

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

*Propagação de Ondas Gravitacionais  
em Modelos Cosmológicos  
dos Tipos FRW Singular e com Ricochete*

**Vicente Freitas Antunes**

Porto Alegre

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

*Propagação de Ondas Gravitacionais  
em Modelos Cosmológicos  
dos Tipos FRW Singular e com Ricochete*

**Vicente Freitas Antunes**

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Física pelo Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadores:

Mário Novello

César Augusto Zen Vasconcellos

Porto Alegre

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

***Propagação de Ondas Gravitacionais  
em Modelos Cosmológicos  
dos Tipos FRW Singular e com Ricochete***

**Vicente Freitas Antunes**

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Física pelo Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadores:

Mário Novello

César Augusto Zen Vasconcellos

*Trabalho Financiado Pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq*

Porto Alegre

2007

# *Agradecimentos*

Agradeço aos orientadores Mário Novello e César Augusto Zen Vasconcellos pela oportunidade de realizar este trabalho e por servirem de modelo por sua competência e entusiasmo no estudo da natureza.

Agradeço imensamente aos pais Joaquim de Oliveira Antunes e Marilene Freitas Antunes por terem fornecido um suporte financeiro sem o qual a realização deste projeto não seria possível.

Agradeço também imensamente aos tios Isabel e Flávio Peralles, bem como aos primos Heitor e Flávia, por terem me acolhido inúmeras vezes de forma tão calorosa em sua casa no Rio de Janeiro.

Gostaria de expressar minha infinita gratidão à companheira e amiga Luciana Manoli por sua existência, presença, apoio e seus conhecimentos de informática.

Agradeço à colega e amiga Karen Fiuza por ter me apresentado a esta oportunidade e, portanto, ter tornado a própria existência deste trabalho possível.

Agradeço aos professores Paulo Mors, Horacio Girotti, Cláudio Schneider, Michel Betz, entre muitos outros, pela contribuição fundamental que fizeram à minha formação.

Agradeço especialmente ao amigo e colega Érico Goulart por sua valiosíssima colaboração neste trabalho, e ao grande amigo e colega Marcelo Mendes Disconzi, com quem sempre tive a oportunidade de discutir física, matemática, política, literatura, etc., e também por suas dicas de  $\text{\LaTeX}$ . Gostaria de agradecer também aos meus irmãos André Antunes, Victória Antunes, Aurélio Rauber e aos grandes amigos Cristiane Maus, Karen Fiuza, Marcelo Noah, Fábio Godoh, Akane Wada, Fabiano Gummo (Hartmann), Tiago Menezes, Fábio Bemfica, Ana Carolina Ribeiro Teixeira, Luciana Bonanno, entre outros, pelos bons momentos que passamos juntos.

Agradeço, ainda, ao pessoal do Instituto de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica (ICRA) do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) por terem me recebido de forma calorosa nos períodos que passei no Rio de Janeiro.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes pelo financiamento deste trabalho.

# *Sumário*

**Resumo**

**Abstract**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Espaço-Tempo e Gravitação</b>	<b>10</b>
2.1	Espaço-Tempo . . . . .	11
2.2	Derivada Covariante . . . . .	11
2.3	Geodésicas . . . . .	13
2.4	Curvatura . . . . .	14
2.5	Congruências de Curvas . . . . .	16
2.6	Gravitação . . . . .	21
2.6.1	Tensor Momentum-Energia . . . . .	21
2.6.2	Equações de Campo da Gravitação . . . . .	22
2.6.3	Condições de Energia . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Formulação de Jordan-Ehlers-Kundt da Gravitação</b>	<b>26</b>
3.1	Tensor de Weyl . . . . .	27
3.2	Equações Quasi-Maxwellianas da Gravitação . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Modelos Cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker</b>	<b>32</b>
4.1	A Classe de Modelos de FRW . . . . .	33
4.2	O Universo de Einstein-Maxwell (UEM) . . . . .	36

4.3	O Universo com Ricochete (UR) . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Perturbações em Modelos da Classe FRW</b>	<b>40</b>
5.1	Perturbações no Formalismo JEK . . . . .	42
5.2	Perturbações Tensoriais . . . . .	43
5.3	Análise Qualitativa da Propagação de Ondas Gravitacionais . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Ondas Gravitacionais no Universo de Einstein-Maxwell</b>	<b>50</b>
6.1	Perturbações Tensoriais no Universo de Einstein-Maxwell . . . . .	51
6.2	Análise Qualitativa da Propagação de Ondas Gravitacionais no Universo de Einstein-Maxwell . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Ondas Gravitacionais no Universo com Ricochete</b>	<b>56</b>
7.1	Perturbações Tensoriais no Universo com Ricochete . . . . .	57
7.2	Análise Qualitativa da Propagação de Ondas Gravitacionais no Universo com Ricochete . . . . .	58
7.3	Comparação com o UEM . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>67</b>
	<b>Apêndice A – Variedades Pseudo-Riemannianas</b>	<b>69</b>
A.1	Variedades Diferenciáveis . . . . .	69
A.2	Campos Vetoriais e Tensoriais . . . . .	71
A.3	Tensor Métrico . . . . .	76
A.4	Hipersuperfícies . . . . .	78
	<b>Apêndice B – Perturbações Invariantes de Calibre</b>	<b>80</b>



# *Resumo*

Neste trabalho investigamos a propagação de ondas gravitacionais em dois modelos cosmológicos não-estacionários, ambos pertencentes à classe de Friedmann-Robertson-Walker (FRW): o Universo de Einstein-Maxwell, cuja fonte da geometria é o campo eletromagnético descrito pela eletrodinâmica de Maxwell, e um universo não-singular com ricochete (*bounce*) cuja fonte da geometria é o campo eletromagnético descrito por uma generalização não-linear da eletrodinâmica de Maxwell. Trabalhamos com uma formulação de perturbações cosmológicas explicitamente invariante de calibre e analisamos a estrutura do espaço de fases do sistema dinâmico que descreve a evolução das perturbações tensoriais. Esta análise mostrou que ondas gravitacionais geradas próximo à singularidade inicial ou ao ricochete devem exibir um comportamento qualitativamente diferente.



# *Abstract*

In this work we investigate the gravitational wave propagation on two non-stationary cosmological models belonging to the Friedmann-Robertson-Walker (FRW) class: the Einstein-Maxwell Universe, which has the electromagnetic field described by Maxwell's electrodynamics as the source of its geometry, and a non-singular bouncing universe which has the electromagnetic field described by a non-linear generalization of Maxwell's electrodynamics as the source of its geometry. We work with an explicitly gauge invariant formulation of cosmological perturbations and analyze the phase space structure of the dynamical system that describes the evolution of tensorial perturbations. This analysis showed that gravitational waves generated near the initial singularity or the bounce must exhibit a qualitatively different behavior.

# 1 *Introdução*

A chamada *Cosmologia Padrão* está fundamentada em três princípios. O primeiro é a validade da teoria Einsteiniana da gravitação, a *Relatividade Geral*. O segundo é o princípio de isotropia e homogeneidade do espaço, ou *Princípio Cosmológico*. Estes dois princípios definem a classe de modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). O terceiro é a imposição das chamadas *condições de energia* à toda forma de matéria (HAWKING; ELLIS, 1973).

O modelo adotado pela *Cosmologia Padrão* para descrever a *era da radiação* de nosso universo, em particular, consiste de uma geometria do tipo FRW cuja fonte é o campo eletromagnético. Este é o chamado *Universo de Einstein-Maxwell* (UEM) e é geralmente considerado uma boa descrição de nosso universo em grande escala após a inflação (KOLB; TURNER, 1990; WALD, 1984). De fato, este modelo tem recebido forte confirmação de observações, como a descoberta da radiação cósmica de fundo e a predição da abundância cósmica de hélio (HAWKING; ELLIS, 1973).

Apesar de seu grande sucesso, o modelo cosmológico padrão tem a presença uma singularidade inicial, ou *big bang*, como uma de suas características (HAWKING; ELLIS, 1973; KOLB; TURNER, 1990; WALD, 1984). Ou seja, para um certo tempo finito no passado, a curvatura e a densidade de energia tornam-se arbitrariamente grandes. Por algum tempo acreditou-se que a predição de uma origem singular para o universo poderia ser uma consequência do alto grau de simetria dos modelos espacialmente homogêneos e isotrópicos adotados para descrevê-lo. Com o advento dos teoremas de singularidade de Penrose, Hawking, Geroch e outros (HAWKING; ELLIS, 1973), passou-se a acreditar que de fato a existência de uma singularidade inicial é uma característica geral de soluções cosmológicas. No entanto, o caráter não-físico do estado inicial singular indica que a presença deste constitui uma grande deficiência deste modelo. Isto é, como a métrica espaço-temporal, e, portanto, a própria estrutura do espaço-tempo, não estão definidas na singularidade, o emprego deste modelo para descrever o universo primordial deve

ser posto em questão.

Várias propostas de soluções cosmológicas não-estacionárias não-singulares surgiram nos últimos anos, nas quais o modelo apresenta uma fase contrativa, seguida de uma fase expansiva, sendo a transição entre estas fases denominada *ricochete*<sup>1</sup>. Diversos mecanismos são empregados para evitar a singularidade inicial nestes modelos<sup>2</sup>, tais como constante cosmológica, acoplamentos não-mínimos entre os campos e a gravitação, Lagrangeanas não-lienares para a gravitação envolvendo termos quadráticos na curvatura, modificações da estrutura geométrica do espaço-tempo, entre outros. Na maioria dos casos, uma revisão radical da Cosmologia Padrão é proposta, seja pela introdução de formas exóticas de matéria (com densidade de energia negativa) no modelo, seja por modificações na Gravitação de Einstein ou na própria estrutura do espaço-tempo.

Recentemente, foi sugerida uma proposta menos radical na qual a era da radiação é modelada por uma geometria do tipo FRW com o campo eletromagnético descrito por uma generalização não-linear da eletrodinâmica de Maxwell como sua fonte (DE LORENCI et al., 2002). Neste caso, a singularidade inicial é evitada pelo surgimento de uma pressão negativa no universo primordial, apesar da densidade de energia ser sempre positiva. Este “modelo de brinquedo” coincide, como seria de se esperar, com a eletrodinâmica de Maxwell no limite em que os campos são fracos. Ou seja, esta modificação é relevante apenas para descrever o comportamento da radiação eletromagnética no universo primitivo, onde os campos tornam-se muito intensos e, portanto, os efeitos não-lineares tornam-se importantes, sendo estes efeitos praticamente desprezíveis em eras posteriores da história do universo. Este modelo será chamado, neste trabalho, simplesmente de *Universo com Ricochete* (UR) e será tomado aqui como representante do paradigma da *Cosmologia Não-Estacionária Não-Singular*.

Apesar de modelos com singularidade ou com ricochete exibirem uma estrutura espaço-temporal muito diferente no universo primitivo, eles obviamente devem concordar em suas previsões acerca de eras posteriores. Isto levanta a questão de como podemos decidir experimentalmente qual destes modelos oferece uma melhor descrição da estrutura espaço-temporal global de nosso universo. Um caminho natural para procurar critérios experimentais capazes de nos auxiliar nesta decisão seria investigar a forma como a singularidade e o ricochete afetam a evolução de perturbações primordiais.

Neste trabalho vamos examinar e comparar a propagação de ondas gravitacionais no Universo de Einstein-Maxwell e no Universo com Ricochete. Esta análise será feita empregando

---

<sup>1</sup>Do Inglês *bounce*.

<sup>2</sup>Ver referências em (DE LORENCI et al., 2002).

o método de perturbações proposto por Hawking (HAWKING, 1966) e desenvolvido por Ellis (ELLIS, 1971) e Novello e Salim (NOVELLO; SALIM, 1983), baseado em uma formulação alternativa da Gravitação, proposta por Jordan, Ehlers e Kundt (JORDAN; EHLERS; KUNDT, 1960; LICHNEROWICZ, 1960), na qual as equações de Einstein são escritas em termos do *tensor de curvatura conformal*, ou *tensor de Weyl*, e assumem uma forma semelhante às equações do eletromagnetismo de Maxwell. Essa formulação permite a elaboração de uma teoria de perturbações que não está sujeita aos problemas tradicionais relacionados à dependência de calibre nas teorias de perturbação da Gravitação (HAWKING, 1966; NOVELLO; SALIM, 1983). Este formalismo nos permitirá obter um sistema dinâmico planar fechado que descreve a evolução de perturbações tensoriais, que representam ondas gravitacionais propagando-se no espaço-tempo base, em modelos da classe FRW. A comparação da estrutura local do espaço de fases deste sistema no Universo de Einstein-Maxwell e no Universo com Ricochete nos permitirá identificar um comportamento qualitativamente diferente para ondas propagando-se próximo à singularidade ou ao ricochete.

Até onde sabemos, esta é a primeira vez que a análise qualitativa da evolução de perturbações primordiais foi empregada na busca de critérios experimentais capazes de determinar quais modelos cosmológicos, singulares ou não-singulares, fornecem uma melhor descrição de nosso universo.

No capítulo 2 será feita uma breve revisão das estruturas geométricas fundamentais à teoria Einsteiniana da gravitação e também uma revisão de aspectos básicos desta teoria. No capítulo 3 será feita uma revisão sucinta da formulação de Jordan-Ehlers-Kundt (JEK) da Gravitação. No capítulo 4 serão revisados aspectos básicos dos modelos cosmológicos da classe FRW. No capítulo 5 será feita uma revisão da teoria de perturbações de modelos da classe FRW baseada na formulação JEK da Gravitação. Finalmente, nos capítulos 6 e 7 será investigada a propagação de ondas gravitacionais no Universo de Einstein-Maxwell e no Universo com Ricochete utilizando o formalismo revisado nos capítulos anteriores. No apêndice A é apresentado um “dicionário” de estruturas matemáticas fundamentais. No apêndice B é feita uma brevíssima apresentação de aspectos essenciais da teoria cosmológica de perturbações invariantes de calibre.

## 2 *Espaço-Tempo e Gravitação*

Neste capítulo, será feita uma breve exposição da estrutura geométrica elementar da teoria Einsteiniana da Gravitação, bem como de aspectos básicos desta teoria. Uma exposição detalhada da Geometria Riemanniana pode ser encontrada em (DO CARMO, 2005; CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982). Uma discussão detalhada sobre a estrutura do espaço-tempo e da teoria da Gravitação pode ser encontrada em (DE FELICE; CLARKE, 1990), (HAWKING; ELLIS, 1973), (PENROSE, 1972) e (WALD, 1984). Na seção § 2.1 será apresentada, de forma breve, a definição de uma *variedade espaço-tempo*, ou simplesmente *espaço-tempo*<sup>1</sup>. Nas seções § 2.2, § 2.3 e § 2.4 serão apresentadas, de forma sucinta, as estruturas geométricas elementares subjacentes à teoria da Gravitação de Einstein: *derivada covariante, curvas geodésicas e curvatura*. Na seção § 2.5, será discutida em detalhe a geometria das *congruências de curvas do tipo tempo ou nulo* no espaço-tempo, que vão representar as “histórias” das partículas materiais e da radiação no universo. Serão derivadas as equações que descrevem as propriedades geométricas destas congruências. Na seção § 2.6 será feita uma breve apresentação dos aspectos básicos da teoria da Gravitação de Einstein. Na subseção §§ 2.6.1 será apresentado o *tensor momentum-energia*, que descreve a distribuição de matéria-energia no espaço-tempo. Na subseção §§ 2.6.2 serão apresentadas as *equações de campo da Gravitação de Einstein*. Finalmente, na subseção §§ 2.6.3 serão discutidas as chamadas *condições de energia*.

---

<sup>1</sup>O termo “espaço-tempo” será reservado ao modelo matemático do Espaço-Tempo físico.

## 2.1 Espaço-Tempo

Vamos chamar de *espaço-tempo* uma variedade diferenciável<sup>2</sup> real  $\mathcal{M}^4$ , de dimensão 4, com uma métrica Lorentziana  $\mathbf{g}$  de assinatura  $(+ - - -)$ . Além disso  $(\mathcal{M}^4, \mathbf{g})$  deve ser conexa, paracompacta, sem bordo, orientável<sup>3</sup> e possuir uma estrutura causal<sup>4</sup>. Os pontos  $m$  de um espaço-tempo  $\mathcal{M}^4$  são chamados de *eventos*. Um conjunto de cartas coordenadas  $\{(\mathcal{U}, \phi)\}$  pode ser construído com uma coleção de mapeamentos bijetivos  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$ , onde  $\mathbb{R}^{1,3}$  é o análogo pseudo-Euclidiano do  $\mathbb{R}^4$ , de modo que podemos definir as coordenadas locais de um ponto  $m$ :

$$\phi(m) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^\alpha) \quad ,$$

em relação à carta  $(\mathcal{U}, \phi)$ , com  $\alpha$  tomando valores no conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ . As histórias de partículas materiais são representadas por curvas do tipo tempo ou nulo (no caso de partículas sem massa) em  $\mathcal{M}^4$  (c.f. Apêndice A).

## 2.2 Derivada Covariante

A generalização da noção de derivada direcional em uma variedade diferenciável arbitrária  $\mathcal{M}$ , a chamada *derivada covariante*, é obtida introduzindo-se uma estrutura adicional na variedade, denominada *estrutura conectiva*, ou *conexão*,  $\nabla$ . Uma *conexão afim* em um ponto  $m$  de  $\mathcal{M}$  é uma regra  $\nabla_m$  que associa a cada vetor  $X_m$  pertencente ao espaço tangente à  $\mathcal{M}$  em  $m$ ,  $T_m\mathcal{M}$ , e cada campo tensorial  $T$  do tipo  $(p, q)$  em  $\mathcal{M}$ , o tensor  $(\nabla_X T)_m$  do tipo  $(p, q)$ , definido no ponto  $m$ , chamado *derivada covariante de  $T$  na direção de  $X_m$* . Uma *conexão afim global*, ou simplesmente uma *conexão*,  $\nabla$  em  $\mathcal{M}$  é uma regra que associa a cada ponto  $m$  de  $\mathcal{M}$  uma conexão afim  $\nabla_m$ . A derivada covariante de um campo tensorial  $T$  arbitrário em  $\mathcal{M}$  é o tensor  $\nabla T$  que resulta da aplicação da conexão  $\nabla$  ao campo  $T$ .

A derivada covariante de um mapeamento  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , em particular, tem como expressão local  $\nabla\varphi = \nabla_\alpha\varphi dx^\alpha = \partial_\alpha\varphi dx^\alpha$ , ou seja, é tal que, quando aplicada a um campo vetorial

<sup>2</sup>Para uma breve discussão da teoria de variedades diferenciáveis, ver apêndice A.

<sup>3</sup>Ver (DE FELICE; CLARKE, 1990).

<sup>4</sup>Para a discussão detalhada da estrutura causal do espaço-tempo, ver (DE FELICE; CLARKE, 1990; HAWKING; ELLIS, 1973; PENROSE, 1972; WALD, 1984).

$X = X^\alpha \partial_\alpha$  em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$ , resulta:

$$\nabla_X \varphi = (\nabla \varphi)(X) = X^\alpha \nabla_\alpha \varphi = X^\alpha \partial_\alpha \varphi \quad . \quad (2.1)$$

A derivada covariante de um campo vetorial  $Y = Y^\alpha \partial_\alpha$  é um campo tensorial 1-contravariante 1-covariante, que admite a seguinte expressão local:

$$\begin{aligned} \nabla Y &= (\nabla Y^\alpha) \otimes \partial_\alpha + Y^\alpha \nabla \partial_\alpha \\ &= \left( \partial_\beta Y^\alpha + \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \sigma \end{smallmatrix} \right\} Y^\sigma \right) dx^\beta \otimes \partial_\alpha \quad , \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde os *símbolos de Christoffel*  $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\}$  são os coeficientes da expressão local da derivada covariante de um campo da base natural em  $\mathcal{U}$ :

$$\nabla \partial_\beta = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\} dx^\alpha \otimes \partial_\lambda \quad . \quad (2.3)$$

Os símbolos de Christoffel são determinados, de forma única, pela *identidade de Christoffel*<sup>5</sup>:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left( \partial_\rho g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\rho} - \partial_\beta g_{\rho\alpha} \right) \quad . \quad (2.4)$$

Logo, a derivada covariante de um campo vetorial  $Y$ , em relação a um campo  $X$ , tem a expressão local  $\nabla_X Y = \nabla Y(X) = X^\beta \nabla_\beta Y^\alpha \partial_\alpha$ , onde definimos as componentes:

$$\nabla_\beta Y^\alpha = \partial_\beta Y^\alpha + \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \sigma \end{smallmatrix} \right\} Y^\sigma \quad . \quad (2.5)$$

Analogamente, a derivada covariante de um campo covetorial  $\theta = \theta_\alpha dx^\alpha$  tem as componentes locais:

$$\nabla_\beta \theta_\alpha = \partial_\beta \theta_\alpha - \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right\} \theta_\sigma \quad . \quad (2.6)$$

Estas definições podem ser diretamente estendidas a campos tensoriais em geral. A derivada

---

<sup>5</sup>De fato, define-se a *conexão Riemanniana*, ou de *Levi-Civita*, como a única conexão em  $\mathcal{M}$  que satisfaz as propriedades de *simetria* e *compatibilidade com a métrica*, respectivamente:

- 1)  $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$  , i.e.  $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right\}$  ;
- 2)  $\nabla g = \mathbf{0}$  , i.e.  $\partial_\rho g_{\alpha\beta} = \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \alpha \rho \end{smallmatrix} \right\} g_{\sigma\beta} + \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \rho \beta \end{smallmatrix} \right\} g_{\sigma\alpha}$  ;

onde  $[X, Y]$  é o colchete de Lie dos campos  $X$  e  $Y$  (ver Apêndice A, §A.2). Na literatura, é comum definir a *torção*:

$$T_\nabla(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

e formular a propriedade (1) como a afirmação de que  $T_\nabla = \mathbf{0}$  em  $\mathcal{M}$ . O símbolo  $\nabla$  é geralmente usado para denotar exclusivamente a conexão Riemanniana. As condições (1) e (2) implicam a identidade de Christoffel, ou seja, a métrica  $g$  dá origem, naturalmente, à conexão Riemanniana de  $\mathcal{M}$ . Ver (DO CARMO, 2005; CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982).

covariante de um campo tensorial 1-contravariante 2-covariante  $T = T_{\beta\gamma}^{\alpha} \partial_{\alpha} \otimes dx^{\beta} \otimes dx^{\gamma}$ , por exemplo, tem as componentes locais:

$$\nabla_{\sigma} T_{\beta\gamma}^{\alpha} = \partial_{\sigma} T_{\beta\gamma}^{\alpha} + \{\sigma\theta\}^{\alpha} T_{\beta\gamma}^{\theta} - \{\sigma\beta\}^{\theta} T_{\theta\gamma}^{\alpha} - \{\sigma\gamma\}^{\theta} T_{\beta\theta}^{\alpha} . \quad (2.7)$$

A derivada covariante ao longo de uma curva  $C$  de um campo  $Y$  em  $\mathcal{M}$  é definida por  $DY/D\tau = \nabla_V Y$ , em componentes locais:

$$\dot{Y}^{\alpha} = \frac{DY^{\alpha}}{D\tau} = V^{\beta} \nabla_{\beta} Y^{\alpha} , \quad (2.8)$$

onde  $V$  é o campo tangente à curva  $C(\tau)$ . Um campo é dito *paralelamente transportado* ao longo de uma curva  $C$  se a sua derivada covariante ao longo da curva for nula:

$$\dot{Y}^{\alpha} = V^{\beta} \nabla_{\beta} Y^{\alpha} = 0 . \quad (2.9)$$

## 2.3 Geodésicas

Uma *curva geodésica*  $\gamma$  em  $\mathcal{M}$  é definida como a curva tal que o próprio campo tangente  $V$  é paralelamente transportado ao longo de  $\gamma$ :

$$\nabla_V V = 0 \quad (2.10)$$

ou, em coordenadas locais:

$$\dot{V}^{\alpha} = V^{\beta} \nabla_{\beta} V^{\alpha} = 0 , \quad (2.11)$$

explicitamente:

$$V^{\beta} \partial_{\beta} V^{\alpha} + \{\beta\rho\}^{\alpha} V^{\beta} V^{\rho} = 0 . \quad (2.12)$$

Essa equação é conhecida como *equação das geodésicas*. As curvas geodésicas, que são as “retas” da geometria pseudo-Riemanniana, vão representar as histórias de partículas materiais em queda livre.

O *mapeamento exponencial* é definido como o mapeamento que associa a cada vetor  $\tau V_m$  em  $T_m \mathcal{M}$  o ponto  $\gamma(\tau)$  de uma curva geodésica, definida em um intervalo  $[\tau_0, \tau_1]$  suficientemente pequeno, que passa pelo ponto  $m = \gamma(\tau_0)$ :

$$\gamma(\tau) = \exp_m \tau V_m .$$



## 2.4 Curvatura

Vamos definir<sup>7</sup> a *curvatura* de  $\mathcal{M}$  como sendo o campo vetorial que resulta da aplicação do chamado *operador de curvatura*,  $\rho(X, Y)$ , em um campo  $Z$ :

$$\rho(X, Y)Z \equiv \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \quad , \quad (2.13)$$

para campos vetoriais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  quaisquer em  $\mathcal{M}$ , e onde  $[X, Y]$  é o colchete de Lie dos campos  $X$  e  $Y$  (ver apêndice A, §A.2). O *tensor de curvatura*, ou *tensor de Riemann*, é definido pela aplicação de um campo covetorial qualquer  $\theta$  em  $\mathcal{M}$  à curvatura:

$$\mathbf{R}(X, Y, Z, \theta) \equiv \theta(\rho(X, Y)Z) \quad . \quad (2.14)$$

As componentes locais do tensor de Riemann são determinadas, em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$ , por sua aplicação nos elementos da base natural vetorial e covetorial de  $\mathcal{U}$ :

$$R^{\rho}_{\sigma\alpha\beta} = \mathbf{R}(\partial_{\alpha}, \partial_{\beta}, \partial_{\sigma}, dx^{\rho}) \quad (2.15)$$

ou, em termos dos símbolos de Christoffel:

$$R^{\rho}_{\sigma\alpha\beta} = \partial_{\beta} \{^{\rho}_{\alpha\sigma}\} - \partial_{\alpha} \{^{\rho}_{\beta\sigma}\} + \{^{\mu}_{\alpha\sigma}\} \{^{\rho}_{\beta\mu}\} - \{^{\mu}_{\beta\sigma}\} \{^{\rho}_{\alpha\mu}\} \quad . \quad (2.16)$$

Nota-se que o tensor de Riemann aplicado a um campo vetorial  $X$  leva à equação:

$$R^{\rho}_{\sigma\alpha\beta} X^{\sigma} = \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} X^{\rho} - \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} X^{\rho} \quad , \quad (2.17)$$

já que  $[\partial_{\alpha}, \partial_{\beta}] = 0$  para campos da base natural. Ou seja, o tensor de Riemann expressa, simplesmente, o grau de não comutatividade da derivada covariante. No caso de uma variedade plana, recupera-se o bem conhecido resultado do cálculo  $\partial_{\beta} \partial_{\alpha} X^{\sigma} = \partial_{\alpha} \partial_{\beta} X^{\sigma}$ .

As propriedades de simetria do tensor de Riemann são mais convenientemente expressas em termos do chamado *tensor de Riemann totalmente covariante*, definido pelas componentes:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma} R^{\sigma}_{\beta\mu\nu} \quad . \quad (2.18)$$

O tensor de Riemann totalmente covariante tem as seguintes propriedades de simetria<sup>8</sup>:

$$R_{(\alpha\beta)\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.19)$$

<sup>7</sup>A definição adota aqui é contrária àquela adota na maioria das referências. Seguimos aqui a definição adotada em (DO CARMO, 2005; NOVELLO; SALIM, 1983; PENROSE, 1972).

<sup>8</sup>Seguindo Novello e Salim (NOVELLO; SALIM, 1983), a simetrização e a anti-simetrização de tensores do

$$R_{\alpha\beta(\mu\nu)} = 0 \quad , \quad (2.20)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad . \quad (2.21)$$

Além disto, o tensor de Riemann satisfaz as chamadas *identidades de Bianchi*:

$$R_{[\alpha\beta\mu]\nu} = 0 \quad , \quad (2.22)$$

$$\nabla_{[\sigma} R_{\alpha\beta]\mu\nu} = 0 \quad . \quad (2.23)$$

As propriedades (2.19)-(2.21), sugerem que o tensor de Riemann totalmente covariante pode ser pensado como uma dupla 2-forma<sup>9</sup>. Isto nos permite definir a dualidade (de Hodge) à esquerda  ${}^*R$  e à direita  $R^*$  do tensor de Riemann, em componentes, como<sup>9</sup>:

$${}^*R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \quad ,$$

$$R^*_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\rho\sigma} R_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} \quad .$$

A contração<sup>9</sup> do tensor de Riemann define o tensor simétrico chamado de *tensor de Ricci*, com componentes definidas por:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \quad . \quad (2.24)$$

O *escalar de Ricci*, por sua vez, é definido como a contração do tensor de Ricci:

$$R \equiv R_{\alpha}{}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad . \quad (2.25)$$

Uma variedade será chamada de *variedade de curvatura constante* se o tensor de Riemann tiver a forma:

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma} = K g_{\alpha[\rho} g_{\sigma]\beta} \quad , \quad (2.26)$$

onde  $K$  é uma constante.

Em variedades de dimensão  $n \geq 3$ , o tensor de Riemann pode ser decomposto em uma parte de traço não-nulo, determinada pelo tensor de Ricci, e uma parte de traço nulo<sup>10</sup>,  $W$ , com tipo  $(0, 2)$  são definidas, respectivamente, como:

$$T_{(\alpha\beta)} \equiv T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} \quad ,$$

$$T_{[\alpha\beta]} \equiv T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} \quad ,$$

diferente da definição adotada pela maioria dos autores citados, onde aparece um fator multiplicativo  $1/2$ . Estas definições podem ser diretamente estendidas a tensores do tipo  $(0, p)$  e  $(p, 0)$ , para  $p$  qualquer (ver Apêndice A, §A.2 para maiores detalhes). Neste caso, as definições adotadas aqui e na maioria dos autores citados, diferem por um fator multiplicativo  $1/p!$ .

<sup>9</sup>Ver Apêndice A, §A.2.

<sup>10</sup>Ver (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982; DE FELICE; CLARKE,

componentes  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$  definidas pela expressão:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{2}{n-2} M_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{R}{(n-1)(n-2)} g_{\alpha\beta\mu\nu} \quad , \quad (2.27)$$

onde

$$M_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (R_{\alpha[\mu} g_{\nu]\beta} + R_{\beta[\nu} g_{\mu]\alpha}) \quad , \quad (2.28)$$

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha[\mu} g_{\nu]\beta} \quad . \quad (2.29)$$

Em particular, para  $n = 4$ :

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + M_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{6} R g_{\alpha\beta\mu\nu} \quad . \quad (2.30)$$

A parte de traço nulo  $W$  do tensor de Riemann é chamada *tensor de curvatura conformal* ou *tensor de Weyl*. O tensor de Weyl tem as mesmas propriedades de simetria do tensor de Riemann (2.19)-(2.21), ou seja,  $W$  também pode ser pensado como uma dupla 2-forma.

## 2.5 Congruências de Curvas

Uma congruência de curvas<sup>11</sup> em  $\mathcal{M}^4$  é um mapeamento  $C : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}^4$  que define uma coleção de curvas  $\{C(s)\}$  em  $\mathcal{M}^4$ , isto é, para um dado  $s = (s^1, s^2, s^3) \in \mathbb{R}^3$ , o mapeamento  $C(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}^4$  define uma curva em  $\mathcal{M}^4$  que “passa” pelo ponto  $C(\tau, s)$  no “instante”  $\tau$ . Estas congruências de curvas representam as linhas de fluxo de fluidos materiais ou as histórias de partículas sem massa (radiação).

Define-se o campo de vetores tangente às curvas da congruência  $C$ , em uma vizinhança de  $C(0,0)$ , como  $V = C_* \partial_\tau = \partial_\tau C$ , isto é, dado um  $s$ , para cada  $\tau$ ,  $V(\tau, s)$  é o vetor tangente à curva  $C(s)$  no ponto  $C(\tau, s)$ . O chamado *campo conector*,  $Z$ , é o campo que liga pontos da curva  $C \equiv C(0)$  a pontos de uma curva vizinha  $C(s)$ , definido por:

$$Z = C_* \partial_s = \partial_s C \quad . \quad (2.31)$$

---

1990; HAWKING; ELLIS, 1973; NOVELLO; SALIM, 1983).

<sup>11</sup>Nesta seção, seguiremos as exposições de (HAWKING; ELLIS, 1973; NOVELLO; SALIM, 1983; WALD, 1984).

Os campos tangente e conector tem a importante propriedade<sup>12</sup>:

$$V^\beta \nabla_\beta Z^\alpha = Z^\beta \nabla_\beta V^\alpha \quad . \quad (2.32)$$

Estamos particularmente interessados em representar a separação entre curvas vizinhas, e não entre pontos arbitrários dessas curvas. A métrica espaço-temporal pode ser decomposta, em cada ponto  $m$ , como<sup>13</sup>:

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + V_\alpha V_\beta \quad , \quad (2.33)$$

o que permite definir o projetor  $h^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta - V^\alpha V_\beta$ , que projeta um vetor qualquer em  $T_m \mathcal{M}^4$  no subespaço  $H_m \subset T_m \mathcal{M}^4$  formado pelos vetores ortogonais ao vetor tangente  $V$  no ponto  $m = C(\tau)$ . A separação entre curvas vizinhas é representada pela projeção do vetor  $Z$  no subespaço  $H_m$ , em cada ponto  $m$ :

$$\hat{Z}^\alpha = h^\alpha_\beta Z^\beta \quad . \quad (2.34)$$

A taxa de variação no tempo da separação entre duas curvas vizinhas infinitesimalmente próximas é dada pela projeção espacial da derivada covariante do campo conector ao longo das curvas da congruência:

$$h^\alpha_\beta \frac{D\hat{Z}^\beta}{D\tau} = V^\beta \hat{\nabla}_\beta \hat{Z}^\alpha \quad . \quad (2.35)$$

Tomando novamente a derivada covariante na equação (2.35) e projetando no subespaço  $H_m$ , obtemos a equação:

$$h^\sigma_\beta \frac{D}{D\tau} \left( h^\beta_\alpha \frac{D\hat{Z}^\alpha}{D\tau} \right) = R^\sigma_{\rho\alpha\beta} \hat{Z}^\alpha V^\beta V^\rho + h^\sigma_\beta \hat{Z}^\alpha \nabla_\alpha \dot{V}^\beta + \dot{V}^\sigma \dot{V}_\beta \hat{Z}^\beta \quad , \quad (2.36)$$

conhecida como *equação de Jacobi generalizada*. No caso em que as curvas da congruência são geodésicas, esta equação reduz-se à *equação de Jacobi*:

$$\frac{D^2 \hat{Z}^\sigma}{D\tau^2} = R^\sigma_{\rho\alpha\beta} \hat{Z}^\alpha V^\beta V^\rho \quad , \quad (2.37)$$

também conhecida, nesse caso, como *equação do desvio geodésico*. Ou seja, no caso de uma congruência de curvas geodésica, o tensor de Riemann determina a aceleração relativa de curvas vizinhas. Veremos na seção §2.6 que a curvatura do espaço-tempo é determinada por seu conteúdo de matéria-energia. A equação do desvio geodésico, portanto, evidencia o significado físico da curvatura: em um espaço-tempo curvo, a curvatura determina a aceleração relativa de

<sup>12</sup>Esta propriedade é consequência da simetria da conexão, e do fato do colchete de Lie de campos da base natural ser nulo:

$$[\partial_\tau, \partial_{s^i}] = 0 \quad ,$$

para  $i = 1, 2, 3$ .

<sup>13</sup>Ver Apêndice A, §A.4.

partículas em queda livre. Este fenômeno é denominado *efeito de maré gravitacional*.

A partir da projeção espacial da derivada covariante do campo tangente

$$\hat{\nabla}_\beta V_\alpha = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \nabla_\nu V_\mu \quad (2.38)$$

define-se as quantidades tensoriais cinemáticas: *tensor expansão*  $\theta_{\alpha\beta}$ , *vorticidade*  $\omega_{\alpha\beta}$  e *cisalhamento*  $\sigma_{\alpha\beta}$ , respectivamente:

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \hat{\nabla}_{(\beta} V_{\alpha)} \quad , \quad (2.39)$$

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \hat{\nabla}_{[\beta} V_{\alpha]} \quad , \quad (2.40)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \hat{\nabla}_{(\beta} V_{\alpha)} - \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} \quad , \quad (2.41)$$

onde a *expansão escalar*  $\theta$  é definida por:

$$\theta \equiv h^{\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha V^\alpha \quad . \quad (2.42)$$

É conveniente definir ainda o chamado *vetor vorticidade*:

$$\omega^\alpha \equiv -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \omega_{\beta\mu} V_\nu \quad . \quad (2.43)$$

As quantidades cinemáticas, expansão, vorticidade e cisalhamento são chamadas *quantidades cinemáticas fundamentais* e expressam as propriedades geométricas da congruência de curvas: a expansão  $\theta_{\alpha\beta}$  mede a divergência das curvas, ou seja, a taxa de variação do volume definido por curvas vizinhas; a vorticidade  $\omega_{\alpha\beta}$  mede a rotação infinitesimal, com preservação do volume, de curvas vizinhas; o cisalhamento  $\sigma_{\alpha\beta}$  mede a distorção infinitesimal, com preservação do volume, do elemento de volume definido por curvas vizinhas. Em termos dessas quantidades, a derivada covariante do campo (covariante) tangente pode ser escrita, em componentes, como:

$$\nabla_\beta V_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \dot{V}_\alpha V_\beta \quad . \quad (2.44)$$

Usando a definição do tensor de Riemann, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\nabla_\beta V_\alpha)' &= V^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\beta V_\alpha \\ &= R_{\alpha\rho\beta\sigma} V^\sigma V^\rho + V^\sigma \nabla_\beta \nabla_\sigma V_\alpha \\ &= R_{\alpha\rho\beta\sigma} V^\sigma V^\rho - (\nabla_\beta V^\sigma)(\nabla_\sigma V_\alpha) + \nabla_\beta (V^\sigma \nabla_\sigma V_\alpha) \quad , \end{aligned}$$

ou seja:

$$(\nabla_\beta V_\alpha)' = R_{\alpha\rho\beta\sigma} V^\sigma V^\rho - (\nabla_\beta V^\sigma)(\nabla_\sigma V_\alpha) + \nabla_\beta \dot{V}_\alpha \quad . \quad (2.45)$$

Tomando o traço da equação (2.45), obtém-se a equação que descreve a evolução da expansão:

$$\dot{\theta} = R_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta + 2(\omega^2 - \sigma^2) - \frac{1}{3} \theta^2 + \nabla_\alpha \dot{V}^\alpha, \quad (2.46)$$

onde:

$$\begin{aligned} 2\omega^2 &\equiv \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}, \\ 2\sigma^2 &\equiv \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Essa equação, conhecida como *equação de Raychaudhuri* (RAYCHAUDHURI, 1955), desempenha um papel fundamental no estudo de singularidades em modelos cosmológicos.

Tomando a parte anti-simétrica da equação (2.45) e projetando em  $H_m$ , obtém-se a equação que descreve a evolução da vorticidade:

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\omega}_{\mu\nu} = -\frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} - \sigma^\mu_{[\beta} \omega_{\alpha]\mu} + \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \nabla_{[\nu} \dot{V}_{\mu]} , \quad (2.47)$$

onde foi usado  $\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta$ .

Finalmente, a parte simétrica e de traço nulo da equação (2.45) fornece a equação que descreve a evolução do cisalhamento:

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} &= -\frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\mu} \sigma_\beta^\mu - \omega_{\alpha\mu} \omega_\beta^\mu \\ &+ \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} (2\omega^2 + 2\sigma^2 - \nabla_\mu \dot{V}^\mu) + \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \nabla_{(\nu} \dot{V}_{\mu)} \\ &- \dot{V}_\alpha \dot{V}_\beta + W_{\alpha\mu\beta\nu} V^\mu V^\nu + \frac{1}{2} h_{\alpha\mu} h_{\beta\nu} R^{\mu\nu} - \frac{2}{3} h_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} R^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde  $W_{\alpha\mu\beta\nu}$  são as componentes do tensor de Weyl (§2.4).

Além das equações de evolução, as quantidades cinemáticas  $\theta_{\mu\nu}$ ,  $\omega_{\mu\nu}$  e  $\sigma_{\mu\nu}$  estão sujeitas a equações de vínculo. Da definição do tensor de Riemann (2.15), pode-se obter as equações<sup>14</sup>:

$$h_\alpha^\mu R_{\mu\nu} V^\nu = -h_\alpha^\mu \nabla_\beta (\omega_\mu^\beta + \sigma_\mu^\beta) - h_\alpha^\mu (\omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}) \dot{V}^\nu + \frac{2}{3} h_\alpha^\mu \nabla_\mu \theta, \quad (2.49)$$

$$\nabla_\alpha \omega^\alpha + 2\dot{V}_\alpha \omega^\alpha = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{2} h_{(\alpha}^\lambda h_{\beta)}^\mu V_\theta V^\nu \eta^{\rho\sigma\theta} R_{\mu\nu\rho\sigma} = -h_{(\alpha}^\lambda h_{\beta)}^\mu V_\theta \eta^{\rho\sigma\theta} \nabla_\sigma (\omega_{\mu\rho} + \sigma_{\mu\rho}) + 2\dot{V}_{(\alpha} \omega_{\beta)} , \quad (2.51)$$

que são as equações de vínculo para as quantidades cinemáticas.

Vamos considerar o caso especial de uma congruência de curvas geodésicas  $\{\gamma(s)\}$  do tipo

<sup>14</sup>Ver (NOVELLO; SALIM, 1983) para maiores detalhes.

tempo e irrotacionais em  $\mathcal{M}^4$ , isto é, tais que:

$$\dot{V}_\alpha = 0 \quad , \quad \omega_{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

Da (2.44), nota-se que, em uma congruência geodésica, o tensor  $\nabla V$  é puramente espacial. Como a conexão Riemanniana é simétrica, da definição da vorticidade  $\omega$ , segue que, localmente:

$$2\omega_{\alpha\beta} = \nabla_{[\beta} V_{\alpha]} = \partial_{[\beta} V_{\alpha]} = 0 \quad . \quad (2.52)$$

Isso implica que existe um mapeamento  $\tau : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que, localmente

$$V_\alpha = \partial_\alpha \tau \quad , \quad (2.53)$$

o que define (localmente) a forma normal

$$d\tau \equiv V_\alpha dx^\alpha = \partial_\alpha \tau dx^\alpha \quad , \quad (2.54)$$

que corresponde ao gradiente de  $\tau$ . As hipersuperfícies de nível  $\tau = const.$  em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}^4$  são chamadas *folhas espaciais*, ou *seções espaciais*, e são denotadas pelo símbolo  $\mathcal{S}_\tau^3$ . O conjunto  $\{\mathcal{S}_\tau^3\}$  é chamado de *folheação espacial* de  $\mathcal{U}$ . Neste caso particular, para cada ponto  $m = \gamma(\tau, s)$  de  $\mathcal{U}$ , o vetor tangente  $V_m$  à única curva geodésica da congruência em  $\mathcal{U}$  que passa pelo ponto  $m$  é tal que  $\mathbf{g}_m(V, \hat{X}) = 0$ , para todo vetor  $\hat{X}_m$  tangente à folha  $\mathcal{S}_\tau^3$  no ponto  $m$ . Dizemos que a congruência é *ortogonal às seções espaciais*. Em termos da decomposição (2.33)

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + V_\alpha V_\beta$$

a forma normal  $d\tau$  permite escrever a métrica espaço-temporal como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = d\tau^2 + h_{\alpha\beta}(\tau) dx^\alpha dx^\beta \quad , \quad (2.55)$$

onde  $h_{\alpha\beta}(\tau)$  são as componentes da métrica “espacial”, isto é, a métrica definida nas seções espaciais  $\mathcal{S}_\tau^3$ . Podemos redefinir o parâmetro da folheação de forma que o novo parâmetro seja o comprimento de arco de uma curva da congruência:

$$t \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\mathbf{g}_{\tau'}(V, V)} d\tau' \quad . \quad (2.56)$$

Neste caso, como as curvas são geodésicas,  $\mathbf{g}(V, V) = g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = +1$  e as curvas são ditas normalizadas. Seja  $\gamma(t_0, s)$  um ponto qualquer de uma folha espacial  $\mathcal{S}_{t_0}^3$  pertencente à folheação  $\{\mathcal{S}_t^3\}$  em  $\mathcal{U}$ , e seja  $\gamma(s)$  a única geodésica da congruência que passa pelo ponto  $\gamma(t_0, s)$ . O mapeamento exponencial permite mapear os pontos  $m = \gamma(t, s)$  da vizinhança pelos vetores

$t\mathbf{V}(t_0, \mathbf{s})$  de  $T\mathcal{M}_{\gamma(t_0, \mathbf{s})}^4$ :

$$m = \gamma(t, \mathbf{s}) = \exp_{\gamma(t_0, \mathbf{s})} t\mathbf{V}(t_0, \mathbf{s}) \quad ,$$

onde  $\mathbf{V}(t_0, \mathbf{s}) = \partial_t \gamma(t_0, \mathbf{s})$  é o vetor tangente à geodésica em  $T\mathcal{M}_{\gamma(t_0, \mathbf{s})}^4$ . Se a vizinhança for suficientemente pequena, o mapeamento exponencial admite inversa, e pode-se associar a cada ponto  $m$  de  $\mathcal{U}$  o vetor  $t\mathbf{V}(t_0, \mathbf{s})$  de forma única. Isso permite construir um sistema de coordenadas  $\phi$  em  $\mathcal{U}$  tal que, para todo ponto  $m$  pertencente à vizinhança  $\mathcal{U}$

$$\phi(m) = (t, \mathbf{s}) \quad .$$

As coordenadas  $(t, \mathbf{s})$  são chamadas *coordenadas Gaussianas* de  $\mathcal{U}$ . Em termos de uma base de campos ortonormais  $\{\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$  em  $\mathcal{U}$ , tal que  $\mathbf{V} = \mathbf{U}_0$  (isto é,  $V^\alpha = \delta_0^\alpha$ ) para todo  $m$  em  $\mathcal{U}$ ,  $g_{00} = +1$  e a métrica assume, localmente, a chamada *forma Gaussiana*<sup>15</sup>:

$$ds^2 = dt^2 + h_{ij}(t) dx^i dx^j \quad . \quad (2.57)$$

## 2.6 Gravitação

### 2.6.1 Tensor Momentum-Energia

Campos materiais e distribuições contínuas de matéria no espaço-tempo são descritos por um tensor do tipo  $(0, 2)$  simétrico  $\mathbf{T}$ , que satisfaz a condição de conservação local de matéria-energia:

$$\nabla^\beta T_{\alpha\beta} = 0 \quad . \quad (2.58)$$

O tensor  $\mathbf{T}$  é chamado *tensor momentum-energia*.

O tensor momentum-energia do campo eletromagnético, por exemplo, tem a forma:

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\mu} F_{\beta}^{\mu} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad (2.59)$$

onde  $F_{\alpha\beta}$  são as componentes do tensor de campo eletromagnético.

Nos modelos cosmológicos que discutiremos a seguir, o conteúdo de matéria-energia do

---

<sup>15</sup>Daqui para frente, adotaremos a seguinte convenção: índices gregos simbolizam coordenadas espaço-temporais, tomando valores no conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ , e índices latinos, coordenadas espaciais, tomando valores no conjunto  $\{1, 2, 3\}$ .



universo será representado por um fluido cujas partículas fundamentais, que representam aglomerados de galáxias, estão, na média, em repouso. Ou seja, as linhas de fluxo do fluido são representadas por uma congruência de curvas geodésicas. Além disso, como veremos no capítulo 4, nestes modelos assume-se que a distribuição de matéria-energia é espacialmente homogênea e isotrópica, o que implica em uma congruência com vorticidade  $\omega$  e cisalhamento  $\sigma$  nulos. Neste caso, o conteúdo de matéria-energia do universo pode ser representado por um fluido perfeito com densidade de matéria  $\rho$  e pressão (isotrópica)  $p$ . O tensor momentum-energia de um fluido perfeito tem a forma:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)V_{\alpha}V_{\beta} - pg_{\alpha\beta} \quad . \quad (2.60)$$

As equações de conservação (2.58), nesse caso, assumem a forma:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0 \quad , \quad (2.61)$$

$$(p + \rho)\dot{V}^{\alpha} + g^{\alpha\beta}\nabla_{\beta}p = 0 \quad . \quad (2.62)$$

Como veremos a seguir, no caso de uma distribuição desordenada de radiação eletromagnética, frente a um processo de média dos campos elétrico e magnético, o tensor momentum-energia eletromagnético assume a forma de um fluido perfeito (ver § 4.2). Este fato é empregado na construção dos modelos cosmológicos que serão analisados ao longo deste texto (capítulo 4).

## 2.6.2 Equações de Campo da Gravitação

As equações de campo da gravitação de Einstein são equações que relacionam a geometria do espaço-tempo, caracterizada pela curvatura de  $\mathcal{M}^4$ , com o conteúdo de matéria-energia do universo, descrito pelo tensor momentum-energia. O tensor do tipo (0,2) mais simples que pode ser construído a partir da curvatura, que tem as mesmas propriedades de simetria do tensor momentum-energia e divergência nula  $\nabla^{\beta}G_{\alpha\beta} = 0$ , é o chamado *tensor de Einstein*:

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} \quad .$$

As equações mais simples relacionando curvatura com matéria-energia, e que satisfazem os critérios de simetria e conservação, são as chamadas *equações de campo da Gravitação de*

*Einstein:*

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta} \quad , \quad (2.63)$$

onde  $\Lambda$  é a chamada *constante cosmológica*. O valor da constante  $\kappa = 8\pi G$  é determinado no limite Newtoniano, onde  $G$  é a constante de Newton. Vamos adotar, daqui para frente, a convenção  $\kappa = c = 1$ .

Contraindo a equação (2.63), obtemos:

$$-R + 4\Lambda = -T \quad , \quad (2.64)$$

onde  $T = T_{\alpha}^{\alpha}$ . Combinando as equações (2.63) e (2.64), as equações de campo podem ser escritas na forma equivalente:

$$R_{\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} \quad . \quad (2.65)$$

A gravitação de Einstein consiste na afirmação de que as equações de campo valem em  $\mathcal{M}^4$ .

### 2.6.3 Condições de Energia

A densidade de energia, em relação a um observador, é dada pela expressão:

$$T_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} \quad , \quad (2.66)$$

onde  $V$  é o campo tangente à trajetória espaço-temporal do observador. É geralmente aceita a crença de que toda forma clássica de matéria, fisicamente realista, tem densidade de energia não-negativa (HAWKING; ELLIS, 1973; WALD, 1984), isto é:

$$T_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} \geq 0 \quad , \quad (2.67)$$

conhecida como *condição de energia fraca* (HAWKING; ELLIS, 1973). Além desta, outra condição também geralmente aceita é a chamada *condição de energia forte* (HAWKING; ELLIS, 1973):

$$T_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} - \frac{1}{2}T \geq 0 \quad . \quad (2.68)$$

Tomando-se  $g(V, V) = g_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} = +1$  e usando as equações de campo (2.63), pode-se escre-

ver:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta &= -\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}\right)V^\alpha V^\beta \\ &= -\left(T_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta - \frac{1}{2}T - \Lambda\right) . \end{aligned} \quad (2.69)$$

As condições de energia (2.67) e (2.68) levam, no caso em que  $\Lambda \rightarrow 0$ , à chamada *condição de convergência*:

$$R_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta \leq 0 . \quad (2.70)$$

Na classe mais importante de modelos cosmológicos (§ 4.1), as linhas de fluxo do fluido cósmico são representadas por uma congruência de curvas geodésicas irrotacionais ( $\omega_{\alpha\beta} = 0$ ). Nesse caso, a congruência é ortogonal às seções espaciais, e a equação de Raychaudhuri (2.46) assume a forma:

$$\dot{\theta} = R_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta - 2\sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2 .$$

Logo, se a condição de convergência (2.70) for válida, obtém-se:

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0 ,$$

o que implica na inequação:

$$\frac{1}{\theta} \geq \frac{\tau}{3} + \frac{1}{\theta_0} ,$$

onde  $\theta_0 = \theta(\tau_0)$  é o valor da expansão em uma certa hipersuperfície inicial  $\mathcal{S}_0$ . Se  $\theta_0 < 0$ , isto é, se a congruência for inicialmente convergente, então, para um valor do parâmetro  $\tau \leq 3/|\theta_0|$ , a expansão  $\theta$  deve divergir.

Neste trabalho, a divergência da expansão será adotada como critério para identificar a existência de uma singularidade inicial no espaço-tempo<sup>16</sup>.

No caso em que o fluido cósmico é descrito por um fluido perfeito, a condição de convergência (2.70) assume a forma:

$$R_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) + \Lambda \leq 0 . \quad (2.71)$$

Como é geralmente aceita a crença de que toda forma fisicamente realista de matéria satisfaz a condição de energia forte,  $\rho + 3p \geq 0$ , vemos que, no caso em que a constante cosmológica tem um valor pequeno, a condição de convergência é satisfeita, ou seja, a singularidade deve

<sup>16</sup>Critérios mais rigorosos que este fazem-se necessários em uma investigação mais profunda da estrutura global de um espaço-tempo singular. O exame destes critérios, como o adotado por Hawking na demonstração dos teoremas de singularidade (HAWKING; ELLIS, 1973), bem como o exame destes teoremas, foge aos objetivos deste trabalho. Cabe mencionar, no entanto, que todas as definições de singularidade propostas até este momento são problemáticas. Ver (WALD, 1984) para maiores detalhes.

ocorrer. Neste caso, a divergência da expansão implica a divergência da densidade  $\rho \rightarrow \infty$  e da pressão  $p \rightarrow \infty$ . Veremos na seção § 4.3 que podem existir formas de matéria fisicamente realistas que, em certas situações, violam esta condição. Neste caso, o aparecimento de uma pressão negativa no universo “primordial” evita a ocorrência de uma singularidade inicial.

### 3 *Formulação de Jordan-Ehlers-Kundt da Gravitação*

Neste capítulo, será apresentada a formulação alternativa da teoria Einsteiniana da Gravitação, denominada *formulação de Jordan-Ehlers-Kundt* (JEK) (JORDAN; EHLERS; KUNDT, 1960). No formalismo JEK, as equações de campo da gravitação são escritas em termos do tensor de curvatura conformal, ou tensor de Weyl, e assumem uma forma muito semelhante às equações de campo do eletromagnetismo de Maxwell. Seguindo esta analogia, define-se as partes “elétrica”  $E_{\alpha\beta}$  e “magnética”  $B_{\alpha\beta}$  do tensor de Weyl de forma semelhante à feita para os campos elétrico  $e_\alpha$  e magnético  $b_\alpha$  na teoria de Maxwell. Com isso, é possível decompor as equações de campo da Gravitação em equações de evolução para os campos  $E_{\alpha\beta}$  e  $B_{\alpha\beta}$  e para as quantidades cinemáticas fundamentais, expansão  $\theta_{\alpha\beta}$ , vorticidade  $\omega_{\alpha\beta}$  e cisalhamento  $\sigma_{\alpha\beta}$ , semelhantes às equações de Maxwell (HAWKING, 1966; ELLIS, 1971; NOVELLO; SALIM, 1983), as chamadas *equações quasi-Maxwellianas da Gravitação* (NOVELLO; SALIM, 1983).

Na seção § 3.1 vamos definir o tensor de Weyl, fazer uma breve exposição de suas propriedades elementares e reescrever as equações de evolução para as quantidades cinemáticas fundamentais,  $\theta_{\alpha\beta}$ ,  $\omega_{\alpha\beta}$  e  $\sigma_{\alpha\beta}$  em termos dos campos  $E_{\alpha\beta}$  e  $B_{\alpha\beta}$ . Na seção § 3.2 vamos discutir, de forma sucinta, a formulação de Jordan-Ehler-Kundt (JEK) da Gravitação.

### 3.1 Tensor de Weyl

Como vimos anteriormente, o tensor de Riemann em  $\mathcal{M}^4$  pode ser decomposto em uma parte de traço não-nulo e uma parte de traço nulo, denominada tensor de curvatura conformal ou tensor de Weyl, cujas componentes  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$  são definidas pela expressão:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + M_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{6}Rg_{\alpha\beta\mu\nu} \quad , \quad (3.1)$$

onde

$$M_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (R_{\alpha[\mu}g_{\nu]\beta} + R_{\beta[\nu}g_{\mu]\alpha}) \quad , \quad (3.2)$$

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha[\mu}g_{\nu]\beta} \quad . \quad (3.3)$$

Este tensor é notável por suas propriedades frente a transformações conformais.

Duas métricas de  $\mathcal{M}^4$  são ditas *conformalmente relacionadas* se:

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \lambda^2 g_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.4)$$

onde  $\lambda$  é o chamado *fator conformal*. Se a métrica de uma variedade for conformalmente relacionada a uma métrica localmente plana, a variedade é dita *conformalmente plana*. Em particular, toda variedade de curvatura constante é conformalmente plana<sup>1</sup>. Frente a transformações conformais, o tensor de Weyl tem a propriedade:

$$\bar{W}_{\alpha\beta\rho}{}^\sigma = W_{\alpha\beta\rho}{}^\sigma \quad , \quad (3.5)$$

isto é, o tensor de Weyl é *conformalmente invariante*<sup>2</sup>. Das equações (2.27), (3.5), segue que a condição necessária e suficiente para que  $\mathcal{M}$  seja conformalmente plana, no caso  $n \geq 4$ , é que o tensor de Weyl seja nulo em  $\mathcal{M}$ . Esse resultado foi demonstrado por Weyl<sup>1</sup>.

Define-se as partes “elétrica”  $E_{\alpha\beta}$  e “magnética”  $B_{\alpha\beta}$  do tensor de Weyl, em relação ao campo unitário  $V_\alpha$ , tangente à curva associada a um observador, como<sup>3</sup>:

$$E_{\alpha\beta}(\mathbf{V}) \equiv -W_{\alpha\mu\beta\nu}V^\mu V^\nu \quad , \quad (3.6)$$

$$B_{\alpha\beta}(\mathbf{V}) \equiv -W_{\alpha\mu\beta\nu}^*V^\mu V^\nu \quad . \quad (3.7)$$

<sup>1</sup>Ver (EISENHART, 1949).

<sup>2</sup>Ver (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982), (DE FELICE; CLARKE, 1990), (EISENHART, 1949), (HAWKING; ELLIS, 1973) e (WALD, 1984).

<sup>3</sup>Ver (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982), (DE FELICE; CLARKE, 1990), (NOVELLO, 1974) e (NOVELLO et al., 1995).

Esta definição é análoga à definição das partes elétrica e magnética do campo eletromagnético, isto é, dos campos elétrico e magnético propriamente ditos:

$$e_\alpha(\mathbf{V}) \equiv F_{\alpha\beta} V^\beta \quad , \quad (3.8)$$

$$b_\alpha(\mathbf{V}) \equiv -F_{\alpha\beta}^* V^\beta \quad . \quad (3.9)$$

onde  $F_{\alpha\beta}$  são as componentes do tensor de campo eletromagnético. Veremos a seguir a justificativa para tal analogia. Ao longo do texto usaremos sempre as letras maiúsculas  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  para denotar as partes “elétrica” e “magnética” do tensor de Weyl, que aqui representam o campo gravitacional, e as letras minúsculas  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{b}$  para representar os campos elétrico e magnético propriamente ditos. É de fundamental importância que estes campos não sejam confundidos, já que eventualmente eles aparecerão misturados.

As partes elétrica e magnética do tensor de Weyl têm as seguintes propriedades:

$$E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha} \quad , \quad g^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad E_{\alpha\beta} V^\alpha = 0 \quad (3.10)$$

$$B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha} \quad , \quad g^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad B_{\alpha\beta} V^\alpha = 0 \quad (3.11)$$

Em termos das partes elétrica e magnética, o tensor de Weyl admite a decomposição:

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\rho\sigma\theta\lambda} - g_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\rho\sigma\theta\lambda})V^\mu V^\theta E^{\nu\lambda} \\ + (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\rho\sigma\theta\lambda} + \eta_{\rho\sigma\theta\lambda}g_{\alpha\beta\mu\nu})V^\mu V^\theta B^{\nu\lambda} \quad . \quad (3.12)$$

Das definições das partes elétrica  $E_{\alpha\beta}$  e magnética  $B_{\alpha\beta}$  do tensor de Weyl, (3.6) e (3.7), vemos que estes campos representam o campo gravitacional nesta formulação. Em particular, o campo  $E_{\alpha\beta}$  representa “forças de maré” gravitacionais<sup>4</sup>. Isto é, considerando um sistema de partículas teste em queda livre (congruência geodésica), a taxa de variação segunda no tempo da separação relativa entre estas partículas é descrita pela equação do desvio geodésico para o campo conector (2.37):

$$\frac{D^2 \hat{Z}^\sigma}{D\tau^2} = R^\sigma_{\rho\alpha\beta} V^\rho \hat{Z}^\alpha V^\beta \quad .$$

No caso em que o conteúdo de matéria-energia é descrito pelo tensor momentum-energia de um fluido perfeito, as equações de campo combinadas com as equações que definem o tensor de Weyl em  $\mathcal{M}^4$ , (3.1)-(3.3), levam à expressão:

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = W_{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{1}{3}(T + \Lambda)g_{\alpha\mu\beta\nu} - \frac{1}{2}(T_{\alpha[\beta}g_{\nu]\mu} + T_{\mu[\nu}g_{\beta]\alpha}) \quad , \quad (3.13)$$

---

<sup>4</sup>Ver (DE FELICE; CLARKE, 1990) e §2.5.

de onde obtém-se a relação:

$$R_{\alpha\mu\beta\nu}V^\mu V^\nu = -E_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}\rho h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}ph_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Lambda h_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.14)$$

Combinando esta relação com a equação do desvio geodésico, obtém-se, finalmente:

$$\frac{D^2\hat{Z}^\beta}{D\tau^2} = -E_\alpha^\beta\hat{Z}^\alpha - \frac{1}{6}\rho\hat{Z}^\beta - \frac{1}{2}p\hat{Z}^\beta + \frac{1}{3}\Lambda\hat{Z}^\beta \quad . \quad (3.15)$$

As equações que descrevem o comportamento das quantidades cinemáticas fundamentais podem ser reformuladas, em termos do tensor de Weyl, como segue. As equações de campo (2.65), combinadas com as equações que definem o tensor de Weyl em uma variedade Lorentziana (3.1),(3.2) e (3.3), para o tensor momentum-energia de um fluido perfeito, levam às relações:

$$\frac{1}{2}h^\theta_{(\alpha}h^\rho_{\beta)}V_\lambda V^\sigma\eta^{\mu\nu\lambda}R_{\rho\sigma\mu\nu} = 2B_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.16)$$

$$R_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) + \Lambda \quad , \quad (3.17)$$

$$R_{\mu\nu}h^\nu_\alpha V^\mu = 0 \quad . \quad (3.18)$$

Combinando-se estas expressões com as equações de evolução das quantidades cinemáticas (2.46)-(2.48), seguem:

$$\dot{\theta} - 2\omega^2 + 2\sigma^2 + \frac{1}{3}\theta^2 - \nabla_\alpha\dot{V}^\alpha = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) + \Lambda \quad , \quad (3.19)$$

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\omega}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\theta\omega_{\alpha\beta} + \sigma^\mu_{[\beta}\omega_{\alpha]\mu} - \frac{1}{2}h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \nabla_{[\nu}\dot{V}_{\mu]} = 0 \quad , \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu}\sigma_\beta^\mu + \omega_{\alpha\mu}\omega_\beta^\mu - \frac{2}{3}h_{\alpha\beta}(\omega^2 + \sigma^2) \\ + \dot{V}_\alpha\dot{V}_\beta + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\nabla_\mu\dot{V}^\mu - \frac{1}{2}h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \nabla_{(\nu}\dot{V}_{\mu)} = -E_{\alpha\beta} \quad . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Analogamente, as equações de vínculo (2.49)-(2.51) podem ser reescritas na forma:

$$h_\alpha^\mu \nabla_\beta(\omega_\mu^\beta + \sigma_\mu^\beta) + h_\alpha^\mu(\omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu})\dot{V}^\nu - \frac{2}{3}h_\alpha^\mu \nabla_\mu\theta = 0 \quad , \quad (3.22)$$

$$\nabla_\alpha\omega^\alpha + 2\dot{V}_\alpha\omega^\alpha = 0 \quad , \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{2}h_{(\alpha}^\lambda h_{\beta)}^\mu V_\theta \eta^{\rho\sigma\theta} \nabla_\sigma(\omega_{\mu\rho} + \sigma_{\mu\rho}) - \dot{V}_{(\beta}\omega_{\alpha)} = -B_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.24)$$



## 3.2 Equações Quasi-Maxwellianas da Gravitação

Como mencionado na seção § 2.4, em toda variedade pseudo-Riemanniana, o tensor de Riemann satisfaz a segunda identidade de Bianchi (3.25):

$$\nabla_{[\sigma} R_{\alpha\beta]\mu\nu} = 0 \quad (3.25)$$

ou, de forma mais explícita:

$$\nabla_{\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\alpha} R_{\beta\sigma\mu\nu} + \nabla_{\beta} R_{\sigma\alpha\mu\nu} = 0 \quad .$$

Contraindo-se os índices  $\sigma$  e  $\nu$  na (3.25), obtemos a forma equivalente da identidade de Bianchi:

$$\nabla_{\sigma} R^{\alpha\beta\rho\sigma} = \nabla^{[\beta} R^{\alpha]\rho} \quad . \quad (3.26)$$

Combinando-se a equação (3.26) com a definição do tensor de Weyl (2.30), (2.28), (2.29), obtemos:

$$\nabla_{\sigma} W^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{1}{2} \nabla^{[\beta} R^{\alpha]\rho} - \frac{1}{12} g^{\rho[\beta} \nabla^{\alpha]} R \quad . \quad (3.27)$$

Usando as equações de campo (2.65), podemos reescrever a equação (3.27) como:

$$\nabla_{\sigma} W^{\alpha\beta\rho\sigma} = J^{\alpha\beta\rho} \quad , \quad (3.28)$$

$$J^{\alpha\beta\rho} = -\frac{1}{2} \nabla^{[\beta} T^{\alpha]\rho} + \frac{1}{6} g^{\rho[\beta} \nabla^{\alpha]} T \quad , \quad (3.29)$$

ou seja, a divergência do tensor de Weyl está relacionada a um termo “fonte”, que depende da distribuição de matéria-energia. Nota-se a semelhança formal entre essas equações e as equações de campo do eletromagnetismo de Maxwell:

$$\nabla_{\beta} F^{\alpha\beta} = J^{\alpha} \quad , \quad (3.30)$$

onde  $F^{\alpha\beta}$  são as componentes do tensor de campo eletromagnético e  $J^{\alpha}$  da corrente, que é o termo fonte no eletromagnetismo. Vamos chamar esta formulação da gravitação de Einstein, baseada no tensor de Weyl, de formulação de Jordan-Ehlers-Kundt (JORDAN; EHLERS; KUNDT, 1960; LICHNEROWICZ, 1960).

É possível decompor as equações (3.28) em um conjunto de equações envolvendo as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl, semelhante às equações de Maxwell do Eletromagnetismo (HAWKING, 1966). Para tanto, considera-se as projeções independentes das equações (3.28):

- 1)  $h_{\alpha}^{\sigma} V_{\beta} V_{\mu} \nabla_{\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu}$  ,
- 2)  $\eta_{\lambda\sigma\alpha\beta} V^{\lambda} V_{\mu} \nabla_{\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu}$  ,
- 3)  $h_{\mu(\sigma} \eta_{\rho)\lambda\alpha\beta} V^{\lambda} \nabla_{\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu}$  ,
- 4)  $h_{\mu(\rho} h_{\sigma)\alpha} V_{\beta} \nabla_{\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu}$  .

Essas projeções levam às equações (ELLIS, 1971):

$$h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} \nabla_{\sigma} E_{\beta\rho} + \eta_{\beta\mu\nu}^{\alpha} V^{\beta} B^{\nu\rho} \sigma_{\rho}^{\mu} + 3B^{\alpha\beta} \omega_{\beta} = \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} \rho \quad , \quad (3.31)$$

$$h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} \nabla_{\sigma} B_{\beta\rho} - \eta_{\beta\mu\nu}^{\alpha} V^{\beta} E^{\nu\rho} \sigma_{\rho}^{\mu} - 3E^{\alpha\beta} \omega_{\beta} = (\rho + p) \omega^{\alpha} \quad , \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \dot{E}^{\mu\nu} + \theta E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} E_{\mu}^{(\alpha} \sigma^{\beta)\mu} - \frac{1}{2} E_{\mu}^{(\alpha} \omega^{\beta)\mu} \\ + \eta^{\alpha\rho\mu\nu} \eta^{\beta\sigma\lambda\theta} V_{\rho} V_{\lambda} E_{\mu\theta} \sigma_{\nu\sigma} + \dot{V}_{\mu} B_{\nu}^{(\alpha} \eta^{\beta)\lambda\mu\nu} V_{\lambda} \\ - \frac{1}{2} h_{\sigma}^{(\beta} \eta^{\alpha)\lambda\mu\nu} V_{\lambda} \nabla_{\mu} B_{\nu}^{\sigma} = -\frac{1}{2} (\rho + p) \sigma^{\alpha\beta} \quad , \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \dot{B}^{\mu\nu} + \theta B^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} B_{\mu}^{(\alpha} \sigma^{\beta)\mu} - \frac{1}{2} B_{\mu}^{(\alpha} \omega^{\beta)\mu} \\ + \eta^{\alpha\rho\mu\nu} \eta^{\beta\sigma\lambda\theta} V_{\rho} V_{\lambda} B_{\mu\theta} \sigma_{\nu\sigma} - \dot{V}_{\mu} E_{\nu}^{(\alpha} \eta^{\beta)\lambda\mu\nu} V_{\lambda} \\ + \frac{1}{2} h_{\sigma}^{(\beta} \eta^{\alpha)\lambda\mu\nu} V_{\lambda} \nabla_{\mu} E_{\nu}^{\sigma} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.34)$$

que são, simplesmente, as “equações de Maxwell” da Gravitação. Estas equações são chamadas *equações quasi-Maxwellianas da Gravitação* (NOVELLO; SALIM, 1983).

As equações quasi-Maxwellianas (3.31)-(3.34), juntamente com as equações de evolução das quantidades cinemáticas (3.19)-(3.21), sujeitas às equações de vínculo (3.22)-(3.24), e as equações de conservação (2.61)-(2.62), constituem o conjunto completo de equações que descrevem a dinâmica da matéria e da geometria na Gravitação de Einstein. Essa abordagem foi proposta por Hawking (HAWKING, 1966) para analisar o comportamento de ondas gravitacionais.

## 4 *Modelos Cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker*

Neste capítulo será feita uma apresentação sucinta das características básicas da classe de modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Uma exposição detalhada deste tópico pode ser encontrada em (DE FELICE; CLARKE, 1990), (HAWKING; ELLIS, 1973) e (WALD, 1984).

A classe de FRW é fundamentada pela *Hipótese de Homogeneidade e Isotropia do Espaço*, ou *Princípio Cosmológico*. Essencialmente, o Princípio Cosmológico afirma que as propriedades que descrevem o fluido cósmico devem ser invariantes frente a mudanças de posição no espaço (homogeneidade) e esféricamente simétricas em relação a um observador qualquer (isotropia). Recentemente, esta hipótese recebeu forte confirmação de observações, como a descoberta da radiação cósmica de fundo e a isotropia da distribuição de galáxias em grande escala. Com base neste fato, acredita-se que estes modelos, que apresentam um alto grau de simetria, sejam uma boa descrição (aproximada) do nosso universo. Nos modelos desta classe, as seções espaciais apresentam curvatura constante e a métrica espaço-temporal assume uma forma particularmente simples, a chamada *métrica de Robertson-Walker*, que representa três possíveis geometrias espaciais, as quais veremos a seguir. O conteúdo de matéria-energia nos modelos desta classe é representado pelo tensor energia-momentum de um fluido perfeito.

Na seção § 4.1 será feita uma breve exposição da estrutura geral dos modelos da classe FRW. A seguir serão considerados dois modelos dessa classe que apresentam comportamento qualitativamente diferente no passado remoto: na seção § 4.2 será apresentado o chamado *Universo de Einstein-Maxwell*, cuja fonte da geometria é o campo eletromagnético descrito pela teoria de Maxwell, e na seção § 4.3 será apresentado o chamado *Universo com Ricochete*, cuja fonte da geometria é o campo eletromagnético descrito por uma generalização não-linear da teoria Maxwelliana (DE LORENCI et al., 2002). Neste último caso, o universo não apresenta singularidade inicial. Estes modelos são de grande relevância no estudo da estrutura do espaço-

tempo no universo “primordial”, já que acredita-se que a geometria do espaço-tempo tenha sido predominantemente determinada pela radiação eletromagnética no passado remoto.

## 4.1 A Classe de Modelos de FRW

A classe de modelos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) está fundamentada na chamada *Hipótese de Homogeneidade e Isotropia do Espaço*, inspirada no Princípio Copernicano e endossada por uma série de evidências observacionais, como<sup>1</sup>: (1) A descoberta da radiação térmica de fundo e de seu caráter altamente isotrópico; (2) A isotropia da distribuição de galáxias em uma escala maior que<sup>2</sup> 100Mpc; (3) O caráter altamente isotrópico da distribuição de galáxias rádio-emissoras, da radiação-X de fundo e da radiação- $\gamma$  de fundo. Essa hipótese também é chamada de *Princípio Cosmológico*. O conteúdo material do universo será tratado por um fluido, cujas partículas representam cada uma um aglomerado de galáxias. As linhas de escoamento do fluido são as trajetórias espaço-temporais destas partículas fundamentais e são representadas por uma congruência de curvas do tipo tempo e nulo, com campo tangente  $V$ . Chamaremos os observadores representados pelas curvas do tipo tempo da congruência de *observadores fundamentais* ou *co-moventes*. Vamos supor que a constante cosmológica é nula  $\Lambda = 0$ .

Uma consequência da homogeneidade e isotropia do espaço é que as linhas de fluxo do fluido cósmico devem ser representadas por uma congruência de curvas geodésicas do tipo tempo, isto é  $g(V, V) > 0$ , com vorticidade e cisalhamento nulos<sup>1</sup>:

$$\omega_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \dot{V}_\alpha = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Nesse caso, o conteúdo de matéria-energia do universo de FRW é descrito pelo tensor momentum-energia de um fluido perfeito:

$$T_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta + p h_{\alpha\beta} \quad ,$$

ou, em termos da decomposição da métrica (2.33):

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)V_\alpha V_\beta - p g_{\alpha\beta} \quad . \quad (4.2)$$

O conteúdo de matéria-energia do universo, portanto, é descrito por um tensor momentum-

<sup>1</sup>Ver (DE FELICE; CLARKE, 1990), (HAWKING; ELLIS, 1973) e (WALD, 1984).

<sup>2</sup>1 pc = 3.26 anos-luz =  $3.08 \times 10^{18}$  cm.

energia que possui uma componente associada à matéria ordinária, tratada por uma “poeira” de partículas, onde cada uma dessas partículas representa um aglomerado de galáxias, e uma componente associada ao conteúdo de radiação.

Outra conseqüência da homogeneidade e isotropia do espaço é que, para um certo intervalo temporal<sup>3</sup>  $[t_0, t_1]$ , é possível definir uma estrutura de folheação espacial no espaço-tempo, como discutido na seção § 2.5. O caráter irrotacional da congruência ( $\omega_{\alpha\beta} = 0$ ) implica que existe, localmente, isto é, em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}^4$ , uma folheação espacial  $\{\mathcal{S}_t^3\}$ , com as curvas da congruência ortogonais à folheação na vizinhança  $\mathcal{U}$ . Nesse caso, é possível definir um sistema Gaussiano de coordenadas em  $\mathcal{U}$  tal que a métrica espaço-temporal assume a forma:

$$ds^2 = dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad (4.3)$$

onde  $h_{ij} = h_{ij}(t)$  são as componentes da métrica espacial em  $\mathcal{S}_t^3$ . O parâmetro  $t$  é escolhido como sendo o comprimento de arco associado a uma curva da congruência, isto é,  $\mathbf{g}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = g_{00} = +1$ . Neste caso,  $t$  é chamado de *tempo cósmico*. A curvatura de cada seção espacial tem a forma<sup>4</sup>:

$$\hat{R}_{ijkl} = K(t) h_{i[k} h_{l]j} \quad , \quad (4.4)$$

com  $K(t)$  constante em  $\mathcal{S}_t^3$ . Dizemos que o “espaço” tem curvatura constante. Com isso, vemos que a variedade deve ser (topologicamente) equivalente ao produto  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^3$ , onde  $\mathcal{S}^3$  é uma variedade Riemanniana tridimensional, conformalmente plana. A hipótese de homogeneidade e isotropia do espaço implica em uma métrica espacial esféricamente simétrica, que pode ser escrita na forma:

$$h_{ij} dx^i dx^j = -A^2(t) \left\{ \frac{1}{1 - \varepsilon r^2} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \right\} \quad , \quad (4.5)$$

com  $\varepsilon = +1, 0, -1$ . Ou seja, a métrica espaço-temporal mais geral, consistente com a hipótese de homogeneidade e isotropia, tem a forma<sup>4</sup>:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left\{ \frac{1}{1 - \varepsilon r^2} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \right\} \quad , \quad (4.6)$$

O termo  $A(t)$  é o chamado *fator de escala* e relaciona-se ao volume da seção espacial. Essa métrica é chamada *métrica de Robertson-Walker*. O universo é dito *aberto, plano* ou *fechado*

<sup>3</sup>As curvas geodésicas da congruência podem não estar definidas para algum tempo fora de um certo intervalo. Nesse caso as geodésicas são ditas incompletas. A incompletude de geodésicas foi utilizada por Hawking como critério de identificação de singularidades (HAWKING; ELLIS, 1973).

<sup>4</sup>Ver (DE FELICE; CLARKE, 1990) e (WALD, 1984).

se  $\varepsilon = +1$ ,  $\varepsilon = 0$  ou  $\varepsilon = -1$ , respectivamente. Definindo-se o chamado *tempo conformal*  $\eta$ :

$$d\eta \equiv \frac{dt}{A(t)} \quad , \quad (4.7)$$

a métrica de Robertson-Walker também pode ser reescrita na forma conformalmente plana (ver 3.4):

$$ds^2 = A^2(\eta) \left\{ d\eta^2 - \frac{1}{1 - \varepsilon r^2} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \right\} \quad . \quad (4.8)$$

Calculando a expansão (2.42), obtém-se:

$$\theta = \nabla_\alpha V^\alpha = 3 \frac{\dot{A}}{A} \quad . \quad (4.9)$$

O termo  $H \equiv \theta/3$  é chamado de *fator de Hubble* e seu valor atual  $H_0$  de *constante de Hubble*. A relação  $H = \dot{A}/A$  é conhecida como a *lei de Hubble*.

As equações de conservação da energia e de Raychaudhuri, nos modelos da classe FRW, assumem a forma<sup>6</sup>:

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{A}}{A} = 0 \quad , \quad (4.10)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{1}{6}(\rho + 3p) = 0 \quad . \quad (4.11)$$

e da equação de Einstein, obtemos:

$$\left( \frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{A^2} = \frac{1}{3} \rho \quad . \quad (4.12)$$

essa é a chamada *equação de Friedmann*.

No caso em que o fluido cósmico satisfaz a condição de convergência (2.70):

$$R_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \leq 0 \quad ,$$

para todo  $t$ , a equação de Raychaudhuri (4.11) implica que  $\ddot{A} < 0$ . Como o valor de  $A(t)$ , medido no universo atual, é positivo,  $A_0 \equiv A(t_0) > 0$ , segue que  $A(t) \rightarrow 0$  em um certo instante do passado, mais recente que  $H_0 = \dot{A}_0/A_0$ . Ou seja, neste caso, o universo apresenta uma singularidade inicial (ver §§ 2.6.3).

---

<sup>6</sup>Ver (DE FELICE; CLARKE, 1990) e (WALD, 1984).

## 4.2 O Universo de Einstein-Maxwell (UEM)

Vamos considerar o modelo da classe FRW cuja fonte é o campo eletromagnético descrito pela teoria Maxwelliana, definida pela Lagrangeana de Maxwell:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 \quad , \quad (4.13)$$

com  $F \equiv F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ , e com tensor momentum-energia associado:

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\mu}F_{\beta}^{\mu} + \frac{1}{4}Fg_{\alpha\beta} \quad . \quad (4.14)$$

Como o universo de FRW é espacialmente isotrópico, apenas uma distribuição desordenada de radiação eletromagnética pode dar origem a um universo da classe de FRW. Podemos obter o tensor momentum-energia da radiação desordenada mediante um processo de média da expressão microscópica do campo eletromagnético. O campo eletromagnético  $F_{\alpha\beta}$  pode ser decomposto nas partes elétrica  $e_{\alpha}$  e magnética  $b_{\alpha}$ , definidas nas seções espaciais  $\mathcal{S}_t^3$ , em relação a um observador movendo-se com velocidade  $V_{\alpha}$ , pelas expressões locais:

$$e_{\alpha}(\mathbf{V}) \equiv F_{\alpha\beta}V^{\beta} \quad , \quad b_{\alpha}(\mathbf{V}) \equiv -F_{\alpha\beta}^*V^{\beta} \quad . \quad (4.15)$$

As partes elétrica  $e_{\alpha}$  e magnética  $b_{\alpha}$  do tensor de campo eletromagnético não devem ser confundidas com as partes “elétrica”  $E_{\alpha\beta}$  e “magnética”  $B_{\alpha\beta}$  do tensor de Weyl, definidas pelas equações (3.6) e (3.7). Em termos de um sistema Gaussiano de coordenadas, as componentes dos campos elétrico e magnético assumem a forma local:

$$e_i = F_{0i} \quad , \quad b_i = \varepsilon_{ijk}F^{jk} \quad . \quad (4.16)$$

A média volumétrica espacial de uma quantidade arbitrária  $Q(t)$  é definida, para todo  $t$ , como (DE LORENCI et al., 2002):

$$\langle Q \rangle_t \equiv \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_0} \int_{\mathcal{S}} Q \sqrt{-h} d^3x \quad , \quad (4.17)$$

onde  $\sqrt{-h}d^3x$  é forma volume<sup>7</sup> das seções espaciais  $\mathcal{S}^3$ , e onde:

$$\Omega(\mathcal{S}) \equiv \int_{\mathcal{S}} \sqrt{-h} d^3x$$

e  $\Omega_0$ , representam volumes espaciais suficientemente grandes. Vamos atribuir os seguintes

---

<sup>7</sup>Ver Apêndice A, §A.2.

valores médios aos campos elétrico e magnético<sup>8</sup>:

$$\langle e_i \rangle = 0 \quad , \quad \langle b_i \rangle = 0 \quad , \quad \langle e_i b_j \rangle = 0 \quad , \quad (4.18)$$

$$\langle e_i e_j \rangle = -\frac{1}{3} e^2 g_{ij} \quad , \quad (4.19)$$

$$\langle b_i b_j \rangle = -\frac{1}{3} b^2 g_{ij} \quad , \quad (4.20)$$

Com isso, o tensor momentum-energia que descreve uma distribuição desordenada de radiação eletromagnética, assume a forma de um fluido perfeito (TOLMAN, 1950), com densidade de energia  $\rho$  e pressão  $p$  :

$$\langle T_{\alpha\beta} \rangle = (\rho + p) V_\alpha V_\beta - p g_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.21)$$

onde  $V_\alpha$  é o vetor tangente à trajetória espaço-temporal do observador que move-se com a radiação como um todo, e com a densidade e a pressão dadas pela relação:

$$\rho = 3p = \frac{1}{2} (e^2 + b^2) > 0 \quad . \quad (4.22)$$

Do fato de que tanto a densidade de energia quanto a pressão são positivas, para todo  $t$ , segue, pela análise da equação de Raychaudhuri, que esse universo possui uma singularidade inicial. Nesse caso, da equação de Einstein (4.12), obtém-se:

$$A(t) = \sqrt{A_0^2 t - \epsilon t^2} \quad , \quad (4.23)$$

onde  $A_0$  é uma constante arbitrária. Nota-se que  $A(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow 0$ .

### 4.3 O Universo com Ricochete (UR)

Vamos considerar o modelo da classe FRW cuja fonte da geometria é o campo eletromagnético descrito pela generalização não-linear do eletromagnetismo de Maxwell, definida pela Lagrangeana dependente dos invariantes do campo até a segunda ordem (DE LORENCI et al., 2002):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F + \alpha F^2 + \beta G^2 \quad , \quad (4.24)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes e  $2G \equiv \eta_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}$ . O tensor momentum-energia associado às

<sup>8</sup>Ver (TOLMAN, 1950) e (DE LORENCI et al., 2002).



teorias não-lineares do eletromagnetismo, tem a forma:

$$T_{\alpha\beta} = -4 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} \right) F_{\alpha\mu} F_{\beta}^{\mu} + \left( G \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G} - \mathcal{L} \right) g_{\alpha\beta} . \quad (4.25)$$

A Lagrangeana de Maxwell (4.13) e o tensor momentum-energia associado (4.14) são recuperados no caso em que  $\alpha = \beta = 0$ .

Como se está interessado na análise do comportamento desse sistema no universo primitivo, onde a matéria deve ser identificada com o plasma primordial, considera-se o caso onde apenas a média do campo magnético  $b^2$  é não-nula, o que é formalmente equivalente a tomar  $e^2 = 0$  na equação (4.19) (DE LORENCI et al., 2002).

Como feito no caso do universo de Einstein-Maxwell, submetendo-se o tensor momentum-energia (4.25) ao processo de média macroscópica, dada pelas equações (4.18)-(4.20), o tensor momentum-energia médio assume a forma de um fluido perfeito, análoga à (4.21), com a densidade e a pressão dadas pelas equações:

$$\rho = \frac{1}{2} b^2 (1 - 8\alpha b^2) , \quad (4.26)$$

$$p = \frac{1}{6} b^2 (1 - 40\alpha b^2) . \quad (4.27)$$

Para valores de  $\alpha$  no intervalo:

$$\frac{1}{40b^2} < \alpha < \frac{1}{8b^2} , \quad (4.28)$$

a condição de convergência (2.70) é violada, sem que a densidade de energia torne-se negativa, e o modelo não apresenta singularidade inicial. Esta condição pode parecer excessivamente restritiva, no entanto, ela está de acordo com a expectativa de que  $\alpha$  deve ser um número positivo muito pequeno, já que efeitos associados a um possível caráter não-linear do campo eletromagnético não são detectados na escala de energia acessível à experimentação atual, mas não tão pequeno a ponto dos termos não-lineares na lagrangeana (4.24) perderem toda a importância.

Combinando-se as equações (4.26) e (4.27) com a equação de conservação de energia (4.10), obtém-se:

$$b = \frac{b_0}{A^2} , \quad (4.29)$$

onde  $b_0$  é uma constante. Com esse resultado, obtém-se, em analogia à equação (4.12):

$$\dot{A}^2 = \frac{b_0^2}{6A^2} \left( 1 - \frac{8\alpha b_0^2}{A^4} \right) - \varepsilon . \quad (4.30)$$

Como o lado direito dessa expressão não pode ser negativo, segue que, para qualquer valor de

$\varepsilon$ , se  $\alpha > 0$ , então o fator de escala não pode ser arbitrariamente pequeno. A solução da (4.30) é dada implicitamente por:

$$t = \pm \int_{A_0}^{A(t)} \left[ \frac{b_0^2}{6z^2} - \frac{8\alpha b_0^4}{6z^6} - \varepsilon \right]^{-1/2} dz , \quad (4.31)$$

onde  $A_0 \equiv A(0)$ . No caso  $\varepsilon = 0$ , a (4.31) pode ser resolvida, fazendo-se uma escolha adequada da origem temporal, o que leva à expressão:

$$A^2(t) = b_0 \left[ \frac{2}{3} (t^2 + 12\alpha) \right]^{1/2} , \quad (4.32)$$

de onde conclui-se que, para  $\alpha > 0$ , no instante  $t = 0$  o raio do universo atinge um valor mínimo  $A_{min}$ :

$$A_{min}^2 = b_0 \sqrt{8\alpha} . \quad (4.33)$$

Das equações (4.29) e (4.32), resulta que a evolução ao longo do tempo da intensidade média do campo magnético  $b(t)$ , é dada pela expressão:

$$b^2(t) = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{t^2 + 12\alpha} \right) . \quad (4.34)$$

## 5 *Perturbações em Modelos da Classe FRW*

Como discutido no capítulo 4, os modelos da classe FRW descrevem as propriedades do universo, em escalas superiores a 100 Mpc, com um alto grau de precisão. No entanto, como a experiência torna flagrante, o universo apresenta inomogeneidades locais. Em outras palavras, os modelos da classe FRW são, claramente, uma descrição no máximo aproximada para o nosso universo, sendo as propriedades locais do universo descritas por perturbações destes modelos.

Na abordagem tradicional de perturbações de soluções cosmológicas, a métrica de um espaço-tempo  $\tilde{\mathcal{M}}^4$  cuja distribuição de matéria-energia apresenta pequenos desvios, ou perturbações, em relação à distribuição de matéria-energia de um espaço-tempo base  $\mathcal{M}_0^4$ , homogêneo e isotrópico, é obtida “perturbando-se” a métrica do espaço-tempo base:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = {}^0g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta} \quad ,$$

onde  ${}^0g_{\alpha\beta}$  representa as componentes da métrica do espaço-tempo base  $\mathcal{M}_0^4$  (LIFSHITZ; KHALNIKOV, 1963). Nesse caso, devemos tratar a família de métricas perturbadas  $\{g\}$  como um certo espaço topológico  $\mathcal{X}$ , para que o limite:

$$\lim_{\delta g_{\alpha\beta} \rightarrow 0} \tilde{g}_{\alpha\beta} = {}^0g_{\alpha\beta}$$

faça sentido. Ou seja, é necessário especificar a topologia do espaço  $\mathcal{X}$ . No entanto, como demonstrado por Geroch, a tentativa de introduzir a noção usual de limite em um espaço de métricas é problemática<sup>1</sup>. Outra desvantagem desse método é que a métrica não é uma quantidade observável, de modo que o significado físico de uma perturbação da métrica não é claro. De fato, uma perturbação da métrica pode ser meramente a consequência de uma mudança de coordenadas e, neste caso, a perturbação não tem qualquer significado físico (HAWKING, 1966). Para contornar esta dificuldade, é necessário formular uma teoria de perturbações que

<sup>1</sup>Para maiores detalhes, ver Novello (NOVELLO, 1974).

seja invariante de calibre. Isto é, como mencionado anteriormente, em uma teoria de perturbações da Gravitação, devemos perturbar o próprio espaço-tempo  $\mathcal{M}^4$ , de modo que uma quantidade tensorial qualquer e sua perturbação estão definidas em variedades espaço-tempo diferentes, o espaço-tempo base  $\mathcal{M}_0^4$  e o espaço-tempo perturbado  $\tilde{\mathcal{M}}^4$ . No entanto, a subtração de duas quantidades tensoriais definidas em variedades diferentes não pode ser definida de forma covariante. Mesmo que as duas variedades espaço-tempo estejam mergulhadas em uma variedade de dimensão maior,  $\mathcal{N}^5$ , por exemplo, estaríamos tentando subtrair tensores definidos em pontos diferentes de  $\mathcal{N}^5$ , o que é uma operação mal definida. Esta operação só pode fazer sentido se houver um mapeamento de identificação de pontos, isto é, uma forma de decidir se pontos em  $\mathcal{M}_0^4$  e  $\tilde{\mathcal{M}}^4$  são “o mesmo”, de modo que a subtração de tensores possa ser definida. No entanto, este mapeamento será em geral arbitrário. Este é o chamado problema da liberdade de calibre em uma teoria de perturbações (STEWART, 1990). A perturbação de uma quantidade tensorial  $\mathcal{Q}_0$ , definida no espaço-tempo base  $\mathcal{M}_0$ , será invariante de calibre se  $\mathcal{Q}_0$  for nula em  $\mathcal{M}_0$ , ou for um campo tensorial constante em  $\mathcal{M}_0$  ou for uma combinação de deltas de Kronecker com coeficientes constantes. Esse resultado é conhecido como *Lema de Stewart* (STEWART; WALKER, 1974; STEWART, 1990)<sup>2</sup>.

Vamos adotar o tratamento de perturbações baseado na formulação de Jordan-Ehlers-Kundt (JEK) da Gravitação sugerido por Hawking (HAWKING, 1966) e desenvolvido Ellis (ELLIS, 1971) e Novello e Salim (NOVELLO; SALIM, 1983). Nesta formulação, o tensor de Weyl anula-se no espaço-tempo base homogêneo e isotrópico. Por outro lado, o Lema de Stewart garante que perturbações de quantidades nulas no espaço-tempo base são invariantes de calibre. Isto sugere que esta formulação da teoria de perturbações, baseada no formalismo JEK da gravitação, apesar de ser menos geral que a tradicional, é mais apropriada para tratar perturbações em modelos da classe FRW. Neste caso é possível considerar perturbações apenas das quantidades fisicamente relevantes, ou seja, observáveis, como a curvatura. Outra vantagem desse método é na descrição do comportamento de ondas gravitacionais em um universo em expansão, já que essa formulação inclui a interação entre a radiação e a matéria (HAWKING, 1966).

Na seção § 5.1 serão consideradas as equações quasi-Maxwellianas perturbadas. Na seção § 5.2, será considerada apenas a parte puramente tensorial do espectro de perturbações. Estas perturbações tensoriais não estão associadas a perturbações da densidade e representam, portanto, ondas gravitacionais propagando-se no espaço-tempo base. As quantidades tensoriais perturbadas serão expandidas em uma base de harmônicos esféricos tensoriais, definidos em cada seção espacial. Este tratamento permitirá obter um sistema dinâmico não-autônomo

---

<sup>2</sup>O Lema de Stewart é apresentado no apêndice B.

fechado, envolvendo apenas os coeficientes da expansão em harmônicos tensoriais da partes elétrica do tensor de Weyl e do cisalhamento, que descreve completamente a evolução destas quantidades. Finalmente, na seção § 5.3 serão delineadas as técnicas elementares necessárias à análise qualitativa do sistema dinâmico que descreve a evolução das perturbações tensoriais. Estas técnicas serão a base da análise de propagação de ondas gravitacionais que será feita nos capítulos seguintes.

## 5.1 Perturbações no Formalismo JEK

Como visto anteriormente, nos modelos da classe FRW o conteúdo de matéria-energia do universo é representado por um fluido perfeito, caracterizado pelo valor nulo das quantidades cinemáticas:

$$\omega_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \dot{V}_{\alpha} = 0 \quad . \quad (5.1)$$

As perturbações do campo gravitacional são descritas por perturbações das partes elétrica e magnética do tensor de Weyl. Como em modelos da classe FRW o tensor de Weyl é identicamente nulo, segue da decomposição (3.12) que suas parte elétrica e magnética são nulas no espaço-tempo base. Logo, pode-se escrever as componentes das partes elétrica e magnética perturbadas do tensor de Weyl como<sup>3</sup>:

$$E_{\alpha\beta} = \delta E_{\alpha\beta} \quad , \quad (5.2)$$

$$B_{\alpha\beta} = \delta B_{\alpha\beta} \quad . \quad (5.3)$$

Analogamente, as perturbações das quantidades cinemáticas, nulas no espaço-tempo base, podem ser escritas como:

$$\omega_{\alpha\beta} = \delta\omega_{\alpha\beta} \quad , \quad \sigma_{\alpha\beta} = \delta\sigma_{\alpha\beta} \quad , \quad \dot{V}_{\alpha} = \delta\dot{V}_{\alpha} \quad . \quad (5.4)$$

A partir das equações (3.31)-(3.34), pode-se obter as equações quasi-Maxwellianas perturbadas, que descrevem a dinâmica das perturbações do espaço-tempo base<sup>4</sup>:

---

<sup>3</sup>Ver a definição (B.3) do apêndice B. Estamos usando a definição  $\delta Q_{\alpha\beta} \equiv (\delta Q)_{\alpha\beta}$ .

<sup>4</sup>Ver (NOVELLO; SALIM, 1983).

$$h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} \nabla_{\sigma} E_{\beta\rho} = \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} \delta\rho - \frac{1}{3} \nabla_{\beta\rho} \delta(V^{\alpha} V^{\beta}) \quad , \quad (5.5)$$

$$h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} \nabla_{\sigma} B_{\beta\rho} = (\rho + p) \omega^{\alpha} \quad , \quad (5.6)$$

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{E}_{\mu\nu} + \theta E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} V_{\theta} \eta_{\nu}^{\theta\lambda\rho} \nabla_{\lambda} B_{\rho\mu} = -\frac{1}{2} (\rho + p) \sigma_{\alpha\beta} \quad , \quad (5.7)$$

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{B}_{\mu\nu} + \theta B_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} V_{\theta} \eta_{\nu}^{\theta\lambda\rho} \nabla_{\lambda} E_{\rho\mu} = 0 \quad , \quad (5.8)$$

e também as equações que descrevem a evolução das quantidades cinemáticas perturbadas:

$$\delta\dot{\theta} + \frac{2}{3} \theta \delta\theta - \nabla_{\alpha} \dot{V}^{\alpha} = -\frac{1}{2} (\delta\rho + 3\delta p) \quad , \quad (5.9)$$

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\omega}_{\mu\nu} + \frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \nabla_{[\mu} \dot{V}_{\nu]} = 0 \quad , \quad (5.10)$$

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \nabla_{\mu} \dot{V}^{\mu} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \nabla_{(\mu} \dot{V}_{\nu)} = -E_{\alpha\beta} \quad , \quad (5.11)$$

bem como as equações de vínculo para estas quantidades:

$$h_{\alpha}^{\mu} \nabla_{\beta} (\omega_{\mu}^{\beta} + \sigma_{\mu}^{\beta}) - \frac{2}{3} h_{\alpha}^{\mu} \nabla_{\mu} \theta = 0 \quad , \quad (5.12)$$

$$\nabla_{\alpha} \omega^{\alpha} = 0 \quad , \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} V_{\theta} \eta_{\nu}^{\theta\lambda\rho} \nabla_{\lambda} (\omega_{\rho\mu} + \sigma_{\rho\mu}) = B_{\alpha\beta} \quad . \quad (5.14)$$

Finalmente, das equações de conservação, pode-se obter:

$$(\delta\rho) + \theta(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)\delta\theta = 0 \quad , \quad (5.15)$$

$$(\rho + p)\dot{V}^{\alpha} - \delta(h^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} p) = 0 \quad . \quad (5.16)$$

As equações (5.5)-(5.16) constituem o conjunto completo de equações que descrevem a evolução de perturbações em modelos da classe FRW.

## 5.2 Perturbações Tensoriais

Nesta seção, vamos considerar perturbações apenas das quantidades puramente tensoriais. Neste caso, o sistema de equações quasi-Maxwellianas para as quantidades perturbadas (5.5)-

(5.8) assume a forma<sup>5</sup>:

$$h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} \nabla_{\sigma} E_{\beta\rho} = 0 \quad , \quad (5.17)$$

$$h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} \nabla_{\sigma} B_{\beta\rho} = 0 \quad , \quad (5.18)$$

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{E}_{\mu\nu} + \theta E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} V_{\theta} \eta_{\nu}^{\theta\lambda\rho} \nabla_{\lambda} B_{\rho\mu} = -\frac{1}{2} (\rho + p) \sigma_{\alpha\beta} \quad , \quad (5.19)$$

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{B}_{\mu\nu} + \theta B_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} V_{\theta} \eta_{\nu}^{\theta\lambda\rho} \nabla_{\lambda} E_{\rho\mu} = 0 \quad . \quad (5.20)$$

Já o sistema de equações cinemáticas perturbadas, reduz-se à equação:

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} = -E_{\alpha\beta} \quad , \quad (5.21)$$

sujeita à condição de vínculo:

$$\frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} V_{\theta} \eta_{\nu}^{\theta\lambda\rho} \nabla_{\lambda} \sigma_{\rho\mu} = B_{\alpha\beta} \quad . \quad (5.22)$$

Vamos definir a base harmônica tensorial<sup>6</sup>  $\{\hat{\mathcal{U}}_t^{(k)}\}$ , em cada seção espacial  $\mathcal{S}_t^3$  do espaço-tempo base  $\mathcal{M}_0^4$ , como o conjunto de autofunções do operador de Laplace definido em  $\mathcal{S}_t^3$ :

$$h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} = \frac{k^2}{A^2} \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} \quad , \quad (5.23)$$

onde o número de onda  $k$  assume os valores:

$$k^2 = \begin{cases} q^2 + 3, & 0 < q < \infty & , \quad \varepsilon = +1 , \\ q, & 0 < q < \infty & , \quad \varepsilon = 0 , \\ n^2 - 3 & n = 3, 4, \dots & , \quad \varepsilon = -1 . \end{cases} \quad (5.24)$$

Os tensores da base  $\{\hat{\mathcal{U}}_t^{(k)}\}$  devem ser simétricos,  $\hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} = \hat{\mathcal{U}}_{\beta\alpha}^{(k)}$ , e ainda possuir as seguintes propriedades<sup>6</sup>:

$$\left( \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} \right)^{\cdot} = 0 \quad , \quad h^{\alpha\beta} \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} = 0 \quad , \quad \hat{\nabla}^{\alpha} \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} = 0 \quad . \quad (5.25)$$

Vamos introduzir também a base harmônica associada  $\{\hat{\mathcal{G}}_t^{(k)}\}$ , definida pela relação (NOVELLO; SALIM, 1983; NOVELLO et al., 1995):

$$\hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{(k)} = P_{\alpha\beta} [\hat{\mathcal{U}}^{(k)}] \equiv \frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\lambda} h_{\beta)}^{\mu} V_{\theta} \eta_{\lambda}^{\rho\sigma\theta} \nabla_{\sigma} \hat{\mathcal{U}}_{\mu\rho}^{(k)} \quad . \quad (5.26)$$

<sup>5</sup>Ver (NOVELLO; SALIM, 1983).

<sup>6</sup>Ver (LIFSHITZ; KHALATNIKOV, 1963) para maiores detalhes. Neste trabalho, não será necessário considerar a forma explícita das funções  $\hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)}$ .

Com isso, é possível expandir as quantidades tensoriais perturbadas como segue:

$$\hat{E}_{\alpha\beta} = \sum_k E^{(k)}(t) \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} \quad , \quad (5.27)$$

$$\hat{B}_{\alpha\beta} = \sum_k B^{(k)}(t) \hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{(k)} \quad , \quad (5.28)$$

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \sum_k \sigma^{(k)}(t) \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} \quad . \quad (5.29)$$

Nota-se que a equação (5.28) é consistente com a (5.22):

$$\hat{B}_{\alpha\beta} = \sum_k \sigma^{(k)}(t) \hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{(k)} \quad ,$$

o que implica na condição de vínculo:

$$B^{(k)} - \sigma^{(k)} = 0 \quad . \quad (5.30)$$

É possível mostrar<sup>7</sup> que a base harmônica associada  $\{\hat{\mathcal{G}}_t^{(k)}\}$  tem as seguintes propriedades:

$$P_{\alpha\beta}[\hat{\mathcal{G}}^{(k)}] = \left( \rho - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{A^2} \right) \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} \quad , \quad (5.31)$$

$$\left( \hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{(k)} \right)' = -\frac{1}{3} \theta \hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{(k)} \quad . \quad (5.32)$$

Combinando as equações (5.22) e (5.31), obtém-se:

$$B^{(k)} \hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{(k)} = \sigma^{(k)} P_{\alpha\beta}[\hat{\mathcal{G}}^{(k)}] = \left( \rho - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{A^2} \right) \sigma^{(k)} \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} \quad . \quad (5.33)$$

Fazendo uso das relações (5.31), (5.32) e (5.33), é possível reescrever as equações (5.17), (5.20) e (5.21) em termos da expansão das quantidades perturbadas:

$$\sum_k \left\{ \dot{E}^{(k)} + \theta E^{(k)} - \left( \rho - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{A^2} \right) B^{(k)} + \frac{1}{2} (\rho + p) \sigma^{(k)} \right\} \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} = 0 \quad , \quad (5.34)$$

$$\sum_k \left( \dot{B}^{(k)} + \frac{2}{3} \theta B^{(k)} - E^{(k)} \right) \hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{(k)} = 0 \quad , \quad (5.35)$$

$$\sum_k \left( \dot{\sigma}^{(k)} + \frac{2}{3} \theta \sigma^{(k)} + E^{(k)} \right) \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}^{(k)} = 0 \quad . \quad (5.36)$$

A independência linear da base harmônica e da base harmônica associada, implicam que as equações (3.31)-(3.33) são satisfeitas se, e somente se, os coeficientes da expansão forem nulos,

<sup>7</sup>Ver (NOVELLO et al., 1995).



isto é:

$$\dot{E} + \theta E - \left( \rho - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{A^2} \right) B + \frac{1}{2} (\rho + p) \sigma = 0 \quad , \quad (5.37)$$

$$\dot{B} + \frac{2}{3} \theta B + E = 0 \quad , \quad (5.38)$$

$$\dot{\sigma} + \frac{2}{3} \theta \sigma + E = 0 \quad , \quad (5.39)$$

onde omitimos os índices da expansão em harmônicos tensoriais das quantidades perturbadas. Da condição de vínculo (5.30), vemos que as equações (3.32) e (3.33) são equivalentes. Com isso obtém-se o conjunto de infinitos sistemas dinâmicos lineares não-autônomos<sup>8</sup> planares, definidos em cada seção espacial  $\mathcal{S}_t$ , envolvendo apenas as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl (NOVELLO et al., 1995):

$$\dot{E} + \theta E - \left\{ \frac{1}{2} (\rho - p) - \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{k^2}{A^2} \right\} \sigma = 0 \quad , \quad (5.40)$$

$$\dot{\sigma} + \frac{2}{3} \theta \sigma + E = 0 \quad . \quad (5.41)$$

Este sistema descreve completamente a propagação de ondas gravitacionais em modelos da classe FRW.

Como mencionado anteriormente, a parte elétrica do tensor de Weyl representa forças de maré gravitacionais (ver §3.2). A equação (5.40) descreve, portanto, a excitação destes efeitos de maré em um sistema de partículas teste em queda livre causada pela passagem de uma onda gravitacional. A equação (5.41), por sua vez, descreve a excitação da anisotropia de cisalhamento do sistema causada pela passagem da onda. Estas quantidades podem, em princípio, ser diretamente detectadas por “antenas gravitacionais”<sup>9</sup>.

---

<sup>8</sup>i.e. independente do tempo.

<sup>9</sup>Uma antena gravitacional é constituída, essencialmente, de um conjunto de partículas teste em queda livre. As equações (5.40) e (5.41) descrevem, portanto, a excitação de parâmetros cinemáticos e dinâmicos da congruência de curvas geodésicas (§2.5) associada.

### 5.3 Análise Qualitativa da Propagação de Ondas Gravitacionais

Vamos fazer as seguintes definições:

$$X \equiv \begin{pmatrix} E \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad S \equiv \begin{pmatrix} -\theta & f \\ -1 & -\frac{2}{3}\theta \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

$$f \equiv \frac{1}{2}(\rho - p) - \frac{1}{3}\theta^2 + \left(\frac{k}{A}\right)^2. \quad (5.43)$$

Com isso, o sistema (5.40)-(5.41) pode ser reescrito na forma matricial:

$$\dot{X} = S(t, \mu)X, \quad (5.44)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro proporcional ao quadrado do número de onda,  $\mu \sim k^2$ . Ressaltamos que para universos não-estacionários o sistema (5.45) é um sistema dinâmico não-autônomo, i.e. dependente do tempo. As trajetórias deste sistema podem ser determinadas no espaço de fases estendido definindo-se um novo parâmetro  $s$  e mapeando-se o sistema bi-dimensional linear não-autônomo (5.45) no sistema tri-dimensional não-linear autônomo

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(t, \mu)X \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

onde o ponto agora significa derivada em relação ao parâmetro  $s$ , i.e.  $\dot{t} = dt/ds$ , etc. Vamos definir a função matricial

$$\Phi(X, t, \mu) \equiv \begin{pmatrix} S(t, \mu)X \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

O sistema (altamente) não-linear (5.45) pode ser linearizado em uma vizinhança suficientemente pequena  $\Omega(t_0)$  de um ponto  $(X, t) = (0, t_0)$  contida na seção  $t = t_0$  como segue

$$\Phi(X, s, \mu)|_{\Omega(t_0)} \approx \Phi_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial E}\right)_{|(0, t_0)} E + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right)_{|(0, t_0)} \sigma. \quad (5.47)$$

Explicitamente

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial E}\right)_{|(0, t_0)} E = \begin{pmatrix} -\theta \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{|t_0} E = \begin{pmatrix} -\theta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{|t_0} \begin{pmatrix} E \\ \sigma \\ t \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right)_{|(0,t_0)} \sigma = \begin{pmatrix} f \\ -\frac{2}{3}\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{|t_0} \sigma = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{|t_0} \begin{pmatrix} E \\ \sigma \\ t \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

e ainda

$$\Phi_0 = \Phi(X, t, \mu)_{|(0,t_0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

de modo que a expansão (5.47) pode ser escrita na forma:

$$\Phi(X, s, \mu)_{|\Omega(t_0)} \approx \begin{pmatrix} S(t_0, \mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{|t_0} X + \Phi_0 = \begin{pmatrix} S(t_0, \mu)X \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

e, por tanto, o sistema (5.45) assume a seguinte forma linearizada:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{t} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} S(t_0, \mu)X \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

no “tubo”  $\Omega(t_0) \times I(t_0)$ , onde  $I(t_0)$  é um intervalo suficientemente pequeno do eixo  $t$  contendo  $t_0$ . A solução deste sistema linearizado pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ t(s) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} e^{sS(t_0)}X(0) \\ s + t(0) \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

para  $(X(0), t(0))$  contido no tubo  $\Omega(t_0) \times I(t_0)$ .

As técnicas da análise qualitativas podem ser empregadas na caracterização da estrutura local do espaço de fases deste sistema linear não-autônomo, tomando-se a matriz fundamental  $S(t, \mu)$  como sendo constante em um intervalo  $[t_1, t_2]$  suficientemente pequeno. Nesse caso, o sistema pode ser tratado, neste intervalo, como um sistema autônomo<sup>10</sup> (isto é, tal que a matriz fundamental  $S$  não depende explicitamente do tempo) e admite a solução aproximada, para um valor fixo do parâmetro  $\mu$ :

$$X(t) \simeq e^{tS(\mu)}X_0, \quad (5.54)$$

onde  $S(\mu) = S(t_0, \mu)$ , para algum  $t_0$  no intervalo, e a exponencial da matriz  $S \equiv S(\mu)$  é definida como:

$$e^{tS} \equiv \sum_n \frac{t^n S^n}{n!} = I + tS + \frac{1}{2}t^2 S^2 + \dots$$

A aproximação (5.54) permite determinar a estrutura local dos *retratos de fases* do sistema, para todos intervalos suficientemente pequenos de  $t$ , exceto aqueles onde ocorrem mudanças na

<sup>10</sup>Uma extensa apresentação dos aspectos básicos da análise qualitativa de sistemas dinâmicos lineares autônomos e não-autônomos pode ser encontrada em (ARNOLD, 1988).

estrutura do espaço de fases, para os quais esta aproximação não é válida. A caracterização da estabilidade do sistema, em relação ao *ponto de equilíbrio*  $X = \mathbf{0}$ , pode ser feita determinando-se o conjunto  $\{s_+, s_-\}$  de autovalores da matriz fundamental  $S$ :

$$s_{\pm} = \frac{\text{tr} S \pm \sqrt{\Delta}}{2} , \quad (5.55)$$

onde definimos o discriminante  $\Delta = (\text{tr} S)^2 - 4 \det S$ . Para o sistema (5.40)-5.41), obtém-se:

$$\text{tr} S = -\frac{5}{3} \Theta = -5H , \quad (5.56)$$

$$\det S = \frac{2}{3} \Theta^2 + f = \frac{1}{2} (\rho - p) + \frac{1}{3} \Theta^2 + \left(\frac{k}{A}\right)^2 . \quad (5.57)$$

Como  $\det S > 0$  em ambos os modelos cosmológicos que consideraremos neste trabalho, a estrutura do espaço de fases do sistema  $S$  ficará completamente determinada pelo valor do discriminante  $\Delta$ . Por conveniência, vamos definir o novo “discriminante”

$$\delta \equiv \log \left[ \frac{(\text{tr} S)^2}{4 \det S} \right] , \quad (5.58)$$

que tem as mesmas propriedades que  $\Delta$  no que diz respeito à caracterização da estrutura do espaço de fases do sistema.

A caracterização da estabilidade (assintótica) do sistema pode ser feita avaliando-se o traço da matriz fundamental  $S(t)$  para todo  $t$ . Pelo teorema de Liouville (ARNOLD, 1988), se  $\text{tr} S(t) < 0$ , para todo  $t > 0$ , o sistema é assintoticamente instável; se  $\text{tr} S(t) > 0$ , para todo  $t < 0$ , o sistema é assintoticamente estável.

## 6 *Ondas Gravitacionais no Universo de Einstein-Maxwell*

Até este ponto fizemos uma revisão do aparato formal necessário para investigarmos o comportamento de ondas gravitacionais em modelos cosmológicos da classe de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Em especial, revisamos a formulação de Jordan-Ehlers-Kundt (JEK) da gravitação e a teoria de perturbações cosmológicas em modelos de FRW que tem esta formulação como base. Neste capítulo e nos capítulos seguintes, vamos empregar estas técnicas na investigação da propagação de ondas gravitacionais em modelos cosmológicos não-estacionários, homogêneos e isotrópicos. A novidade deste trabalho consiste na caracterização da propagação de ondas gravitacionais no Universo de Einstein-Maxwell (UEM) e no Universo com Ricochete (UR). Este estudo comparativo nos permitirá distinguir de forma clara as características da propagação destas ondas nos dois modelos cosmológicos.

Neste capítulo, vamos estudar a propagação de ondas gravitacionais no Universo de Einstein-Maxwell Singular empregando o método das equações quasi-Maxwellianas da Gravitação (capítulo 5). Como visto anteriormente, este método permite obter um sistema dinâmico  $S$  não-autônomo planar fechado para as variáveis  $E$  e  $\sigma$ , que descrevem excitações gravitacionais em um universo não-estacionário, homogêneo e isotrópico. A análise qualitativa do sistema  $S$  nos permitirá investigar aspectos da dinâmica da propagação de ondas gravitacionais no Universo de Einstein-Maxwell (UEM) que poderão ser comparados com os mesmos aspectos desta dinâmica no Universo com Ricochete (UR).

Na seção § 6.1 vamos aplicar a teoria de perturbações apresentada no capítulo 5 ao Universo de Einstein-Maxwell. Na seção § 6.2 vamos submeter o sistema dinâmico que descreve a propagação de ondas gravitacionais neste modelo cosmológico às técnicas da análise qualitativa e caracterizar a estrutura do espaço de fases deste sistema.

## 6.1 Perturbações Tensoriais no Universo de Einstein-Maxwell

Por simplicidade, vamos restringir nossa análise ao caso de um universo plano, isto é, tal que a curvatura das seções espaciais é nula, o que corresponde a uma métrica de FRW espacialmente plana  $\varepsilon = 0$  (ver §4.1)<sup>1</sup>. Neste caso, o Universo de Einstein-Maxwell é caracterizado pelas seguintes quantidades não-perturbadas (§ 4.2):

$$A(t) = A_0 t^{1/2} \quad , \quad (6.1)$$

$$\rho(t) = 3p(t) = \frac{3}{4t^2} \quad , \quad (6.2)$$

$$\theta(t) = \frac{3}{2t} \quad . \quad (6.3)$$

Combinando-se a (5.43) com as (6.1) e (6.3), obtém-se:

$$f_S(t, \mu) = -\frac{1}{2t^2} + \frac{\mu}{t} \quad , \quad (6.4)$$

onde  $\mu \equiv k^2/A_0^2$ . Neste caso, o sistema (5.40)-(5.41) assume a forma:

$$\dot{E} + \frac{3}{2t} E + \left( \frac{1}{2t^2} - \frac{\mu}{t} \right) \sigma = 0 \quad , \quad (6.5)$$

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{t} \sigma + E = 0 \quad . \quad (6.6)$$

Este sistema admite a solução exata:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ 2C_1 \sqrt{\mu} \sin \chi(t) t^{5/2} + C_1 \cos \chi(t) t^2 - 4C_1 \mu \cos \chi(t) t^3 + 2C_2 \sqrt{\mu} \cos \chi(t) t^{5/2} - C_2 \sin \chi(t) t^2 + 4C_2 \mu \sin \chi(t) t^3 \right\} t^{-9/2} \quad , \quad (6.7)$$

$$\sigma(t) = \left\{ 2C_1 \sqrt{\mu} \sin \chi(t) t^{3/2} + C_1 \cos \chi(t) t + 2C_2 \sqrt{\mu} \cos \chi(t) t^{3/2} - C_2 \sin \chi(t) t \right\} t^{-5/2} \quad , \quad (6.8)$$

---

<sup>1</sup>Não há perda de generalidade nesta escolha, já que, da equação de Friedmann (4.12), vemos que a geometria das seções espaciais aproximam-se do caso plano  $\varepsilon = 0$  no universo “primordial”.

onde  $\chi(t) \equiv 2\sqrt{\mu t}$  e  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias. As amplitudes (6.7) e (6.8), mostram comportamento oscilatório amortecido, em virtude da expansão do universo.

## 6.2 Análise Qualitativa da Propagação de Ondas Gravitacionais no Universo de Einstein-Maxwell

De acordo com o que foi apresentado no capítulo 5, o sistema (6.5)-(6.6) pode ser escrito na forma matricial (5.45):

$$\dot{X} = S_S(t, \mu)X \quad ,$$

onde a matriz fundamental do sistema tem a forma:

$$S_S(t, \mu) = \begin{pmatrix} -3/2t & -1/2t^2 + \mu/t \\ -1 & -1/t \end{pmatrix} . \quad (6.9)$$

Combinando as (5.56) e (5.57) com as (6.3) e (6.4), obtém-se:

$$\text{tr}S_S = -\frac{5}{2t} < 0 \quad , \quad (6.10)$$

$$\det S_S = \frac{1}{t^2} + \frac{\mu}{t} > 0 \quad . \quad (6.11)$$

O discriminante  $\delta$ , portanto, assume a forma:

$$\delta(t, \mu) = \log \left( \frac{9}{16\mu t} \right) \quad . \quad (6.12)$$

A figura 6.1 mostra o comportamento de  $\delta$  ao longo do tempo para três diferentes valores do parâmetro  $\mu$ . A figura permite identificar o tempo crítico  $t_c$ , que corresponde às soluções da equação  $\delta(t, \mu) = 0$ :

$$t_c(\lambda) = \frac{9}{16\mu} = \frac{9A_0^2}{16(2\pi)^2} \lambda^2 \quad , \quad (6.13)$$

onde expressamos o parâmetro  $\mu$  em termos do comprimento de onda  $\lambda = 2\pi/k$ .

O espaço de fases do sistema  $S_S$  apresenta duas regiões distintas para todo comprimento de onda finito: no intervalo  $t < t_c$  ( $\delta > 0$ ) os retratos de fases exibem a estrutura de um nó, enquanto no intervalo  $t > t_c$  ( $\delta < 0$ ) os retratos de fases exibem a estrutura de uma espiral (tabela 6.1).

A figura 6.2 mostra o retrato de fases do sistema  $S_S$  na região  $t < t_c$ , obtido numericamente.

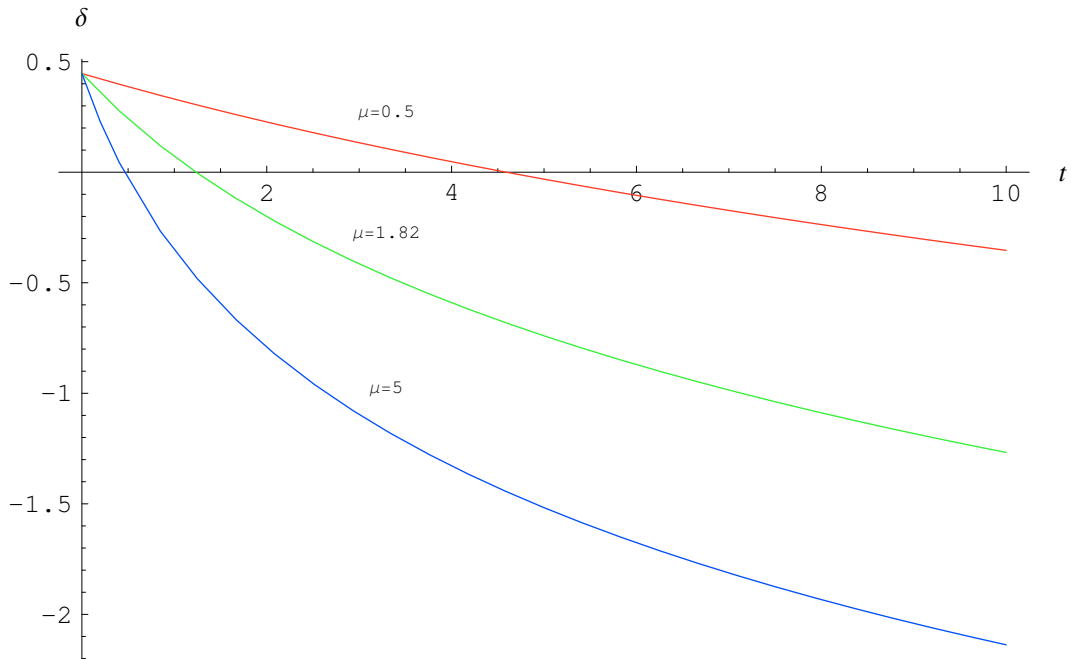


Figura 6.1: Gráfico de  $\delta$  ao longo do tempo no Universo de Einstein-Maxwell, para  $\mu = 0.5$ ,  $\mu = 1.82$  e  $\mu = 5$ . O gráfico mostra os tempos críticos  $t_c$ , que são soluções da equação  $\delta(t, \mu) = 0$  para cada valor de  $\mu$ .

Tabela 6.1: Estrutura do espaço de fases do sistema  $S_S$ .

comprimento de onda	intervalo	estrutura
$0 < \lambda < \infty$	$0 < t < t_c$	nó
	$t_c < t < \infty$	espiral

Neste caso, a estrutura é a de um nó estável. As figuras 6.3 e 6.4 mostram os retratos de fases do sistema  $S_S$  na região  $t > t_c$ , obtidos numericamente. O espaço de fases, neste caso, apresenta estrutura de uma espiral.

Como  $\text{trS}(t; \alpha) < 0$  para todo  $t$ , o teorema de Liouville (ARNOLD, 1988) permite concluir que o sistema apresenta estabilidade assintótica para  $t \rightarrow \infty$ . Isto nada mais é que uma consequência do fato de que a expansão do universo causa um amortecimento das ondas gravitacionais. Como a frequência é inversamente proporcional ao fator de escala  $A$ , concluímos que estas ondas sofrem um desvio para o vermelho com a expansão do universo.



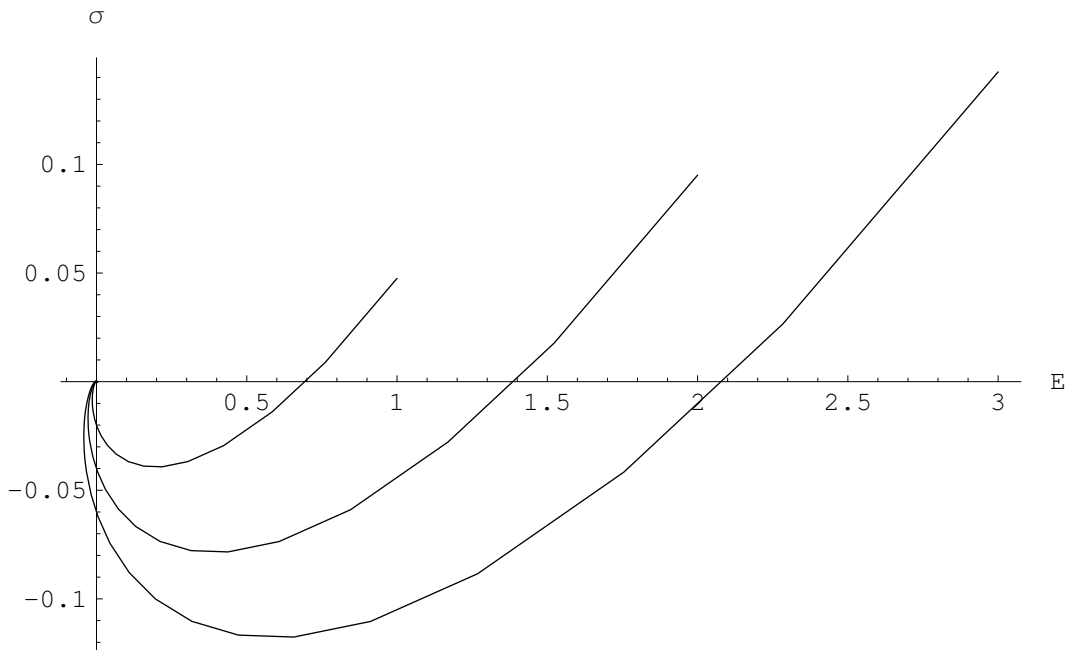


Figura 6.2: Retrato de fases  $(E, \sigma)$  do sistema  $S_S(t, \mu)$  no Universo de Einstein-Maxwell, para  $t$  em um intervalo centrado em  $t = 0.2$  ( $t < t_c$ ) e  $\mu = 5$ . As trajetórias do sistema foram obtidas numericamente para um conjunto ilustrativo de condições iniciais. O gráfico mostra a estrutura em nó.

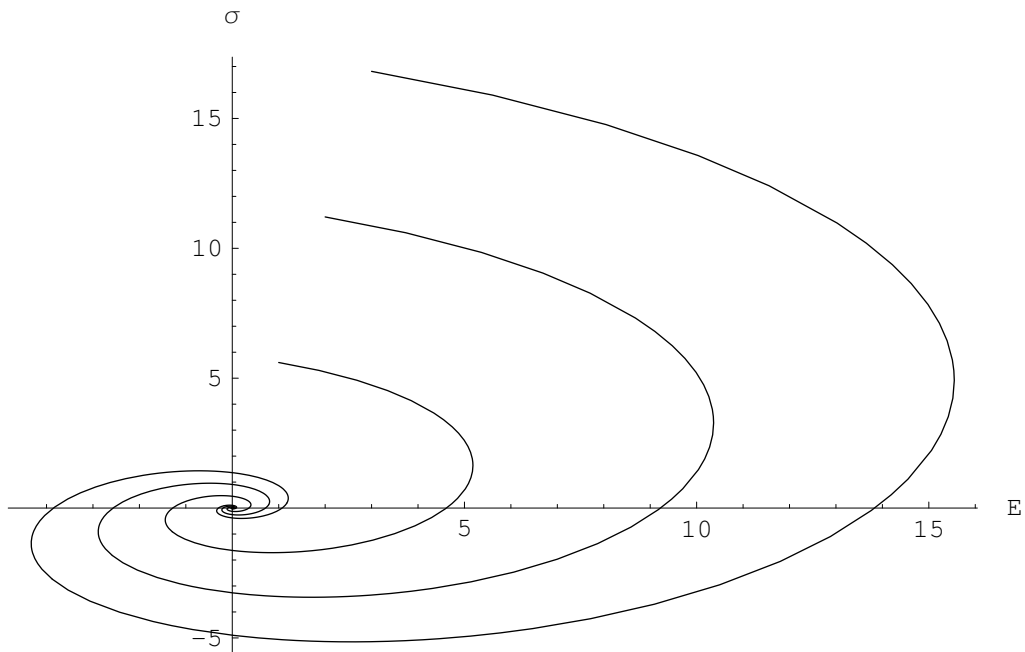


Figura 6.3: Retrato de fases  $(E, \sigma)$  do sistema  $S_S(t, \mu)$  no Universo de Einstein-Maxwell, para  $t$  em um intervalo centrado em  $t = 2$  ( $t > t_c$ ) e  $\mu = 5$ . As trajetórias do sistema foram obtidas numericamente. O gráfico mostra a estrutura em espiral.

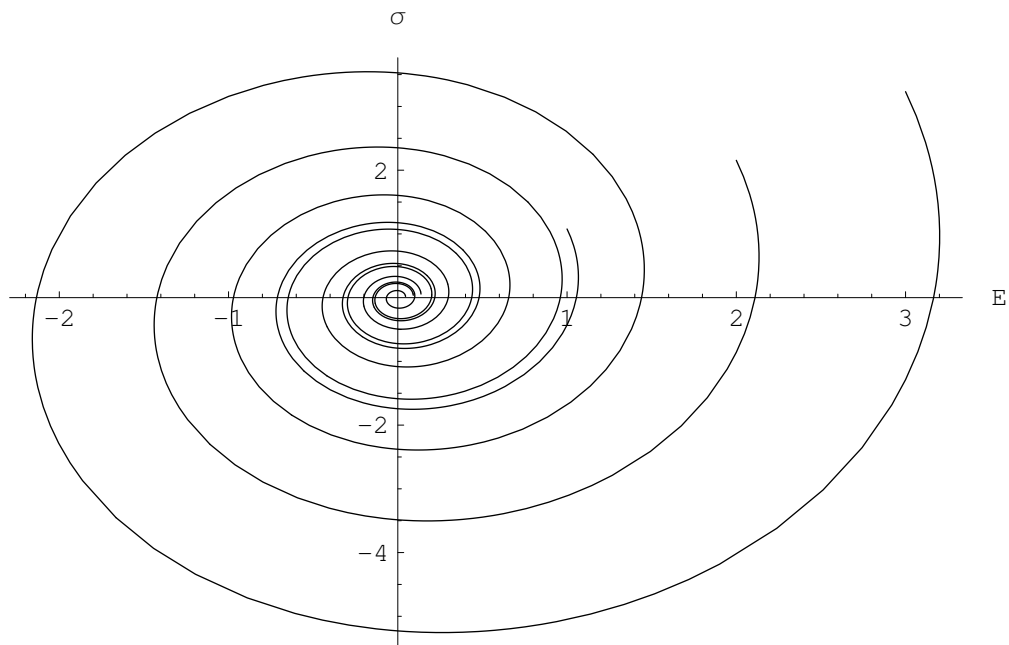


Figura 6.4: Retrato de fases  $(E, \sigma)$  do sistema  $S_S(t, \mu)$  no Universo de Einstein-Maxwell, para  $t$  em um intervalo centrado em  $t = 20$  ( $t > t_c$ ) e  $\mu = 5$ . As trajetórias do sistema foram obtidas numericamente. O gráfico mostra a estrutura em espiral.

## 7 *Ondas Gravitacionais no Universo com Ricochete*

Neste capítulo, vamos estudar a propagação de ondas gravitacionais no Universo com Ricochete. Como no capítulo anterior, esta análise aqui também será feita estudando aspectos qualitativos do sistema dinâmico que descreve a propagação de ondas gravitacionais em universos não-estacionários, homogêneos e isotrópicos. Na seção § 7.1 a teoria de perturbações apresentadas no capítulo 5 será empregada no estudo do espectro de perturbações tensoriais no Universo com Ricochete. Na seção § 7.2 vamos aplicar as técnicas da análise qualitativa no estudo do sistema dinâmico que descreve a propagação destas ondas no Universo com Ricochete e estudar a estrutura topológica de seu espaço de fases. O resultado desta análise nos permitirá fazer uma clara distinção entre ondas gravitacionais propagando-se no Universo de Einstein-Maxwell (UEM) ou no Universo com Ricochete (UR). Veremos que no UR, o espaço de fases do sistema  $S$ , que descreve a propagação de ondas gravitacionais, apresenta uma estrutura mais rica que a apresentada por este mesmo sistema no Universo de Einstein-Maxwell, com o surgimento de transições estruturais para um valor crítico do parâmetro  $\mu = k^2/A^2$ . Esta situação é distinta daquela observada no Universo de Einstein-Maxwell, onde não ocorriam transições estruturais para quaisquer valores finitos do parâmetro  $\mu$ . A seguir, na seção § 7.3 vamos comparar os resultados aqui obtidos com aqueles obtidos para o UEM. Esta comparação nos permitirá concluir que ondas geradas logo após  $t = 0$ , que corresponde à singularidade inicial no UEM ou ao ricochete no UR, apresentam um comportamento distinto.

## 7.1 Perturbações Tensoriais no Universo com Ricochete

Como feito anteriormente em nosso estudo da propagação de ondas gravitacionais no Universo de Einstein-Maxwell Singular, vamos restringir nossa análise a um universo plano ( $\varepsilon = 0$ )<sup>1</sup>, isto é, tal que a curvatura das seções espaciais é nula (ver §4.1). Neste caso, o Universo com Ricochete é caracterizado pelas seguintes quantidades não-perturbadas (§ 4.3):

$$A^2(t) = b_0 \sqrt{\frac{2}{3}(t^2 + 12\alpha)} \quad , \quad (7.1)$$

$$\rho(t) = \frac{3}{4} \frac{t^2}{(t^2 + 12\alpha)^2} \quad , \quad (7.2)$$

$$p(t) = \frac{1}{4} \frac{t^2 - 48\alpha}{(t^2 + 12\alpha)^2} \quad , \quad (7.3)$$

$$\theta(t) = \frac{3}{2} \frac{t}{(t^2 + 12\alpha)} \quad , \quad (7.4)$$

onde:

$$b_0 = bA^2 = \text{const.} \quad (7.5)$$

Fazendo-se a escolha  $A_0^2 = \sqrt{2/3} b_0$ , o coeficiente  $f$  é dado pela expressão (5.43):

$$f_R(t, \mu) = \frac{-t^2/2 + 6\alpha}{(t^2 + 12\alpha)^2} + \frac{\mu}{(t^2 + 12\alpha)^{1/2}} \quad , \quad (7.6)$$

onde novamente  $\mu \equiv k^2/A_0^2$ . Neste caso, o sistema (5.40)-(5.41) assume a forma:

$$\dot{E} + \frac{3}{2} \left( \frac{t}{t^2 + 12\alpha} \right) E + \left\{ \frac{t^2/2 - 6\alpha}{(t^2 + 12\alpha)^2} - \frac{\mu}{(t^2 + 12\alpha)^{1/2}} \right\} \sigma = 0 \quad , \quad (7.7)$$

$$\dot{\sigma} + \left( \frac{t}{t^2 + 12\alpha} \right) \sigma + E = 0 \quad . \quad (7.8)$$

A dificuldade de obter soluções exatas para o sistema (7.7)-(7.8) é evidente. Nota-se que para  $\alpha = 0$  o sistema (7.7)-(7.8) recai no sistema (6.5)-(6.6) que descreve a evolução de perturbações tensoriais no Universo de Einstein-Maxwell. Nota-se ainda que o mesmo ocorre para  $t \rightarrow \infty$ , o que mostra que as correções não-lineares da eletrodinâmica de Maxwell são importantes apenas no universo primitivo.

---

<sup>1</sup>Conforme mencionado na nota de rodapé 1 do capítulo 6, como estamos interessados no comportamento das ondas gravitacionais no universo “primordial”, não há perda de generalidade nesta escolha.

## 7.2 Análise Qualitativa da Propagação de Ondas Gravitacionais no Universo com Ricochete

De forma completamente análoga à feita para o Universo de Einstein-Maxwell, vamos escrever o sistema (7.7)-(7.8) na forma matricial (5.45):

$$\dot{X} = S_R(t, \mu; \alpha)X \quad ,$$

e analisar a estrutura do espaço de fases do sistema  $S_R$ . A matriz fundamental, neste caso, assume a forma:

$$S_R(t, \mu; \alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \frac{t}{(t^2+12\alpha)} & \frac{-t^2/2+6\alpha}{(t^2+12\alpha)^2} + \frac{\mu}{(t^2+12\alpha)^{1/2}} \\ -1 & -\frac{t}{t^2+12\alpha} \end{pmatrix} \quad , \quad (7.9)$$

de onde obtém-se:

$$\text{tr} S_R = -\frac{5}{2} \left( \frac{t}{t^2+12\alpha} \right) \quad , \quad (7.10)$$

$$\det S_R = \frac{t^2+6\alpha}{(t^2+12\alpha)^2} + \frac{\mu}{(t^2+12\alpha)^{1/2}} > 0 \quad . \quad (7.11)$$

Das (7.10) e (7.11) obtém-se o discriminante:

$$\delta(t, \mu; \alpha) = \log \left[ \frac{9t^2 - 96\alpha}{16\mu(t^2+12\alpha)^{3/2}} \right] \quad . \quad (7.12)$$

Novamente, a estrutura do espaço de fases do sistema  $S_R$  é determinada pelas soluções da equação  $\delta(t, \mu; \alpha) = 0$ . Como  $\delta$  é simétrica em  $t$ , vamos restringir nossa análise à fase expansiva do modelo ( $t > 0$ ). A figura 7.1 mostra o comportamento de  $\delta$  ao longo do tempo para diferentes valores do parâmetro  $\mu$ . Para  $\mu < \mu_c(\alpha)$ , o espaço de fases do sistema apresenta três regiões estruturalmente distintas, determinadas pela existência de duas soluções para a equação  $\delta(t > 0, \mu; \alpha) = 0$ , que vamos denotar por  $t_{c-1}^+(\alpha)$  e  $t_{c-2}^+(\alpha)$ , com  $t_{c-1}^+(\alpha) < t_{c-2}^+(\alpha)$ , (figura 7.1). Para valores do parâmetro  $\mu$  maiores que um certo valor crítico  $\mu = \mu_c(\alpha)$  ( $\mu_c \approx 1.82$  para  $\alpha = 0.01$ ), a equação  $\delta(t > 0, \mu; \alpha) = 0$  não possui soluções reais, de modo que o espaço de fases do sistema  $S_R$  apresenta apenas uma única estrutura. Como nos casos  $\mu > \mu_c(\alpha)$  e  $\mu = \mu_c(\alpha)$  os espaços de fases são estruturalmente equivalentes, vamos tratar apenas o primeiro caso. A tabela 7.1 apresenta a estrutura do sistema  $S_R$  para comprimento de onda em diferentes faixas do espectro.

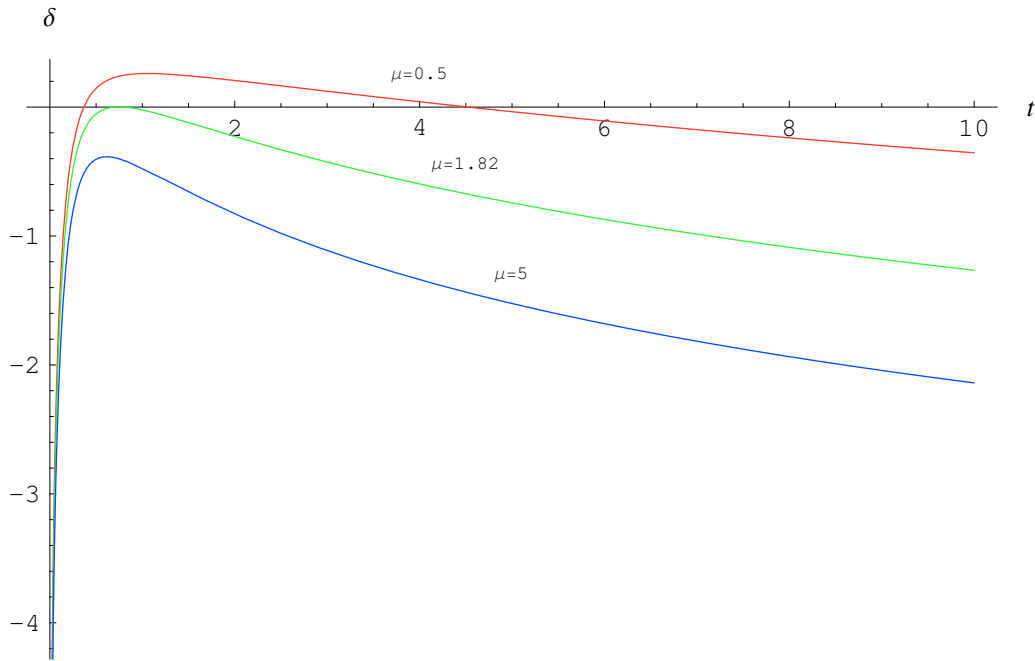


Figura 7.1: Gráfico de  $\delta$  ao longo do tempo no Universo com Ricochete na fase expansiva ( $t > 0$ ) para  $\mu = 0.5$ ,  $\mu = 1.82$  e  $\mu = 5$ , onde escolhemos o valor ilustrativo  $\alpha = 0.01$ . O gráfico mostra os tempos críticos  $t_{c_1}^+$  e  $t_{c_2}^+$ , com  $t_{c_1}^+ < t_{c_2}^+$ , que são soluções da equação  $\delta(t > 0, \mu; \alpha) = 0$  para  $\mu < \mu_c$  ( $\mu_c \approx 1.82$  para  $\alpha = 0.01$ ). No caso  $\mu > \mu_c$  não ocorrem tempos críticos.

As figuras 7.2 - 7.4 apresentam retratos de fases do sistema  $S_R$  no Universo com Ricochete, para  $\mu < \mu_c$ , para  $t$  nos intervalos  $0 < t < t_{c_1}^+$ ,  $t_{c_1}^+ < t < t_{c_2}^+$  e  $t > t_{c_2}^+$ , respectivamente, e onde escolhemos o valor ilustrativo  $\alpha = 0.01$ . Estes retratos de fases foram obtidos numericamente para um conjunto ilustrativo de condições iniciais. As figuras 7.5 - 7.7 apresentam retratos de fases do sistema  $S_R$  no Universo com Ricochete, para  $\mu > \mu_c$ , para  $t$  nos mesmos intervalos  $0 < t < t_{c_1}^+$ ,  $t_{c_1}^+ < t < t_{c_2}^+$  e  $t > t_{c_2}^+$ , respectivamente, e onde novamente escolhemos o valor ilustrativo  $\alpha = 0.01$ . Estes retratos de fases também foram obtidos numericamente para o mesmo conjunto ilustrativo de condições iniciais empregado nos gráficos anteriores. A comparação destes conjuntos de gráficos permite identificar claramente a transição de um espaço de fases do tipo espiral-nó-espiral no caso  $\mu < \mu_c$  ( $\lambda > \lambda_c$ ) para um do tipo espiral-espiral-espiral no caso  $\mu > \mu_c$  ( $\lambda < \lambda_c$ ).

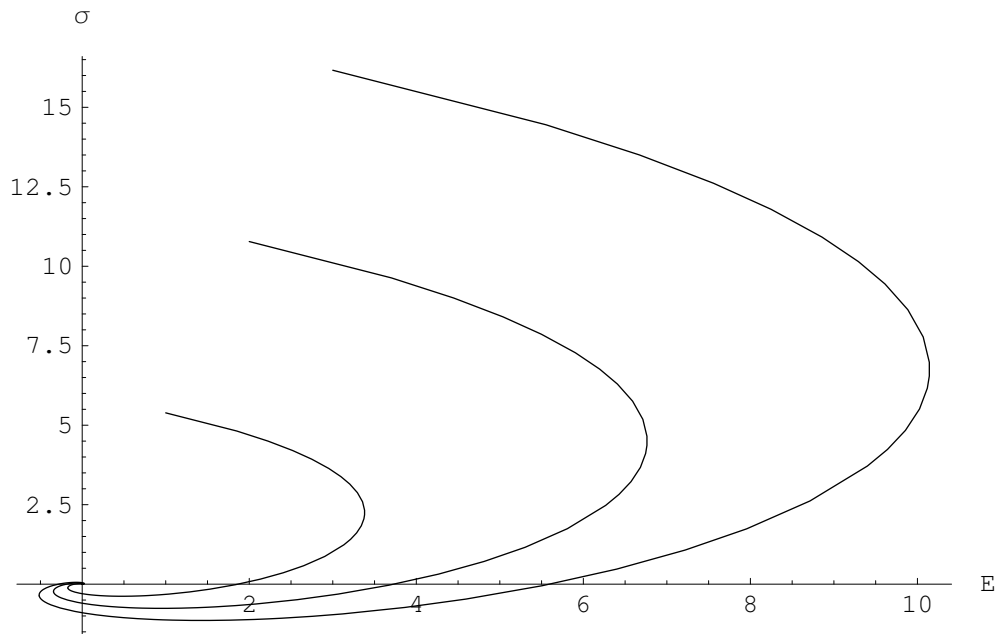


Figura 7.2: Retrato de fases  $(E, \sigma)$  do sistema  $S_R(t, \mu; \alpha)$  no Universo com Ricochete, para  $t$  no intervalo  $0 < t < t_c^+_1$  ( $t = 0.2$ ),  $\mu < \mu_c$  ( $\mu = 0.5$ ) e  $\alpha = 0.01$ . As trajetórias do sistema foram obtidas numericamente. O gráfico mostra uma estrutura em espiral.

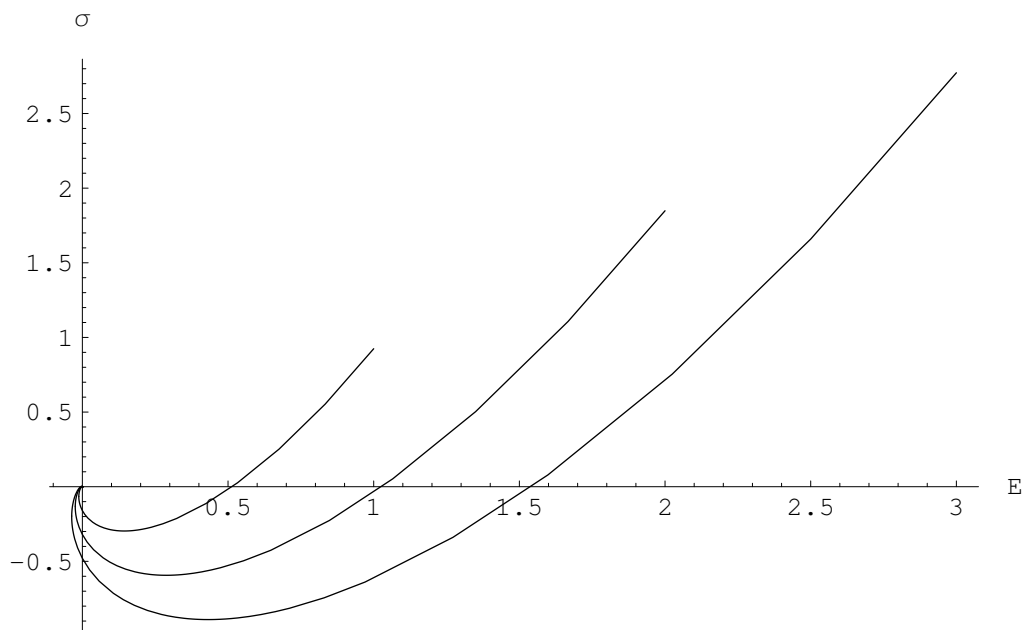


Figura 7.3: Retrato de fases  $(E, \sigma)$  do sistema  $S_R(t, \mu; \alpha)$  no Universo com Ricochete, para  $t$  no intervalo  $t_c^+_1 < t < t_c^+_2$  ( $t = 2$ ),  $\mu < \mu_c$  ( $\mu = 0.5$ ) e  $\alpha = 0.01$ . As trajetórias do sistema foram obtidas numericamente. O gráfico mostra uma estrutura em nó.

Tabela 7.1: Estrutura do espaço de fases do sistema  $S_R$  para diferentes valores do comprimento de onda.  $t_c^+{}_{1}(\alpha)$  e  $t_c^+{}_{2}(\alpha)$  representam os tempos críticos associados ao caso  $\lambda < \lambda_c(\alpha)$  para os quais  $\delta = 0$ .

comprimento de onda	intervalo	estrutura
$\lambda_c < \lambda < \infty$	$0 < t < t_c^+{}_{1}$	espiral
	$t_c^+{}_{1} < t < t_c^+{}_{2}$	nó
	$t_c^+{}_{2} < t < \infty$	espiral
$0 < \lambda < \lambda_c$	$0 < t < \infty$	espiral

Como  $\text{tr}\mathbf{S}(t; \alpha) < 0$  para todo  $t > 0$ , podemos concluir, que o sistema apresenta estabilidade assintótica para  $t \rightarrow \infty$ , como ocorre no UEM. Novamente as ondas gravitacionais sofrem um desvio para o vermelho na fase expansiva ( $t > 0$ ). Apesar de estarmos restringindo nossa análise à fase expansiva deste modelo, cabe mencionar, no entanto, que  $\text{tr}\mathbf{S}(t; \alpha) > 0$  para todo  $t < 0$  e o sistema é estável para  $t \rightarrow 0$ . Portanto, as ondas sofrem um desvio para o azul na fase contrativa ( $t < 0$ ).

### 7.3 Comparação com o UEM

As figuras 7.10 e 7.9 comparam o comportamento de  $\delta$  no UEM e UR para  $\mu$  nos intervalos  $\mu < \mu_c$  e  $\mu > \mu_c$ , respectivamente, para o valor ilustrativo  $\alpha = 0.01$ .

Em ambos os casos ( $\mu < \mu_c$  e  $\mu > \mu_c$ ), vemos que as trajetórias do sistema  $E$ - $\sigma$  próximo de  $t = 0$  apresentam uma estrutura do tipo nó no UEM e do tipo espiral no UR. Para comprimentos de onda no intervalo  $\lambda > \lambda_c(\alpha)$ , o tempo crítico  $t_c^+{}_{1}(\alpha)$  determina o quão próximo de  $t = 0$  as ondas devem ser geradas para que surja o comportamento distinto. Para comprimentos de onda no intervalo  $\lambda < \lambda_c(\alpha)$ , no entanto, é o tempo crítico  $t_c$ , definido na equação (6.13), que determina este limite. Nota-se que este tempo crítico não depende do parâmetro  $\alpha$ .

Esta análise sugere, portanto, que medidas de efeitos de maré gravitacional e da anisotropia de cisalhamento em um sistema de partículas teste de uma antena gravitacional, resulta-



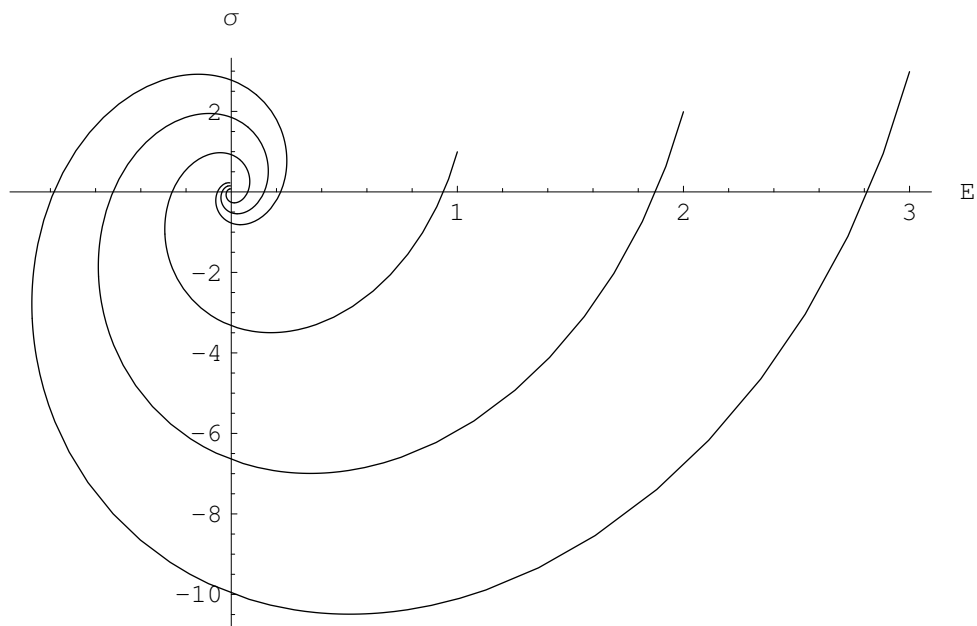


Figura 7.4: Retrato de fases  $(E, \sigma)$  do sistema  $S_R(t, \mu; \alpha)$  no Universo com Ricochete, para  $t$  no intervalo  $t > t_c^+_2$  ( $t = 20$ ),  $\mu < \mu_c$  ( $\mu = 0.5$ ) e  $\alpha = 0.01$ . As trajetórias do sistema foram obtidas numericamente. O gráfico mostra uma estrutura em espiral.

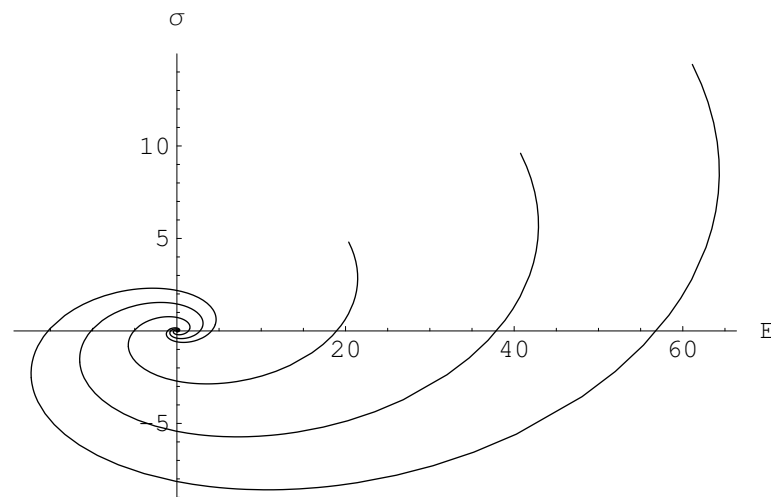


Figura 7.5: Retrato de fases  $(E, \sigma)$  do sistema  $S_R(t, \mu; \alpha)$  no Universo com Ricochete, para  $t$  no intervalo  $0 < t < t_c^+_1$  ( $t = 0.2$ ),  $\mu > \mu_c$  ( $\mu = 5$ ) e  $\alpha = 0.01$ . As trajetórias do sistema foram obtidas numericamente. O gráfico mostra uma estrutura em espiral.

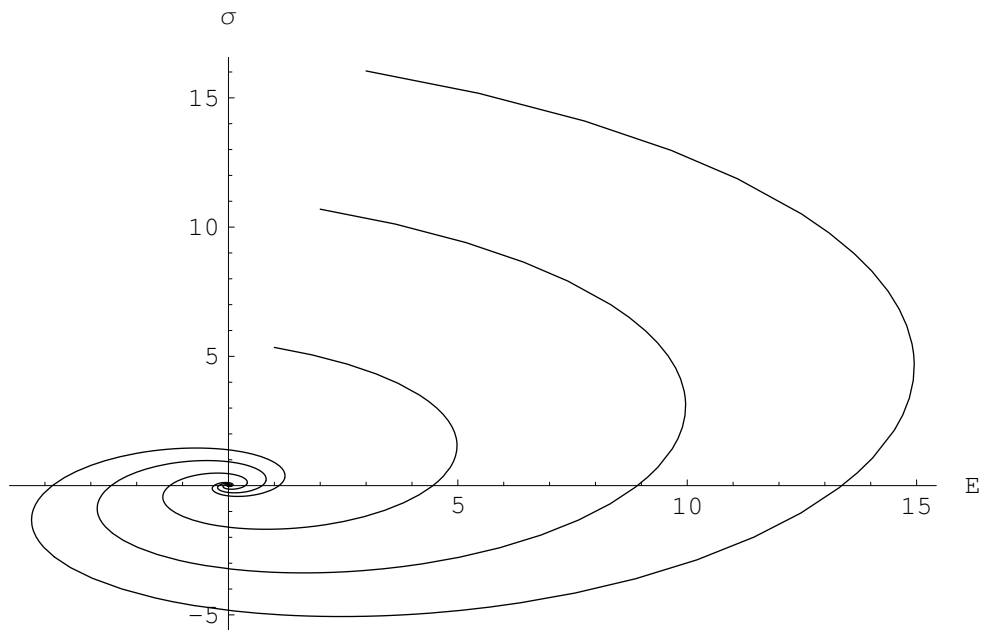


Figura 7.6: Retrato de fases  $(E, \sigma)$  do sistema  $S_R(t, \mu; \alpha)$  no Universo com Ricochete, para  $t$  no intervalo  $t_{c_1}^+ < t < t_{c_2}^+$  ( $t = 2$ ),  $\mu > \mu_c$  ( $\mu = 5$ ) e  $\alpha = 0.01$ . As trajetórias do sistema foram obtidas numericamente. O gráfico mostra uma estrutura em espiral.

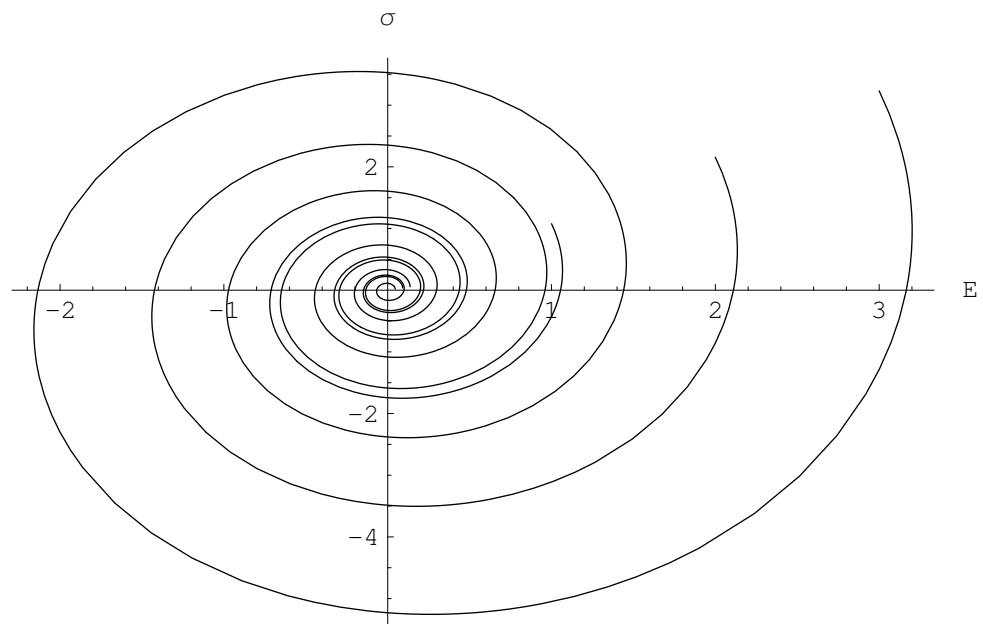


Figura 7.7: Retrato de fases  $(E, \sigma)$  do sistema  $S_R(t, \mu; \alpha)$  no Universo com Ricochete, para  $t$  no intervalo  $t > t_{c_2}^+$  ( $t = 20$ ),  $\mu > \mu_c$  ( $\mu = 5$ ) e  $\alpha = 0.01$ . As trajetórias do sistema foram obtidas numericamente. O gráfico mostra uma estrutura em espiral.

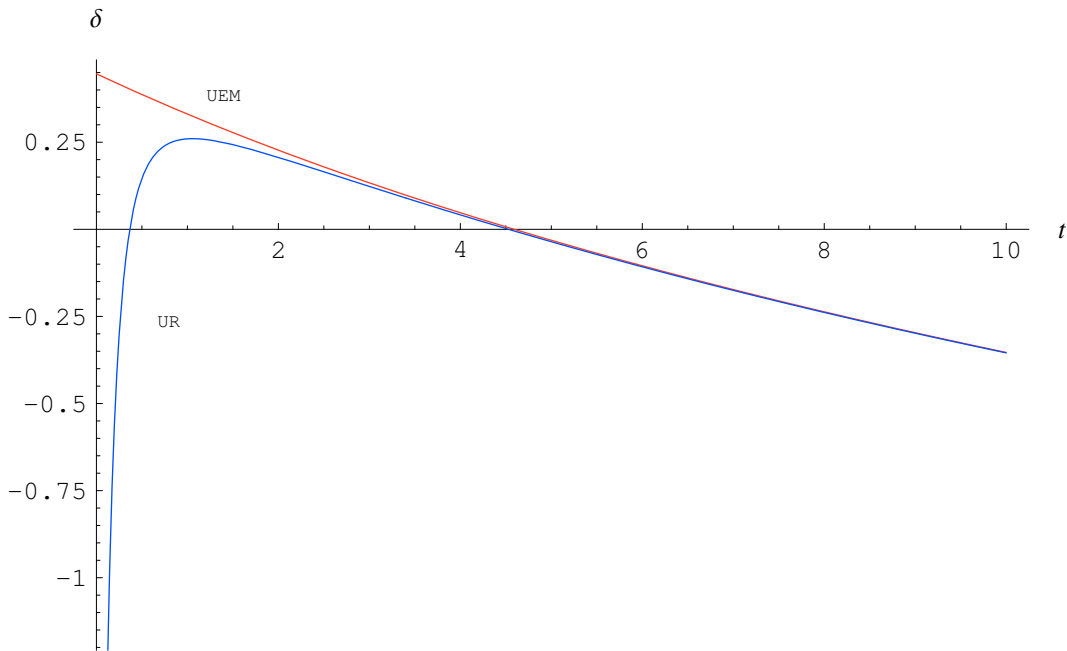


Figura 7.8: Comportamento de  $\delta$  no UEM e no UR na fase expansiva ( $t > 0$ ) para  $\mu = 0.5$  e para o valor ilustrativo  $\alpha = 0.01$  ( $\mu < \mu_c$ ). A figura mostra um comportamento diferente próximo de  $t = 0$  para estes modelos.

riam, em uma escala de tempo de laboratório, em um espaço de fases  $E-\sigma$  com uma estrutura diferente para ondas gravitacionais geradas próximo à singularidade inicial em relação às geradas próximo a um ricochete. O tempo para o qual um comportamento distinto é esperado, para ondas que apresentam comprimentos de onda pequenos no momento de sua geração, isto é  $\lambda < \lambda_c(\alpha)$ , corresponde ao valor crítico definido na eq. (6.13):

$$t_c(\lambda) = \frac{9A_0^2}{16(2\pi)^2} \lambda^2 \quad ,$$

onde, como vimos anteriormente (§ 4.3), os valores possíveis de  $\alpha$  estão restritos ao intervalo:

$$\frac{1}{40b^2} < \alpha < \frac{1}{8b^2} \quad .$$

Estes resultados poderiam ser utilizados, em princípio, para determinar a existência de uma singularidade inicial ou de um ricochete em nosso universo.

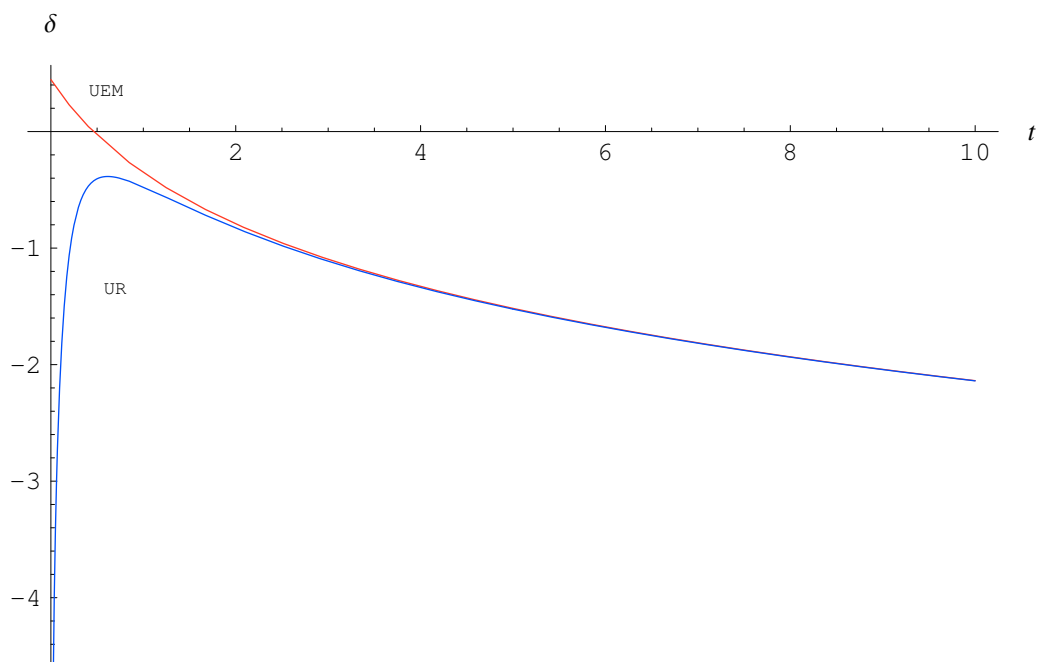


Figura 7.9: Comportamento de  $\delta$  no UEM e no UR na fase expansiva ( $t > 0$ ) para  $\mu = 5$  e para o valor ilustrativo  $\alpha = 0.01$  ( $\mu > \mu_c$ ). A figura mostra um comportamento diferente próximo de  $t = 0$  para estes modelos.

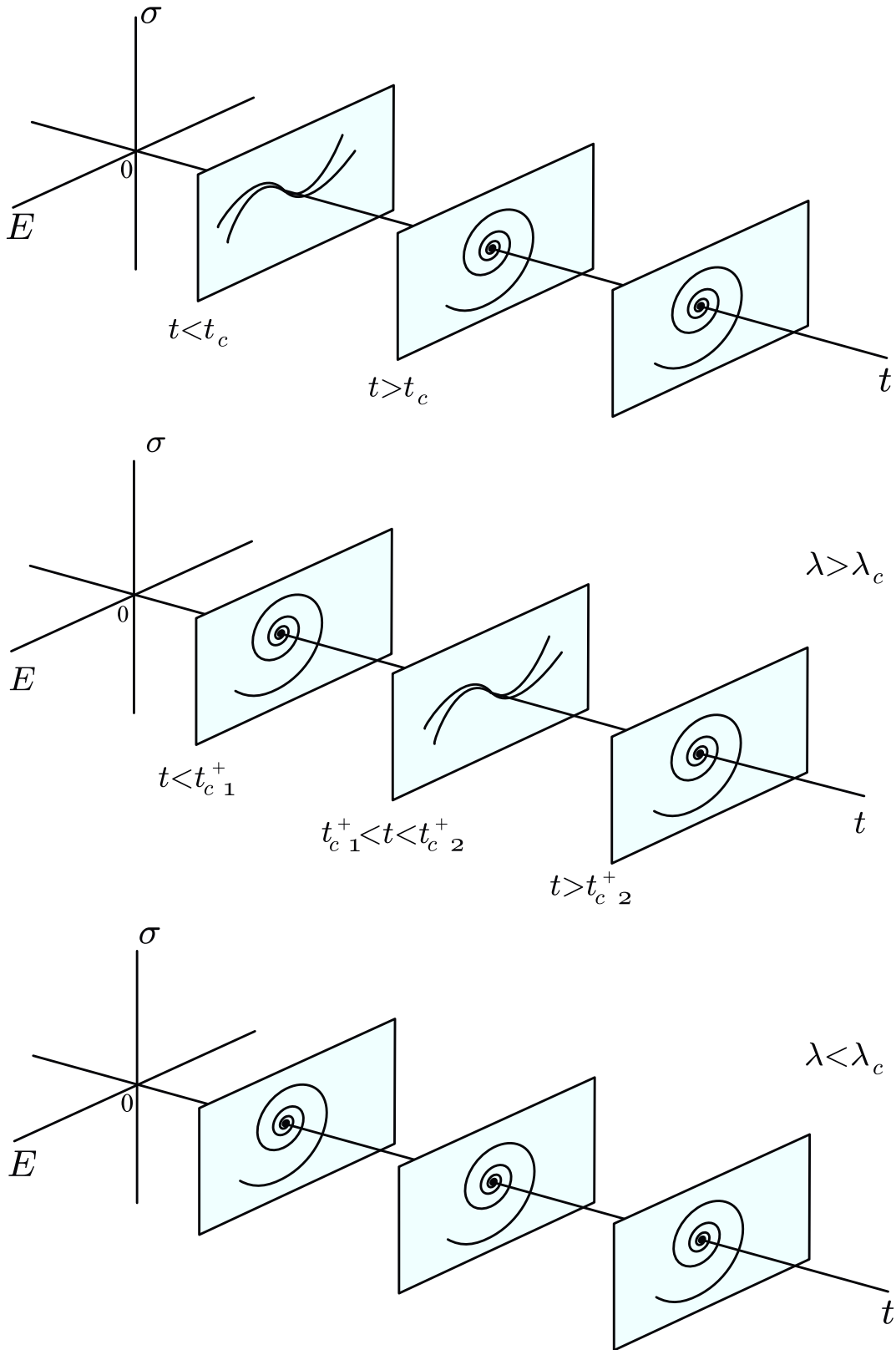


Figura 7.10: Representação esquemática da estrutura do espaço de fases  $E - \sigma$  para ondas gravitacionais no Universo Eletromagnético Singular, UEM, (topo), e no Universo Eletromagnético com Ricochete, UR, para parâmetros  $\lambda > \lambda_c$  (centro) e para  $\lambda < \lambda_c$  (gráfico inferior).

## 8 *Conclusão*

Apesar do grande sucesso do Modelo Cosmológico Padrão em explicar uma série de fatos observados sobre o nosso universo, tais como a radiação cósmica de fundo e a abundância cósmica de hélio, este modelo se vê em grandes dificuldades quando qualquer pergunta é feita acerca de seu estado inicial, já que se trata de um estado inicial singular, não-físico, inacessível. Esta dificuldade aponta para a necessidade de se procurar novos modelos cosmológicos livres do problema da singularidade inicial. Nas últimas décadas, foram formulados vários modelos alternativos não-singulares nos quais diversos mecanismos são empregados para evitar a singularidade. No entanto, mesmo que grandes avanços tenham sido feitos no terreno da pura teoria, apenas a experiência poderá decidir qual destes modelos cosmológicos fornece uma melhor descrição de nosso universo. Neste espírito, investigamos a propagação de ondas gravitacionais em dois modelos cosmológicos não-estacionários que representam os paradigmas rivais da cosmologia contemporânea, um universo singular e um universo com ricochete, no intuito de contribuir para a formulação de critérios observáveis capazes de nos auxiliar na decisão de qual destes modelos fornece uma melhor descrição do universo em que vivemos.

Os modelos homogêneos e isotrópicos escolhidos para representar estas duas alternativas foram os chamados Universo de Einstein-Maxwell, cuja fonte da geometria é o campo eletromagnético descrito pela teoria de Maxwell, e o Universo com Ricochete, cuja fonte da geometria é o campo eletromagnético descrito por uma generalização não-linear da teoria Maxwelliana do eletromagnetismo (DE LORENCI et al., 2002).

A análise da propagação de ondas gravitacionais nesses modelos foi feita utilizando o método de perturbações das equações quasi-Maxwellianas, sugerido por Hawking, e que tem por base a formulação de Jordan-Ehlers-Kundt da Gravitação (JORDAN; EHLERS; KUNDT, 1960). Este método tem a grande vantagem de ser invariante de calibre quando aplicado a perturbações da geometria em modelos homogêneos e isotrópicos e, portanto, neste caso particular, não está sujeito às dificuldades que surgem no método tradicional (LIFSHITZ; KHA-

LATNIKOV, 1963) como consequência da dependência de calibre de perturbações da métrica. Outra vantagem deste método é que ele permite considerar apenas perturbações de quantidades fisicamente relevantes, isto é, observáveis, como a curvatura. Utilizando esta abordagem, é possível escrever um sistema dinâmico não-autônomo fechado, envolvendo apenas as componentes da parte “elétrica” do tensor de Weyl e do cisalhamento, que descreve completamente a propagação de ondas gravitacionais em modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos (NOVELLO et al., 1995).

A análise qualitativa do sistema dinâmico que descreve a propagação de ondas gravitacionais nos modelos não-estacionários singular e não-singular, revelou uma estrutura distinta para o espaço de fases do sistema nos dois casos. Constatamos que o espaço de fases do sistema no Universo de Einstein-Maxwell apresenta duas regiões distintas. No caso do Universo com Ricochete, foram observadas diferentes estruturas para o espaço de fases para valores do comprimento de onda das perturbações maiores ou menores que um certo valor crítico  $\lambda_c$ . Esta transição não é observada no espaço de fases do sistema no Universo de Einstein-Maxwell. Além disso, em ambos os regimes  $\lambda < \lambda_c$  e  $\lambda > \lambda_c$  foi observada uma estrutura para o espaço de fases do sistema no Universo com Ricochete que difere, de forma clara, daquela observada no Universo de Einstein-Maxwell. Em particular, constatamos que ondas gravitacionais geradas próximo à singularidade ou ao ricochete apresentam um comportamento qualitativamente diferente.

A detecção de ondas gravitacionais ainda é um grande desafio para a experimentação. No entanto, temos a expectativa de que estes resultados possam auxiliar na formulação de critérios experimentais capazes de decidir se vivemos em um universo que evoluiu a partir de um *big bang* ou se, ao contrário, este universo teria experimentado uma fase contrativa no passado, seguida da fase expansiva em que se encontra atualmente.

## APÊNDICE A – Variedades Pseudo-Riemannianas

### A.1 Variedades Diferenciáveis

<sup>1</sup>Seja um conjunto de pontos  $\mathcal{M} = \{m\}$ , juntamente com uma coleção  $\{(\mathcal{U}, \phi)\}$  de pares de subconjuntos  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$  e mapeamentos bijetivos  $\phi$  de  $\mathcal{U}$  no  $\mathbb{R}^n$ , tais que as imagens  $\phi(\mathcal{U})$  são abertos do  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{M}$  será chamado de uma *variedade diferenciável* de dimensão  $n$ , se:

(V1) O conjunto  $\{\mathcal{U}\}$  é um recobrimento de  $\mathcal{M}$ , isto é,  $\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{U} \subset \mathcal{M}} \mathcal{U}$ ;

(V2) Dados dois subconjuntos  $\mathcal{U}$  e  $\bar{\mathcal{U}}$  tais que  $\bar{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}$  é não-vazio. Para um ponto arbitrário  $m \in \mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}}$ , os mapeamentos:

$$\bar{\phi} \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}}) \rightarrow \bar{\phi}(\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}})$$

entre os abertos  $\phi(\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}})$  e  $\bar{\phi}(\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}})$  do  $\mathbb{R}^n$ , são diferenciáveis<sup>2</sup>, e suas inversas são também diferenciáveis (o mapeamento é chamado um difeomorfismo, nesse caso);

(V3) O conjunto  $\{(\mathcal{U}, \phi)\}$  é *maximal*.

O par  $(\mathcal{U}, \phi)$  é chamado de *carta coordenada* ou *sistema de coordenadas locais*, e o conjunto  $\{(\mathcal{U}, \phi)\}$  é chamado de um *sistema de cartas locais* em  $\mathcal{M}$ . Devemos impor a condição adicional, sobretudo para o fim de construir um modelo matemático do espaço-tempo, de que a

<sup>1</sup>A exposição detalhada dos tópicos aqui apresentados pode ser encontrada em (DO CARMO, 2005), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982), (DE FELICE; CLARKE, 1990) e (??). Referências adicionais serão mencionadas ao longo do texto.

<sup>2</sup>Assumiremos, por simplicidade, que estes mapeamentos são infinitas vezes diferenciáveis.



topologia induzida na variedade pela coleção de mapeamentos  $\{\phi\}$  deve ser Hausdorff (separável)<sup>3</sup>. Para todo ponto  $m$  em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$ , a imagem  $\phi(m) \in \mathbb{R}^n$  define as chamadas *coordenadas (locais)* do ponto  $m$ , na carta  $(\mathcal{U}, \phi)$ :

$$\phi(m) = (x^1, \dots, x^n) = (x^\alpha)$$

com os índices  $\alpha$  assumindo valores no conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Quando houver necessidade, a dimensão da variedade será explicitada pelo símbolo  $\mathcal{M}^n$ .

Uma variedade  $\mathcal{M}$  é dita *paracompacta* se para todo recobrimento aberto  $\{\mathcal{V}\}$  de  $\mathcal{M}$  existe recobrimento aberto  $\{\mathcal{U}\}$  tal que todo elemento  $\mathcal{U}$  está contido em algum  $\mathcal{V}$ , e todo ponto  $m$  possui uma vizinhança que intersecta um número no máximo finito de vizinhanças  $\mathcal{U}$ . O recobrimento  $\{\mathcal{U}\}$  é dito localmente finito, neste caso.

Uma variedade  $\mathcal{M}$  é dita *orientável* quando existe um sistema de cartas  $\{(\mathcal{U}, \phi)\}$  de  $\mathcal{M}$  tal que, para todo  $\mathcal{U}$  e  $\tilde{\mathcal{U}}$ , o determinante Jacobiano da mudanças de coordenadas  $\bar{\phi} \circ \phi^{-1}$  é positivo.

---

<sup>3</sup>Para detalhes, ver (DO CARMO, 2005), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) e (DE FELICE; CLARKE, 1990).

## A.2 Campos Vetoriais e Tensoriais

Uma curva  $C$  em  $\mathcal{M}$  é um mapeamento  $C : [\tau_1, \tau_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  de um intervalo dos números reais em  $\mathcal{M}$ , isto é,  $C$  associa a cada ponto  $\tau$  do intervalo o ponto  $C(\tau)$  de  $\mathcal{M}$ . Um vetor tangente à curva no ponto  $m = C(\tau)$  em  $\mathcal{U}$  é definido, em termos de uma carta  $(\mathcal{U}, \phi)$ , e de um mapeamento  $\varphi$  de  $\mathcal{M}$  em  $\mathbb{R}$ , diferenciável no ponto  $m$ , pela relação<sup>4</sup>:

$$\mathbf{X}_m^C(\varphi) = (\varphi \circ C)'(\tau) = (\partial_\alpha \varphi)_m \frac{d}{d\tau} C^\alpha(\tau) = X_C^\alpha(m) \partial_{\alpha|m}(\varphi) \quad (\text{A.1})$$

onde  $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x^\alpha$ . Duas curvas  $C$  e  $C'$  são ditas *tangentes* em  $m$  se  $\mathbf{X}_m^C = \mathbf{X}_m^{C'}$ . A classe de equivalência das curvas tangentes em  $\mathcal{M}$ , no ponto  $m$ , define o chamado *vetor tangente*  $\mathbf{X}_m$  à variedade  $\mathcal{M}$  em  $m$ . O conjunto  $T_m\mathcal{M}$ , formado pelos vetores tangente em  $m$  a todas as curvas que passam pelo ponto  $m$ , é chamado *espaço tangente* à  $\mathcal{M}$  em  $m$ . A chamada *base (natural) de vetores* de  $T_m\mathcal{M}$  é definida como o conjunto  $\{\partial_{\alpha|m}\}$ . Em termos desta base, pode-se escrever  $\mathbf{X}_m = X^\alpha(m) \partial_{\alpha|m}$ . Um *campo vetorial* em  $\mathcal{M}$  é um mapeamento:

$$\mathbf{X} : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M} \equiv \bigcup_m T_m\mathcal{M}$$

que associa (diferencialmente) a cada ponto  $m \in \mathcal{M}$  um vetor  $\mathbf{X}_m \in T_m\mathcal{M}$ . O conjunto  $T\mathcal{M}$  é chamado de *fibrado tangente* de  $\mathcal{M}$ . Em termos da base natural de campos vetoriais  $\{\partial_\alpha\}$  em  $\mathcal{U}$ , o campo  $\mathbf{X}$  pode ser escrito, localmente, como  $\mathbf{X}|_{\mathcal{U}} = X^\alpha \partial_\alpha$ , onde  $X^\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  são mapeamentos diferenciáveis. O *colchete de Lie* entre dois campos vetoriais  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  é o campo vetorial em  $\mathcal{M}$  definido por:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv \mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}$$

em componentes locais:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]|_{\mathcal{U}} = (X^\alpha \partial_\alpha Y^\beta - Y^\alpha \partial_\alpha X^\beta) \partial_\beta \quad (\text{A.2})$$

Em particular, o colchete de Lie entre campos da base natural  $\{\partial_\alpha\}$  é identicamente nulo:

$$[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0.$$

O *espaço cotangente* em um ponto  $m$ ,  $T_m\mathcal{M}^*$ , ou *dual algébrico* de  $T_m\mathcal{M}$ , é definido como

<sup>4</sup>Neste trabalho, usamos sempre a *convenção de Einstein*:

$$A^\alpha B_\alpha \equiv \sum_\alpha A^\alpha B_\alpha.$$

o conjunto de todos mapeamentos  $\theta_m : T_m\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  que associam a um vetor  $X_m$  um número real  $\theta_m(X_m) \in \mathbb{R}$ . Tomando-se  $dx_m^\alpha(\partial_{\beta|m}) = \delta_\beta^\alpha$ , define-se a chamada *base (natural) dual*  $\{dx_m^\alpha\}$  de  $T_m\mathcal{M}^*$ , em termos da qual, um covetor em  $m$  pode ser escrito como  $\theta_m = \theta_\alpha(m) dx_m^\alpha$ . Um *campo covetorial* em  $\mathcal{M}$  é um mapeamento:

$$\theta : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}^* \equiv \bigcup_m T_m\mathcal{M}^*$$

que associa (diferencialmente) a cada ponto  $m \in \mathcal{M}$  um covetor  $\theta_m \in T_m\mathcal{M}^*$ . O conjunto  $T\mathcal{M}^*$  é chamado de *fibrado cotangente* de  $\mathcal{M}$ . Em termos da base natural de campos covetoriais  $\{dx^\alpha\}$  em  $\mathcal{U}$ , o campo  $\theta$  pode ser escrito, localmente, como  $\theta|_{\mathcal{U}} = \theta_\alpha dx^\alpha$ , onde  $\theta_\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  são mapeamentos diferenciáveis.

Define-se o *espaço tensorial  $p$ -contravariante  $q$ -covariante* em um ponto  $m$ ,  $\otimes^p T_m\mathcal{M} \otimes^q T_m\mathcal{M}^*$ , como o espaço formado por todos os mapeamentos multilineares:

$$\mathbf{T}_m : T_m\mathcal{M} \times \cdots \times T_m\mathcal{M} \times T_m\mathcal{M}^* \times \cdots \times T_m\mathcal{M}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

que associam a uma sequência de  $q$  vetores e  $p$  covetores, um número real, dado por  $\mathbf{T}_m(X_m^1, \dots, X_m^q, \theta_m^1, \dots, \theta_m^p)$ . Um elemento  $\mathbf{T}_m$  de  $\otimes^p T_m\mathcal{M} \otimes^q T_m\mathcal{M}^*$  é chamado de um *tensor  $p$ -contravariante  $q$ -covariante*, ou *do tipo  $(p, q)$* , em  $m$ . Em termos das bases naturais do espaço tangente e do espaço cotangente, pode-se definir a *base (natural) tensorial* do espaço  $\otimes^p T_m\mathcal{M} \otimes^q T_m\mathcal{M}^*$ :

$$\{\partial_{\alpha_1|m} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_p|m} \otimes dx_m^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx_m^{\beta_q}\}$$

onde o *produto tensorial*  $X \otimes \theta$  de um vetor e um covetor é definido pela relação  $(X \otimes \theta)(\xi, Y) = \xi(X)\theta(Y)$ . Em termos da base tensorial, um tensor  $\mathbf{T}_m$  de  $\otimes^p T_m\mathcal{M} \otimes^q T_m\mathcal{M}^*$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{T}_m = T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}(m) \partial_{\alpha_1|m} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_p|m} \otimes dx_m^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx_m^{\beta_q}. \quad (\text{A.3})$$

Um *campo tensorial do tipo  $(p, q)$*  em  $\mathcal{M}$  é um mapeamento:

$$\mathbf{T} : \mathcal{M} \rightarrow \bigotimes^p T\mathcal{M} \bigotimes^q T\mathcal{M}^* \equiv \bigcup_m \bigotimes^p T_m\mathcal{M} \bigotimes^q T_m\mathcal{M}^*$$

que associa a cada ponto  $m \in \mathcal{M}$  um tensor  $\mathbf{T}_m \in \otimes^p T_m\mathcal{M} \otimes^q T_m\mathcal{M}^*$ . O conjunto  $\bigotimes^p T\mathcal{M} \bigotimes^q T\mathcal{M}^*$  é chamado de *fibrado tensorial  $p$ -contravariante  $q$ -covariante* em  $\mathcal{M}$ . Em termos da base natural de campos tensoriais em  $\mathcal{U}$ ,  $\{\partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_p} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_q}\}$ , o campo  $\mathbf{T}$  pode ser escrito, localmente, como:

$$\mathbf{T}|_{\mathcal{U}} = T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dx_{\alpha_p} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_q} \quad (\text{A.4})$$

onde  $T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  são mapeamentos diferenciáveis. A *contração* é o mapeamento  $C_s^r$  que associa a campos tensoriais do tipo  $(p, q)$ , campos tensoriais do tipo  $(p-1, q-1)$ , definida, em relação a um dado índice contravariante  $\alpha_r$  e um dado índice covariante  $\beta_s$  das coordenadas locais de um campo tensorial  $T$ , como:

$$C_s^r T : T_{\dots \beta_s \dots}^{\dots \alpha_r \dots} \mapsto T_{\dots \alpha_r \dots}^{\dots \beta_s \dots}$$

Defini-se a *simetrização total*  $ST$  e a *anti-simetrização total*  $AT$  de um campo tensorial  $q$ -covariante  $T$ , em componentes, como:

$$(ST)_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \equiv \frac{1}{q!} \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_q} T_{\beta_1 \dots \beta_q} \quad (\text{A.5})$$

$$(AT)_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \equiv \frac{1}{q!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_q} T_{\beta_1 \dots \beta_q} \quad (\text{A.6})$$

em termos das componentes do *tensor de Kronecker*:

$$\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_q} = \begin{cases} 0 & \text{se } (\beta_1, \dots, \beta_q) \text{ não for uma permutação de } (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \\ +1 & \text{se } (\beta_1, \dots, \beta_q) \text{ for uma permutação de } (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \end{cases}$$

e das componentes do *tensor de Levi-Civita*:

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_q} = \begin{cases} 0 & \text{se } (\beta_1, \dots, \beta_q) \text{ não for uma permutação de } (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \\ +1 & \text{se } (\beta_1, \dots, \beta_q) \text{ for uma permutação par de } (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \\ -1 & \text{se } (\beta_1, \dots, \beta_q) \text{ for uma permutação ímpar de } (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \end{cases}$$

Vamos simbolizar a simetrização e a anti-simetrização totais de um tensor  $q$ -covariante, respectivamente, por<sup>5</sup>:

$$T_{(\alpha_1 \dots \alpha_q)} \equiv q! (ST)_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \quad (\text{A.7})$$

$$T_{[\alpha_1 \dots \alpha_q]} \equiv q! (AT)_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \quad (\text{A.8})$$

Em particular, no caso de um tensor do tipo 2-covariante :

$$T_{(\alpha\beta)} = T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} \quad (\text{A.9})$$

$$T_{[\alpha\beta]} = T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} \quad (\text{A.10})$$

<sup>5</sup>Esta definição difere da empregada pela maioria dos autores citados nas referências, para os quais a simetrização e a anti-simetrização totais de um tensor  $q$ -covariante, são definidas como:

$$T_{(\alpha_1 \dots \alpha_q)} \equiv (ST)_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$$

$$T_{[\alpha_1 \dots \alpha_q]} \equiv (AT)_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$$

Adotamos, neste trabalho, a definição empregada em (NOVELLO; SALIM, 1983).

As mesmas definições serão empregadas para a simetrização e anti-simetrização totais de tensores  $p$ -contravariantes. As simetrização e anti-simetrização parciais são definidas de modo semelhante.

Sejam  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  duas variedades diferenciáveis. Um mapeamento diferenciável  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  permite definir a *derivada*  $\varphi_* : T_m \mathcal{M} \rightarrow T_{\varphi(m)} \mathcal{N}$  como o mapeamento que associa ao vetor  $\mathbf{X}_{C(\tau)}$ , tangente a uma curva  $C$  em  $\mathcal{M}$  no ponto  $C(\tau)$ , o vetor  $\varphi_* \mathbf{X}_{\varphi(C(\tau))}$ , tangente à curva  $\varphi(C)$  em  $\mathcal{N}$  no ponto  $\varphi(C(\tau))$ , isto é:

$$(\varphi_* \mathbf{X})_{C(\tau)} = (\varphi \circ C)'(\tau)$$

Analogamente, pode-se definir a *coderivada*  $\varphi^* : T_{\varphi(C(\tau))} \mathcal{N}^* \rightarrow T_{C(\tau)} \mathcal{M}^*$  como o mapeamento que associa ao covetor  $\theta_{\varphi(C(\tau))}$  em  $T_{\varphi(C(\tau))} \mathcal{N}^*$  o covetor  $\varphi^* \theta_{C(\tau)}$  em  $T_{C(\tau)} \mathcal{M}^*$ , definido pela relação:

$$(\varphi^* \theta)_m(\mathbf{X}) = \theta_{\varphi(m)}(\varphi_* \mathbf{X}) .$$

Seja  $V$  o campo tangente a uma curva  $C$  em  $\mathcal{U}$ :

$$V^\alpha(\tau) = \frac{d}{d\tau} C^\alpha(\tau) \quad (\text{A.11})$$

Um campo  $X$  em  $\mathcal{U}$  é a *extensão* do campo tangente  $V$  se  $X$ , restrito à curva  $C$ , coincide com  $V$ , isto é,  $X|_C = V$ . A curva  $C$ , nesse caso, é chamada *curva integral* do campo  $X$ . O campo  $X$  define uma família de difeomorfismos<sup>6</sup>  $\varphi_\tau : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$  em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$ , para  $\tau$  pequeno. Em termos da derivada  $\varphi_{\tau*} : T_m \mathcal{M} \rightarrow T_{\varphi_\tau(m)} \mathcal{M}$ , a *derivada de Lie* de um campo vetorial  $Y$  em  $\mathcal{U}$ , em relação a uma curva  $C$ , no ponto  $m \in \mathcal{U}$ , é o campo vetorial  $\mathcal{L}_X Y|_m \in T \mathcal{M}_m$ , definido por:

$$\mathcal{L}_X Y|_m \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (\varphi_{\tau*}^{-1} Y_{\varphi_\tau(m)} - Y_m) \quad (\text{A.12})$$

em particular:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Analogamente, a derivada de Lie de um campo vetorial covariante  $\theta$  em  $\mathcal{U}$ , em relação a uma curva  $C$ , no ponto  $m \in \mathcal{U}$ , é o campo covetorial  $\mathcal{L}_X \theta|_m \in T \mathcal{M}_m^*$  definido por:

$$\mathcal{L}_X \theta|_m \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (\varphi_\tau^* \theta_{\varphi_\tau(m)} - \theta_m) \quad (\text{A.13})$$

No caso em que a coderivada  $\varphi^*$  admite inversa, é possível construir um mapeamento  $\tilde{\varphi}_* : \otimes^p T_m \mathcal{M} \otimes^q T_m \mathcal{M}^* \rightarrow \otimes^p T_{\varphi(m)} \mathcal{M} \otimes^q T_{\varphi(m)} \mathcal{M}^*$ , que associa a um tensor  $\mathbf{T}_m \in \otimes^p T_m \mathcal{M} \otimes^q T_m \mathcal{M}^*$

<sup>6</sup>Isto é, uma família de mapeamentos  $\varphi_\tau$  diferenciáveis e com inversa  $\varphi_\tau^{-1}$  diferenciável.

no ponto  $m$ , um tensor  $\tilde{\Phi}_* \mathbf{T}_{\varphi(m)} \in \otimes^p T_{\varphi(m)} \mathcal{M} \otimes^q T_{\varphi(m)} \mathcal{M}$  no ponto  $\varphi(m)$ . Nesse caso, pode-se definir a derivada de Lie de um campo tensorial, em termos de uma família de difeomorfismos  $\varphi_\tau$ , no ponto  $m$ , de forma análoga à feita para campos vetoriais e covetoriais. Ou seja, a derivada de Lie do campo tensorial  $\mathbf{T}$  em  $\mathcal{U}$ , em relação a uma curva  $C$ , no ponto  $m \in \mathcal{U}$ , é o campo tensorial  $\mathcal{L}_X \mathbf{T}|_m \in \otimes^p T_m \mathcal{M} \otimes^q T_m \mathcal{M}^*$  definido por:

$$\mathcal{L}_X \mathbf{T}|_m \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (\tilde{\Phi}_{\tau*}^{-1} \mathbf{T}_{\varphi_\tau(m)} - \mathbf{T}_m). \quad (\text{A.14})$$

Um tensor  $\omega$  do tipo  $p$ -contravariante, totalmente anti-simétrico,  $\omega = A\omega$ , é chamado de uma  $p$ -forma diferencial, ou simplesmente  $p$ -forma. Em particular, uma 1-forma é simplesmente um campo covetorial. O chamado *fibrado  $p$ -exterior* é o subespaço do fibrado tensorial  $p$ -covariante,  $\wedge^p T \mathcal{M}^* \subset \otimes^p T \mathcal{M}^*$ , cujos elementos são  $p$ -formas. Definindo-se o produto tensorial anti-simetrizado, ou *produto exterior*,  $\wedge$ :

$$dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \equiv \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_p}$$

uma  $p$ -forma  $\omega$  pode ser escrita, em componentes locais, como:

$$\omega|_{\mathcal{U}} = \frac{1}{p!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \quad (\text{A.15})$$

Alternativamente, uma  $p$ -forma pode ser simbolizada, em termos de suas componentes, simplesmente por:

$$\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \frac{1}{p!} \omega_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]} \quad (\text{A.16})$$

Se a variedade  $\mathcal{M}^n$  for orientável, podemos definir a chamada *forma volume* de  $\mathcal{M}^n$  como a  $n$ -forma:

$$d^n x|_{\mathcal{U}} \equiv \frac{1}{n!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n} \quad (\text{A.17})$$

onde  $g \equiv \det(g_{\sigma\rho})$  e  $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^1 \dots n$  são as componentes do tensor de Levi-Civita.

Em termos da forma volume em  $\mathcal{M}^n$ , define-se, em coordenadas locais, o chamado *mapeamento dual de Hodge*  $\star : \wedge^p T \mathcal{M}^* \rightarrow \wedge^{n-p} T \mathcal{M}^*$ , como o mapeamento que associa a uma  $p$ -forma  $\omega$  em  $\mathcal{M}^n$  uma  $(n-p)$ -forma em  $\mathcal{M}^n$  chamada *dual (de Hodge) de  $\omega$* :

$$\star : \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \mapsto \frac{1}{(n-p)!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_p \alpha_{p+1} \dots \alpha_n} \omega^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$$

ou seja, o dual de  $\omega$  tem a expressão local:

$$\star \omega|_{\mathcal{U}} = \frac{1}{(n-p)!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_p \alpha_{p+1} \dots \alpha_n} \omega^{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}$$

Estamos particularmente interessados em variedades pseudo-Riemannianas de dimensão  $n = 4$ . Nesse caso, o dual, por exemplo, de uma 2-forma em  $\mathcal{M}^4$  tem a seguinte expressão local:

$$\omega_{\mu\nu}^* \equiv (\star \omega)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \omega^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.18})$$

A integral de uma  $n$ -forma  $\omega$  pode ser definida, em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$ , como:

$$\int_{\mathcal{U}} \omega \equiv \int_{\phi(\mathcal{U})} \omega_{1\dots n} \circ \phi^{-1} dx^1 \dots dx^n \quad (\text{A.19})$$

onde a última expressão é a integral ordinária no  $\mathbb{R}^n$ . Se a variedade for paracompacta e orientável a definição de integral de uma forma pode ser estendida a toda a variedade definindo-se uma *partição da unidade*<sup>7</sup> em  $\mathcal{M}$ , isto é, um conjunto de mapeamentos diferenciáveis não-negativos  $\{\varphi_{\mathcal{U}}\}$ , associados a um sistema localmente finito de cartas coordenadas  $\{(\mathcal{U}, \phi)\}$ , e tais que:

**(PU1)** Para todo  $\mathcal{U}$ , o mapeamento  $\varphi_{\mathcal{U}}$  anula-se fora de  $\mathcal{U}$ , dizemos que os  $\varphi_{\mathcal{U}}$  têm suporte compacto;

**(PU2)**  $\sum_{\mathcal{U}} \varphi_{\mathcal{U}} = 1$ .

A integral de uma forma  $\omega$  em  $\mathcal{M}$  é definida como:

$$\int_{\mathcal{M}} \omega \equiv \sum_{\mathcal{U}} \int_{\mathcal{U}} \varphi_{\mathcal{U}} \omega \quad (\text{A.20})$$

A forma volume em  $\mathcal{M}$  permite definir a integral de um mapeamento  $f$  em  $\mathcal{M}$ :

$$\int_{\mathcal{M}} f d^n x. \quad (\text{A.21})$$

### A.3 Tensor Métrico

<sup>7</sup>A discussão detalhada da técnica empregada para definir a integral globalmente, pode ser encontrada em (DO CARMO, 2005), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982), (DE FELICE; CLARKE, 1990) e (HAWKING; ELLIS, 1973).

O *campo tensorial métrico*, ou simplesmente *tensor métrico*, é definido como o campo tensorial 2-covariante  $\mathbf{g}$  em  $\mathcal{M}$ , simétrico e não-degenerado, isto é, para um ponto  $m$  qualquer e um vetor  $\mathbf{Y}_m$  em  $T\mathcal{M}_m$  arbitrário,  $\mathbf{g}_m(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{X}_m = 0$ . Definindo-se as componentes  $g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{g}(\partial_\alpha, \partial_\beta)$ , o tensor métrico tem a seguinte expressão local, em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$ :

$$\mathbf{g}|_{\mathcal{U}} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

ou ainda, denotado o tensor métrico, restrito à uma vizinhança  $\mathcal{U}$ , pelo símbolo  $ds^2$ :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta . \quad (\text{A.22})$$

onde  $dx^\alpha dx^\beta \equiv \frac{1}{2}(dx^\alpha \otimes dx^\beta + dx^\beta \otimes dx^\alpha)$  é a forma simetrizada de  $dx^\alpha \otimes dx^\beta$ . Alternativamente, podemos denotar as componentes do tensor métrico por  $2g_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}$ . A não-degenerescência da métrica implica que a matriz  $(g_{\alpha\beta})$  é não singular, e portanto, admite inversa. A matriz inversa será denotada por  $(g^{\alpha\beta})$ , ou seja:

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\theta} = \delta_\alpha^\theta$$

Pode-se definir o campo covetorial  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{X}, \cdot)$ , associado a um campo vetorial  $\mathbf{X}$ , chamado *dual algébrico* de  $\mathbf{X}$ , que tem a expressão local:

$$\mathbf{x}|_{\mathcal{U}} = X_\alpha dx^\alpha \quad (\text{A.23})$$

onde as coordenadas  $X_\alpha$  são definidas pela relação:

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|_{\mathcal{U}} = g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta = X_\beta Y^\beta$$

em outras palavras, define-se:

$$X_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} X^\beta . \quad (\text{A.24})$$

Uma métrica é dita *positivo-definida* em  $\mathcal{M}$  quando  $\mathbf{g}_m(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \geq 0$ , para todo  $\mathbf{X}_m$  e todo ponto  $m$ . Para métricas não positivo-definidas, define-se a *assinatura da métrica* como o símbolo  $(+ \cdots + - \cdots -)$  que indica o número de autovalores  $+1$  e  $-1$  da matriz  $(g_{\alpha\beta})_m = (\mathbf{g}_m(\partial_\alpha, \partial_\beta))$  que representa a métrica  $\mathbf{g}_m$  em termos da base ortonormal natural  $\{\partial_{\alpha|m}\}$  do espaço tangente em cada ponto  $m$  da variedade. Em outras palavras, em termos desta base, a matriz que representa  $\mathbf{g}_m$  tem a forma  $(g_{\alpha\beta})_m = \text{diag}(+1, \cdots, +1, -1, \cdots, -1)$ , para cada ponto  $m$ .

Variedades com uma métrica positivo-definida são chamadas *variedades Riemannianas* e variedades com métrica não-positivo-definida são chamadas *variedades pseudo-Riemannianas*. Variedades pseudo-Riemannianas cuja métrica tem a assinatura  $(+ - \cdots -)$ , isto é, que possuem apenas um autovalor positivo, são chamadas *variedades Lorentzianas*. A métrica, nesse caso, é



a chamada *métrica Lorentziana*. Variedades Lorentzianas servem de base para a construção do modelo matemático do espaço-tempo.

Vetores em uma variedade Lorentziana  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  podem ser divididos em três classes. Um vetor  $X_m$  em  $T\mathcal{M}_m$  será do tipo *tempo, nulo ou espaço*, se  $\mathbf{g}_m(X, X) > 0$ ,  $\mathbf{g}_m(X, X) = 0$  ou  $\mathbf{g}_m(X, X) < 0$ , respectivamente. Um campo vetorial  $X$  será do tipo tempo, nulo ou espaço, se  $\mathbf{g}(X, X) > 0$ ,  $\mathbf{g}(X, X) = 0$  ou  $\mathbf{g}(X, X) < 0$ , respectivamente, para todo  $m \in \mathcal{M}$ . Uma curva é dita do gênero tempo, nulo ou espaço, se o campo tangente à curva é do gênero tempo, nulo ou espaço, respectivamente.

## A.4 Hipersuperfícies

Seja o mapeamento entre duas variedades diferenciáveis  $\mathcal{H}^s$  e  $\mathcal{M}^n$  de dimensões  $s$  e  $n$ , respectivamente, com  $s \leq n$ :

$$\varphi : \mathcal{H}^s \rightarrow \mathcal{M}^n$$

Se  $\varphi$  for um difeomorfismo, isto é, diferenciável e com inversa também diferenciável, a imagem  $\varphi(\mathcal{H}^s)$  é chamada uma *subvariedade* de  $\mathcal{M}^n$ . Daqui para frente  $\mathcal{H}^s$  será identificado com sua imagem  $\varphi(\mathcal{H}^s)$ . Uma subvariedade  $\mathcal{H}^s$  de dimensão  $s = n - 1$  é chamada uma *hipersuperfície* de  $\mathcal{M}^n$ .

O vetor  $N_m$  em  $T_m\mathcal{M}$  tal que, para todo  $X_m$  em  $T_m\mathcal{H}$ ,  $\mathbf{g}_m(X, N) = 0$  é chamado vetor normal à hipersuperfície  $\mathcal{H}$  no ponto  $m$ .

Se  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{H}$  forem orientáveis, é possível definir um campo  $N$  em  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathbf{g}(N, X) = 0$  para todo  $X$  em  $\mathcal{H}$ , chamado *campo normal* à  $\mathcal{H}$ .

Isto permite classificar as hipersuperfícies de uma variedade Lorentziana nos tipos tempo, nulo ou espaço, conforme  $\mathbf{g}(N, N) = g_{\alpha\beta}N^\alpha N^\beta > 0$ ,  $\mathbf{g}(N, N) = g_{\alpha\beta}N^\alpha N^\beta = 0$  ou  $\mathbf{g}(N, N) = g_{\alpha\beta}N^\alpha N^\beta < 0$ , respectivamente.

No caso em que  $\mathbf{g}(N, N) \neq 0$ , o mapeamento  $\varphi^*$  admite inversa  $\varphi^{*-1}$ . A *métrica induzida* em  $\mathcal{H}$  será definida como  $\mathbf{h} \equiv \varphi^{*-1}(\varphi^*\mathbf{g})$ . Em termos da 1-forma  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{g}(N, \cdot)$ , pode-se escrever a métrica  $\mathbf{h}$  da hipersuperfície  $\mathcal{H}$  na forma:

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta \tag{A.25}$$

onde  $N_\alpha = g_{\alpha\beta}N^\beta$  são as componentes da forma normal  $\mathbf{n}$ . O campo normal, nesse caso, pode

ser escolhido na forma normalizada  $\mathbf{g}(N, N) = \pm 1$ . A partir da métrica  $\mathbf{h}$ , pode-se construir o projetor:

$$h_{\beta}^{\alpha} = g^{\alpha\mu} h_{\mu\beta} \quad (\text{A.26})$$

em termos do qual, a restrição  $X = \tilde{X}|_{\mathcal{H}}$  de um campo  $\tilde{X}$  em  $\mathcal{M}$  à hipersuperfície  $\mathcal{H}$ , pode ser decomposta como:

$$X^{\alpha} = h_{\beta}^{\alpha} X^{\beta} + N_{\beta} X^{\beta} N^{\alpha} . \quad (\text{A.27})$$

Analogamente, a restrição  $\omega = \tilde{\omega}|_{\mathcal{H}}$  de um campo covetorial  $\tilde{\omega}$  em  $\mathcal{M}$  à hipersuperfície  $\mathcal{H}$ , admite a decomposição:

$$\omega_{\alpha} = h_{\alpha}^{\beta} \omega_{\beta} + \omega_{\beta} N^{\beta} N_{\alpha} . \quad (\text{A.28})$$

Estas definições podem ser diretamente estendidas a campos tensoriais do tipo  $(p, q)$  arbitrários, em  $\mathcal{M}$ . A restrição  $T = \tilde{T}|_{\mathcal{H}}$  de um campo tensorial do tipo  $(2, 1)$ , por exemplo, pode ser decomposta como:

$$T_{\alpha\beta}^{\gamma} = h_{\alpha}^{\rho} h_{\beta}^{\sigma} h_{\lambda}^{\gamma} T_{\rho\sigma}^{\lambda} + N^{\rho} N^{\sigma} N_{\lambda} T_{\rho\sigma}^{\lambda} N_{\alpha} N_{\beta} N^{\gamma} . \quad (\text{A.29})$$

De especial interesse são as hipersuperfícies do tipo espaço, isto é, aquelas tais que o campo normal satisfaz  $\mathbf{g}(N, N) > 0$ . Vamos denotar hipersuperfícies espaciais por  $\mathcal{S}$ . Como mencionado antes, o campo normal pode ser escolhido na forma normalizada:

$$\mathbf{g}(N, N) = g_{\alpha\beta} N^{\alpha} N^{\beta} = +1 .$$

Um campo tangente a uma hipersuperfície espacial  $\mathcal{S}$  será denotado por  $\hat{X}$ . Em particular,  $\hat{X}$  pode ser definido em termos da projeção da restrição  $X$  de um campo em  $\mathcal{M}$  à hipersuperfície  $\mathcal{S}$ , em componentes:

$$\hat{X}^{\alpha} \equiv h_{\beta}^{\alpha} X^{\beta} . \quad (\text{A.30})$$

As projeções espaciais de campos covetoriais e campos tensoriais são definidas de forma análoga.

## *APÊNDICE B – Perturbações Invariantes de Calibre*

<sup>1</sup>Seja uma família parametrizada de variedades 4-dimensionais  $\{\mathcal{M}_\varepsilon^4\}$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ , mergulhadas em uma variedade 5-dimensional  $\mathcal{N}^5$ , onde cada elemento  $\mathcal{M}_\varepsilon^4$  da família representa um espaço-tempo e o espaço-tempo “base”, isto é, não-perturbado, denotado por  $\mathcal{M}_0^4$ , é o elemento que corresponde a  $\varepsilon = 0$ . Os pontos do espaço-tempo base podem ser identificados com pontos do espaço-tempo perturbado, definindo-se um campo vetorial  $\mathbf{K}$  em  $\mathcal{N}^5$ , normal às subvariedades da família  $\{\mathcal{M}_\varepsilon^4\}$ . Isto permite identificar pontos de uma mesma curva integral  $\Gamma(\varepsilon)$  do campo  $\mathbf{K}$ :

$$K^N(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \Gamma^N(\varepsilon) \quad (\text{B.1})$$

sendo  $N \in \{0, \dots, 4\}$ . Seja  $\mathbf{T}_\varepsilon$  um campo tensorial qualquer em  $\mathcal{M}_\varepsilon^4$ , que representa uma certa quantidade física. Da definição da derivada de Lie (A.14), obtemos, no ponto  $\Gamma(0)$ :

$$\mathcal{L}_K \mathbf{T}|_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{\varphi}_{\varepsilon*}^{-1} \mathbf{T}_\varepsilon - \mathbf{T}_0)$$

ou seja:

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon*}^{-1} \mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{T}_0 + \varepsilon \mathcal{L}_K \mathbf{T}|_0 + O(\varepsilon^2) \quad (\text{B.2})$$

onde  $\varphi_\varepsilon$  é uma família de difeomorfismos em  $\mathcal{N}^5$  parametrizada por  $\varepsilon$ , e  $\delta \mathbf{T} \equiv \varepsilon \mathcal{L}_K \mathbf{T}|_0$  é a chamada *perturbação linear* de  $\mathbf{T}_0$ , dependente da escolha do campo  $\mathbf{K}$ , isto é, da escolha de um “calibre”. Vamos denotar  $\mathbf{T}_\varepsilon \equiv \tilde{\varphi}_{\varepsilon*}^{-1} \mathbf{T}_\varepsilon$ , por simplicidade. Usando estas definições, a (B.2) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{T}_0 + \delta \mathbf{T} \quad (\text{B.3})$$

para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

As condições para que a perturbação de uma quantidade qualquer seja invariante de calibre foram examinadas por Stewart e Walker (STEWART; WALKER, 1974). A diferença entre duas

---

<sup>1</sup>Seguiremos aqui a exposição feita por Stewart (STEWART, 1990).

escolhas de calibre  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{S}$  é dada por:

$$\Delta\delta\mathbf{T} \equiv \varepsilon\mathcal{L}_{\mathbf{K}-\mathbf{S}}\mathbf{T}|_0 \quad (\text{B.4})$$

ou, em termos do campo  $\mathbf{P} \equiv \varepsilon(\mathbf{K}-\mathbf{S})$ , definido em cada  $\mathcal{M}_\varepsilon^4$ :

$$\Delta\delta\mathbf{T} = \mathcal{L}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{T}|_0 \quad (\text{B.5})$$

Segue daí que  $\delta\mathbf{T}$  será invariante de calibre, isto é,  $\Delta\delta\mathbf{T} = 0$ , se e somente se  $\mathcal{L}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{T}|_0 = 0$ , para um vetor  $\mathbf{P}_0$  arbitrário em  $\mathcal{M}_0^4$ . Isso só ocorrerá se  $\mathbf{T}_0 = 0$ , ou  $\mathbf{T}_0$  for um campo escalar constante, ou  $\mathbf{T}_0$  for uma combinação linear de produtos de deltas de Kronecker  $\delta_\alpha^\beta$ , com coeficientes constantes. Esse resultado é conhecido como *lema de Stewart*.

## *Referências Bibliográficas*

- ARNOLD, V. *Ordinary Differential Equations*. Berlim: Springer, 1988.
- CHOQUET-BRUHAT, Y.; DEWITT-MORETTE, C.; DILLARD-BLEICK, M. *Analysis, Manifolds and Physics*. Amsterdam: North Holland, 1982.
- DE FELICE, F.; CLARKE, C. *Relativity on Curved Manifolds*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- DE LORENZI, V. et al. Non-linear Electrodynamics and FRW Cosmology. *Physical Review D*, n. 65, p. 063501, 2002.
- DO CARMO, M. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- EISENHART, L. *Riemannian Geometry*. Princeton: Princeton University Press, 1949.
- ELLIS, G. F. R. General Relativity and Cosmology, Course XLVII. In: *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*. London: Academic, 1971. p. 104.
- HAWKING, S. Perturbations of an Expanding Universe. *Astrophysical Journal*, n. 145, p. 544, 1966.
- HAWKING, S.; ELLIS, G. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
- JORDAN, P.; EHLERS, J.; KUNDT, W. Strenge Lösungen der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie. *Akad. Swiss. Mainz. Abh. Math-Nat. Kl. Jahg.*, n. 2, 1960.
- KOLB, E. W.; TURNER, M. S. *The Early Universe*. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1990.
- LICHNEROWICZ, A. Ondes et radiations électromagnétiques et gravitationnelles en Relativité General. *Ann. Math. Pura Appl.*, n. 50, p. 1, 1960.
- LIFSHITZ, E.; KHALATNIKOV, I. Investigations in relativistic cosmology. *Advances in Physics*, n. 12, p. 185, 1963.
- NOVELLO, M. *Tópicos de Cosmologia Relativista, Monografia XXXIV*. Rio de Janeiro: CBPF, 1974.
- NOVELLO, M.; SALIM, J. Non-equilibrium Relativistic Cosmology. *Fundamentals of Cosmic Physics*, n. 8, p. 201, 1983.
- NOVELLO, M. et al. Minimal closed set of observables in the theory of cosmological perturbations II. *Physical Review D*, n. 52, p. 730, 1995.

PENROSE, R. *Techniques of Differential Topology in Relativity*. Bristol: Society of Industrial and Applied Mathematics, 1972.

RAYCHAUDHURI, A. Relativistic Cosmology. *Phys. Rev.*, n. 98, p. 1123, 1955.

STEWART, J. Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models. *Classical and Quantum Gravity*, n. 7, p. 1169, 1990.

STEWART, J.; WALKER, M. Perturbations of spacetimes in General Relativity. *Proceedings of the Royal Society A*, n. 341, p. 49, 1974.

TOLMAN, R. C. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford: Oxford University Press, 1950.

WALD, R. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.