

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Física

## **Redes de Neurônios Não-Monótonos em Camadas**

Fábio Schittler Neves

*Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Rubem Erichsen Junior, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.*

*Porto Alegre, Junho de 2006.*

# *Agradecimentos*

Agradeço à minha família, pelo apoio incondicional; ao professor Rubem, pela orientação e paciência; à minha Gabriela, pelo carinho dedicado nos momentos mais conturbados; e a todos aqueles que me apoiaram e estiveram ao meu lado no decorrer deste trabalho.

# *Resumo*

Neste trabalho, derivamos equações de recorrência que descrevem a dinâmica exata de uma rede neural não-monótona, em camadas, através de uma análise sinal ruído. Para poder avaliar o seu estado dinâmico, definimos a semelhança do estado da rede com alguma configuração específica desta como medida de interesse. Vamos nos referir a estas configurações por "padrões" e a esta medida de interesse por "overlap". Obtivemos as equações dinâmicas na recuperação de um padrão e na recuperação simultânea de dois padrões. Esta arquitetura apresenta conexões apenas entre camadas adjacentes no sentido entrada-saída e padrões descorrelacionados entre as camadas. Assim, a propagação de um sinal nesta rede se dá ao passar por uma seqüência de padrões pré-definidos, de camada para camada. Nesta dinâmica, os pontos fixos correspondem a um valor estacionário do *overlap* desta seqüência de padrões e não do *overlap* estacionário de um padrão específico. Nós constatamos, na recuperação de um padrão à temperatura zero, que o modelo não-monótono é capaz de armazenar um conjunto maior de informação que o modelo monótono. Encontramos, além da presença das soluções de ponto fixo, a de atratores cíclicos e caóticos, que foram identificados e expostos graficamente.

# *Abstract*

In this study, we derived equations of recurrence which describe the exact dynamics of a layered non-monotonic network through a signal-noise analysis. To evaluate their dynamical state, we defined the similarity of the network state to some predefined configuration of this network like the measure of interest. We nominate this configurations as "patterns" and this measure as "overlap". We obtained such dynamical equations in the recovery of one pattern and in the simultaneous recovery of two patterns. This architecture only presents connections between adjacent layers in the entrance-exit direction and not presents correlated patterns. Therefore, the propagation of a signal in this network occurs when passing through a predefined sequence of patterns, from layer to layer. In this dynamics the fixed points will correspond to a stable value of the mean overlap of this sequence of patterns and not whith a defined pattern. We find an increase of the storage capacity of the network, if compared to its monotonic correspondent through adjustments of their basic parameters at zero temperature. We noticed, besides the presence of fixed point solutions, cyclic and chaotic attractors that were identified and shown graphically.

# *Conteúdo*

<b>Introdução</b>	p. 3
<b>1 Modelos de Memória Associativa</b>	p. 8
1.1 Rede Não-Monótona Extremamente Diluída . . . . .	p. 10
1.2 Rede Não-Monótona Recorrente Completamente Conexa . . . . .	p. 15
1.2.1 Recuperação de um padrão . . . . .	p. 16
1.3 Rede Monótona em Camadas . . . . .	p. 19
<b>2 Modelo não-monótono em camadas</b>	p. 23
2.1 Análise Sinal-Ruído . . . . .	p. 23
2.2 Recuperação de um padrão . . . . .	p. 24
2.3 Recuperação de dois padrões . . . . .	p. 32
2.4 Distribuição dos campos locais . . . . .	p. 35
<b>3 Resultados</b>	p. 37
3.1 Recuperação de um Padrão . . . . .	p. 37
3.1.1 Limite $\theta \rightarrow \infty$ . . . . .	p. 38
3.1.2 Limite $\theta \rightarrow 0$ . . . . .	p. 38
3.1.3 Diagrama de fases $\alpha \times \theta$ . . . . .	p. 40
3.1.4 Bacias de atração . . . . .	p. 46
<b>Conclusão</b>	p. 48

<b>Apêndice A – Integração da função sinal</b>	p. 49
<b>Apêndice B – Integração da Função <math>V</math></b>	p. 50
<b>Apêndice C – Determinação dos Expoentes de Lyapunov</b>	p. 51
<b>Bibliografia</b>	p. 53

## *Introdução*

As Redes Neurais Artificiais (RNAs) são sistemas de processamento em paralelo e distribuído que possuem algum grau de semelhança com sistemas neurais biológicos, em especial o humano. A unidade fundamental de processamento em redes biológicas é o neurônio, que executa funções simples através do seu comportamento eletroquímico, apesar de sua complexidade biológica. As pesquisas em RNAs baseiam-se na modelagem deste comportamento, no estudo do seu comportamento coletivo e no estudo de suas possíveis aplicações.

Do ponto de vista prático podemos separar o estudo das redes neurais em 3 ramos principais, de acordo com a área de interesse. Sistemas homogêneos quanto à função executada por suas unidades são, em geral, de interesse para os físicos teóricos, pois pode-se aplicar a estes sistemas métodos conhecidos de mecânica estatística. Sistemas heterogêneos e finitos, que possam executar funções bem definidas, são do interesse das engenharias e das ciências da computação (1–4). Estas áreas procuram arquiteturas implementáveis a problemas pré-definidos, onde a noção de atratores estáveis nem sempre cumpre um papel essencial. A descrição do comportamento de cada unidade celular, ou de sistemas biológicos heterogêneos, assim como o estudo do comportamento humano, são de especial interesse para as áreas da biologia e médicas. O presente trabalho é focado principalmente no primeiro grupo, como veremos a seguir.

Como um todo, o estudo das RNAs e das redes biológicas é essencial para a compreensão do funcionamento tanto microscópico quanto macroscópico do cérebro. Lembrando que o cérebro humano possui cerca de 100 bilhões de neurônios, o estudo de sistemas simplificados é de singular importância para o vislumbre do seu funcionamento coletivo, pois a implementação computacional de sistemas mais complexos se torna inviável.

Os neurônios são formados, simplificada, por três partes principais (5): os dendritos, ramificações responsáveis pela recepção de estímulos; o corpo celular, responsável pela sustentação da vida celular e pelo processamento dos estímulos recebidos pelos dendritos; e o axônio, canal pelo qual possíveis estímulos são enviados na forma de pulsos eletroquímicos. Mesmo sendo um canal único, o axônio permite que um neurônio se comunique com até 100.000 outros, pois apresenta em sua extremidade um conjunto de ramificações que transmite seu estado para os demais.

A região de contato entre dois neurônios é chamada região sináptica, ou simplesmente sinapse, e a separação física entre ambos é denominada "fenda sináptica". Assim, dizemos que o axônio do neurônio pré-sináptico encontra-se com os dendritos do neurônio pós-sináptico. Os estímulos podem ser enviados tanto elétrica quanto quimicamente. As sinapses elétricas permitem o fluxo passivo de corrente entre os neurônios, podendo ser tanto unidirecional quanto bidirecional, em um processo extremamente rápido, e por este motivo podem ser responsáveis pela sincronização de sistemas neurais. Já nas sinapses químicas os estímulos são enviados pelos chamados neurotransmissores, que são liberados na fenda sináptica ao serem estimulados por um sinal pré-sináptico, ligando-se a receptores específicos no dendrito pós-sináptico, desencadeando um processo que, em última análise, gera uma mudança no potencial de membrana deste último. Existem pelo menos 100 neurotransmissores diferentes e, dependendo do tipo que é liberado em uma sinapse, podem fazer com que um pulso pré-sináptico iniba ou estimule a emissão de pulsos no neurônio pós-sináptico. Portanto, são as sinapses que determinam como o estado de um neurônio influencia o estado dos demais.

O primeiro modelo neural artificial foi apresentado por W. MacCulloch e W.Pitts (6) em um trabalho publicado em 1943, que consiste na descrição de um neurônio artificial e no estudo de sua capacidade computacional. Este modelo, denominado aqui MCP, segue basicamente a descrição de neurônio apresentada acima, pois se resume a um conjunto de entradas, uma central de processamento e uma saída. A descrição matemática para o estado destes neurônios consiste em atribuir o valor 1, se ativo, ou 0, se não-ativo, em função da soma ponderada das suas entradas. A função executada por sua central é simplesmente a função limiar que separa os valores 0 e 1. Os pesos que ponderam as entradas neste modelo são chamados pesos sinápticos, fazendo referência às sinapses biológicas, e podem assumir os valores +1, para uma relação excitatória, -1, para uma relação inibitória, ou 0, caso não estejam ligados. Esse modelo de neurônio, conhecido como "neurônio formal", visa representar a sua taxa de disparos, isto é, se ativo ou não em um determinado instante. Sendo uma aproximação bastante simplificada do neurônio biológico, permite um tratamento analítico do mesmo.

O trabalho de MacCulloch e Pitts é de fundamental importância, não só histórica, mas também didática, pois expõe algumas características gerais das RNAs, como a "função de ativação", nome dado à função executada pelos neurônios enquanto unidades, e os pesos sinápticos, que ponderam as conexões entre os neurônios. Foi mostrado (7), ainda, que este modelo pode executar certas funções lógicas, booleanas, de acordo com a forma que são arrançadas as conexões entre os neurônios.

O que faltava ao modelo MCP, em um primeiro momento, era uma regra de aprendizado



efetiva para a rede como um todo, a fim de executar funções macroscópicas, como o reconhecimento e a diferenciação de estímulos. Este ponto começou a ser sanado em um trabalho publicado por Donald Hebb (8) em 1949, onde se apresentou uma regra, hoje conhecida como "regra de Hebb", que consiste em reforçar as conexões sinápticas entre dois neurônios se ambos estiverem ativos no mesmo instante.

O trabalho de MacCulloch e Pitts e, posteriormente, o de Hebb, formam as bases dos estudos em RNAs. Havia uma descrição matemática para os neurônios e uma regra que, como veremos no decorrer deste trabalho, será o nosso marco zero no estudo de armazenamento de memória em RNAs.

Em 1952 uma descrição bem mais detalhada do neurônio foi apresentada por A. L. Hodgkin e A. F. Huxley (9), que lhes renderia o prêmio Nobel onze anos mais tarde. Este modelo procurou refletir os resultados experimentais do estudo da propagação elétrica em neurônios biológicos. Baseada neste estudo foi estabelecida uma nova classe de modelos de neurônios, os "modelos de neurônios biológicos", assim chamados porque, diferentemente dos neurônios formais, buscam reproduzir os efeitos elétricos provenientes dos processos eletroquímicos no interior de cada neurônio. Experimentalmente, foi constatado que ao se aplicar um potencial elétrico adequado ao neurônio há uma rápida elevação do potencial de membrana, seguida de um decaimento exponencial do mesmo, o que define a emissão de um pulso. Este comportamento ocorre devido ao equilíbrio entre as espécies químicas no exterior e no interior da membrana do neurônio. Por outro lado, o modelo matemático de Hodgkin-Huxley apresenta dificuldades de implementação computacional devido à sua complexidade, pois o tempo de simulação para redes "grandes" se torna inviável. Para contornar este problema, foram sugeridos vários modelos de neurônios biológicos simplificados, como o de FitzHugh-Nagumo (10, 11) e o de Hindmarsh-Rose (12, 13), ainda bem mais complexos que os neurônios formais.

Um novo grande passo seria dado em 1958 por Frank Rosenblatt (14), ao apresentar uma nova arquitetura, o perceptron, capaz de reconhecer e diferenciar determinados grupos de estímulos. Este modelo utiliza neurônios formais e a regra de Hebb, apresentando duas camadas, uma de entrada e uma de saída, onde as conexões entre ambas permitem a passagem de estímulos apenas no sentido entrada→ saída, sendo seus pesos sinápticos ajustáveis. Além de apresentar uma aplicação prática, este modelo é de grande importância histórica, pois marcou o início das discussões sobre a aplicabilidade das RNAs para solucionar problemas. O perceptron de 2 camadas, ou perceptron simples, podia solucionar apenas problemas linearmente separáveis, isto é, problemas onde conjuntos diferentes de soluções em um dado hiper-espaço, podem ser separados por um hiperplano. Isto reduzia muito sua aplicabilidade, sem contar as

dificuldades computacionais da época. Potencialmente, perceptrons com mais camadas podem resolver problemas não linearmente separáveis. Porém, críticas levantadas por Minsky e Papert (4) em relação à dificuldade em treinar uma rede multicamadas levaram a um desinteresse temporário nesta área. Estes problemas vêm sendo minimizados ao longo dos anos, com o advento de novos algoritmos de aprendizado, como o "back-propagation"(15). Este algoritmo consiste em expor a rede a uma entrada desejada e comparar a saída correspondente com a saída desejada e, em um segundo momento, atualizar os pesos das camadas intermediárias no sentido saída→entrada, de forma a minimizar o erro na saída através de alguma regra de aprendizado e assim sucessivamente, até que o erro alcance um determinado valor na saída. Mesmo com este algoritmo, esta arquitetura ainda apresenta a dificuldade computacional, pois o tempo de convergência para a diminuição do erro pode ser longo.

Em 1982 J. Hopfield (16, 17) publicou um trabalho sobre redes recorrentes, comparando o comportamento de um modelo de rede neural ao de sistemas magnéticos. O modelo de Hopfield consiste em uma modificação dos neurônios de MacCulloch-Pitts, pois agora a função limiar divide estados  $-1$  e  $+1$ . Os neurônios nesta arquitetura estão conectados de forma simétrica e recorrente, sendo a rede completamente conexa. Os valores de seus pesos sinápticos são determinados por uma modificação da regra de Hebb, que, como veremos no próximo capítulo, leva a conexões simétricas. É desta simetria que nasce a correspondência entre sistemas magnéticos e o modelo de Hopfield. Este paralelo permite aplicar-se às RNAs tratamentos conhecidos da mecânica estatística de equilíbrio.

Nosso trabalho visa estudar o comportamento de um sistema homogêneo, estruturado em camadas, cuja função de ativação é não-monótona, descrevendo sua dinâmica através do comportamento médio de suas unidades básicas. Esta rede apresenta capacidade de memória associativa, isto é, ela é capaz de guardar informações e, para poder avaliar o seu estado dinâmico, definimos a semelhança do estado da rede com alguma configuração específica desta como medida de interesse. Esta semelhança será expressa por uma medida denominada "overlap", que será definida no próximo capítulo. Como utilizamos uma arquitetura em camadas, é importante ressaltar que as redes em camadas não apresentam uma configuração estacionária de suas unidades, e sim um fluxo de informação que passa de camada a camada (18), sendo no presente caso estudado o limite termodinâmico. Ainda é necessário fazer uma ressalva quanto à homogeneidade da rede: as redes em camadas possuem uma camada de entrada onde impomos uma condição inicial, diferentemente das demais camadas, que não possuem contato com estímulos externos.

Em um trabalho recente (19), foi mostrado que a não monotonicidade da função de ativação

para redes recorrentes completamente conexas leva a um aumento da capacidade máxima de armazenamento de informação, quando comparado ao seu análogo monótono. Fato que não ocorre para estas arquiteturas no caso de diluição extrema (20), onde o número de conexões é muito menor que o número de neurônios na rede. Com isso levantamos a hipótese deste aumento ocorrer em uma arquitetura em camadas completamente conexa, quando utilizamos uma função não-monótona.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 temos uma revisão de estudos sobre memória associativa, em especial das arquiteturas recorrentes não-monótonas completamente conexas e diluídas, e uma caracterização das redes em camadas, sendo dada especial ênfase à capacidade máxima de armazenamento de informações; no capítulo 2, apresentamos um método de análise sinal-ruído que permite obter equações de recorrência para as variáveis dinâmicas que descrevem o estado de uma rede de neurônios não monótonos em camadas; no capítulo 3 apresentamos os resultados obtidos; e por fim as nossas conclusões.

# 1 Modelos de Memória Associativa

Uma importante característica encontrada em RNAs é a capacidade de gravar um conjunto de informações e, posteriormente, quando um estímulo externo é apresentado, recuperar a informação mais parecida com o estímulo. A esta capacidade chamamos memória associativa. Estas informações, ou memórias, são representadas em uma rede artificial por um conjunto de padrões que descrevem configurações específicas da rede. Este conjunto será representado aqui por  $\{\xi_{iv}\}$ , onde  $i$  indica o sítio e  $v$  o padrão. Pesquisas nesta área correspondem a um dos principais focos de estudo em RNAs.

Neste trabalho tratamos de redes binárias cujos sítios podem assumir os valores  $+1$  ou  $-1$ . O estado da rede é representado por  $\{S_i(t)\}$ , onde  $t$  é a variável temporal. A semelhança entre um determinado padrão e o estado da rede pode ser expressa por uma medida chamada "overlap", que mede a superposição entre o dado padrão e o estado, definida pela expressão

$$M_v(t) = \frac{1}{N} \sum_i^N \xi_{iv} S_i(t), \quad (1.1)$$

onde  $N$  é o número de neurônios na rede e  $\xi_{iv}$  representa o valor do padrão  $v$  no sítio  $i$ .

Os  $\xi$ 's são variáveis aleatórias, que nos casos estudados aqui, obedecem à distribuição

$$P(\xi_{iv}) = \frac{1}{2} \delta(\xi_{iv} - 1) + \frac{1}{2} \delta(\xi_{iv} + 1), \quad (1.2)$$

conseqüentemente, temos

$$\overline{\xi_{iv}} = 0, \quad (1.3)$$

e

$$\overline{\xi_{iv} \xi_{j\mu}} = \delta_{\mu\nu} \delta_{ij}, \quad (1.4)$$

onde a barra horizontal representa uma média configuracional. Em outras palavras, os padrões estão descorrelacionados, tendo a mesma probabilidade de assumir os valores  $+1$  ou  $-1$ .

Notemos que se todos os sítios da rede estiverem no mesmo estado apresentado pelo padrão  $v$ , temos  $M_v = 1$ ; caso todos estiverem invertidos,  $M_v = -1$ ; e caso tenham 50% no mesmo estado,  $M_v = 0$ .

Para armazenar estes padrões é necessário algum tipo de regra que ajuste os pesos sinápticos desta rede de forma adequada. A regra que iremos utilizar é baseada na idéia apresentada por Hebb, reescrita da seguinte maneira: se dois neurônios estiverem no mesmo estado no mesmo instante, o peso sináptico  $J_{ij}$  entre ambos será reforçado. Caso contrário, será enfraquecido. Isto pode ser expresso pela equação:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^p \xi_{iv} \xi_{jv}. \quad (1.5)$$

Notemos que esta equação leva a conexões simétricas.

Neste ponto, podemos distinguir entre dois métodos de análise da recuperação de memórias em RNAs. O primeiro consiste na análise de cada unidade da rede mediante a simulação numérica dos neurônios em um sistema finito, onde implementamos a soma da eq. (1.1) diretamente e assim obtemos a evolução dinâmica exata para o *overlap* da rede. O segundo é o estudo direto do *overlap*, onde buscamos equações para valores estacionários das variáveis macroscópicas que descrevem o comportamento do sistema, tomando valores médios das variáveis em questão e admitindo um determinado erro que será tanto menor quanto maior for o número de elementos na rede. Os trabalhos aqui discutidos baseiam-se no segundo tipo de análise.

Nestes sistemas, as memórias armazenadas na rede cumprem o papel de atratores estáveis, isto é, dada uma condição inicial favorável, o estado da rede irá evoluir para um ponto fixo com  $M_v \neq 0$  e ali permanecer, expressando a recuperação de um padrão. Porém, dada uma condição inicial qualquer para a rede, esta pode evoluir para soluções diferentes de qualquer padrão ali armazenado. Isto quer dizer que, dentro das possíveis condições iniciais, existem conjuntos que levam a estados específicos da rede; a estes conjuntos chamamos "bacias de atração". Assim, dizemos que as bacias de atração dos diversos padrões são limitadas. De forma geral, as soluções podem ser de ponto fixo, cíclicas, ou caóticas.

Nas próximas seções vamos revisar alguns modelos de memória associativa, começando pela rede não-monótona extremamente diluída. Este modelo reflete o processo de armazenamento de memórias, assim como sua recuperação, de forma simples. Assim, podemos introduzir os parâmetros mais relevantes no estudo dinâmico do nosso trabalho em uma rede de neurônios não-monótonos síncrona, isto é, onde todos os seus sítios são atualizados no mesmo instante. Seguiremos discutindo o modelo recorrente não-monótono completamente conexo, em uma

rede assíncrona, onde estudamos o efeito da não monotocidade em uma rede conexa. Terminaremos nossa revisão discutindo uma rede em camadas monótona completamente conexa, onde introduzimos a arquitetura que será usada no nosso trabalho.

## 1.1 Rede Não-Monótona Extremamente Diluída

Trataremos aqui de uma rede cujos sítios assumem os valores  $S_i = \{+1, -1\}$  de acordo com a atividade média de suas unidades, dada pela média térmica de  $S_i$ , que será indicada por  $\langle \dots \rangle$ , conforme a equação:

$$\langle S_i(t) \rangle = f(h_i(t)) = -\tanh\beta(h_i(t) + \theta) + \tanh\beta(h_i(t) - \theta). \quad (1.6)$$

onde  $h_i(t)$  é o campo local sobre o sítio  $i$  no instante  $t$ . Esta equação é o ponto de partida para o desenvolvimeto deste modelo, pois é escolhida, convenientemente, por ser uma equação não-monótona simples de dois estados.

A fig. (1.1) apresenta graficamente a eq. (1.6) para  $\theta = 3$ , onde podemos constatar que se trata de uma função ímpar.

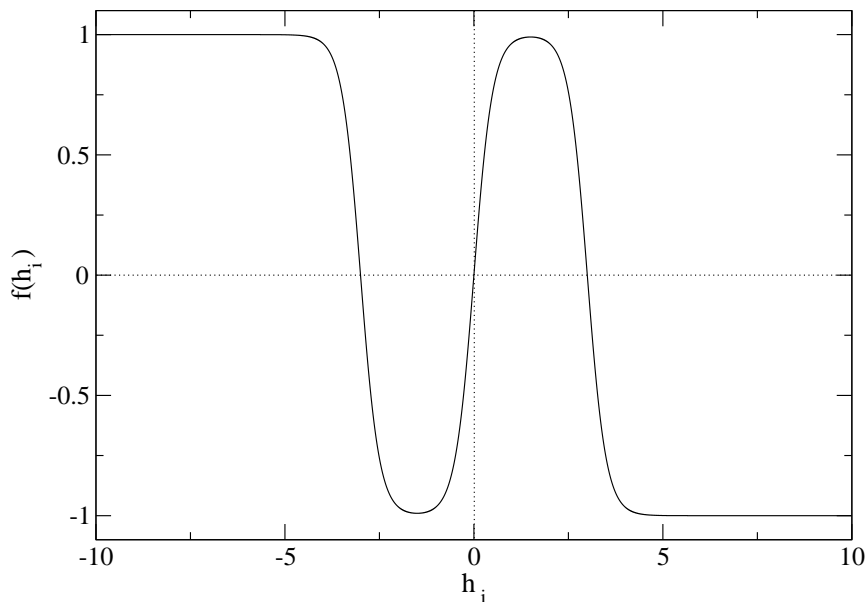


Figura 1.1: Atividade média de um neurônio em função do campo sobre o mesmo, para  $\Theta = 3$  e  $\beta = 2$ .

O campo  $h_i(t)$  é definido como

$$h_i(t + \Delta t) = \sum_j J_{ij} S_j(t). \quad (1.7)$$

Como vimos na introdução, o conjunto de pesos sinápticos que ponderam a influência entre os neurônios é uma das características essenciais de uma rede, determinando as memórias armazenadas na mesma. Neste modelo, os pesos sinápticos são determinados por uma adaptação da eq. (1.5) que expressa a diluição, na forma:

$$J_{ij} = \frac{1}{K} C_{ij} \sum_{v=1}^p \xi_{iv} \xi_{jv}, \quad (1.8)$$

onde  $K$  é número médio de conexões por neurônio,  $C_{ij} = \{0, 1\}$  são os coeficientes de diluição, distribuídos conforme a probabilidade:

$$Prob(C_{ij}) = \frac{K}{N} \delta(C_{ij} - 1) + \left(1 - \frac{K}{N}\right) \delta(C_{ij}). \quad (1.9)$$

e decorre dela que

$$\overline{C_{ij}} = \overline{C_{ij}^2} = \frac{K}{N}. \quad (1.10)$$

Esta modificação claramente quebra a simetria implícita da regra apresentada em (1.5).

A rede está conectada de forma extremamente diluída, o que pode ser expresso da seguinte maneira:

$$1 \ll K \ll \log(N), \quad (1.11)$$

com

$$N, K \rightarrow \infty, \quad (1.12)$$

garantindo que não há realimentação no sistema (21, 22).

Da eq. (1.8) e da primeira igualdade em (1.6), temos:

$$\langle S_i(t + \Delta t) \rangle = f \left( \frac{1}{K} \sum_{v=1}^p \xi_{iv} \sum_j C_{ij} \xi_{jv} S_j(t) \right). \quad (1.13)$$

Postulando que queremos recuperar apenas o padrão  $v = 1$ , e separando o argumento da equação (1.13) em um termo de sinal e um de ruído, ficamos com

$$\langle S_i(t + \Delta t) \rangle = f \left( \frac{1}{K} \xi_{i1} \sum_j C_{ij} \xi_{j1} S_j(t) + \eta_i(t) \right), \quad (1.14)$$

onde

$$\eta_i(t) = \frac{1}{K} \sum_{v=2}^p \xi_{iv} \sum_j C_{ij} \xi_{jv} S_j(t) \quad (1.15)$$

é o termo de ruído. A média deste termo é igual a zero, pois a equação acima corresponde à soma de  $N(p-1)$  termos descorrelacionados, que segundo o teorema do limit central, nos leva a uma distribuição Gaussiana centrada em zero; já a sua variância é diferente de zero. O quadrado do ruído é dado por

$$\eta_i^2(t) = \left( \frac{1}{K} \sum_{v=2}^p \xi_{iv} \sum_j C_{ij} \xi_{jv} S_j(t) \right) \times \left( \frac{1}{K} \sum_{\mu=2}^p \xi_{i\mu} \sum_k C_{ik} \xi_{k\mu} S_k(t) \right), \quad (1.16)$$

efetuando o produto,

$$\eta_i^2(t) = \frac{1}{K^2} \sum_{v,\mu \neq 1}^p \xi_{iv} \xi_{i\mu} \sum_{j,k} C_{ij} C_{ik} \xi_{jv} \xi_{k\mu} S_j(t) S_k(t) \quad (1.17)$$

tomando a média configuracional, sendo os sítios descorrelacionados e de estados de mesma probabilidade, de acordo com a eq. (1.4), temos

$$\overline{\eta_i^2(t)} = \frac{1}{K^2} \sum_{v,\mu \neq 1}^p \delta_{\mu v} \sum_{j,k} C_{ij} C_{ik} \delta_{jk} S_j(t) S_k(t) \quad (1.18)$$

como  $C_{ij}^2 = C_{ij}$ , ficamos com

$$\overline{\eta_i^2(t)} = \frac{1}{K^2} \sum_{v=2}^p \sum_{j=1}^N \overline{C_{ij}} = \frac{1}{K^2} (p-1) N \overline{C_{ij}}, \quad (1.19)$$

e de acordo com (1.10),

$$\overline{\eta_i^2(t)} = \frac{1}{K^2} (p-1) N \left( \frac{K}{N} \right) = \frac{p-1}{K} \sim \frac{p}{K}. \quad (1.20)$$

Levando em conta a distribuição gaussiana, a função probabilidade para o ruído é dada por

$$P(\eta(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{p}{K}}} \exp\left(-\frac{K\eta^2(t)}{2p}\right). \quad (1.21)$$

Definimos aqui um parâmetro  $\alpha = \frac{p}{K}$  e vamos redefinir a capacidade máxima de armazenamento para redes diluídas da seguinte maneira,

$$\alpha_c = \frac{P_{max}}{K}, \quad (1.22)$$



onde  $p_{max}$  é o número máximo de padrões que se pode armazenar em uma rede.

No limite (1.12), podemos reescrever a expressão para o *overlap* da seguinte maneira:

$$M_v(t) = \frac{1}{N} \sum_i \xi_{iv} S_i(t) = \frac{1}{K} \sum_j C_{ij} \xi_{jv} S_j(t). \quad (1.23)$$

Multiplicando a eq.(1.13) por  $\frac{1}{N} \xi_{i1}$ , e somando sobre todo  $i$ , obtemos a equação para o *overlap* desta rede para o padrão  $v = 1$ , podendo reconhecê-la através da igualdade em (1.23), e temos

$$M_1(t + \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_i \xi_{i1} S_i(h_i(t + \Delta t)). \quad (1.24)$$

Podemos agora expressar a equação acima pela sua média térmica e configuracional, admitindo um erro de ordem  $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ ,

$$m_1(t + \Delta t) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_i \xi_{i1} S_i(h_i(t + \Delta t)) \right\rangle. \quad (1.25)$$

Como a média térmica não atua sobre os padrões,

$$m_1(t + \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_i \xi_{i1} \langle S_i(h_i(t + \Delta t)) \rangle, \quad (1.26)$$

e podemos reescrever esta equação, usando a definição do *overlap* e a eq.(1.14), ficando com

$$m_1(t + \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_i \xi_{i1} f(\xi_{i1} m_1(t) + \eta_i(t)). \quad (1.27)$$

Agora vamos usar a simetria ímpar da  $f$  para passar o termo  $\xi_{i1}$  para dentro do seu argumento e, esperando que a média sobre os sítios independa do índice  $i$ , temos

$$m_1(t + \Delta t) = \overline{f(m_1(t) + \xi_{i1} \eta_i(t))}. \quad (1.28)$$

Conhecida a distribuição do ruído, cuja probabilidade é dada por (1.21), e da probabilidade dos estados de  $\xi_{i1}$ , podemos efetuar a média configuracional em (1.28) mediante uma integral sobre o ruído. E efetuando uma mudança de variável  $\xi_{i1} \eta_i \rightarrow \sqrt{\alpha} z$ , temos

$$m(t + \Delta t) = \int Dz f(m_1(t) + \sqrt{\alpha} z), \quad (1.29)$$

onde

$$Dz = \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right). \quad (1.30)$$

No caso onde  $\beta \rightarrow \infty$ , a dinâmica desta rede será dada por:

$$\langle S_i(t + \Delta t) \rangle = f_0(h_i(t)) = -\text{sgn}(h_i(t) + \theta) + \text{sgn}(h_i(t)) - \text{sgn}(h_i(t) - \theta). \quad (1.31)$$

Substituindo (1.31) em (1.29),

$$m_1(t + \Delta t) = \int Dz [-\text{sgn}(m_1(t) - \sqrt{\alpha}z + \theta) + \text{sgn}(m_1(t) - \sqrt{\alpha}z) - \text{sgn}(m_1(t) - \sqrt{\alpha}z - \theta)], \quad (1.32)$$

A última equação pode ser integrada conforme o apêndice A, e ficamos com:

$$m_1(t + 1) = +\text{erf}\left(\frac{m_1(t)}{\sqrt{2\alpha}}\right) - \text{erf}\left(\frac{m_1(t) - \theta}{\sqrt{2\alpha}}\right) - \text{erf}\left(\frac{m_1(t) + \theta}{\sqrt{2\alpha}}\right). \quad (1.33)$$

A iteração desta equação reproduz exatamente a dinâmica da rede extremamente diluída. Os pontos fixos da dinâmica são obtidos a partir das soluções da equação

$$m_1^* = +\text{erf}\left(\frac{m_1^*}{\sqrt{2\alpha}}\right) - \text{erf}\left(\frac{m_1^* - \theta}{\sqrt{2\alpha}}\right) - \text{erf}\left(\frac{m_1^* + \theta}{\sqrt{2\alpha}}\right). \quad (1.34)$$

Pela eq. (1.33), ao variarmos os parâmetros  $\alpha$  e  $\theta$ , assim como as condições iniciais, podemos constatar diferentes comportamentos. Um diagrama de fases no plano  $(\alpha, \theta)$  é apresentado na fig. (1.2), onde foram mapeados todos os tipos de soluções da eq. (1.33).

As regiões *I* e *II* apresentam, respectivamente, soluções de ponto fixo com  $m = 0$  e  $m \neq 0$ . Na região *III* estão presentes soluções cíclicas de período 2, com  $m = \pm a$  e  $a \neq 0$ , onde  $a$  é uma constante. A região *IV* apresenta soluções cíclicas de diferentes períodos. E a região *V* apresenta soluções caóticas.

Nas regiões que possuem um asterisco, coexistem 2 tipos de soluções, as soluções da região *III* e o atrator correspondente à região de fronteira com a curva BF, sendo seu estado determinado pela condição inicial  $m_0$  dada. A região *I*\* apresenta soluções do tipo  $m = 0$  para uma condição inicial abaixo de um certo valor  $m_0$ , e  $m = \pm a$ , para valores acima de  $m_0$ . A condição  $m_0$  corresponde a um ponto fixo instável com  $m = m_0$ . Na região *II*\* coexistem os atratores da região *III*, com  $m = \pm a$  e da região *II*, onde  $m = a$ , com  $a \neq 0$  para ambos. Na região *IV*\* encontramos, além do tipo *III*, soluções cíclicas de período 2 assimétricas, com  $m = a, b$ , com  $a, b \neq 0$ . E, por fim, a região *V*\* apresenta soluções caóticas, como em *V*, além da solução de ciclo 2 simétrica.

A partir deste trabalho, podemos tirar algumas conclusões interessantes, como o não aumento

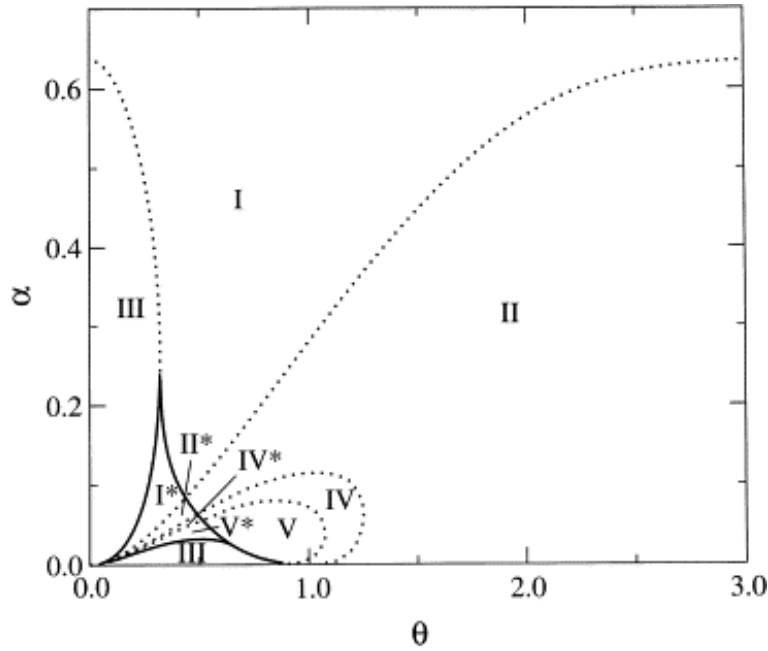


Figura 1.2: Diagrama de fases  $\alpha - \theta$ , demonstrando as regiões em que ocorrem cada tipo de solução da eq. (1.33).(20)

da capacidade de armazenamento desta arquitetura em relação ao seu análogo monótono, estudado por Derrida, Gardner e Zippelius (22), sendo encontrado para ambas a mesma capacidade máxima de armazenamento, dada por  $\alpha_c = 0,637$ .

## 1.2 Rede Não-Monótona Recorrente Completamente Conexa

Nesta seção discutiremos uma rede assíncrona totalmente conexa, isto é, onde seus sítios são atualizados seqüencialmente. Discutiremos as propriedades termodinâmicas deste sistema, procurando determinar seu comportamento de equilíbrio através de uma aproximação de campo médio, reproduzindo os resultados obtidos por J. Inoue(19).

Nesta arquitetura, os neurônios podem assumir os valores  $S_i = \{+1, -1\}$ , em função do campo local  $h_i(t)$  gerado pelos outros neurônios, de acordo com a distribuição de probabilidades

$$P(S_i(t+1)) = \frac{1}{2} [1 + S_i(t+1)f(h_i(t))], \quad (1.35)$$

onde  $f$  é uma função não-monótona dada por 1.6.

Começamos calculando o valor médio de  $S_i$ , de acordo com a função probabilidade (1.35),

que resulta em

$$\langle S_i(t+1) \rangle = (+1)\frac{1}{2}[1 + f(h_i(t))] + (-1)\frac{1}{2}[1 - f(h_i(t))] \quad (1.36)$$

$$= f(h_i(t)). \quad (1.37)$$

Pela aproximação de campo médio, admitiremos que

$$\langle S_i \rangle = f(\langle h_i \rangle) = f\left(\sum_j J_{ij} \langle S_j \rangle\right). \quad (1.38)$$

Este modelo possui pesos sinápticos atribuídos pela equação (1.5). Assim, temos

$$\langle S_i \rangle = f\left(\sum_j \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_{i\mu} \xi_{j\mu} \langle S_j \rangle\right), \quad (1.39)$$

onde podemos reconhecer o *overlap* com os diversos padrões e ficamos com

$$\langle S_i \rangle = f\left(\sum_{\mu=1}^p \xi_{i\mu} m_\mu\right). \quad (1.40)$$

Multiplicando a eq. (1.40) por  $\xi_{iv}$ , somando sobre todo  $i$  e multiplicando o total por  $\frac{1}{N}$ , obtemos a expressão para o *overlap* médio nesta rede,

$$m_v \equiv \frac{1}{N} \sum_i \xi_{iv} f\left(\sum_{\mu=1}^p \xi_{i\mu} m_\mu\right) \quad (1.41)$$

A seguir vamos discutir a solução desta equação na recuperação de um padrão.

### 1.2.1 Recuperação de um padrão

Vamos supor que estamos recuperando apenas o padrão 1. Separando os termos em  $\mu = 1$  e  $\mu = v$ , no segundo somatório em (1.41), temos

$$m_v = \frac{1}{N} \sum_i \xi_{iv} f\left(\xi_{i1} m_1 + \xi_{iv} m_v + \sum_{\mu \neq 1, v} \xi_{i\mu} m_\mu\right). \quad (1.42)$$

Rearranjando os termos de forma conveniente, temos

$$m_v = \frac{1}{N} \sum_i \xi_{iv} \xi_{i1} f\left(m_1 + \xi_{iv} \xi_{i1} m_v + \sum_{\mu \neq 1, v} \xi_{i\mu} \xi_{i1} m_\mu\right). \quad (1.43)$$

Como o termo  $\xi_{i\mu} \xi_{i1} m_v$  é da ordem de  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ , muito menor que  $m_1$ , e como a soma do resto

do argumento, é  $O(1)$ , podemos expandir a eq.(1.43) em  $\xi_{iv}m_v$ , até termos de primeira ordem, ficando com

$$m_v = \frac{1}{N} \sum_i \xi_{iv} \xi_{i1} f \left( m_1 + \sum_{\mu \neq 1, v} \xi_{i\mu} \xi_{i1} m_\mu \right) + \frac{1}{N} \sum_i \left\{ f' \left( m_1 + \sum_{\mu \neq 1, v} \xi_{i\mu} m_\mu \right) \right\} m_v, \quad (1.44)$$

onde  $f'$  é a derivada de  $f$ .

O somatório restante no argumento pode ser considerado como um ruído Gaussiano, e conforme (23), com média zero e variância dada por

$$\alpha r = \sum_{\mu \neq 1, v}^p m_\mu^2 \sim p m_\mu^2. \quad (1.45)$$

Visto que  $\xi_{iv} \xi_{i1}$  são variáveis aleatórias, decorrelacionadas de  $m_\mu$ , o segundo somatório em (1.44) se resume a uma integral sobre o ruído. Manteremos o primeiro termo na forma de somatório neste ponto por conveniência, como veremos a seguir. Isolando o termo  $m_v$ , conforme Geszti (23, 24), ficamos com

$$m_v = \frac{\frac{1}{N} \sum_i \xi_{i\mu} \xi_{i1} f (m_1 + \sum_{v \neq 1, \mu} \xi_{iv} \xi_{i1} m_v)}{1 - Q} \quad (1.46)$$

onde

$$Q \equiv \int Dz f' \{ (m_1 + \sqrt{\alpha r} z) \}.$$

Elevando a eq.(1.46) ao quadrado, de acordo com (1.4), temos

$$m_v^2 = \frac{\frac{1}{N^2} \sum_i f^2 (m_1 + \sum_{v \neq 1, \mu} \xi_{iv} \xi_{i1} m_v)}{[1 - Q]^2} \quad (1.47)$$

e, conforme a eq.(1.45),

$$r = \frac{Q_0}{[1 - Q]^2}, \quad (1.48)$$

onde

$$Q_0 \equiv \int Dz f^2 \{ (m_1 + \sqrt{\alpha r} z) \}.$$

Segue diretamente de (1.41) que

$$m_1 = \int Dz f (m_1 + \sqrt{\alpha r} z). \quad (1.49)$$

Em especial, quando  $T \rightarrow 0$ , as equações (1.47) e (1.48) assumem a seguintes formas:

$$m_1 = -\operatorname{erf}\left(\frac{m_1 - \theta}{\sqrt{2\alpha r}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{m_1}{\sqrt{2\alpha r}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{m_1 + \theta}{\sqrt{2\alpha r}}\right), \quad (1.50)$$

$$r = \left[ 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha r}} \left\{ \exp\left(-\frac{(m_1 + \theta)^2}{2\alpha r}\right) + \exp\left(-\frac{(m_1 - \theta)^2}{2\alpha r}\right) + \exp\left(-\frac{m_1^2}{2\alpha r}\right) \right\} \right]^{-2}. \quad (1.51)$$

A partir da iteração numérica destas equações podemos traçar um diagrama de  $(\alpha, \theta)$ , onde estudaremos apenas as propriedades de equilíbrio deste sistema, pois diferentemente do caso anterior, estas equações não descrevem a dinâmica da rede.

A fig.(1.3) apresenta o efeito do parâmetro  $\theta$  na capacidade de armazenamento de memória, apresentando duas regiões: uma de recuperação, marcada como  $R$ , onde  $m_1 = a$ , com  $a$  sendo uma constante positiva; e outra de não-recuperação, marcada como  $N/R$ , onde  $m = 0$ . Podemos constatar a importância do parâmetro  $\theta$ , pois há um valor ótimo,  $\theta = 1,77$ , em que  $\alpha_c = 0,211$ , alcançando um máximo.

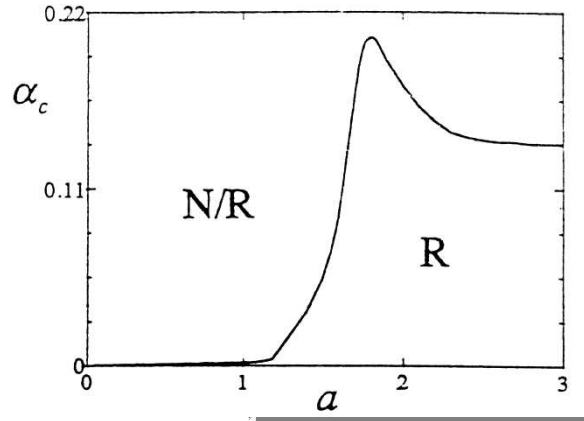


Figura 1.3: Capacidade máxima de armazenamento em função do parâmetro de não-monotocidade, dado aqui por  $a$ . A região  $R$  corresponde à região de recuperação e a  $N/R$ , à de não-recuperação.(19)

Tomando-se  $\theta \rightarrow \infty$ , de acordo com a figura (1.3), recuperamos a função de ativação monótona correspondente ao modelo de Hopfield. Nesse limite  $\alpha_c = 0,138$ , o que concorda com os resultados encontrados por Amit, Gutfreunt e Sompolinsky (25–27), obtidos pelo método das réplicas e, posteriormente por Peretto (23, 24, 28), por uma solução aproximada, de forma independente.

Podemos, ainda, analisar o efeito do acréscimo da temperatura sobre a capacidade de armazenamento, ao iterarmos as equações (1.47) e (1.48), onde mantemos o parâmetro  $\theta$  fixo e

variáveis  $\beta$ . A fig. (1.4) apresenta um diagrama  $(T, \alpha)$ , mostrando um rápido deterioramento da capacidade de armazenamento à medida que a temperatura aumenta. A região rotulada como  $R$  representa novamente a região de recuperação, e a por  $SG$ , de não-recuperação, apresentando um comportamento de vidro de spin, com  $m = 0$  e  $q \neq 0$ .

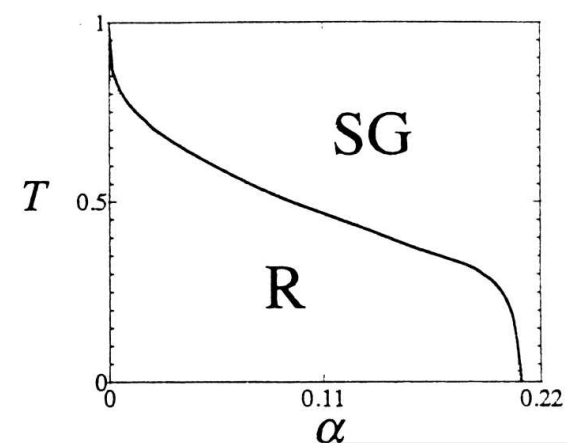


Figura 1.4: Efeito da temperatura sobre a capacidade de armazenamento, para  $\theta = 1,8$ . A região  $R$  apresenta recuperação, a região  $SG$  não apresenta recuperação, consistindo em uma fase de vidro de spin.(19)

Ainda devemos ressaltar que não podemos comparar diretamente os resultados obtidos para o  $\alpha_c$  entre os modelos diluídos e completamente conexos, pois a definição desta quantidade é diferente para cada caso. Podemos sim, comparar redes de mesma arquitetura e de funções de ativação diferentes, como as monótonas e não-monótonas. Comparando as arquiteturas completamente conexa monótonas e não-monótonas, podemos verificar um aumento na capacidade máxima de armazenamento para um valor ótimo do parâmetro  $\theta$ , alcançando 0,211, como podemos verificar na fig. (1.3). O que corresponde a um aumento de 0,073 em relação ao modelo de Hopfield (16). Podemos constatar que, para ambos os casos, a regra de Hebb leva a valores bem abaixo da previsão de Gardner de  $\alpha = 2,0$  (29–31) para a capacidade máxima de armazenamento do modelo de Hopfield dadas conexões  $J_{ij}$  gerais.

### 1.3 Rede Monótona em Camadas

A expressão "em camadas" faz referência à arquitetura da rede, isto é, descreve como os neurônios estão organizados. Da forma mais geral, essas redes podem apresentar uma camada de entrada, uma de saída e possíveis camadas intermediárias. Cada camada pode estar conectada com as camadas seguintes das mais diversas formas, contanto que não haja reinjeção vinda

de neurônios de camadas posteriores ou mesmo da atual, pois isto consistiria em incluir uma componente recorrente no sistema. Portanto, esta arquitetura impõe um sentido de propagação único, entrada→saída, para a rede.

Nesta seção, assim como no estudo das redes não-monótonas em camadas, estamos interessados em estudar sistemas que não apresentam uma camada de saída e sim um fluxo contínuo de informação que passa de camada para camada, de forma que a nossa medida de interesse, o *overlap* médio, será computado sempre na última camada atualizada, sendo a rede suficientemente grande para alcançar um comportamento estacionário desta medida. Impomos, ainda, que só existam conexões entre camadas adjacentes. A fig.(1.5) apresenta um esquema desta arquitetura, mostrando um diagrama de conexões, entre o ambiente externo e a camada de entrada, e entre duas camadas. Devido a esta arquitetura, a atualização neste modelo é obviamente síncrona, isto é, todos os sítios de uma camada são atualizados no mesmo instante.

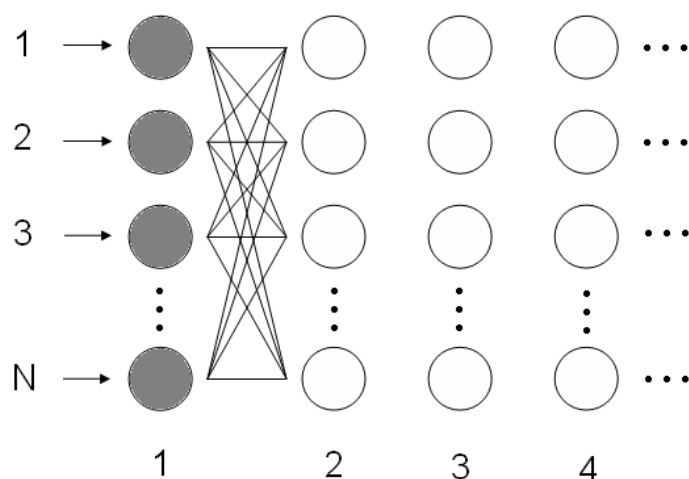


Figura 1.5: Diagrama de conexões de uma rede em camadas com conexões apenas entre camadas adjacentes, sem uma camada de saída.

O *overlap* para uma rede em camadas pode ser reescrito como

$$M_v^l = \frac{1}{N} \sum_i^N \xi_{iv}^l S_i^l, \quad (1.52)$$

onde  $v$  indica o padrão,  $i$  é o índice de sítio e  $l$  é o índice de camada.

Como nos modelos apresentados nas últimas seções, os neurônios podem assumir os estados  $S_i^l = \{+1, -1\}$ , de acordo com os estados dos neurônios na camada anterior. Neste modelo o estado assumido irá seguir uma distribuição de Gibbs, pois admitimos que o sistema esteja



em equilíbrio com um reservatório térmico. Esta distribuição pode ser expressa pela seguinte função probabilística:

$$P(S_i^{l+1}) = \frac{\exp(\beta S_i^{l+1} h_i^{l+1})}{2 \cosh(\beta h_i^{l+1})}. \quad (1.53)$$

Terminamos de definir este modelo determinando que a regra de aprendizado é expressa da seguinte maneira,

$$J_{ij}^{l+1} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^p \xi_{iv}^{l+1} \xi_{jv}^l, \quad (1.54)$$

Trata-se de uma forma da regra de Hebb que conecta apenas neurônios de camadas adjacentes.

A partir das equações (1.52), (1.53) e (1.54), podemos calcular a evolução das variáveis dinâmicas desta rede. O desenvolvimento completo será apresentado no capítulo seguinte, pois este modelo representa um caso limite do modelo não-monótono em camadas. O *overlap* na camada  $l + 1$  é obtido recursivamente a partir do *overlap* na camada  $l$  de acordo com

$$m_1^{l+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tanh(\beta(m_1^l + \Delta^l z)) Dz \quad (1.55)$$

$$(\Delta^{l+1})^2 = \alpha + \beta^2 I^l (\Delta^l)^2 \quad (1.56)$$

onde  $\Delta^{l+1}$  representa um termo de ruído gerado pelas flutuações quadráticas dos padrões que não condensam, e

$$I^l = \left( \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\frac{1}{2}z^2)}{\cosh^2 \beta(m_1^l + \Delta^l z)} \right)^2 = (1 - q^l)^2. \quad (1.57)$$

O significado físico da  $\Delta$  será dado no próximo capítulo.

Em especial, quando  $\beta \rightarrow \infty$ , a função exercida pelos neurônios recai no caso determinístico, onde,

$$\langle S_i \rangle = \begin{cases} +1, & h_i^{l+1} \geq 0 \\ -1, & h_i^{l+1} < 0 \end{cases} \quad (1.58)$$

Nesse limite, a integral em (1.55) pode ser efetuada analiticamente, e ficamos com o seguinte conjunto de equações:

$$m_1^{l+1} = \operatorname{erf} \left( \frac{m_1^l}{\sqrt{2\Delta^l}} \right) \\ (\Delta^{l+1})^2 = \alpha + \frac{2}{\pi} \exp \left[ \left( -\frac{m_1^l}{\Delta^l} \right)^2 \right]. \quad (1.59)$$

Como demonstrado por Domany e colaboradores (32, 33), a partir da iteração destas equações encontramos dois tipos de fases, uma de recuperação, na qual o *overlap* assume um valor fixo diferente de zero, e uma de não-recuperação, onde o *overlap* assume o valor zero. Em  $T \rightarrow 0$ , a capacidade de armazenamento máxima é de 0,269, o que pode ser observado na fig.(3.3) apresentada no capítulo 3, no caso em que  $\theta \rightarrow \infty$ , onde se recupera a monotocidade da função de ativação.

## 2 *Modelo não-monótono em camadas*

O modelo não-monótono em camadas, tema do nosso trabalho, consiste em uma rede em camadas com a mesma topologia de conexões do modelo de Domany, isto é, apresenta apenas conexões entre camadas adjacentes e de forma completamente conexa, não apresentando uma camada de saída, conforme a fig. (1.5); os estados dos neurônios podem assumir os valores  $S_i = \{+1, -1\}$  e a função de ativação é a mesma utilizada nas seções (1.1) e (1.2), dada pela função não-monótona (1.6).

Na próxima seção apresentaremos a análise sinal ruído aplicada a este problema, onde encontramos um conjunto de equações de recorrência para as variáveis dinâmicas deste modelo.

### 2.1 **Análise Sinal-Ruído**

A medida de maior interesse em memória associativa é o overlap médio, representado aqui por  $m_v^l$ , um vetor cujas componentes correspondem essencialmente à superposição do estado da rede com cada um dos padrões armazenados. Aqui,  $v$  indica o padrão e  $l$  a camada onde está sendo feita a medida. Sendo assim, procuramos uma equação de recorrência para estas medidas, a fim de descrever sua dinâmica e suas características básicas.

Em primeiro lugar, vamos estudar o caso onde apenas um padrão está sendo recuperado. Em segundo, dois padrões. Para ambos os casos, definiremos a dinâmica de forma exata. Vamos partir de uma função de ativação genérica, ímpar, de dois estados e ao final analisaremos o caso particular não-monótono.

A evolução dinâmica do overlap em função da camada será obtida pelo mesmo procedimento apresentado na seção (1.1), onde separamos o campo efetivo sobre um dado sítio em um termo de sinal e um de ruído.

## 2.2 Recuperação de um padrão

A princípio, vamos apenas impor que os neurônios possam assumir os valores  $S_i = \{+1, -1\}$ , em função do estado dos neurônios na camada anterior, conforme uma determinada função de ativação  $f$  ímpar, que será função do campo  $h_i^{l+1}$  gerado sobre o sítio  $i$  da rede, na camada  $l+1$ , de forma que,

$$\langle S_i^{l+1} \rangle = f(h_i^{l+1}) \quad (2.1)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  indica uma média térmica,  $i$  é índice de sítio,  $l+1$  indica a camada.

Para o campo sobre o neurônio  $i$  da camada  $l+1$  temos

$$h_i^{l+1} = \sum J_{ij}^{l+1} S_j^l, \quad (2.2)$$

lembrando que os estados dos neurônios na primeira camada, a de entrada, representam a condição inicial para a dinâmica da rede. Os pesos sinápticos são descritos pela eq. (1.54).

A medida de interesse para o nosso estudo é o overlap, que expressa a proximidade da rede com um determinado padrão; para a a camada  $l+1$ , de acordo com a eq. (1.52), ela é dada por

$$M_v^{l+1} = \frac{1}{N} \sum_i \xi_{iv}^{l+1} S_i^{l+1}, \quad (2.3)$$

Podemos expressar a última equação pela sua média térmica, indicada por  $\langle \dots \rangle$  e configuracional, indicada por uma barra horizontal. Admitindo um erro da ordem  $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ , e temos,

$$M_v^{l+1} = \overline{\left\langle \frac{1}{N} \sum_i \xi_{iv}^{l+1} S_i^{l+1}(h_i^{l+1}) \right\rangle} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (2.4)$$

Considerando  $N$  suficientemente grande, podemos aproximar a equação (2.4) pelo seu valor médio, dado pelo primeiro termo da equação 2.4. Representaremos este valor médio por  $m$ , e assim ficamos com

$$m_v^{l+1} = \overline{\left\langle \frac{1}{N} \sum_i \xi_{iv}^{l+1} S_i^{l+1}(h_i^{l+1}) \right\rangle} = \frac{1}{N} \sum_i \overline{\left\langle \xi_{iv}^l S_i^{l+1}(h_i^{l+1}) \right\rangle}. \quad (2.5)$$

Esperamos que a média seja igual sobre todos os sítios e então,

$$m_v^{l+1} = \overline{\left\langle \xi_{iv}^{l+1} S_i^{l+1}(h_i^{l+1}) \right\rangle}. \quad (2.6)$$

Como a média térmica não age sobre os padrões, da eq.(2.6) e da definição (2.1) temos

$$m_v^{l+1} = \overline{\xi_{iv}^{l+1} f(h_i^{l+1})}. \quad (2.7)$$

Supondo estarmos recuperando apenas o padrão 1, obtemos a expressão

$$m_1^{l+1} = \overline{\xi_{i1}^{l+1} f\left(\sum_{j=1}^N J_{ij}^{l+1} S_j^l\right)}. \quad (2.8)$$

Substituindo a eq.(1.54) em (2.8) temos

$$m_1^{l+1} = \overline{\xi_{i1}^{l+1} f\left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \sum_{v=1}^P \xi_{iv}^{l+1} \xi_{jv}^l S_j^l\right)}.$$

Como postulamos que  $f$  é uma função ímpar e  $\xi_{i1}$  pode assumir os valores  $+1$  ou  $-1$ , podemos passar  $\xi_{i1}$  para dentro do argumento de  $f$ , ficando com

$$m_1^{l+1} = f\left(\overline{\frac{1}{N} \sum_{v=1}^P \xi_{i1}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} \sum_{j=1}^N \xi_{jv}^l S_j^l}\right). \quad (2.9)$$

Rearranjando novamente o argumento da  $f$  a fim de separar os termos que possuem o sub-índice 1 e organizando de forma conveniente, temos

$$m_1^{l+1} = f\left(\overline{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_{j1}^l S_j^l + \sum_{v=2}^P \xi_{i1}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_{jv}^l S_j^l}\right), \quad (2.10)$$

onde reconhecemos os overlaps com os diversos padrões, e temos,

$$m_1^{l+1} = f\left(\overline{M_1^l + \sum_{v=2}^P \xi_{i1}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} M_v^l}\right). \quad (2.11)$$

Como vimos em (2.5) podemos aproximar o overlap com o padrão 1 pelo seu overlap médio, e temos

$$m_1^{l+1} = f\left(\overline{m_1^l + \sum_{v=2}^P \xi_{i1}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} M_v^l}\right). \quad (2.12)$$

Para os demais padrões a média do overlap vale zero, logo não podemos ignorar termos de ordem  $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ . O segundo termo no argumento de (2.12) possui uma distribuição gaussiana centrada em zero, pois se trata de uma soma muito grande de termos decorrelacionados, positivos e negativos de mesma ordem (teorema do limite central). E de fato vamos assumir que este

termo representa um termo de ruído com esta distribuição, denotado pela variável  $x$ . Portanto  $\bar{x} = 0$ , como veremos a seguir. A eq. (2.12) fica

$$m_1^{l+1} = \overline{f(m_1^l + x)}. \quad (2.13)$$

A média configuracional agora pode ser tomada mediante uma integração gaussiana sobre o ruído  $x$  como segue:

$$m_1^{l+1} = \overline{f(m_1^l + x)} = \int f(m_1^l + x) \frac{\exp(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\Delta^l}\right)^2)}{\sqrt{2\pi} (\Delta^l)^2} dx, \quad (2.14)$$

onde  $\Delta^l$  corresponde à variância do ruído na camada  $l$ .

Propomos uma mudança de variável de forma que  $x = \Delta^l z$ , o que nos permite escrever a eq. (2.14) da seguinte forma:

$$m_1^{l+1} = \int f(m_1^l + \Delta^l z) Dz. \quad (2.15)$$

Até este ponto temos uma equação de recorrência para o sinal  $m_1^{l+1}$  de uma camada, em função do sinal  $m_1^l$  e do quadrado da variância  $(\Delta^l)^2$  da camada anterior. Falta-nos, portanto uma equação de recorrência para a variância.

Dada a equação que descreve o ruído,

$$x = \sum_{v \neq 1} \xi_{i1}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} M_v^l,$$

como definido anteriormente, sua média configuracional vale zero, pois a média atuará sobre elementos da camada  $l+1$ , e como  $\xi_{iv}^l$  só pode assumir os valores  $+1$  e  $-1$  com a mesma probabilidade, lembrando que os padrões são decorrelacionados, ficamos com

$$\bar{x} = \sum_{v \neq 1} \overline{\xi_{i1}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1}} M_v^l = 0. \quad (2.16)$$

Para a variância, temos

$$\left(\Delta^l\right)^2 \equiv \overline{x^2} = \overline{\sum_{v>1} \xi_{i1}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} M_v^l \sum_{\mu>1} \xi_{i1}^{l+1} \xi_{i\mu}^{l+1} M_\mu^l}, \quad (2.17)$$

onde os termos cruzados vão a zero quanto tomamos a média sobre os  $\xi_{iv}$ , e portanto,

$$\overline{x^2} = \sum_{v,\mu>1} \delta_{v\mu} M_v^l M_\mu^l = \sum_{v>1} \left(M_v^l\right)^2. \quad (2.18)$$

A última igualdade de (2.18) expressa a média sobre o quadrado de  $M_v^l$  a menos da normalização por  $\frac{1}{p}$ , excluindo o padrão 1 e então,

$$\left(\Delta^l\right)^2 = p \overline{\left\langle \left(M_v^l\right)^2 \right\rangle} + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (2.19)$$

Notemos que o primeiro termo de (2.19), para  $N$  suficientemente grande, é bem maior que o segundo, e assim podemos aproximar esta equação pelo seu primeiro termo

$$\left(\Delta^l\right)^2 \approx p \overline{\left\langle \left(M_v^l\right)^2 \right\rangle}. \quad (2.20)$$

A fim de encontrar medidas conhecidas, lembrando a definição (2.5) para o overlap médio e com um pouco de álgebra obtemos

$$\overline{\left\langle \left(M_v^{l+1}\right)^2 \right\rangle} = \overline{\left\langle \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \xi_{iv}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} S_i^{l+1} S_j^{l+1} \right\rangle}$$

Lembrando que os sítios são descorrelacionados, a média sobre o produto se resume ao produto das médias. Então, separando termos com  $i = j$ , ficamos com

$$\overline{\left\langle \left(M_v^{l+1}\right)^2 \right\rangle} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \overline{\left\langle \xi_{iv}^{l+1} S_i^{l+1} \right\rangle \left\langle \xi_{jv}^{l+1} S_j^{l+1} \right\rangle}. \quad (2.21)$$

Como a média térmica não atua sobre os padrões, e usando a simetria ímpar da função  $f$ , temos

$$\overline{\left\langle \left(M_v^{l+1}\right)^2 \right\rangle} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \overline{\left( f\left(\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1}\right) \right) \left( f\left(\xi_{jv}^{l+1} h_j^{l+1}\right) \right)}, \quad (2.22)$$

e como os sítios são descorrelacionados,

$$\overline{\left\langle \left(M_v^{l+1}\right)^2 \right\rangle} = \frac{1}{N} + \left( \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \overline{\left( f\left(\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1}\right) \right)} \right)^2. \quad (2.23)$$

O argumento da  $f$  pode ser rearranjado de forma a separar os termos de sub-índice 1 e  $v$  e assim temos

$$\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1} = \xi_{iv}^{l+1} \sum_j J_{ij}^{l+1} S_j^l = \xi_{iv}^{l+1} \sum_j \frac{1}{N} \sum_\mu \xi_{i\mu}^{l+1} \xi_{j\mu}^l S_j^l,$$

onde reconhecemos a expressão para o overlap,

$$\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1} = \sum_\mu \xi_{iv}^{l+1} \xi_{i\mu}^{l+1} M_\mu^l.$$

Desta forma, novamente efetuamos uma separação sinal ruído, separando os termos em  $\mu = 1$  e  $\mu = v$  dos demais

$$\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1} = \xi_{iv}^{l+1} \xi_{i1}^{l+1} M_1^l + M_v^l + \sum_{\mu \neq 1, v} \xi_{iv}^{l+1} \xi_{i\mu}^{l+1} M_\mu^l, \quad (2.24)$$

sendo que o somatório restante corresponde a um termo de ruído Gaussiano, de forma análoga à feita anteriormente, vamos representá-lo por uma variável  $x$ , e assim,

$$\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1} = \xi_{iv}^{l+1} \xi_{i1}^{l+1} M_1^l + M_v^l + x. \quad (2.25)$$

Propomos uma nova mudança de variáveis da forma  $\xi_{iv}^{l+1} \xi_{i1}^{l+1} \rightarrow \eta_{i1}$ , onde  $\eta_{i1}$  pode assumir os valores  $\{+1, -1\}$  com a mesma probabilidade, e (2.25) toma a seguinte forma:

$$\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1} = \eta_{i1} M_1^l + M_v^l + x. \quad (2.26)$$

Voltando à (2.23), podemos tomar a média configuracional efetuando uma integração sobre o ruído e uma soma sobre os  $\eta_i$ , onde podemos suprimir os sub-índices  $i$  e  $1$ , e então podemos reescrevê-la na forma

$$\overline{\langle (M_v^{l+1})^2 \rangle} = \frac{1}{N} + \left( \frac{1}{2} \sum_{\eta=\pm 1} \int f(\eta M_1^l + M_v^l + x) \frac{\exp(-\frac{1}{2} (\frac{x}{\Delta^l})^2)}{\sqrt{2\pi} (\Delta^l)^2} dx \right)^2, \quad (2.27)$$

somando sobre os possíveis valores de  $\eta$ ,

$$\overline{\langle (M_v^{l+1})^2 \rangle} = \frac{1}{N} + \frac{1}{4} \left( \int Dz f(m_1^l + M_v^l + \Delta^l z) - \int Dz f(m_1^l - M_v^l + \Delta^l z) \right)^2. \quad (2.28)$$

Notemos que  $M_v^l$ , apesar de pequeno, é um termo importante da eq. (2.28), pois é ele que torna esta equação diferente de uma constante. Porém esta equação não pode ser iterada da forma que está posta, pois o termo  $M_v^l$  é muito menor que a soma do resto do argumento, e não seria corretamente computado. Para evitar esta complicação, podemos expandir a função  $\overline{\langle (M_v^l)^2 \rangle}$  em torno de  $M_v^l$ . Sua primeira derivada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial M_v} \overline{\langle (M_v^{l+1})^2 \rangle} &= \frac{1}{2} \left( \int f(m_1^l + M_v^l + \Delta^l z) Dz - \int f(m_1^l - M_v^l + \Delta^l z) Dz \right) \\ &\quad \times \left( \int f'(m_1^l + M_v^l + \Delta^l z) Dz + \int f'(m_1^l - M_v^l + \Delta^l z) Dz \right), \end{aligned}$$



e a segunda, por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial M_v^l{}^2} \overline{\langle (M_v^{l+1})^2 \rangle} &= \frac{1}{2} \left( \int f(m_1^l + M_v^l + \Delta^l z) Dz - \int f(m_1^l - M_v^l + \Delta^l z) Dz \right) \\ &\quad \times \left( \int f''(m_1^l + M_v^l + \Delta^l z) Dz - \int f''(m_1^l - M_v^l + \Delta^l z) Dz \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \int f'(m_1^l + M_v^l + \Delta^l z) Dz + \int f'(m_1^l - M_v^l + \Delta^l z) Dz \right)^2, \end{aligned}$$

onde  $f''$  é a segunda derivada de  $f$ .

Na expansão de  $\overline{\langle (M_v^l)^2 \rangle}$  até segunda ordem, ao tomarmos  $M_v^l = 0$ , os únicos elementos que restam são a fração  $\frac{1}{N}$ , que vem do termo de ordem zero da expansão, e o segundo elemento do termo de segunda ordem. Assim, a expansão toma a forma:

$$\overline{\langle (M_v^{l+1})^2 \rangle} = \frac{1}{N} + \left( \int f'(m_1^l + \Delta^l z) Dz \right)^2 (M_v^l)^2 = \frac{1}{N} + V^2 (M_v^l)^2, \quad (2.29)$$

onde

$$V = \int f'(m_1^l + \Delta^l z) Dz$$

e, voltando à eq. (2.20) onde  $p = \alpha N$  temos,

$$(\Delta^{l+1})^2 = \alpha N \left( \frac{1}{N} + V^2 (M_v^l)^2 \right) = \alpha + V^2 \left( \alpha N (M_v^l)^2 \right),$$

ou,

$$(\Delta^{l+1})^2 = \alpha + V^2 (\Delta^l)^2. \quad (2.30)$$

A eq. (2.30) depende exclusivamente do termo de sinal e da variância na camada anterior. Com isso, chegamos a um conjunto de equações que descrevem a dinâmica de uma rede genérica de função de ativação ímpar, em camadas, onde há ligações apenas entre camadas contíguas e de estados binários  $\{-1, +1\}$ , com mesma probabilidade. Resumindo os resultados temos

$$\begin{cases} m_1^{l+1} = \int f(m_1^l + \Delta^l z) Dz \\ (\Delta^{l+1})^2 = \alpha + V^2 (\Delta^l)^2. \end{cases} \quad (2.31)$$

Estas equações são válidas para redes síncronas que não apresentam componentes recorrentes e possuem uma função de ativação ímpar, podendo ser utilizada tanto para o nosso modelo, como para o modelo monótono em camadas, representando a dinâmica exata para ambos os modelos. Dada a definição da  $f$ , o conjunto de equações (2.31) pode ser iterado, sendo necessária a sua integração numérica.

No caso particular não-monótono, temos como a atividade média dos neurônios:

$$\langle S_i^l \rangle = f(h_i^l) = -\tanh(\beta(h_i^l + \theta)) + \tanh(\beta(h_i^l)) - \tanh(\beta(h_i^l - \theta)), \quad (2.32)$$

À temperatura zero a  $f$  toma a forma:

$$f_0(h_i^l) = -\text{sgn}(h_i^l + \theta) + \text{sgn}(h_i^l) - \text{sgn}(h_i^l - \theta). \quad (2.33)$$

As integrais (2.31) e (??) podem ser efetuadas analiticamente e a equação (2.15) fica

$$m_1^{l+1} = \int \left( -\text{sgn}(m_1^l + \Delta^l z + \theta) + \text{sgn}(m_1^l + \Delta^l z) - \text{sgn}(m_1^l + \Delta^l z - \theta) \right) Dz. \quad (2.34)$$

Agora podemos integrar cada uma das funções sinais do seguinte modo, conforme o apêndice A:

$$\int \text{sgn}(a + \Delta^l z) Dz = \text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2(\Delta^l)^2}}\right), \quad (2.35)$$

e portanto a expressão para a equação (2.34) fica:

$$m_1^{l+1} = -\text{erf}\left(\frac{m_1^l + \theta}{\sqrt{2(\Delta^l)^2}}\right) + \text{erf}\left(\frac{m_1^l}{\sqrt{2(\Delta^l)^2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{m_1^l - \theta}{\sqrt{2(\Delta^l)^2}}\right). \quad (2.36)$$

Para definirmos a forma do ruído partimos da primeira derivada da  $f$ , que agora tem a seguinte forma:

$$f'_0(h_i^l) = -2\delta(h_i^l + \theta) + 2\delta(h_i^l) - 2\delta(h_i^l - \theta). \quad (2.37)$$

Agora a função  $V$  pode ser integrada facilmente, conforme apêndice B, resultando em

$$V_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi(\Delta^l)^2}} \left( -\exp\left(-\frac{(-m_1^l - \theta)^2}{2(\Delta^l)^2}\right) + \exp\left(-\frac{(-m_1^l)^2}{2(\Delta^l)^2}\right) - \exp\left(-\frac{(-m_1^l + \theta)^2}{2(\Delta^l)^2}\right) \right).$$

Compactando a notação, substituindo o parênteses maior por uma variável  $R$ , ficamos com

$$V_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi(\Delta^l)^2}} R. \quad (2.38)$$

Com isso, nosso conjunto de equações de recorrência a temperatura zero pode ser resumida de seguinte maneira:

$$\begin{cases} m_1^{l+1} = -\operatorname{erf}\left(\frac{m_1^l + \theta}{\sqrt{2(\Delta^l)^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{m_1^l}{\sqrt{2(\Delta^l)^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{m_1^l - \theta}{\sqrt{2(\Delta^l)^2}}\right), \\ (\Delta^{l+1})^2 = \alpha + \frac{2}{\pi}R^2. \end{cases} \quad (2.39)$$

onde

$$R = \left( -\exp\left(-\frac{(-m_1^l - \theta)^2}{2(\Delta^l)^2}\right) + \exp\left(-\frac{(-m_1^l)^2}{2(\Delta^l)^2}\right) - \exp\left(-\frac{(-m_1^l + \theta)^2}{2(\Delta^l)^2}\right) \right).$$

## 2.3 Recuperação de dois padrões

Assim como na recuperação de um padrão, procuramos um conjunto de equações de recorrência para o overlap dos padrões a recuperar. Para tanto, de forma completamente análoga à seção (2.2), vamos nos valer da arquitetura em camadas e efetuar uma análise sinal-ruído. Vamos supor que queremos recuperar os padrões 1 e 2. Conforme a equação (2.9), temos

$$m_1^{l+1} = f \left( \overline{\frac{1}{N} \sum_{v=1}^p \xi_{i1}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} \sum_{j=1}^N \xi_{jv}^l S_j^l} \right). \quad (2.40)$$

$$m_2^{l+1} = f \left( \overline{\frac{1}{N} \sum_{v=1}^p \xi_{i2}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} \sum_{j=1}^N \xi_{jv}^l S_j^l} \right). \quad (2.41)$$

Reconhecendo no argumento das funções acima a definição do overlap e separando os termos de sinal, de sub-índice 1 e 2, dos demais, ficamos com

$$m_1^{l+1} = f \left( \overline{M_1^l + \xi_{i1}^{l+1} \xi_{i2}^{l+1} M_2^l + \sum_{v=3}^p \xi_{i1}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} M_v^l} \right) \quad (2.42)$$

$$m_2^{l+1} = f \left( \overline{M_2^l + \xi_{i2}^{l+1} \xi_{i1}^{l+1} M_1^l + \sum_{v=3}^p \xi_{i2}^{l+1} \xi_{iv}^{l+1} M_v^l} \right). \quad (2.43)$$

O somatório no argumento da equação acima consiste em um ruído gaussiano, denominado aqui por  $x$ , pois se trata de uma soma grande de termos aleatórios em torno de zero. Já aproximando  $M$  por  $m$  para os padrões de recuperação, temos

$$m_1^{l+1} = f \left( \overline{m_1^l + \xi_{i1}^{l+1} \xi_{i2}^{l+1} m_2^l + x} \right), \quad (2.44)$$

$$m_2^{l+1} = f \left( \overline{m_2^l + \xi_{i2}^{l+1} \xi_{i1}^{l+1} m_1^l + x} \right). \quad (2.45)$$

Propomos agora uma mudança de variáveis, de modo que  $\xi_{i1}^{l+1} \xi_{i2}^{l+1} = \xi_{i2}^{l+1} \xi_{i1}^{l+1} = \eta$ , ficamos com

$$m_1^{l+1} = f \left( \overline{m_1^l + \eta m_2^l + x} \right), \quad (2.46)$$

$$m_2^{l+1} = f \left( \overline{m_2^l + \eta m_1^l + x} \right). \quad (2.47)$$

A média configuracional pode ser tomada por uma integral sobre o ruído e de uma soma

sobre a distribuição dos padrões, como a seguir

$$m_1^{l+1} = \frac{1}{2} \sum_{\eta=\pm 1} \int f(m_1^l + \eta m_2^l + x) \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\frac{x}{\Delta^l})^2)}{\sqrt{2\pi\Delta^{l^2}}} dx, \quad (2.48)$$

$$m_2^{l+1} = \frac{1}{2} \sum_{\eta=\pm 1} \int f(m_2^l + \eta m_1^l + x) \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\frac{x}{\Delta^l})^2)}{\sqrt{2\pi\Delta^{l^2}}} dx. \quad (2.49)$$

Efetuada uma nova mudança de variáveis, tal que  $x = \Delta z$ , segue,

$$\begin{aligned} m_1^{l+1} &= \frac{1}{2} \sum_{\eta=\pm 1} \int f(m_1^l + \eta m_2^l + \Delta^l z) Dz \\ m_2^{l+1} &= \frac{1}{2} \sum_{\eta=\pm 1} \int f(m_2^l + \eta m_1^l + \Delta^l z) Dz, \end{aligned}$$

somando sobre os valores de  $\eta$

$$\begin{aligned} m_1^{l+1} &= \frac{1}{2} \left[ \int f(m_1^l + m_2^l + \Delta^l z) Dz + \int f(m_1^l - m_2^l + \Delta^l z) Dz \right] \\ m_2^{l+1} &= \frac{1}{2} \left[ \int f(m_2^l + m_1^l + \Delta^l z) Dz + \int f(m_2^l - m_1^l + \Delta^l z) Dz \right], \end{aligned}$$

chegamos a um conjunto de equações de recorrência para os sinais de uma camada em função dos sinais e da variância do ruído na camada anterior. Buscamos agora uma equação de recorrência para a variância.

Como visto na seção anterior, temos para a variância a seguinte equação:

$$(\Delta^l)^2 \approx p \overline{\langle M_v^{l^2} \rangle}, \quad (2.50)$$

com  $v > 2$ .

Conforme a equação (2.23),

$$\overline{\langle (M_v^{l+1})^2 \rangle} = \frac{1}{N} + \left( \frac{1}{N} \sum_i \overline{\langle f(\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1}) \rangle} \right)^2, \quad (2.51)$$

onde já utilizamos o fato de os sítios serem descorrelacionados.

Esperamos que a média sobre  $f$  independa do sítio, e portanto temos

$$\overline{\langle (M_v^{l+1})^2 \rangle} = \frac{1}{N} + \left( \overline{\langle f(\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1}) \rangle} \right)^2. \quad (2.52)$$

Agora vamos efetuar uma separação sinal-ruído no argumento da equação (2.52), da seguinte

maneira,

$$\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1} = \xi_{iv}^{l+1} \xi_{i1}^{l+1} m_1^l + \xi_{iv}^{l+1} \xi_{i2}^{l+1} m_2^l + M_v^l + x, \quad (2.53)$$

onde  $x$  representa o termo de ruído Gaussiano.

Propomos aqui a mudança de variáveis  $\xi_{iv}^{l+1} \xi_{ia}^{l+1} \rightarrow \eta_a$  e ficamos com,

$$\xi_{iv}^{l+1} h_i^{l+1} = \eta_1 m_1^l + \eta_2 m_2^l + M_v^l + x. \quad (2.54)$$

Substituindo (2.54) em (2.52), temos

$$\overline{\left\langle \left( M_v^{l+1} \right)^2 \right\rangle} = \frac{1}{N} + \overline{\left( f \left( \eta_1 m_1^l + \eta_2 m_2^l + M_v^l + x \right) \right)^2}. \quad (2.55)$$

A média configuracional pode ser tomada mediante uma integração sobre o ruído e uma soma sobre os possíveis valores de  $\eta$  e assim

$$\overline{\left\langle \left( M_v^{l+1} \right)^2 \right\rangle} = \frac{1}{N} + \left( \frac{1}{4} \sum_{\eta_1 = \pm 1} \sum_{\eta_2 = \pm 1} \int f \left( \eta_1 m_1^l + \eta_2 m_2^l + M_v^l + \Delta^l z \right) D z \right)^2. \quad (2.56)$$

Devido a diferença de magnitudes dos termos que compõem o argumento da  $f$ , esta equação ainda não pode ser iterada computacionalmente. Porém, como  $M_v^l$  é muito pequeno se comparado com a soma do resto do argumento, podemos expandir o argumento da  $f$  em  $M_v^l$ , até primeira ordem e assim, devido a simetria destas equações, obtemos a seguinte expressão:

$$\overline{\left\langle \left( M_v^{l+1} \right)^2 \right\rangle} = \frac{1}{N} + V^2 M_v^{l2}, \quad (2.57)$$

onde

$$V = \frac{1}{2} \int \left[ f' \left( m_1^l + m_2^l + \Delta^l z \right) + f' \left( m_1^l - m_2^l + \Delta^l z \right) \right] D z. \quad (2.58)$$

Levando (2.57) em (2.50) temos

$$\left( \Delta^{l+1} \right)^2 = \alpha + V^2 p M_v^{l2} = \alpha + V^2 \Delta^{l2}. \quad (2.59)$$

Com esta última equação, novamente obtivemos um conjunto de equações de recorrência. Neste caso, temos três equações, uma para cada medida do overlap e uma para o quadrado da variância. Este método de análise pode ser facilmente estendido para a recuperação de mais estados simultâneos.

## 2.4 Distribuição dos campos locais

Nesta seção, vamos apresentar o desenvolvimento das equações para a determinação da distribuição dos campos locais. Esta medida é de grande relevância para este trabalho, pois indica, em média, qual porção do campo sobre os sítios está favorecendo a recuperação de um padrão desejado.

Definimos a probabilidade do campo  $H_i^{l+1} = \xi_{i1}^{l+1} h_i^{l+1}$  assumir um determinado valor  $\lambda$ , quando o estado de recuperação é dado por  $\xi_{i1}^{l+1}$ , da seguinte forma:

$$P(\lambda) = \overline{\delta\left(\lambda - \xi_{i1}^{l+1} h_i^{l+1}\right)}, \quad (2.60)$$

onde a barra horizontal representa a média sobre todas as variáveis aleatórias.

Substituindo a expressão para o campo  $h_i^{l+1}$ ,

$$P(\lambda) = \overline{\delta\left(\lambda - \xi_{i1}^{l+1} \sum_j J_{ij}^{l+1} S_i^l\right)}. \quad (2.61)$$

Como  $J_{ij}^{l+1} = \frac{1}{N} \sum_v \xi_{iv}^{l+1} \xi_{jv}^l$ , temos

$$P(\lambda) = \overline{\delta\left(\lambda - \sum_j \frac{1}{N} \sum_v \xi_{iv}^{l+1} \xi_{jv}^l \xi_{i1}^{l+1} S_i^l\right)} \quad (2.62)$$

e rearranjando de forma conveniente,

$$P(\lambda) = \overline{\delta\left(\lambda - \sum_v \xi_{iv}^{l+1} \xi_{i1}^{l+1} \frac{1}{N} \sum_j \xi_{jv}^l S_i^l\right)}, \quad (2.63)$$

onde reconhecemos a expressão para os overlaps,

$$P(\lambda) = \overline{\delta\left(\lambda - \sum_v \xi_{iv}^{l+1} \xi_{i1}^{l+1} M_v^l\right)}. \quad (2.64)$$

Separando o termo  $v = 1$  dos demais, ficamos com

$$P(\lambda) = \overline{\delta\left(\lambda - M_1^l - \sum_{v \neq 1} \xi_{iv}^{l+1} \xi_{i1}^{l+1} M_v^l\right)}. \quad (2.65)$$

O somatório restante, como vimos na seção (2.1), corresponde a um ruído Gaussiano, representado por  $x$ , de média zero e variância  $(\Delta^l)^2$  dada pela eq. (2.21). Portanto, podemos

reescrever 2.65 da seguinte maneira

$$P(\lambda) = \overline{\delta(\lambda - M_1^l - x)}. \quad (2.66)$$

Podemos tomar a média efetuando uma integração sobre o ruído, de forma que

$$P(\lambda) = \int \delta(\lambda - M_1^l - x) \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\frac{x}{\Delta^l})^2)}{\sqrt{2\pi}(\Delta^l)^2} dx, \quad (2.67)$$

que resulta em

$$P(\lambda) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\frac{\lambda - M_1^l}{\Delta^l})^2)}{\sqrt{2\pi}(\Delta^l)^2}. \quad (2.68)$$

Esta equação permite-nos medir, dado um valor de  $\Delta^l$  e um de  $M_1$ , qual a probabilidade do campo assumir um valor  $\lambda$ .



## 3 *Resultados*

Na revisão apresentada no capítulo 1, vimos que a troca de uma função de ativação monótona por uma não-monótona (FNM), em redes completamente conexas recorrentes, leva a um aumento da capacidade crítica de armazenamento quando feito um ajuste adequado de seus parâmetros. Este aumento não ocorre em redes extremamente diluídas. Ao estudarmos a dinâmica exata das redes extremamente diluídas, constatamos o aparecimento de diversos tipos de atratores, entre pontos fixos, soluções cíclicas e caóticas. Ainda constatamos que a arquitetura em camadas, apresentada na seção (1.3), também permite o estudo da dinâmica exata desta rede ao apresentar padrões descorrelacionados entre as camadas.

De acordo com estes dados, levantamos a possibilidade de uma FNM aumentar a capacidade de armazenamento em uma arquitetura em camadas completamente conexa e que apresenta conexões apenas entre camadas adjacentes. Começamos o estudo desta rede no capítulo 2, onde encontramos analiticamente um conjunto de equações de recorrência para as variáveis dinâmicas  $m$  e  $\Delta^2$ . O estudo dinâmico destas equações passa, naturalmente, pela escolha dos métodos de iteração computacional a serem utilizados. Em nosso trabalho, utilizamos o método de Newton-Raphson e o de Iteração Linear.

Agora vamos discutir os resultados obtidos pela iteração numérica do conjunto de equações (2.39), onde analisamos os tipos de soluções existentes neste sistema na recuperação de um padrão.

### 3.1 **Recuperação de um Padrão**

Vamos analisar o comportamento deste sistema à temperatura zero. Inicialmente estudaremos os limites  $\theta \rightarrow 0$  e  $\theta \rightarrow \infty$ , a fim de traçar um esboço do mesmo. Em seguida, apresentaremos um estudo completo para os valores intermediários de  $\theta$ . Terminaremos apresentando um estudo sobre as bacias de atração na região de recuperação, que apresentaremos na seção (3.1.3).

### 3.1.1 Limite $\theta \rightarrow \infty$

Para  $\theta \rightarrow \infty$ , como vimos no capítulo 1, recaímos na rede em camadas monótona, cuja dinâmica é definida pelas equações (1.48). A figura (3.1), obtida pela iteração numérica da eq. (1.48), demonstra claramente os tipos de solução obtidos neste limite, onde podemos observar uma transição de fases descontínua. A linha pontilhada corresponde às soluções de ponto fixo instáveis e a linha cheia às de ponto fixo estáveis.

Para  $\alpha$  menor que um valor crítico,  $\alpha_c \approx 0,27$ , estas equações apresentam três soluções; um ponto fixo estável, com  $m$  e  $\Delta^2$  constantes e positivos; uma solução instável que se funde a solução estável em  $\alpha_c$ ; e uma solução de não recuperação, onde  $m = 0$  e  $\Delta^2$  é constante. Para valores acima deste ponto crítico temos apenas a solução de não recuperação. Na presença de mais de um atrator, o estado alcançado dependerá da condição inicial dada ao sistema.

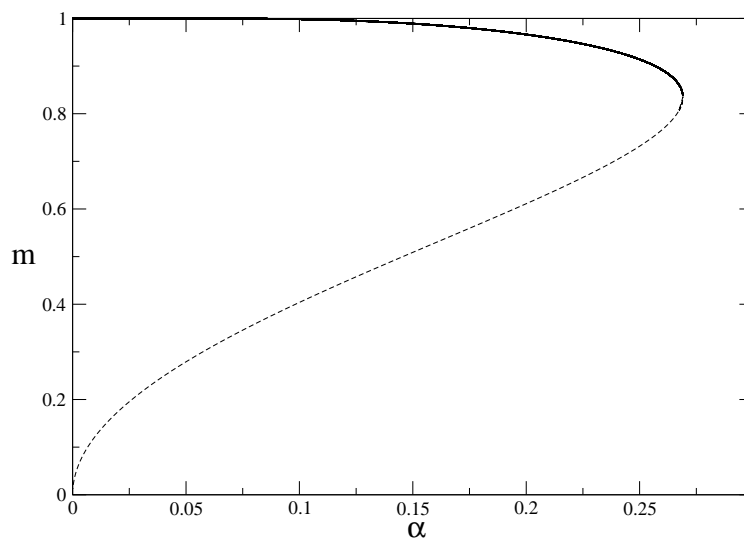


Figura 3.1: Os possíveis valores de  $m$  para um dado  $\alpha$ , à temperatura zero, no limite  $\theta \rightarrow \infty$ . Mostra uma transição descontínua entre a fase de recuperação e a de não-recuperação. A curva cheia corresponde à solução estável, a pontilhada, às instáveis.

### 3.1.2 Limite $\theta \rightarrow 0$

Tomando  $\theta \rightarrow 0$ , temos para as equações dinâmicas, as seguintes expressões:

$$m_1^{l+1} = -\text{erf}\left(m_1^l + \Delta z\right), \quad (3.1)$$

e

$$\left(\Delta^{l+1}\right)^2 = \alpha + \frac{2}{\pi} \left[ \exp \left( -\frac{(m^l)^2}{2(\Delta^l)^2} \right) \right]^2. \quad (3.2)$$

Ao iterarmos estas equações, novamente temos um  $\alpha_c \approx 0,269$ . Acima deste valor temos apenas a solução de não recuperação, com  $m=0$  e  $\Delta^2$  constante. Abaixo deste valor temos três tipos de soluções; uma solução de ciclo 2, do tipo  $m = \pm a$ , com  $a$  e  $\Delta^2$  constantes onde o valor de  $m$  troca de  $a$  para  $-a$  sucessivamente; uma solução instável; e novamente a solução de não recuperação.

A fig. (3.2) apresenta os possíveis valores de  $m$  para um dado  $\alpha$ . Podemos observar uma transição de fase descontínua em  $\alpha \approx 0,27$ .

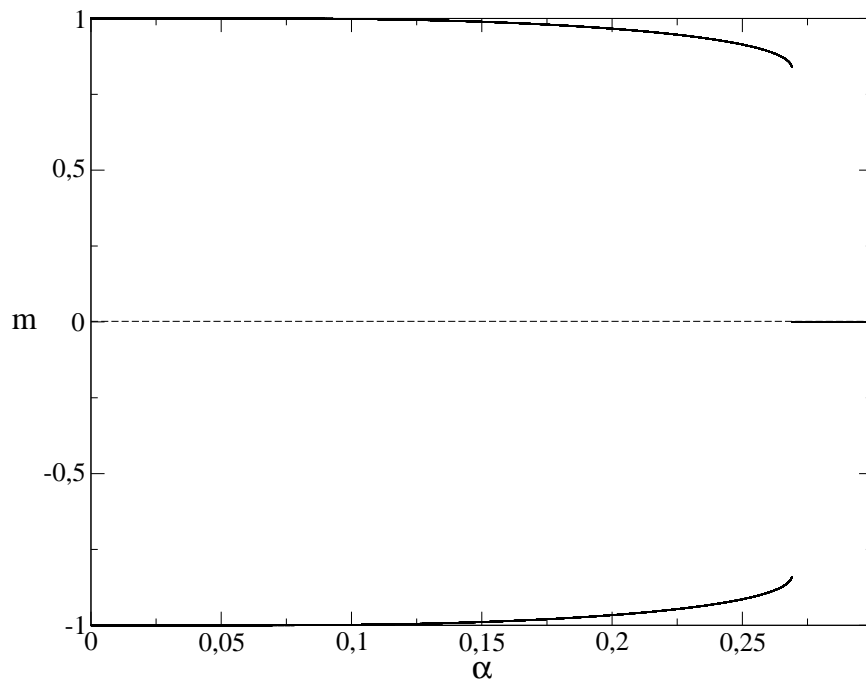


Figura 3.2: Os possíveis valores de  $m$  para um dado  $\alpha$ , a temperatura zero, no limite  $\theta \rightarrow 0$ . As linhas contínuas correspondem aos dois valores assumidos pela solução de ciclo 2, onde o valor do overlap alterna entre os dois valores de  $m$  e a pontilhada à de não recuperação. Neste limite ainda temos uma transição de fase descontínua em  $\alpha \approx 0,269$ .

### 3.1.3 Diagrama de fases $\alpha \times \theta$

Agora vamos estudar os resultados para valores intermediários de  $\theta$ . A fig (3.3) apresenta um diagrama de fases no plano  $(\alpha, \theta)$ , onde apresentamos os principais regimes de soluções na recuperação de um padrão.

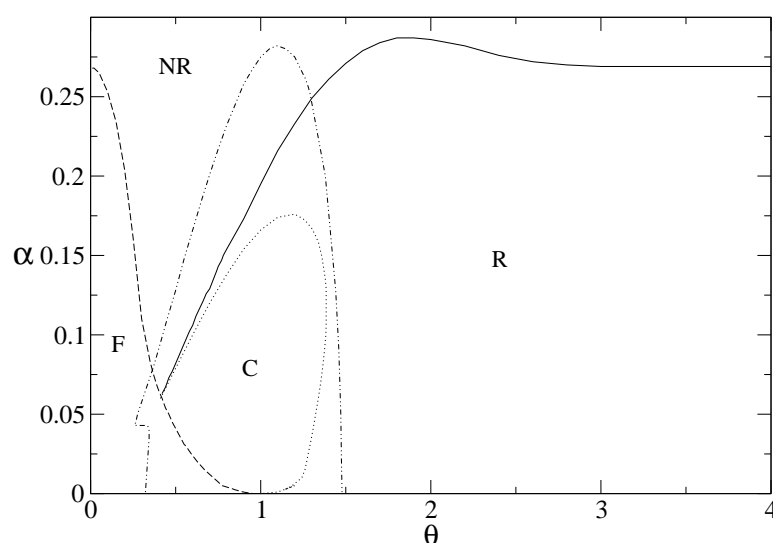


Figura 3.3: Diagrama de fases  $(\alpha \times \theta)$ , onde a região marcada como  $R$  apresenta soluções de ponto fixo, com  $m$  e  $\Delta^2$  sendo constantes positivas; a região marcada como  $NR$  corresponde à região de não recuperação, onde  $m = 0$  e  $\Delta^2$  é constante; a região marcada como  $F$ , à esquerda da linha tracejada, corresponde à solução de ciclo dois, onde  $m = \pm a$ , com  $a$  e  $\Delta^2$  constantes; a região marcada como  $C$  apresenta soluções de ponto fixo, caóticas e cíclicas; a região delimitada pela curva traço-ponto apresenta uma solução de não-recuperação com  $m = 0$  e  $\Delta^2$  cíclico ou caótico, além das soluções presentes nas regiões à que esta se sobrepõem. A solução  $m = 0$  e  $\Delta^2 \neq 0$  constante está presente em todas as regiões.

A solução de não recuperação, com  $m = 0$  e  $\Delta^2 \neq 0$ , está presente para todo  $\alpha$  e  $\theta$ , mesmo que sua bacia de atração seja pequena. Assim, podemos chamá-la de solução trivial.

Abaixo da linha de traço e ponto, além das demais soluções citadas, encontramos uma solução com  $m = 0$  e  $\Delta^2$  cíclico ou caótico.

## Região R

A região de recuperação, marcada como  $R$ , apresenta o mesmo comportamento que a rede monótona em camadas vista na seção (3.1.1) para  $\theta > 3$ . À medida que diminuimos  $\theta$  a partir de 3, encontramos um máximo no valor de  $\alpha$ ,  $\alpha_c \approx 0,287$ , para um valor ótimo de  $\theta$  aproximadamente 1,86. Porém, à medida que diminuimos  $\theta$ , nos aproximando de  $\theta$  ótimo pela direita, mantendo um mesmo  $\alpha$ , ocorre, também, uma perda na qualidade da recuperação de memória. Um exemplo disto pode ser observado na fig. (3.4). Esta figura apresenta valores de  $m$  em função de  $\alpha$  para dois valores,  $\theta = 1,86$  e  $\theta = 4$ . Podemos constatar a partir dela uma diminuição considerável do valor de  $m$  em  $\theta = 1,86$ , para valores de  $\alpha > 0,05$ , se comparada com  $\theta = 4$ .

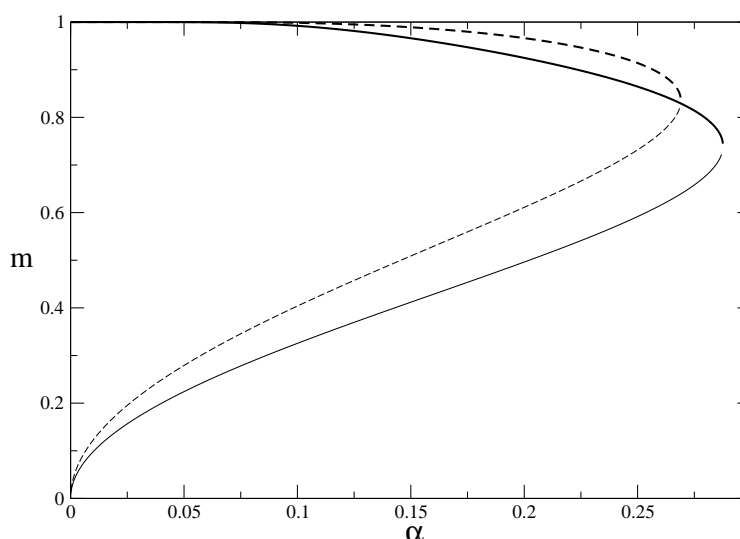


Figura 3.4: O overlap em função do parâmetro  $\alpha$ , para  $\theta = 1,86$  (linha contínua) e  $\theta = 4$  (linha tracejada). As linhas reforçadas correspondem às soluções estáveis, as simples, às instáveis. Podemos constatar um aumento do  $\alpha_c$  para  $\theta = 1,86$ , acompanhado de uma perda na qualidade da recuperação.

A queda do valor de  $m$  para  $\theta = 1,86$  na fig. (3.4), pode ser explicada pela distribuição de seus campos locais, definida no capítulo 2. A fig. (3.5) apresenta a distribuição dos campos locais para dois sítios cujos valores para os padrões de recuperação valem +1, em  $\theta = 1,86$  e  $\theta = 4$ , para o  $\alpha_c$  correspondente a cada  $\theta$ . Um padrão, no caso o padrão 1, estará corretamente armazenado para um dado sítio  $i$  quando  $S_i = \xi_i^1$ . De acordo com a forma da função de ativação, a parcela corretamente armazenada, para  $\theta = 1,86$ , corresponde à área delimitada pela curva contínua e às verticais em 0 e em 1,86; para  $\theta = 4$ , corresponde à toda a área à direita da vertical

em zero sob a curva pontilhada.

Podemos notar a partir da fig.(3.4) que, realmente, para  $\theta = 4$  temos uma maior probabilidade de um bom armazenamento, o que aumenta o valor de  $m$ . Podemos constatar ainda que a não monotonicidade só produz efeito se  $\theta < 3$ . Ao reduzirmos este valor, observamos o crescente valor de  $\alpha_c$  e a diminuição do overlap. Aparentemente a inversão de alguns sítios, com a conseqüente redução do valor de  $m$ , tem o efeito benéfico de retardar a transição descontínua para a fase de não recuperação.

É interessante notar que o modelo não-monótono completamente conexo, que também apresenta uma transição de fase descontínua entre recuperação e não recuperação, também apresenta um aumento na capacidade de armazenamento para um valor ótimo de  $\theta$ . O modelo não monótono extremamente diluído, que possui uma transição de fases contínua, não apresenta aumento em sua capacidade de armazenamento.

A transição de fase entre  $R$  e  $NR$  é do mesmo tipo apresentada pela rede em camadas monótona, apenas mudando o valor de  $\alpha$  onde ocorre. Estes valores são representados na fig. (3.3) pela linha cheia.

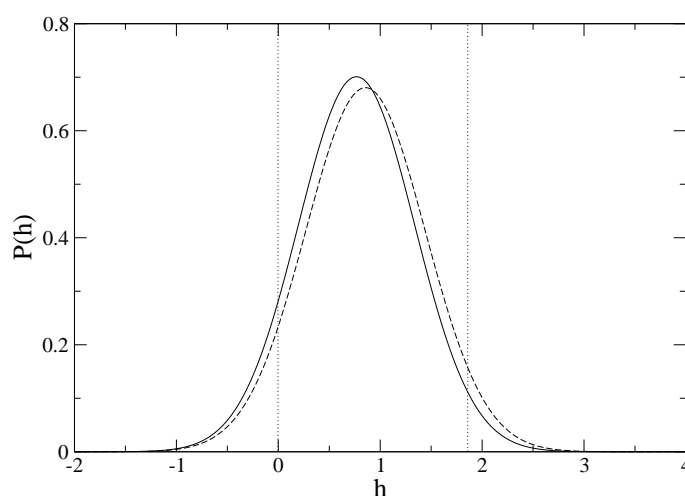


Figura 3.5: Distribuição dos campos locais para  $\theta = 1,86$  (linha contínua) e  $\theta = 4$  (linha tracejada) em um sítio cujo padrão de recuperação apresenta  $\xi = 1$ . A probabilidade de um bom armazenamento corresponde, para ( $\theta = 4$ ), a toda a área abaixo da curva pontilhada que se encontra a direita da vertical em zero e para  $\theta = 1,86$ , a área abaixo da curva contínua que se encontra entre as duas verticais. Mostra que um padrão está melhor armazenado para  $\theta = 4$ .

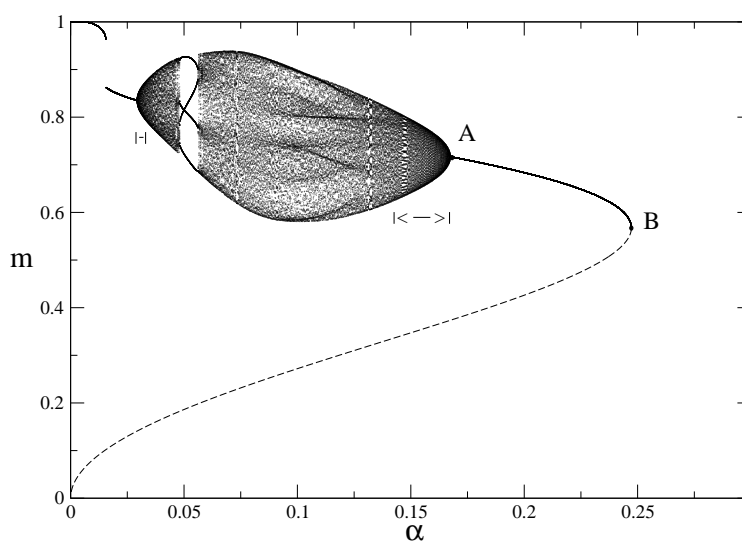


Figura 3.6: O overlap em função do parâmetro  $\alpha$ , para  $\theta = 1,285$ . A curva pontilhada representa a solução instável. O ponto  $A$  determina o ponto onde ocorre a transição de fase contínua entre  $R$  e  $C$ . O ponto  $B$  indica o ponto de transição entre  $R$  e  $NR$ . As barras indicam o trecho de  $\alpha$  que, vindo de  $R$ , ainda não apresenta caoticidade.

### Região C

Na região  $C$ , encontramos soluções de ponto fixo, cíclicas e caóticas, apresentando grande sensibilidade às condições iniciais. Sua transição de fase com  $R$  é contínua, tanto pela direita, como pela esquerda, como vemos na fig (3.6). O ponto  $A$  indica início das soluções de ciclo 2, em uma transição de fase contínua. O ponto  $B$  indica o ponto onde ocorre a transição descontínua entre  $R$  e  $NR$ . As barras indicam o trecho de  $\alpha$  que, vindo de  $R$ , ainda não apresenta caoticidade.

Podemos confirmar a presença de caos nesta região ao calcular os coeficientes de Lyapunov do sistema, como vemos nas figuras (3.7) e (3.8). Na fig. (3.8) comparamos os valores assumidos pelo overlap da rede com o correspondente valor de seu maior coeficiente. Podemos perceber que este coeficiente assume valores positivos em diversos pontos, caracterizando um regime caótico. Há, para alguns valores de  $\alpha$ , diversos valores de  $m$  e mesmo assim apresentam coeficientes negativos, caracterizando soluções cíclicas.

A fig. (3.7) apresenta um diagrama  $(\alpha, \theta)$  focado na região  $C$ , onde assinalamos a presença de caos com regiões sombreadas. podemos notar dois conjuntos de pontos distintos; o conjunto mais à direita corresponde a soluções caóticas do tipo  $m > 0$  e  $\Delta^2 > 0$ , onde ambos são cíclicos

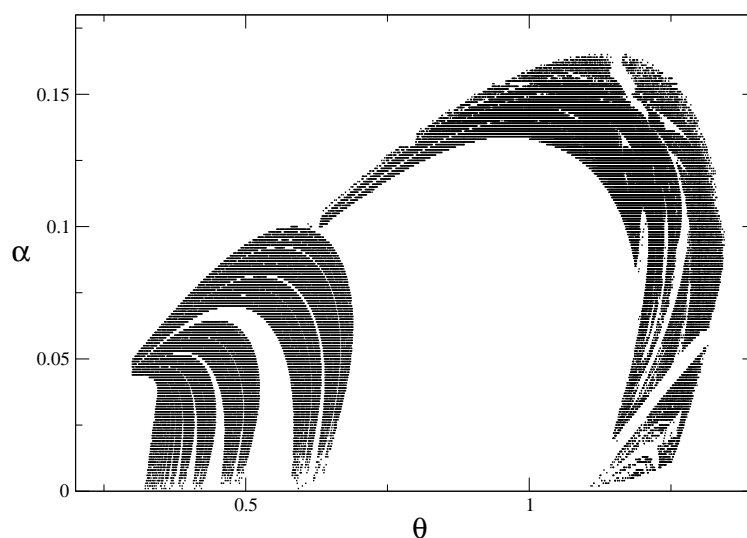


Figura 3.7: Diagrama  $(\alpha, \theta)$  focado principalmente na região  $C$ . As regiões sombreadas apresentam soluções caóticas.

ou caóticos, havendo, assim, algum tipo de recuperação. O conjunto de pontos mais à esquerda corresponde a soluções de não recuperação do tipo  $m = 0$  e  $\Delta^2$  caótico. As regiões claras em meio à sombreada, correspondem em geral a soluções cíclicas de período bem definido. O tamanho das bacias de atração podem variar de um ponto para outro.

### Região F

Na região  $F$ , a rede apresenta as mesmas características que no limite  $\theta \rightarrow 0$ , apresentando um comportamento cíclico de período 2 com  $m$  alternando sucessivamente entre  $+a$  e  $-a$ , com  $a$  e  $\Delta^2$  constantes. Constatamos uma diminuição do  $\alpha_c$  à medida que aumentamos  $\theta$ .



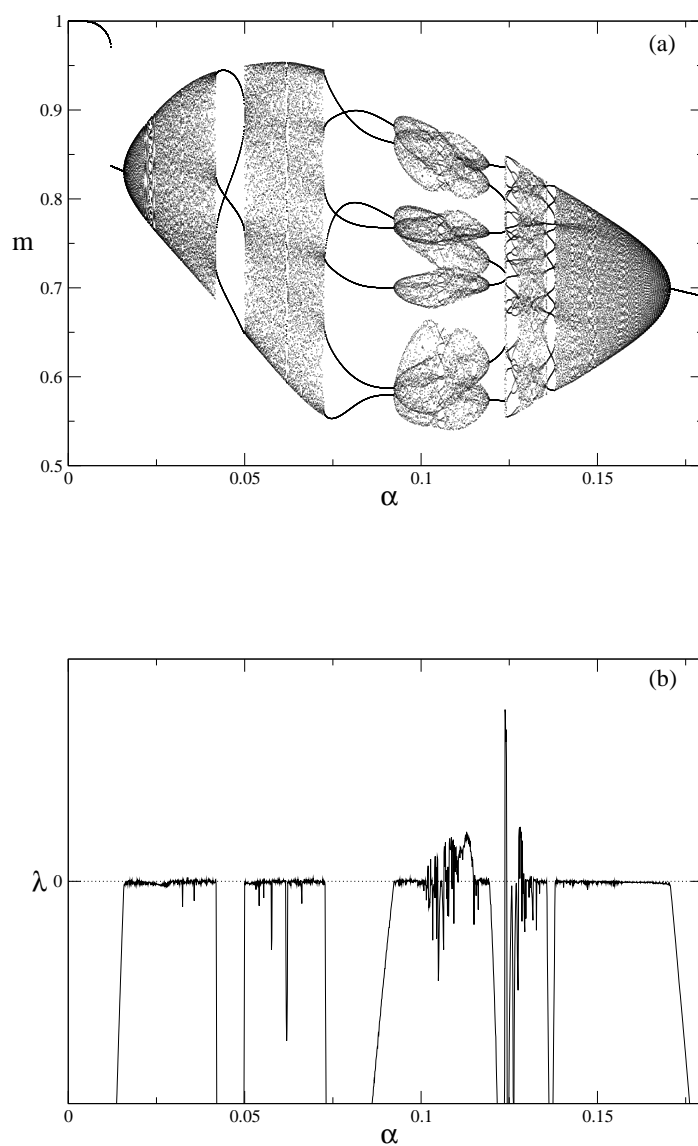


Figura 3.8: (a) O overlap em função do parâmetro  $\alpha$ , para  $\theta = 1,26$ . (b) O maior coeficiente de Lyapunov, para o mesmo intervalo de (a).

### 3.1.4 Bacias de atração

No que segue, vamos estudar as bacias de atração da solução de recuperação. Para tanto, varremos as possíveis condições iniciais, para diferentes valores de  $\theta$  e  $\alpha$ , apontando as mudanças ocorridas.

As figuras (3.9) e (3.10), apresentam a mudança nas bacias de atração na região R da fig. (3.3), ao variarmos  $\alpha$ , mantendo  $\theta$  fixo; e ao variarmos  $\theta$ , mantendo  $\alpha$  fixo; respectivamente. Para ambas as figuras, cada curva divide o espaço de condições iniciais em recuperação e não recuperação.

Os pontos fixos para os estados de recuperação apresentados na fig. (3.9) são:  $m = 0,966$  e  $\Delta^2 = 0,150$ , para  $\alpha = 0,15$ ;  $m = 0,924$  e  $\Delta^2 = 0,200$ , para  $\alpha = 0,2$ ; e  $m = 0,798$  e  $\Delta^2 = 0,304$ , para  $\alpha = 0,28$ . O que concorda com a fig. (3.4), que apresenta, na linha cheia, os pontos fixos para este valor de  $\theta$ , para todo  $\alpha$ , na região de recuperação.

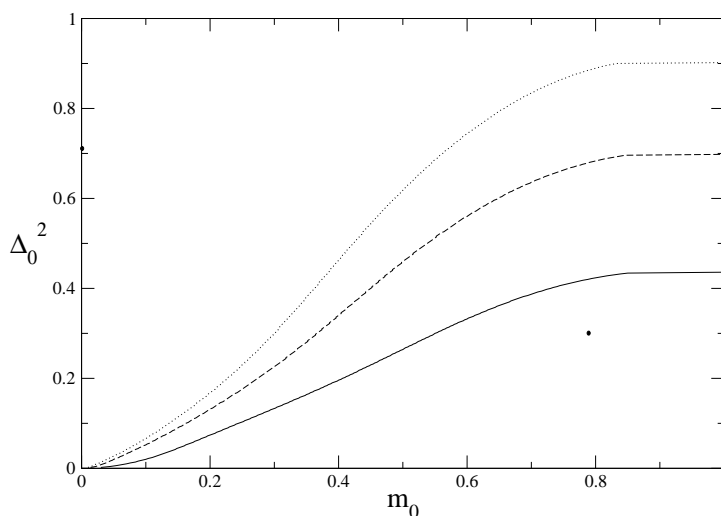


Figura 3.9: Gráficos de  $\Delta_0^2$  por  $m_0$ . A variação do tamanho das bacias de atração entre recuperação e não recuperação, para  $\theta = 1,86$ , ao tomarmos  $\alpha$  igual a 0,15 (linha pontilhada), 0,2 (linha tracejada) e 0,28 (linha contínua). Os pontos isolados correspondem aos atratores estáveis, de recuperação e não recuperação, para  $\theta = 1,86$  e  $\alpha = 0,28$ .

Vemos que há um considerável aumento da bacia de atração do estado de recuperação ao diminuirmos  $\alpha$ , acompanhado de uma melhora da qualidade da recuperação. O aumento do número de padrões armazenados dificulta a recuperação de um padrão específico.

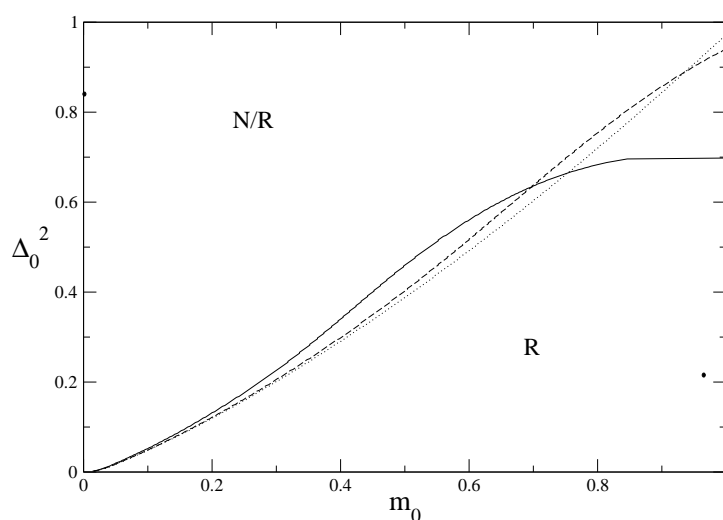


Figura 3.10: Gráficos de  $\Delta^2$  por  $m$ . A variação do tamanho das bacias de atração entre recuperação e não recuperação, ao mantermos  $\alpha = 0,2$  e tomarmos  $\theta = 1,86$  (linha contínua),  $\theta = 2,6$  (linha tracejada) e  $\theta = 4$  (linha pontilhada). Os pontos isolados correspondem aos atratores estáveis, de recuperação e não recuperação, para  $\alpha = 0,2$  e  $\theta = 4$ .

A figura (3.10) apresenta o tamanho das bacias de atração para diferentes valores de  $\theta$ , mantendo  $\alpha$  constante. Os pontos fixos para os estados de recuperação apresentados na fig. (3.10) são:  $m = 0,924$  e  $\Delta^2 = 0,200$ , para  $\theta = 1,86$ ;  $m = 0,966$  e  $\Delta^2 = 0,206$ , para  $\alpha = 0,26$ ; e  $m = 0,766$  e  $\Delta^2 = 0,207$ , para  $\alpha = 4$ . Podemos notar que o aumento de  $\theta$  leva-nos a uma maior tolerância a um  $\Delta^2$  inicial grande, para  $m_0$  próximo de 1, e uma diminuição desta tolerância para valores intermediários de  $m_0$ .

## *Conclusão*

A arquitetura em camadas estudada neste trabalho, assim como a extremamente diluída, permite-nos estudar a dinâmica exata neste modelo sem recorrer a simulações numéricas. Podemos analisar todos os tipos de soluções, não só seus estados de recuperação simples, que consistem em pontos fixos (no sentido definido para redes em camadas), mas também suas soluções cíclicas e caóticas, diretamente através da medida do seu overlap médio.

O estudo do diagrama de fases  $(\alpha, \theta)$ , que abrange todas as soluções dinâmicas na recuperação de um estado, mostra que este modelo apresenta um valor ótimo de  $\theta$ , aproximadamente 1,86, onde  $\alpha_c$  alcança um valor máximo próximo a 0,287. Este é um aumento considerável, se comparada aos 0,269 do modelo monótono em camadas (32). Constatamos, ainda, que acima de  $\theta = 1,5$  a rede só apresenta soluções de ponto fixo, com  $m$  e  $\Delta^2$  estacionários. Assim, o  $\alpha_c$  máximo se encontra em uma região cujo comportamento é o mesmo que para a rede monótona. Em outras palavras, não há, para nenhum valor de  $\alpha$ , atratores outros que pontos fixos em  $\theta = 1,86$ . Os demais tipos de soluções foram identificados e graficamente expostos no capítulo 3.

Além do aumento na capacidade crítica de armazenamento, verificamos que a transição de fase entre os estados de recuperação e não recuperação é descontínua, sendo outro ponto em comum com a rede não-monótona recorrente completamente conexa. Para o modelo extremamente diluído, não foi constatado aumento do  $\alpha_c$  devido a não monotocidade e a transição de fase entre recuperação e não recuperação é contínua.

As equações obtidas na seção (2.2) para a recuperação simultânea de dois estados, apesar de não terem sido iteradas numericamente, demonstram que podemos estudar estados múltiplos de recuperação por uma abordagem muito similar à apresentada na seção (2.1). Estados de recuperação simultânea de mais de dois estados podem ser obtidas facilmente ao estendermos o procedimento apresentado em (2.2) para a recuperação de dois estados. A dedução destas equações e o posterior estudo da dinâmica podem ser citados como possíveis trabalhos futuros nesta área. Podemos ainda citar o estudo deste modelo à temperatura finita como uma expansão deste trabalho.

## APÊNDICE A – Integração da função sinal

De acordo com a definição da função sinal, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Dz \operatorname{sgn}(a + \Delta z) = \int_{-\infty}^{-\frac{a}{\Delta}} Dz (-1) + \int_{-\frac{a}{\Delta}}^{+\infty} Dz (+1), \quad (\text{A.1})$$

e pela definição de  $Dz$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Dz \operatorname{sgn}(a + \Delta z) = \int_{-\infty}^{-\frac{a}{\Delta}} (-1) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}{\sqrt{2\pi}} dz + \int_{-\frac{a}{\Delta}}^{+\infty} (+1) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

Efetuada a mudança de variável  $x = \frac{z}{\sqrt{2}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Dz \operatorname{sgn}(a + \Delta z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{a}{\Delta\sqrt{2}}} (-1) \exp\left[-(x)^2\right] dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{a}{\Delta\sqrt{2}}}^{+\infty} (+1) \exp\left[-(x)^2\right] dx,$$

ou ainda,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Dz \operatorname{sgn}(a + \Delta z) = -\frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{a}{\Delta\sqrt{2}}} \exp\left[-(x)^2\right] dx \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{a}{\Delta\sqrt{2}}}^{+\infty} \exp\left[-(x)^2\right] dx \right).$$

De acordo como a definição da função erro, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Dz \operatorname{sgn}(a + \Delta z) = -\frac{1}{2} \left( \operatorname{erf}\left(-\frac{a}{\sqrt{2\Delta^2}}\right) - \operatorname{erf}(-\infty) \right) + \frac{1}{2} \left( -\operatorname{erf}(+\infty) - \operatorname{erf}\left(-\frac{a}{\sqrt{2\Delta^2}}\right) \right).$$

Sendo  $\operatorname{erf}(x)$  uma função ímpar, onde  $\operatorname{erf}(\infty) = \frac{1}{2}$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Dz \operatorname{sgn}(a + \Delta z) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2\Delta^2}}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2\Delta^2}}\right),$$

e assim temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Dz \operatorname{sgn}(a + \Delta z) = \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2\Delta^2}}\right). \quad (\text{A.2})$$

## APÊNDICE B – Integração da Função $V$

Dada uma função  $V$ , definida da seguinte maneira:

$$V = \int [-\delta(m + \Delta z + \theta) + \delta(m + \Delta z) - \delta(m + \Delta z - \theta)] \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}{\sqrt{2\pi}} dz. \quad (\text{B.1})$$

Efetuamos uma mudança de variável  $x = \frac{z}{\Delta}$ ,

$$V = \int [-\delta(m + x + \theta) + \delta(m + x) - \delta(m + x - \theta)] \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} dx, \quad (\text{B.2})$$

deixando os termos constantes em evidência,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \int [-\delta(m + x + \theta) + \delta(m + x) - \delta(m + x - \theta)] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2\right] dx \quad (\text{B.3})$$

Como a integral do produto de uma delta por uma função é dada pelo valor da função no ponto onde o argumento da delta vale zero,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \left[ -\exp\left(\frac{(-m - \theta)^2}{-2\Delta^2}\right) + \exp\left(\frac{(-m)^2}{-2\Delta^2}\right) - \exp\left(\frac{(-m + \theta)^2}{-2\Delta^2}\right) \right] \quad (\text{B.4})$$

ou, de forma equivalente,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \left[ -\exp\left(-\frac{(+m + \theta)^2}{2\Delta^2}\right) + \exp\left(-\frac{(+m)^2}{2\Delta^2}\right) - \exp\left(-\frac{(+m - \theta)^2}{2\Delta^2}\right) \right] \quad (\text{B.5})$$

## *APÊNDICE C – Determinação dos Expoentes de Lyapunov*

Os sistemas caóticos se caracterizam por uma extrema sensibilidade às condições iniciais. Isto impõe que, para dois sistemas idênticos, partindo de condições iniciais muito próximas, haja uma separação exponencial do estado dos dois sistemas à medida que o tempo passa. Isto pode ser expresso, para tempo discreto, da seguinte forma

$$\delta x(n) = \delta x(0)e^{n\lambda}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\delta x(0)$  é a separação inicial entre o estado dos dois sistemas,  $n$  é a variável temporal que assume os valores inteiros e  $\lambda$  o parâmetro que descreve o modo como a separação temporal se dá.

O parâmetro  $\lambda$  é conhecido como expoente de Lyapunov, e quando assume um valor positivo, há uma divergência exponencial nas trajetórias, caracterizando um regime caótico.

Para a evolução temporal de um sistema cuja a dinâmica é discreta, em um espaço  $m$ -dimensional, temos,

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (\text{C.2})$$

onde  $x$  é um vetor que descreve o estado do sistema e  $f: R^m \rightarrow R^m$ .

Definimos uma matriz  $T(x)$  que corresponde a matriz das derivadas parciais, das  $m$  componentes de  $f$  pelas componentes da  $x$ . Para a  $n$ -ésima iteração, temos pela regra da cadeia

$$\frac{(\partial f_i^m)}{\partial x_j} = T_x^n \delta X(0) = T(f_{n-1}) \cdots T(f(x))T(x). \quad (\text{C.3})$$

Para uma variação  $\delta X(0)$  entre as condições iniciais dadas à dois sistemas idênticos, a sua separação na  $n$ -ésima iteração será dada por

$$\delta x(n) = T_x^n \delta x(0) = T(f^{n-1}) \cdots T(f(x))T(x)\delta x(0). \quad (\text{C.4})$$

O maior coeficiente de Lyapunov será dado por

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \inf} \frac{1}{n} \log \|T_x^n \delta x(0)\|, \quad (\text{C.5})$$

para quase qualquer vetor  $\delta x(0)$ .

Para calcular os demais coeficientes, devemos diagonalizar a matriz  $(T_x^n)^* T_x^n$ , afim de encontrar seus autovalores e supor que eles também assumem um comportamento exponencial no tempo, da forma  $e^{2\lambda_m}$ .

Para  $n$  grande, os diferentes autovalores vão assumir diferentes magnitudes, o que pode levar a erros consideráveis na computação dos coeficientes de magnitudes mais baixa, quando o produto das matrizes  $T$ , na eq.(C.3), não é efetuado adequadamente. Agora vamos descrever um algoritmo, apresentado por F.-P. Eckmann e D. Ruelle (34), que minimiza este problema.

Começamos decompondo o primeiro termo à direita em (C.3), de forma que

$$T(x) = Q_1 R_1, \quad (\text{C.6})$$

onde  $Q_1$  é uma matriz ortogonal e  $R_1$  uma matriz diagonal superior de elementos não-negativos.

Para os próximos termos, vamos primeiro efetuar o produto  $T'_k = T(f^{k-1}) Q_{k-1}$ , para depois decompô-lo em uma matriz ortogonal e uma diagonal superior com as mesmas propriedades de  $R_1$ , e temos

$$T'_k = Q_k R_k, \quad (\text{C.7})$$

e ficamos com

$$T_k^n = Q_n R_n \cdots R_1, \quad (\text{C.8})$$

Foi mostrado que os elementos  $\lambda_{ii}$  da diagonal do produto  $R_n \cdots R_1$  estão relacionados aos coeficientes de Lyapunov da seguinte maneira:

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \lambda_{ii}^n, \quad (\text{C.9})$$

apresentados de forma decrescente em  $i$ .



## *Bibliografía*

- 1 KOHONEN, T. Self organization and associative memory. *Berlin: Springer*, 1984.
- 2 COWAN, J. D.; SHARP, D. H. *Proc. Am. Acad. Arts Sci.*, v. 117, p. 85, 1988.
- 3 RUMELHART, D. E.; McCLELLAND, J. L. Parallel distributed processing: Explorations in the microstructure of cognition, v. 1 and 2. *Cambridge, MA: MIT Press*, 1986.
- 4 MINSKY, M.; PAPERT, S. Perceptrons. *Cambridge: MIT Press*, 1969.
- 5 PURVES, D. et al. Invitación a la neurociencia. *Editorial Medica: panamericana*, 2004.
- 6 McCULLOCH, W. S.; PITTS, W. A logical calculus of ideas immanent in nervous activity. *Bull. Math. Biophys.*, v. 5, p. 115–133, 1943.
- 7 OLIVEIRA, P. M. Computing boolean statistical models. *Singapore: World Scientific*, 1991.
- 8 HEBB, D. O. The organization of behavior. *J. Wiley, New York*, 1949.
- 9 HODGKIN, A. L.; HUXLEY, A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol. (London)*, v. 117, p. 500–544, 1952.
- 10 FITZHUGH, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical J.*, v. 1, p. 445–466, 1961.
- 11 NAGUMO, J.; ARIMOTO, S.; YOSHIZAWA, S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc IRE*, v. 50, p. 2061–2070, 1962.
- 12 HINDMARSH, J.; ROSE, R. *Nature London*, v. 296, p. 162, 1982.
- 13 HINDMARSH, J.; ROSE, R. *Proc. R. Soc. London, Ser. B*, v. 221, p. 87, 1984.
- 14 ROSENBLATT, F. Principles os neurodynamics. *Washington: Spartan Books*, 1962.
- 15 RUMELHART, D. E.; McCLELLAND, J. L. Parallel distributed processing. *MIT Press*, v. 1, 1986.
- 16 HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, v. 79, p. 2554–2558, 1982.
- 17 HOPFIELD, J. J. Neurons with graded response have collective computation properties like those of two-state neurons. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, v. 81, p. 3088, 1984.
- 18 ABELES, M. Local cortical circuits. *Berlin: Springer*, 1982.

- 19 INOUE, J. Retrieval phase diagrams of non-monotonic hopfield networks. *J. Phys. A*, v. 29, p. 4815–4826, 1996.
- 20 MAINIERI, M. S.; ERICHSEN Jr., R. Retrieval and chaos in extremely diluted non-monotonic neural networks. *Physica A*, v. 311, p. 581–589, 2002.
- 21 DOMANY, E.; VANHEMMEN, J. L.; SCHULTEN, K. Models of neural networks. *Berlin: Springer-Verlag*, p. 204–205, 1995.
- 22 DERRIDA, B.; GARDNER, E.; ZIPPELIUS, A. An exactly solvable asymmetric neural network model. *Europhys. Lett., Paris*, v. 4, p. 167–173, 1987.
- 23 GESZTI, T. Physical models of neural networks. *Singapore: World Scientific*, 1990.
- 24 HERTZ, J.; KROGH, A.; PALMER, R. G. *Singapore: World Scientific, ch 2*.
- 25 AMIT, D. J.; GUTFREUNT, H.; SOMPOLINSKY, H. Storing infinite numbers of patterns in a spin-glass model of neural networks. *Phys. Rev. Lett.*, v. 55, p. 1530–1533, 1985.
- 26 AMIT, D. J.; GUTFREUNT, H.; SOMPOLINSKY, H. Information storage in neural networks with low levels of activity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 35, p. 2293–2303, 1987.
- 27 AMIT, D. J.; GUTFREUNT, H.; SOMPOLINSKY, H. Statistical mechanics of neural networks near saturation. *Ann. Phys.*, v. 173, p. 30–67, 1987.
- 28 PERETTO, P. On learning rules and memory storage abilities of asymmetrical neural networks. *J. Phys., Paris*, v. 49, p. 711–726, 1988.
- 29 GARDNER, E. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 20, p. 3453, 1987.
- 30 GARDNER, E. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 21, p. 257, 1988.
- 31 GARDNER, E.; DERRIDA, B. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 21, p. 271, 1988.
- 32 DOMANY, E.; KINZEL, W.; MEIR, R. Layered neural networks. *J. Phys. A*, v. 22, p. 2081–2102, 1989.
- 33 DOMANY, E.; MEIR, R.; KINZEL, W. *Europhys. Lett.*, v. 2, p. 175, 1986.
- 34 ECKMANN, J.-P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics, No 3, Part I*, v. 57, 1985.