

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA**

**MÉTODOS PERTURBATIVOS PARA O ESTUDO DA DINÂMICA NÃO
LINEAR DE UMA PARTÍCULA**

LEANDRO SOARES MARQUES

Trabalho de conclusão de curso realizado sob orientação do Dr. Renato Pakter e apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como um dos pré-requisitos para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Porto Alegre

2013

Dedico este trabalho de conclusão a minha mãe, meu pai e meus avós por todo o incentivo, trabalho, paciência, força e ajuda para que isso fosse possível. Vocês todos são os melhores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares por todo apoio ao longo do curso, aos meus professores pelos conhecimentos e experiências de vida transmitidos, ao meu orientador Dr. Renato Pakter sem o qual o trabalho nunca teria sido possível e a todos meus amigos do curso de Física da UFRGS que me ajudaram e me apoiaram. Em especial agradeço aos meus amigos Lucas Royes Schardosim por toda a amizade desde o início do curso e força no trabalho, Luciano da Silva Berchon pela amizade, persistência e apoio, Aline Friedrich Lütz Weizenmann por todo incentivo, incrível amizade e alegria que transmite e Alessandra Friedrich Lütz por todas as longas horas de conversas, trocas de experiências, incentivo e bela amizade que temos. Muito obrigado a todos e que ninguém se sinta excluído deste agradecimento, só não pude escrever todos os demais porque senão levaria dias e muitas páginas de agradecimentos.

“It’s been a long road, to get from there to here, it’s been a long time, but my time is finally near, and I will see my dream come alive at last, I will touch the sky, and they’re not gonna hold me down no more, no they’re not gonna change my mind...”

*“Faith of the Heart”, song written by Diane Warren
Theme to television series Star Trek: Enterprise*

RESUMO

Compreender e aplicar diferentes técnicas perturbativas para a análise da dinâmica não linear de uma partícula é uma importante questão na busca por melhor entender modelos simples dinâmicos. Nesse trabalho vamos considerar um modelo simples para a dinâmica de uma partícula sujeita a uma perturbação periódica, cuja equação de movimento é dada por $\ddot{\theta}(w,t) = -A \cos(wt) \sin(\theta)$, onde $A \ll 1$ e w são, respectivamente, a amplitude e frequência da perturbação e $-\pi \leq \theta(w,t) \leq \pi$ é uma variável angular. Esse pode ser visto como um modelo simples para a dinâmica de partículas sujeitas a ondas estacionárias em fluidos ou plasmas. Apesar da simplicidade do sistema não perturbado (quando $A = 0$), ele é não linear, tendo frequências naturais de oscilação que variam de zero a infinito dependendo da energia inicial da partícula. Portanto, ao ligar-se a perturbação com frequência determinada, haverá trajetórias ressonantes e outras fora de ressonância. Exploraremos as diferentes técnicas perturbativas para analisar a dinâmica em cada um desses casos, procurando descrever a dinâmica em todo o espaço de fases. Os resultados analíticos serão então confrontados com a solução numérica da equação de movimento.

ABSTRACT

Understand and apply different perturbative techniques for the analysis of nonlinear dynamics of a particle is an important issue in the search for better understanding of simple models dynamic. In this paper we consider a simple model for the dynamics of a particle subject to a periodic perturbation, whose equation of motion is given by $\ddot{\theta}(w,t) = -A\cos(wt)\sin(\theta)$, where $A \ll 1$ and w are respectively the amplitude and frequency of the perturbation and $-\pi \leq \theta(w,t) \leq \pi$ is an angular variable. This can be seen as a simple model for the dynamic particles subjected to standing waves in fluids or plasma. Despite the simplicity of the not perturbed system, he is non-linear, with natural frequencies of oscillation varying from zero to infinity depending on the initial energy of the particle. Therefore, when switching on the perturbation with determined frequency, there will be resonant trajectories and other off-resonance. We will explore the different perturbative techniques to analyze the dynamics in each of these cases, trying to describe the dynamics in the whole phase space. The analytical results are then faced with the numerical solution of the equation of motion.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	7
2 TEORIA DE PERTURBAÇÃO CLÁSSICA.....	8
3 TEORIA DE PERTURBAÇÃO RESSONANTE E MAPEAMENTO ESTROBOSCÓPICO.....	16
3.1 Tratamento de ressonâncias.....	19
3.2 Comparação entre simulação numérica e o cálculo analítico.....	21
4 ANÁLISE DA REGIÃO ENTRE AS RESSONÂNCIAS PRINCIPAIS.....	25
4.1 Equacionamento, definições e teoria de perturbação em múltiplas escalas de tempo...	26
4.2 Gráficos da análise da região entre as ressonâncias principais.....	30
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	34
REFERÊNCIAS.....	35

INTRODUÇÃO

A teoria de perturbação compreende todos os métodos matemáticos que são usados para encontrar uma solução aproximada para um problema que não pode ser resolvido exatamente. Um dos primeiros usos desta teoria foi para lidar com os problemas matemáticos sem solução exata da chamada mecânica celestial. Um exemplo desse uso é a solução de Newton para órbita da lua, que se move notavelmente diferente de uma simples elipse Kepleriana, devido à competição gravitacional que a Terra e o Sol exercem sobre a lua [1].

A equação de movimento deste trabalho de conclusão é dada por $\ddot{\theta}(w,t) = -A \cos(wt) \sin(\theta)$. Essa equação pode ser vista como um modelo simples para a dinâmica de partículas sujeitas a ondas estacionárias em fluidos ou plasmas [2]. Vamos utilizar diferentes técnicas perturbativas para analisar o movimento e em cada um desses casos, vamos procurar descrever a dinâmica em todo o espaço de fases [3] [4].

Um dos métodos básicos para a resolução de problemas dinâmicos não lineares é a utilização da teoria de perturbação a partir de soluções integráveis conhecidas. Dado isso, procuramos soluções integráveis para um sistema semelhante ao inicial (uma forma simplificada do problema original), expandindo em série de potências um pequeno parâmetro A pelo qual os dois sistemas diferem. Por exemplo, se o sistema semelhante ao inicial é levemente não linear, então o movimento linearizado pode ser obtido diretamente, e a perturbação não linear é encontrada como uma solução em série de potências. Está implícito nas afirmações acima que assumimos que as soluções integráveis para o sistema realmente existem, já que geralmente esse não é o caso para todos os problemas [3].

Em possíveis regiões perto de singularidades, ressonâncias ou regiões de caos que o sistema pode apresentar, teremos que analisá-lo com outra abordagem que complementa a teoria de perturbação. A utilização da análise numérica e mapeamento estroboscópico [5] fornecerão mais informações do sistema perto das ressonâncias que ele possui. Entretanto, na região onde os valores de velocidade da partícula são muito pequenos e próximos de zero, precisaremos utilizar uma forma mais elaborada da teoria de perturbação clássica, que podemos chamar de perturbação em múltiplas escalas de tempo, onde levaremos em conta não só o movimento e a perturbação, mas sim escalas de tempo lentas e rápidas para analisar o espaço de fases [13].

E no final de cada técnica perturbativa vamos comparar os resultados analíticos com as simulações numéricas da equação.

2 TEORIA DE PERTURBAÇÃO CLÁSSICA

A série que usamos formalmente, para nos aproximarmos da solução total θ , é

$$\theta = \theta_0 + A\theta_1 + A^2\theta_2 + A^3\theta_3 + \dots \quad (2.1)$$

Nesta série, o termo principal θ_0 (ou o termo de ordem zero) da série de potências é a solução exata conhecida do problema inicial integrável, sem a presença da perturbação. Enquanto os outros termos de ordens maiores ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$) representam o desvio na solução devido à perturbação aplicada no problema inicial integrável, e podem ser encontrados de forma iterativa. Para pequenos valores de A os termos de ordens maiores na série vão se tornando cada vez menores.

Logo, para obtermos uma solução perturbativa aproximada boa, basta mantermos os primeiros termos de ordens maiores.

Nesse trabalho, a equação na qual vamos aplicar a teoria de perturbação é

$$\ddot{\theta}(w, t) = -A \cos(wt) \sin(\theta), \quad (2.2)$$

onde $A \ll 1$ é a amplitude da perturbação, w sua frequência, $-\pi \leq \theta(t, w) \leq \pi$ uma variável angular, t o tempo e o ponto denota derivada com relação a t . Todas as variáveis serão adimensionais. Para simplificação dos cálculos, vamos considerar w igual a uma constante. A variável angular θ , que é a solução total da equação (2.2), será escrita na seguinte forma:

$$\theta = \theta(w, t) = \theta_0(w, t) + A\theta_1(w, t) + A^2\theta_2(w, t) + \dots \quad (2.3)$$

A derivada temporal da solução total é

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 + A\dot{\theta}_1 + A^2\dot{\theta}_2 + \dots \quad (2.4)$$

Derivando em relação ao tempo novamente, igualando a equação inicial e substituindo θ do lado direito, obtemos:

$$\ddot{\theta} = (\ddot{\theta}_0 + A\ddot{\theta}_1 + A^2\ddot{\theta}_2 + \dots) = -A \cos(\omega t) \sin(\theta_0 + A\theta_1 + A^2\theta_2 + \dots). \quad (2.5)$$

Com a finalidade de simplificar os cálculos, vamos desenvolver em série de Taylor [6] o seno do lado direito da equação (2.5):

$$\sin(\theta_0 + A\theta_1 + A^2\theta_2 + \dots) = \sin(\theta_0) + A\theta_1 \cos(\theta_0) + O[A]^2. \quad (2.6)$$

Para obtermos uma solução perturbativa razoavelmente boa, vamos manter os termos de ordem A^0 e A^1 , desconsiderando os termos de ordens superiores. Além disso, substituindo o seno em série de Taylor na equação (2.5), obtemos a seguinte forma:

$$\ddot{\theta}_0 + A\ddot{\theta}_1 = -A \cos(\omega t) [\sin(\theta_0) + A\theta_1 \cos(\theta_0)]. \quad (2.7)$$

Considerando somente os termos de ordem A^0 na equação (2.7) e integrando:

$$\ddot{\theta}_0(t) = 0, \quad (2.8)$$

$$\dot{\theta}_0(t) = p_0, \quad (2.9)$$

$$\theta_0(t) = p_0 t + \theta_0(0), \quad (2.10)$$

onde $\theta_0(0)$ é uma constante que escolhemos sem perda de generalidade como sendo zero, p_0 corresponde a velocidade da partícula e é uma quantidade conservada do movimento não perturbado. Lembrando que a equação (2.10) não é uma equação de uma reta, já que $\theta_0(t)$ é uma variável angular.

O tempo que a variável θ leva em dar uma revolução no movimento não perturbado é:

$$T_0 = \frac{2\pi}{p_0}, \quad (2.11)$$

onde T_0 é o período de revolução do sistema.

A frequência natural de oscilação do sistema será:

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = p_0. \quad (2.12)$$

Considerando só os termos de ordem A^1 da equação (2.7) e substituindo $\theta_0(t)$,

$$A\ddot{\theta}_1(t) = -A\cos(wt)\sin(\theta_0(t)) = -A\cos(wt)\sin(p_0t + \theta_0(0)), \quad (2.13)$$

$$\ddot{\theta}_1(t) = -\cos(wt)\sin(p_0t). \quad (2.14)$$

Vemos que a equação para $\ddot{\theta}_1(t)$ é facilmente resolvida, pois o termo da direita da igualdade em (2.14) só depende do tempo e não mais da variável θ como na equação (2.2). A integração foi feita utilizando o programa Mathematica, originalmente concebido por Stephen Wolfram e continuamente desenvolvido pela empresa Wolfram Research [7]. Este programa implementa um sistema de álgebra computacional para, entre outras aplicações, realizar integrais e derivadas menos triviais. O programa Mathematica também será utilizado para realizar todos os cálculos numéricos e gerar todos os gráficos do trabalho.

Utilizando o programa Mathematica para resolver a equação diferencial (2.14) com as seguintes condições iniciais que simplificam os cálculos $\theta_0(0) = 0$, $\theta_1(0) = 0$ e $\dot{\theta}_1(0) = 0$, obtemos:

$$\theta_1(t) = -\frac{A[p_0^3 t - p_0 t w^2 - p_0^2 \cos(wt) \sin(p_0 t) - w^2 \cos(wt) \sin(p_0 t) + 2p_0 w \cos(p_0 t) \sin(wt)]}{(p_0 - w)^2 (p_0 + w)^2}. \quad (2.15)$$

Simplificando a equação de $\theta_1(t)$:

$$\theta_1(t) = \frac{A[p_0 t (-p_0^2 + w^2) + (p_0^2 + w^2) \cos(wt) \sin(p_0 t) - 2p_0 w \cos(p_0 t) \sin(wt)]}{(p_0 - w)^2 (p_0 + w)^2}. \quad (2.16)$$

Derivando e simplificando novamente a solução $\theta_1(t)$ para obtermos $\dot{\theta}_1(t)$:

$$\dot{\theta}_1(t) = \frac{A[-p_0 + p_0 \cos(p_0 t) \cos(wt) + w \sin(p_0 t) \sin(wt)]}{(p_0 - w)(p_0 + w)}. \quad (2.17)$$

Com a solução $\theta_1(t)$ calculada analiticamente, poderemos ver o quão próximo da solução numérica $\theta(w,t)$ conseguimos nos aproximar utilizando a teoria de perturbação nesse sistema.

A idéia agora é utilizar novamente o programa Mathematica para encontrarmos a solução numérica da equação $\ddot{\theta}(w,t) = -A \cos(wt) \sin(\theta)$ e compararmos com a solução $\theta_1(t)$ calculada anteriormente através da teoria de perturbação.

A seguir, nas figuras 2.1, 2.2 e 2.3, nós observaremos gráficos comparativos utilizando a solução analítica (obtida através da Teoria de Perturbação até primeira ordem de A) e a solução numérica (obtida através do programa Mathematica), para assim observarmos se nossa aproximação é suficientemente boa. Nestas três figuras, as condições iniciais da solução numérica serão $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p_0$ para fins de simplificação do problema.

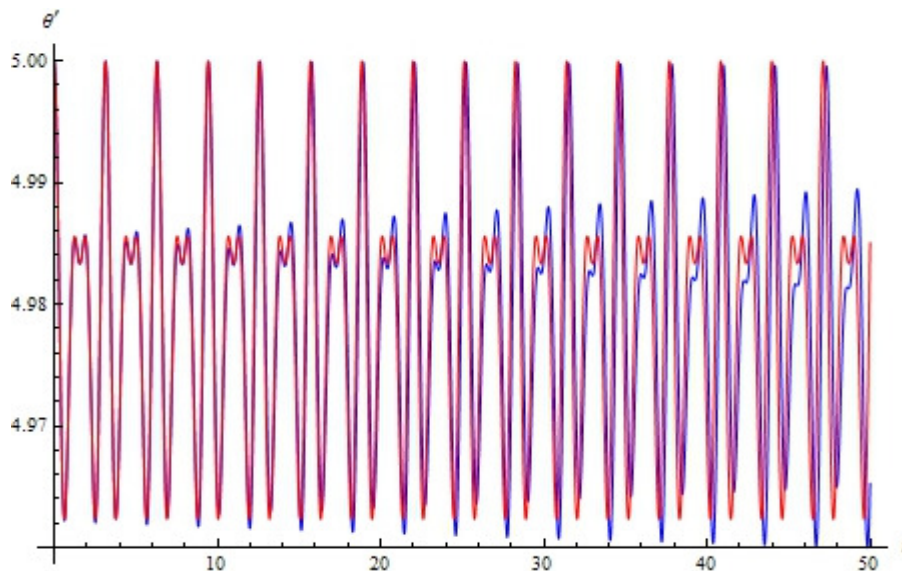


Figura 2.1 – Gráfico velocidade ($\theta' = \dot{\theta}$) em função do tempo. Os parâmetros $A = 0.1$, $p_0 = 5$ e $w = 1$ foram utilizados nas soluções com a finalidade de exemplificar. Solução numérica em cor azul e a solução analítica em cor vermelha.

Na figura 2.1 vemos que a aplicação da teoria de perturbação descreve bem a solução numérica para valores de $A \ll 1$. Termos de ordens superiores na série são necessários para maior precisão, lembrando que só consideramos termos de ordem zero e primeira ordem.

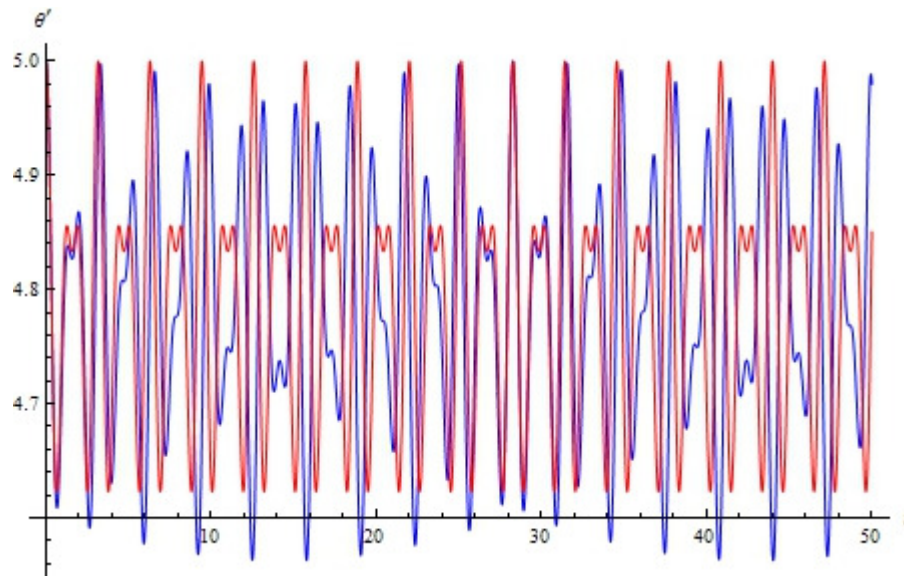


Figura 2.2 - Gráfico velocidade ($\theta' = \dot{\theta}$) em função do tempo. Os parâmetros $A = 1$, $p_0 = 5$ e $w = 1$ foram utilizados nas soluções com a finalidade de exemplificar. Solução numérica em cor azul e a solução analítica em cor vermelha.

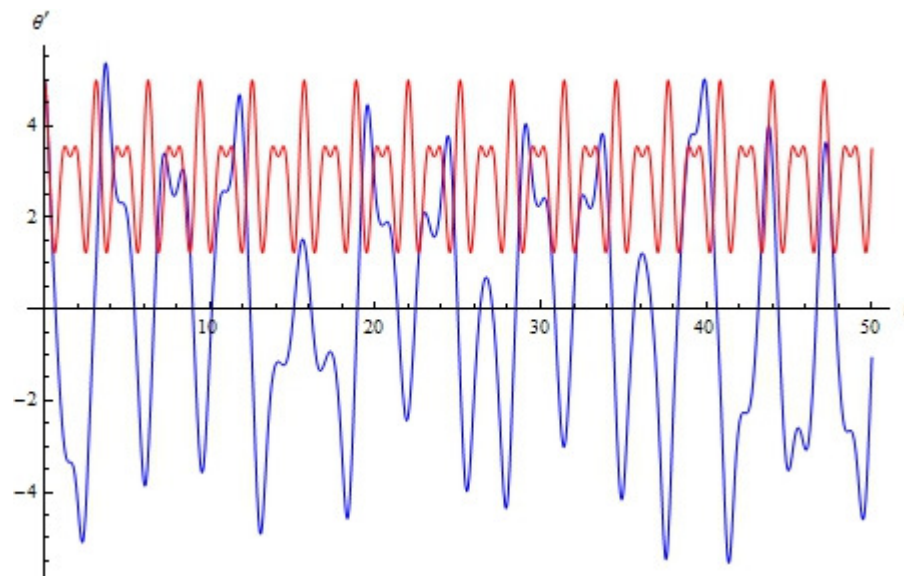


Figura 2.3 - Gráfico velocidade ($\theta' = \dot{\theta}$) em função do tempo. Os parâmetros $A = 10$, $p_0 = 5$ e $w = 1$ utilizados nas soluções com a finalidade de exemplificar. Solução numérica em cor azul e a solução analítica em cor vermelha.

Podemos notar na figura 2.3 que para valores de $A \gg 1$ as soluções são muito diferentes, o que indica realmente que a teoria de perturbação só é válida para pequenos valores do parâmetro A .

Comparando as figuras 2.1, 2.2 e 2.3 podemos observar que dependendo do valor do parâmetro A nos aproximamos ou nos afastamos da solução numérica. Quanto menor o valor de A , mais nos aproximamos da solução numérica.

O que confirma o fato de a Teoria de Perturbação só funcionar para pequenos valores do parâmetro A . Isto se deve ao fato de que os termos de ordens superiores na expansão em série de potências só convergem para algum valor se o parâmetro A for pequeno, caso contrario a expansão em série pode tender ao infinito e divergir da solução real que queremos.

Às vezes é necessário considerarmos termos de ordens superiores (os termos anteriormente desprezados $O[A]^2$) já que, em alguns casos, os termos das primeiras ordens podem ser zero. Também é necessário considerarmos mais termos se desejarmos aumentar a precisão da solução analítica.

Contudo a teoria de perturbação aplicada dessa forma nem sempre é capaz de descrever a solução total do problema em toda a região do espaço de fases do sistema. Ela funciona bem para estes limites utilizados anteriormente e depende do sistema em questão e dos valores do parâmetro A .

Além disso, quando voltamos à equação:

$$\theta_1(t) = \frac{A[p_0 t (-p_0^2 + w^2) + (p_0^2 + w^2) \cos(wt) \sin(p_0 t) - 2p_0 w \cos(p_0 t) \sin(wt)]}{(p_0 - w)^2 (p_0 + w)^2}, \quad (2.18)$$

podemos ver que no denominador temos a presença de duas singularidades que aparecem quando $p_0 = w$ e $p_0 = -w$, resultando em uma indeterminação para $\theta_1(t)$ que tende ao infinito conforme p_0 se aproxima de $|w|$. Quando isso ocorre, essa forma de aplicação da teoria de perturbação não consegue descrever totalmente o comportamento desse sistema.

A seguir, nas figuras 2.4 e 2.5 nós observaremos gráficos do tipo velocidade em função do tempo que mostram o que acontece quando utilizamos valores de p_0 próximos de $|w|$ na equação (2.18).

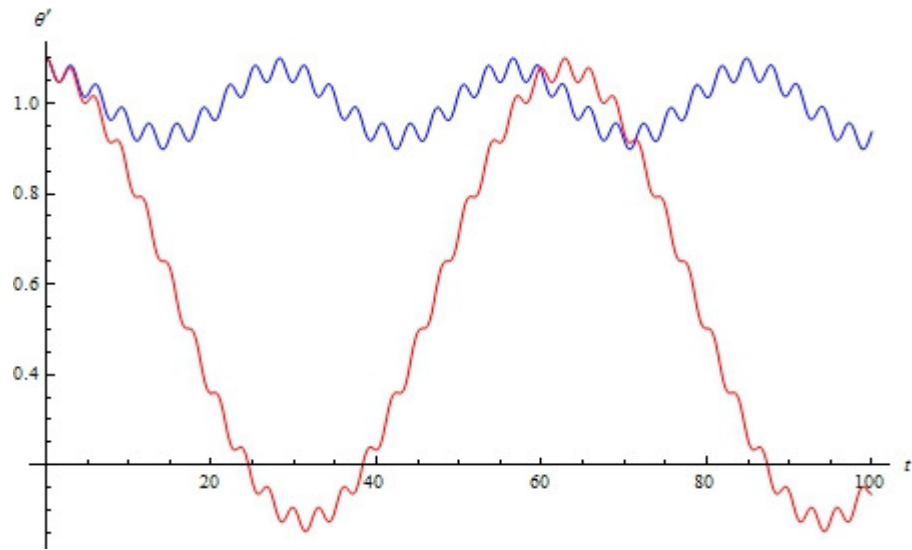


Figura 2.4 – Velocidade em função do tempo. Os parâmetros utilizados nas soluções são $A = 0.1$, $p_0 = 1.1$ e $w = 1$. As condições iniciais são $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p_0$. Solução numérica em cor azul e a solução analítica aproximada em cor vermelha.

Na figura 2.4, fica claro que conforme p_0 se aproxima de $|w|$ a teoria de perturbação não consegue descrever com precisão a solução numérica.

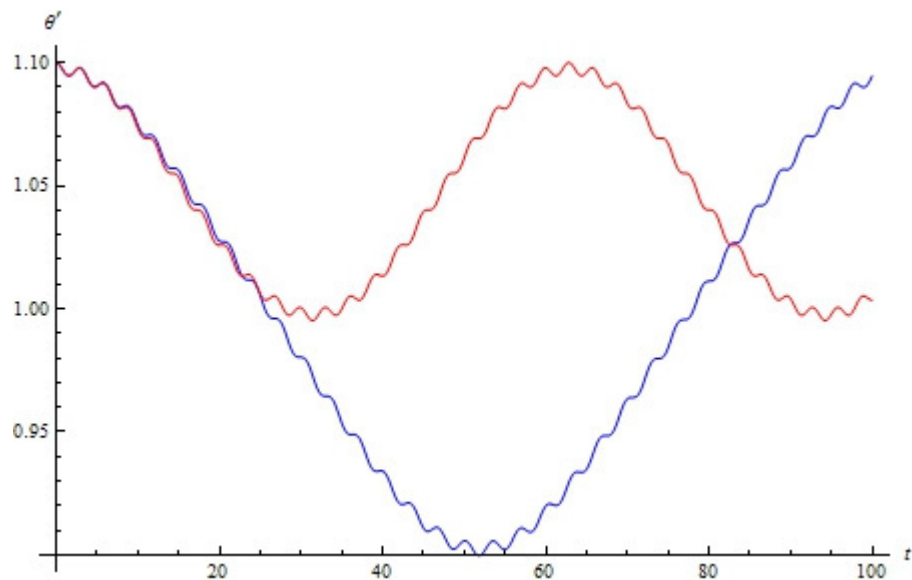


Figura 2.5 – Velocidade em função do tempo. Os parâmetros utilizados nas soluções são $A = 0.01$, $p_0 = 1.1$ e $w = 1$. As condições iniciais da solução são $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p_0$. Solução numérica em cor azul e a solução analítica aproximada em cor vermelha.

E mesmo reduzindo o valor A para obtermos maior precisão com a teoria de perturbação, na figura 2.5 vemos que quando p_0 se aproxima de $|w|$, reduzir o valor em módulo de A não modifica a conclusão anterior.

Logo, em possíveis regiões perto de singularidades, ressonâncias ou regiões de caos que o sistema pode apresentar, teremos que analisá-lo com outra abordagem que complementa a teoria de perturbação.

3 TEORIA DE PERTURBAÇÃO RESSONANTE E MAPEAMENTO ESTROBOSCÓPICO

No capítulo anterior, obtivemos resultados e gráficos para a Teoria de Perturbação Clássica aplicada no nosso sistema de equação $\ddot{\theta}(w, t) = -A \cos(wt) \sin(\theta)$. Fomos capazes de ver que a teoria por si só não é capaz de descrever todo o sistema, devido a limitações que ela possui e possíveis singularidades que o sistema apresenta.

Porém, para podermos obter informações a respeito do nosso sistema periódico e analisar as singularidades e ressonâncias, vamos utilizar um recurso conhecido como Mapeamento Estroboscópico, que é um caso particular do Mapeamento Poincaré.

O Mapeamento Poincaré é um método utilizado para investigar características determinísticas de séries temporais, funções periódicas e sistemas dinâmicos [5] [8].

Já o Mapeamento Estroboscópico que vamos utilizar é calculado por meio de amostragem do gráfico do espaço de fases do sistema, utilizando intervalos de tempo constantes. É como se tirássemos fotos do espaço de fases conforme ele evolui, mantendo o intervalo de tempo entre fotos constante [5].

Na figura 3.1 veremos um exemplo de como realizar o mapeamento estroboscópico a partir do gráfico do espaço de fases gerado pela solução numérica da equação $\ddot{\theta}(w, t) = -A \cos(wt) \sin(\theta)$.

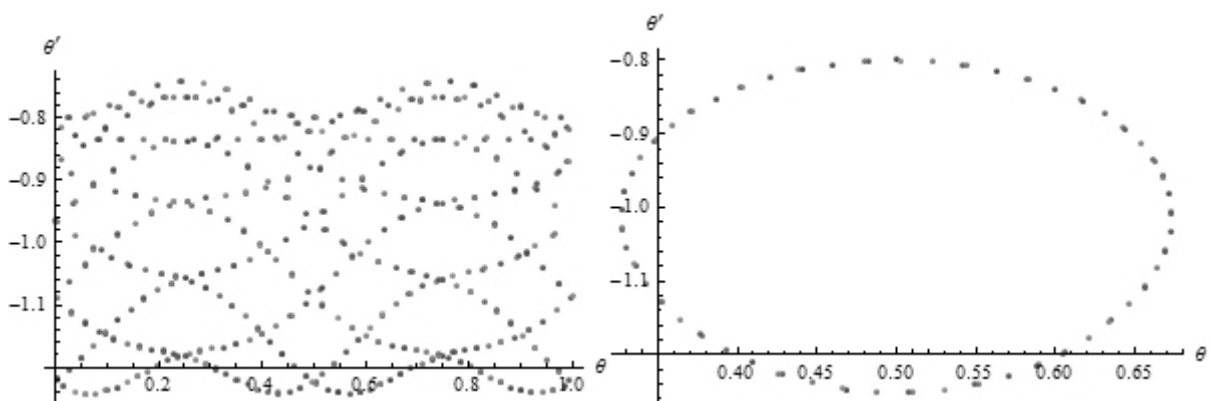


Figura 3.1 - O gráfico da esquerda é o espaço de fases da solução numérica $\theta(t)$ para as condições iniciais $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = p_0$ e para as constantes $A = 0.1$, $p_0 = -0.8$ e $w = 1$, com $0 \leq t \leq 500$. Os intervalos de tempo entre cada ponto gerado são de $\Delta t = 1$. Já à direita, temos o mesmo espaço de fases da mesma equação, com as mesmas condições iniciais e constantes, mas utilizando intervalos de tempo entre cada ponto gerado de tamanho $\Delta t = \frac{2\pi}{w}$ para o mapeamento estroboscópico.

A seguir, veremos gráficos do mapeamento estroboscópico do espaço de fases da mesma equação, mas vamos modificar algumas constantes e realizar comentários de como o mapeamento ajuda na descrição do sistema. Os intervalos de tempo do mapeamento estroboscópico serão, em todos os gráficos, de tamanho $\Delta t = \frac{2\pi}{w}$. Só ressaltando que os intervalos entre os pontos dos gráficos se devem somente ao curto intervalo de tempo de integração t utilizado na criação do gráfico. Ou seja, maior intervalo de t , mais pontos são gerados e menos intervalos em branco teríamos. Cada valor de p_0 escolhido é visto como uma das linhas horizontais pontuais do gráfico. Quando escolhemos valores de p_0 próximos de $|w|$ observamos elipses que representam as ressonâncias do sistema.

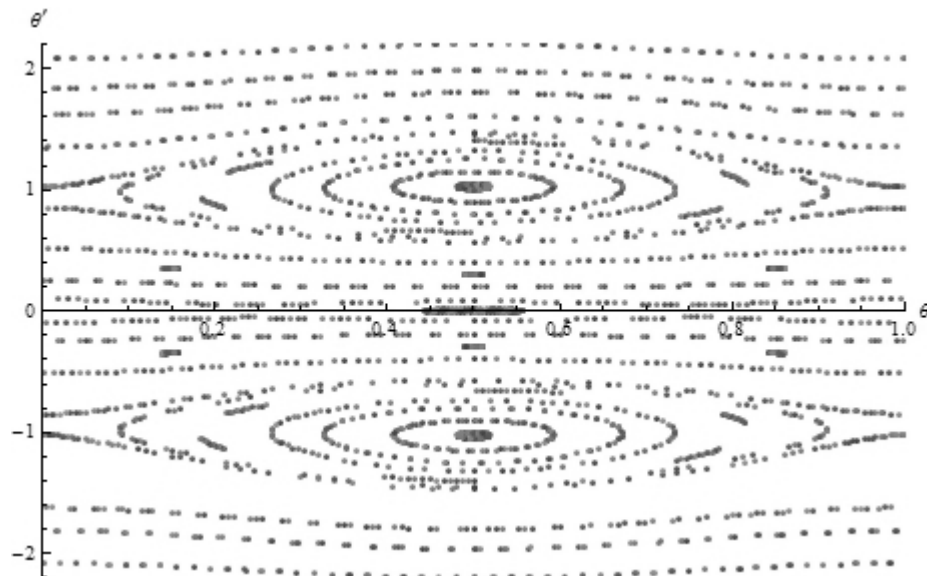


Figura 3.2 – Espaço de fases da equação $Módulo[\theta(t) + \pi, 2\pi]/2/\pi$, o que faz que o gráfico vá de 0 a 1 no eixo θ ao invés de $-\pi$ até π . Com $0 \leq t \leq 500$, constantes $A = 0.1$, $w = 1$, $-2.5 \leq p_0 \leq 2.5$ e condições iniciais $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = p_0$.

Na figura 3.2, onde $A = 0.1$ podemos ver que o mapeamento estroboscópico revela duas ressonâncias bem distintas. Também observamos librações¹, uma possível separatriz e as rotações do sistema. As duas ressonâncias ocorrem para valores de $p_0 = \pm w$, como esperado da teoria de perturbação anterior.

¹ Do latim *librare*, que significa "balançar" [9].

No caso de $A = 0.1$, o sistema é quase integrável e passível de ser analisado, vamos utilizar ele para discutir como tratamos essas ressonâncias matematicamente na seção 3.1, já que só temos técnicas conhecidas para sistemas integráveis.

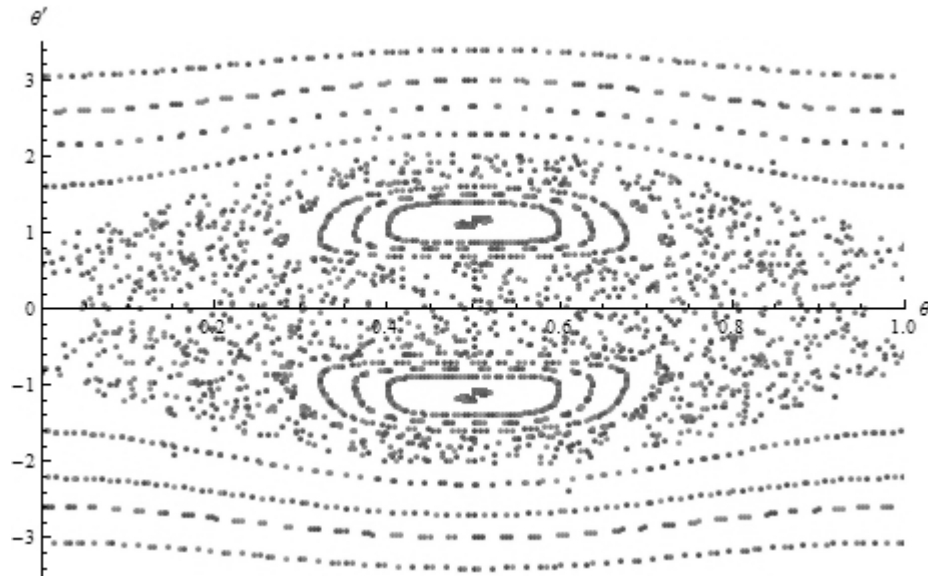


Figura 3.3 – Espaço de fases da equação $Módulo[\theta(t) + \pi, 2\pi]/2/\pi$, com $0 \leq t \leq 700$, constantes $A = 0.5$, $w = 1$, $-3.5 \leq p_0 \leq 3.5$ e condições iniciais $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = p_0$.

Na figura 3.3 já podemos observar o aparecimento de algumas librações e o que parece ser o surgimento de alguma ressonância não bem definida. Podemos notar a presença de caos no sistema entre as librações e as rotações.

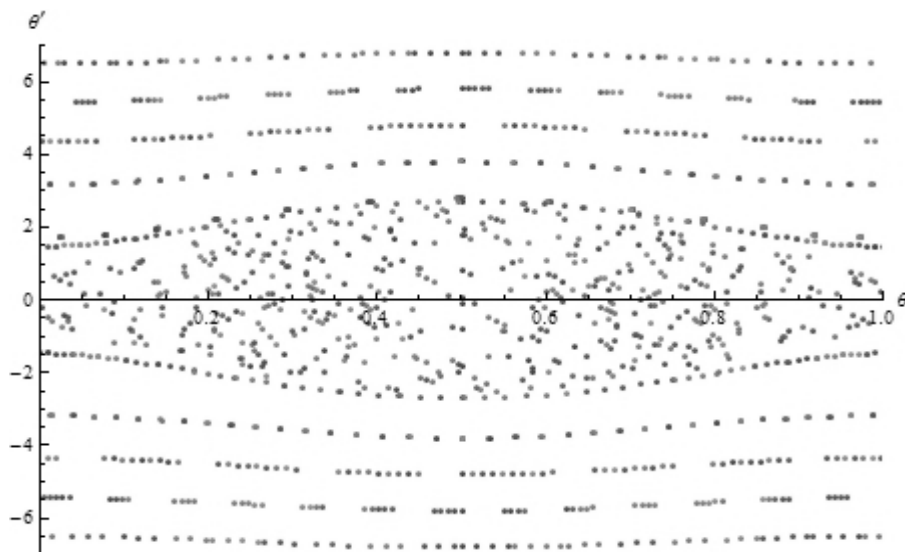


Figura 3.4 – Espaço de fases da equação $Módulo[\theta(t) + \pi, 2\pi]/2/\pi$. Com $0 \leq t \leq 500$, constantes $A = 1$, $w = 1$, $-6.8 \leq p_0 \leq 6.8$ e condições iniciais $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = p_0$.

Podemos notar na figura 3.4 que para valores de $A = 1$ temos a presença de caos no espaço de fases, um indicativo de que estamos tendo alguma sobreposição de ressonâncias no sistema, que é não-integrável nesse caso. Para grandes valores de p_0 observamos rotações e o sistema pode ser analisado com teoria de perturbação clássica.

3.1 Tratamento das ressonâncias

Para tratarmos as ressonâncias que aparecem na figura 3.2, iremos analisar melhor a equação $\ddot{\theta}(w, t) = -A \cos(wt) \sin(\theta)$ e vamos reescrevê-la de outra forma, onde as ressonâncias possam ficar aparentes na equação. Se reescrevermos o produto abaixo [6]:

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)], \quad (3.1.1)$$

obtemos:

$$\ddot{\theta} = -A \cos(wt) \sin(\theta) = -\frac{A}{2} [\sin(\theta - wt) + \sin(\theta + wt)]. \quad (3.1.2)$$

Nessa nova forma, a equação (3.1.2) esta demonstrando as duas ressonâncias através dos dois senos com argumentos distintos. Para verificar se é isso que realmente está acontecendo, podemos rodar novamente a simulação numérica utilizando só uma das “metades” da equação (3.1.2):

$$\ddot{\theta}_{up}(t) = -\frac{A}{2} \sin(\theta - wt). \quad (3.1.3)$$

E assim obtemos o seguinte gráfico:

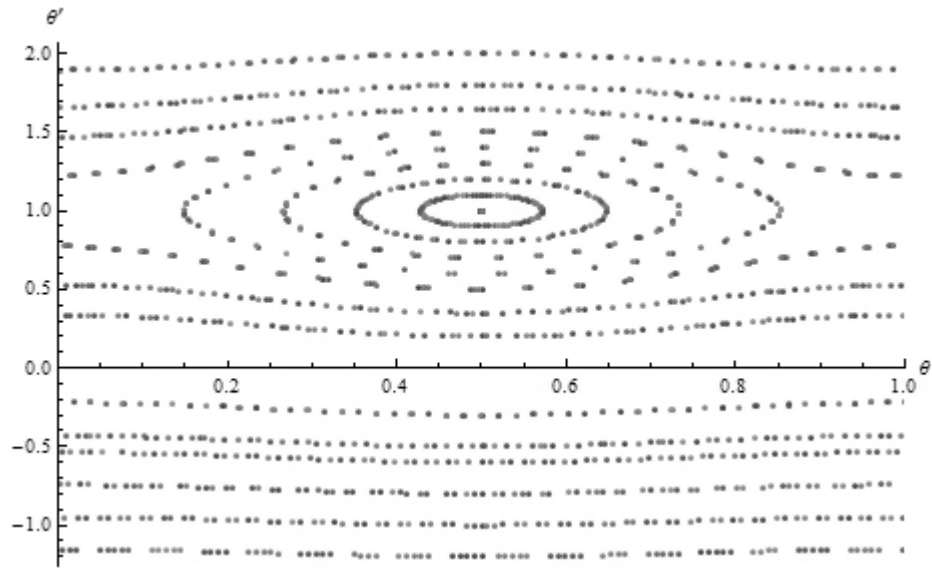


Figura 3.1.1 – Mapeamento estroboscópico da equação $Módulo[\theta_{up}(t) + \pi, 2\pi]/2/\pi$ com condições iniciais $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = p_0$ e constantes $A = 0.1$, $w = 1$, $-2 \leq p_0 \leq 2$ e $0 \leq t \leq 500$.

Ou seja, realmente cada uma das “metades” ou cada um dos senos na equação (3.1.2) representam cada ressonância que o sistema apresenta. E vemos que $\ddot{\theta}_{up}(t)$ esta descrevendo, a parte superior positiva do gráfico.

Sendo assim, podemos descrever as ressonâncias do sistema com essas equações:

$$\ddot{\theta}(w, t) = -\frac{A}{2}[\sin(\theta - wt) + \sin(\theta + wt)] = \ddot{\theta}_{up}(t) + \ddot{\theta}_{down}(t), \quad (3.1.4)$$

$$\ddot{\theta}_{up}(t) = -\frac{A}{2}\sin(\theta - wt), \quad (3.1.5)$$

$$\ddot{\theta}_{down}(t) = -\frac{A}{2}\sin(\theta + wt). \quad (3.1.6)$$

As equações (3.1.5) e (3.1.6) representam equações de pêndulos integráveis e serão posteriormente comparadas com a solução numérica de $\theta(w, t)$.

3.2 Comparação entre simulação numérica e o cálculo analítico

Podemos ver também que se reescrevermos o argumento dos senos nas equações (3.1.5) e (3.1.6) como sendo:

$$\hat{\theta}(t) = \theta(t) - wt. \quad (3.2.1)$$

Derivando duas vezes, em relação ao tempo, nos dois lados da equação (3.2.1):

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \dot{\theta}(t) - w, \quad (3.2.2)$$

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) + w, \quad (3.2.3)$$

$$\ddot{\hat{\theta}}(t) = \ddot{\theta}(t). \quad (3.2.4)$$

Assim podemos reescrever tanto a equação (3.1.5) como a (3.1.6) na forma:

$$\ddot{\hat{\theta}}(t) = -\frac{A}{2} \sin(\hat{\theta}). \quad (3.2.5)$$

Com essa equação podemos encontrar a expressão para a energia deste sistema que é conservativo de acordo com o Teorema de Noether [15]. Lembrando que para sistemas envolvendo forças conservativas podemos utilizar a segunda lei de Newton [10] e a equação de conservação de energia [10], podemos integrar a equação (3.2.5) para encontrarmos a energia potencial e ficamos com:

$$E = T + U = \frac{p^2}{2} - \frac{A}{2} \cos(\hat{\theta}). \quad (3.2.6)$$

Com essa expressão para a energia, podemos encontrar os contornos de energia que o sistema apresenta e compará-los com a solução numérica. Novamente vamos utilizar o mapeamento estroboscópico, com intervalo de tempo constante de $\Delta t = \frac{2\pi}{w}$.

Teremos que utilizar a substituição de variável $\hat{\theta}(t) = \theta(t) - wt$ na equação (3.2.6) para a criação dos contornos de energia no espaço de fases das figuras 3.2.1 e 3.2.2.

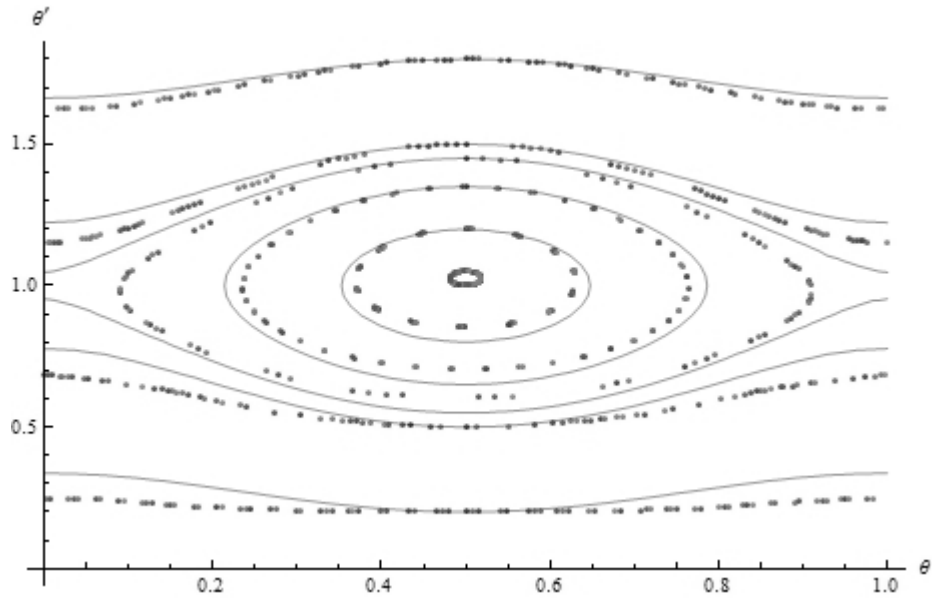


Figura 3.2.1 – Espaço de fases contendo alguns contornos de energia da equação $\frac{(p-w)^2}{2} - \frac{A}{2} \cos(2\pi\theta - \pi)$, com as constantes $A = 0.1$, $w = 1$, $0 \leq p_0 \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 1$ e $0 \leq t \leq 500$. Os contornos de energia são as linhas cinzas contínuas. Os pontos correspondem ao mapeamento estroboscópico da simulação numérica da equação $Módulo[\theta(t) + \pi, 2\pi] / 2 / \pi$ para as mesmas constantes e intervalos, com as condições de contorno $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p_0$.

Podemos ver então que o cálculo dos contornos de energia descreve a solução numérica e a ressonância do sistema.

Na figura 3.2.2, veremos as duas ressonâncias do sistema. Comparando novamente a solução numérica com os contornos de energia calculados.

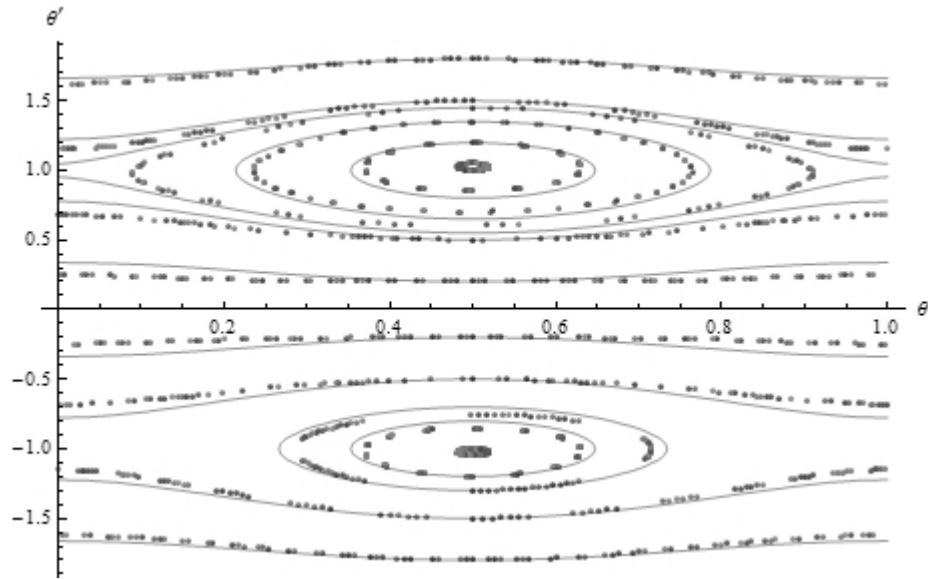


Figura 3.2.2 - Espaço de fases contendo alguns contornos de energia da equação $\frac{(p-w)^2}{2} - \frac{A}{2} \cos(2\pi\theta - \pi)$ na parte superior (valores de θ' positivos) e $\frac{(p+w)^2}{2} - \frac{A}{2} \cos(2\pi\theta - \pi)$ na parte inferior. Com os seguintes valores das constantes $A = 0.1$, $w = 1$, $-2 \leq p_0 \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 1$ e $0 \leq t \leq 500$. Os contornos de energia são as linhas cinzas contínuas. Os pontos correspondem ao mapeamento estroboscópico da simulação numérica da equação $\text{Módulo}[\theta(t) + \pi, 2\pi] / 2 / \pi$.

Portanto, aliando a Teoria de Perturbação Ressonante com o tratamento analítico na região próxima à ressonância discutido nesta seção, podemos descrever as diferentes regiões do espaço de fases da equação $\ddot{\theta}(w, t) = -A \cos(wt) \sin(\theta)$.

Mas e quanto à região central em destaque no gráfico abaixo?

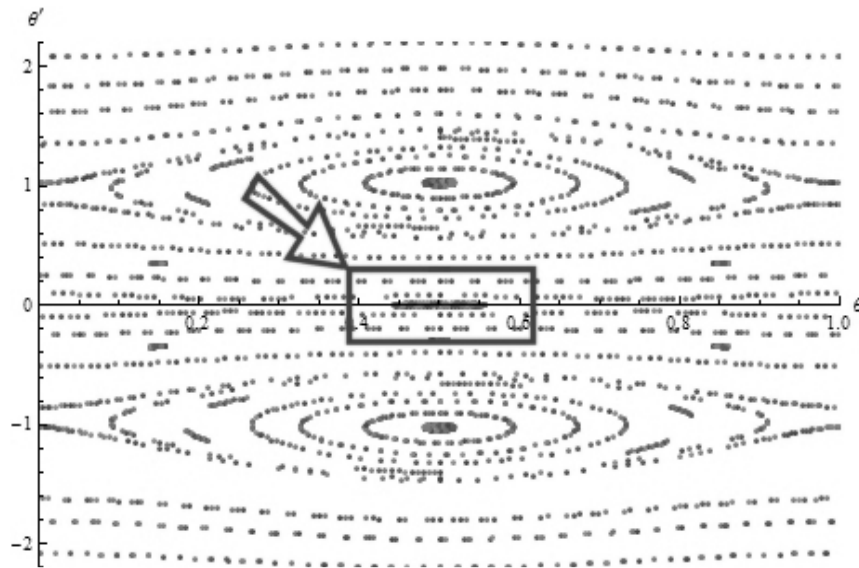


Figura 3.2.3 - Espaço de fases da equação $Módulo[\theta(t) + \pi, 2\pi] / 2 / \pi$, em destaque a região que não foi descrita por nenhum dos métodos anteriormente usados. Constantes $A = 0.1$, $w = 1$, $-2.5 \leq p_0 \leq 2.5$, $0 \leq \theta \leq 1$ e $0 \leq t \leq 500$.

Na próxima seção vamos analisar essa região que depende das condições iniciais do sistema, para valores de A pequeno. Essa região, que parece ser outra ressonância, não foi descrita pelos métodos e formalismos anteriores.

De onde será que surge essa ressonância? Além disso, na próxima seção, vamos ver que tipo de método pode ser utilizado para tentar descrever esse comportamento.

4 ANÁLISE DA REGIÃO ENTRE AS RESSONÂNCIAS PRINCIPAIS

Para analisarmos essa região entre as ressonâncias principais, vamos voltar para a equação inicial do trabalho de conclusão e tentar compará-la com algo que conhecemos e que seja semelhante ao nosso problema. O gráfico a seguir representa o “zoom” do destaque da figura 3.2.3.

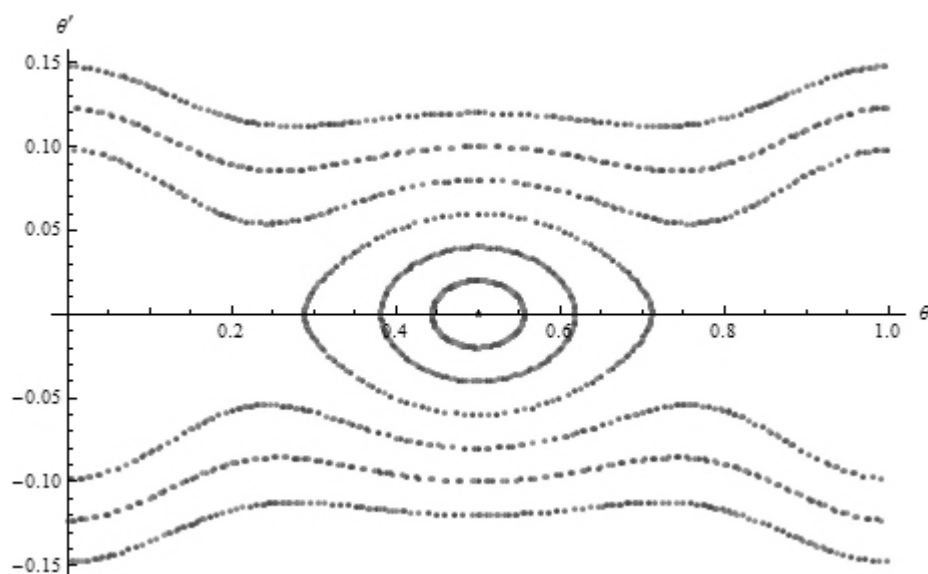


Figura 4.1 – Espaço de fases mapeado estroboscópicamente da equação $Módulo[\theta(t) + \pi, 2\pi]/2/\pi$. Constantes $A = 0.1$, $w = 1$. Intervalos $-0.15 \leq p_0 \leq 0.15$ e $0 \leq t \leq 1000$.

Olhando a Figura 4.1, podemos notar que estamos perto de $p_0 \approx 0$, no início do movimento da partícula. Em $p_0 = 0$ a partícula está parada de fato, mas bem perto de $p_0 \approx 0$ a partícula está se movendo bem lentamente. E, no nosso caso, estamos perturbando ela com uma amplitude pequena ($A = 0.1$) e uma frequência muito alta ($w = 1$) em relação à frequência natural de oscilação do sistema. Essa situação lembra o conhecido problema do pêndulo de Kapitza [11].

O pêndulo de Kapitza é um pêndulo rígido no qual o ponto pivô dele vibra na direção vertical para cima e para baixo. Ele foi nomeado em homenagem ao físico vencedor do prêmio Nobel Pyotr Kapitza, que em 1951 desenvolveu a teoria que, com sucesso, explica algumas de suas propriedades incomuns [11].

A característica única que este pêndulo possui é que a sua suspensão vibratória vertical pode fazer o pêndulo balançar de modo estável numa posição invertida.

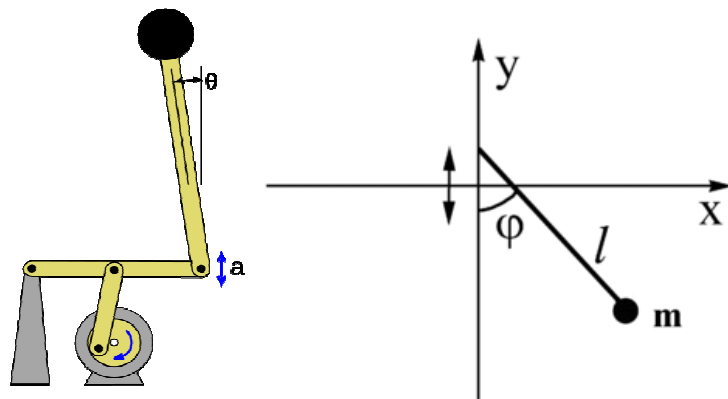


Figura 4.2 – À esquerda vemos o desenho de como um pêndulo de Kapitza pode ser construído. À direita vemos um esquema simplificado do pêndulo de Kapitza [12].

O pêndulo foi primeiramente descrito por A. Stephenson em 1908, que descobriu que a posição vertical superior do pêndulo poderia ser estável quando a frequência de movimento vibracional é muito rápida. Pyotr Kapitza foi o primeiro a analisá-lo em 1951 [11].

4.1 Equacionamento, definições e teoria de perturbação em múltiplas escalas de tempo

Agora que encontramos algo que nos dá alguma informação a respeito do nosso problema, podemos voltar a nossa equação $\ddot{\theta}(w,t) = -A \sin(\theta) \cos(wt)$ e utilizar a análise de Pyotr Kapitza.

Vamos supor então que $w \gg \dot{\theta}$ e que o tipo de solução que estamos procurando para o nosso sistema é composta por duas partes, uma parte que dá conta da frequência lenta (ou dinâmica lenta) de movimento do sistema e outra parte que dá conta da frequência rápida (ou dinâmica rápida) imposta no sistema. Esquematizando grosseiramente essas suposições abaixo para um melhor entendimento:

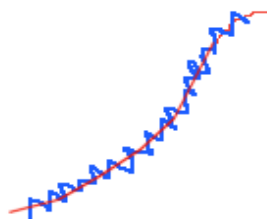


Figura 4.1.1 – Esquema grosseiro para representar o movimento do sistema lento (cor vermelha) e a perturbação com pequena amplitude, mas com alta frequência (cor azul).

Podemos equacionar matematicamente esse esquema da figura 4.1.1 da seguinte forma:

$$\theta = \theta_0(t) + \delta(t), \quad (4.1.1)$$

onde:

$\theta_0(t)$ representa o movimento médio lento do sistema, dependente do tempo e que ao longo de um período $\frac{1}{w}$, $\theta_0(t)$ quase não varia, dinâmica lenta;

$\delta(t)$ representa uma perturbação com pequena amplitude e de alta frequência, dependente do tempo, dinâmica rápida.

Com isso estamos querendo dizer que a nossa “nova teoria de perturbação” não é só supor que $\theta_0(t)$ é maior que a perturbação $\delta(t)$, mas também supor que $\theta_0(t)$ está numa escala de tempo lenta e $\delta(t)$ está numa escala de tempo rápida. Isso nos dá duas escalas de tempo bem distintas. É como se fosse uma “Teoria de Perturbação em Múltiplas Escalas de Tempo” [13], onde o termo pequeno é rápido (com alta frequência e pequena amplitude) e o termo grande é lento (baixa frequência) e pouco varia.

Então derivando temporalmente a equação (4.1.1) e igualando a equação $\ddot{\theta}(w,t) = -A \sin(\theta) \cos(wt)$, temos:

$$\ddot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0(t) + \ddot{\delta}(t) = -A \sin(\theta_0 + \delta) \cos(wt). \quad (4.1.2)$$

Vamos expandir o seno da equação (4.1.3) em série de Taylor. Utilizando apenas os termos de ordem zero e de primeira ordem da expansão, ficamos com:

$$\ddot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0(t) + \ddot{\delta}(t) = -A[\sin(\theta_0) + \delta \cos(\theta_0)] \cos(wt). \quad (4.1.3)$$

Realizando as multiplicações,

$$\ddot{\theta}_0(t) + \ddot{\delta}(t) = -A \sin(\theta_0) \cos(wt) - A \cos(\theta_0) \delta \cos(wt). \quad (4.1.4)$$

Em primeira ordem, analisando a dinâmica rápida, podemos ver que o segundo termo da equação (4.1.4) $[-A \cos(\theta_0) \delta \cos(\omega t)]$ vai ser muito pequeno, já que o valor de A é pequeno ($A = 0.1$) e o valor de δ também é pequeno (lembrando que δ é uma perturbação bem pequena com frequência alta). Como o primeiro termo $[-A \sin(\theta_0) \cos(\omega t)]$ é grande em relação ao segundo e, na dinâmica rápida, consideramos θ_0 como uma constante, podemos desprezar o segundo termo da equação (4.1.4). Então ficamos com:

$$\ddot{\delta}(t) = -A \sin(\theta_0) \cos(\omega t). \quad (4.1.5)$$

Integrando na variável temporal:

$$\dot{\delta}(t) = -\frac{A}{\omega} \sin(\theta_0) \sin(\omega t). \quad (4.1.6)$$

Integrando novamente:

$$\delta(t) = \frac{A}{\omega^2} \sin(\theta_0) \cos(\omega t). \quad (4.1.7)$$

Agora utilizamos essa solução em primeira ordem para $\delta(t)$ e substituímos na equação (4.1.4), obtendo:

$$\ddot{\theta}_0(t) + \ddot{\delta}(t) = -A \sin(\theta_0) \cos(\omega t) - \frac{A^2}{\omega^2} \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) \cos^2(\omega t). \quad (4.1.8)$$

Com isso, para determinarmos a dinâmica lenta do sistema, vamos fazer uma média temporal nos dois lados da equação (4.1.8):

$$\overline{\ddot{\theta}_0(t) + \ddot{\delta}(t)} = -A \sin(\theta_0) \cos(\omega t) - \frac{A^2}{\omega^2} \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) \cos^2(\omega t). \quad (4.1.9)$$

Sendo que essa média temporal na escala rápida é definida por:

$$\overline{\ddot{\theta}_0(t) + \ddot{\delta}(t)} = w \int_0^{\frac{1}{w}} (\ddot{\theta}_0(t) + \ddot{\delta}(t)) dt. \quad (4.1.10)$$

Aqui já podemos ver que a média temporal do $\cos(wt)$ no primeiro termo da equação (4.1.9), do lado direito da igualdade é nula. Isso se deve a média temporal do $\cos(wt)$ num período de oscilação ser zero. Porém, o segundo termo, do lado direito da igualdade, da equação (4.1.9), é proporcional a $\cos^2(wt)$ e esse não possui média nula.

Então, realizando a média temporal, ficamos com essa equação abaixo para a dinâmica lenta:

$$\ddot{\theta}_0(t) = -\frac{A^2}{2w^2} \cos(\theta_0) \sin(\theta_0). \quad (4.1.11)$$

Reescrevendo a equação (4.1.11) utilizando uma identidade trigonométrica obtemos:

$$\ddot{\theta}_0(t) = -\frac{A^2}{4w^2} \sin(2\theta_0). \quad (4.1.12)$$

Agora para podermos escrever os contornos de energia da equação (4.1.12), utilizamos novamente a segunda lei de Newton e a conservação de energia do sistema [10]:

$$E = T + U. \quad (4.1.13)$$

E obtemos através da integração da equação (4.1.12):

$$U(\theta_0) = \frac{A^2}{8w} \cos(2\theta_0). \quad (4.1.14)$$

Substituindo a equação (4.1.14) na equação (4.1.13), obtemos a energia:

$$E = \frac{p^2}{2} + \frac{A^2}{8w^2} \cos(2\theta_0). \quad (4.1.15)$$

Podemos notar que essa energia é uma quantidade conservada só nessa dinâmica lenta. Portanto, essa energia é um invariante adiabático² para a dinâmica do θ_0 , desprezando a dinâmica rápida do $\delta(t)$. Já na dinâmica rápida a energia não é conservada. A trajetória real da partícula leva em conta as oscilações da dinâmica rápida junto. Lembrando que a equação para $\ddot{\theta}(t)$ é

$$\ddot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0(t) + \ddot{\delta}(t) = -A \sin(\theta_0) \cos(wt) - \frac{A^2}{w^2} \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) \cos^2(wt). \quad (4.1.16)$$

Mas antes de podermos fazer as comparações dos contornos de energia com a simulação numérica da equação $\ddot{\theta}(w,t) = -A \sin(\theta) \cos(wt)$, precisamos gerar os gráficos correspondentes à região entre as ressonâncias da figura 3.2.3.

4.2 Gráficos da análise da região entre as ressonâncias principais

Nessa seção, vamos primeiro gerar o gráfico com somente os contornos de energia encontrados na equação (4.1.15). Posteriormente vamos comparar os gráficos da solução numérica da equação $\ddot{\theta}(w,t) = -A \sin(\theta) \cos(wt)$ com estes contornos de energia, para verificarmos se nossa Teoria de Perturbação em Múltiplas Escalas de Tempo está descrevendo o sistema.

Na figura 4.2.1, observamos os contornos de energia no espaço de fases da equação (4.1.15). Já podemos notar que para descrever toda a região, precisaremos de duas condições iniciais representadas pelos valores de $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$. Essas condições iniciais representam a posição inicial do pêndulo, por exemplo, quando o soltamos para oscilar.

² Invariante Adiabático é uma propriedade do movimento que é conservada na precisão exponencial no pequeno parâmetro que representa a típica taxa de mudança das propriedades totais de um corpo[14].

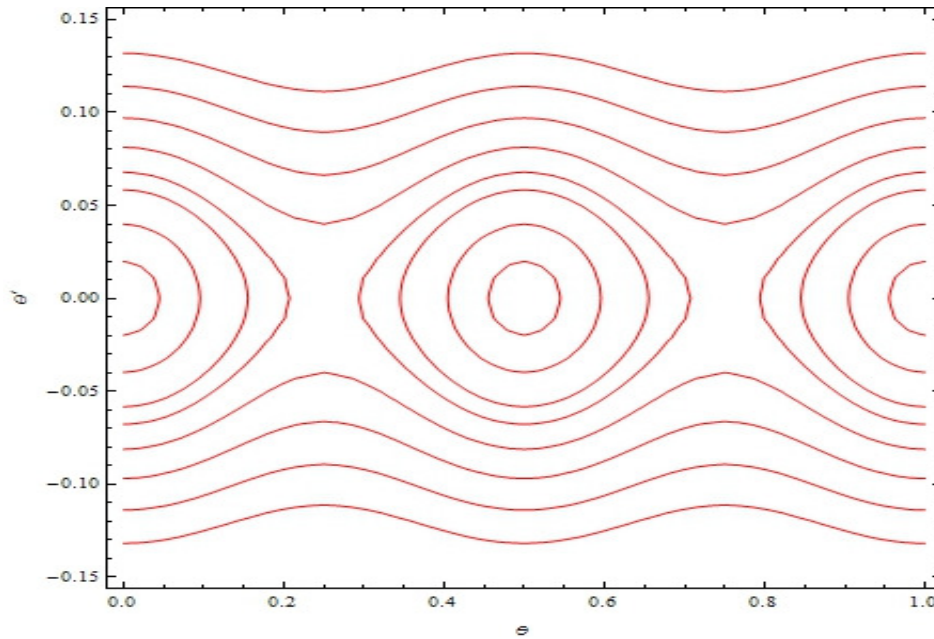


Figura 4.2.1 – Contornos de energia da equação $E = \frac{p^2}{2} + \frac{A^2}{8w^2} \cos(2\theta_0)$, $-0.12 \leq p_0 \leq 0.12$, com $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$.

Na figura 4.2.2, vemos o gráfico da solução numérica para a mesma região da figura 4.2.1. Só para destacar que a solução numérica $\theta(t)$ também depende de suas condições iniciais para ser comparada com os contornos de energia da figura 4.2.1.

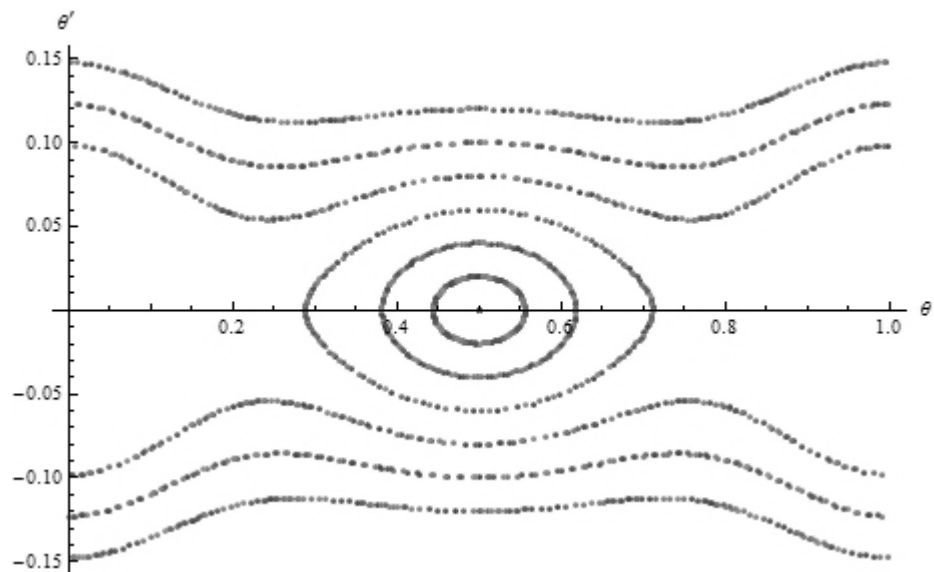


Figura 4.2.2 - Espaço de fases mapeado estroboscópicamente da equação $Módulo[\theta(t) + \pi, 2\pi]/2/\pi$. Condições iniciais $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p_0$. Constantes $A = 0.1$, $w = 1$. Intervalos $-0.15 \leq p_0 \leq 0.15$ e $0 \leq t \leq 1000$. O gráfico representa o “zoom” do destaque da figura 3.2.3.

Podemos notar que as condições iniciais $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = p_0$ ainda não estão descrevendo as regiões de valores menores que 0.2 e maiores que 0.8 no eixo θ . Então vamos ver a solução numérica utilizando as condições iniciais $\theta(0) = \pi$ e $\dot{\theta}(0) = p_0$.

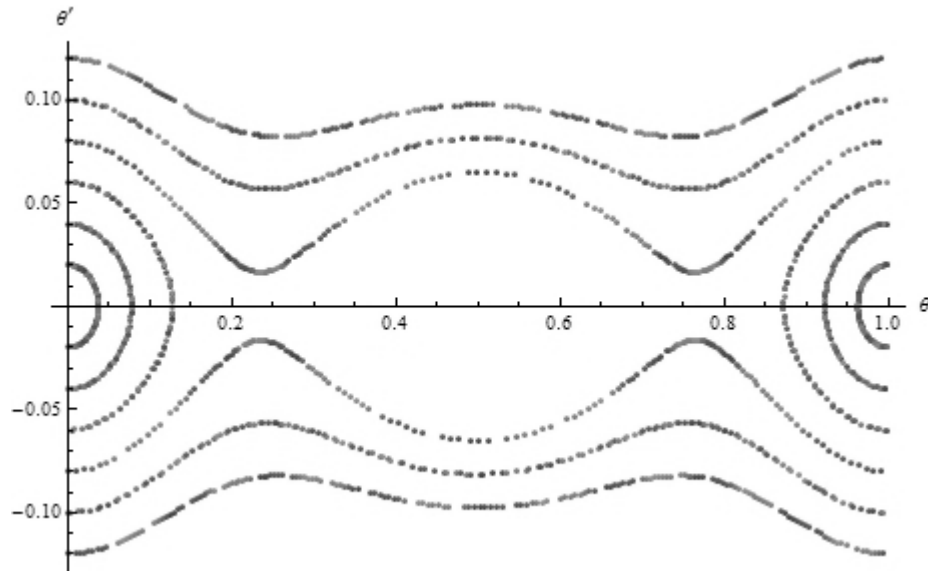


Figura 4.2.3 - Espaço de fases mapeado estroboscópicamente da equação $Módulo[\theta(t) + \pi, 2\pi] / 2 / \pi$. Condições iniciais $\theta(0) = \pi$ e $\dot{\theta}(0) = p_0$. Constantes $A = 0.1$, $w = 1$. Intervalos $-0.15 \leq p_0 \leq 0.15$.

Após mudarmos a condição inicial $\theta(0) = 0$ para $\theta(0) = \pi$, percebemos que novas trajetórias aparecem no espaço de fases do sistema. Podemos então unir os dois mapeamentos num gráfico só e assim obtermos mais informação sobre as duas ilhas de ressonância.

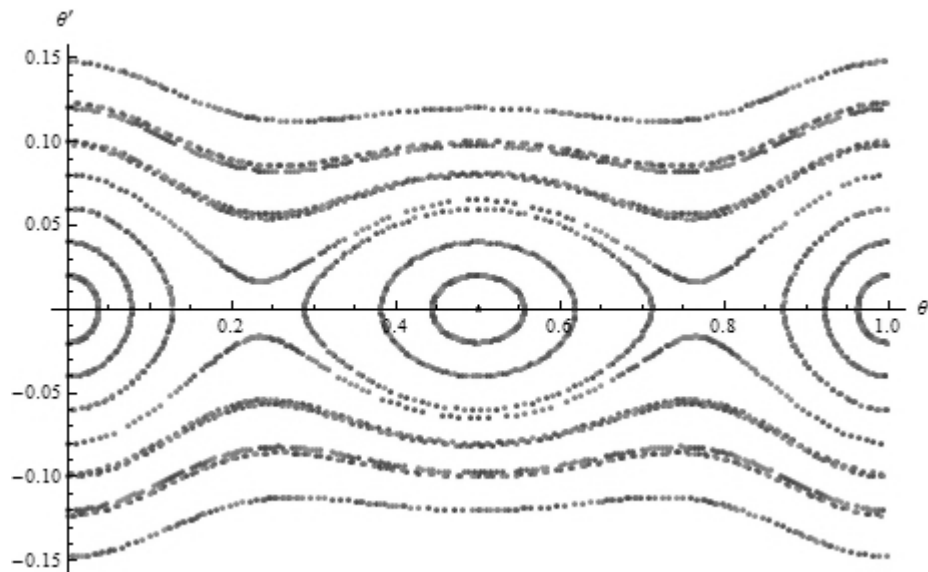


Figura 4.2.4 - Este gráfico é o resultado da união das figuras 4.2.2 e 4.2.3.

E finalmente, o gráfico de comparação entre a solução numérica da figura 4.2.4 e os contornos de energia da figura 4.2.1.

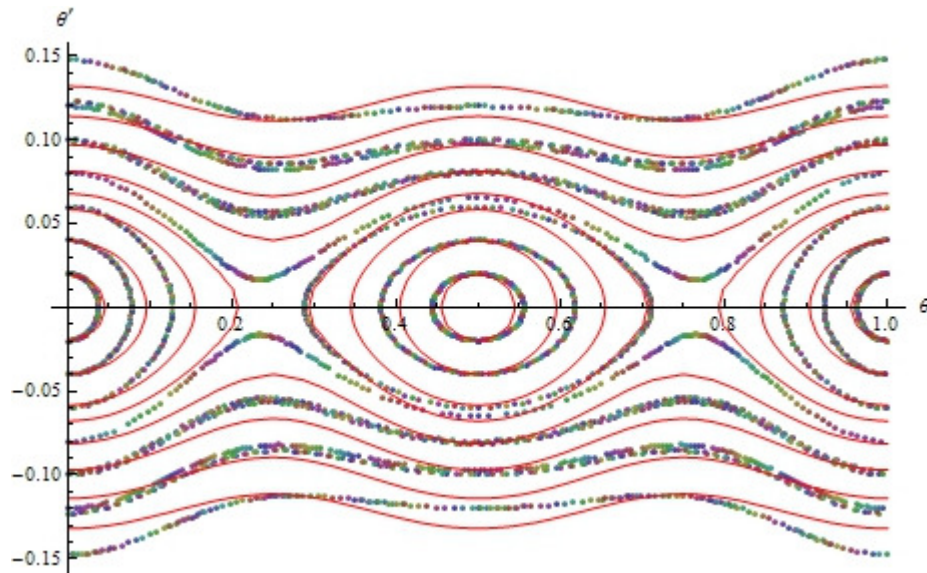


Figura 4.2.5 – Gráfico de análise entre solução numérica (pontos coloridos) e contornos de energia (linhas vermelhas contínuas) analíticos. O fato de os pontos da solução numérica estarem coloridos não tem nenhum significado físico. É só uma incapacidade do programa utilizado na geração do gráfico, que não têm a opção de colocar os pontos da solução numérica com somente a cor preta.

Nossa teoria de perturbação em múltiplas escalas de tempo para análise da região entre as ressonâncias principais está descrevendo a solução numérica. Os possíveis erros e falta de precisão do gráfico são gerados pelas aproximações de primeira ordem que fizemos anteriormente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria de perturbação pode realmente ser utilizada como uma importante técnica para a análise da dinâmica não linear de uma partícula e para um melhor entendimento de modelos simples dinâmicos. Nesse trabalho descrevemos todas as regiões do espaço de fases de um modelo simples para a dinâmica de uma partícula sujeita a uma perturbação periódica.

Através da utilização da teoria de perturbação clássica, na primeira parte do trabalho, conseguimos descrever as regiões distantes das ressonâncias que o sistema possui. A utilização da análise numérica e do mapeamento estroboscópico, permitiu a descrição da região das ressonâncias e suas proximidades. E na região entre as duas ressonâncias principais do sistema, a descrição do espaço de fases foi possível com uma análise da dinâmica lenta e rápida da equação, com a utilização de uma teoria de perturbação em múltiplas escalas de tempo e também com a realização de médias temporais. Também foi possível comparar a eficácia da aplicação dos métodos perturbativos, através da geração de gráficos de simulação numérica e de contornos de energia analíticos.

REFERÊNCIAS

- [1] Cropper, William H. (2004), *Great Physicists: The Life and Times of Leading Physicists from Galileo to Hawking*, Oxford University Press, ISBN 978-0-19-517324-6.
- [2] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* (Springer, 1984).
- [3] A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion* (Springer, New York, 1983).
- [4] E. Ott, *Dynamical Systems* (Cambridge University Press, 1993).
- [5] Complexity International, ISSN 1320-0682, *Stroboscopic Mapping*, Disponível em: http://www.complexity.org.au/ci_louise/vol03/kloppes96/node3.html.
- [6] Spiegel, Murray Ralph - *Formulas and Tables*, McGraw-Hill Book Company, São Paulo, 1970.
- [7] Wolfram Research, *Mathematica*, Disponível em: <http://www.wolfram.com/company/background.html>.
- [8] Gerald Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, Volume 140, Amer. Math. Soc., Providence, 2012.
- [9] *Libração*, Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Libração> . *Libration of the Moon*, Disponível em: <http://pwg.gsfc.nasa.gov/stargaze/Smoon4.htm> e "*The Moon*" by Zdenek Kopal, Academic Press 1960, 1964 "*The Motion of the Moon*" by Alan Cook, Adam Hilger 1988.
- [10] Thorton T., Stephen; Marion B., Jerry. *Classical Dynamics or Particles and Systems*, Fifth Edition, Copyright 2004 Brooks/Cole, ISBN 0-534-40896-6.
- [11] P.L. Kapitza, "*Dynamic stability of a pendulum when its point of suspension vibrates*", Soviet Phys. JETP 21, 588–592 (1951); P.L. Kapitza, "Pendulum with a vibrating suspension" Usp. Fiz. Nauk, 44, 7-15 (1951).
- [12] *Kapitza's pendulum*, Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Kapitza's_pendulum.

REFERÊNCIAS

- [13] Carson C. Chow (2007), Multiple scale analysis, Scholarpedia, 2(10):1617. J. Kevorkian and J. D. Cole, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [14] Weisstein, Eric W. "Adiabatic Invariant." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/AdiabaticInvariant.html>
- [15] Noether E. (1918). "*Invariante Variationsprobleme*". Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse 1918: 235–257.