Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

UMA BASE PARA ÁLGEBRAS DE HOPF GERADAS POR SKEW-PRIMITIVOS SEMI-INVARIANTES

por

Kauê da Rosa Cardoso

Porto Alegre, 03 de abril de 2013.

Dissertação submetida por Kauê da Rosa Cardoso[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Profa. Dra. Bárbara Seelig Pogorelsky

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana

Prof. Dr. Antonio Paques

Profa. Dra. Saradia Sturza Della Flora

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Agradecimentos

Agradeço à minha família por todo incentivo e toda confiança. Aos meus pais, grandes fontes de carinho, inspiração e orgulho. À minha noiva Francesca, pelo amor, companheirismo e paciência para me esperar os tantos dias que estive longe estudando. À minha avó Nair e minha tia Thais que me acolheram com tanto carinho em sua casa. Agradeço à minha orientadora Bárbara, por toda disponibilidade e por ser um exemplo a ser seguido. Aos professores e colegas do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E todos os outros que estiveram presentes nesta caminhada.

Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrar que o conjunto de todas G-super palavras monotónas restritas escritas com super letras duras forma uma base para a álgebra de Hopf H, onde H é gerada por um conjunto skew-primitivo semi-invariante $\{a_1, ..., a_n\}$ e um grupo abeliano G de todos elementos group-like.

Abstract

The objective of this work is to show that the set of all monotonic restricted G-super-words written with hard super-letters form a basis for the Hopf algebra H, where H is generated by a skew-primitive semi-invariant set $\{a_1, ..., a_n\}$ and an abelian group G of all group-like elements.

Conteúdo

Introdução

Nesta Dissertação, vamos trabalhar com a construção de uma base para as álgebras de Hopf de caracteres. Este problema é importante pois estas álgebras constituem uma grande classe estudada dentro da teoria de grupos quânticos. Estão incluídas nesta classe as quantizações das envolventes das álgebras de Lie e os levantamentos por deformações de álgebras de Nichols pontuadas ou copontuadas.

O problema da construção desta base será reduzido para tratar elementos especiais definidos por super letras. O resultado principal, o Segundo teorema, que foi originalmente demonstrado por Kharchenko em [3], pode ser concebido como um análogo quântico para o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt das álgebras de Lie, pois pode ser usado para construir bases para álgebras de Lie quânticas.

No primeiro capítulo, vamos definir o conceito de álgebra, coálgebra e biálgebra afim de formular a definição de uma álgebra de Hopf. Também vamos expor alguns exemplos clássicos para facilitar o entendimento dessas álgebras.

No segundo capítulo, vamos introduzir os conceitos básicos de letra, palavra e palavra standard, também provaremos os primeiros resultados desta teoria.

No terceiro capítulo, vamos definir o conceito de super letra, super palavra e super palavra monótona e ainda provaremos o Primeiro teorema, que afirma que a álgebra livre $\mathbf{k} < x_1, ..., x_n >$ tem uma base formada por todas as super palavras monótonas e escritas com $\{x_1, ..., x_n\}$. Este resultado é devido à Kharchenko em [3].

No quarto e último capítulo, vamos definir um coproduto na álgebra $G * \mathbf{k} < x_1, ..., x_n >$ e estendê-lo para super palavras. Também apresentaremos as definições de G-super palavra e de álgebra de Hopf de caracteres, e demonstraremos o Segundo teorema, que afirma que toda álgebra de Hopf de caracteres possui uma base formada por todas as G-super palavras admissíveis. Este resultado é devido à Kharchenko em [3].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as principais definições usadas no trabalho e vamos ilustrá-las com alguns exemplos clássicos desta teoria.

1.1 Álgebras de Hopf

Nesta seção introduziremos os conceitos necessários para definir uma álgebra de Hopf. Estas definições e resultados são amplamente conhecidos e podem ser encontrados em [1] e [7].

Seja $\mathbf{k}$ um corpo. Denotaremos o produto tensorial sobre $\mathbf{k}$ por simplesmente $\otimes$.

Definição 1.1.1. Uma $\mathbf{k}$-*álgebra* é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial A com duas aplicações $\mathbf{k}$-lineares, a multiplicação $m : A \otimes A \to A$ e a unidade $u : \mathbf{k} \to A$, tais que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes id_A"] \arrow[d, "id_A\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\ \mathbf{k} \otimes A \arrow[ur, "u\otimes id_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A \otimes \mathbf{k} \arrow[ul, "id_A\otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Note que o primeiro diagrama representa a associatividade da multiplicação e o segundo a existência de unidade de A, dada por $1_A = u(1_{\mathbf{k}})$.

Exemplo 1.1.2.

1. Sejam $\mathbf{k}$ um corpo e $(G, .)$ um grupo multiplicativo, defina $\mathbf{k}G =< g \setminus g \in G >_{\mathbf{k}}$ como o $\mathbf{k}$-espaço vetorial de base G. Note que $\mathbf{k}G$ é uma álgebra com o seguinte produto:

$$m(g \otimes h) = g.h,$$

e a seguinte unidade $u(1_{\mathbf{k}}) = 1_G$.

Primeiramente vamos mostrar a comutatuvidade do primeiro diagrama, isto é a associatividade da multiplicação. Note que para verificar a associatividade, basta mostrar que ela é valida para os elementos da base pois m é $\mathbf{k}$-linear, no caso da álgebra $\mathbf{k}G$, é suficiente provar a associatividade para os elementos de G.

Sejam $f, g, h \in G$

$$m \circ m \otimes id(f \otimes g \otimes h) = m(fg \otimes h) = (fg)h,$$

$$m \circ id \otimes m(f \otimes g \otimes h) = m(f \otimes gh) = f(gh),$$

Usando a associatividade no grupo sabemos que $(fg)h = f(gh)$. Logo, a multiplicação é associativa.

Agora vamos verificar a validade da comutatividade do segundo diagrama, isto é a existencia da unidade. Novamente como u é $\mathbf{k}$-linear, é suficiente provar para os elementos da base, isto é para G.

$$m \circ u \otimes id(1_{\mathbf{k}} \otimes g) = m(u(1_{\mathbf{k}}) \otimes g) = m(1_G \otimes g) = 1_G g = g,$$

$$m \circ id \otimes u(g \otimes 1_{\mathbf{k}}) = m(g \otimes u(1_{\mathbf{k}})) = m(g \otimes 1_G) = g1_G = g.$$

Assim, $u(1_{\mathbf{k}}) = 1_G$ é de fato a unidade. Portanto $\mathbf{k}G$ é uma álgebra.

2. Seja $\mathbf{k}$ um corpo, defina $\mathbf{k}[x]$ como o $\mathbf{k}$-espaço vetorial de base $\{1, x, x^2, ...\}$. Conhecido como espaço vetorial dos polinômios. Observe que $\mathbf{k}[x]$ é uma álgebra com o seguinte produto,

$$m(x^n \otimes x^m) = x^{n+m},$$

onde consideramos $1 = x^0$. E a seguinte unidade $u(1_{\mathbf{k}}) = 1$.

Vamos mostrar a associatividade,

$$m \circ m \otimes id(x^m \otimes x^n \otimes x^p) = m(x^{m+n} \otimes x^p) = x^{m+n+p},$$

$$m \circ id \otimes m(x^m \otimes x^n \otimes x^p) = m(x^m \otimes x^{n+p}) = x^{m+n+p}.$$

Logo, a multiplicação é associativa.

Agora vamos verificar a existencia da unidade.

$$m \circ u \otimes id(1_k \otimes x^n) = m(u(1_k) \otimes x^n) = m(1 \otimes x^n) = x^{0+n} = x^n,$$

$$m \circ id \otimes u(x^n \otimes 1_k) = m(x^n \otimes u(1_k)) = m(x^n \otimes 1) = x^{n+0} = x^n.$$

Assim, $u(1_{\mathbf{k}}) = 1$ é de fato a unidade. Portanto $\mathbf{k}[x]$ é uma álgebra.

3. Sejam $\mathbf{k}$ um corpo, e $V =< e_1, ..., e_n >_{\mathbf{k}}$ o $\mathbf{k}$-espaço vetorial de base $B = \{e_1, ..., e_n\}$. Note que V é uma álgebra com o seguinte produto,

$$m(e_1 \otimes e_j) = e_j = m(e_j \otimes e_1), \quad m(e_i \otimes e_j) = 0 \ \forall i, j \neq 1,$$

e a seguinte unidade $u(1_{\mathbf{k}}) = e_1$.

Vamos mostrar a associatividade. Sejam e_i, e_j, $e_p \in B$.

Se pelomenos dois dos elementos e_i, e_j, e_p, forem diferentes de e_1 então,

$$m \circ m \otimes id(e_i \otimes e_j \otimes e_p) = 0 = m \circ id \otimes m(e_i \otimes e_j \otimes e_p).$$

Se $e_i = e_j = e_1$ então,

$$m \circ m \otimes id(e_i \otimes e_j \otimes e_p) = e_p = m \circ id \otimes m(e_i \otimes e_j \otimes e_p).$$

Se $e_i = e_p = e_1$ então,

$$m \circ m \otimes id(e_i \otimes e_j \otimes e_p) = e_j = m \circ id \otimes m(e_i \otimes e_j \otimes e_p).$$

Se $e_p = e_j = e_1$ então,

$$m \circ m \otimes id(e_i \otimes e_j \otimes e_p) = e_i = m \circ id \otimes m(e_i \otimes e_j \otimes e_p).$$

Logo, a multiplicação é associativa.

Agora vamos verificar a existencia da unidade.

$$m \circ u \otimes id(1_k \otimes e_i) = m(u(1_k) \otimes e_i) = m(e_1 \otimes e_i) = e_i,$$

$$m \circ id \otimes u(e_i \otimes 1_k) = m(e_i \otimes u(1_k)) = m(e_i \otimes e_1) = e_i.$$

Assim, $u(1_{\mathbf{k}}) = e_1$ é de fato a unidade. Portanto V é uma álgebra.

Definição 1.1.3. Sejam A e B álgebras com multiplicações m_A e m_B e unidades u_A e u_B, respectivamente. Uma aplicação $f : A \to B$ é um *homomorfismo de álgebras* se os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{k} \arrow[r, "u_A"] \arrow[dr, "u_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Definição 1.1.4. Dada uma algebra A, um subespaço vetorial $B \subseteq A$ é dito uma *subálgebra* se $m(B \otimes B) \subseteq B$.

Dualizando a definição de álgebra obtemos a definição de coálgebra.

Definição 1.1.5. Uma $\mathbf{k}$-*coálgebra* é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial C com duas aplicações $\mathbf{k}$-lineares, coproduto $\Delta : C \to C \otimes C$ e counidade $\varepsilon : C \to \mathbf{k}$, tais que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id_C"] \\
C \otimes C \arrow[r, "id_C \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
\mathbf{k} \otimes C & & C \otimes \mathbf{k} \\
& C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.1.6.

1. Note que $\mathbf{k}G$ é uma coálgebra com os seguintes coproduto e counidade:

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad e \quad \varepsilon(g) = 1_{\mathbf{k}}, \quad \forall g \in G.$$

Começaremos mostrando a comutatividade do primeiro diagrama, conhecido como coassociatividade do coproduto. Como Δ é $\mathbf{k}$-linear, é suficiente provar a coassociatividade para os elementos da base.

$$\Delta \otimes id \circ \Delta(g) = \Delta(g) \otimes g = g \otimes g \otimes g,$$

$$id \otimes \Delta \circ \Delta(g) = g \otimes \Delta(g) = g \otimes g \otimes g.$$

Logo, a coassociatividade e válida.

Agora vamos mostrar a existencia da counidade, Como ε é $\mathbf{k}$-linear, é suficiente provar para os elementos da base.

$$\varepsilon \otimes id \circ \Delta(g) = \varepsilon(g) \otimes g = 1_G \otimes g = \simeq (g),$$

$$id \otimes \varepsilon \circ \Delta(g) = g \otimes \varepsilon(g) = g \otimes 1_G = \simeq (g).$$

Portanto $\mathbf{k}G$ é uma coálgebra.

2. Observe que $\mathbf{k}[x]$ é uma coálgebra com os seguintes coproduto e counidade:

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \Delta(x^n) = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^n,\ \forall n > 1,$$

$$\varepsilon(1) = 1, \quad \varepsilon(x^n) = 0,\ \forall n > 1.$$

Primeiramente note que:

$$\Delta \otimes id(\Delta(x^n)) = \Delta \otimes id(\Delta(x))^n,\ id \otimes \Delta((\Delta(x^n)) = id \otimes \Delta(\Delta(x))^n.$$

Assim, podemos verificar facílmente a coassociatidade,

$$\Delta \otimes id \circ \Delta(x^n) = \Delta \otimes id \circ \Delta(x)^n = (x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x)^n,$$

$$id \otimes \Delta \circ \Delta(x^n) = id \otimes \Delta \circ \Delta(x)^n = (x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x)^n.$$

Note ainda que:

$$\varepsilon \otimes id((\Delta(x^n)) = \varepsilon \otimes id(\Delta(x))^n,\ id \otimes \varepsilon((\Delta(x^n)) = id \otimes \varepsilon(\Delta(x))^n.$$

Agora vamos mostrar a comutatividade do diagrama da counidade,

$$\varepsilon \otimes id \circ \Delta(x^n) = (\varepsilon(x) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes x)^n = (1 \otimes x)^n = 1 \otimes x^n = \simeq (x^n),$$

$$id \otimes \varepsilon \circ \Delta(x^n) = (x \otimes \varepsilon(1) + 1 \otimes \varepsilon(x))^n = (x \otimes 1)^n = x^n \otimes 1 = \simeq (x^n).$$

Portanto $\mathbf{k}[x]$ é uma coálgebra.

3. Seja C um $\mathbf{k}$-espaço vetorial de base $\{s, c\}$. Então, C é uma coálgebra com os seguintes coproduto e counidade:

$$\Delta(s) = s \otimes c + c \otimes s, \quad \Delta(c) = c \otimes c - s \otimes s,$$

$$\varepsilon(s) = 0, \quad \varepsilon(c) = 1.$$

Vamos mostrar a comutatividade do primeiro diagrama, vamos verificar primeiro para s,

$$\Delta \otimes id \circ \Delta(s) = \Delta \otimes id(s \otimes c + c \otimes s) = s \otimes c \otimes c + c \otimes s \otimes c + c \otimes c \otimes s - s \otimes s \otimes s,$$

$$id \otimes \Delta \circ \Delta(s) = id \otimes \Delta(s \otimes c + c \otimes s) = s \otimes c \otimes c + c \otimes s \otimes c + c \otimes c \otimes s - s \otimes s \otimes s.$$

Agora vamos verificar para c,

$$\Delta \otimes id \circ \Delta(c) = \Delta \otimes id(c \otimes c - s \otimes s) = c \otimes c \otimes c - c \otimes s \otimes s - s \otimes s \otimes c - s \otimes c \otimes s,$$

$$id \otimes \Delta \circ \Delta(c) = id \otimes \Delta(c \otimes c - s \otimes s) = c \otimes c \otimes c - c \otimes s \otimes s - s \otimes s \otimes c - s \otimes c \otimes s.$$

Agora vamos mostrar a comutatividade do diagrama da counidade,

$$\varepsilon \otimes id \circ \Delta(s) = \varepsilon \otimes id(s \otimes c + c \otimes s) = \varepsilon(s) \otimes c + \varepsilon(c) \otimes s = 1 \otimes s = \simeq (s),$$

$$id \otimes \varepsilon \circ \Delta(s) = id \otimes \varepsilon(s \otimes c + c \otimes s) = s \otimes \varepsilon(c) + c \otimes \varepsilon(s) = s \otimes 1 = \simeq (s).$$

$$\varepsilon \otimes id \circ \Delta(c) = \varepsilon \otimes id(c \otimes c - s \otimes s) = \varepsilon(c) \otimes c - \varepsilon(s) \otimes s = 1 \otimes c = \simeq (c),$$

$$id \otimes \varepsilon \circ \Delta(c) = id \otimes \varepsilon(c \otimes c - s \otimes s) = c \otimes \varepsilon(c) - s \otimes \varepsilon(s) = c \otimes 1 = \simeq (c).$$

Assim fica provado que C é uma coálgebra.

Definição 1.1.7. Sejam C e D coálgebras com comultiplicações Δ_C e Δ_D e counidades ε_C e ε_D, respectivamente. Uma aplicação $f : C \to D$ é um *homomorfismo de coálgebras* se os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbf{k} \end{tikzcd}$$

Observação 1.1.8.

1. Notação de Sweedler:

   Usaremos a seguinte notação (conhecida como notação de Sweedler) para expressar o coproduto de um elemento $c \in C$:

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2, \quad \Delta_n(c) = c_1 \otimes \ldots \otimes c_{n+1}.$$

2. Produto tensorial de álgebras:

   Sejam A e B duas $\mathbf{k}$-álgebras. O $\mathbf{k}$-espaço vetorial $A \otimes B$ é uma $\mathbf{k}$-álgebra com a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} m_{A\otimes B} :& (A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \to A\otimes B \\ & (a\otimes b)\otimes(a'\otimes b') \to aa'\otimes bb' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_{A\otimes B} :& \mathbf{k} \to A\otimes B \\ & 1_{\mathbf{k}} \to 1_A\otimes 1_B \end{aligned}$$

3. Produto tensorial de coálgebras:

   Sejam C e D duas $\mathbf{k}$-coálgebras. O $\mathbf{k}$-espaço vetorial $C \otimes D$ é uma $\mathbf{k}$-coálgebra com a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \Delta_{C\otimes D} :& C\otimes D \to (C\otimes D)\otimes(C\otimes D) \\ & c\otimes d \to (c_1\otimes d_1)\otimes(c_2\otimes d_2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{C\otimes D} :& C\otimes D \to \mathbf{k} \\ & c\otimes d \to \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d) \end{aligned}$$

4. Um corpo $\mathbf{k}$ é uma $\mathbf{k}$-álgebra e uma $\mathbf{k}$-coálgebra, com a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{k}} :& \mathbf{k}\otimes\mathbf{k} \to \mathbf{k} \\ & a\otimes b \to ab \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_{\mathbf{k}} :& \mathbf{k} \to \mathbf{k} \\ & 1_{\mathbf{k}} \to 1_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}} :& \mathbf{k} \to \mathbf{k}\otimes\mathbf{k} \\ & a \to a.1_{\mathbf{k}}\otimes 1_{\mathbf{k}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}} :& \mathbf{k} \to \mathbf{k} \\ & 1_{\mathbf{k}} \to 1_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Mais detalhes sobre estas observações podem ser encontradas em [1] capítulos um e quatro.

Proposição 1.1.9. *Seja B um $\boldsymbol{k}$-espaço vetorial, onde existem aplicações $\boldsymbol{k}$-lineares $m : B \otimes B \to B$, $\quad u : \boldsymbol{k} \to B$, $\quad \Delta : B \to B \otimes B$ e $\varepsilon : B \to \boldsymbol{k}$ tais que (B, m, u) é uma álgebra, (B, Δ, ε) é uma coálgebra. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Δ e ε são homomorfismos de álgebras,*

2. *m e u são homomorfismos de coálgebras.*

Demonstração. Ver [[1], Proposição 4.1.1].

Definição 1.1.10. Um $\mathbf{k}$-espaço vetorial B é dito uma *biálgebra* se existem aplicações $\mathbf{k}$-lineares $m : B \otimes B \to B, u : \mathbf{k} \to B, \Delta : B \to B \otimes B$ e $\varepsilon : B \to \mathbf{k}$ tais que (B, m, u) é uma álgebra, (B, Δ, ε) é uma coálgebra e vale uma das seguintes condições (equivalentes), chamadas de compatibilidade.:

1. Δ e ε são homomorfismos de álgebras,

2. m e u são homomorfismos de coálgebras.

Exemplo 1.1.11.

1. Note que $\mathbf{k}G$ é uma biálgebra com os seguintes produto, unidade, coproduto e counidade:

$$m(g \otimes h) = g.h, \quad u(1_{\mathbf{k}}) = 1_{\mathbf{k}} 1_G,$$

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1 \quad \forall g \in G.$$

Sabemos que $\mathbf{k}G$ é uma álgebra e uma coálgebra, vamos mostrar que Δ e ε são homomorfismos de álgebras. Começaremos pela comutatividade do primeiro diagrama:

Sejam $f, g \in G$

$$\Delta \circ m_{\mathbf{k}G}(f \otimes g) = \Delta(fg) = fg \otimes fg = (f \otimes f).(g \otimes g) =$$
$$= \Delta(f) \,.\, \Delta(g) = m_{\mathbf{k}G \otimes \mathbf{k}G} \circ \Delta \otimes \Delta(f \otimes g).$$

$$\varepsilon \circ m_{\mathbf{k}G}(f \otimes g) = \varepsilon(fg) = 1_{\mathbf{k}} = 1_{\mathbf{k}}.1_{\mathbf{k}} =$$
$$= \varepsilon(f) \,.\, \varepsilon(g) = m_{\mathbf{k}} \circ \varepsilon \otimes \varepsilon(f \otimes g).$$

Agora vamos mostrar a comutatividade do segundo diagrama:

$$\Delta \circ u(1_{\mathbf{k}}) = \Delta(1_{\mathbf{k}G}) = 1_{\mathbf{k}G} \otimes 1_{\mathbf{k}G} = u_{\mathbf{k}G \otimes \mathbf{k}G}(1_{\mathbf{k}}).$$
$$\varepsilon \circ u(1_{\mathbf{k}}) = \varepsilon(1_{\mathbf{k}G}) = 1_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}(1_{\mathbf{k}}).$$

Portanto $\mathbf{k}G$ é uma biálgebra.

2. Observe que $\mathbf{k}[x]$ é uma biálgebra com os seguintes produto, unidade, coproduto e counidade:

$$m(x^n \otimes x^m) = x^{n+m}, \quad u(1_{\mathbf{k}}) = 1,$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \Delta(x^n) = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^n, \ \forall n > 1,$$

$$\varepsilon(1) = 1, \quad \varepsilon(x^n) = 0, \ \forall n > 1.$$

Sabemos que $\mathbf{k}[x]$ é uma álgebra e uma coálgebra, vamos mostrar que Δ e ε são homomorfismos de álgebras. Começaremos pela comutatividade do primeiro diagrama:

$$\begin{aligned}\Delta \circ m_{\mathbf{k}[x]}(x^n \otimes x^m) = \Delta(x^{m+n}) = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^{n+m} = \\ (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^n (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^m = \\ \Delta(x^n)\Delta(x^m) = m_{\mathbf{k}[x]\otimes\mathbf{k}[x]} \circ \Delta \otimes \Delta(x^n \otimes x^m).\end{aligned}$$

Sejam m e n números naturais, onde pelomenos um deles é diferente de zero.

$$\varepsilon \circ m_{\mathbf{k}[x]}(x^n \otimes x^m) = \varepsilon(x^{m+n}) = 0 = \varepsilon(x^n)\varepsilon(x^m) = m_{\mathbf{k}} \circ \varepsilon \otimes \varepsilon(x^n \otimes x^m).$$

$$\varepsilon \circ m_{\mathbf{k}[x]}(1 \otimes 1) = \varepsilon(1) = 1_{\mathbf{k}} = \varepsilon(1)\varepsilon(1) = m_{\mathbf{k}} \circ \varepsilon \otimes \varepsilon(1 \otimes 1).$$

Agora vamos mostrar a comutatividade do segundo diagrama:

$$\Delta \circ u(1_{\mathbf{k}}) = \Delta(1_{\mathbf{k}[x]}) = 1_{\mathbf{k}[x]} \otimes 1_{\mathbf{k}[x]} = u_{\mathbf{k}[x]\otimes\mathbf{k}[x]}(1_{\mathbf{k}}).$$

$$\varepsilon \circ u(1_{\mathbf{k}}) = \varepsilon(1_{\mathbf{k}[x]}) = 1_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}(1_{\mathbf{k}}).$$

Portanto $\mathbf{k}G$ é uma biálgebra.

3. Seja $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \backslash a, b \in \mathbb{Q}\}$ o $\mathbb{Q}$-espaço vetorial de base $\{1, \sqrt{2}\}$. Note que, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é uma álgebra com a unidade $1_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]} = 1_{\mathbb{Q}}$ e com o produto

$$(a + b\sqrt{2}).(c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Além disso, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ também é uma coálgebra com os seguintes coproduto e counidade:

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \Delta(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \otimes 1 + 1 \otimes \sqrt{2}$$

$$\varepsilon(1) = 1, \quad \varepsilon(\sqrt{2}) = 0,$$

No entanto, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ não possui nenhuma estrutura de biálgebra compatível com sua estrutura de álgebra. Suponha por absurdo que existe um ε homomorfismo de álgebras. Desta forma teríamos $\varepsilon(1) = 1$ e $\varepsilon(\sqrt{2}) = x \in \mathbb{Q}$. Observe que $\varepsilon(2) = \varepsilon(2.1) = 2\varepsilon(1) = 2.1 = 2$, mas por outro lado temos que $\varepsilon(2) = \varepsilon(\sqrt{2}.\sqrt{2}) = \varepsilon(\sqrt{2})^2$. Assim, concluímos que $\varepsilon(\sqrt{2})^2 = 2$, isto é $\varepsilon(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$. Absurdo, pois $\pm\sqrt{2}$ não pertence a $\mathbb{Q}$.

Definição 1.1.12. Sejam C uma coálgebra e $c \in C$.

1. Dizemos que c é um elemento *group-like* se $\Delta(c) = c \otimes c$ e $\varepsilon(c) = 1$. O conjunto de todos os elementos group-like de C é denotado por $G(C)$.

2. Para $g, h \in G(C)$, c é dito (g, h)-primitivo se $\Delta(c) = c \otimes g + h \otimes c$ e $\varepsilon(c) = 0$. Além disso, c é dito skew-primitivo se $\Delta(c) = c \otimes 1 + g \otimes c$.

Exemplo 1.1.13.

1. Todos os elementos de G em $\mathbf{k}G$ são group-likes. Mais ainda temos que $G(\mathbf{k}G) = G$.

2. Note que $1 \in \mathbf{k}[x]$ é group-like, e $x \in \mathbf{k}[x]$ é skew-primitivo.

Definição 1.1.14. Sejam V e W dois $\mathbf{k}$-espaços vetoriais. Definimos $Hom_{\mathbf{k}}(V, W)$ como o conjunto de todas as aplicações $\mathbf{k}$-lineares definidas em V com imagens em W. Denotaremos $Hom_{\mathbf{k}}(V, \mathbf{k})$ por V^*. Seja B uma base de V, dado $v \in B$, denotamos por $v^* : V \to \mathbf{k}$ a aplicação $\mathbf{k}$-linear definida por $v^*(u) = \delta_{v,u}$ para todo $u \in B$.

Definição 1.1.15. Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, m, u) uma álgebra. Definimos no conjunto $Hom_{\mathbf{k}}(C, A)$ uma estrutura de álgebra em que a unidade é dada por $u\varepsilon$ e a multiplicação é dada pelo *produto convolução* $*$:

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

para todo $f, g \in Hom_{\mathbf{k}}(C, A)$.

Usando a notação de Sweedler temos:

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2)$$

para todo $f, g \in Hom_{\mathbf{k}}(C, A)$ e $c \in C$.

Para ver a demonstração de que $Hom_{\mathbf{k}}(C, A)$ é uma álgebra consulte [1] seção 4.2.

Definição 1.1.16. Seja $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Dizemos que H é uma *álgebra de Hopf* se existe um elemento $S \in Hom_{\mathbf{k}}(H, H)$ que é o inverso de id_H com relação ao produto convolução $*$, isto é:

$$\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = \sum h_1 S(h_2)$$

para todo $h \in H$. A aplicação S é chamada *antípoda* de H.

Exemplo 1.1.17.

1. Note que $\mathbf{k}G$ é uma álgebra de Hopf com os seguintes produto, unidade, coproduto, counidade e antípoda, respectivamente:

$$m(g \otimes h) = g.h, \quad u(1_{\mathbf{k}}) = 1_{\mathbf{k}}1_G,$$

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad \forall g \in G,$$

$$S(g) = g^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

Sabemos que $\mathbf{k}G$ é uma biálgebra, resta apenas mostrar que $S(g) = g^{-1}$ é de fato uma antípoda. Dado $g \in G$

$$(S * id)(g) = S(g)g = g^{-1}g = 1_G,$$

$$(id * S)(g) = gS(g) = gg^{-1} = 1_G.$$

Assim, S é a antípoda. Portanto $\mathbf{k}G$ é uma álgebra de Hopf.

2. Observe que $\mathbf{k}[x]$ é uma álgebra de Hopf com os seguintes produto, unidade, coproduto, counidade e antípoda, respectivamente:

$$m(x^n \otimes x^m) = x^{n+m}, \quad u(1_{\mathbf{k}}) = 1.$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \Delta(x^n) = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^n, \ \forall n > 1,$$

$$\varepsilon(1) = 1, \quad \varepsilon(x^n) = 0, \ \forall n > 1,$$

$$S(1) = 1, \quad S(x^n) = (-1)^n x^n, \ \forall n > 1.$$

Sabemos que $\mathbf{k}[x]$ é uma biálgebra, resta apenas mostrar que S é de fato uma antípoda.

$$(S * id)(x^n) = (S(x)1 + S(1)x)^n = 0,$$

$$(id * S)(x^n) = (S(1)x + S(x)1)^n = 0.$$

Assim, S é a antípoda. Portanto $\mathbf{k}[x]$ é uma álgebra de Hopf.

Vamos apresentar mais alguns exemplos de álgebras de Hopf que podem ser encontrados com mais detalhes em [1] seção 4.3.

3. Sejam $\mathbf{k}$ um corpo e $(G, .)$ um grupo multiplicativo. Note que $\mathbf{k}G^* = Hom_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}G, \mathbf{k})$ é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial de base G^*.

Note que $\mathbf{k}G^*$ é uma álgebra de Hopf com a seguinte extrutura:

Dados $g, h \in G$,

$$m(g^* \otimes h^*) = \delta_{g,h} g^*, \quad u(1_{\mathbf{k}}) = \sum_{g \in G} g^* = 1_{\mathbf{k}G^*}$$

$$\Delta(g^*) = \sum_{h \in G} h^* \otimes (h^{-1}g)^*, \quad \varepsilon(g^*) = \delta_{1_G, g}$$

$$S(g^*) = (g^{-1})^*$$

4. Seja $\mathbf{k}$ um corpo com característica diferente de dois. Definimos a álgebra $H_4 =< 1, x, c, xc >$, conhecida como álgebra de Sweedler através das seguintes relações:

$$x^2 = 1, \quad c^2 = 0, \quad cx = -xc.$$

Além disso, a álgebra de Sweedler possui uma estrutura de álgebra de Hopf dada por:

$$u(1_{\mathbf{k}}) = 1, \quad m(x \otimes x) = 1, \quad m(c \otimes c) = 0, \quad m(c \otimes x) = -m(x \otimes c),$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \ \Delta(x) = x \otimes x, \ \Delta(c) = x \otimes c + c \otimes 1, \ \Delta(xc) = 1 \otimes xc + xc \otimes x,$$

$$\varepsilon(1) = 1, \quad \varepsilon(x) = 1, \quad \varepsilon(c) = 0, \quad \varepsilon(xc) = 0,$$

$$S(1) = 1, \quad S(x) = x, \quad S(c) = -xc, \quad S(xc) = -c.$$

Agora vamos apresentar um exemplo de um biálgebra que não é uma álgebra de Hopf.

5. Seja $(M, .)$ um monóide, defina $\mathbf{k}M =< m \setminus m \in M >_{\mathbf{k}}$ como o $\mathbf{k}$-espaço vetorial de base M. Observe que $\mathbf{k}M$ é uma biálgebra com os

seguintes produto, unidade, coproduto e counidade, respectivamente:

$$m(m \otimes n) = m.n, \quad u(1_{\mathbf{k}}) = 1_{\mathbf{k}}1_M,$$

$$\Delta(m) = m \otimes m, \quad \varepsilon(m) = 1_{\mathbf{k}} \quad \forall m \in M.$$

Mas M não é uma álgebra de Hopf. De fato, seja $c \in M$ um elemento que não possui inverso. Suponha por absurdo que M tem uma antípoda S. Assim, $S(c)c = \varepsilon(c)1 = 1_{\mathbf{k}}1 = 1$ e $cS(c) = \varepsilon(c)1 = 1_{\mathbf{k}}1 = 1$. Absurdo, pois neste caso $S(c)$ seria o elemento inverso de c.

Capítulo 2

Palavras standard

Neste capítulo vamos definir uma palavra standard, e provar os primeiros resultados desta teoria.

2.1 Definições básicas

Nesta seção, apresentaremos algumas definições que serão necessárias no restante deste trabalho. Estas definições também podem ser encontradas em [3].

Definição 2.1.1. Chamamos de alfabeto um conjunto finito $\{x_1, ..., x_n\}$.

Definição 2.1.2. Chamamos de letra um elemento do alfabeto.

Definição 2.1.3. Chamamos de palavra uma lista finita de letras.

Definição 2.1.4. Sejam $u = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ e $v = x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}$ palavras. Definimos o produto de u por v como $uv = x_{i_1}...x_{i_n}x_{j_1}...x_{j_m}$.

Definição 2.1.5. A palavra u é dita começo de v se existe uma palavra w tal que $v = uw$.

Definição 2.1.6. A palavra u é dita final de v se existe uma palavra w tal que $v = wu$.

Definição 2.1.7. Definimos a ordem lexicográfica da seguinte forma, dado um alfabeto totalmente ordenado $x_1 > x_2 > ... > x_n$, duas palavras $u = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ e $v = x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}$ são comparadas avaliando o primeiro par de letras x_{i_k} e x_{j_k} onde $x_{i_k} \neq x_{j_k}$. Se $x_{i_k} > x_{j_k}$ então $u > v$. Se $x_{i_k} < x_{j_k}$ então $u < v$. Se u é o começo de v então $u > v$.

Definição 2.1.8. O comprimento da palavra u é o número de letras de u. Denotaremos o comprimento de u por $L(u)$.

Definição 2.1.9. A palavra u é dita standard se para quaisquer duas palavras u_1 e u_2, onde $u = u_1u_2$, temos que $u > u_2u_1$.

Observação 2.1.10. Ao longo deste trabalho consideraremos uma palavra como um produto finito de letras. Denotamos a palavra x_ix_i por x_i^2, analogamente, $\underbrace{x_i \dots x_i}_{n-vezes} = x_i^n$.

Exemplo 2.1.11. Considere o alfabeto $\{x_1, x_2, x_3\}$ com $x_1 > x_2 > x_3$, e as seguintes palavras escritas com esse alfabeto:

$$u = x_1^3x_3x_2, \quad v = x_1^2, \quad w = x_1x_3x_2$$

Note que v é um começo de u, w é um fim de u, $vw = u$ e ainda u é uma palavra standard.

Note também que $L(u) = 5$, $L(v) = 2$, $L(w) = 3$ e ainda $v > u > w$.

2.2 Primeiros resultados

Nesta seção, provaremos os primeiros resultados sobre palavras standard, que será o ferramental básico para o desenvolvimento deste trabalho. Estes resultados podem ser encontrados em [3].

Proposição 2.2.1. *Sejam u e v duas palavras onde v não é o começo de u e $u < v$. Então $uw < vt$, para quaisquer palavras w e t.*

Demonstração. Sejam $u = x_{i_1}...x_{i_n}$, $v = x_{l_1}...x_{l_p}$, $w = x_{j_1}...x_{j_m}$, $t = x_{k_1}...x_{k_q}$. Como $u < v$, temos que existem letras x_{i_r} e x_{l_r} onde $x_{i_r} < x_{l_r}$ com $r \leq n$ e $r \leq p$. Note que $uw = x_{i_1}...x_{i_r}...x_{i_n}x_{j_1}...x_{j_m}$ e $vt = x_{l_1}...x_{l_r}...x_{l_p}x_{k_1}...x_{k_q}$. Portanto $uw < vt$.

$\square$

Proposição 2.2.2. *Sejam u e v duas palavras, onde $u < v$. Então vale que $wu < wv$ para qualquer palavra w.*

Demonstração. Se v é o começo de u, então wv é o começo de wu. Logo $wu < wv$. Se v não é o começo de u, sejam $u = x_{i_1}...x_{i_n}$, $v = x_{l_1}...x_{l_p}$, $w = x_{j_1}...x_{j_m}$. Como $u < v$, temos que existem letras x_{i_r} e x_{l_r} onde $x_{i_r} < x_{l_r}$ com $r \leq n$ e $r \leq p$. Note que $wu = x_{j_1}...x_{j_m}x_{i_1}...x_{i_r}...x_{i_n}$ e $wv = x_{j_1}...x_{j_m}x_{l_1}...x_{l_r}...x_{l_p}$. Portanto $wu < wv$.

$\square$

Lema 2.2.3. *Seja $u = wv$ uma palavra standard. Então v não é começo de u.*

Demonstração. Suponha por absurdo que v é o começo de u, ou seja, existe uma palavra s tal que $u = vs$.

Como $wv = u = vs > sv$, temos que wv e sv tem mesmo comprimento. Assim wv e sv diferem já em alguma de suas $L(w) = L(s)$ primeiras letras, e portanto $w > s$. Por outro lado, $vs = u = wv > vw$, o que implica que $s > w$. Absurdo, portanto v não é o começo de u.

$\square$

Proposição 2.2.4. *Uma palavra u é standard se e somente se ela é maior que qualquer um dos seus finais.*

Demonstração. Se a palavra u é standard e $u = u_1u_2$ então $u_1u_2 > u_2u_1$. Pelo Lema 2.2.3, u_2 não é começo de u, assim, $u = u_1u_2$ e u_2u_1 diferem já em alguma de suas primeiras $L(u_2)$ letras. Portanto $u > u_2$. Reciprocamente, se $u = u_1u_2$ e $u > u_2$ então pela Proposição 2.2.1 $u > u_2u_1$.

$\square$

Proposição 2.2.5. *Se as palavras u e v são standard e $u > v$, então $u^k > v$ para todo $k \geq 1$.*

Demonstração. Se u não é começo de v, então o resultado segue da Proposição 2.2.1. Se u for começo de v, suponha $v = u^h v_1$ onde u não é começo de v_1. Se $h \geq k$ então $u^k > v$ pois u^k é começo de v. Se $h < k$, note que $v_1 < v < u$, e assim, $v = u^h v_1 < u^h u$. Logo, pela Proposição 2.2.1, $v < u^{h+1}u^{k-h-1} = u^k$.

$\square$

Proposição 2.2.6. *Se u e v são palavras standard onde $u = u_1u_2$ e $u_2 > v$, então $uv > u_1v$ e $uv > u_2v$.*

Demonstração. Como u é standard, então, segue da Proposição 2.2.4 que $u > u_2$. Logo, pela Proposição 2.2.1 temos que $uv > u_2v$. Se u_2 não é o começo de v, como $u_2 > v$ temos $u_2v > v$. Assim, pela Proposição 2.2.2, $uv = u_1u_2v > u_1v$. Se u_2 é um começo de v escrevemos $v = u_2^kv_1$, onde u_2 não é o começo de v_1. Pela Proposição 2.2.4, temos que $v = u_2^kv_1 > u_2^{k-1}v_1$, e assim, $u_2v > u_2u_2^{k-1}v_1 = u_2^kv_1 = v$. Portanto $uv = u_1u_2v > u_1v$.

□

Capítulo 3

Uma base para a álgebra $\mathbf{k}\!<\!x_1, ..., x_n\!>$

Neste capítulo provaremos o Primeiro teorema que afirma que a álgebra $\mathbf{k} < x_1, ..., x_n >$ possui uma base formada pelo conjunto de todas as super palavras monótonas.

3.1 Polinômios quânticos

Nesta seção vamos apresentar as definição de variável quântica e demonstraremos algumas identidades do skew-comutador. Estas definições e resultados podem ser encontrados em [3].

Observação 3.1.1. Todo polinômio f em variáveis não comutativas $\{x_1, ..., x_n\}$ e coeficientes em um corpo $\mathbf{k}$ é uma combinação linear de palavras v_i escritas com as letras $\{x_1, ..., x_n\}$, isto é, $f = \Sigma_i a_i v_i$ com $a_i \in \mathbf{k}$.

Definição 3.1.2. A maior palavra v_i de $f = \Sigma_i a_i v_i$ é chamada de palavra líder de f, e denotada por $\hat{f}$.

Definição 3.1.3. Um polinômio $f = \Sigma_i a_i v_i$ é dito homogêneo se todas as palavras v_i tem mesmo comprimento.

Proposição 3.1.4. *Sejam $f = \Sigma_i a_i v_i$ e $g = \Sigma_j b_j u_j$ polinômios como na Observação 3.1.1. Se $\hat{f}$ não é o começo de nenhuma outra palavra de f, então $\widehat{fg} = \hat{f}\hat{g}$.*

Demonstração. Note que $\hat{f} > v_i$, para todo $v_i \neq \hat{f}$. Então, $\hat{f}\hat{g} > v_i u_j$ com $v_i \neq \hat{f}$, ou seja, $\hat{f}\hat{g}$ é a palavra líder de fg.

□

Corolário 3.1.5. *Sejam f e g polinômios como na Observação 3.1.1. Se f for homogêneo, então $\widehat{fg} = \hat{f}\hat{g}$.*

Demonstração. Note que, como f é homogêneo, $\hat{f}$ não pode ser o começo de nenhuma palavra distinta dela mesma.

□

Definição 3.1.6. Seja G um grupo, uma função $\chi : G \to \mathbf{k} \setminus \{0\}$ é dita um caracter do grupo G se χ é um homomorfismo de grupos.

Definição 3.1.7. Dizemos que x é uma variável quântica se um elemento g de um grupo abeliano G e um caracter $\chi : G \to \mathbf{k} \setminus \{0\}$, que serão denotados por g_x e χ^x, estão associados a x.

Definição 3.1.8. Seja $X = \{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto de variáveis quânticas. Uma palavra u é um monômio com variáveis em X. Para cada palavra u em X denotamos por g_u o elemento de G obtido de u substituindo cada x_i por $g_i = g_{x_i}$. Da mesma maneira denotamos por χ^u o caracter obtido de u substituindo cada x_i por $\chi^i = \chi^{x^i}$.

Com estes conceitos podemos definir um polinômio quântico.

Definição 3.1.9. Um polinômio quântico é um polinômio em variáveis quânticas.

Observação 3.1.10. Denotamos $\chi^u(g_v)$ por $p(u,v) = p_{uv}$. Note que como χ é um homomorfismo de grupos as seguintes igualdades $p_{uv,w} = p_{uw}p_{vw}$ e $p_{u,vw} = p_{uv}p_{uw}$ são verdadeiras.

Definição 3.1.11. Definimos um skew-comutador bilinear sobre o conjunto de todos os polinômios quânticos pela fórmula:

$$[u,v] = uv - p_{uv}vu$$

Exemplo 3.1.12. Considere as seguintes palavras, $u = x_3x_1$ e $v = x_1x_2$. Logo:

$$g_u = g_3g_1, \quad \chi^u = \chi^3\chi^1$$
$$g_v = g_1g_2, \quad \chi^v = \chi^1\chi^2$$

Sendo assim, podemos calcular $[u,v]$.

$$\begin{aligned}
[u,v] &= uv - p_{uv}vu \\
&= uv - \chi^u(g_v)vu \\
&= uv - \chi^3\chi^1(g_1g_2)vu \\
&= uv - \chi^3(g_1g_2)\chi^1(g_1g_2)vu \\
&= uv - \chi^3(g_1)\chi^3(g_2)\chi^1(g_1)\chi^1(g_2)vu \\
&= uv - p_{31}p_{32}p_{11}p_{12}vu \\
&= x_3x_1^2x_2 - p_{31}p_{32}p_{11}p_{12}x_1x_2x_3x_1.
\end{aligned}$$

Proposição 3.1.13. *Sejam u, v e w palavras. São válidas as seguintes identidades:*

$$[uv, w] = u[v, w] + p_{vw}[u, w]v,$$

$$[u, vw] = [u, v]w + p_{uv}v[u, w],$$

$$[[u, v], w] = [u, [v, w]] + p_{wv}^{-1}[[u, w], v] + (p_{vw} - p_{wv}^{-1})[u, w]v.$$

Demonstração. Começaremos demonstrando a primeira identidade.

$$\begin{aligned} [uv, w] &= uvw - p_{uv,w}wuv = uvw - p_{uw}p_{vw}wuv = \\ &= uvw - p_{vw}uwv + p_{vw}uwv - p_{uw}p_{vw}wuv = u[v, w] + p_{vw}[u, w]v. \end{aligned}$$

De forma similar demonstramos a segunda identidade.

$$\begin{aligned} [u, vw] &= uvw - p_{u,vw}vwu = uvw - p_{uv}p_{uw}vwu = \\ &= uvw - p_{uv}vuw + p_{uv}vuw - p_{uv}p_{uw}vwu = [u, v]w + p_{uv}v[u, w]. \end{aligned}$$

Para demonstrar a última identidade, vamos mostrar que:

$$[[u, v], w] - [u, [v, w]] = p_{wv}^{-1}[[u, w], v] + (p_{vw} - p_{wv}^{-1})[u, w]v.$$

Por um lado temos que,

$$\begin{aligned} [[u, v], w] - [u, [v, w]] &= [uv - p_{uv}vu, w] - [u, vw - p_{vw}wv] = \\ &= [uv, w] - p_{uv}[vu, w] - [u, vw] + p_{vw}[u, wv] = \\ &= uvw - p_{uv,w}wuv - p_{uv}vuw + p_{uv}p_{vu,w}wvu + \\ &- uvw + p_{u,vw}vwu + p_{vw}uwv - p_{vw}p_{u,wv}wvu = \\ &= -p_{uv,w}wuv - p_{uv}vuw + p_{u,vw}vwu + p_{vw}uwv. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
p_{wv}^{-1}[[u,w],v] + (p_{vw} - p_{wv}^{-1})[u,w]v = p_{wv}^{-1}([[u,w],v] + p_{wv}p_{vw}[u,w]v - [u,w]v) = \\
= p_{wv}^{-1}([uw - p_{uw}wu, v] + p_{wv}p_{vw}(uw - p_{uw}wu)v - (uw - p_{uw}wu)v) = \\
= p_{wv}^{-1}(uwv - p_{uw,v}vuw - p_{uw}wuv + p_{uw}p_{wu,v}vwu + \\
+ p_{wv}p_{vw}uwv - p_{wv}p_{vw}p_{uw}wuv - uwv + p_{uw}wuv) = \\
= -p_{uv,w}wuv - p_{uv}vuw + p_{u,vw}vwu + p_{vw}uwv.
\end{aligned}
$$

Logo, a igualdade é verdadeira.

□

3.2 Super palavras e super letras

Nesta seção vamos apresentar as definições de super letra e super palavra monótona e provaremos alguns resutados importantes para a demonstração do Primeiro teorema que será provado no proxima seção. Estas definições e resultados podem ser encontrados em [3].

Definição 3.2.1. Uma palavra não associativa é uma palavra onde colchetes $[,]$ 3.1.11 definem como deve ser aplicada a multiplicação entre as letras desta palavra.

Observação 3.2.2. Considere o alfabeto $\{x_1, ..., x_n\}$, quando considerarmos uma letra x_i como uma palavra não associativa, escreveremos ela desta forma $[x_i]$.

Exemplo 3.2.3. Considere o alfabeto $\{x_1, x_2, x_3\}$, e a seguinte palavra escrita com esse alfabeto, $x_3x_1x_2$. Apartir desta palavra podemos formar duas palavras não associativa distintas:

$$[[[x_3],[x_1]],[x_2]], \quad [[x_3],[[x_1],[x_2]]].$$

Definição 3.2.4. O conjunto de todas as palavras não associativas é definido por:

1. Todas as letras são palavras não associativas.
2. Se $[u_1]$ e $[u_2]$ são palavras não associativas então $[u] = [[u_1],[u_2]]$ é uma palavra não associativa.
3. Não existem outras palavras não associativas.

Observação 3.2.5. Se $[u]$ denota uma palavra não associativa, denotamos por u a palavra associativa obtida de $[u]$ removendo os colchetes. Note que cada palavra não associativa $[u]$ gera uma única palavra associativa u, mas a partir de uma palavra associativa podemos obter mais de uma palavra não associativa.

Exemplo 3.2.6. Por definição $[x_1]$, $[x_2]$ e $[x_3]$ são palavras não associativas. Logo,

$$[[x_1],[x_2]] = x_1x_2 - p_{1,2}x_2x_1$$

também é uma palavra não associativa. Assim como,

$$\begin{aligned} [[x_3],[[x_1],[x_2]]] &= x_3[[x_1],[x_2]] - p_{3,12}[[x_1],[x_2]]x_3 = \\ &= x_3(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) - p_{31}p_{32}(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_3 = \\ &= x_3x_1x_2 - p_{12}x_3x_2x_1 - p_{31}p_{32}x_1x_2x_3 + p_{31}p_{32}p_{12}x_2x_1x_3, \end{aligned}$$

é uma palavra não associativa.

Definição 3.2.7. Uma palavra não associativa $[u]$ é dita standard se:

1. A palavra u é standard.
2. Se $[u] = [[u_1], [u_2]]$ então $[u_1]$ e $[u_2]$ são palavras não associativas standard.
3. Se $[u] = [[[u_1], [u_2]], [u_3]]$, então $u_2 \leq u_3$.

Exemplo 3.2.8. Note que a palavra não associativa $[[x_3], [[x_1], [x_2]]]$ do exemplo anterior não é standard, pois $x_3x_1x_2$ não é standard. A palavra não associativa $[[[x_1], [x_2]], [x_3]]$ também não é standard pois $x_2 > x_3$. Contudo, a palavra $[[[x_1], [x_3]], [x_2]]$ verifica os três itens da definição.

1. $x_1x_3x_2$ é standard.
2. x_1x_3 e x_2 são palavras standard.
3. $x_3 < x_2$.

Teorema 3.2.9. (Teorema de Shirshov) *Toda palavra standard u possui um único alinhamento de colchetes tal que a palavra não associativa $[u]$ é standard.*

Demonstração. Ver $[[9], Lema 1]$.

□

Exemplo 3.2.10. Considere a palavra standard $u = x_1x_3x_2$. Temos dois possíveis alinhamentos de colchetes:

$$[[[x_1], [x_3]], [x_2]], \quad [[x_1], [[x_3], [x_2]]].$$

O primeiro alinhamento é a palavra não associativa standard do exemplo anterior. O segundo alinhamento não é standard pois x_3x_2 não é standard.

Observação 3.2.11. O Teorema de Shirshov, combinado com a definição de palavras não associativas e palavras não associativas standard, implica que cada palavra standard $u \neq x_i$ tem uma decomposição $u = vw$, onde v e w são standard.

Definição 3.2.12. Uma super letra é um polinômio igual a uma palavra standard não associativa. Uma super palavra é uma palavra em super letras.

Exemplo 3.2.13. Um exemplo de super letra $[w]$ é a palavra não associativa standard do exemplo anterior:

$$[w] = [[[x_1], [x_3]], [x_2]] = [x_1x_3, [x_2]] - p_{13}[x_3x_1, [x_2]] =$$

$$= x_1x_3x_2 - p_{12}p_{32}x_2x_1x_3 - p_{13}x_3x_1x_2 + p_{13}p_{32}p_{12}x_2x_3x_1.$$

Definição 3.2.14. A constituição de uma super letra $W = [w]$ é a sequência de inteiros $(m_1, ..., m_n)$, onde m_i é o grau da letra x_i em w.

Observação 3.2.15. Como G é comutativo, os elementos g_u e os caracteres χ^u são os mesmos para todas as palavras de uma mesma constituição. Portanto para as super letras, $g_{[u]} = g_u$, $\chi^{[u]} = \chi^u$ e $p([v], [w]) = p_{vw}$, são unicamente definidos.

Proposição 3.2.16. *A super letra $[u]$ é um polinômio homogêneo com palavra líder u que aparece com coeficiente 1.*

Demonstração.
Faremos indução sobre comprimento de u. Se $u = x_i$, então $[u] = x_i$. Logo $[u]$ é homogêneo e sua palavra líder é x_i com coeficiente 1. Se $L(u) = n > 1$, podemos escrever $[u] = [[v], [w]]$. Assim $[u] = [v][w] - p_{[v][w]}[w][v]$ e pela hipótese de indução $[v]$ e $[w]$ são polinômios homogêneos com palavras líder v e w, respectivamente. Pelo Corolário 3.1.5, as palavras líder de $[v][w]$ e

$[w][v]$ são vw e wv respectivamente. Como $u = vw$ é standard, então $u > wv$. Logo, u é a palavra líder de $[u]$ com coeficiente 1.

$\square$

A Proposição 3.2.16 permite definir uma ordem para as super letras, a partir de sua palavra líder.

Definição 3.2.17. Sejam $[u]$ e $[v]$ super letras. Dizemos que $[u] > [v]$ se e somente se $u > v$. A ordem das super letras é estendida de forma lexicográfica para as super palavras.

Definição 3.2.18. Uma super palavra W é dita monótona se é da forma

$$W = [w_1]^{k_1}[w_2]^{k_2}...[w_n]^{k_n}, \tag{3.2.1}$$

onde $w_1 < w_2 < ... < w_n$.

Proposição 3.2.19. *Dadas duas super palavras monótonas $W = [w_1]^{k_1}...[w_n]^{k_n}$ e $V = [v_1]^{q_1}...[v_m]^{q_m}$, então $W > V$ se e somente se $w = w_1^{k_1}w_2^{k_2}...w_n^{k_n}$ é maior que $v = v_1^{q_1}v_2^{q_2}...v_m^{q_m}$. Mais ainda, a palavra líder de W é w que aparece com coeficiente 1.*

Demonstração.
Se $w > v$ então $w_1 \geq v_1$ ou v_1 é o começo de w_1. Suponha por absurdo que v_1 é o começo de w_1, ou seja $v_1 \neq w_1$. Pela Proposição 2.2.5 temos que $v_1^{k_1} > w_1$, logo $v_1^{k_1}$ é o começo de w_1 pois $w > v$. Neste caso podemos escrever $w_1 = v_1^{k_1}w'$. Mas $v_2 > v_1 > w_1 > w'$, assim, $w_1 < v_1^{k_1}v_2^{k_2}$. Portanto, $w = v_1^{k_1}v_2^{k_2}w''$ pois $w > v$. Indutivamente podemos concluir que $w_1 < v$, o que é um absurdo. Logo $w_1 \geq v_1$. Podemos assumir $w_1 > v_1$, pois caso $w_1 = v_1$ passamos ao primeiro par de super letras distintas e fazemos a mesma análise. Portanto $[w_1] > [v_1]$, ou seja, $W > V$.

Reciprocamente, se $W > V$ temos que $[w_1] \geq [v_1]$. Como acima, podemos assumir $[w_1] > [v_1]$. Se w_1 não é o começo de v_1, pela Proposição 2.2.1 temos que $w > v$. Se w_1 é o começo de v_1, podemos escrever v_1 como $v_1 = w_1^{k_1}...w_s^l$ ou $(w_1^{k_1}w_2^{k_2}...w_{s-1}^{k_{s-1}})w_s^l v_1'$ onde w_s não é o começo de v_1'. Seja $v_1 = (w_1^{k_1}w_2^{k_2}...w_{s-1}^{k_{s-1}})w_s^l v_1'$, pela Proposição 2.2.4, temos $v_1' < v_1 < w_1 < w_s$, ou seja, $v_1' < w_s$. Pelas Proposições 2.2.1 e 2.2.2, concluímos que $w > v$. Supondo $v_1 = w_1^{k_1}...w_s^l$, como v_1 é standard, podemons concluir que $w_1 \geq w_s$. Absurdo, pois W é monótona. Pelo Corolário 3.1.5, a palavra líder de $W = [w_1]^{k_1}[w_2]^{k_2}...[w_n]^{k_n}$ é $w = w_1^{k_1}w_2^{k_2}...w_n^{k_n}$.

$\square$

3.3 Primeiro teorema

Nesta seção provaremos o Primeiro teorema, que afirma que a álgebra livre $\mathbf{k} < x_1, ..., x_n >$ tem uma base formada por todas as super palavras monótonas e escritas com $\{x_1, ..., x_n\}$, originalmente demonstado por Kharchenko em [3].

Lema 3.3.1. *Sejam u e v palavras standard com $u > v$. Então o polinômio $[[u], [v]]$ é uma combinação linear de super palavras escritas com super letras $[w_i]$, onde $[v] < [w_i] < [u]$ e $w_i \leq uv$. Mais ainda, a constituição de cada somando na combinação linear é igual à constituição de uv.*

Demonstração. Se $[[u], [v]]$ é standard, então $[[u], [v]]$ é uma super letra $[w]$ com $w = uv$, assim, $v < w < u$ como requer o lema. Se $u = x_i$ e $v = x_j$, então $[[u], [v]]$ será standard, recaindo no caso anterior. Façamos indução sobre $L(uv)$. Suponha que o lema é verdadeiro para palavras u' e v' satisfazendo as hipóteses e com $L(u'v') < m$. Sejam u e v de acordo com as hipóteses e ainda com $L(u) \geq L(v)$ e $L(uv) = m$. Se $[[u], [v]]$ não é standard, isto é, $[u] = [[u_1], [u_2]]$ com $u_2 > v$, então $u_1 > u > u_2 > v$.

Sejam $[u_1] = U_1$, $[u_2] = U_2$ e $[v] = V$. Usando a Proposição 3.1.13 temos que:

$$[[U_1, U_2], V]{=}[U_1, [U_2, V]]{+}p_{v,u_2}^{-1}[[U_1, V], U_2]{+}(p_{u_2,v}{-}p_{v,u_2}^{-1})[U_1, V]U_2 \qquad (3.3.1)$$

Pela hipótese de indução,

$$[U_2, V] = \Sigma_j b_j \Pi_l [s_{jl}],$$

onde $u_2 > u_2v \geq s_{jl} > v$. Pela Proposição 2.2.6, $uv > u_2v \geq s_{jl}$, como requerido no lema, e assim,

$$[U_1, [U_2, V]] = [U_1, \Sigma_j b_j \Pi_l [s_{jl}]] = \Sigma_j b_j \Pi_l [U_1, [s_{jl}]].$$

Note que $u_1 > u > u_2 > s_{jl}$ e também que $L(s_{jl}) \leq L(u_2v)$. Logo, pela hipótese de indução, temos que

$$[U_1, [s_{jl}]] = \Sigma_p b_p \Pi_q [t_{pq}],$$

onde, $u_1 > u_1s_{jl} \geq t_{pq} > s_{jl}$. Observe que $u_2v \geq s_{jl}$. Logo, $uv = u_1u_2v \geq u_1s_{jl} \geq t_{pq}$, e ainda, $t_{pq} > s_{jl} > u_1$. Portanto o primeiro somando de (3.3.1) possui a decomposição desejada. Novamente pela hipótese de indução, $[U_1, V] = \Sigma_i a_i \Pi_k [w_{ik}]$, onde $u_1 > u_1v \geq w_{ik} > v$. Pela Proposição 2.2.6, $u > uv > u_1v \geq w_{ik}$. Note que $u > u_2 > v$, e pela Proposição 2.2.1, temos que $uv > u_2$. Logo, a super letra U_2 também é da forma desejada. Consequentemente, o segundo e o terceiro somandos de (3.3.1). Portanto $[[u], [v]]$ tem a decomposição requerida.

□

Observação 3.3.2. Mesmo que as super letras de uma super palavra sejam rearranjadas, o grau permanecerá fixo. Logo, a menor super palavra de grau

m será uma super palavra monótona.

Lema 3.3.3. *Toda super palavra não monótona é uma combinação linear de super palavras monótonas menores e de mesma constituição, onde todas as super letras desta combinação linear estão entre a maior e a menor super letra da palavra dada.*

Demonstração. Seja m um número natural fixo. Suponha por absurdo que existem super palavras onde o lema falha. Seja $W = UU_1...U_t$ a menor super palavra de grau m para a qual o lema não é verdadeiro. Como W não é monótona podemos assumir $U > U_1$. Se a super palavra $V = U_1...U_t$ não é monótona, pela hipótese de indução, V é uma combinação linear de super palavras monótonas menores W_i. Seja

$$W_i = V_1^{k_1}...V_n^{k_n}, \ \ com \ \ V_1 < V_2 < ... < V_n.$$

Se $U \leq V_1$, então $UW_i = UV_1^{k_1}...V_n^{k_n}$ será monótona. Absurdo, pois assim W possuiria a decomposição requerida no lema. Se $U > V_1$, então

$$UW_i = [U, V_1]V_1^{k_1-1}...V_n^{k_n} + p_{uv_1}V_1UV_1^{k_1-1}...V_n^{k_n}.$$

Pelo Lema 3.3.1, temos que $[U, V_1] = \Sigma_i a_i \Pi_j [s_{ij}]$ onde $[w_{ij}] < U$, ou seja, $[U, V_1]V_1^{k_1-1}...V_n^{k_n} < W$ e também $V_1UV_1^{k_1-1}...V_n^{k_n} < W$.
Portanto UW_i possui a decomposição requerida no lema, e consequentemente, W também possui tal decomposição, o que é um absurdo. Logo o lema vale para toda super palavra.

□

Teorema 3.3.4. (Primeiro teorema) *O conjunto de todas as super palavras monótonas constituem uma base para a álgebra livre* $\boldsymbol{k} < x_1, ..., x_n >$.

Demonstração. Pelo Lema 3.3.3 concluímos que qualquer polinômio é uma combinação linear de super palavras monótonas. Nos resta mostrar que o conjunto de todas as super palavras monótonas é linearmente independente. Seja

$$\sum_i a_i W_i = 0 \tag{3.3.2}$$

uma combinação linear de super palavras monótonas, com W a super palavra líder de (3.3.2) e w a palavra líder de W. Note que w aparece uma única vez em (3.3.2). Suponha por absurdo que w ocorre na decomposição de uma outra super palavra V, então w é menor ou igual v palavra líder de V. Absurdo, pois pela Proposição 3.2.19, $W > V \Leftrightarrow w > v$.

□

Exemplo 3.3.5. Considere a álgebra $\mathbf{k} < x_1, x_2 >$, Façamos algumas observações:

- As palavras da forma $u = x_1^m x_2^n, \quad m, n \in \mathbb{N}$, são palavras standard.
- Se u_1, u_2 são palavras standard e $u_1 > u_2$, então $v = u_1 u_2$ é standard.
- Da mesma forma, se $u_1, u_2, \ldots, u_s$ são palavras standard tais que $u_1 > u_2 > \ldots > u_s$, então $v = u_1 u_2 \ldots u_s$ é standard.
- Todas as palavras standard de $\mathbf{k} < x_1, x_2 >$ são desta forma.

Recordemos que pelo Teorema de Shirshov, cada palavra standard possui um único alinhamento dos colchetes tal que $[u]$ é uma palavra não associativa standard, ou seja, uma super letra.

Sejam $[u_1], [u_2], \ldots, [u_r]$ super letras. Então as super palavras da forma $[v] = [u_1]^{t_1} [u_2]^{t_2} \ldots [u_r]^{t_r}$, onde $[u_1] < [u_2] < \ldots < [u_r]$, formam uma base para $\mathbf{k} < x_1, x_2 >$.

Agora vamos apresentar dois polinômios decompostos nessa base.

O polinômio $x_2x_1x_2$ pode ser decomposto como:

$$[x_2][[x_1],[x_2]] + p_{12}[x_2]^2[x_1] =$$

$$x_2x_1x_2 - p_{21}x_2^2x_1 + p_{21}x_2^2x_1 =$$

$$x_2x_1x_2.$$

O polinômio $x_1x_2^2$ pode ser decomposto como:

$$[[[x_1],[x_2]],[x_2]] + (p_{12} + p_{12}p_{22})[x_2][[x_1],[x_2]] + p_{12}^2[x_2]^2[x_1] =$$

$$[[[x_1],[x_2]],x_2] + p_{12}([x_2][[x_1],[x_2]] + p_{12}[x_2]^2[x_1]) + p_{12}p_{22}[x_2][[x_1],[x_2]] =$$

$$[[[x_1],[x_2]][,x_2]] + p_{12}x_2x_1x_2 + p_{12}p_{22}x_2[[x_1],[x_2]] =$$

$$[[x_1],[x_2]]x_2 - p_{12}p_{22}x_2[[x_1],[x_2]] + p_{12}x_2x_1x_2 + p_{12}p_{22}x_2[[x_1],[x_2]] =$$

$$x_1x_2^2 - p_{12}x_2x_1x_2 + p_{12}x_2x_1x_2 =$$

$$x_1x_2^2.$$

Capítulo 4

Uma base para a álgebra de Hopf de caracteres

Neste capítulo provaremos que a álgebra de Hopf de caracteres possui uma base formada pelo conjunto de todas as G-super palavras admissíveis.

4.1 Coproduto em $G * \mathbf{k} < x_1, ..., x_n >$

Nesta seção vamos definir a álgebra de Hopf $G * \mathbf{k} < x_1, ..., x_n >$, e estender seu coproduto para super palavras. Estas definições e resultados podem ser encontrados em [3].

Considere uma álgebra livre envolvente no conjunto de variáveis quânticas $H = G * \mathbf{k} < x_1, ..., x_n >$. H é uma álgebra de Hopf, com a seguinte estrutura:

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + g_{x_i} \otimes x_i, \quad \Delta(g) = g \otimes g, \tag{4.1.1}$$

$$\varepsilon(x_i) = 0, \quad \varepsilon(g) = 1,$$

$$S(x_i) = -g_i^{-1} x_i, \quad S(g) = g^{-1}$$

$$xg = \chi^x(g)gx.$$

Para mais detalhes sobre esta álgebra consulte [2] capítulo 3.

Proposição 4.1.1. *O coproduto de uma super letra $W = [w]$ é dado por:*

$$\Delta([w]) = [w] \otimes 1 + g_w \otimes [w] + \Sigma_i a_i g(W_i'')W_i' \otimes W_i'', \tag{4.1.2}$$

onde W_i' são super palavras, com super letras menores que $[w]$. Mais ainda, a soma do grau das super palavras W_i' e W_i'' em cada variável x_j é igual ao grau de W na mesma variável.

Demonstração. Faremos indução sobre o comprimento de W. Se $W = x_i$, o resultado segue pela definição do coproduto (4.1.1). Se $L(W) = n \geq 2$, pela Observação 3.2.11 sabemos que $W = [U, V]$, onde $U = [u]$ e $V = [v]$ são super letras. Pela hipótese de indução temos que:

$$\Delta([u]) = [u] \otimes 1 + g_u \otimes [u] + \Sigma_i a_i g(U_i'')U_i' \otimes U_i'',$$

e também

$$\Delta([v]) = [v] \otimes 1 + g_v \otimes [v] + \Sigma_j b_j g(V_j'')V_i' \otimes V_j''.$$

Usando a bilinearidade do skew-comutador 3.1.11,

$$
\begin{aligned}
\Delta(W) &= \Delta([U,V]) = \Delta(UV - p_{uv}VU) = \Delta(U)\Delta(V) - p_{uv}\Delta(V)\Delta(U) \\
&= (U \otimes 1 + g_u \otimes U + \Sigma_i a_i g(U_i'')U_i' \otimes U_i'')(V \otimes 1 + g_v \otimes V \\
&+ \Sigma_j b_j g(V_j'')V_j' \otimes V_j'') - p_{uv}(V \otimes 1 + g_v \otimes V + \Sigma_j b_j g(V_j'')V_j' \otimes V_j'')\cdot \\
&\cdot (U \otimes 1 + g_u \otimes U + \Sigma_i a_i g(U_i'')U_i' \otimes U_i'') \\
&= (UV - p_{uv}VU) \otimes 1 + g_{uv} \otimes (UV - p_{uv}VU) + Ug_v \otimes V \qquad (4.1.3) \\
&+ \Sigma b_j U g_{V_j''} V_j' \otimes V_j'' + g_u V \otimes U + \Sigma b_j g_{UV_j''} V_j' \otimes UV_j'' + \Sigma a_i g_{U_i''} U_i' V \otimes U_i'' \\
&+ \Sigma a_i g_{U_i''} U_i' g_v \otimes U_i'' V + \Sigma a_i b_j g_{U_i''} U_i' g_{V_j''} V_j' \otimes U_i'' v_j'' \\
&- p_{uv}(V g_u \otimes U + \Sigma a_i V g_{U_i''} U_i' g_v \otimes U_i'' + g_v U \otimes V + \Sigma a_i g_{VU_i''} U_i' \otimes VU_i'' \\
&+ \Sigma b_j g_{V_j''} V_j' U \otimes V_j'' + \Sigma b_j g_{V_j''} V_j' g_u \otimes V_i'' U + \Sigma b_j a_i g_{V_j''} V_j' g_{U_i''} U_i' \otimes V_j'' U_i'').
\end{aligned}
$$

Note que, o termo $Ug_v \otimes V$ é cancelado com o $-p_{uv}g_vU \otimes V$ em (4.1.3). Note ainda que, $V_j' < V$ e $U_i' < U$. Logo $V_j', UV_j', U_i', U_i'v, U_i'V_j'$ e V são menores que $W = [U,V]$. Por fim, note que, como a constituição de $V_j'V_j''$ é igual à de V e a de $U_i'U_i''$ é igual à de U, então, soma do grau do lado esquerdo e direito de cada tensor de (4.1.3) em cada variável x_j é igual ao grau de W na mesma variável. Portanto $\Delta(W)$ tem a decomposição requerida.

$\square$

Corolário 4.1.2. *O coproduto de uma super palavra W é dado por:*

$$\Delta(W) = W \otimes 1 + g_w \otimes W + \Sigma_i a_i g(W_i'')W_i' \otimes W_i'', \qquad (4.1.4)$$

onde a soma da constituição de W_i' com W_i'' é igual à constituição de W.

Demonstração. Seja $W = [w_1]...[w_n]$ uma super palavra, onde $[w_i]$ é uma super letra para $i \in \{1,...,n\}$. Usando a Proposição 4.1.1, e o fato de Δ ser um homomorfismo de álgebras segue o resultado desejado.

$\square$

Exemplo 4.1.3. Considere a super palavra $W = [[x_1], [x_2]]$, vamos calcular o seu coproduto $\Delta([[x_1], [x_2]])$.

$$\begin{aligned}
&\Delta([[x_1],[x_2]]) = \Delta(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) = \Delta(x_1)\Delta(x_2) - p_{12}\Delta(x_2)\Delta(x_1) = \\
&= (x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1)(x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2) + \\
&- p_{12}(x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2)(x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1) = \\
&= x_1x_2 \otimes 1 + x_1g_2 \otimes x_2 + g_1x_2 \otimes x_1 + g_1g_2 \otimes x_1x_2 + \\
&- p_{12}(x_2x_2 \otimes 1 + x_2g_1 \otimes x_1 + g_2x_1 \otimes x_2 + g_2g_1 \otimes x_2x_1) = \\
&= (x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) \otimes 1 - (g_1g_2 - p_{12}g_2g_1) \otimes (x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) + \\
&+ x_1g_2 \otimes x_2 + g_1x_2 \otimes x_1 - p_{12}(x_2g_1 \otimes x_1 + g_2x_1 \otimes x_2) = \\
&= W \otimes 1 + g_w \otimes W + \Sigma_i a_i g(W_i'')W_i' \otimes W_i 1''.
\end{aligned}$$

4.2 Álgebra de Hopf de caracteres e G-super palavras

Nesta seção apresentaremos definições que serão necessárias para enunciar e demonstrar o Segundo teorema. Estas definições também podem ser encontradas em [3].

Definição 4.2.1. Seja H uma álgebra de Hopf, um elemento $a_i \in H$ é dito ser skew-primitivo semi-invariante, se existe $g_i \in G(H)$ e χ^i um caracter do grupo $G(H)$ tais que:

$$\Delta(a_i) = a_i \otimes 1 + g_i \otimes a_i, \quad a_i g = \chi^i(g) g a_i, \ \forall g \in G.$$

Definição 4.2.2. Uma álgebra de Hopf H é dita uma álgebra de Hopf de caracteres se o grupo $G(H)$ de todos os elementos group-like é comutativo e H é gerada sobre $\mathbf{k}$ por $G(H)$ e por elementos skew-primitivos semi-invariantes $\{a_1, ..., a_n\}$.

Observação 4.2.3.

1. Seja H_a a subálgebra de H gerada por $\{a_1, ..., a_n\}$, assim temos que, $H = GH_a$.

2. Seja $\{x_1, ..., x_n\}$,um conjunto de variáveis quânticas, onde $g_{x_i} = g_{a_i}$ e $\chi^{x_i} = \chi^{a_i}$. Assim, temos que

$$\exists \varphi : k < x_1 ... x_n > \to H_a$$

   isomorfismo, tal que $\varphi(x_i) = a_i$.

3. Isto nos permite estender as noções aplicadas a palavras escritas com $\{x_1..., x_n\}$ nas seções anteriores, para palavras escritas com $\{a_1, ..., a_n\}$. Para cada a_i associamos o respectivo grau d_i (número natural), e desta forma, cada palavra, super letra ou super palavra com constituição $(m_1, ..., m_n)$ tem grau $m_1 d_1 + ... + m_n d_n$. Denotaremos o grau da super palavra W por $degW$.

Definição 4.2.4. Uma G-super palavra é um produto da forma gW, onde $g \in G$ e W é uma super palavra. A constituição e o comprimento de uma G-super palavra gW são definidos como constituição e comprimento de W. Assumimos que g tem grau e comprimento zero.

Definição 4.2.5. Uma super letra $[u]$ é dita ser dura se ela não é combinação linear de super palavras de mesmo grau escritas com letras menores que $[u]$ e G-super palavras de grau menor.

Definição 4.2.6. A altura de uma super letra $[u]$ de grau d é igual ao menor número natural h com as seguintes propriedades:

1. p_{uu} é uma raiz de ordem $t \geq 1$ da unidade, com $h = t$ ou $h = tl^k$ onde l é a característica do corpo base.

2. A super palavra $[u]^h$ é combinação linear de super palavras de grau hd escritas com letras menores que $[u]$ e G-super palavras de grau menor que hd.

3. Se não existe um número com tais propriedades para $[u]$, dizemos que a altura de $[u]$ é infinita.

Definição 4.2.7. Uma G-super palavra $g[u_1]^{n_1}...[u_k]^{n_k}$ é dita restrita, se cada n_i é menor que a altura de $[u_i]$.

Com isto podemos definir uma G-super palavra adimissível

Definição 4.2.8. Uma G-super palavra é dita admissível se esta é monótona, restrita e escrita apenas com super letras duras.

4.3 Segundo teorema

Nesta seção provaremos o Segundo teorema, originalmente demonstado por Kharchenko em [3].

Teorema 4.3.1. (Segundo teorema) *Seja H uma álgebra de Hopf de caracteres, então o conjunto de todas as G-super palavras admissíveis formam uma base para H.*

A demonstração deste teorema, será feita através de lemas e observações ao longo desta seção.

Lema 4.3.2. *Todas as super palavras não admissíveis, de grau d, são combinação linear de super palavras menores admissíveis de grau d e G-super palavras admissíveis de grau menor que d. Além disso, todas as super letras nas super palavras de grau d desta combinação linear são menores ou iguais à maior super letra da super palavra dada.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existem super palavras não admissíveis de grau um onde o lema falha, seja W a menor destas super palavras. Observe que W tem que ser monótona, pois caso contrário, pelo Lema 3.3.3, W teria a decomposição requerida. Se alguma super letra de W não for dura, pela definição de super letra dura, novamente W teria a decomposição desejada. Se todas as super letras de W são duras, então, suas alturas devem ser maiores que um, logo W é restrita, e portanto W é admissível. Absurdo, portanto não existem super palavras de grau um onde o lema não é verdadeiro.

Façamos agora indução sobre o grau de W. Suponhamos que todas as super palavras de grau menor que m possuam a decomposição mencionada no lema. Seja W a menor super palavra não admissível de grau m onde o lema falha. Pelo Lema 3.3.3 W é monótona. Se W possui uma super letra que não seja dura, podemos reescrevê-la como combinação linear de super palavras menores de mesmo grau e G-super palavras de grau menor. Pela hipótese de indução, entraríamos em contradição com a escolha de W, logo W é escrita apenas em super letras duras. Seja h a altura de W. Se W possui uma subpalavra $[u]^k$, onde $k \geq h$, como no caso anterior poderíamos reescrever $[u]^k$ como combinação linear de super palavras menores de mesmo grau e G-super palavras de grau menor. Pela hipótese de indução, entraríamos em contradição com a escolha de W. Logo, W é restrita, e portanto admissível. Absurdo, pela escolha de W.

$\square$

Observação 4.3.3. Para provar o Teorema 4.3.1, resta mostrar que o conjunto de todas as G-super palavras admissíveis é linearmente independente. Considere T uma combinação linear de G-super palavras admissíveis, e seja U a super palavra líder de grau m. Multiplicando, se necessário, T por um elemento group-like, podemos assumir que U aparece uma vez sem estar multiplicada, isto é:

$$T = U + \sum_{j=1}^{r} a_j g_j U + \sum_{i} a_i g_i V_{i_1}^{n_{i_1}} ... V_{i_s}^{n_{i_s}}. \tag{4.3.1}$$

Nos próximos lemas, usaremos a seguinte hipótese de indução sobre m e r:

($*$) O conjunto de todas as G-super palavras admissíveis de grau m que são menores que U, de todas as G-super palavras admissíveis de grau menor que m, e de todas as G-super palavras da forma g_jU, com $1 \leq j \leq r$, é linearmente independente.

Usando essa hipótese e o Lema 4.3.2, percebemos que todas as super palavras de grau m menores que U, e todas as super palavras de grau menor que m, podem ser unicamente representadas como combinação linear de G-super palavras admissíveis. Vamos nos referir ao conjunto mencionado acima como base de decomposição, ou simplesmente base.

Lema 4.3.4. *Se T é um elemento skew-primitivo, então todas as G-super palavras de grau m em* (4.3.1) *são super palavras.*

Demonstração. Vamos reescrever T da seguinte forma:

$$T = U + \sum_{i=1}^{k} \beta_i g_i W_i + V$$

onde g_iW_i são distintas G-super palavras de grau m, e V é uma combinação linear de G-super palavras de grau menor que m.

Por um lado temos que:

$$\Delta(T) = \Delta(U) + \Delta(\sum_{i=1}^{k} \beta_i g_i W_i) + \Delta(V) =$$

$$U \otimes 1 + g_u \otimes U + \Sigma_i a_i g_{u''} U' \otimes U'' + V \otimes 1 + g_v \otimes V + \Sigma_j b_j g_{v''} V' \otimes V'' +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \beta_i g_i \otimes g_i (W_i \otimes 1 + g_{W_i} \otimes W_i + \Sigma_l c_l g_{w_i''} W_i' \otimes W_i'').$$

Por outro lado temos que:

$$\Delta(T) = T \otimes 1 + g_t \otimes T =$$

$$U \otimes 1 + g_u \otimes U + V \otimes 1 + g_v \otimes V + \sum_{i=1}^{k} \beta_i g_i W_i \otimes 1 + g' \otimes (\sum_{i=1}^{k} \beta_i g_i W_i).$$

Na seguinte expressão $\Delta(T) - T \otimes 1 - g_t \otimes T$, considere a soma de todos os elementos da forma $g_i W_i \otimes ...$, onde W_i é uma palavra de grau m:

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i g_i \otimes g_i (W_i \otimes 1) - \sum_{i=1}^{r} \beta_i g_i W_i \otimes 1 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i g_i W_i \otimes (g_i - 1).$$

Pela hipótese de indução $(*)$, temos que os elementos da forma $g_i W_i$, são linearmente independentes com a parte esquerda de grau menor que m dos tensores em $\Delta(T) - T \otimes 1 - g_t \otimes T$. Logo, $\sum_{i=1}^{r} \beta_i g_i W_i \otimes (g_i - 1) = 0$, e portanto $\beta_i = 0$ ou $g_i = 1$ para todo i.

$\square$

Observação 4.3.5. Note que $(U \otimes 1)(g_u \otimes U) = p_{uu}(g_u U \otimes U) = p_{uu}(g_u \otimes U)(U \otimes 1)$, Assim $(U \otimes 1)^m (g_u \otimes U)^n = p_{uu}^{mn} (g_u \otimes U)^n (U \otimes 1)^m$, e desta forma, podemos usar a seguinte fórmula:

$$(U \otimes 1 + g_u \otimes U)^h = U^h \otimes 1 + g_u^h \otimes U^h + \Sigma_i W_i' \otimes W_i'',$$

onde W_i' e W_i'' são G-super palavras, e a constituição de W_i' mais a de W_i'' resulta na de U^h.

Lema 4.3.6. *Se T é um elemento skew-primitivo, então $U = U_1^{n_1}$ e todas as super palavras de grau m, exceto U, são escritas com super letras menores que U_1.*

Demonstração. Vamos reescrever T da seguinte forma:

$$T = \Sigma_i a_i g_i V_{i_1}^{n_{i_1}} ... V_{i_s}^{n_{i_s}}, \tag{4.3.2}$$

onde $V_{i_j} = [v_{i_j}]$ são super letras duras, $a_i \neq 0$, e $g_i = 1$ se $V_i = V_{i_1}^{n_{i_1}} ... V_{i_s}^{n_{i_s}}$ tem grau m. Aplicando o coproduto em (4.3.2) obtemos

$$\Delta(T) = \sum_i a_i (g_i \otimes g_i) \prod_{j=i}^{s} (V_{ij} \otimes 1 + g_{ij} \otimes V_{ij} + \sum_k g_{ijk} V'_{ijk} \otimes V''_{ijk})^{n_{ij}}, \tag{4.3.3}$$

onde $V'_{ijk} < V_{ij}$, e $degV'_{ijk} + degV''_{ijk} = degV_{ij}$.

Seja $[v]$ a maior super letra de todas as super palavras de grau m em T. Sabemos que todas as super palavras de T são monótonas, logo, $[v] = V_{i_s}$ para algum i. Se existe alguma super palavra $V_i = [v]^k$, então temos que $V_i = U$ é a palavra líder que procuramos, com $U_1 = [v]$ e $n_1 = k$.

Suponha por absurdo que todas as super palavras de grau m que terminam em $[v]$, são escritas com mais de uma super letra. Seja k o maior expoente n_{is} sobre $[v]$ em T. Decomponha $\Delta(T) - T \otimes 1$ na base, e considere todos os tensores da forma $g[v]^k \otimes ...$ (note que $deg([v]^k) \leq m$).

Considere a seguinte igualdade:

$$\Delta(V_i) = (g_i \otimes g_i) \prod_{j=i}^{s} (V_{ij} \otimes 1 + g_{ij} \otimes V_{ij} + \sum_k g_{ijk} V'_{ijk} \otimes V''_{ijk})^{n_{ij}}. \tag{4.3.4}$$

Analisando os casos possíveis obtemos:

• Se alguma G-super palavra da parte esquerda dos tensores de (4.3.4) tem grau maior que $deg([v]^k)$, então sua decomposição na base poderia ter elementos da forma $g[v]^k \otimes ...$, mas neste caso a parte direita do tensor terá grau menor que $m - deg([v]^k)$.

• Se alguma G-super palavra da parte esquerda dos tensores de (4.3.4) tem grau menor que $deg([v]^k)$, ou é menor que $[v]^k$, então não possui tensores da forma $g[v]^k \otimes ...$ em sua decomposição na base.

• Se alguma G-super palavra da parte esquerda dos tensores de (4.3.4) tem grau igual à $deg([v]^k)$, mas $degV_i \leq m$, a super palavra pode até ser maior que $[v]^k$, mas a parte direita do tensor terá grau menor que $m - deg([v]^k)$.

• Se alguma G-super palavra da parte esquerda dos tensores de (4.3.4) tem grau igual $deg([v]^k)$, mas V_i não termina com $[v]^k$, isto é, $V_i = W_i[v]^p$ com $0 \leq p < k$, então esta G-super palavra deve ser menor que $[v]^k$, pois alguma de suas primeiras super letras deve ser menor que $[v]$. Note que W_i não pode ser apenas escrita com group-likes, pois $deg([v]^k) = deg(W_i[v]^p)$. Assim esta G-super palavra não possui tensores da forma $g[v]^k \otimes ...$.

• Finalmente, se $V_i = W_i[v]^k$, teríamos que:

$$\Delta(W_i[v]^k) = \Delta(W_i)\Delta([v])^k =$$

$$(W_i \otimes 1 + g_{w_i} \otimes W_i + \Sigma_j a_j g(W''_{ij})W'_{ij} \otimes W''_{ij}).([v] \otimes 1 + g_v \otimes [v] + \Sigma_l b_l g(v''_{il})v'_i \otimes v''_{il})^k$$

Usando a fórmula da Observação 4.3.5

$$\Delta(W_i[v]^k) =$$

$$(W_i \otimes 1 + g_{w_i} \otimes W_i + \Sigma_j a_j g(W''_{ij})W'_{ij} \otimes W''_{ij}).([v]^k \otimes 1 + g_{v^k} \otimes [v]^k + \Sigma_\theta \beta_\theta g(v''_{i\theta})v'_{i\theta} \otimes v''_{i\theta}).$$

Desta forma, uma G-super palavra da parte esquerda dos tensores de (4.3.4) que tem grau $deg([v]^k)$, e que é maior ou igual que $[v]^k$, aparece em um tensor da forma, $g_{W_i}[v]^k \otimes W_i$.

Fixando t onde V_t termina em $[v]^k$, a soma de tensores da forma

$g_{W_t}[v]^k \otimes ...$ em $\Delta(T) - T \otimes 1$ é igual a $g_{W_t}[v]^k \otimes (\Sigma_j W_j + W')$, onde W' é uma combinação linear de elementos da base de grau menor que $m - deg([v]^k)$, e j percorre o conjunto de todos os índices i tais que $V_i = W_i[v]^k$, $g_{W_i} = g_{W_t}$, e o grau de W_i é $m - deg([v]^k)$. Se W_i são super palavras distintas da base, então $g_{W_t}[v]^k \otimes (\Sigma_j W_j + W') \neq 0$. Mas $g_{W_t}[v]^k \otimes (\Sigma_j W_j + W')$ não está na decomposição de $g_T \otimes T$. Logo T não é skew-primitivo, o que é um absurdo. Portanto existe um $V_i = [v]^k$.

□

Lema 4.3.7. *Seja T um elemento skew-primitivo, com palavra líder $U = U_1^{n_1}$, como no Lema 4.3.6. Então $n_1 = 1$, $n_1 = t$ (se $p_{U_1U_1}$ é uma raiz de ordem $t \geq 1$ da unidade) ou $n_1 = tl^p$ (se a caracterítisca do corpo base for $l > 0$).*

Demonstração. Vamos reescrever T da seguinte forma:

$$T = U^k + \sum_i a_i g_i V_{i_1}^{n_{i_1}} ... V_{i_s}^{n_{i_s}}, \tag{4.3.5}$$

onde $U = [u]$ é maior que todas as super letras V_{i_j} em V_i de grau m.

Se $k = 1$, não há mais nada a ser mostrado.

Se $k \neq 1$. Suponha por absurdo que $\varepsilon = 1 + p_{uu} + p_{uu}^2 + ... + p_{uu}^{k-1} \neq 0$. Considere todos os tensores da forma $U^{k-1} \otimes ...$ na decomposição de $\Delta(T) - T \otimes 1$. Tensores desta forma aparecem na decomposição de $\Delta(V_i) - V_i \otimes 1$ somente se a parte esquerda de alguns de seus tensores tem grau maior que $(k-1)deg[u]$, ou $degV_i < m$. Em ambos os casos, a parte direita do tensor tem grau menor que $deg[u]$.

Calculando o coproduto em U^k obtemos:

$$\Delta(U^k) = \Delta(U)^k = (U \otimes 1 + g_u \otimes U + \sum_i g_{u_i''} U_i' \otimes U_i'')^k.$$

Assim temos que uma G-super palavra de grau $(k-1)deg[u]$, maior ou igual a U^{k-1}, seria uma G-super palavra escrita com $k-1$ letras U e um elemento group-like. Usando a regra de comutação (4.1.1) $U^s g_u = p_{uu}^s g_u U^s$, podemos concluir que a soma de tensores da forma $g_u U^{k-1} \otimes ...$ em $\Delta(U^k)$ é $g_u U^{k-1} \otimes (\varepsilon + W)$, onde W é uma combinação linear de G-super palavras de grau menor que $degU$. Assim $g_u U^{k-1} \otimes (\varepsilon + W) \neq 0$, mas $g_u U^{k-1} \otimes (\varepsilon + W)$ não pertence à decomposição de $g_T \otimes T$. Logo, T não é skew-primitivo, absurdo. Portanto $\varepsilon = 0$ e assim $p_{uu}^k = 1$. Logo, p_{uu} é uma raiz da unidade de ordem t. Suponha por absurdo que existe q natural onde $k = tq$ ou $k = tl^p q$, sendo que $l \neq 0$ é a característica do corpo base. Faça $h = t$ ou $h = tl^p$, respectivamente.

Calculando o coproduto em $\Delta(U^h)$ temos,

$$(U \otimes 1 + g_u \otimes U + \Sigma_i a_i g_{u_i''} U_i' \otimes U_i'')^h.$$

Agora usando a fórmula da Observação 4.3.5:

$$U^h \otimes 1 + g_{u^h} \otimes U^h + \Sigma_\theta \beta_\theta g_(u_\theta'') U_\theta' \otimes U_\theta'',$$

onde $U_\theta' < U^h$ e $degU_\theta' < degU^h$. Note que tensores da forma $U^r \otimes ...$, com $r < m$, não existem, pois neste caso $U^r > U^h$. Isso permite considerar U^h como um único bloco, uma formal super letra, isto é $\{U^h\}$, onde $\{U^h\} < U$ e $\{U^h\} > [v]$ se $u^h > v$. Assim podemos reescrever T da seguinte forma:

$$T = \{U^h\}^q + \Sigma_i a_i g_i V_{i_1}^{n_{i_1}} ... V_{i_s}^{n_{i_s}}.$$

Note que, $p_{u^h u^h} = p_{uu}^{hh} = 1$, e assim, $\varepsilon_1 = 1 + p_{u^h u^h} + p_{u^h u^h}^2 + ... + p_{u^h u^h}^{q-1} = q \neq 0$. Considere os tensores da forma $g_{u^h}\{U^h\}^{q-1} \otimes ...$ na decomposição de $\Delta(T) - T \otimes 1$. A soma destes tensores resultará em $g_{u^h}\{U^h\}^{q-1} \otimes (q\{U^h\} + W)$, onde W é uma combinação linear de G-super palavras de grau menor que $deg(U^h)$. Pela hipótese $(*)$, temos que $g_{u^h}\{U^h\}^{q-1} \otimes (q\{U^h\} + W) \neq 0$, mas $g_{u^h}\{U^h\}^{q-1} \otimes (q\{U^h\} + W)$ não está na deconposição de $g_T \otimes T$. Logo, T

não é skew-primitivo, absurdo. Portanto $k = t$ ou $k = tl^p$.

$\square$

Observação 4.3.8. Suponha por absurdo que $T = 0$. Então T é skew-primitivo, e logo podemos escrever

$$T = U^h + \Sigma_{i=1}^n a_i V_i,$$

onde as super palavras $V_1, ..., V_n$ são de grau m menor que U^h, ou G-super palavras de grau menor que $degU^h$. Note que U^h é admissível, logo U é uma super letra dura. Desta forma não pode ser decomposta em combinação linear de super palavras menores de mesmo grau, e G-super palavras de grau menor. Mais ainda, como p_{uu} é uma raiz de ordem t da unidade, e U^h é restrita, então h é menor que a altura de U. Logo, U^h não pode ser decomposta em combinação linear de super palavras menores de mesmo grau, e G-super palavras de grau menor. Portanto $U^h \neq -\Sigma_{i=1}^n a_i V_i$, o que é um absurdo.

A hipótese de indução $(*)$ para $r = 0$ é verdadeira se escolhermos U como o menor dos geradores a_i, uma vez que que os group-like $g \in G$ são linearmente independentes. Assim o teorema esta provado.

Exemplo 4.3.9. Considere $\mathfrak{g}$ como uma das nove famílias de álgebras de Lie simples: $A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ (ver [6]).

A *quantização multiparâmetro* $U_q^+(\mathfrak{g})$ da subálgebra de Borel $\mathfrak{g}^+$ é uma álgebra de Hopf gerada por skew-primitivos semi-invariantes $x_1, \ldots, x_n$ e elementos group-like $g_1, \ldots, g_n$. $U_q^+(\mathfrak{g})$ é definida pelas relações

$$[[\ldots[[x_i, x_j], x_j], \ldots], x_j] = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Pelo Teorema 4.3.1, o conjunto de todas as G-super palavras monótonas restritas escritas em super letras duras forma uma base para $U_q^+(\mathfrak{g})$.

Em particular, seja G_2 a álgebra de Lie simples cuja matriz de Cartan é dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$U_q^+(G_2)$ possui geradores x_1, x_2, g_1, g_2 e relações

$$[[[[x_1, x_2], x_2], x_2], x_2] = 0, \quad [x_1, [x_1, x_2]] = 0.$$

Novamente pelo Teorema 4.3.1, o conjunto de todas as G-super palavras monótonas restritas escritas em super letras duras forma uma base para $U_q^+(G_2)$. Esta base foi calculada por B. Pogorelsky em [8]. Se q não é raiz de 1, então a lista

$$\begin{aligned}
[A] &= x_1,\\
[B] &= [x_1, x_2],\\
[C] &= [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]],\\
[D] &= [[x_1, x_2], x_2],\\
[E] &= [[[x_1, x_2], x_2], x_2],\\
[F] &= x_2.
\end{aligned}$$

contém todas as super letras duras de $U_q^+(G_2)$, e cada super letra tem altura infinita. Se supomos $x_1 > x_2$, então $A > B > C > D > E > F$.

Note que o elemento $[[x_2],[[x_1],[x_2]]]$ pode ser decomposto na base de $U_q^+(G_2)$ como:

$$[[x_2],[[x_1],[x_2]]] = x_2[[x_1],[x_2]] - p_{21}p_{22}[[x_1],[x_2]]x_2 =$$

$$x_2x_1x_2 - p_{12}x_2^2x_1 - p_{21}p_{22}x_1x_2^2 + p_{21}p_{22}p_{12}x_2x_1x_2 =$$

$$(1+p_{21}p_{22}p_{12})x_2x_1x_2 - p_{12}x_2^2x_1 - p_{21}p_{22}x_1x_2^2$$

Usando as decomposições de $x_2x_1x_2$ e $x_1x_2^2$ calculadas no Exemplo 3.3.5 obtemos o seguinte resultado,

$$(1+p_{21}p_{22}p_{12})(x_2[x_1,x_2] + p_{12}x_2^2x_1) - p_{12}x_2^2x_1 +$$

$$-p_{21}p_{22}([[[x_1],[x_2]],[x_2]] + (p_{12}+p_{12}p_{22})x_2[[x_1],[x_2]] + p_{12}^2x_2^2x_1) =$$

$$(1-p_{21}p_{22}p_{12}p_{22})[x_2][[x_1],[x_2]] - p_{21}p_{22}[[[x_1],[x_2]],[x_2]] =$$

$$(1-p_{21}p_{22}p_{12}p_{22})[F][B] - p_{21}p_{22}[D].$$

Bibliografia

[1] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu e S. Raianu, *Hopf algebras: an introduction*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 235, 2001.

[2] V. K. Kharchenko, *An algebra of skew primitive elements*, Algebra and Logic, 37, N2(1998), 101-126

[3] V. K. Kharchenko, *A quantum analog of the Poincare-Birkhoff-Witt Theorem*, Algebra and Logic, 38, N4(1999), 259-276.

[4] V. K. Kharchenko, *PBW-bases of coideal subalgebras and a freeness theorem*, TAMS, v.360, w10(2008), 5121-5143.

[5] V. K. Kharchenko e A. V. Lara Sagahón, *Right coideal subalgebras in* $U_q(sl_{n+1})$, Journal of Algebra, 319(2008), 2571-2625.

[6] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1990.

[7] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 82, Providence, 1993.

[8] B. Pogorelsky, *Right coideal subalgebras of the quantum Borel algebra of type* G_2, Journal of Algebra, 322(2009), 2335-2354.

[9] A. I. Shirshov, *On free Lie rings*, Mat. Sb., 45(87), No. 2, 113-122(1958).

Índice