UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Termodinâmica Relativística aplicada a Modelos Cosmológicos

Arthur Eduardo da Mota Loureiro

Porto Alegre
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Termodinâmica Relativística aplicada a Modelos Cosmológicos

Arthur Eduardo da Mota Loureiro

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, realizado sob orientação do Prof. Dr. Sílvio Renato Dahmen, em preenchimento do requisito final para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Porto Alegre
2013

Amy, time and space is never, ever, going to make any kind of sense.

The Doctor

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais, familiares e professores, que me auxiliaram nesta formação, seja através de inspiração, seja através de compreensão e em especial ao meu orientador, amigo e professor, Dr. Sílvio Renato Dahmen, pelo apoio, paciência e conselhos, tanto profissionais quanto pessoais. Também gostaria de agradecer aos meus amigos, que sempre me apoiaram, aguentaram e ajudaram durante períodos complicados, em especial a Larissa Kafruni, Vivian Pizzato, Sophie Collignon e Nicole De March pela paciência e por serem excelentes amigas e irmãs. Agradeço aos meus colegas Augusto Medeiros, Ingrid Pelisoli, Luiz Aguinsky, Natália Calleya, Guilherme Kolinger e Débora Peretti pelas noites de estudo mal dormidas, pela ajuda nas horas de desespero e pelos ótimos debates que sempre tivemos. Finalmente, agradeço a Karina Pacheco, pelas incessantes traduções dos artigos em alemão e pela ajuda na revisão deste trabalho.

Muito Obrigado.

Resumo

Algum tempo após o surgimento da teoria da Relatividade Especial de Einstein, F. Jüttner[1] estudou as modificações que esta teoria traria no tratamento estatístico de um gás de partículas relativísticas não interagentes. Neste tratamento, aparecem algumas dificuldades quando considera-se a impossibilidade de definir-se um referencial temporal comum a todas as partículas de forma que um tratamento macroscópico se torna mais plausível inicialmente.

Inspirado por um artigo publicado por W. Lenz [2] e pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein, R. C. Tolman pesquisou qual seria a modificação que a Termodinâmica sofreria ao ser formulada em espaços curvos, assim como as consequências que esta nova Termodinâmica teria para estudos cosmológicos. Em uma série de artigos seminais publicados em 1928 [?], ele fundamentou as bases da aplicação de conceitos termodinâmicos à Cosmologia, que viriam a dar origem ao primeiro livro-texto de termodinâmica relativística aplicada à Relatividade Geral de Einsten [3].

Neste trabalho de conclusão, estudaremos o desenvolvimento histórico da introdução de conceitos relativísticos em Termodinâmica e sua consequente generalização para a Teoria da Gravitação de Einstein buscando aplicações cosmológicas de forma a definirmos um critério de seleção para modelos cosmológicos.

Abstract

Some time after the appearance of Einstein's Special Theory of Relativity, F. Jüttner [1] studied the modifications this theory would bring to the statistical treatment of a non-interacting relativistic gas. In this treatment, some difficulties appear when one consideres the impossibility of setting up a temporal frame common to all particles in a way that a macroscopic treatment becomes initially more adequate.

Inspired by an article published by W. Lenz [2] and Einstein's General Theory of Relativity, R. C. Tolman studied what modifications Thermodynamics would suffer after being formulated in curved spacetimes as well as the consequences this new Thermodynamics would bring to cosmological studies. In a series of articles published in 1928 [4, 5, 6, 7], he laid the foundations of thermodynamical concepts in Cosmology, which would give rise to the first textbook of relativistic Thermodynamics applied to Einstein's General Theory of Relativity[3].

In this report, we will study the historical development of the introduction of relativistic concepts in Thermodynamics and its subsequent generalization to Einstein's Theory of Gravitation looking for cosmological applications as a way of defining a selection criterion for cosmological models.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Com a introdução da Teoria da Relatividade, em 1905, Einstein deu início a uma nova era da ciência moderna. Em 1915, na Teoria da Relatividade Geral, Einstein generaliza os princípios debatidos em 1905 ao unificar a geometria espaçotemporal e a distribuição de matéria e energia de um sistema, de forma a criar uma nova teoria da gravitação universal, em contraponto à teoria newtoniana.

A aplicação da teoria de Einstein ao cosmos torna-se óbvia com o surgimento de modelos de universos: o modelo fechado e estático de Einstein, o modelo de de Sitter, Lemaître, Friedmann, entre outros. Estes modelos se classificavam em abertos e fechados, estáticos e não-estáticos, com e sem constante cosmológica, eternos e não eternos [8]. Importante ressaltar que neste trabalho faremos uma distinção entre universo e Universo, sendo o primeiro relacionado à modelos cosmológicos e especulações humanas; enquanto o segundo refere-se ao Universo como ele é, independente de interpretações e especulações.

Em 1926, W. Lenz [2] publica um dos primeiros artigos relacionando Termodinâmica a modelos cosmológicos. Em seu artigo, Lenz faz uma análise do equilíbrio entre radiação e matéria no modelo de universo fechado de Einstein utilizando-se da Termodinâmica clássica e poucos conceitos da Relatividade. Após calcular o volume próprio, v_0, e a energia de repouso, mc^2, do sistema, Lenz aplica as equações de Termodinâmica clássica e analisa os resultados, mostrando uma relação entre o quadrado da temperatura e o raio do universo.

Dois anos após a publicação de Lenz, R. C. Tolman publica uma série de artigos na revista *Proceedings of the National Academy of Sciences* (PNAS) [**?**]. Tolman abre um dos artigo com a seguinte frase [4]:

> O recente e interessante artigo de Lenz sobre o equilíbrio entre radiação e matéria no universo fechado de Einstein enseja a investigação de um método apropriado para estender os princípios ordinários da termodinâmica à espaçotempos curvos, onde os métodos da relatividade geral devem ser aplicados.

Neste artigo e no que segue [7], Tolman desenvolve uma extensão da Termodinâmica para espaçotempos curvos de forma a ser aplicada à Relatividade Geral ressaltando que "(...) é evidente que o tratamento de Lenz não gera um método geral, nem necessário, para resolver problemas termodinâmicos em espaçotempos curvos." [4] Nos dois artigos que seguem neste mesmo volume da PNAS [5, 6], Tolman aplica a nova teoria da Termodinâmica Relativística ao universo fechado de Einstein, ressaltando as diferenças entre seus resultados e aqueles encontrados por Lenz.

Em 1934, Tolman publica o primeiro livro que relaciona Termodinâmica à Relatividade Geral e Cosmologia [3], ressaltando a importância de estender-se a Termodinâmica a espaçotempos curvos e de aplicar estes conceitos novos a modelos cosmológicos. Usando a Termodinâmica Relativística como critério, ele a aplica a modelos cosmológicos estáticos e não-estáticos verificando se estes recaem na Termodinâmica clássica para observadores locais. Neste livro, de 1934, Tolman deixa muito claro seus argumentos a favor de uma abordagem não-estática para modelos cosmológicos. Sua análise termodinâmica detalhada desses modelos excluí algumas possibilidades até então vigentes e, diferentemente da abordagem atual do *Big Bang*, não recai em uma singularidade inicial, de forma que uma Termodinâmica Relativística para singularidades não é abordada. Nas páginas a seguir, apresentaremos o trabalho de Tolman.

Capítulo 2

Relatividade Restrita e Termodinâmica

Neste capítulo, iremos realizar uma extensão da Termodinâmica clássica para sistemas com velocidades relativísticas e a espaços curvos, como desenvolvido por Tolman e Plank [3]. Tal extensão é fundamental para que se compreenda a posterior generalização para sistemas termodinâmicos envolvendo campos gravitacionais.

Na Termodinâmica clássica, desenvolvida nos primórdios do século XIX e abordada em diversos livros textos de cursos de graduação, consideramos apenas sistemas que se encontram em repouso em relação ao observador. Partimos, assim, da lei que relaciona a variação de energia interna, trabalho e calor, conhecida como a Primeira Lei da Termodinâmica:

$$\Delta E = Q - W \quad , \tag{2.1}$$

onde ΔE é o aumento da energia interna causada devido ao fluxo de calor Q e o trabalho W realizado pelo sistema. É fácil ver que tal relação nada mais é do que uma expressão para a conservação de energia, por incluir calor como uma forma de energia. Sabemos, da teoria da Relatividade Restrita, de uma outra expressão para a conservação da energia:

$$\Delta E = \Delta mc^2. \tag{2.2}$$

Nesta equação, temos que a diferença de energia está relacionada diretamente com a diferença de massa de um corpo ou de um sistema termodinâmico. Tal equação será fundamental para a aplicação da Primeira Lei em sistemas que envolvem mudanças na massa de repouso.

Seguindo, temos a Segunda Lei da Termodinâmica que nos permite extrair informação sobre a reversibilidade de um processo ao qual o sistema está submetido, relacionando-a ao aumento ou não da entropia do mesmo:

$$\Delta S \geqslant \int \frac{dQ}{T}, \tag{2.3}$$

a igualdade valendo para processos reversíveis. Finalmente, pela Terceira Lei da Termodinâmica - o postulado de Nernst e Planck - devemos ter:

$$\Delta S_{T=0} = 0 \tag{2.4}$$

ou, simplesmente, $S_{limT\to 0} = 0$ para qualquer sistema.

Estas equações devem servir de critério para uma extensão relativística da Termodinâmica, e devem ser recuperadas no limite de baixas velocidades ou espaços euclidianos.

2.1 Transformações de Lorentz para grandezas termodinâmicas

Para as discussões desta seção, consideraremos sistemas termodinâmicos que podem ser descritos como um fluído isotrópico cujo estado pode ser facilmente descrito por duas variáveis, tais como energia interna e volume. Primeiramente, iremos considerar quantidades que possuem natureza mecânica, estendendo posteriormente para quantidades cujo conceito é puramente termodinâmico. As transformações realizadas devem ser compatíveis com as Leis da Termodinâmica clássica, como demonstradas anteriormente.

Da Relatividade Restrita, temos que as Transformações de Lorentz entre dois sistemas de coordenadas O e O' para um *boost* com velocidade V na direção x são dadas por:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{xV}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ é denominado "fator de Lorentz"[8] que é sempre maior que a unidade para valores de $V \neq 0$.

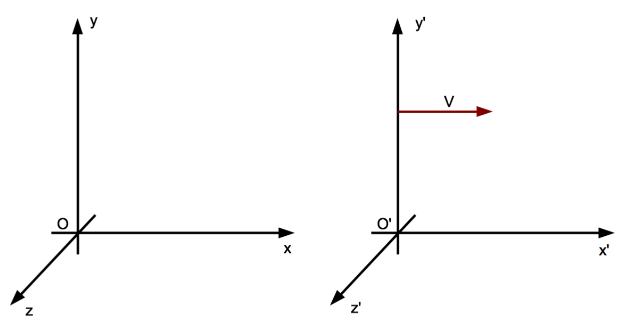

Fig. 2.1: *Sistemas de coordenadas O e O'.*

2.1.1 Volume e Pressão

Considerando a contração de Lorentz para comprimentos, é fácil verificar que o volume se modifica de forma que:

$$v = \frac{v_0}{\gamma}, \tag{2.6}$$

onde v_0 é o volume próprio do sistema, ou seja, como medido por um observador em repouso em relação ao sistema.

Para a pressão, consideraremos a definição como força sobre área, de forma que, novamente para um *boost* na direção do eixo-x, teremos as forças como:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x^0, \\ F_y &= \frac{F_y^0}{\gamma}, \\ F_z &= \frac{F_z^0}{\gamma}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sendo F_x^0, F_y^0 e F_z^0 as forças medidas por um observador em repouso em relação ao sistema. Cada componente da força irá agir em uma área cuja normal seja paralela a mesma, ou seja F_x irá agir numa área A_{yz}, que, diferente das outras, não sofrerá contração de Lorentz. Já F_y e F_z irão agir em áreas que sofrem contrações de forma que $A = A^0/\gamma$, ou seja:

$$p_{y,z} = \frac{F_{y,z}}{A_{xz,yx}} = \frac{F_{y,z}^0}{\gamma}\frac{\gamma}{A_{xz,yx}^0} = \frac{F_{y,z}^0}{A_{xz,yz}^0} = p_{y,z}^0. \tag{2.8}$$

Sendo assim, $p = p^0$.

2.1.2 Energia

Para obtermos uma expressão para a energia devemos, inicialmente, considerar o trabalho necessário para acelerar o sistema de um estado inicial em repouso até a velocidade desejada $\vec{u}$, de forma a utilizar uma aceleração quasi-estática e adiabática, não perturbando o que é observado pelo observador em repouso em relação ao sistema.

Primeiramente, partindo de (2.2), podemos extrair uma relação para a densidade de momentum que é transferido nesta conversão de massa em energia (ou vice-versa). Se tivermos uma quantidade de energia E sendo transferida com velocidade $\vec{u}$, o momentum associado a tal transferência é:

$$\vec{G} = m\vec{v} = \frac{E}{c^2}\vec{u}, \tag{2.9}$$

ou, de forma mais geral, teremos:

$$\vec{g} = \frac{\vec{s}}{c^2}, \tag{2.10}$$

onde $\vec{g}$ é a densidade volumétrica de momentum associada a uma densidade de fluxo de energia $\vec{s}$. Assim, para um fluido isotrópico, temos:

$$\vec{g} = \rho\vec{u} + \frac{p\vec{u}}{c^2}. \tag{2.11}$$

Aqui, o termo $\rho\vec{u}$ está associado a densidade de momentum da massa do fluido, enquanto o segundo termo da expressão é relacionado ao momentum adicional devido ao fluxo de energia resultante do trabalho feito no fluído pela pressão que age neste. Desta forma temos:

$$\vec{G} = \frac{E + pv}{c^2}\vec{u}. \tag{2.12}$$

Usando a definição de força, $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, temos:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{E + pv}{c^2}\vec{u}\right). \tag{2.13}$$

O trabalho total será a soma do trabalho realizado pela força externa $\vec{F}$ e a ação da pressão p na mudança de volume v do sistema, de tal forma:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{u} - p\frac{dv}{dt}. \tag{2.14}$$

Como $p = p_0$ e $v = v_0/\gamma$, teremos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt}\frac{u^2}{c^2} + p\frac{u^2}{c^2}\frac{dv}{dt} + \frac{E + pv}{c^2}u\frac{du}{dt} - p\frac{dv}{dt}, \tag{2.15}$$

ou:

$$(1 - u^2/c^2)\frac{d}{dt}(E + pv) = \frac{(E + pv)}{c^2}u\frac{du}{dt}. \tag{2.16}$$

Integrando a equação acima, temos:

$$E + pv = \frac{const}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{2.17}$$

A constante de integração pode ser facilmente encontrada se considerarmos que para um observador em repouso em relação ao sistema ($\vec{u} = 0$) teremos $E + pv = E_0 + p_0 v_0$:

$$E + pv = \frac{E_0 + p_0 v_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{2.18}$$

E, finalmente:

$$E = \frac{E_0 + p_0 v_0 \frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{2.19}$$

2.1.3 Trabalho

Para obtermos uma expressão para o trabalho, devemos manter a velocidade $\vec{u}$ constante. Sabemos, da Relatividade Restrita, que manter a velocidade constante não implica que estaremos mantendo o momentum de um sistema constante. Desta forma, temos que o trabalho será dado por:

$$dW = pdv - \vec{u} \cdot d\vec{G}, \tag{2.20}$$

sendo $\vec{u} \cdot d\vec{G}$ a força externa, que, para o caso em que $\vec{u}$ é constante, resulta em:

$$dW = pdv - \frac{u^2}{c^2}d(E + pv) = \frac{p_0 dv_0}{\gamma} - \gamma\frac{u^2}{c^2}d(E_0 + p_0 v_0). \tag{2.21}$$

Mas, em repouso, $dW_0 = p_0 dv_0$. Então:

$$dW = \frac{dW_0}{\gamma} - \gamma\frac{u^2}{c^2}d(E_0 + p_0 v_0). \tag{2.22}$$

Ressaltamos que o sub-escrito *0* refere-se à quantidades medidas em relação ao referencial em repouso.

2.1.4 Calor

Calor será a primeira das grandezas termodinâmicas que iremos calcular cuja natureza não é mecânica. Partiremos da formulação da Primeira Lei da Termodinâmica, como demonstrada anteriormente:

$$\Delta E = Q - W \quad \therefore \quad dQ = dE + dW \tag{2.23}$$

Substituímos na equação acima as expressões encontradas anteriormente para energia e trabalho (2.19) e (2.22) respectivamente, obtendo:

$$dQ = \gamma[dE_0 + d(p_0 v_0)u^2/c^2] + \frac{dW_0}{\gamma} - \gamma[dE_0 + d(p_0 v_0)]\frac{u^2}{c^2}, \tag{2.24}$$

ou seja, $dQ = (dE_0 + dW_0)/\gamma$, mas, também, $dQ_0 = dE_0 + dW_0$. Assim, a transformação de Lorentz para o calor se dá por:

$$dQ = \frac{dQ_0}{\gamma}. \tag{2.25}$$

2.1.5 Entropia

Consideramos, agora, um sistema termodinâmico em algum estado interno de interesse, porém, em repouso e com entropia definida S_0. Vamos, então, acelerá-lo à velocidade $\vec{u}$ de forma reversível e adiabática sem alterar o estado interno do sistema. Desta forma, como realizamos tal procedimento de forma adiabática, teremos que:

$$\Delta S = S - S_0 = 0 \quad \therefore \quad S = S_0. \tag{2.26}$$

Ou seja, entropia é um invariante de Lorentz.

2.1.6 Temperatura

Para obtermos uma expressão para a temperatura, partiremos diretamente da Segunda Lei da Termodinâmica (2.3), mas como $\Delta S = \Delta S_0$ e $dQ = dQ_0/\gamma$, teremos:

$$\Delta S_0 \geqslant \int \frac{dQ_0}{\gamma}\frac{1}{T}. \tag{2.27}$$

De forma que um observador em repouso em relação ao sistema irá medir:

$$\Delta S_0 \geqslant \int \frac{dQ_0}{T_0}. \tag{2.28}$$

Assim, juntando as equações (2.27) e (2.28), teremos a expressão para a contração na temperatura como medida por um observador com velocidade $\vec{u}$ em relação ao sistema:

$$T = \frac{T_0}{\gamma}. \tag{2.29}$$

Embora Planck tenha chegado a esta expressão utilizando conceitos comuns à Relatividade Especial[3] , a contração ou dilatação da temperatura ainda é um assunto em aberto tanto na física teórica quanto na experimental. Em um artigo publicado em 1963, Ott [11], utilizando-se de diferentes definições para força, chegou a uma expressão inversa a de Tolman, onde a temperatura iria se dilatar ao invés de contrair:

$$T = \gamma T_0. \tag{2.30}$$

Já, em 2003, Avramov [12] demonstra fortes evidências fenomenológicas para que a temperatura seja um invariante de Lorentz como a temperatura e o brilho de galáxias distantes. Segundo a relação (2.29), as galáxias distantes deveriam ser frias e invisíveis, já de acordo com (2.30), elas deveriam ser quentes e infinitamente brilhantes. Como nenhum dos casos realmente acontece, Avramov argumenta que a temperatura deve ser invariante.

2.2 Aplicação: Dinâmica da Radiação Térmica

Como aplicação, partiremos da Radiação de Corpo Negro, cujas equações de estado já são conhecidas da Termodinâmica clássica como:

$$\begin{aligned} E_0 &= e_0 v = \sigma v_0 T_0^4, \\ p_0 &= \frac{1}{3}\sigma T_0^4, \end{aligned} \tag{2.31}$$

sendo σ a constante de Stefan-Bolzmann.

Agora, para um observador movendo-se com uma velocidade u em relação ao corpo negro, teremos:

$$E = \sigma v T^4 = \frac{\sigma v_0 T_0^4 + \frac{\sigma}{3} v_0 T_0^4 u^2/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma E_0 \left(1 + \frac{1}{3}\frac{u^2}{c^2}\right). \tag{2.32}$$

Assim, usando a equação (2.9) podemos escrever o momentum do sistema como:

$$\vec{G} = \gamma\sigma\left(v_0 T_0^4 + \frac{v_0 T_0^4}{3}\right)\frac{\vec{u}}{c^2} = \frac{3}{4}\gamma E_0 \frac{\vec{u}}{c^2}. \tag{2.33}$$

Segundo Tolman [3], tais equações concordam com os resultados encontrados por Mosengeil [10] em sua dedução envolvendo diretamente o Eletromagnetismo e Teoria da Radiação sem o uso de Relatividade.

2.3 Termodinâmica Quadridimensional

Sabe-se que a relação que garante a conservação de energia e momentum na formulação tensorial da relatividade é:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{2.34}$$

Onde as componentes do tensor momentum energia T estão relacionadas com a densidade de energia, massa e momentum. A equação (2.34) deve ser utilizada para se estudar mudanças em tais variáveis, de forma que torna-se uma conexão com a Primeira Lei da Termodinâmica e a Relatividade Restrita.

Para expressar a segunda lei, devemos partir da formulação original (2.3) e considerar um elemento infinitesimal confinado em um elemento δv do espaço, cuja densidade de entropia é definida por ϕ. Assim, teremos [3]:

$$\frac{d}{dt}(\phi\delta v)\delta t \geqslant \frac{\delta Q}{T}. \tag{2.35}$$

Esta expressão relaciona a mudança de entropia em um determinado evento infinitesimal no espaçotempo causada devido ao fluxo infinitesimal de calor a uma temperatura T. Abrindo a derivada temporal do lado esquerdo da equação acima, obteremos:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\delta v + \phi\frac{d\delta v}{dt}\right)\delta t \geqslant \frac{\delta Q}{T}. \tag{2.36}$$

Pela regra da cadeia, sendo $\phi = \phi(x, y, z)$, teremos que:

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(u_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + u_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + u_z\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \quad , \tag{2.37}$$

e:

$$\frac{d\delta v}{dt} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\delta v. \tag{2.38}$$

Assim, a expressão (2.36) ficará, com $\delta v = \delta x\delta y\delta z$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi u_z)\right]\delta x\delta y\delta z\delta t \geqslant \frac{\delta Q}{T}. \tag{2.39}$$

Passando para uma notação quadridimensional, onde $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ e $x^4 = ct$ com $ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2$, teremos:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\phi\frac{ds}{dx^4}\frac{dx^1}{ds}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\phi\frac{ds}{dx^4}\frac{dx^2}{ds}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\phi\frac{ds}{dx^4}\frac{dx^3}{ds}\right) + \frac{\partial}{\partial x^4}\left(\phi\frac{ds}{dx^4}\frac{dx^4}{ds}\right)\right]\times \\ \times\delta x^1\delta x^2\delta x^3\delta x^4 \geqslant \frac{\delta Q}{T}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

É fácil verificar que a entropia é um invariante de Lorentz. Assim, para a densidade de entropia, temos uma transformação que envolve o fator de contração de Lorentz-Fitzgerald ds/dt [7]:

$$\phi = \phi_0\frac{dt}{ds} = \frac{\phi_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{2.41}$$

Sendo assim, os termos com $\phi\frac{ds}{dx^4}$ em (2.40) ficam:

$$\phi\frac{ds}{dx^4} = \phi_0 \tag{2.42}$$

E como $\delta Q/T = \delta Q_0/T_0$, teremos (utilizando, aqui, a notação de Einstein para somatórios) a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\phi_0\frac{\partial x^\mu}{ds}\right)\delta x^1\delta x^2\delta x^3\delta x^4 \geqslant \frac{\delta Q_0}{T_0}. \tag{2.43}$$

Definimos, então, um *vetor de entropia* em termos da densidade de entropia própria do sistema e da velocidade generalizada do fluído termodinâmico [4]:

$$S^\mu = \phi_0\frac{dx^\mu}{ds}. \tag{2.44}$$

De forma que a equação (2.43) ficará:

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu}\delta x^1\delta x^2\delta x^3\delta x^4 \geqslant \frac{\delta Q_0}{T_0}. \tag{2.45}$$

Esta equação respeita o Princípio de Covariância da Relatividade, visto que, do lado esquerdo de (2.45) temos o divergente de um vetor, resultando em um tensor de rank zero, ou seja, um escalar. O mesmo é verdade para o lado direito da equação (2.45). É fácil mostrar que esta expressão é válida para qualquer espaçotempo minkowskiano (M^4) e pode ser escrita facilmente em qualquer sistema de coordenadas recaindo na Segunda Lei da Termodinâmica clássica ao tomarmos o limite de baixas velocidades.

Capítulo 3

Relatividade Geral e Termodinâmica

Com a Relatividade Geral, em 1916, Einstein deu inicio a era científica da Cosmologia moderna. A extensão da Termodinâmica para esta teoria é de importância fundamental para que seja aplicada ao universo como um todo. Assim, poderemos utilizar a Termodinâmica como critério teórico para a compreensão de modelos cosmológicos.

3.1 Breve revisão de Relatividade Geral

A Relatividade Especial de Einstein se restringe a sistemas inerciais e sem a presença de campos gravitacionais; porém, ao exigirmos uma descrição mais geral de tal teoria devemos nos ater a dois princípios destacados por Einstein: o Princípio da Covariância e o Princípio da Equivalência. Com o auxílio destes, podemos construir uma mecânica que independe totalmente de relações absolutas.

3.1.1 Princípio de Covariância

De acordo com o Princípio de Covariância, as leis da física devem ser expressas de forma que independam do sistema de coordenadas espaçotemporais. Este princípio é fundamental na Relatividade Geral pois implica que, não havendo um sistema de coordenadas preferencial, não há movimentos absolutos. O uso de uma formulação tensorial para a Relatividade Geral garante, de certa forma, a covariância de expressões visto que equações tensoriais podem sempre ser escritas da forma covariante. Porém, também temos a possibilidade de escrever uma expressão que é válida para todos os sistemas de coordenadas, de forma covariante, sem caracterizar uma equação tensorial.

Definimos principalmente, a expressão covariante para o intervalo contendo a geometria do espaçotempo do sistema de coordenadas:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{3.1}$$

O intervalo escrito na forma acima é válido para qualquer sistema de coordenadas espaçotemporais. Em (3.1), temos que $g_{\mu\nu}$ é o tensor de métrica e usaremos a convenção de somatório de Einstein onde índices iguais indicam uma soma. Índices gregos como μ , ν, λ assumem valores $= 1, 2, 3, 4$ - sendo 4 o índice relacionado com a coordenada temporal; índices latinos estão relacionados somente às coordenadas espaciais.

Outros objetos matemáticos que se tornam relevantes no tratamento de coordenadas curvilíneas são os símbolos de Christoffel. Definimos o símbolo de Christoffel de segundo tipo como:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda} \right) \tag{3.2}$$

onde a vírgula representa a derivada: $g_{\mu\nu,\sigma} = \partial g_{\mu\nu} / \partial x^\sigma$. O uso destes objetos é importante para a definição de uma derivada covariante, de forma que a derivada de um tensor, representada por “;”, continue sendo um tensor em espaços curvos:

$$\left(T_{\mu}^{\nu}\right)_{;\nu} = T_{\mu,\nu}^{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} T_{\mu}^{\alpha} = 0. \tag{3.3}$$

3.1.2 Princípio de Equivalência

Segundo Einstein, apenas o Princípio de Covariância não garante a plena relatividade dos movimentos. No Princípio de Equivalência, Einstein destaca a correspondência entre movimentos que ocorrem na presença de um campo gravitacional para um observador estacionário e movimentos que ocorrem para um observador não inercial na ausência de um campo gravitacional.

Este princípio afirma que as leis que regem um corpo em queda livre na presença de um campo gravitacional estacionário local são as mesmas para todos os corpos e que existe uma correspondência com o movimento de corpos que, não estando sujeitos à presença de um campo gravitacional, se apresentam em um sistema de referencial não-inercial. Ou seja, as propriedades do movimento de uma partícula em um referencial não-inercial livre são as mesmas que em um sistema inercial com a presença de um campo gravitacional.

Na Mecânica Relativística, temos que o movimento de uma partícula livre se dá ao substituirmos o intervalo (3.1) em $\delta \int ds = 0$, de forma a obter a equação da geodésica:

$$\frac{d^2 x^{\sigma}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0, \tag{3.4}$$

válida tanto para sistemas inerciais na presença de um campo gravitacional, quanto para sistemas não-inerciais sem a presença de campos.

3.1.3 A equação de campo de Einstein

Utilizando-se do Princípio de Mach, onde partimos da hipótese que a métrica do campo é determinada pela distribuição de matéria e energia, e uma leve modificação na Equação de Poisson, construímos uma equação de campo que dependerá apenas do tensor de momentum-energia $T_{\mu\nu}$ e de derivadas segundas do tensor de métrica $g_{\mu\nu}$.

Ao contrário da Relatividade Restrita, teremos a presença e possibilidade de espaços curvos na Teoria da Relatividade Geral. Para isso, devemos definir o tensor de Riemann-Christoffel:

$$R^{\tau}_{\mu\nu\sigma} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\tau}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\tau}_{\alpha\sigma} + \Gamma^{\tau}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\sigma}, \tag{3.5}$$

onde, para espaçotempos planos teremos: $R^{\tau}_{\mu\nu\sigma} = 0$.

Contraindo o tensor acima com $\sigma = \tau$ e usando a identidade $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} log\sqrt{-g}$, temos:

$$R_{\mu\nu} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} log\sqrt{-g} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} log\sqrt{-g}, \tag{3.6}$$

e, novamente, $R_{\mu\nu} = 0$ para o caso de espaçotempos planos.

Construindo um tensor de divergente zero, como o tensor de momentum energia, Einstein escreveu a sua equação de campo ligando a geometria do espaçotempo com a distribuição de matéria e energia:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{3.7}$$

sendo Λ o termo que Einstein chamou de *constante cosmológica* na reformulação de sua teoria original. Em (3.7), temos também que:

$$(G^{\mu\nu})_{;\nu} = \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right)_{;\nu} = 0, \tag{3.8}$$

onde R é o tensor $R_{\mu\nu}$ contraído em um escalar.

Introduzimos a densidade de momentum-energia:

$$\mathfrak{T}_{\mu}^{\nu} = T_{\mu}^{\nu}\sqrt{-g}, \tag{3.9}$$

de forma que, com um breve manipulação de propriedades tensoriais, a expressão (3.3) ficará:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\mu,\nu}^{\nu} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} = 0, \\ \mathfrak{T}_{\mu,\nu}^{\nu} + \frac{1}{2}\mathfrak{T}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta,\mu} = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2 Extensão da Termodinâmica para Relatividade Geral

Nesta seção, vamos retirar algumas restrições que encontramos no capítulo anterior e aplicaremos os Princípios de Equivalência e Covariância de forma a chegarmos a uma expressão para a segunda lei para que possamos aplicá-la a sistemas cosmológicos. Devemos sempre ter o compromisso de, nos limites para métricas planas e campos fracos ou nulos, fazer que nossa nova teoria recaia na termodinâmica clássica.

3.2.1 Análogo à Primeira Lei da Termodinâmica

Novamente, partimos da condição análoga da relatividade para a conservação de energia, generalizando-a porém para o caso onde temos espaçotempos curvos [4]:

$$(T_{\mu}^{\nu})_{;\nu} = 0 \tag{3.11}$$

com T_{μ}^{ν} sendo o tensor de matéria e energia total.

Fazendo uso da expressão (3.10) e integrando em uma região quadri-dimensional definida:

$$\int\int\int\int \left(\mathfrak{T}^{\nu}_{\mu,\nu} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0, \tag{3.12}$$

é possível ver que tal equação é válida para qualquer sistema de coordenadas curvilíneas no espaçotempo e garante a conservação de energia e momentum de qualquer sistema termodinâmico.

3.2.2 Análogo à Segunda Lei da Termodinâmica

Em um de seus artigos de 1928[5], Tolman postula uma equação com o análogo relativístico da segunda lei. Ressaltando que discorda de Einstein quando este fez críticas ao fato de não ser uma equação tensorial, Tolman mostra que tal expressão é válida para qualquer sistema de coordenadas espaçotemporais.

Partindo do vetor entropia, equação (2.44), definimos o *vetor densidade de entropia*:

$$\mathfrak{S}^{\mu} = S^{\mu}\sqrt{-g} = \phi_0 \frac{dx_\mu}{ds}\sqrt{-g}. \tag{3.13}$$

A expressão postulada por Tolman para a segunda lei fica [3, 4, 7]:

$$\frac{\partial \mathfrak{S}^{\mu}}{\partial x_\mu} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4 \geqslant \frac{\delta Q_0}{T_0}. \tag{3.14}$$

Mostraremos que tal expressão obedece o Princípio da Covariância escrevendo-a como:

$$(S^{\mu})_{;\mu}\sqrt{-g}\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4 \geqslant \frac{\delta Q_0}{T_0}. \tag{3.15}$$

Podemos ver que o termo $(S^{\mu})_{;\mu}$ é um tensor posto dois contraído na forma de um escalar, assim como $\sqrt{-g}\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4$ e o lado direito da equação acima também são escalares, formando assim uma expressão covariante que é válida para qualquer sistema de coordenadas. Vemos, também, que para espaços planos, a derivada covariante recai na derivada comum e, no caso de coordenadas galileanas, $\sqrt{-g}$ é unitário de forma que recuperamos a Segunda Lei da Termodinâmica clássica.

3.3 Aplicações

3.3.1 Segunda Lei para um sistema estático e isolado

Ao aplicarmos tal expressão para um sistema estacionário (o equivalente a utilizar coordenadas comóveis) e isolado teremos as "velocidades"das coordenadas tipo-espaço tais que:

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \frac{dx_3}{ds} = 0. \tag{3.16}$$

Desta forma, somente a parte temporal de (3.14) restará após abrirmos o somatório:

$$\int\int\int\int \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\phi_0 \frac{dx_4}{ds}\sqrt{-g}\right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \geqslant 0. \tag{3.17}$$

Integrando em relação a coordenada tipo-tempo, de x_4 a x_4':

$$\left\{\int\int\int \phi_0 \frac{dx_4}{ds}\sqrt{-g} dx_1 dx_2 dx_3\right\}_{x_4}^{x_4'} \geqslant 0, \tag{3.18}$$

com $\sqrt{-g} dx_1 dx_2 dx_3 = dV_0 ds$, sendo dV_0 o volume espacial próprio, teremos:

$$\left\{\int \phi_0 dV_0\right\}_{x_4}^{x_4'} \geqslant 0. \tag{3.19}$$

A quantidade $\int \phi_0 dV_0$ pode ser chamada de entropia e só apresentará aumentos com o tempo x_4. Tal quantidade é a soma sobre a entropia do sistema como um todo, levando em conta cada uma de suas partes. Ao considerarmos a visão que relaciona entropia e probabilidade de cada microestado do sistema:

$$S = k_b \ \ ln \ \ \Omega \tag{3.20}$$

e lembrando a propriedade de que a entropia é uma grandeza extensiva, vemos que (3.19) implica também que o sistema muda com o tempo para arranjos de maior probabilidade.

3.3.2 Equilíbrio térmico em um campo estático generalizado

Serão examinadas, agora, as condições para equilíbrio térmico na presença de um campo gravitacional estático e generalizado, sem qualquer implicação de simetrias. Tal estudo é importante pois qualquer outro caso de campos estáticos pode ser obtido a partir deste. Vamos considerar que todas as partes do sistema estão em contato com um termômetro que apresenta Radiação de Corpo Negro, mas não afeta o sistema de forma relevante. Chamaremos este instrumento de termômetro de radiação [3].

O elemento de linha para este caso será:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j + g_{44}dt^2, \tag{3.21}$$

de forma que g_{14}, g_{24} e g_{34} são iguais a zero, enquanto os outros termos do tensor de métrica podem possuir qualquer dependência nas coordenadas espaciais x^i mas são independentes do tempo. Temos que, o tensor momentum-energia para um corpo negro com densidade de energia própria ρ_{00} é dado de forma que [5]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu}p_0, \tag{3.22}$$

com $\rho_{00} = 3p_0$. Mas, como estamos tratando de um caso estático, devemos ter:

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^j}{ds} = 0. \tag{3.23}$$

A quarta componente da "velocidade" fica:

$$\frac{dx^4}{ds} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \sqrt{g^{44}}. \tag{3.24}$$

Substituindo (3.23) e (3.24) em (3.22), os únicos termos da soma que sobrevivem são:

$$T^{ij} = -g^{ij}p_0,$$
$$T^{44} = g^{44}\rho_{00}. \tag{3.25}$$

Escrevendo o tensor na forma mista, teremos somente $T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p_0$ e $T^4_4 = \rho_{00}$. Agora, utilizaremos a expressão (3.10) para compreender como se comportará a pressão no termômetro de radiação. Fazendo $\mu = 1$, obteremos:

$$\sqrt{-g}\frac{\partial p_0}{\partial x^1} + p_0\frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial x^1} - p_0\sqrt{-g}\frac{1}{2}\left(g^{ij}g_{ij,1} + g^{44}g_{44,1}\right) + \frac{1}{2}(\rho_{00} + p_0)\sqrt{-g}g^{44}g_{44,1} = 0. \tag{3.26}$$

Usando que $dg/g = g^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}$, teremos:

$$g^{ij}g_{ij,1} + g^{44}g_{44,1} = g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,1} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^1}. \tag{3.27}$$

Assim, abrindo os somatórios de (3.26), o segundo e o terceiro termos se cancelam:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x^1} + \frac{\rho_{00} + p_0}{2}g^{44}g_{44,1} = 0. \tag{3.28}$$

Finalmente, usando que $g^{44} = 1/g_{44}$ e $\rho_{00} = 3p_0$, a dependência entre a pressão no termômetro de radiação e a coordenada x^1, fica:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}ln(p_0) + 2\frac{\partial}{\partial x^1}ln(g_{44}) = 0. \tag{3.29}$$

Como tal relação se dá para todas as coordenadas espaciais, podemos integrá-la de forma que:

$$p_0(g_{44})^2 = constante. \tag{3.30}$$

Temos, da termodinâmica de Stefan-Boltzmann [3]:

$$p_0 = \frac{1}{3}\sigma T_0^4. \tag{3.31}$$

Juntando (3.30) e (3.31):

$$T_0\sqrt{g_{44}} = \mathfrak{C}, \tag{3.32}$$

sendo $\mathfrak{C}$ constante em todo o sistema. É importante ressaltar que a expressão acima é válida para pontos no termômetro de radiação; como T_0 e $\sqrt{g_{44}}$ são funções contínuas da posição, podemos assumir que esta constância da função será válida para os pontos do sistema que entram em contato com nosso termômetro postulado. Também, não estamos considerando aqui se o termômetro de radiação irá causar alguma perturbação relevante ao sistema. Para o caso de um sistema sólido, por exemplo, teríamos que retirar parte do sólido para introduzirmos o aparelho de medida. Tal procedimento certamente iria afetar os potenciais $g_{\mu\nu}$, porém este problema desaparece se considerarmos nosso termômetro com dimensões irrelevantes perante o sistema.

Finalmente, vemos que T_0, a temperatura própria do sistema, pode sim variar entre diferentes pontos do sistema gravitacional e teremos que, para a relatividade geral, substituiremos a constância da temperatura para sistemas em equilíbrio pela constância de $\mathfrak{C}$.

Capítulo 4

Aplicações Cosmológicas

Em seu livro texto de 1934 [3], Tolman já apresentava argumentos para a utilização de uma métrica não-estática em modelos cosmológicos. Fundamentando sua argumentação no desvio para o vermelho (*redshift*) de galáxias medidos por E. Hubble em 1929, Tolman apresenta um desenvolvimento genérico para uma métrica não-estática fazendo-se valer do princípio de isotropia como desenvolvida por Friedmann e Robertson. No presente capítulo, vamos analisar o desenvolvimento deste tipo de métrica, suas implicações cosmológicas e algumas aplicações da Termodinâmica Relativística ao cosmos.

4.1 O modelo não-estático

4.1.1 Algumas considerações cosmológicas

Antes de obtermos o elemento de linha da métrica não-estática, devemos fazer algumas hipóteses cosmológicas, construindo o princípio cosmológico de forma consistente com a realidade aparente do Universo. Primeiramente, vamos assumir que a gravitação é descrita pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein com ou sem a constante cosmológica Λ ($G =$

$c = 1$):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\left(\Lambda g_{\mu\nu}\right) = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{4.1}$$

Consideraremos a existência de um tempo global que permite descrever a geometria do Universo em um sistema gaussiano único de forma que a métrica possa ser escrita: $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j + dt^2$, ou seja, $g_{44} = 1$. Também iremos considerar que não existem termos cruzados do tipo g_{4i}.

Finalmente, devemos ter que, ao observarmos a estrutura do universo em grande escala, este deverá apresentar uma geometria espacialmente isotrópica e homogênea, não apresentando direções privilegiadas. Esta hipótese mostra-se importante, pois elimina toda e qualquer visão cosmológica antropocêntrica, em que ocupamos uma posição especial no cosmos.

4.1.2 Obtenção do elemento de linha

Partimos da possibilidade de expressar o elemento de linha em coordenadas comóveis, com simetria esférica, da forma mais geral possível [3]:

$$ds^2 = -e^{\lambda}dr^2 - e^{\mu}(r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta\ d\phi^2) + e^{\nu}dt^2, \tag{4.2}$$

onde os termos cruzados tempo-espaço já foram eliminados. Aqui, λ, μ e ν são funções arbitrárias que podem depender tanto das coordenadas espaciais quanto da temporal.

Ao considerarmos uma partícula de teste livre, teremos as seguintes equações para a geodésica nesta métrica:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{ds^2} &= -\Gamma^1_{44}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \\ \frac{d^2\theta}{ds^2} &= -\Gamma^2_{44}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \\ \frac{d^2\phi}{ds^2} &= -\Gamma^3_{44}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como esta partícula está em repouso em relação ao sistema de coordenadas, por utilizarmos coordenadas comóveis, e fizemos a suposição de isotropia e homogeneidade espacial, a aceleração desta partícula será zero de forma que os símbolos de Christoffel das expressões acima serão igualmente nulos. Disto resulta:

$$\frac{\partial\nu}{\partial r} = \frac{\partial\nu}{\partial\theta} = \frac{\partial\nu}{\partial\phi} = 0. \tag{4.4}$$

Ou seja, ν é uma função que depende apenas do tempo, permitindo que possamos definir uma nova variável t':

$$t' = \int e^{\frac{\nu(t)}{2}}dt. \tag{4.5}$$

Substituindo t' por t em (4.2):

$$ds^2 = -e^{\lambda}dr^2 - e^{\mu}(r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta\ d\phi^2) + dt^2. \tag{4.6}$$

Desta forma, para um observador local comóvel: $t = t_0$. Porém, as distâncias próprias medidas por ele são dadas por:

$$\begin{aligned} \delta l_1 &= e^{\lambda/2}\delta r, \\ \delta l_2 &= e^{\mu/2}r\delta\theta, \\ \delta l_3 &= e^{\mu/2}r\ sin\theta\ \delta\phi. \end{aligned} \tag{4.7}$$

A mudança temporal nas distâncias próprias será dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0}(ln\ \delta l_1) &= \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial t_0}(ln\ \delta l_2) = \frac{\partial}{\partial t_0}(ln\ \delta l_2) &= \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

ou seja, pela hipótese de isotropia usada na construção da métrica:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t}. \tag{4.9}$$

Assim (4.6) fica:

$$ds^2 = -e^{\mu}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta\ d\phi^2) + dt^2, \tag{4.10}$$

onde $\mu = \mu(r,t)$. Partimos novamente da distância própria $\delta l_0 = e^{\mu/2}\delta r$ e novamente teremos:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} ln\ \delta l_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}. \tag{4.11}$$

Importante destacar que um observador local não poderá observar uma mudança radial nesta *velocidade própria* e portanto:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial t_0} ln\ \delta l_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial r \partial t} = 0. \tag{4.12}$$

Se assumirmos que $\mu(r,t) = f(r) + g(t)$ junto com (4.12), vamos obter que (4.10) será:

$$ds^2 = -e^{f(r)+g(t)}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta\ d\phi^2) + dt^2. \tag{4.13}$$

Utilizando-nos da equação de campo de Einstein (3.7), após algumas manipulações com o tensor momentum-energia resultante deste elemento de linha (4.13), encontraremos as seguintes equações para *f(r)* [3]:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} &= c_1 r e^{f/2}, \\ e^{f(r)} &= \frac{1/c_2^2}{[1 - c_1 r^2/4c_2]^2}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde c_1 e c_2 são duas constantes de integração resultantes da integração das equações encontradas. Colocando o resultado encontrado para $e^{f(r)}$ em (4.13) e definindo uma constante R_0 que pode assumir valores positivos, negativos ou infinitos, de forma que:

$$-\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{R_0^2}, \tag{4.15}$$

teremos, finalmente:

$$ds^2 = -\frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2}(dr^2 r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta \ d\phi^2) + dt^2, \tag{4.16}$$

com $g(t)$ uma função dependente somente do tempo. Simplificando um pouco mais, definimos:

$$\overline{r} = \frac{r}{1 + r^2/4R_0^2}. \tag{4.17}$$

E, com $\overline{r} = R_0 \ sin \ \chi$, a métrica (4.13) ficará:

$$ds^2 = -R_0^2 e^{g(t)}(d\chi^2 + sin^2\chi \ d\theta^2 + sin^2\chi \ sin^2\theta \ d\phi^2) + dt^2. \tag{4.18}$$

Um dos principais motivos para a escolha desta dedução de uma métrica não-estática é esta não apresentar a singularidade *inevitável* postulada pela Teoria do *Big Bang*, evitando assim, o problema de definir-se uma termodinâmica relativística em singularidades.

Calculando o volume próprio espacial referente a esta métrica, teremos:

$$v_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R_0^3 e^{\frac{3}{2}g(t)} sin^2\chi \ sin\theta \ d\chi d\theta d\phi = 2\pi^2 R_0^3 e^{\frac{3}{2}g(t)} \tag{4.19}$$

A expressão acima (4.19) difere da encontrada para o universo estático de Einstein [5] apenas pelo termo contendo $g(t)$. Se g não for dependente da coordenada temporal, resgatamos o volume próprio do universo de Einstein com $R = R_0 e^{\frac{1}{2}g}$.

4.1.3 Densidade e pressão no modelo não-estático

Vamos introduzir mais uma hipótese cosmológica na dedução de um modelo não-estacionário: iremos assumir que o universo que estamos estudando é preenchido por um fluido perfeito. Após a dedução da métrica assumindo isotropia e homogeneidade, ficará mais claro perceber os efeitos que um universo repleto por um fluido de distribuição não-homogênea apresentará. Com esta distribuição, espera-se que ocorra um fluxo de radiação de uma região contendo mais matéria luminosa que seus arredores, o que não poderia ser representado por um fluido perfeito. Vantagens acerca da representação através de um fluido perfeito surgem pois este restringe o comportamento a processos adiabáticos, sem fluxo de calor, e elimina a transferência de energia por radiação de uma porção de matéria para outra.

Uma vez aceita esta hipótese, podemos introduzir a expressão para o tensor momentum-energia como em (3.22) para descrevermos um fluido perfeito:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu}p_0. \tag{4.20}$$

Devido às coordenadas comóveis e a métrica utilizada (4.18), as componentes macroscópicas das *velocidades* serão expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\phi}{ds} &= 0, \\ \frac{dt}{ds} &= 1, \end{aligned} \tag{4.21}$$

que nos resulta, de (4.20),

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p_0, \qquad T_4^4 = \rho_{00}. \tag{4.22}$$

Introduzindo o tensor de momentum-energia (4.22) e o elemento de linha (4.18) nas equações de campo de Einstein (3.7), obteremos:

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2}e^{-g(t)} - \ddot{g} - \frac{3}{4}\dot{g}^2 + \Lambda \tag{4.23}$$

e

$$8\pi \rho_{00} = \frac{3}{R_0^3}e^{-g(t)} + \frac{3}{4}\dot{g}^2 - \Lambda, \tag{4.24}$$

representando equações para a pressão e densidade de energia como medidas por um observador local; os pontos sobre as variáveis representam diferenciação temporal. Aqui, será importante ressaltar que não teremos mais, ao contrário de um universo estático, a necessidade que R_0 seja real e nem mesmo que a constante cosmológica Λ seja positiva para obtermos uma densidade de energia ρ_{00} positiva. Tolman ressalta que é importante deixarmos estas possibilidades em aberto em nosso modelo para que observações e dados futuros possam comprovar os valores destas constantes [3].

4.2 Termodinâmica e Cosmologia

Nesta seção, iremos aplicar alguns dos conceitos termodinâmicos desenvolvidos nos capítulos anteriores ao modelo cosmológico de universo não-estático.

4.2.1 Aplicação da Primeira Lei: mudança na energia com o tempo

Vamos começar nossa análise substituindo os valores encontrados para as componentes do tensor momentum-energia em (4.22) na equação para a densidade de momentum $\mathfrak{T}$

desenvolvida no capítulo anterior:

$$\mathfrak{T}^{\nu}_{\mu,\nu} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} = 0. \tag{4.25}$$

Como queremos analisar a mudança temporal, abriremos o somatório somente na componente $\mu = 4$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{00}\sqrt{-g}) + \frac{1}{2}p_0\sqrt{-g}\left(g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial t} + g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial t} + g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial t}\right) = 0. \tag{4.26}$$

Da expressão do elemento de linha (4.13), é fácil ver que:

$$\sqrt{-g} = \frac{r^2 sin\theta\ e^{\frac{3}{2}g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3}, \tag{4.27}$$

de forma que (4.26) se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_{00}\ r^2 sin\theta\ e^{\frac{3}{2}g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3}\right) + p_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r^2 sin\theta\ e^{\frac{3}{2}g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3}\right) = 0. \tag{4.28}$$

Sabemos que um observador local mede o valor do volume próprio, de acordo com o elemento de linha dado por (4.13), para um pequeno alcance $\delta r\delta\theta\delta\phi$ como:

$$\delta v_0 = \sqrt{-g}\delta r\delta\theta\delta\phi = \frac{r^2 sin\theta\ e^{\frac{3}{2}g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3}\delta r\delta\theta\delta\phi, \tag{4.29}$$

assim, (4.28) pode ser reescrito:

$$\frac{d}{dt}(\rho_{00}\delta v_0) + p_0\frac{d}{dt}(\delta v_0) = 0. \tag{4.30}$$

Esta expressão nos mostra que um observador local irá observar as mudanças na energia de qualquer elemento de fluido nas vizinhanças como o esperado para uma transformação adiabática.

Como consequência direta da dependência temporal em $g(t)$ no determinante da métrica (4.27), existirá um aumento temporal de cada elemento de volume próprio se $g(t)$ aumentar com t. Já a quantidade de energia por elemento de volume de fluido não será constante, exceto para o caso de pressão zero. Para que ocorra conservação de energia, deveremos introduzir, neste caso, uma quantidade que represente a energia potencial do campo gravitacional. Esta equação (4.30) mostra que a energia própria de cada elemento de fluido, medido por um observador local, muda com o volume próprio do elemento de forma adiabática.

Este resultado é termodinamicamente importante pois afirma que não haverá fluxo de calor entre elementos do fluido perfeito do modelo, sendo consequência direta do princípio de homogeneidade do modelo.

4.2.2 Aplicação da Segunda Lei

Partimos da Segunda Lei como postulada por Tolman e desenvolvida no capítulo anterior:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\phi_0 \frac{dx^\mu}{ds}\sqrt{-g}\right)\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geqslant \frac{\delta Q_0}{T_0}. \tag{4.31}$$

Com as condições impostas para um observador comóvel (4.21) e pelo fato demonstrado na seção anterior, de termos processos adiabáticos, teremos δQ_0, e (4.31) ficará:

$$\frac{d}{dt}\left(\phi_0 \frac{r^2\ sin\theta e^{\frac{3}{2}g(t)}}{1+r^2/4R_0^2]^3}\right)\delta r \delta\theta\delta\phi \geqslant 0, \tag{4.32}$$

que, usando a expressão para o volume próprio (4.29), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}(\phi_0 \delta v_0) \geqslant 0, \tag{4.33}$$

o que mostra que a entropia própria de cada elemento do fluido perfeito só pode aumentar ou permanecer igual com o decorrer do tempo. Com o auxílio de (4.30) vemos que um observador local observará, na vizinhança, os mesmos resultados esperados pela Termodinâmica clássica para um elemento de fluido perfeito sofrendo uma contração ou expansão adiabática.

4.2.3 Irreversibilidade e reversibilidade no modelo não-estático

Do resultado anterior (4.33), podemos discutir as características acerca de reversibilidade e irreversibilidade de nosso modelo. Para processos reversíveis, teremos o sinal de igual na expressão, de forma a ter uma entropia própria constante em cada elemento de fluido do modelo. Para compreender a constância da entropia, devemos analisar os casos onde um aumento de entropia ocorre naturalmente em um sistema.

Primeiramente, poderemos ter um aumento de entropia como resultado da irreversibilidade do fluxo de calor, algo que já mostramos que não ocorrerá em nosso modelo devido à hipótese de homogeneidade. Em seguida, vemos que não ocorrerá nenhum aumento de entropia decorrente de choque dos elementos do fluido com as paredes do sistema, como para um sistema clássico em expansão não adiabática, pois o Universo não as apresenta. É fácil ver que nenhuma causa clássica de aumento de entropia irá se aplicar a este modelo, de forma que as mudanças no modelo serão reversíveis desde que mudanças físico-químicas internas ao elemento de fluido não gerem aumentos significativos na entropia própria do elemento como veremos adiante.

Tolman [3] ressalta que o comportamento reversível para um modelo não-estático está intimamente ligado à simplicidade do fluido escolhido, de forma que não ocorrem processos internos irreversíveis ao ponto de alterar a entropia própria dos elementos do fluido. Estes fluidos simples poderiam ser representados por uma matéria incoerente, exercendo pressão zero - como a matéria escura - e por uma distribuição de Radiação de Corpo Negro.

Para uma espécie de fluido mais complexo, como um modelo de gás diatômico, teremos processos irreversíveis e o sinal de igualdade se tornará uma inigualdade em (4.33) levando nosso modelo a apresentar um comportamento irreversível devido aos potenciais químicos de moléculas mais complexas.

4.3 Considerações Finais

Após a exposição de consequências diretas da Termodinâmica Relativística a modelos cosmológicos, poderemos considerar alguns processos que diferem da Termodinâmica clássica que só se mostram possíveis se aplicados ao universo como um todo.

4.3.1 Sobre a possibilidade de processos reversíveis a uma taxa finita

Sabemos, na Termodinâmica clássica [9], da impossibilidade de produzirmos uma expansão adiabática a um tempo finito. Ao considerarmos um sistema onde uma expansão adiabática é produzida, levamos em conta o caso clássico de um cilindro com um pistão móvel, contendo um gás monoatômico que sofre uma expansão infinitamente lenta de forma a não alterar a entropia interna do sistema. Se retirarmos a restrição de executar esta operação de forma infinitamente lenta, não teremos mais um processo reversível de forma que o gás não conseguirá realizar um ciclo termodinâmico fechado.

Vamos estender nossa visão para o caso onde o gás não está mais confinado em um cilindro contendo um pistão e sim livre, sem nenhuma vizinhança ou paredes. Importante ressaltar, neste momento, que tal consideração torna-se complicada na teoria clássica da termodinâmica pela ausência de considerações gravitacionais nesta abordagem. Para um gás livre, na teoria clássica, considerava-se que o gás sofreria apenas difusão pelo espaço vazio a sua volta, o que caracterizaria um processo dado a uma taxa finita, porém de forma irreversível. A mudança de entropia decorre da transformação de um gás de uma pressão p_1 a uma pressão p_2 sem a realização de trabalho externo [3, 9].

$$\Delta S = R\, ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right). \tag{4.34}$$

Em momento nenhum, na teoria da Termodinâmica clássica, consideramos a possibilidade cosmológica de um universo repleto por um gás em expansão livre, parte pela incapacidade da teoria newtoniana de descrever o Universo observado, de forma que a possibilidade de uma expansão livre sem difusão não fosse considerada. Como mostrado na seção anterior, considerações relativísticas nos apresentam um modelo de universo não-estático repleto por um fluido homogêneo em expansão ou contração. Estes modelos, provenientes da relação entre os potenciais $g_{\mu\nu}$ e o tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$, nos apresentam uma nova possibilidade em Termodinâmica: processos reversíveis que se dão a uma taxa finita.

Vimos que a expressão para o volume próprio (4.29) nos mostra que pela dependência temporal de $g(t)$ o modelo como um todo irá expandir a uma taxa global, o mesmo ocorrendo para o caso de contração. Vimos que ao aplicar a primeira lei relativística, obtemos a expressão (4.30) para a mudança na energia própria de cada elemento de fluido que reflete exatamente uma expansão adiabática no modelo, sem fluxo de calor para as vizinhanças.

Na seção (4.2.2), ao aplicarmos a expressão relativística da segunda lei (4.32) obtemos uma transformação adiabática como seria classicamente esperado (4.33). Deste resultado, como debatido na seção 4.2.3, percebemos que ao tomar-se modelos de gases simples, como matéria incoerente com a presença de radiação de corpo negro, pode-se considerar processos reversíveis para o nosso modelo. Já na construção deste modelo tomamos cuidado para que fosse feita de maneira a eliminar anisotropias que gerassem aumentos locais significativos na entropia própria do sistema e evitamos que ocorresse fluxo de calor através do modelo.

A extensão da Termodinâmica para a Relatividade Geral nos permite, no estudo de modelos cosmológicos de matéria composta homogeneamente pelo espaço, observar a expansão de um gás livre como um processo reversível a tempo finito pela possibilidade de que este material não flua como difusão, nem apresente fluxo de calor de forma irreversível ou uma queda de pressão decorrente da colisão com as paredes do sistema.

4.3.2 Sobre a possibilidade de processos irreversíveis sem atingir um estado final de entropia máxima

Apesar das considerações feitas na seção anterior, não devemos descartar o debate acerca de processos irreversíveis na termodinâmica relativística visto que estes processos ocorrem naturalmente no Universo. Novamente, é possível perceber que para casos de processos irreversíveis haverá diferença entre as termodinâmicas clássica e relativística. Sabemos da primeira [9], que processos irreversíveis sempre ocorrem de forma a atingir um estado de entropia máxima. Agora, iremos analisar que na nova termodinâmica isto não será uma condição necessária.

Novamente, temos que esta possibilidade diferente da teoria relativística da termodinâmica surge ao analisarmos casos cosmológicos que apresentam contrações e expansões. Este caso não foi estudado detalhadamente neste trabalho como o caso citado anteriormente, mas tal estudo não se mostra necessário para a compreensão da possibilidade de um processo irreversível que não atinge um estado final de entropia máxima. Para este caso, consideramos um modelo onde ocorre uma expansão de um volume próprio finito qualquer, seguido de uma reversão nas direções de movimento até um limite superior e um retorno final para volumes menores. Ou seja, estamos lidando com uma categoria de modelos cosmológicos que leva em consideração uma sucessão de contrações e expansões[3].

Do ponto de vista clássico, um estado de entropia máxima seria inevitável visto a natureza irreversível das expansões e contrações de um gás livre [9]:

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dv + \frac{\partial S}{\partial n_1}dn_1 + ... + \frac{\partial S}{\partial n_n}dn_n, \tag{4.35}$$

sendo E a energia interna, v volume e $n_1, n_2, ..., n_n$ o número de mols de cada componente químico diferente do gás. Como este sistema é isolado, o termo contendo dE deve ser zero, pelo princípio da conservação de energia; enquanto o termo pdv também irá a zero devido a natureza isolada do sistema. Assim, somente os termos relacionados aos potenciais químicos dos componentes estariam diretamente ligados à maximização da entropia do modelo.

Do ponto de vista da termodinâmica relativística, a expressão anterior se mostrará como:

$$d(\phi_0\ \delta v_0) = \frac{1}{T_0}d(\rho_{00}\delta v_0) + \frac{p_0}{T_0}d(\delta v_0) + \frac{\partial(\phi_0\delta v_0)}{\partial n_1^0}dn_1^0 + ... + \frac{\partial(\phi_0\delta v_0)}{\partial n_n^0}dn_n^0, \tag{4.36}$$

que determina a entropia própria de cada elemento do fluido $(\phi_0\delta v_0)$ em termos da sua energia própria $\rho_{00}\delta v_0$ e do número de mols $n_1^0, ..., n_n^0$ de cada componente químico presente no modelo. Sabemos da mecânica relativística que não podemos mais afirmar que a energia própria associada a um elemento do fluido é uma constante, exceto se permitirmos que se associe a energia potencial gravitacional a esta. Como vimos em (4.30), a energia própria de cada elemento do fluido do modelo decresce com o aumento do volume próprio e aumenta com a contração do mesmo. Aqui, abandonamos a restrição encontrada no caso clássico de forma a obtermos um aumento de entropia decorrente da não conservação direta da energia própria.

Desta forma, na Termodinâmica Relativística, não podemos afirmar que exista um ponto de máximo para o valor que a entropia pode assumir ao realizar um processo irreversível em um fluido ou gás cosmológico que se contraí e expande sucessivamente. Como não temos restrições cosmológicas acerca das limitações dos valores da energia própria do elemento de fluido e não temos limitações quanto a entropia total do mesmo, podemos obter a possibilidade de processos irreversíveis que podem continuar sem a necessidade de um estado final.

"A importância principal desdes novos resultados surge na demostração da necessidade do uso da termodinâmica relativística, no lugar da clássica, em qualquer tentativa de entender o comportamento do Universo como um todo."(TOLMAN, 1934, p. 325)

Bibliografia

[1] JÜTTNER, F., *Ann. der Physik.*, vol **34**, p. 856, 1911.

[2] LENZ, W., Das Gleichwitch von Materie und Strahlung in Einsteins geschlossener Welt., *Physik. Zeitschr.*, **27**, 1926 (642-645)

[3] TOLMAN, Richard C., **Relativity Thermodynamics and Cosmology**. First Edition, Oxford University Press, 1934.

[4] TOLMAN, Richard C., On the extensions of Thermodynamics to General Relativity, *Proc. Nat. Acad. Soc.*, **14**, 1928 (268-272)

[5] TOLMAN, Richard C., On the energy and entropy of Einstein's Closed Universe, *Proc. Nat. Acad. Soc*, **14**, 1928 (348-353)

[6] TOLMAN, Richard C., On the equilibrium between radiation and matter in Einstein's Closed Universe, *Proc. Nat. Acad. Soc.* , **14**, 1928 (353-356)

[7] TOLMAN, Richard C., Further remarks on the second law of Thermodynamics in General Relativity, *Proc. Nat. Acad. Soc.* , **14**, 1928 (701-706)

[8] RINDLER, Wolfgang, **Relativity: Special, General, and Cosmological**. 1^a edição. Oxford University Press, 2001.

[9] CALLEN, Herbert C., **Thermodynamics and an introduction to thermostatistics**. 2^a edição. Wiley-India Press, 1985.

[10] MOSENGEIL, *Ann der Physik*, vol **22**, p. 867, 1907.

[11] OTT, H., Lorentz transformation der Warme und der Temperatur, *Z. Phys.*, **175**, 1963 (70 -)

[12] AVRAMOV, I., Relativity and Temperature, *Russian Journal of Physical Chemistry*, **77**, 2003 (179-182)