

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Um Modelo de Energia Escura na Determinação da Dinâmica do Universo

Lucas Frozza Secco

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a
orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef.

Porto Alegre
Novembro de 2012.

Agradecimentos

Esta é, sem dúvidas e sem exageros, a seção mais importante deste trabalho. Foram muitas as experiências vividas nos últimos 4 anos e faço questão de prestar um agradecimento sincero a todos aqueles que estiveram comigo neste período.

A todos os meus amigos, muito obrigado por todos os momentos bons. Obrigado pelos acampamentos, risadas, discussões, cervejas, pelas verdades jogadas na cara, partidas de futebol, churrascos, pelas dúvidas resolvidas de última hora antes de provas, pelas ajudas em listas, pelos encontros em Erechim, pelas viagens, pela hospitalidade e por terem me recebido em suas casas, por todas as vezes que precisei de ombros amigos, pelos cafés comprados, pelas músicas tocadas em grupo e por tantas outras coisas que minha memória não permite recordar agora. Obrigado aos que leram esse trabalho e fizeram as excelentes correções e, em especial e como uma forma de representar a todos os outros que não citarei por falta de espaço, não por falta de vontade, muito obrigado a Luan Fontanella, Rafael Barfknecht e Pedro Mosele pela amizade leal e sincera. Obrigado também aos mestres Dimiter Hadjimichef e Acirete Simões por todo o conhecimento e ensinamentos transmitidos nos últimos vários semestres.

Por último e com maior importância, obrigado aos meus pais, Eleanir Secco e Amauri Secco, e à minha irmã Luise Secco. Não há palavras que descrevam o quanto o apoio de vocês foi crucial nestes últimos anos. Obrigado por todos os sacrifícios em prol da minha educação e obrigado por eu ter tido o privilégio imensurável de poder me dedicar apenas ao estudo sem ter que me preocupar com qualquer problema de ordem financeira. Obrigado por terem acreditado em mim todos esses anos e por terem estado lá pra me levantar todas as inúmeras vezes em que caí.

Muito Obrigado!

“Veja, uma coisa é certa: eu posso viver com dúvida e incerteza e ficar sem saber. Eu acho que é muito mais interessante viver sem saber do que ter respostas que podem estar erradas”

Richard P. Feynman

Resumo

O estudo do universo como um todo tem rendido recentemente descobertas gradiosas. A descoberta de componentes misteriosos ainda sem explicação conhecidos como matéria e energia escura está diretamente relacionada com questões de suma importância para a Cosmologia moderna e para a física básica. A dinâmica da expansão acelerada do universo ainda é uma questão em aberto, por exemplo.

No presente trabalho, desenvolvemos as bases da teoria da Relatividade Geral, o ferramental básico para o estudo do universo em grande escala, e depois partimos para o estudo de uma possível origem microscópica para a expansão acelerada do universo.

O método utilizado é a introdução de um campo escalar relacionado com uma energia do vácuo que pode variar com o tempo nas equações de campo de Einstein.

Sumário

Introdução	5
1. Relatividade Geral	7
1.1. Relatividade Especial	7
1.2. Gravidade Como Curvatura	15
1.3. A Derivada Covariante	17
1.4. Transporte Paralelo	21
1.5. Equação Geodésica	22
1.6. Tensor de Riemann	23
1.7. Equações de Campo de Einstein	26
1.8. O Princípio Cosmológico e a Métrica FRW	28
1.9. Equações de Friedmann	29
1.10. Constante Cosmológica	34
2. Quintessência	37
2.1. Expansão Acelerada	37
2.2. Analogia Entre Λ e Campo Escalar	38
2.3. Equações de Friedmann com Campo Escalar	39
2.4. O Modelo Considerado	41
Conclusão	47
A. Transformações de coordenadas de ∇_μ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$	49
B. Descrição de um campo escalar	51
Referências Bibliográficas	53

Introdução

A adição da constante cosmológica Λ às equações de campo de Einstein já foi considerada por ele próprio como um erro. Hoje, observações que envolvem medidas da luminosidade e distância de supernovas do tipo IA revelam que o universo se expande aceleradamente e, uma reviravolta, Λ se encaixa muito bem como um parâmetro matemático que força essa aceleração.

Podemos, como um artifício físico, introduzir campos escalares (que representam bósons de spin nulo) às equações Einstein. Essa introdução é feita através do tensor energia-momentum $T^{\mu\nu}$ extraído de uma densidade lagrangiana. O campo é capaz de, em certos regimes, recuperar o comportamento de Λ nas equações de campo. Além disso, através desse procedimento vemos que Λ está em verdade associada a uma densidade de energia do próprio vácuo, e que o campo escalar se comporta como um fluido perfeito um tanto exótico, com equação de estado $\rho = -p$.

Por outro lado, o campo escalar tem a grande qualidade de adicionar dinâmica à energia do vácuo Λ que foi inicialmente considerada constante. O benefício de uma energia do vácuo variável está em contribuir com um possível solução de alguns problemas cosmológicos, como por exemplo a grande diferença entre ordens de grandeza que teorias diferentes preveem para o valor atual de Λ , que experimentalmente é muito pequeno.

Modelar a energia do vácuo e utilizá-la como explicação para a expansão do universo é justamente modelar a componente desconhecida do universo, com fração de energia $\Omega_\Lambda \approx 0,7$, nomeada “energia escura”. O trabalho é finalizado mostrando como evolui o fator de escala para um universo que inclui o campo escalar tratado. A dinâmica de $a(t)$ vem da solução das equações de Friedmann obtidas através das equações de campo de Einstein.

Ao longo de todo o trabalho, utilizaremos o sistema de unidades em que $c = \hbar = 1$ e a assinatura da métrica, como ficará claro, será $(- + + +)$.

1. Relatividade Geral

1.1. Relatividade Especial

Em meados do início do século XX, esboços de uma física relativística começavam a surgir através dos trabalhos de Poincaré e Lorentz. O nascimento da relatividade especial entretanto culminou com o trabalho de Einstein. A abordagem da relatividade especial utilizada nesta seção é inspirada em [13].

A física newtoniana que dominava na época tinha base em dimensões de espaço rígidas e imutáveis, comuns a qualquer observador, e um parâmetro de tempo que também era igualmente imutável e absoluto. Einstein quebrou esta visão por elevar o tempo a um patamar de igualdade em relação às dimensões espaciais, criando assim uma nova entidade chamada “espaço-tempo”, e também deu fim na ideia de que cada uma das dimensões desta nova entidade era individualmente absoluta e imutável.

Deveria haver então uma nova grandeza que fosse comum a qualquer observador e que relacionasse tanto espaço como tempo. Essa quantidade ficou conhecida como o “intervalo invariante”, ou “intervalo de Lorentz” (que será referida, ao longo do trabalho, apenas como “intervalo”)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2, \tag{1.1}$$

onde a grandeza infinitesimal ds^2 calculada por um observador que mede variações de tempo dt^2 e variações de distância dx^2 é a mesma encontrada por um outro observador que, por sua vez, pode vir a medir variações diferentes dt'^2 e dx'^2 . Estas variações são intervalos entre coordenadas no espaço-tempo, que chamamos de “eventos”.

A ideia de que deve haver algo em comum mesmo entre dois observadores em referenciais diferentes está contida no postulado central da relatividade, o Princípio da Relatividade:

As leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial.

Isso quer dizer que deve ser impossível para um observador determinar apenas através de experimentos locais se ele está num referencial em movimento com velocidade constante, ou em repouso, se comparado com outro referencial. Apesar da importância dos referenciais inerciais, a relatividade especial não está presa somente à descrição destes, podendo sempre ser utilizada se os efeitos gravitacionais forem localmente desprezíveis.

Uma consequência direta do postulado é que constantes da natureza (a carga elementar, por exemplo) devem permanecer as mesmas qualquer que seja o referencial. A velocidade da luz emerge do eletromagnetismo como sendo uma constante natural e dessa forma seu valor também deve ser invariante. Einstein reforça essa conclusão com o seguinte postulado:

A velocidade da luz é universal, ela tem sempre o mesmo valor quando medida por referenciais inerciais, no vácuo, independentemente do movimento da fonte de luz em relação ao observador.

Que uma velocidade seja invariante frente à troca de referencial é algo quase absurdo e a ideia levou tempo para ser assimilada pela comunidade científica.

A invariância do intervalo (1.1) leva naturalmente ao fato de que tempo e espaço individualmente não são absolutos, o que gera problemas em se tratando de medidas de comprimentos e de simultaneidade. É uma característica da natureza, portanto, que o espaço medido por um observador não seja obrigatoriamente numericamente equivalente ao medido por outro (o que é conhecido como a contração dos comprimentos), e que dois eventos simultâneos em um referencial não são necessariamente simultâneos em outro.

Como há uma grandeza invariante, pode-se escrever uma transformação que mostra como tempo e espaço mudam de um referencial para outro. Primeiro, seja v_{rel} a velocidade (apenas na direção x , por simplicidade) de um referencial (por exemplo, o “foguetão”) relativa a outro (o “laboratório”), então o deslocamento do foguetão, medido pelo laboratório, será $x = v_{rel}t$. Se quisermos saber onde um evento que se passa na origem do foguetão (por exemplo um flash disparado por ele), ou seja, em $x' = 0$ será medido pelo laboratório, a invariância do intervalo diz que:

$$-t^2 + x^2 = -t^2 + v_{rel}^2 t^2 = -t'^2 + x'^2 = -t'^2 + 0$$

e assim

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

O fator constante $\sqrt{1 - v^2}$ é conhecido como “fator de Lorentz”, e podemos usar a letra γ para representá-lo. Assim, escrevemos:

$$t = \gamma t'$$

e também

$$x = v_{rel} \gamma t'.$$

Mas imaginando um flash numa posição mais geral que $x' = 0$ e exigindo que a transformação seja linear, teremos algo do tipo

$$\begin{cases} t = Ax' + Bt' \\ x = Cx' + Dt' \end{cases}$$

mas reconhecemos que $B = \gamma$ e $D = v_{rel} \gamma$ e ficamos com

$$\begin{cases} t = Ax' + \gamma t' \\ x = Cx' + v_{rel} \gamma t' \end{cases}.$$

A invariância do intervalo novamente diz que $-t^2 + x^2 = -t'^2 + x'^2$, mas agora podemos escrever isso da forma

$$(Ax' + \gamma t')^2 - (Cx' + v_{rel} \gamma t')^2 = t'^2 - x'^2,$$

onde, abrindo os quadrados e juntando os termos, resulta em

$$\gamma^2(1 - v_{rel}^2)t'^2 + 2\gamma(A - v_{rel}C)x't' - (A^2 - C^2)x'^2 = t'^2 - x'^2,$$

de onde percebemos que

$$A - v_{rel}C = 0 \quad \text{e} \quad (A^2 - C^2) = 1.$$

A partir disso podemos encontrar facilmente A e C , de forma que as transformações de Lorentz (apenas em uma direção) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} t &= \frac{v_{rel}x' + t'}{\sqrt{1 - v_{rel}^2}} \\ x &= \frac{x' + v_{rel}t'}{\sqrt{1 - v_{rel}^2}} \\ y &= y' , z = z'. \end{aligned}$$

Como visto, linearidade da transformação e a invariância do intervalo são os únicos pré-requisitos das transformações de Lorentz.

Podemos escrever o intervalo de uma forma mais compacta fazendo uso do tensor métrico η :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

onde $x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$ e $x^3 \equiv z$, e $\eta_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor na métrica de Minkowski (que representa um espaço plano, onde a gravidade não pode ser localmente percebida):

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Podemos entender ds como um elemento de linha de uma trajetória no espaço-tempo. Tais trajetórias são chamadas de “linhas de mundo”. É possível também desenhar um diagrama do espaço-tempo, como se fosse num plano cartesiano $x(t)$, representando o movimento de partículas através dele, e para desenhar a trajetória de um fóton viajando em velocidade $c = 1$ com $x = \pm t$ teríamos retas formando um cone. As retas $x = \pm t$ formam então o conhecido “cone de luz”, que não existia antes na mecânica Newtoniana. O cone de luz divide o espaço acessível a um observador com base na relação de causalidade que pode existir entre eventos no espaço-tempo.

Trajetoórias que estão apenas dentro do cone (e que portanto pertencem a partículas massivas) representam intervalos do “tipo tempo” e possuem ligação causal com o evento do qual parte o cone. Trajetórias sobre o cone (que pertencem a partículas

de massa nula, que se movimentam com velocidade igual a c) possuem $ds = 0$ e portanto representam intervalos “nulos”. Por fim, eventos que se localizam um fora do cone de luz de outro não possuem qualquer ligação causal, e o intervalo é dito “tipo espaço”. Com base na definição do intervalo, podemos resumir estas condições como

$$\begin{cases} ds < 0 \rightarrow \text{intervalo tipo tempo} \\ ds = 0 \rightarrow \text{intervalo nulo} \\ ds > 0 \rightarrow \text{intervalo tipo espaço} \end{cases}$$

De forma semelhante, as transformações de Lorentz também podem ser escritas na forma tensorial através do tensor Λ :

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} : x^\mu = \Lambda^\mu_{\mu'} x^{\mu'}$$

onde as componentes são

$$\Lambda^\mu_{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v_{rel} & 0 & 0 \\ \gamma v_{rel} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De (1.1) podemos ver que, para um referencial onde $dx = 0$, ou seja, um referencial onde dois eventos distintos são medidos na mesma posição e o tempo é contado num relógio carregado pelo próprio referencial, temos $ds^2 = -dt^2$. Este pode ser o caso de um observador contando o tempo parado dentro do foguete em movimento, e o tempo medido é chamado de “tempo próprio”. Por ser um valor importante com o qual qualquer outro referencial irá concordar, renomeamos o tempo próprio com a letra τ :

$$d\tau^2 = -ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Podemos definir o vetor tangente a uma trajetória $x^\mu(\lambda)$ parametrizada por λ como

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

mas poderíamos também, convenientemente, parametrizar a trajetória de uma partícula pelo tempo medido pelo relógio que ela carrega, ou seja, seu tempo próprio τ . A esse vetor tangente damos o nome de “4-velocidade” (ou quadrivelocidade) com componentes

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

A 4-velocidade só é definida para partículas massivas, de forma que os intervalos infinitesimais são tipo tempo. Para intervalos nulos o tempo próprio é nulo e τ não pode ser usado como parâmetro, e para intervalos tipo espaço poderíamos definir um vetor análogo. A utilização do tempo próprio como parâmetro para trajetórias do tipo tempo automaticamente gera uma normalização:

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = -\frac{d\tau^2}{d\tau^2} = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1$$

ou seja,

$$\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1. \tag{1.4}$$

Esta normalização da 4-velocidade a identifica como não apenas uma velocidade através do espaço, que pode ter obviamente magnitudes diferentes, mas sim uma velocidade através do espaço-tempo, onde corpos sempre viajam com a mesma magnitude. No referencial em que a partícula está em repouso (que chamaremos de referencial “comóvel”), temos componentes $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Um vetor relacionado é o “4-momentum” (ou quadrimomentum)

$$p^\mu = mU^\mu$$

onde m é a massa da partícula. A massa é uma quantidade fixa independente do referencial inercial que escolhermos, portanto especificações do tipo “massa de repouso” não são necessárias. A componente temporal do 4-momentum é a energia da partícula, $E = p^0$, o que no referencial comóvel onde a partícula está em repouso fornece $E = m$, ou seja, não contém energia cinética e toda contribuição é devida à massa. Podemos recuperar o resultado célebre de Einstein retornando para o sistema

de unidades usual:

$$E = mc^2.$$

Num referencial mais geral, basta tomarmos uma transformação de Lorentz para obtermos componentes do tipo $p^\mu = (\gamma m, v\gamma m, 0, 0)$ que para $v \ll 1$ resulta $p^0 = m + \frac{1}{2}mv^2$ (energia de repouso + cinética) e $p^1 = mv$ o momentum newtoniano usual. Para v podendo ser próximo de 1, podemos escrever:

$$p_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -m^2$$

ou seja, abrindo em componentes

$$E^2 = m^2 + \vec{p}^2 \tag{1.5}$$

onde $\vec{p} \equiv \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2}$ é a parte espacial do 4-momentum.

Embora o 4-momentum descreva completamente a energia e momentum de uma partícula, ele deixa de ser tão útil se considerarmos um sistema muito grande delas, ou seja, um fluido. Neste caso mais complexo precisaremos introduzir uma nova quantidade, que chamaremos de “tensor energia-momentum” com componentes $T^{\mu\nu}$. Este tensor simétrico com 2 índices representa o “fluxo de p^μ através de uma superfície de x^ν constante”, embora possamos encontrar um significado mais exato mais adiante, quando o tensor será obtido através de uma lagrangiana.

A quantidade T^{00} será então a densidade de energia ρ e os termos T^{ii} serão a pressão p . Estamos assumindo nesse caso um fluido perfeito, que pode ser caracterizado completamente através de uma pressão p que deve ser isotrópica (e por isso o tensor deve ser diagonal com componenstes iguais nesta ao longo da diagonal) e densidade de energia ρ . O tensor de um fluido perfeito então tem a seguinte forma em seu referencial de repouso:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

e a forma geral de $T^{\mu\nu}$ que se reduz a esta expressão quando tomamos o referencial

de repouso é

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu} \quad (1.6)$$

Um exemplo da utilização do tensor energia-momentum é para um fluido perfeito simples conhecido como “poeira”, que na verdade é um bom modelo aproximado para a matéria em escalas cosmológicas. A poeira é um aglomerado de partículas em repouso entre si, e portanto sua pressão é nula, de forma que $T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$. Podemos simplificar ainda mais o tensor se utilizarmos o referencial comóvel, onde a única componente não-nula do tensor passa a ser $T^{00} = \rho$.

Além de ser simétrico, há outra condição crucial que este tensor deve cumprir, sua divergência deve ser nula, ou seja, momentum e energia devem ser conservados:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.7)$$

esta expressão representa 4 equações, onde a componente temporal $\mu = 0$ implica conservação de energia e $\mu = i$ implica conservação do momentum em cada uma das direções espaciais.

Ao longo desta seção e de todas as próximas, utilizamos uma linguagem tensorial muito conhecida, mas que pode causar estranheza num primeiro contato. Podemos dar uma interpretação geométrica para os símbolos com índices em cima (x^α , $T^{\mu\nu}$, etc) e embaixo ($\eta_{\mu\nu}$, ∂_μ , etc): os índices em cima representam vetores ou “vetores contravariantes”, e os embaixo representam um-formas ou “vetores covariantes”.

Vetores podem ser entendidos da forma convencional, como se fossem setas apontando numa direção e sentido. Um-formas, por outro lado, são elementos de outro espaço, que por sua vez é isomórfico (ou seja, existe uma transformação que torna o espaço dos vetores, chamado “espaço tangente”, muito semelhante ao espaço das um-formas, chamado “espaço cotangente”) ao espaço dos vetores. Ambos esses espaços são “espaços vetoriais”, no sentido de que é possível definir uma base linearmente independente que possa cobrir todos os pontos possíveis, e também valem associatividade, identidade, etc. É interessante notar que tanto um dado espaço tangente como um cotangente só estão definidos em um ponto sobre uma “variedade diferenciável” (que é o pano-de-fundo matemático para representar o espaço-tempo), e portanto é impossível operar com objetos em pontos diferentes, como ficará claro nas seções a seguir, que tratam do transporte paralelo e da derivada covariante.

Objetos com índices tanto em cima quanto embaixo são funções multilineares

de vetores e um-formas (ou seja, tanto vetores quanto um-formas são operadores lineares). Vetores atuam sobre um-formas gerando um escalar, e vice-versa também é verdadeiro. Em linguagem formal, diríamos que os elementos do espaço cotangente mapeiam elementos do espaço tangente em escalares. Subir e baixar índices, por sua vez, é utilidade do tensor métrico, que mapeia vetores em um-formas e vice-versa.

Um visão mais inspiradora disso encontra-se em [11]: um-formas podem ser interpretadas como superfícies de nível, de forma que, quando atuam sobre um vetor, produzem um escalar. O escalar representa quantas curvas de nível o vetor conseguiu “atravessar”. Esta referência também cita, como um exemplo, que a ideia geométrica de operar um-formas sob vetores tem aplicação inclusive na mecânica quântica, onde as um-formas “bra” $\langle \phi |$ atuam sobre os vetores “ket” $|\psi \rangle$ para gerar um escalar $\langle \phi | \psi \rangle$.

1.2. Gravidade Como Curvatura

Alguns anos após a publicação de Einstein de sua teoria da relatividade especial, ele se voltou ao problema de descrever a gravitação. As próximas seções deste capítulo são inspiradas em [11][2][14].

Desde Galileu se sabia que corpos em queda livre na superfície da Terra caem com uma aceleração que independe de suas massas, materiais constituintes, etc. Na mecânica Newtoniana, esse fato se traduz matematicamente escrevendo $m_i = m_g$, onde m_i é a massa inercial de uma partícula (a quantidade de resistência que ela oferece a uma força ao ser acelerado) e m_g é a massa gravitacional (a quantidade que determina o quão intensamente atuará a força gravitacional sobre a partícula). Podemos dizer que a afirmação da igualdade entre as duas massas de origens diferentes é o Princípio de Equivalência Fraco.

Entretanto, a gravidade é especial, ela não afeta apenas partículas e é necessário incluir outras leis físicas também. Dessa necessidade nasce o Princípio de Equivalência de Einstein (ou também Princípio de Equivalência Forte):

Em regiões pequenas no espaço-tempo, as leis físicas se reduzem às da relatividade especial; é impossível determinar a existência de um campo gravitacional com base em experimentos locais.

A necessidade de uma região pequena é para evitar que forças de maré criem efeitos que possam sim serem detetados. O significado matemático do Princípio de Equiv-

alência será explorado mais adiante. Como consequência do princípio também podemos imaginar o exemplo de um elevador com um furo na parede, por onde entra um feixe de luz. Se o elevador estiver sendo puxado para cima por cabos, então um feixe que entra pelo furo será defletido pela movimentação do elevador, atingindo a parede oposta em uma posição ligeiramente abaixo da altura do furo por onde ele entra. Porém, não deve ser possível (para um passageiro do elevador, que só tem conhecimento sobre esta pequena região) diferenciar este caso de um campo gravitacional, por exemplo o elevador parado na superfície da Terra, e portanto feixe também deverá sofrer uma deflexão mesmo com o elevador em repouso. A gravidade, assim, afeta não só a matéria como também energia.

A ideia de uma teoria que afete todas as leis físicas e que interaja da mesma forma com matéria e energia de qualquer espécie, quase como se a dinâmica dos corpos fosse uma característica do próprio espaço-tempo em si, levou Einstein a associar as leis da gravitação com uma possível geometria do espaço-tempo. O grande passo dado foi relacionar a dinâmica da matéria e energia com a curvatura do espaço.

É uma visão comum, embora polêmica, que a gravitação seja vista fundamentalmente como a curvatura do espaço-tempo. Cientificamente, o que se deve fazer é derivar as consequências desta afirmação e checá-la através de experimentos.

Uma ideia importante que segue do Princípio de Equivalência é o Princípio da Covariância Geral, que afirma que uma equação física é válida num campo gravitacional geral se cumprir as condições:

- A equação é válida na ausência de gravidade, ou seja, é válida na relatividade especial, onde não há curvatura.
- A equação é escrita em forma covariante, ou seja, preserva sua forma após uma mudança de coordenadas $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$.

O primeiro item é uma consequência direta do Princípio de Equivalência, já que ele afirma que em qualquer ponto podemos encontrar um referencial, o referencial inercial, onde as leis físicas se assemelham às leis na ausência de gravidade. O segundo item, por sua vez, afirma que qualquer lei física, se escrita em uma forma apropriada, vale da mesma forma para referenciais diferentes. Juntas, estas ideias garantem que qualquer lei física pode ser generalizada a partir das leis em um espaço-tempo plano.

O Princípio da Covariância Geral generaliza, portanto, leis que valiam antes apenas no espaço-tempo plano de Minkowski, onde o tensor métrico era $\eta_{\mu\nu}$. Uma

receita simples para generalizar leis de espaços planos é fazer as trocas

$$\begin{aligned}\partial_\mu &\rightarrow \nabla_\mu \\ \eta_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

onde os símbolos ∇_μ e $g_{\mu\nu}$ serão explicados na próxima seção deste trabalho. As equações (1.2), (1.6) e (1.7) ficarão diferentes, tendo o mesmo significado, porém em espaços mais gerais.

Como tensores possuem uma lei clara e conveniente de transformação, escrever leis em sua forma covariante nada mais é que escrevê-las utilizando linguagem tensorial, independente de coordenadas. Outra ferramenta matemática importante são as variedades diferenciáveis, que são analogias naturais de espaços curvos e reproduzem o Princípio de Equivalência no fato de que em cada ponto é possível encontrar um sistema de coordenadas semelhante ao \mathbb{R}^n , portanto um espaço plano. Não entraremos no formalismo da geometria diferencial neste trabalho, embora o formalismo tensorial vá ser largamente utilizado.

Com estas considerações feitas, algumas das próximas seções terão como objetivo introduzir os novos tensores e objetos que servirão como ferramentas no estudo da relatividade em espaços curvos.

1.3. A Derivada Covariante

Começamos generalizando o tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ do espaço de Minkowski para o tensor $g_{\mu\nu}$, que será de grande importância em muitos casos. Usamos esse novo símbolo pelo fato de que não há mais a restrição de que os elementos diagonais do tensor sejam apenas 1 ou -1 como era no caso de Minkowski. Se tomarmos outro sistema de coordenadas, vemos que $g_{\mu\nu}$ pode representar um espaço que é localmente curvo: dado que (1.2) pode ser aberto como

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2,$$

(mostrando apenas a parte espacial por conveniência neste exemplo) então uma troca de variáveis para coordenadas esféricas

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

leva diretamente a

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

e agora a parte espacial da métrica, que antes era igual a identidade, como vemos em (1.3), passa a ser

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Esta forma da métrica certamente não corresponde às características de um espaço plano e bastou uma troca de coordenadas para verificar curvatura. Esta curvatura, no entanto, é apenas local. Só teremos uma descrição global de curvatura com a introdução do tensor de Riemann, mais adiante. O que concluímos é que mudanças de coordenadas podem tornar o espaço localmente curvo ou plano, se tivéssemos feito o procedimento inverso, e isso está de acordo com o Princípio de Equivalência.

Há poucas restrições sobre as componentes de $g_{\mu\nu}$ além do fato de ele ser um tensor simétrico (0,2), ou seja, com dois índices covariantes. Ele é, em geral, também definido como sendo não-degenerado, ou seja, o determinante $|g_{\mu\nu}|$ deve ser diferente de 0, o que nos possibilita definir o tensor inverso como

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = g_{\lambda\nu} g^{\lambda\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} \tag{1.8}$$

onde δ_{ν}^{μ} é o tensor delta de Kronecker.

Agora podemos recuperar o resultado (1.2) no caso mais geral de $g_{\mu\nu}$, e o Princípio da Covariância nos garante que isso pode ser feito. Chegamos então a

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{1.9}$$

Sabe-se do cálculo tensorial que o operador derivada parcial ∂_μ não se transforma corretamente como um tensor. Queremos então um outro operador que tenha o mesmo significado físico e que possa ser utilizado propriamente como um tensor, para que façamos a generalização para o espaço curvo. Esse operador no entanto deve se reduzir à derivada parcial se o espaço for plano e deve atuar linearmente. Definimos então a “derivada covariante” ∇_μ para vetores (tensores do tipo (1,0)) e covetores, ou “um-formas” (tensores do tipo (0,1)) como

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (1.10)$$

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda \quad (1.11)$$

onde um novo objeto foi introduzido e é chamado de “conexão”, e precisamos explorar suas características. Para tensores de ordem mais alta, a derivada fica

$$\begin{aligned} \nabla_\rho K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} &= \partial_\rho K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &+ \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_1} K^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_2} K^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \dots \\ &- \Gamma_{\rho\nu_1}^\lambda K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} - \Gamma_{\rho\nu_2}^\lambda K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} - \dots \end{aligned}$$

Primeiramente, precisamos mostrar que esta forma da derivada se transforma corretamente como um tensor. Entretanto, a conexão sozinha não é um tensor pois não se transforma como tal. Esses desenvolvimentos estão feitos no Apêndice A.

Em segundo lugar, esperamos que seja possível encontrar em qualquer ponto no espaço-tempo um referencial onde esse objeto se anule para que recuperemos a derivada parcial no espaço de Minkowski.

O próximo passo é perceber que podemos formar outra conexão apenas permutando os seus índices de baixo. Existe então um tensor que chamamos de “tensor de torsão” definido como

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda,$$

mas vamos exigir que a torsão seja nula e assim temos a propriedade de simetria nos índices inferiores

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (1.12)$$

A última propriedade importante é que a derivada covariante da métrica seja nula,

ou seja, $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$. Diz-se, nesse caso, que a conexão é compatível com a métrica. A implicação disso será mostrada na seção seguinte, embora, por enquanto, possamos mostrar que se assumirmos essa condição e a condição da conexão ser livre de torção, então há uma conexão específica que podemos utilizar e esta está relacionada com o tensor métrico.

Tomando 3 permutações diferentes de índices temos

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0 \quad (1.13)$$

$$\nabla_\nu g_{\alpha\mu} = \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\alpha\lambda} = 0 \quad (1.14)$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\alpha} = \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda g_{\nu\lambda} = 0 \quad (1.15)$$

subtraindo (1.14) e (1.15) de (1.13) temos

$$(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) + \underbrace{\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\nu}}_0 + \underbrace{\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda g_{\mu\lambda}}_0 + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\alpha} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\alpha\lambda} = 0$$

onde podemos usar a torção nula e a simetria da métrica para zerar os termos destacados e somar os restantes para obtermos

$$(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\alpha} = 0$$

que pode ser resolvida para $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ multiplicando pela métrica inversa dos dois lados da equação:

$$2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \underbrace{g_{\lambda\alpha} g^{\alpha\beta}}_{\delta_\lambda^\beta} = (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) g^{\alpha\beta}$$

e daí

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (1.16)$$

Esta conexão específica é chamada de conexão de Christoffel, e seus coeficientes são conhecidos como símbolos de Christoffel.

1.4. Transporte Paralelo

Transportar paralelamente um vetor significa mantê-lo idêntico ao movimentá-lo sobre uma curva. No espaço euclidiano vetores em pontos diferentes do espaço podem ser comparados (tomando o produto escalar, por exemplo) porque podemos transportar um vetor de um ponto até outro por qualquer caminho, fazendo a origem dele coincidir com a do outro. Como mostra a figura abaixo isso em geral não é possível em um espaço curvo.

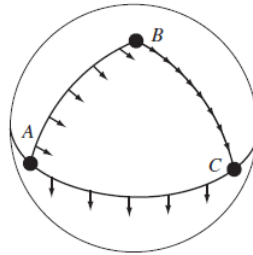


Figura 1.1.: *Transporte paralelo sobre uma esfera, extraído de [11].*

Transportando um vetor sobre uma trajetória fechada na superfície da esfera podemos facilmente fazê-lo adquirir uma orientação de 90° em relação à original. Caminhos diferentes podem resultar em orientações finais diferentes.

A derivada covariante, entretanto, é uma forma de comparar tensores em pontos ligeiramente diferentes. Isso é possível pois a conexão nos diz qual é a correção que se deve adicionar à derivada parcial para que o tensor seja paralelamente transportado. É possível definir várias conexões diferentes sobre um espaço curvo, cada uma corrigindo a derivada parcial de uma forma diferente já que podemos tomar caminhos diferentes sobre o espaço. A escolha específica de uma conexão compatível com a métrica mostrará logo sua utilidade.

Dada uma curva $x^\alpha(\lambda)$, manter um tensor constante através dela é simplesmente ter todas as suas componentes constantes ao longo do trajeto:

$$\frac{d}{d\lambda} K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \partial_\alpha K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = 0,$$

mas para a expressão ser tensorial vamos trocar a derivada parcial pela derivada covariante, e então definimos o operador

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha.$$

Dizemos então que um tensor é paralelamente transportado se

$$\frac{D}{d\lambda} K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = 0.$$

Para um vetor V^μ temos então a “equação do transporte paralelo” dada por

$$\frac{D}{d\lambda} V^\mu = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha V^\mu = \frac{d}{d\lambda} V^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} V^\beta = 0.$$

Graças à conexão de Christoffel ser compatível com a métrica, a métrica é sempre paralelamente transportada pois sua derivada covariante é sempre nula:

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} (\nabla_\alpha g_{\mu\nu}) = 0.$$

Isso implica que, se tivermos 2 vetores que também sejam paralelamente transportados por uma curva, então seu produto escalar se preserva ao longo da trajetória, e consequentemente preservamos a noção de ortogonalidade, norma, etc:

$$\frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu) = \left(\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} \right) U^\mu V^\nu + g_{\mu\nu} \left(\frac{D}{d\lambda} U^\mu \right) V^\nu + g_{\mu\nu} U^\mu \left(\frac{D}{d\lambda} V^\nu \right) = 0.$$

Na próxima seção descrevemos a curva que transporta paralelamente alguns vetores.

1.5. Equação Geodésica

Como motivação, podemos imaginar que deve haver algo de especial sobre a trajetória seguida por partículas livres no espaço-tempo. Tais partículas estariam livres de qualquer força não-gravitacional e portanto em queda livre, sofrendo apenas a influência da geometria espaço-temporal. Chama-se “geodésica” o tipo de curva seguida por essas partículas e elas são uma generalização de uma linha reta para um espaço curvo, ou seja, a trajetória mais curta entre 2 pontos (embora esta definição só seja verdadeira se a conexão for de Christoffel).

Podemos definir a geodésica como a curva que transporta paralelamente o seu

vetor tangente. O vetor tangente de uma curva $x^\alpha(\lambda)$ é $dx^\alpha/d\lambda$, e assim:

$$\begin{aligned} \frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} &= 0 \\ &= \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0 \\ &= \frac{dx^\nu}{d\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = 0 \end{aligned}$$

de onde chegamos a

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (1.17)$$

que é a conhecida equação geodésica.

Vemos que ela se reduz corretamente à equação de uma geodésica no espaço plano (uma linha reta) quando tomamos $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$.

1.6. Tensor de Riemann

Sabemos que uma descrição local de curvatura não é confiável. As escolhas de coordenadas podem tornar localmente plano um espaço-tempo que pode ser globalmente curvo. Uma forma de verificar a curvatura global é analisar como um vetor varia ao ser transportado ao longo de um caminho fechado. No caso de uma esfera, como mostrado na Seção 1.1.4, podemos ver claramente que há uma mudança no vetor. Para quantizar esta mudança e generalizar para um espaço mais geral, utilizamos o tensor de Riemann.

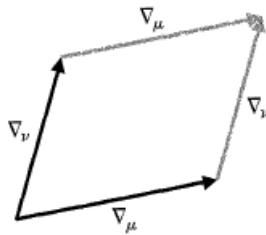


Figura 1.2.: *Comutador de derivadas parciais, extraído de [2].*

Podemos deduzir o tensor de Riemann através do comutador de duas derivadas covariantes. A Figura 1.2 dá uma ideia disso. A derivada covariante, como já explicado, diz o quanto o vetor muda em relação ao que ele seria se fosse paralelamente

transportado. O comutador, por sua vez, quantifica a diferença entre transportar o vetor numa ordem ou em outra.

Tomamos então

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\
&= \partial_\mu \nabla_\nu V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\nu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \nabla_\nu V^\lambda \\
&\quad - \partial_\nu \nabla_\mu V^\rho + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \nabla_\mu V^\lambda \\
&= \partial_\mu \left(\underbrace{\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda}_A \right) - \underbrace{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\nu V^\rho}_C + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \left(\partial_\nu V^\lambda + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda V^\sigma \right) \\
&\quad - \partial_\nu \left(\underbrace{\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda}_B \right) + \underbrace{\Gamma_{\nu\mu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho}_D - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \left(\partial_\mu V^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V^\sigma \right) \\
&= \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda + \underbrace{\left(\Gamma_{\nu\lambda}^\rho \partial_\mu V^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \partial_\mu V^\lambda \right)}_0 + \underbrace{\left(\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \partial_\nu V^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \partial_\nu V^\lambda \right)}_0 \\
&\quad - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda V^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho \\
&= \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda V^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho \\
&= \left[\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \right] V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho \quad (1.18)
\end{aligned}$$

onde na última passagem renomeamos $\lambda \rightarrow \sigma$, além disso os termos (A) e (B) se anulam pela comutatividade da derivada parcial e os termos (C) e (D) dão a torção, que é anulada se assumirmos que a conexão é de Christoffel, o que não foi feito com o intuito de mostrar a derivação mais geral do tensor. Pode ser mostrado que o termo entre colchetes se transforma como um tensor, e o definimos como o tensor de Riemann $R^\rho_{\lambda\mu\nu}$. Reescrevemos então a equação (1.18) como

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho,$$

de forma que, retirando o vetor arbitrário, ficamos com

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (1.19)$$

É importante notar que nesta derivação em nenhum momento foi utilizada a métrica, e que o tensor de Riemann depende apenas de derivadas da conexão e produtos de conexões, de forma que é impossível torná-lo identicamente zero apenas com mudanças de coordenadas. De fato, se existir um sistema de coordenadas

onde o tensor de Riemann é nulo, então ele é necessariamente nulo em toda parte. Isso não vai de encontro à definição da platitude local, em que podemos sempre tomar a métrica constante e suas derivadas primeiras nulas, enquanto o tensor de Riemann envolve derivadas segundas da métrica se considerarmos a conexão como de Christoffel.

Vamos tomar $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu}$ e identificar algumas propriedades do tensor:

- da derivação, é claro que existe antissimetria nos 2 últimos índices: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$
- também é antissimétrico nos 2 primeiros índices: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$
- é simétrico frente a troca entre os 2 pares de índices: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$
- obedece a relação $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0$
- obedece a identidade de Bianchi: $\nabla_{\lambda}R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho}R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma}R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$.

Além disso, tomando o traço do tensor de Riemann definimos o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (1.20)$$

onde, se a conexão for de Christoffel, também temos a propriedade de simetria $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

Ainda é possível tomar outra contração do tensor de Ricci e assim chegamos no escalar de Ricci, ou “escalar de curvatura”:

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (1.21)$$

O tensor de Ricci (1.20) e o escalar de Ricci (1.21) juntos formam um tensor muito importante, conhecido como tensor de Einstein. Para encontrá-lo vamos tomar 2 contrações da identidade de Biachi

$$g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}(\nabla_{\lambda}R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho}R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma}R_{\lambda\rho\mu\nu}) = \nabla^{\mu}R_{\rho\mu} - \nabla_{\rho}R + \nabla^{\nu}R_{\rho\nu} = 0$$

e daí

$$\nabla^{\mu}R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla_{\rho}R \quad (1.22)$$

onde, subindo o índice, chegamos a

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (1.23)$$

Definimos então o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (1.24)$$

e assim reescrevemos a (1.23) como

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (1.25)$$

O tensor de Einstein (1.24), que é simétrico graças à simetria do tensor de Ricci e da métrica, é de grande importância na relatividade geral.

1.7. Equações de Campo de Einstein

Em posse das principais ferramentas tensoriais, poderíamos postular as equações de Einstein sem qualquer problema. O que faremos ao invés disso é dar uma breve motivação primeiro.

Como uma teoria da gravidade, as equações de Einstein devem reproduzir uma forma generalizada da equação de Poisson para o campo gravitacional, obtida anteriormente por Newton:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1.26)$$

onde ρ é a distribuição de massa e Φ é o potencial gravitacional.

Queremos uma versão covariante dessa expressão e também precisamos substituir ρ e Φ por grandezas mais gerais. Uma boa escolha é trocar a distribuição de massa pelo tensor energia-momentum, já que ele inclui tanto matéria quanto energia e por ser tensorial pode satisfazer a covariância. Outra boa escolha é trocar as derivadas do potencial Φ , uma quantidade escalar que permeia todo o espaço, por derivadas do tensor métrico, uma característica do próprio espaço-tempo. Temos então algo do tipo

$$\nabla^2 g_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}.$$

Entretanto, o laplaciano não é bem definido como um operador tensorial em um espaço com curvatura qualquer. Conhecemos um tensor de ordem (0,2) que inclui derivadas da métrica que poderia ser um bom candidato, o tensor de Ricci (1.20):

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Mas queremos que a divergência dos dois lados da equação seja nula para recuperarmos a conservação de energia e momentum, porém sabemos de (1.22) que $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0$ não é geralmente válida. A generalização para um espaço curvo da divergência do tensor energia-momentum é

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{1.27}$$

e ela deve ser sempre válida. Graças à identidade de Bianchi construímos na seção anterior um tensor que certamente envolve derivadas da métrica e cuja divergência é nula: o tensor de Einstein. Ficamos então com

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

A constante de proporcionalidade κ que reproduz corretamente o limite newtoniano da equação de Poisson (1.26) é $\kappa = 8\pi G$ e assim escrevemos as equações de Einstein na sua forma mais convencional como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \tag{1.28}$$

O total de 16 equações diferenciais encapsuladas nesta notação se reduz para 6, pelo fato de que os tensores envolvidos são simétricos (10 equações independentes) e que as identidades de Bianchi adicionam 4 vínculos, eliminando mais 4 equações.

Uma outra forma de escrever a (1.28) é tomando o traço dos dois lados da equação:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) &= 8\pi Gg^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \\ R - \frac{1}{2}R\delta^\mu_\mu &= 8\pi GT \\ R - 2R &= -R = 8\pi GT, \end{aligned}$$

substituindo $R = -8\pi GT$ de volta em (1.28) temos

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}8\pi GT g_{\mu\nu} = 8\pi GT$$

onde, isolando as componentes de energia-momentum, chegamos finalmente a

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T g_{\mu\nu} \right). \quad (1.29)$$

As equações (1.28) e (1.29) possuem exatamente o mesmo conteúdo físico.

1.8. O Princípio Cosmológico e a Métrica FRW

Sabemos que a gravitação é um fenômeno que domina em largas escalas e assim as soluções das equações de Einstein podem ser apropriadas para descrever a dinâmica de um sistema muito grande, digamos o próprio universo. Ao resolver as equações de Einstein (1.28) ou (1.29), no entanto, precisamos assumir condições de contorno. O Princípio Cosmológico é uma condição de contorno famosa, ela impõe que o universo seja homogêneo e isotrópico.

Isotropia está relacionada com o fato de um observador descrever um universo equivalente qualquer que seja a direção em que ele estiver olhando. Temos boa verificação experimental da isotropia da radiação através das medidas do CMB (radiação de fundo cósmico), que mostra flutuações de cerca de apenas $10^{-5}K$ num fundo praticamente constante de $2.7K$ [3]. A isotropia da matéria é também uma boa aproximação em grande escala.

Como assumimos que nosso ponto de observação no universo não é privilegiado de qualquer forma, supomos que observadores em qualquer ponto também verificarão isotropia. É intuitivo, embora possa ser demonstrado, que isotropia em todos os pontos de um espaço significam que o espaço é homogêneo.

Matematicamente, homogeneidade significa que o tensor métrico é invariante frente a translações e que portanto a mesma métrica vale para qualquer ponto no espaço-tempo. Graças a isso podemos relacionar uma métrica como uma característica do universo como um todo.

A aproximação do Princípio Cosmológico significa formalmente que o espaço-tempo é maximamente simétrico, ou seja, possui todas as simetrias possíveis. Vivemos, entretanto, em um universo que expande aceleradamente e assim não podemos utilizar a sua simetria na coordenada temporal. Translações temporais não deixam

a métrica invariante e o que podemos fazer a respeito disso é tomar uma versão mais fraca do Princípio e afirmar que apenas a seção espacial da métrica é maximamente simétrica e evolui no tempo.

Há 3 possibilidades para uma métrica com seção espacial isotrópica e homogênea evoluindo no tempo, e as 3 estão encapsuladas na métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.30)$$

onde $a(t)$ é um fator que expande a seção espacial conhecido como “fator de escala”, r, θ e ϕ são as coordenadas espaciais e k é um parâmetro que pode assumir os valores $k = -1, 0, +1$ de forma que temos

$$\begin{cases} k = -1 & \rightarrow \text{universo "aberto" (curvatura negativa, hiperbólico)} \\ k = 0 & \rightarrow \text{universo "plano" (curvatura nula, plano)} \\ k = +1 & \rightarrow \text{universo "fechado" (curvatura positiva, esférico)}. \end{cases}$$

Resolver as equações de Einstein para esta métrica significa determinar a função $a(t)$, que por sua vez caracteriza completamente a evolução do elemento de linha.

1.9. Equações de Friedmann

Com a métrica definida, podemos resolver a (1.29). Vamos novamente utilizar o observador comóvel por simplicidade. No referencial comóvel, definimos as coordenadas das geodésicas como sendo constantes e os observadores estão sobre elas.

Sabendo que a versão em um espaço geral da equação (1.6) é dada por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (1.31)$$

podemos escrever a matriz inversa no referencial comóvel onde $U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ como

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

e o traço $T = T^\mu{}_\mu$ como

$$T^\mu{}_\mu = (\rho + p) \underbrace{g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu}_{-1} + p \underbrace{g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}_4$$

$$T = -\rho + 3p. \quad (1.33)$$

Calculando também o escalar e o tensor de Ricci para esta métrica levando em consideração que apenas os termos diagonais são não-nulos, obtemos

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (1.34)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad (1.35)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)$$

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (1.36)$$

Basta resolvermos agora as equações de Einstein (1.29). Primeiro, notamos que das 4 equações que resultam da diagonalidade dos tensores envolvidos só existem 2 independentes. As 3 equações com componentes espaciais da forma $\mu\nu \equiv ii$ são idênticas pois refletem a homogeneidade da métrica. O termo temporal $\mu\nu \equiv 00$, substituindo (1.32), (1.33), (1.34) e (1.36) em (1.29), fica:

$$R_{00} = 8\pi G \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right)$$

$$-3 \frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \left(\rho - \frac{\rho}{2} + \frac{3p}{2} \right)$$

e daí

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p). \quad (1.37)$$

O termo espacial é obtido substituindo (1.32), (1.33), (1.35) e (1.36) em (1.29):

$$R_{11} = 8\pi G \left(T_{11} - \frac{1}{2} T g_{11} \right)$$

$$\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} = 8\pi G \left(p \frac{a^2}{1 - kr^2} - \frac{1}{2} (-\rho + 3p) \frac{a^2}{1 - kr^2} \right)$$

e multiplicando os dois lado da equação acima por $\frac{1-kr^2}{a^2}$ chegamos a

$$\frac{\ddot{a}}{a^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho + p) \quad (1.38)$$

onde podemos eliminar o termo em \ddot{a} utilizando a equação (1.37), para finalmente obtermos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (1.39)$$

Além disso, definimos uma quantidade importante que representa a taxa de expansão do fator de escala como o “parâmetro de Hubble”:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.40)$$

As equações (1.37) e (1.39) são as famosas equações de Friedmann, e a partir delas podemos determinar a evolução do fator de escala e conseqüentemente a dinâmica da expansão do universo.

Para resolver as equações de Friedmann precisamos ainda de um vínculo para ρ e p . A conservação de energia e momentum (1.27) pode ser calculada usando os símbolos de Christoffel para a métrica FRW como:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\mu} T^{\mu}_{\ 0} \\ &= \partial_{\mu} T^{\mu}_{\ 0} + \Gamma^{\mu}_{\ \mu\lambda} T^{\lambda}_{\ 0} - \Gamma^{\lambda}_{\ \mu 0} T^{\mu}_{\ \lambda} \\ &= -\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho). \end{aligned} \quad (1.41)$$

O vínculo entre a densidade de energia ρ e a pressão p é incluído como uma “equação de estado” do tipo

$$p = \omega\rho \quad (1.42)$$

onde ω é uma constante. Com a (1.42) a (1.41) se torna

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.43)$$

É interessante analisar algumas soluções e algumas equações de estado possíveis

para a equação (1.43). Com ω constante, soluções de ρ são do tipo

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}, \quad (1.44)$$

e assim podemos ver que em geral a densidade de energia para um certo fluido decai exponencialmente com o fator de escala, o que parece intuitivo. A poeira citada na seção 1.1 certamente tem $\omega = 0$ já que sua pressão é nula, e usando esta condição em (1.44) temos

$$\rho_{mat} \propto a^{-3}, \quad (1.45)$$

ou seja, a densidade de energia da matéria (já que em largas escalas a poeira é uma boa aproximação para a matéria) decai com o cubo do fator de escala. Isto também é intuitivo se pensarmos que como a quantidade de matéria num dado volume espacial é constante, a expansão deste volume fará a densidade de matéria cair com o cubo (portanto em 3 dimensões) do quanto o espaço se expandiu.

Para radiação temos ao invés disso $\omega = 1/3$, e (1.44) dá então

$$\rho_{rad} \propto a^{-4}, \quad (1.46)$$

o que também é intuitivo pois um fluido de fótons irá diminuir de densidade espacial com a^{-3} da mesma forma que a matéria, mas fótons individualmente ainda sofrem redshift proporcional a a^{-1} , fazendo com que a densidade de energia de radiação caia mais rápido que a de matéria.

Uma quantidade de interesse que podemos definir é o parâmetro de densidade Ω , dado por

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}} \quad (1.47)$$

onde definimos também a “densidade crítica” como

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.48)$$

Para ter uma ideia do sentido desta densidade crítica, podemos reescrever a equação (1.39) usando o parâmetro de densidade para obtermos

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}$$

e a partir daí fica claro que a razão entre a densidade de energia ρ e a densidade crítica ρ_{crit} é suficiente para determinar qual é o sinal de k na métrica de FRW e consequentemente qual é a geometria do universo. Juntamente as possibilidades, temos:

$$\begin{aligned} \rho < \rho_{crit} &\rightarrow \Omega < 1 \rightarrow k < 0 \rightarrow \text{aberto} \\ \rho = \rho_{crit} &\rightarrow \Omega = 1 \rightarrow k = 0 \rightarrow \text{plano} \\ \rho > \rho_{crit} &\rightarrow \Omega > 1 \rightarrow k > 0 \rightarrow \text{fechado.} \end{aligned}$$

Podemos ainda definir uma densidade de energia fictícia para a curvatura como

$$\rho_c = -\frac{3k}{8\pi G a^2}$$

com um parâmetro de densidade correspondente dado por

$$\Omega_c = -\frac{k}{H^2 a^2}. \tag{1.49}$$

Esse parâmetro de densidade não representa uma forma verdadeira de energia, pois a curvatura espacial não contribui diretamente com a energia do universo. A densidade de energia total é apenas aquela que soma contribuições de reais de energia.

Na equação (1.39) não especificamos exatamente o que está contido no valor de ρ . Esta densidade naturalmente deve conter radiação, matéria e o que mais contribuir energeticamente com o universo. Levando isso em consideração podemos reescrever a equação (1.39) como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i(c)} \rho_i \tag{1.50}$$

e, dividindo ambos os lados desta equação por H^2 podemos nos aproveitar das definições (1.47) e (1.49) para escrever

$$\sum_{i(c)} \Omega_i = 1. \tag{1.51}$$

Utilizamos a notação de índices i para somar sobre componentes de energia e o índice c entre parênteses para adicionar a “contribuição” da curvatura, lembrando que o lado esquerdo da equação (1.51) não representa o parâmetro total de energia

do universo, dado apenas por

$$\Omega = \sum_i \Omega_i = 1 - \Omega_c. \quad (1.52)$$

1.10. Constante Cosmológica

As equações de Friedmann (1.37) e (1.39) possuem um problema que foi considerado muito grave nos primórdios da relatividade geral: é difícil encontrar soluções estáticas. Uma “solução estática” é aquela que possui as características $\dot{a}(t) = \ddot{a}(t) = 0$ e nesse cenário o universo possui sempre o mesmo tamanho.

Através de (1.37) vemos que as derivadas nulas do fator de escala exigem que ρ e p tenham valores tais que um seja o negativo do outro. Como esse resultado parece não ter um significado físico, Einstein adicionou às suas equações de campo uma constante Λ para enfim obter um universo estático. As equações de campo modificadas são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.53)$$

Como visto anteriormente, a adição de uma constante multiplicada pela métrica mantém a divergência nula no lado esquerdo da equação, pois fizemos explicitamente a escolha de uma conexão compatível com a métrica de forma que a derivada covariante da métrica seja nula. Dessa forma, a adição da “constante cosmológica” Λ não impede a conservação de energia e é matematicamente correta, generalizando as equações de Einstein (1.28).

A partir da equação (1.53), seguindo o mesmo procedimento da seção anterior, chegamos a equações de Friedmann com constante cosmológica dadas por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.54)$$

e

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.55)$$

Agora é possível encontrar soluções estáticas para o universo com p , ρ e Λ todos não-negativos. Embora não seja mostrado nesse trabalho, soluções estáticas exigem que o valor de Λ seja muito finamente calibrado. Com a descoberta de Hubble da ex-

expansão do universo essas soluções passaram a figurar apenas como uma possibilidade teórica interessante. A origem física de Λ será explorada nas próximas seções.

2. Quintessência

2.1. Expansão Acelerada

Vimos que a inserção de uma constante cosmológica é capaz de afetar as soluções das equações de campo de Einstein de modo a gerar um universo estático. Como foi descoberto mais tarde que o universo se expandia, Einstein considerou que Λ era um erro vergonhoso.

Sabemos hoje que esta expansão não só existe como é acelerada. Entretanto, como o valor Λ deve ser finamente calibrado para que a solução estática exista e caso contrário podemos obter através da constante um universo acelerado, Λ não necessariamente precisa ser descartada.

De (1.52) temos, especificando cada componente do universo [5][8],

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_c,$$

onde M refere-se à matéria total, R à radiação e Λ (por questões de costume essa virou a notação usual) a um novo componente introduzido após a descoberta da expansão acelerada. Através de estudos de nucleossíntese cosmológica e de curvas de rotação de galáxias [15], sabemos que $\Omega_M = \Omega_B + \Omega_{DM} \approx 0,3$, onde B e DM indicam respectivamente a matéria bariônica (em torno de 0,05) e um componente conhecido como “matéria escura” (em torno de 0,25) sobre o qual atualmente sabe-se muito pouco.

O valor de Ω_R é praticamente constituído pela radiação cósmica de fundo, e é praticamente desprezível por ela ser muito fria. O valor de Ω_c , dado por (1.49), é tomado como praticamente nulo também pois medidas das anisotropias na radiação cósmica de fundo revelam que nosso universo é aproximadamente plano, ou seja $k \approx 0$. Desta análise e de medidas de supernovas do tipo IA, o valor do componente restante é tal que $\Omega \approx 0,7$.

Por outro lado, para obtermos expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$), a equação de Fried-

mann (1.37) exige que a equação de estado (1.42) tenha $\omega < -1/3$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) > 0 \quad \text{somente se} \quad \omega < -\frac{1}{3}. \quad (2.1)$$

Como sabemos que Λ pode provocar a expansão acelerada e, como veremos na próxima seção, a introdução de um campo escalar pode ter um efeito semelhante a ela e que respeite a condição (2.1), vamos ver que Λ é um candidato natural a componente da energia escura .

2.2. Analogia Entre Λ e Campo Escalar

Através do Apêndice B, vemos que é possível relacionar a um campo escalar um tensor momentum-energia. Tomando então uma lagrangiana como a do apêndice,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi), \quad (2.2)$$

vamos mostrar que no regime de menor energia deste campo é possível associar o tensor energia-momentum a uma constante cosmológica [1].

Tomando(B.3), a configuração de menor energia (o vácuo do campo escalar) que pode ser alcançada é aquela onde as derivadas parciais são todas nulas, ou seja, não há qualquer energia cinética e gradiente. Ficamos assim com

$$T^{\mu\nu} = -V(\phi_0)g^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde ϕ_0 é o valor de ϕ que minimiza o potencial $V(\phi)$. Podemos associar o mínimo de potencial $V(\phi_0)$ com uma densidade de energia que chamaremos de “energia do vácuo” $\rho_{vac} = V(\phi_0)$. Ficamos com

$$T^{\mu\nu} = -\rho_{vac}g^{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Um outro caminho mais formal para a expressão (2.3) seria exigir explicitamente que o vácuo seja invariante quando medido em qualquer direção, e assim o único tensor possível para descrevê-lo seria um proporcional à métrica.

A analogia com Λ vem de exigirmos que (2.4) seja equivalente a um fluido perfeito

com tensor dado por (1.6). Vemos imediatamente que deve valer então

$$p = -\rho_{vac}. \quad (2.5)$$

Se passarmos a constante cosmológica para o lado direito da equação em (1.53) temos então

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \right) \\ &= 8\pi G (T_{\mu\nu} - \rho_{vac}g_{\mu\nu}) \\ &= 8\pi GS_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

onde utilizamos tensores com índices inferiores e o tensor $S_{\mu\nu}$ seria o tensor energia-momentum usual adicionado da densidade de energia do vácuo. O mais importante a ser notado é que acima definimos

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.6)$$

e através disso conseguimos recuperar as equações de Einstein em uma forma que inclua a energia do vácuo. Explicando de outra forma, a consequência de introduzirmos um “fluido perfeito de vácuo” com equação de estado (2.5) com $\omega = -1$ é exatamente a mesma de utilizarmos a constante cosmológica nas equações de campo de Einstein. Este resultado inclusive é compatível com a condição (2.1) para a expansão acelerada.

É graças a (2.6) que caracterizamos a constante cosmológica Λ como uma densidade de energia do vácuo que pode ser relacionada com um campo escalar no regime de mínima energia. De fato, em geral os termos “constante cosmológica” e “energia do vácuo” são utilizados como sinônimos na literatura, apesar de o segundo eliminar o equívoco de achar que a energia do vácuo deve ser sempre uma constante.

2.3. Equações de Friedmann com Campo Escalar

Apesar do resultado interessante da seção anterior, a grande utilidade da introdução de campos escalares é fazer com que a energia do vácuo possa variar em épocas diferentes da história do universo. Com isso, podemos adequar o decaimento das diversas parcelas diferentes de energia do universo com os dados experimentais atuais. Essa

é a grande vantagem da “quintessência” [9][7].

Tomando novamente a lagrangiana para um campo escalar geral (2.2), podemos fazer restrições mais fracas que as que levam a (2.3) e assim é possível chegar a um campo escalar que tenha uma dinâmica. O que foi feito antes consistia em tomar o limite em que o campo escalar se assemelha a uma constante sem dinâmica apreciável.

Exigimos agora apenas uma distribuição espacial homogênea para o campo escalar, ou seja, $\partial_i\phi = \partial_i\dot{\phi} = 0$. A lagrangiana fica

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$$

e se compararmos novamente o tensor de energia-momentum (B.3) com um fluido perfeito

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\mathcal{L} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu},$$

vemos que

$$T^{00} = -g^{00}\left(\frac{1}{2}g^{00}\dot{\phi}\dot{\phi} + V(\phi)\right) + (-1)\dot{\phi}(-1)\dot{\phi} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \dot{\phi}^2 + V(\phi) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$$

e do fluido perfeito temos

$$T^{00} = \rho.$$

Fazendo o análogo para $T^{ii} = p$ concluímos que a densidade de energia e a pressão desse fluido devem ser

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \tag{2.7}$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8), utilizando (1.42), segue que

$$p_\phi + \rho_\phi = \frac{p_\phi + \rho_\phi}{\rho_\phi}\rho_\phi = (1 + \omega)\rho_\phi \geq 0$$

e assim, contanto que $\rho_\phi \geq 0$, temos $\omega \geq -1$. Isso concorda com a condição para expansão acelerada (2.1).

A conservação de energia (1.43) leva a

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 + \frac{dV(\phi)}{dt} = 0$$

que, após uma regra da cadeia, escreve-se

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (2.9)$$

Podemos também reescrever a equação (1.50) levando em conta matéria, radiação e o campo de quintessência na soma das densidades de energia, já tomando a curvatura como plana, e escrever cada densidade de energia usando a definição do parâmetro de densidade (1.47) incluindo as soluções (1.44). Fazendo essas várias mudanças em (1.50) chegamos a

$$H^2(t) = H_0^2 \left[\Omega_{M0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_{R0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] \quad (2.10)$$

onde os sub-índices 0 significam o tempo presente e surgem das (1.44).

As duas equações encontradas, (2.9) e (2.10) são as equações de Friedmann na presença de um campo escalar. Como podemos ver, a dinâmica do campo escalar está acoplada em ambas e está relacionada com a dinâmica do fator de Hubble.

A escolha de um potencial específico nas equações acima leva a muitas análises e a uma ampla gama de comportamentos diferentes para a dinâmica do universo. De fato, são muitos os potenciais estudados na literatura [12][10], cada um com suas qualidades e defeitos.

2.4. O Modelo Considerado

A equação (2.9) reproduz uma partícula de massa unitária com uma coordenada unidimensional ϕ movendo-se sobre um potencial $V(\phi)$ com um termo de atrito com força $-3H\dot{\phi}$. A dinâmica do campo é então mover-se até um mínimo local de $V(\phi)$ até chegar ao repouso. Vamos estudar o comportamento do campo no potencial simples [4]

$$V(\phi) = M^{4+\alpha}\phi^{-\alpha}, \quad (2.11)$$

onde α é uma constante positiva arbitrária e M é uma constante com unidades de massa.

Para qualquer potencial que possa ser escolhido, é necessário que a densidade de energia do campo ρ_ϕ seja muito menor que a da radiação ρ_R pois num universo muito menor e mais denso a densidade de fótons contribui mais significativamente com a energia. Nessa época inicial, a energia da radiação também era muito maior que a de matéria não-relativística.

Nesse regime, como se fosse um universo dominado por radiação, temos a densidade de energia caindo com a quarta potência do fator de escala (1.46) o que, através da equação de Friedmann com $k = 0$ (1.39) fornece

$$a(t) \propto t^{1/2}, \quad (2.12)$$

e assim temos $\rho_R \propto t^{-2}$. Através da definição (1.40) temos também

$$H = \frac{1}{2t}$$

e a equação (2.9) fica

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2t}\dot{\phi} - \alpha M^{4+\alpha} \phi^{-\alpha-1} = 0.$$

A solução para esta equação diferencial pode ser obtida computacionalmente e é dada por

$$\phi = \left(\frac{\alpha(2+\alpha)^2 M^{4+\alpha} t^2}{6+\alpha} \right)^{\frac{1}{2+\alpha}}.$$

O que nos interessa nessa solução é a dependência temporal. Já que as dependências de $\dot{\phi}^2$ e $V(\phi)$ com t neste caso são ambas proporcionais a $t^{-2\alpha/(2+\alpha)}$, então através de (2.7) essa também deve ser a dependência temporal de ρ_ϕ e portanto percebemos que a tempos muito pequenos a densidade de energia do campo de quintessência realmente era menor que a densidade da radiação ρ_R , proporcional a t^{-2} graças a (2.12).

Conforme o tempo passa, já vimos através dos valores possíveis de ω na equação (1.44) que a energia da radiação irá decair mais rápido que a da matéria. Esperamos então que em algum momento na história do universo a expansão tenha sido dominada pela matéria, ou seja, a densidade de energia mais significativa deveria

ser ρ_M .

Entretanto, como vivemos em uma era onde a influência da energia do vácuo é muito mais significativa que a atração gravitacional da matéria já que temos expansão acelerada, então certamente ρ_ϕ é que deve dominar para instantes de tempo longínquos.

Novamente de (1.39) com $k = 0$, temos que o parâmetro de Hubble nessa era onde a energia do campo de quintessência domina é dado por

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_\phi}{3}}$$

e nesse caso a equação de movimento (2.9) é dada por

$$\ddot{\phi} + \sqrt{24\pi G\rho_\phi}\dot{\phi} - \alpha M^{4+\alpha}\phi^{-\alpha-1} = 0 \quad (2.13)$$

com ρ_ϕ dado por (2.7).

A solução dessa equação tem uma dependência temporal complicada mas que se torna mais simples tomando um tempo longo, que pode ser além da época presente, e fazendo algumas aproximações.

Primeiro, como o campo está sofrendo um atrito proporcional a $\dot{\phi}$ e está diminuindo a amplitude de ϕ , podemos esperar que a partir de algum momento o termo cinético em $\dot{\phi}^2$ seja insignificante com relação a $V(\phi)$, de forma que aproximamos a densidade de energia ρ_ϕ como

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \approx V(\phi) = M^{4+\alpha}\phi^{-\alpha}.$$

Em segundo lugar, podemos esperar que o termo inercial proporcional a $\ddot{\phi}$ torne-se insignificante perto do atrito e do potencial. A equação (2.13) pode ser então escrita como

$$\sqrt{24\pi GM^{4+\alpha}\phi^{-\alpha}}\dot{\phi} = \alpha M^{4+\alpha}\phi^{-\alpha-1}$$

e assim

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha M^{2+\alpha/2}\phi^{-\alpha/2-1}}{\sqrt{24\pi G}}. \quad (2.14)$$

A solução para a equação diferencial (2.14) acima em geral depende de uma re-

definição do zero do tempo para evitar uma constante de integração que possa ser adicionada a t . A (2.14) pode ser integrada para encontrarmos então a solução

$$\phi = M \left(\frac{\alpha(2 + \alpha/2)t}{\sqrt{24\pi G}} \right)^{1/(2+\alpha/2)} \quad (2.15)$$

Podemos agora checar que as aproximações feitas para encontrar a solução (2.15) são sensatas. Derivando uma vez e elevando ao quadrado a (2.15) podemos ver que $\dot{\phi}^2 \propto t^{-(2+\alpha)/(2+\alpha/2)}$ enquanto $V(\phi) \propto t^{-\alpha/(2+\alpha/2)}$, de forma que o termo cinético realmente decai mais depressa que o potencial em (2.7). Derivando novamente, vemos que $\ddot{\phi} \propto t^{-(3+\alpha)/(2+\alpha/2)}$, enquanto $dV(\phi)/d\phi \propto t^{-(1+\alpha)/(2+\alpha/2)}$, o que também justifica a eliminação do termo $\ddot{\phi}$ em (2.13).

Enfim, através da solução(2.15) temos que

$$\rho_\phi \propto t^{-\alpha/(2+\alpha/2)}$$

irá dominar a expansão para tempos muito longos, e da equação de Friedmann (1.39) temos

$$\frac{\dot{a}}{a} \propto t^{-\alpha/2(2+\alpha/2)},$$

que leva finalmente a

$$\ln a \propto t^{2/(2+\alpha/2)}. \quad (2.16)$$

Podemos comparar esse resultado ao de um universo no qual a energia do vácuo é constante, na forma de uma constante cosmológica. Para este último caso, teríamos através da eq. de Friedmann (1.39) com $k = 0$ e ρ constante o resultado

$$a(t) \propto e^{Ht}$$

com $H = 8\pi G\rho/3$, de forma que

$$\ln a \propto t. \quad (2.17)$$

O fator de escala no modelo com energia do vácuo variável dado pelo potencial (2.11) também cresce e o modelo recupera a evolução da história térmica. A questão de a energia do vácuo ser constante, como uma constante cosmológica Λ , ou var-

íável ainda está em aberto atualmente. As pesquisas cosmológicas atuais dependem bastante de novos dados observacionais e grandes surveys e novos instrumentos estão sendo produzidos para este fim. Nos próximos anos, é possível que o cenário cosmológico sofra mudanças interessantes.

Conclusão

A equação de Friedmann com campo escalar (2.9) foi realmente capaz de recuperar a evolução temporal das várias densidades de energias do universo, cada uma para sua respectiva componente (radiação, matéria, etc.).

Além disso, a introdução do campo escalar no tensor $T^{\mu\nu}$ recuperou a sucessão entre as fases de dominância das densidades de energia, preservando a história térmica do universo compatível com os dados experimentais atuais. Relacionar a energia do vácuo com a energia escura através de um campo escalar mostrou ser eficiente.

Sobre a relação entre a evolução do fator de escala com campo escalar (2.16) e o fator considerando Λ constante (2.17), é fácil ver que com o campo o crescimento de $a(t)$ é mais lento. Como uma forma de decidir entre qual deles é mais adequado à realidade experimental, poderíamos, por exemplo, calcular a idade do universo nos dois casos e verificar qual possui concordância mais próxima com os dados observacionais.

Segundo a literatura, no entanto, mesmo campos escalares podem não dar conta de resolver os maiores problemas da cosmologia atual. Mais dados serão gerados no futuro próximo através de grandes novos projetos experimentais e surveys como o DES (Dark Energy Survey), o JPAS (Javalambre Physics of the Accelerating Universe) e grandes e modernos interferômetros de ondas gravitacionais, apenas para citar alguns exemplos. A cosmologia futura será muito beneficiada com essa grande quantidade de novos dados.

A. Transformações de coordenadas de ∇_μ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

A regra de transformação tensorial exige que um tensor geral $T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$ transforme-se como

$$T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_k}_{\beta'_1 \dots \beta'_l} = \frac{\partial x^{\alpha'_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha'_k}}{\partial x^{\alpha_k}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\beta'_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_l}}{\partial x^{\beta'_l}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}.$$

Queremos então que a derivada covariante siga a mesma lei de transformação. A adição da conexão nesta derivada ficará clara ao longo do procedimento.

Vamos tomar o caso $\nabla_\mu V^\nu$ e os casos mais gerais serão análogos. Seja então

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu'} V^{\nu'} &= \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma_{\lambda' \mu'}^{\nu'} V^{\lambda'} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} V^\nu \right) + \Gamma_{\lambda' \mu'}^{\nu'} \left(\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} V^\nu}_B + \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu}_A + \Gamma_{\lambda' \mu'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde o termo (A) é a transformação correta da derivada parcial porém adicionada do termo (B), e mostramos então que a derivada parcial não é um bom operador tensorial. O termo com o Γ ainda não foi transformado na expressão acima. Como dissemos que a transformação deve estar correta, então o lado esquerdo da equação acima deve ser escrito como

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu = \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu}_C + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda \mu}^\nu V^\lambda$$

onde o termo (C) é igual ao termo (A), e podemos cortá-los de cada lado da equação.

Reescrevendo os dois lados, o que temos é

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu V^\lambda = \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}}_{\nu \rightarrow \lambda} V^\lambda + \Gamma_{\lambda'\mu'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda$$

onde renomeamos o índice mudo ν como λ no termo indicado. Esta expressão deve ser válida para qualquer vetor V^λ , então vamos eliminá-lo nos dois lados

$$\Gamma_{\lambda'\mu'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}.$$

Multiplicando pela transformação inversa $\partial x^\lambda / \partial x^{\lambda'}$ dos dois lados chegamos a

$$\Gamma_{\lambda'\mu'}^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \quad (\text{A.2})$$

que é claramente a transformação tensorial de $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ mais um termo espúrio que torna a conexão um objeto não-tensorial.

A conexão foi construída justamente para ser não-tensorial, portanto não iremos dar muita preocupação com o lugar onde escrevemos seus índices. É fácil ver que inserindo (A.2) em (A.1) os termos que não são tensoriais se anulam, e portanto nossa derivada covariante é sim um operador propriamente tensorial.

B. Descrição de um campo escalar

Num sistema com um número finito de graus de liberdade, podemos escrever uma função lagrangiana L com coordenadas generalizadas chamadas $q_k(t)$, onde k é um índice discreto [6].

Por outro lado, num sistema com infinitos graus de liberdade precisamos de coordenadas generalizadas que sejam variáveis contínuas. Escrevemos essas coordenadas como $\phi(x, t)$, onde x é, por exemplo, a posição. Já que a lagrangiana L é uma soma sobre todos os graus de liberdade de um sistema, precisamos definir a lagrangiana de um sistema contínuo como a integral espacial de uma função \mathcal{L} chamada “densidade lagrangiana”. Cada uma das r variáveis ϕ_r é chamada de “campo”.

Tomando uma densidade lagrangiana simples dependente apenas de ϕ_r e de suas derivadas parciais $\partial_\alpha \phi_r \equiv \partial \phi_r / \partial x^\alpha$, podemos escrever

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\alpha \phi_r).$$

Seja a ação $S(\Omega)$ em uma região Ω 4-dimensional dada por

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\alpha \phi_r),$$

vamos exigir que a ação seja estacionária, ou seja $\delta S(\Omega) = 0$ com $\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta \phi_r(x)$, com $\delta \phi_r(x) = 0$ na hipersuperfície $\Gamma(\Omega)$ que delimita a região Ω .

Temos então, usando a regra da cadeia,

$$\delta S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_r)} \delta (\partial_\alpha \phi_r) \right).$$

Usando $\delta (\partial_\alpha \phi_r) = \partial_\alpha (\delta \phi_r)$ e integrando o segundo termo por partes temos

$$\delta S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_r)} \right) \delta \phi_r + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_r)} \delta \phi_r}_{0} \Big|_{\Gamma(\Omega)}, \quad (\text{B.1})$$

onde o termo assinalado é nulo porque a variação de ϕ_r é nula na superfície $\Gamma(\Omega)$.

A ação é estacionária apenas se a expressão (B.1) for nula, o que implica diretamente nas equações de movimento dos campos, dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_r)} = 0, \quad (\text{B.2})$$

também conhecidas como equações de Euler-Lagrange.

Tendo uma densidade lagrangiana para um campo podemos então determinar as suas equações de movimento. Na teoria quântica de campos, o campo mais simples que podemos descrever é um campo escalar real. Excitações desses campos após a quantização são interpretadas com partículas de spin nulo, e cada partícula é sua própria antipartícula. Tomando no lugar disso um campo complexo, podemos obter partículas e antipartículas de cargas opostas. Campos escalares são úteis para representar, por exemplo o méson π .

Um exemplo clássico é o campo (real) de Klein-Gordon:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2,$$

que representa bósons de spin 0 e massa m .

Podemos tomar a lagrangiana de um campo escalar geral como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi)$$

onde o potencial $V(\phi)$ pode ser especificado para obter comportamentos diferentes do campo. Para esta lagrangiana geral, o tensor energia-momentum é dado por

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi. \quad (\text{B.3})$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. Carroll. The cosmological constant. *LivingRev.Rel.*, 4:1, 2001.
- [2] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [3] N. Jarosik et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Sky maps, systematic errors, and basic results. *arXiv:1001.4744 [astro-ph.CO]*, 2010.
- [4] L. Wang I. Zlatev and P.J. Steinhardt. The cosmological constant and dark energy. *Phys.Rev.Lett.*, 85:896–899, 1999.
- [5] S. Khalil and C. Munoz. The enigma of dark matter. *Contemp.Phys.*, 43:51–62, 2002.
- [6] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. John Wiley and Sons, 2nd edition, 2010.
- [7] B. Ratra and P.J.E. Peebles. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *PhysRevD*, 37:3406, 1988.
- [8] B. Ratra and P.J.E. Peebles. The cosmological constant and dark energy. *Rev.Mod.Phys.*, 75:559–599, 2003.
- [9] V. Sahni. Dark matter and dark energy. *Lect.NotesPhys.*, 653:141–180, arXiv:astro-ph/0403324, 2004.
- [10] V. Sahni and L. Wang. New cosmological model of quintessence and dark matter. *PhysRevD*, 62:103517, 2000.
- [11] Bernard F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2009.

- [12] E.J. Copeland T. Barreiro and N.J. Nunes. Quintessence arising from exponential potentials. *PhysRevD*, 61:127301, 2000.
- [13] Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler. *Spacetime Physics*. W. H. Freeman and Company, 2nd edition, 1992.
- [14] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, 1972.
- [15] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.