin \theta}{2x_0} \int d^4x \frac{e^{-ik_0x}}{\sqrt{2V E_H}} \frac{2\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{\sqrt{2V \omega \mathbf{k}_1} \sqrt{2V \omega \mathbf{k}_2}} e^{i(k_1+k_2)x}. \quad (4.4)$$

Fazendo a integral e utilizando a expressão (1.14), vemos que

$$\mathcal{M} = \frac{im_V^2 \sin \theta}{x_0} g^{\alpha\beta} \epsilon_{1\alpha} \epsilon_{2\beta}. \quad (4.5)$$

Inserimos \mathcal{M} em (1.16) utilizando $A = 1/2$. Como $E_V^2 - |\mathbf{p}|^2 = m_V^2$ e o h_1 que decai está em repouso, obtemos:

$$\Gamma = \frac{m_V^4 \sin^2 \theta}{32\pi x_0^2 m_{h_1}} \sqrt{1 - \frac{4m_V^2}{m_{h_1}^2}} \epsilon_{1\mu} \epsilon_{1\sigma} \epsilon_2^\mu \epsilon_2^\sigma. \quad (4.6)$$

Para obter a taxa de decaimento total, somamos sobre todas as polarizações possíveis das partículas do estado final, o que consiste em substituir $\epsilon_\mu \epsilon_\nu \rightarrow -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_V^2}$ [24]. Utilizando o fato que $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$ e que $k_1^2 = k_2^2 = m_V^2$, obtemos que a média do quadrado do produto escalar entre os vetores de polarização é

$$\begin{aligned} \langle (\epsilon \cdot \epsilon')^2 \rangle &= 2 + \frac{(k_1 \cdot k_2)^2}{m_V^4}, \\ &= \frac{m_{h_1}^4}{4m_V^4} \left(1 - 4 \frac{m_V^2}{m_{h_1}^2} + 12 \frac{m_V^4}{m_{h_1}^4} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Obtemos, finalmente

$$\Gamma(h_1 \rightarrow VV) = \frac{m_{h_1}^3 \sin^2 \theta}{128\pi x_0^2} \left(1 - 4 \frac{m_V^2}{m_{h_1}^2} + 12 \frac{m_V^4}{m_{h_1}^4} \right) \sqrt{1 - 4 \frac{m_V^2}{m_{h_1}^2}}. \quad (4.8)$$

4.3 Produção de pares $\chi\bar{\chi}$ em colisões e^+e^-

Agora que calculamos as taxas de decaimento de h_1 em $\chi\bar{\chi}$ e VV , podemos começar a traduzir as interações entre as partículas em termos de *regras de Feynman*, introduzindo os

chamados fatores de vértice, que facilitam a construção das amplitudes invariantes [19]. Por inspeção, vemos que o fator de vértice correspondente ao termo trilinear $h_1\bar{\chi}\chi$ é $-ig_\varphi \sin\theta$. Caso trocássemos $h_1 \rightarrow h_2$ bastaria fazer $\sin\theta \rightarrow \cos\theta$. Os fatores de vértice para $h_i\bar{l}l$, com l um lépton do modelo padrão, podem ser obtidos a partir dos fatores encontrados em [17] simplesmente multiplicando-os por $\xi_1 = \cos\theta$ ou $\xi_2 = -\sin\theta$, dependendo de qual dos h_i está no vértice.

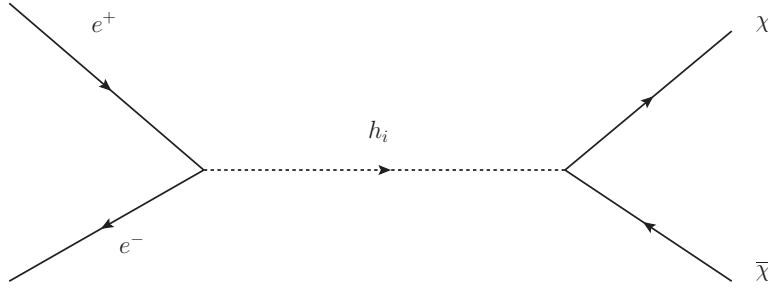


Fig. 4.2: Produção de matéria escura fermiônica em colisões e^+e^- .

Tendo em mãos os fatores de vértice, aplicamos as regras de Feynman como descritas em [17] para obter seções de choque utilizando (1.15). Faremos isso para obter a seção de choque de produção de $\chi\bar{\chi}$ em colisões e^+e^- ultrarelativísticas. Obtemos a amplitude invariante para esse processo a partir de uma soma de diagramas como o acima, envolvendo cada um dos h_i . Obtemos uma expressão simplificada:

$$\mathcal{M} = \frac{im_e g_\varphi \sin(2\theta)}{2v} \frac{\Delta m^2}{(s - m_1^2)(s - m_2^2)} [\bar{u}v]_e [\bar{v}u]_\chi, \quad (4.9)$$

onde introduzimos $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. A média do módulo quadrado dos produtos espinoriais que aparecem em \mathcal{M} já foram calculadas quando investigamos o decaimento $h_1 \rightarrow \chi\bar{\chi}$, então podemos simplesmente substituir o resultado

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{m_e^2 g_\varphi^2 \sin^2(2\theta)}{4v^2} \frac{(\Delta m^2)^2 s (s - 4m_\chi^2)}{(s - m_1^2)^2 (s - m_2^2)}, \quad (4.10)$$

onde usamos o fato que $s \gg m_e^2$. Substituindo em (1.15) e utilizando $|\mathbf{p}_e| = \frac{\sqrt{s}}{2}$, obtemos o resultado

$$\sigma = |\mathbf{p}_\chi| \frac{m_e^2 g_\varphi^2 \sin^2(2\theta)}{16\pi v^2} \frac{(\Delta m^2)^2 (s - 4m_\chi^2)}{\sqrt{s} (s - m_1^2)^2 (s - m_2^2)^2}. \quad (4.11)$$

4.4 Produção de pares de V

4.4.1 Via colisões e^+e^-

Inspecionando a expressão (4.5) e as regras de Feynman em [17], concluímos que o fator de vértice para $h_i VV$ é $\frac{im_V^2 \eta_i}{x_0} g^{\alpha\beta}$, com $\eta_1 = \sin \theta, \eta_2 = \cos \theta$. Fazendo a soma das amplitudes para esse decaimento, obtemos

$$\mathcal{M} = \frac{-im_e m_V^2 \sin(2\theta)}{2vx_0} \frac{\Delta m^2}{(s - m_1^2)(s - m_2^2)} [\bar{u}v]_e g^{\alpha\beta} \epsilon_{1\alpha} \epsilon_{2\beta}. \quad (4.12)$$

Tendo a amplitude invariante, tomamos a média de seu módulo ao quadrado. As médias dos quadrados de ambos os fatores já foram computadas anteriormente, então simplesmente deixamos aqui o resultado final para σ obtido a partir de (1.15)

$$\sigma = |\mathbf{p}_V| \frac{m_e^2 m_V^2 (\Delta m^2)^2 \sin^2(2\theta)}{64\pi v^2 x_0^2} \left(2 + \frac{(k_1 \cdot k_2)^2}{m_V^4} \right) \frac{1}{\sqrt{s}(s - m_1^2)^2 (s - m_2^2)^2}, \quad (4.13)$$

onde $k_{1,2}$ são os quadrimomenta dos V emergentes, e o produto escalar vale, no referencial do centro de massa, $\frac{s - 2m_V^2}{2}$.

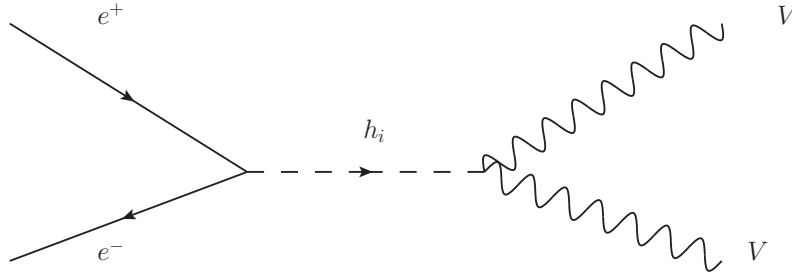


Fig. 4.3: Produção de matéria escura vetorial em colisões e^+e^- .

4.4.2 Via colisões $\gamma\gamma$

Como o bóson de Higgs não tem carga e o fóton não tem massa, não há interação direta entre essas partículas na densidade lagrangeana do MP. No entanto, podemos obter o decaimento de um bóson de Higgs em dois fótons através de correções radiativas. Esse canal de decaimento do Higgs é importante para o estudo experimental de suas propriedades.

Utilizaremos esse decaimento para modelar a produção de matéria escura em colisões fóton-fóton. Um colisor fóton-fóton poderia obter até $\sqrt{s} = 500$ GeV, mas nos concentraremos em resultados próximos ao polo de h_1 [12]. Faremos isso através da fórmula de Breit-Wigner[11]:

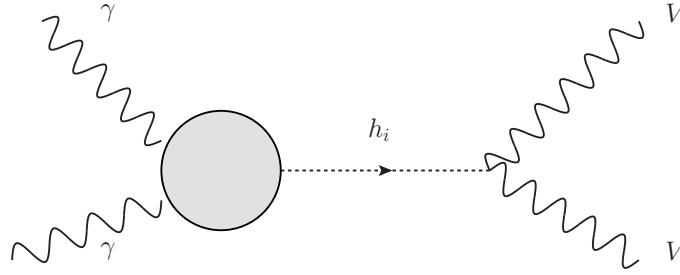


Fig. 4.4: Esquema de uma colisão fóton-fóton produzindo matéria escura vetorial.

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{8\pi\Gamma(h \rightarrow VV)\Gamma(h \rightarrow \gamma\gamma)}{(s - m_h^2)^2 + m_h^2\Gamma_h^2}, \quad (4.14)$$

onde $z = \cos\phi$, em que ϕ é o ângulo no qual um dos V emerge no referencial do centro de massa. Para utilizarmos essa fórmula, faremos as seguintes suposições: o canal com intermédio do bóson h_2 estará muito fora da camada de massa para contribuir, identificaremos h com h_1 , e suporemos que a modificação da largura de decaimento do Higgs devido ao férmion χ pode ser desprezada em primeira aproximação. Assim, podemos utilizar o programa HDECAY [13] para obter $\Gamma(h \rightarrow \gamma\gamma)$ e Γ_h , devendo somente introduzir os fatores apropriados de $\cos^2\theta$ nessas expressões.

Para diminuir o número de parâmetros em $\Gamma(h \rightarrow VV)$, assumiremos que a massa do bóson V é muito menor que a massa de h_1 , a qual fixamos em 125 GeV. Assim, ignoraremos todos os termos $\sim \frac{m_V^2}{m_{h_1}^2}$ e podemos escrever a seção de choque acima exclusivamente em termos do fator de quebra de simetria x_0 e do ângulo de mistura θ . Fundamentamos essa suposição no fato de que os experimentos no JLAB estão procurando “fótons pesados” de massa na região de MeV.

Abaixo, apresentamos gráficos da seção de choque diferencial de produção de “fótons pesados” em colisões fóton-fóton, medida em picobarn (pb). Tomamos, em todas as curvas, $m_1 = 125$ GeV. O comportamento obtido ao variarmos s levemente indica que a suposição de h_2 não contribuir é razoável se sua massa não for próxima à de h_1

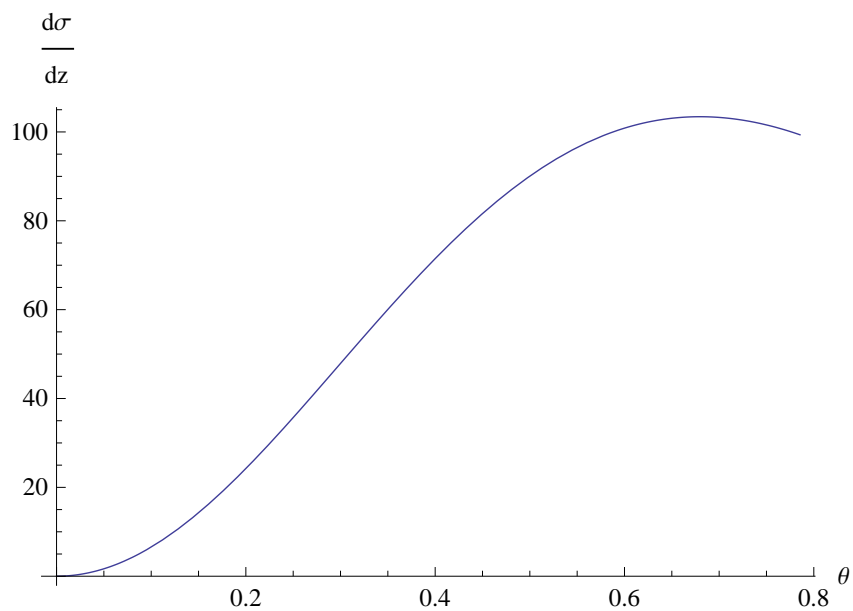


Fig. 4.5: *Seção de choque de produção de matéria escura em função do ângulo de mistura. Tomamos $\sqrt{s} = 125\text{GeV}$ e $x_0 = 1\text{TeV}$*

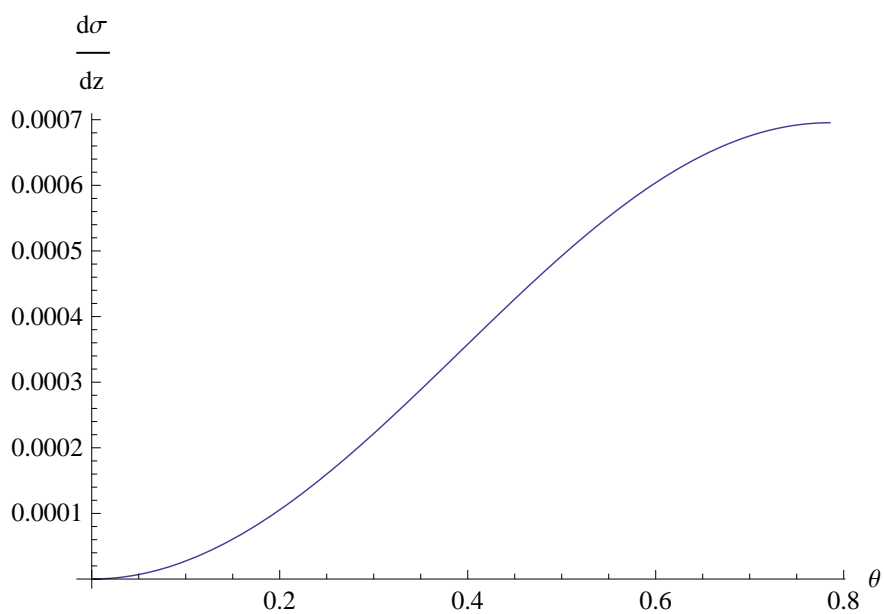


Fig. 4.6: *Seção de choque com $\sqrt{s} = 126\text{GeV}$ e $x_0 = 1\text{TeV}$*

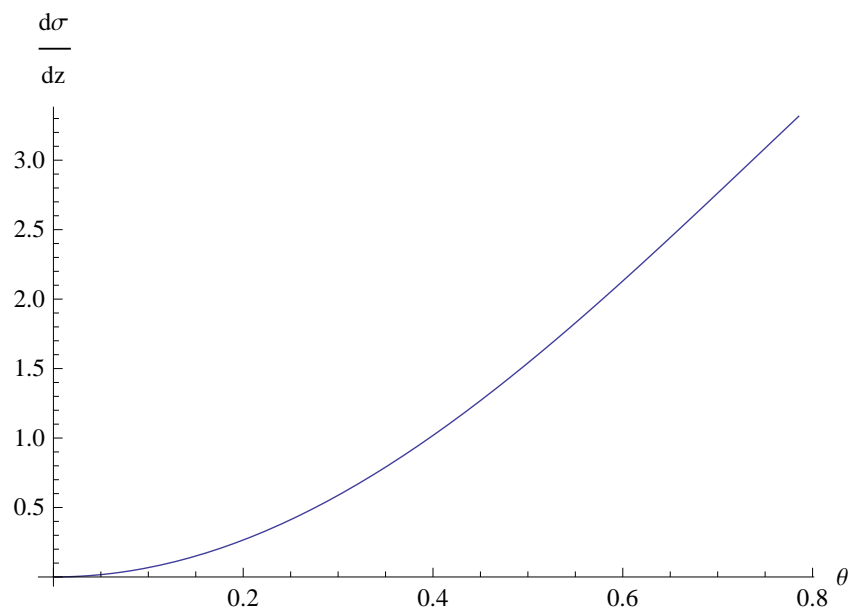


Fig. 4.7: Seção de choque com $\sqrt{s} = 125\text{GeV}$ e $x_0 = 10\text{TeV}$

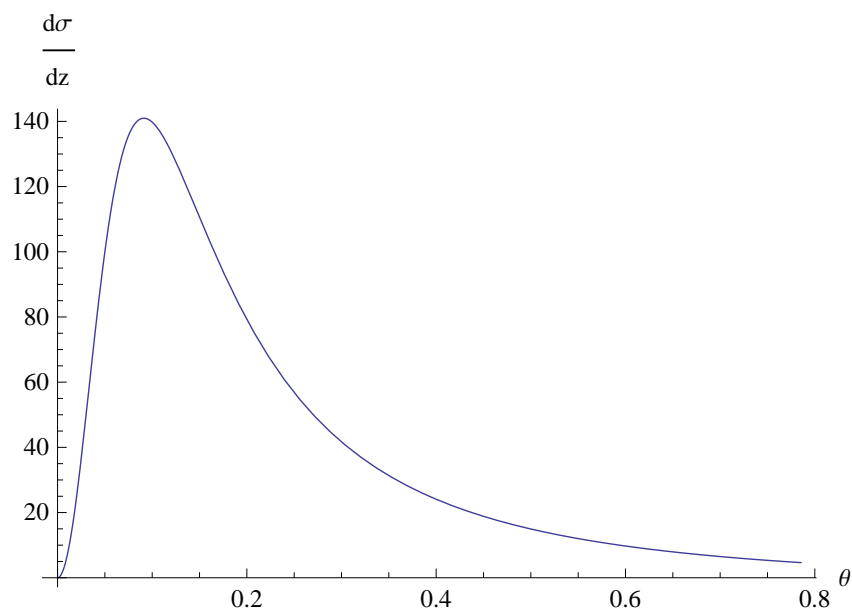


Fig. 4.8: Seção de choque com $\sqrt{s} = 125\text{GeV}$ e $x_0 = 100\text{GeV}$

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

O objetivo principal deste trabalho foi estudar o formalismo da teoria quântica de campos interagentes e aplicá-lo a um problema ainda em aberto: a descrição teórica da matéria escura. Apresentamos um modelo fenomenológico simples e uma proposta de como estendê-lo. Utilizando ferramentas computacionais conseguimos extrair informação quantitativa de um dos processos da teoria, a partir de uma estimativa de qual a escala da física nova que explica a matéria escura e da energia disponível em um futuro colisor fóton-fóton. Para os processos elementares calculados, observamos que efeitos de interferência levam a um comportamento das seções de choque que é bastante característico.

No entanto, deve-se frisar que o problema da matéria escura não é exclusivamente do domínio da física de partículas: a cosmologia tem muito a dizer sobre ele e, em particular uma das maneiras mais diretas de se vincular modelos de matéria escura é integrando uma equação de Boltzmann que permita calcular a densidade relíquia da matéria escura[9, 10, 8, 3]. Isso requer um estudo de teoria quântica de campos à temperatura finita, bem como simulações computacionais mais complexas que as desenvolvidas aqui. Por isso, esse tipo de cálculo está fora do escopo deste trabalho, mas é uma perspectiva interessante e essencial para o futuro desenvolvimento do modelo.

Além disso, o estudo do potencial que quebra a simetria da densidade lagrangeana à temperatura finita deve ser acompanhado de um estudo das equações do grupo de renormalização, para que se obtenha a evolução das constantes de acoplamento da teoria. Com isso, poderíamos estudar a estabilidade do vácuo para tentar restringir o espaço de parâmetros. Devemos notar também que este trabalho não utilizou todos os acoplamentos renormalizáveis possíveis entre S e V , de maneira que também poderíamos estudar os novos processos elementares introduzidos com a inclusão de mais termos de interação.

A última perspectiva de extensão deste trabalho de conclusão pode vir do LHC: caso seja confirmado que o bóson com massa de aproximadamente 125 GeV descoberto pelo CERN este ano de fato é o bóson de Higgs (como supomos implicitamente neste trabalho), medidas de precisão dos acoplamentos do Higgs e de sua taxa de decaimento em partículas do MP (a calculada com o programa HDECAY) permitiriam estabelecer limites aos acoplamentos

do Higgs com a matéria escura aqui propostos. Tomando uma postura otimista, a junção de todas as possibilidades mencionadas acima permitiriam que, com o modelo devidamente vinculado experimentalmente, fosse possível começar a fazer previsões mais específicas de implicações experimentais da teoria aqui proposta.

Apêndice A

O Teorema de Goldstone

Neste apêndice, apresentamos uma demonstração do Teorema de Goldstone, o qual enunciamos da seguinte maneira: “se o vácuo de uma teoria com simetria de gauge global não abeliana **não** é invariante frente transformações geradas por um subgrupo de dimensão N-M do grupo de gauge G (de dimensão N), então essa teoria apresenta N-M bósons de Goldstone”.

Para demonstrarmos o teorema, introduzamos uma teoria de gauge de um conjunto φ de campos, com densidade lagrangeana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^T\partial^\mu\varphi - V(\varphi)$, onde V é tal que a teoria possua um vácuo não trivial. Escrevamos $\varphi = \mathbf{v} + \tilde{\varphi}$. Em termos do campo deslocado, expandimos \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\tilde{\varphi})^T\partial^\mu\tilde{\varphi} - V(\mathbf{v}) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2V}{\partial\tilde{\varphi}_i\partial\tilde{\varphi}_j}\tilde{\varphi}_i\tilde{\varphi}_j - \dots \quad (\text{A.1})$$

Vemos claramente que a Hessiana da função potencial, calculada em \mathbf{v} corresponde à matriz de massa da teoria. Como \mathbf{v} é um mínimo, essa matriz deve ser não-negativa. Como M_{ij}^2 é simétrica, então é garantida a existência de N autoestados mutuamente ortogonais entre si, com massa não-negativa, que serão os estados físicos da teoria. Suponhamos agora que haja um subgrupo maximal de transformações de grupo que mantenha \mathbf{v} invariante, tendo esse subgrupo dimensão M.

Então, escolheremos um conjunto de geradores T_a tal que $a = 1, \dots, M$ corresponde a geradores do subgrupo que mantém \mathbf{v} e invariante e, por hipótese, $a = M + 1, \dots, N$ corresponde a geradores tais que suas transformações **não** mantém \mathbf{v} invariante. Tomando transformações infinitesimais tipo $\mathbf{v} \rightarrow \underbrace{e^{-i\theta T_a}}_{\theta \rightarrow 0} \mathbf{v}$, vemos que

$$T_a\mathbf{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } a = 1, \dots, M \\ \neq 0 & \text{se } a = M + 1, \dots, N \end{cases}$$

Além disso, a simetria de \mathcal{L} frente transformações de G nos permite obter N correntes

conservadas através do teorema de Noether, tomando $\delta\varphi = -i\theta T_a$. As correntes de Noether serão, portanto

$$\begin{aligned} j_a^\mu &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \right)^T \delta\varphi \\ &= (\partial_\mu \varphi)^T T_a \varphi, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde, na segunda linha, removemos o fator arbitrário $-i\theta$. Agora, as equações de movimento nos permitem concluir que

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad (\text{A.3})$$

donde a conservação da corrente nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\partial^\mu \varphi)^T T_a \varphi + \underbrace{(\partial^\mu \varphi)^T}_{\pi^\mu} T_a \partial_\mu \varphi &= 0 \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^T T_a \varphi + g^{\sigma\rho} \pi_\sigma^T T_a \pi_\rho &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Se nos especializamos a campos constantes, o segundo termo se anula. Derivando com respeito a uma das componentes φ_c e fazendo $\varphi = \mathbf{v}$, obtemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_k \partial \varphi_i} (T_a)_{ij} v_j = 0, \quad (\text{A.5})$$

ou seja, como $T_a \mathbf{v} \neq 0$ para $a = M+1, \dots, N$, a equação acima implica que a matriz de massa possui N-M autovetores não triviais com autovalor nulo, ou seja, N-M bósons de Goldstone. No caso do grupo de simetria ser complexo, generalizamos a demonstração acima escrevendo a densidade lagrangeana em termos de suas componentes reais e identificando G com um subgrupo do grupo de simetria de \mathcal{L} frente transformações de suas componentes reais (por exemplo, se $G=\text{SU}(2)$, poderíamos identificá-lo com um subgrupo de $O(4)$).

Referências

- [1] ZWICKY,F., Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln, *Helvetica Physica Acta.* v. 6, n. 100, 1933.
- [2] SHAABAN,K.; MUÑOZ,C., The Enigma of Dark Matter, *Contemp. Phys.* 432, 51-62, 2002.
- [3] WATTSON,.S; KANE,G., Dark Matter and LHC: What is the Connection? *Mod. Phys. Lett.* A23:2103-2123,2008
- [4] HADJIMICHEF,D.; KOKUBUN,F., Collective scattering of massive stars in higher order gravity *Phys.Rev. D* 55,733,1997.
- [5] CLOWE,D.; BRADAC,M; GONZALES,A.H.; MARKEVITCH,M.; RANDALL,S.W.; JONES,C; ZARITSKY,D., A direct empirical proof of the existence of dark matter, *Astrophys. J.* 648, L109, 2006
- [6] KOMATSU,E. *et al.* [WMAP Collaboration], Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations:Cosmological Interpretation ,*Astrophys.J.Suppl.* 180:330-376,2009
- [7] VIERA,A.R.; HILLER,B.; SAMPAIO,M.D.R.; NEMES,M.C., Naturalness and theoretical constraints to the Higgs boson mass, *arxiv:1207.4088v1* [hep-ph]
- [8] LEBEDEV,O., On Stability of the Electroweak Vacuum and the Higgs Portal, *Eur. Phys. J. C*,v.72,n.7,2012
- [9] KIM,Y.G.; LEE,K.Y.; SHIN,S. Singlet Fermionic Dark Matter, *JHEP0805*:100,2008.
- [10] ABE,T.; KAKIZAKI,M.; MATSUMOTO,S.; SETO,O., Vector WIMP Miracle *Phys. Lett. B*,v.713,n.7,2012
- [11] ASNER,D.M; GRONBERG,J.B; GUNION,J.F, Detecting and studying Higgs bosons at a photon-photon collider, *Phys. Rev. D*67,035009,2003.

-
- [12] TELNOV,V.I Introduction to the Photon Collider, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* 184:271-286,2008
- [13] DJOUADI,A.; KALINOWSKY,J.; SPIRA,M., HDECAY: a Program for Higgs Boson Decays in the Standard Model and its Supersymmetric Extension, *Comput.Phys.Commun.*,108:56-74,1998
- [14] ANDERSON.P.W., Plasmons, Gauge Invariance and Mass, *Phys. Rev.*,v.130, n.1,p.439-442,1962.
- [15] NAMBU,Y.; JONA-LASINIO,G., Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity, I, *Phys. Rev.* 122, 345-358 (1961)
- [16] ABERS,E.S.; LEE,B.W., The Higgs Mechanism, *Phys. Rep.*, 9C,1,1973.
- [17] MANDL,F.; SHAW,G., *Quantum Field Theory*, Second edition, Wiley,2010.
- [18] HALZEN,F.; MARTIN,A.D.; *Quarks and Leptons: an Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, 1984.
- [19] GRIFFITHS,D.J., *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons,1987.
- [20] BJORKEN,J.D; DRELL,S.D, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill,1964.
- [21] LANDAU,L.D; LIFSHITZ,E.M, *The Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann,1980.
- [22] BAILIN,D.;LOVE,A., *Introduction to Gauge Field Theory*, Revised Edition, Taylor & Francis, 1993.
- [23] GREINER,W.;MÜLLER,B., *Gauge Theory of Weak Interactions*, Springer, 2000
- [24] GREINER,W.;REINHARDT,J., *Field Quantization*, Springer,1996
- [25] CHENG,T.;LI,L., *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press,1988.