

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Faculdade de Ciências Econômicas  
Programa de Pós-Graduação em Economia

Análise quantitativa da volatilidade entre os índices Dow  
Jones, IBovespa e S&P 500

Daniel Costa Lopes

**Porto Alegre**  
**2006**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Faculdade de Ciências Econômicas  
Programa de Pós-Graduação em Economia

Análise quantitativa da volatilidade entre os índices Dow  
Jones, IBovespa e S&P 500

Daniel Costa Lopes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Marcelo Savino Portugal

**Porto Alegre**

**2006**

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
Responsável: Biblioteca Gládis W. do Amaral, Faculdade de Ciências Econômicas da  
UFRGS

L864a

Lopes, Daniel Costa

Análise quantitativa da volatilidade entre os índices Dow Jones, Ibovespa e S&P 500 / Daniel Costa Lopes. – Porto Alegre, 2006.  
131 f. : il.

Orientador: Marcelo Savino Portugal.

Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, 2006.

1. Mercado financeiro : Volatilidade. 2. Previsão. 3. Preço de ações. 3. Modelo econométrico. I. Portugal, Marcelo Savino. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Ciências Econômicas. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

CDU 336.76

## **RESUMO**

A volatilidade é uma medida de incerteza quanto às variações dos preços de ativos. Este trabalho tem como objetivo analisar a volatilidade, através dos diversos modelos da família GARCH, de três índices de mercados financeiros: Dow Jones, IBovespa e S&P 500. Com este intuito, foram aqui utilizadas técnicas univariadas e multivariadas, bem como análises de Causalidade de Granger. Através das duas primeiras ferramentas, escolhemos o melhor modelo para cada um destes casos. Usando a terceira ferramenta, concluímos que o IBovespa é significativamente influenciado pela abertura do Dow Jones e do S&P500. Por outro lado, mostramos que a abertura do IBovespa não impacta, nem à 10% de significância, os índices Dow Jones e S&P 500. Também concluímos que a incorporação de um dos índices americanos ao modelo do IBovespa torna-o mais significativo, uma vez que o mercado acionário brasileiro é impactado pelos dois índices citados anteriormente. Desta forma, este trabalho mostra que os modelos GARCH multivariados aparentam ser mais eficazes na estimação da volatilidade de ativos financeiros do que os modelos GARCH univariados.

Palavras-chave: GARCH Univariado. GARCH Multivariado. Causalidade de Granger. IBovespa. S&P 500. Dow Jones.

## **ABSTRACT**

The volatility is a measure of the uncertainty of variations of asset prices. The main goal of this work is to analyze the volatility, by the use of several models of the GARCH family, of three financial market indexes: Dow Jones, IBovespa and S&P 500. With this purpose, we use univariate and multivariate techniques, as well as Granger Causality. Using these first two tools, we choose the best model for each one of these cases. Using the third tool, we conclude that the IBovespa is significantly influenced by the opening of the Dow Jones and the S&P 500 indexes. On the other hand, we show that the opening of the IBovespa does not impact, not even at 10% of significance, the Dow Jones and S&P 500 indexes. We also conclude that incorporation of one of these American indexes to the model involving IBovespa makes it more significant, once the Brazilian Stock Market is impacted by the two American indexes we mention before. This work shows that multivariate GARCH models seem to be more efficient in the volatility estimation of financial assets than univariate GARCH models.

Keywords: Univariate GARCH. Multivariate GARCH. Granger Causality. IBovespa. S&P 500. Dow Jones.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>MODELOS GARCH UNIVARIADO E MULTIVARIADO .....</b>	<b>18</b>
2.1	ARIMA E GARCH.....	18
2.2	OUTROS MODELOS DA FAMÍLIA GARCH.....	25
2.2.1	Modelo IGARCH ( <i>Integrated</i> GARCH).....	26
2.2.2	Modelo GARCH-M (GARCH <i>in mean</i> ) .....	27
2.2.3	Modelo EGARCH ( <i>Exponencial</i> GARCH).....	27
2.2.4	<b>MODELO TGARCH (THRESHOLD GARCH) .....</b>	<b>28</b>
2.2.5	Modelo PGARCH ( <i>Power</i> GARCH) .....	29
2.3	MODELOS GARCH MULTIVARIADO .....	29
2.3.1	Uso das Correlações .....	30
2.3.2	Decomposição de Cholesky .....	32
2.3.3	Modelos GARCH Multivariados.....	37
2.3.3.1	Estimação da Covariância Exponencialmente Ponderada ( <i>Exponentially Weighted Moving Averages - EWMA</i> ).....	37
2.3.3.2	Modelo <i>Vector Error Correction</i> Diagonal (VEC Diagonal) .....	39
2.3.3.3	Modelo Baba, Engle, Kraf e Kroner (BEKK) .....	41
2.3.4	Modelos GARCH para Retornos Bivariados.....	42
2.3.4.1	Modelo de Correlação Constante .....	42
2.4	VECTOR AUTOREGRESSION (VAR) .....	44
2.4.1	Causalidade de Granger.....	46
<b>3</b>	<b>MODELOS EMPÍRICOS DE VOLATILIDADE.....</b>	<b>48</b>
3.1	GARCH UNIVARIADO.....	48
3.1.1	MORAIS e PORTUGAL (1998).....	48
3.1.2	SILVEIRA, BARCINSKI, ALMEIDA e GARCIA (1997) .....	49
3.1.3	ZIEGELMANN e PEREIRA (1997).....	50
3.1.4	KARANASOS e KIM (2000) .....	51
3.1.5	UNE e PORTUGAL (2005) .....	51
3.2	GARCH MULTIVARIADO .....	53
3.2.1	MANERA (2003) .....	53
3.2.2	GALVÃO, PORTUGAL e RIBEIRO (2000) .....	54
3.2.3	TSE e TSUI (2000).....	55
3.2.4	KLAASSEN (1999).....	56
3.2.5	HO e TSUI (2004) .....	57
<b>4</b>	<b>ANÁLISE QUANTITATIVA DA VOLATILIDADE ENTRE OS ÍNDICES DOW JONES, IBOVESPA E S&amp;P 500 .....</b>	<b>60</b>
4.1	ANÁLISE DOS DADOS.....	60
4.2	GARCH UNIVARIADO.....	64
4.2.1	Dow Jones .....	65

4.2.2 IBovespa .....	67
4.2.3 S&P 500.....	69
4.3 GARCH BIVARIADO .....	71
4.3.1 GARCH Bivariado IBovespa x Dow Jones.....	76
4.3.2 GARCH Bivariado IBovespa x S&P 500.....	81
4.3.3 GARCH Bivariado Dow Jones x S&P 500 .....	86
4.3.4 Dummies no Modelo GARCH Bivariado IBovespa x Dow Jones.....	93
4.3.5 Dummies no Modelo GARCH Bivariado IBovespa x S&P 500.....	94
4.3.6 Dummies no Modelo GARCH Bivariado Dow Jones x S&P 500 .....	95
4.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS UNIVARIADOS .....	96
4.5 CAUSALIDADE DE GRANGER.....	98
4.6 COMPARAÇÃO DOS MODELOS BIVARIADOS COM OS MODELOS UNIVARIADOS.....	100
<b>5 CONCLUSÃO.....</b>	<b>105</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>109</b>
APÊNDICE A – GRÁFICOS DA FAC E DA FACP .....	114
APÊNDICE A1 – Dow Jones.....	114
APÊNDICE A2 – IBovespa .....	115
APÊNDICE A3 – S&P 500.....	116
APÊNDICE B – ESTIMAÇÃO DOS MODELOS E ANÁLISES DE RESÍDUOS .....	118
APÊNDICE B1 – Dow Jones .....	118
APÊNDICE B2 - IBovespa .....	120
APÊNDICE B3 – S&P 500 .....	122
APÊNDICE C – ANÁLISE GARCH BIVARIADO .....	124
Apêndice C1 – IBovespa x Dow Jones .....	124
APÊNDICE C2 – IBovespa x S&P 500.....	126
APÊNDICE C3 – Dow Jones x S&P 500 .....	128
APÊNDICE D – ANÁLISE GARCH BIVARIADO COM DUMMIES.....	130
APÊNDICE D1 – IBovespa x Dow Jones.....	130
APÊNDICE D2 – IBovespa x S&P 500.....	132
APÊNDICE D3 – Dow Jones x S&P 500 .....	134

## SUMÁRIO DE FIGURAS

Figura 1 - Série dos retornos do índice Dow Jones.....	14
Figura 2 - Série dos retornos do índice IBovespa.....	15
Figura 3 - Série dos retornos do índice S&P 500.....	16
Figura 4.1.1 - (a) Histograma e estatísticas da série Dow Jones	
(b) Histograma e estatísticas da série IBovespa	
(c) Histograma e estatísticas da série S&P 500.....	61
Figura 5 - (a) Série dos Retornos do índice Ibovespa	
(b) Série dos Retornos do índice Dow Jones.....	72
Figura 6 - (a) Série dos Retornos do índice Ibovespa	
(b) Série dos Retornos do índice S&P 500.....	73
Figura 7 - (a) Série dos Retornos do índice Dow Jones	
(b) Série dos Retornos do índice S&P 500.....	74
Figura 8 - (a) Função de Autocorrelação da série IBovespa ao quadrado	
(b) Função de Correlação Cruzada das séries IBovespa x Dow Jones ao quadrado	
(c) Função de Correlação Cruzada das séries Dow Jones x IBovespa ao quadrado	
(d) Função de Autocorrelação da série Dow Jones ao quadrado.....	75
Figura 9 - (a) Função de Autocorrelação da série IBovespa ao quadrado	
(b) Função de Correlação Cruzada das séries IBovespa x S&P 500 ao quadrado	
(c) Função de Correlação Cruzada das séries Dow Jones x S&P 500 ao quadrado	
(d) Função de Autocorrelação da série S&P 500 ao quadrado.....	75
Figura 10 - (a) Função de Autocorrelação da série Dow Jones ao quadrado	
(b) Função de Correlação Cruzada das séries Dow Jones x S&P 500 ao quadrado	
(c) Função de Correlação Cruzada das séries S&P 500 x Dow Jones ao quadrado	
(d) Função de Autocorrelação da série Dow Jones ao quadrado.....	76
Figura 11 - Resíduos do modelo DVEC(1,1).....	78
Figura 12 - Resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1).....	78
Figura 13 - Gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1).....	79
Figura 14 - Volatilidade condicional multivariada do modelo DVEC(1,1).....	80
Figura 15 - Correlação Cruzada entre os índices IBovespa e Dow Jones.....	80
Figura 16 - Resíduos do modelo DVEC(1,1).....	83



Figura 17 - Resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1).....	83
Figura 18 - Gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1).....	84
Figura 19 - Volatilidade condicional multivariada do modelo DVEC(1,1).....	85
Figura 20 - Correlação Cruzada entre IBovespa e S&P 500.....	85
Figura 21 - Resíduos do modelo BEKK(2,1).....	89
Figura 22 - Resíduos padronizados do modelo BEKK(2,1).....	89
Figura 23 - Gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo BEKK(2,1).....	90
Figura 24 - Volatilidade condicional multivariada do modelo BEKK(2,1).....	91
Figura 25 - Correlação Cruzada entre os índices Dow Jones e S&P 500.....	91
Figura 26 - (a) Simulação do Dow Jones (b) Simulação do IBovespa. (c) Simulação do S&P 500.....	97
Figura 27 - (a) Simulação para o IBovespa. (b) Simulação para o Dow Jones.....	100
Figura 28 - (a) Simulação para o IBovespa. (b) Simulação para o S&P 500.....	102
Figura 29 - (a) Simulação para o Dow Jones. (b) Simulação para o S&P 500.....	103

## SUMÁRIO DE TABELAS

Tabela 1 - Tabela do Coeficiente de Correlação entre as séries.....	17
Tabela 2 - Análise de modelos GARCH univariado para a série dos retornos do índice Dow Jones.....	65
Tabela 3 - Dados realizados e seus respectivos preditos no modelo TGARCH(2,1) para o índice Dow Jones.....	67
Tabela 4 - Análise de modelos GARCH univariados para a série dos retornos do índice IBovespa.....	67
Tabela 5 - Dados realizados e seus respectivos preditos no modelo TGARCH(2,1) para o índice.....	69
Tabela 6 - Análise de modelos GARCH univariado para a série dos retornos do índice S&P 500.....	70
Tabela 7 - Dados realizados e seus respectivos preditos no modelo TGARCH(2,1) para o índice S&P500.....	71
Tabela 8 - Seleção de modelos para as séries do IBovespa e Dow Jones.....	77
Tabela 9 - Teste Portmanteau Multivariado (Tipo Ljung-Box) para a série dos índices IBovespa x Dow Jones.....	77
Tabela 9 - Matriz de Correlação Condicional Constante do modelo DVEC(1,1).....	81
Tabela 10 - Seleção de modelos para as séries dos índices IBovespa e S&P 500.....	81
Tabela 11 - Teste Portmanteau Multivariado (Tipo Ljung-Box) para a série dos índices IBovespa x S&P 500.....	82
Tabela 12 - Matriz de Correlação Condicional Constante do modelo DVEC(1,1).....	86
Tabela 13 - Seleção de modelos para as séries dos índices Dow Jones e S&P 500.....	87
Tabela 14 - Teste Portmanteau Multivariado (Tipo Ljung-Box) para a série dos índices Dow Jones x S&P 500.....	88
Tabela 15 - Matriz de Correlação Condicional Constante do modelo BEKK(2,1).....	92
Tabela 16 - Comparação da Correlação Simples com a Correlação Condicional Constante.....	92
Tabela 17 - Seleção de modelos para as séries dos índices Dow Jones e S&P 500 com dummies.....	93

Tabela 18 - Seleção de modelos para as séries dos índices IBovespa e S&P 500 com dummies.....	93
Tabela 19 - Seleção de modelos para as séries do Dow Jones e S&P 500 com dummies....	94

## 1 INTRODUÇÃO

A volatilidade de um ativo é uma medida de incerteza quanto às variações de seu preço. Ela é uma ferramenta extremamente importante para quem atua no mercado de ações: ao tomar uma decisão, o acionista está interessado em saber em que direção e com que velocidade um ativo irá se movimentar. Mercados que se movem lentamente são ditos de baixa volatilidade. Por outro lado, mercados que se movem mais rapidamente podem ser vistos como mercados de alta volatilidade. Os períodos de alta volatilidade no mercado acionário possibilitam maiores lucros, uma vez que uma alta variação dos ativos gera grandes oportunidades ao investidor. Todavia, estas oportunidades trazem também consigo um nível maior de incerteza.

Atualmente, a análise de risco tem sido uma ferramenta básica para qualquer analista do mercado de ações. Desta forma, a gestão de risco torna-se um elemento essencial quando se fala em ações. Sendo assim, conseguir prever de maneira significativa a variância de um ativo é extremamente útil para o acionista.

Esta dissertação se propõe a estimar a volatilidade de ativos. Para ser mais específico, analisaremos a variância de alguns índices de mercados financeiros: Dow Jones, IBovespa (Índice da Bolsa de Valores de São Paulo) e *S&P 500* (*Standard and Poor 500*). Estimar com acurácia a volatilidade de um índice financeiro é indicativo de que podemos significativamente prever a variância de um papel específico. No momento que podemos mensurar se a variância de um ativo será maior ou menor em um determinado dia, poderemos dizer em que direção e com que velocidade um ativo irá variar. Como conseqüência, o acionista terá a possibilidade de auferir grandes lucros.

Os três índices que iremos analisar são correlacionados? Qual a correlação entre eles? Será que uma queda na bolsa americana repercute na bolsa brasileira? Como podemos modelar essas séries? Estas questões motivaram o surgimento deste trabalho e, portanto, serão aqui respondidas.

Para responder a estas perguntas serão utilizadas formas metodológicas similares às que serão apresentadas na revisão bibliográfica. A idéia é estudar como prever significativamente índices financeiros. Desta forma, primeiramente analisaremos a volatilidade de algumas séries temporais utilizando um modelo GARCH univariado. Após escolher o modelo mais eficaz, passaremos para o segundo passo: realizaremos uma análise com GARCH bivariado entre as séries do IBovespa x Dow Jones, IBovespa x S&P 500 e Dow Jones x S&P 500. A idéia é que a análise bivariada irá aumentar a significância do modelo, uma vez que ela considera mais variáveis por ser uma ferramenta de previsão mais complexa. Com o intuito de averiguar se a bolsa americana impacta no IBovespa, será também realizada uma análise de Causalidade de Granger.

Feito o acima citado, será possível responder as seguintes questões: Uma queda brusca na bolsa americana impacta a bolsa brasileira? É possível prever significativamente o mercado financeiro? A incorporação de um dos índices do mercado americano na estimativa do IBovespa torna o modelo mais significativo?

Acreditamos ser relevante esta análise visto que não há um consenso sobre qual é o melhor modelo econométrico para as séries financeiras. Há quem acredite que, dado que o mercado acionário é eficiente, não podemos fazer nada melhor do que prever a informação do dia  $t$  utilizando-se somente da informação no dia  $t-1$ . No entanto, poderemos prever significativamente uma série financeira se ela for ajustada a um modelo fidedigno.

Veremos agora as três séries com as quais iremos trabalhar<sup>1</sup>:

**a) Dow Jones:** O Dow Jones é um dos indicadores de maior confiabilidade mundial e tornou-se, desde sua criação, uma referência importante para investidores e administradores de recursos estrangeiros, que se baseiam em sua *performance* para tomar decisões de investimentos. Ele é uma média ponderada de 30 papéis Blue-Chips que geralmente são os líderes de suas respectivas indústrias. O indicador tem sido amplamente acompanhado desde 1º de Outubro de 1928. O índice Dow Jones foi introduzido em 1884 pelos norte-americanos

---

<sup>1</sup> Todas as séries foram retiradas do histórico de índices do *software* Broadcast.

Charles Henry Dow, precursor da análise de ações, juntamente com seus sócios Edward Jones e Charles Bergstresser — primeiros editores do *The Wall Street Journal*. A idéia era formar uma empresa que divulgasse cotações de ações e notícias econômicas do mercado de New York. Nascia a *Dow Jones & Company*. Todavia, foi a partir de 1º de Outubro de 1928 que o indicador passou a ser amplamente difundido.

A Figura 1 abaixo informa os valores dos retornos do índice Dow Jones ( $y_t$ ), dados por:

$$y_t = 100(\ln x_t - \ln x_{t-1})$$

A série, que é formada por 3.888 observações, compreende o período de 02/01/1990 a 01/06/2005. Vejamos o gráfico da série:

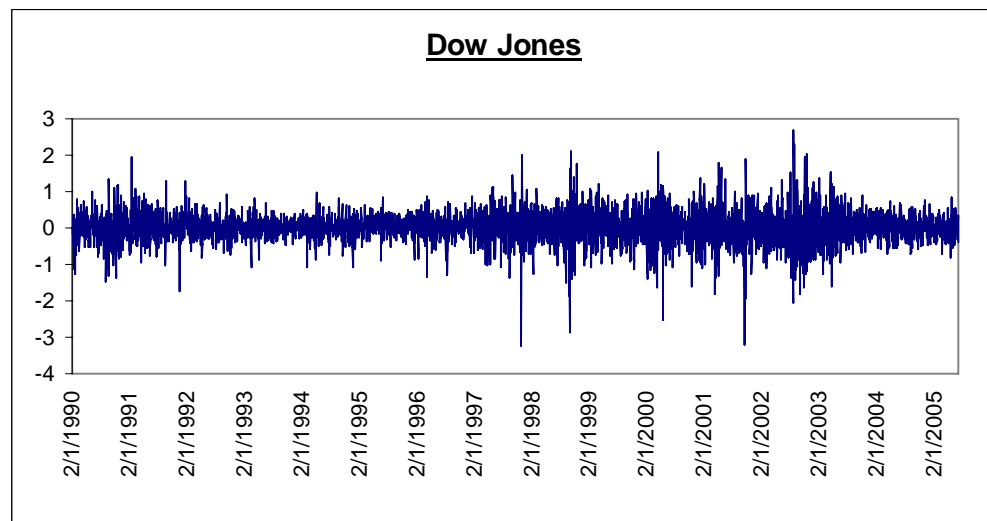


Figura 1 - Série dos retornos do índice Dow Jones.

Fonte: Broadcast

**b) IBovespa:** O IBovespa é o principal índice da Bolsa de Valores de São Paulo. Este mede as variações dos preços das ações das empresas mais negociadas no mercado acionário brasileiro. O índice de uma bolsa de valores serve para dar parâmetros de variação de valores ao mercado, ou seja, serve para que o investidor possa saber se, naquela bolsa, os papéis estão valorizando ou

desvalorizando. Implantado em 2 de janeiro de 1968, ele é hoje o termômetro do desempenho das 54 ações mais negociadas, o que representa cerca de 80% do volume total.

A Figura 2 abaixo mostra a série dos retornos do índice Bovespa. A série contém 3.805 observações e abrange o período de 02/01/1990 a 01/06/2005. Pode-se perceber fortes indícios de heteroscedasticidade nesta série. É extremamente importante conseguir modelar corretamente esta variância, visto que, pontos de alta (ou baixa) volatilidade são interessantes para o investidor, uma vez que eles implicam em altos (ou baixos) retornos. Abaixo apresentamos a série dos retornos diários do índice IBovespa.

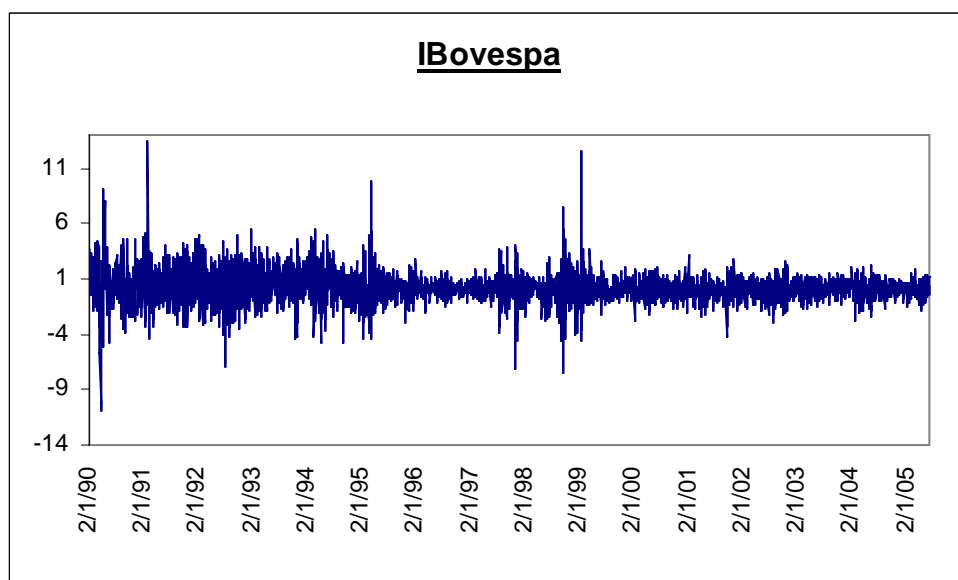


Figura 2 - Série dos retornos do índice IBovespa.

Fonte: Broadcast

**c) S&P500:** O S&P500 é um índice de avaliação das mudanças das condições do mercado acionário tendo como base o desempenho médio das 500 maiores empresas dos EUA.

A Figura 3 abaixo informa os valores do índice S&P 500 de 3.889 observações. Os dados abrangem o período de 02/01/1990 a 01/06/2005.

Podemos perceber, *a priori*, uma clara presença de heteroscedasticidade na série temporal. Isso ocorre devido a perturbações presentes no mercado que, deste modo, implicam em maior volatilidade no valor do índice. O gráfico abaixo mostra maior volatilidade nas observações entre o período de 02/01/1997 e 02/01/2004.

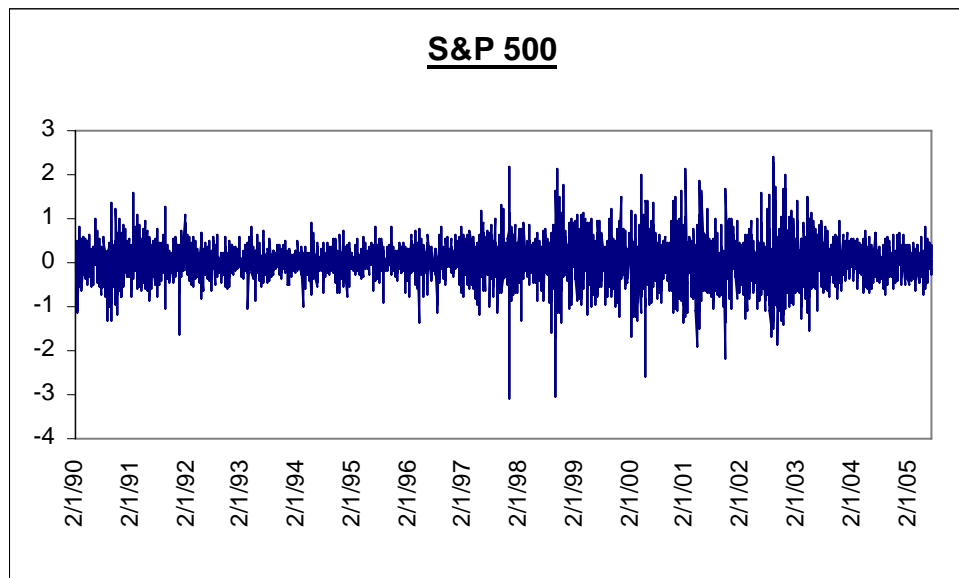


Figura 3 - Série dos retornos do índice S&P 500.

Fonte: Broadcast

Como o leitor deve ter percebido, as três séries possuem número de dados diferentes. O IBovespa é o índice com menos dados, o que se deve ao fato de que o mercado americano ter menos feriados que o brasileiro. Cabe também ressaltar que o índice *S&P 500* possui uma observação a mais do que o Dow Jones porque no dia 27/05/1996 o Dow Jones não abriu.

Podemos perceber que entre as três séries, aparentemente, o IBovespa é o índice mais volátil. Enquanto o retorno dos índices americanos variam, na maioria das vezes, entre -3 e 3, o brasileiro varia entre, digamos, -12 e 12.

Antes de prosseguirmos ao próximo capítulo, mostraremos a Tabela 1, onde podemos ver uma análise de como se comportam os coeficientes de correlação simples entre as três séries.



Tabela 1 - Tabela do Coeficiente de Correlação entre as séries.

<u>Índice</u>	<u>Dow Jones</u>	<u>IBovespa</u>	<u>S&amp;P 500</u>
<u>Dow Jones</u>	100%	29%	94%
<u>IBovespa</u>	29%	100%	28%
<u>S&amp;P 500</u>	94%	28%	100%

O coeficiente de correlação indica que um aumento de 1% nos retornos da série IBovespa leva a um aumento de 0,29214% no Dow Jones. Já um aumento de 1% nos retornos da série IBovespa acarreta um aumento de 0,28525% no S&P 500. Por último, um aumento de 1% nos retornos da série Dow Jones acarreta um aumento de 0,94% nos retornos da série S&P 500.

O Capítulo 2, a seguir, apresenta a metodologia que será utilizada ao longo do trabalho. Em seguida, o Capítulo 3 apresenta uma revisão bibliográfica de alguns trabalhos que também modelaram séries financeiras com as mesmas metodologias que serão abordadas neste trabalho. O Capítulo 4 apresenta uma análise econométrica das séries financeiras Dow Jones, IBovespa e S&P 500. Para estes dados serão consideradas as análises Univariada, Bivariada, Bivariada com *Dummies* e Análise de Causalidade de Granger. No Capítulo 5, apresentamos as conclusões do trabalho.

## 2 MODELOS GARCH UNIVARIADO E MULTIVARIADO

O modelo mais simples que incorpora a volatilidade de séries temporais é o *Autoregressive Conditional Heteroskedastic* (ARCH). Nestes modelos, temos que:

- a) a média do retorno de um ativo é serialmente não correlacionada, porém dependente;
- b) a dependência do retorno do ativo pode ser descrita por uma função quadrática da defasagem dos seus valores, dependendo da defasagem de seus valores presente e passados.

Nos modelos ARCH, grandes choques tendem a serem seguidos por outro grande choque. Além disso, como a volatilidade depende do quadrado do choque que ocorreu, o modelo ARCH assume que choques positivos e negativos possuem os mesmos efeitos. Todavia, na prática, sabemos que isso não ocorre. A idéia é que os modelos ARCH tendem a superestimar a volatilidade, uma vez que eles respondem lentamente a choques isolados no retorno da série. Para contornar algumas dessas dificuldades vamos introduzir também os modelos GARCH.

### 2.1 ARIMA e GARCH

Um processo  $\{y_t\}$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , autoregressivo de ordem  $p$ , denotado por  $AR(p)$ , para uma dada variável  $y_t$  tem a forma:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t, \quad (2.1.1)$$

onde  $u_t$  é um ruído branco

$$\begin{aligned}
 E(u_t) &= 0 \\
 E(u_t u_\tau) &= \begin{cases} \sigma_u^2, & \text{para } t = \tau \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{2.1.2}$$

onde  $c$  e  $\phi_i$ , para  $1 \leq i \leq p$ , são constantes reais.

O processo será estacionário caso as raízes do polinômio

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0, \tag{2.1.3}$$

estejam fora do círculo unitário. A estimação ótima linear do nível de  $y_t$  para um processo AR( $p$ ) é dada por

$$\hat{E}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p}, \tag{2.1.4}$$

onde  $\hat{E}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$  denota a projeção linear de  $y_t$  sobre o sub-espço gerado pelas observações passadas  $(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$ , denotado por  $F_{t-1}$ . Enquanto a média condicional de  $y_t$  varia no tempo, de acordo com (2.1.4), a média não condicional é constante (se o processo é estacionário):

$$E(y_t) = c / (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p). \tag{2.1.5}$$

Todavia, freqüentemente estamos interessados em estimar não só o nível de  $y_t$  mas também sua variância. Mudanças na variância são de fundamental importância em mercados financeiros, uma vez que investidores buscam, em geral, ativos com maior variância para obter maiores retornos. Uma variância que muda ao longo do tempo também tem implicações importantes para a validade e eficiência da inferência dos parâmetros  $(c, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_u)$  que descrevem a dinâmica do nível de  $y_t$ .

Embora (2.1.2) implique que a variância não condicional de  $u_t$  seja constante e igual a  $\sigma_u^2$ , a variância condicional de  $u_t$  pode variar ao longo do tempo. Uma maneira de modelar esta variância é descrever o quadrado de  $u_t$  como seguindo também um processo AR( $m$ ):

$$u_t^2 = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 + w_t, \quad (2.1.6)$$

onde  $w_t$  é um novo ruído branco dado por

$$E(w_t) = 0$$

$$E(w_t w_\tau) = \begin{cases} \sigma_w^2, & \text{para } t = \tau \\ 0, & \text{c.c..} \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Como  $u_t$  é o erro na previsão de  $y_t$ , a expressão (2.1.6) implica que a projeção linear do erro ao quadrado de uma previsão de  $y_t$  nos  $m$  primeiros erros ao quadrado de previsão, é dada por

$$\hat{E}(u_t^2 | u_{t-1}^2, u_{t-2}^2, \dots) = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2. \quad (2.1.8)$$

Um processo  $\{y_t\}$ , onde  $t \in Z$ , cujo ruído branco  $u_t$  satisfaça (2.1.6), é dito ser um *Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process* de ordem  $m$  (ARCH( $m$ )). Esta classe de processos foi introduzida por Engle (1982). Para  $u_t^2$  ser estacionário, devemos requerer que as raízes de

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_m z^m = 0 \quad (2.1.9)$$

estejam fora do círculo unitário. Exigir que todos  $\alpha_j$  sejam não negativos é o mesmo que requerer que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m < 1. \quad (2.1.10)$$

Quando as condições (2.1.9) e (2.1.10) são satisfeitas, a variância não condicional de  $u_t$  é dada por

$$\sigma_u^2 = E(u_t^2) = \zeta / (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_m). \quad (2.1.11)$$

Denote  $\hat{u}_{t+s|t}^2$  a previsão linear para  $s$  períodos à frente. Então,

$$\hat{u}_{t+s|t}^2 = \hat{E}(u_{t+s}^2 | u_t^2, u_{t-1}^2, \dots). \quad (2.1.12)$$

A previsão  $\hat{u}_{t+s|t}^2$  converge em probabilidade para  $\sigma_u^2$ , quando  $s \rightarrow \infty$ , assumindo que  $w_t$  tem uma variância finita e que (2.1.10) está satisfeito.

É conveniente usar uma representação alternativa de um processo ARCH( $m$ ), onde hipóteses mais fortes são impostas sobre a dependência serial de  $u_t$ . Suponha que

$$u_t = \sqrt{h_t} v_t, \quad (2.1.13)$$

onde  $v_t$  é iid com média zero e variância igual a unidade. Caso  $h_t$  seja dado por

$$h_t = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2, \quad (2.1.14)$$

então a expressão (2.1.13) implica que

$$E(u_t^2 | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2. \quad (2.1.15)$$

Assim, caso  $u_t$  seja gerado por (2.1.13) e (2.1.14), então  $u_t$  segue um processo ARCH( $m$ ) no qual a projeção linear (2.1.8) também é a variância condicional de  $u_t$ .

Observamos que quando (2.1.13) e (2.1.14) são substituídos em (1.1.6) temos que

$$h_t v_t^2 = h_t + w_t. \quad (2.1.16)$$

Sob a especificação em (2.1.13), a inovação  $w_t$  na representação AR( $m$ ) para  $u_t^2$  em (2.1.6) pode ser expressa como

$$w_t = h_t (v_t^2 - 1). \quad (2.1.17)$$

Note que, embora em (2.1.17) a esperança não condicional de  $w_t$  é assumida ser constante, isto é,

$$E(w_t) = \sigma_w^2, \quad (2.1.18)$$

a variância condicional de  $w_t$  varia ao longo do tempo.

A variância não condicional de  $w_t$  reflete o quarto momento de  $u_t$ , e este quarto momento não existe para todo modelo ARCH estacionário. Isso pode ser visto elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade (2.1.17) e calculando-se a esperança não condicional de ambos os lados

$$E(w_t^2) = E(h_t^2)E(v_t^2 - 1)^2. \quad (2.1.19)$$

Vejamos agora como um modelo *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process* (GARCH) pode ser usado neste contexto. Generalizando o modelo que vimos acima, podemos supor que a variância condicional do processo dependa de um número infinito de defasagens de  $u_{t-j}^2$ ,

$$h_t = \zeta + \Pi(L)u_t^2 \quad (2.1.20)$$

onde

$$\Pi(L) = \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_j L^j, \quad (2.1.21)$$

sendo  $L$  o operador de defasagem definido por  $L^j(y_t) = y_{t-j}$ .

A idéia é parametrizar  $\Pi(L)$  dado na expressão (2.1.21) como a razão de dois polinômios de ordem finita

$$\Pi(L) = \frac{\alpha(L)}{1 - \delta(L)}, \quad (2.1.22)$$

onde assumiremos que  $\alpha(L) = \sum_{i=1}^m \alpha_i L^i$ ,  $\delta(L) = \sum_{j=1}^r \delta_j L^j$  e que as raízes do polinômio

$1 - \delta(z) = 0$  estão fora do círculo unitário. Se multiplicarmos (2.1.20) por  $1 - \delta(L)$  o resultado obtido é

$$[1 - \delta(L)]h_t = [1 - \delta(L)]\zeta + \alpha(L)u_t^2 \quad (2.1.23)$$

ou, igualmente,

$$h_t = \kappa + \delta_1 h_{t-1} + \dots + \delta_r h_{t-r} + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2, \quad (2.1.24)$$

onde  $\kappa \equiv [1 - \delta_1 - \dots - \delta_r]\zeta$ . O processo  $\{u_t\}$ , onde  $t \in Z$ , satisfazendo as expressões (2.1.13) e (2.1.24) é dito ser um GARCH( $r, m$ ). Somando  $u_t^2$  em ambos os lados da expressão (2.1.24), temos que:

$$h_t + u_t^2 = \kappa - \sum_{j=1}^r \delta_j (u_{t-j}^2 - h_{t-j}) + \sum_{j=1}^r \delta_j u_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{t-i}^2 + u_t^2 \quad (2.1.25)$$

ou seja,

$$u_t^2 = \kappa + (\delta_1 + \alpha_1)u_{t-1}^2 + \dots + (\delta_p + \alpha_p)u_{t-p}^2 + w_t - \delta_1 w_{t-1} - \dots - \delta_r w_{t-r}, \quad (2.1.26)$$

onde  $w_t \equiv u_t^2 - h_t$ ,  $p = \max\{m, r\}$ ,  $\delta_j \equiv 0$ , para  $j > r$  e  $\alpha_j \equiv 0$ , para  $j > m$ . Note que  $h_t$  denota a previsão de  $u_t^2$  baseada nos valores defasados deste último. Portanto,  $w_t \equiv u_t^2 - h_t$  é o erro associado à esta previsão. Sendo assim,  $w_t$  é um ruído branco que é fundamental para  $u_t^2$ . A expressão (2.1.26) será então reconhecida como um processo ARMA( $p, r$ ) para  $u_t^2$ , cujo  $j$ -ésimo coeficiente autoregressivo (AR) é a soma de  $\delta_j$  com  $\alpha_j$  enquanto o  $j$ -ésimo coeficiente da média móvel (MA) é o negativo de  $\delta_j$ . Caso  $u_t^2$  seja descrito com um GARCH( $r, m$ ), então  $u_t^2$  segue um processo ARMA( $p, r$ ), onde  $p = \max\{m, r\}$ .

O processo  $u_t^2$  será estacionário caso  $w_t$  tenha variância finita e as raízes da equação

$$1 - (\delta_1 + \alpha_1)z - \dots - (\delta_p + \alpha_p)z^p = 0 \quad (2.1.27)$$

estejam fora do círculo unitário. No caso estacionário, a média não condicional de  $u_t^2$  é dada por

$$E(u_t^2) = \sigma_u^2 = \kappa / [1 - (\delta_1 + \alpha_1) - \dots - (\delta_p + \alpha_p)]. \quad (2.1.28)$$



O cálculo da seqüência da variância condicional  $\{h_t\}_{t=1}^T$  de (1.1.24) requer a pré-amostragem de valores para  $h_{-p+1}, \dots, h_0$  e  $u_{-p+1}^2, \dots, u_0^2$ . Se tivermos observações em  $y_t$  e  $x_t$  para  $t = 1, 2, \dots, T$ , Bollerslev (1986) sugere definir

$$h_j = u_j^2 = \hat{\sigma}_u^2 \quad \text{para } j = -p+1, \dots, 0$$

onde

$$\hat{\sigma}_u^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (y_t - x_t' \beta)^2 .$$

A seqüência  $\{h_t\}_{t=1}^T$  pode ser usada para calcular a log verossimilhança a partir da expressão

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln f(y_t | x_t, F_{t-1}; \theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\Pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - x_t' \beta)^2}{h_t} , \quad (2.1.29)$$

onde  $F_{t-1}$  indica as informações passadas.

A expressão acima pode ser maximizada numericamente com respeito à  $\beta$  e aos parâmetros  $\kappa, \delta_1, \dots, \delta_r, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  do processo GARCH.

## 2.2 Outros modelos da família **GARCH**

A variância é um fator extremamente importante no gerenciamento do risco financeiro. Apesar da volatilidade não ser diretamente observável, ela possui algumas características que são comumente vistas no retorno de ativos. Primeiramente, existem *clusters* de volatilidade, isto é, a volatilidade pode ser alta em alguns períodos e baixa em outros. Segundo, a volatilidade evolui de forma constante com o passar do tempo, ou seja, “pulos” na volatilidade são raros.

Terceiro, a volatilidade não diverge ao infinito. Estatisticamente falando, estamos dizendo que a volatilidade é estacionária. Quarto, a volatilidade parece reagir de maneira diferente tanto a um aumento de preço como a um decréscimo de preço.

Estas propriedades são fundamentais para o entendimento da volatilidade. Alguns modelos foram propostos especificamente para corrigir as fraquezas de outros modelos e, com isso, capturar algumas das características mencionadas no parágrafo anterior. Desejamos agora analisar alguns modelos econométricos da família GARCH, disponíveis na literatura, para modelarmos a volatilidade do retorno de um ativo com características específicas.

### 2.2.1 Modelo **IGARCH** (*Integrated* GARCH)

Caso o polinômio da representação GARCH tenha uma raiz unitária, é conveniente utilizarmos um modelo IGARCH. Um IGARCH(1,1), pode ser descrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 + \beta_1) a_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

onde  $0 < \beta_1 < 1$  e  $\{\varepsilon_t\}$  é um ruído branco.

No modelo GARCH(1,1) canônico, temos que

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_h^2(1); \quad (2.2.2)$$

porém, quando  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ , teremos que:

$$\sigma_h^2(\ell) = \sigma_h^2(1) + (\ell - 1) \alpha_0. \quad (2.2.3)$$

O efeito de  $\sigma_h^2(1)$  na volatilidade em um passo  $\ell$  futuro é persistente e a estimativa da volatilidade forma uma linha com inclinação  $\alpha_0$ . Nesse caso, é aconselhável o uso do modelo IGARCH.

### 2.2.2 Modelo **GARCH-M** (GARCH *in mean*)

Um GARCH(1,1) – M, pode ser descrito como

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + c\sigma_t^2 + a_t, \\ a_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

O parâmetro  $c$  é chamado *prêmio pelo risco*. Um prêmio positivo indica que o retorno é positivamente relacionado à volatilidade passada.

A formulação do modelo GARCH-M implica que existe correlação serial no retorno da série. Essa correlação serial é introduzida por estes retornos no processo de volatilidade  $\{\sigma_t^2\}$ . Entretanto, a existência de um prêmio pelo risco é outra razão pela qual alguns retornos de ativos tem correlação serial.

### 2.2.3 Modelo **EGARCH** (*Exponencial GARCH*)

O modelo EGARCH foi desenvolvido para capturar a assimetria na volatilidade induzida por grandes retornos positivos e negativos. Um EGARCH ( $m,s$ ) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \\ \ln(\sigma_t^2) &= \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 L + \dots + \beta_s L^s}{1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_m L^m} g(\varepsilon_{t-1}), \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

onde  $\alpha_0$  é uma constante,  $L$  é o operador de defasagem, tal que  $Lg(\varepsilon_t) = g(\varepsilon_{t-1})$ , e  $1 + \beta_1 L + \dots + \beta_s L^s$  e  $1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_m L^m$  são polinômios com zeros fora do círculo unitário e não possuem raízes em comum.

#### 2.2.4 Modelo **TGARCH** (*Threshold GARCH*)

Outra variação dos modelos GARCH é o TGARCH. Este último é capaz de modelar os efeitos *leverage* de séries financeiras. O efeito *leverage* corresponde a correlação negativa entre os rendimentos presentes de um papel e sua volatilidade futura. O TGARCH(p,q) é dado por

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i S_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.2.6)$$

onde  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo de ruído branco e

$$S_{t-i} = \{ 1, \text{ se } \varepsilon_{t-i} < 0; 0, \text{ se } \varepsilon_{t-i} \geq 0 \}.$$

Sendo assim, dependendo se o valor de  $\varepsilon_{t-i}$  está acima ou abaixo do valor de *threshold* zero,  $\varepsilon_{t-i}^2$  terá diferentes efeitos na variância condicional  $\sigma_t^2$ : quando  $\varepsilon_{t-i}$  for positivo, os efeitos totais são dados por  $a_i \varepsilon_{t-i}^2$ ; quando  $\varepsilon_{t-i}$  for negativo, o efeito total é dado por  $(a_i + \gamma_i) \varepsilon_{t-i}^2$ . Portanto, esperamos que  $\gamma_i$  seja positivo para notícias ruins e, além disso, que ele seja mais impactado pelas notícias “ruins”. O efeito *leverage* vai existir neste modelo caso tenhamos  $\gamma_i > 0$ .

### 2.2.5 Modelo **PGARCH** (*Power* GARCH)

O modelo PGARCH é outro modelo que permite incluir o efeito *leverage*. Este modelo é dado por

$$\sigma_t^d = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \left( |\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i \varepsilon_{t-i} \right)^d + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^d, \quad (2.2.7)$$

onde  $d$  é um expoente positivo, e  $\gamma_i$  denota o coeficiente de efeito *leverage*. Pode-se perceber que, quando  $d = 2$  e  $\gamma_i = 0$ , o modelo se reduz a um GARCH(p,q).

A diferença básica entre esse modelo e o anterior é que choques de volatilidade geram impactos maiores no modelo TGARCH em relação ao modelo GARCH comum com efeitos *leverage*, independente do tamanho desse choque. Já o modelo PGARCH é mais robusto a choques extremos, de modo que impactos de pequenos choques são melhores captados pelo PGARCH em relação a modelos GARCH e TGARCH. Por outro lado, impactos de grandes choques são menos captados pelo PGARCH em relação aos outros dois modelos.

### 2.3 Modelos **GARCH** Multivariado

Os modelos GARCH multivariado têm uma aplicação financeira muito importante. Eles exercem um grande papel na seleção de portfólios e alocação de recursos. O GARCH multivariado também é útil para computar o *Value at Risk* de uma posição financeira e para verificar relações de causalidade entre dois ativos.

Considere o retorno multivariado  $r_t$  de  $k$  séries temporais. Podemos, assim como no caso univariado, reescrever a série da seguinte maneira:

$$r_{it} = \mu_{it} + a_{it}, \quad (2.3.1)$$

para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ , onde  $\mu_{it} = E(r_{it} | F_{t-1})$  é a esperança condicional de  $r_{it}$  dadas as informações passadas  $F_{t-1}$ , e  $a_t = (a_{1t}, \dots, a_{kt})'$  é o choque, ou inovação, das  $k$  séries no tempo  $t$ . Assume-se que o processo  $\mu_t$  seja a esperança condicional de uma série temporal multivariada. Para a maioria das séries de retornos, é suficiente empregar uma simples estrutura de vetores ARMA para  $\mu_t$ , ou seja,

$$\mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \Phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^q \Theta_i a_{t-i}, \quad (2.3.2)$$

onde  $p$  e  $q$  são inteiros não-negativos. Variáveis explicativas podem ser inseridas na equação caso seja necessário. Nos referimos a expressão (2.3.2) como a equação da média de  $r_t$ .

A matriz de variância condicional de  $a_t$  dado  $F_{t-1}$  é uma matriz  $k \times k$  positiva definida que chamaremos de  $\Sigma_t$ , onde  $\Sigma_t = Cov(a_t | F_{t-1})$ . Ao modelarmos volatilidades multivariadas, estamos preocupados com a evolução de  $\Sigma_t$  ao longo do tempo. Nos referimos a  $\Sigma_t$  como um modelo de volatilidade para o retorno da série  $r_t$ .

Existem diversas maneiras de generalizar a volatilidade univariada, porém, quando o número de dimensões torna-se muito grande, fica extremamente difícil fazer esta modelagem. Existem alguns modelos que permitem analisar o coeficiente de correlação ao longo do tempo entre o retorno de ativos. Veremos agora dois métodos de reparametrização da  $\Sigma_t$ .

### 2.3.1 Uso das Correlações

Um importante passo na modelagem da volatilidade multivariada é a reparametrização de  $\Sigma_t$  fazendo uso de sua propriedade de simetria. A primeira

reparametrização aqui apresentada é feita através do uso dos coeficientes de correlação condicional e das variâncias de  $a_t$ . Podemos escrever  $\Sigma_t$  como

$$\Sigma_t \equiv [\sigma_{ij,t}] = D_t \rho_t D_t', \quad (2.3.3)$$

onde  $\rho_t$  é a matriz de correlação condicional de  $a_t$  dado o sub-espço  $F_{t-1}$  e  $D_t$  é uma matriz diagonal  $k \times k$  que consiste dos desvios padronizados condicionais dos elementos de  $a_t$ .

Como  $\rho_t$  é simétrico com elementos diagonais unitários, a evolução de  $\Sigma_t$  ao longo do tempo é governada pelo comportamento da variância condicional  $\sigma_{ij,t}$  e pelo elemento  $\rho_{ij,t}$  de  $\rho_t$ , onde  $j < i$  e  $1 \leq i \leq k$ . Para modelar a volatilidade de  $a_t$ , é suficiente considerar a variância condicional e os coeficientes de correlação de  $a_{it}$ . Definimos o vetor dimensional  $k(k+1)/2$

$$\Xi_t = (\sigma_{11,t}, \dots, \sigma_{kk,t}, \psi_t)', \quad (2.3.4)$$

onde  $\psi_t$  é um vetor obtido através das colunas da matriz de correlação de  $\rho_t$ , mas somente utilizando os elementos abaixo da diagonal principal. Para um retorno de uma série  $k$  dimensional, temos que

$$\psi_t = (\rho_{21,t}, \dots, \rho_{k1,t} / \rho_{32,t}, \dots, \rho_{k2,t} / \dots / \rho_{kk-1,t}). \quad (2.3.5)$$

Vejamos como exemplo, o caso  $k = 2$ .

**Exemplo:** Neste caso, temos que  $\psi_t = \rho_{21,t}$  e  $\Xi_t = (\sigma_{11,t}, \sigma_{22,t}, \rho_{21,t})'$ . Seja  $a_t$  uma variável aleatória normal bivariada, então a função de densidade condicional de  $a_t$  dado  $F_{t-1}$  é

$$f(a_{1t}, a_{2t} | \Xi_t) = \frac{1}{2\Pi \sqrt{\sigma_{11,t}^2 \sigma_{22,t}^2 (1 - \rho_{21,t}^2)}} \exp\left[ \frac{-Q(a_{1t}, a_{2t} | \Xi_t)}{2(1 - \rho_{21,t}^2)} \right], \quad (2.3.6)$$

onde  $Q(a_{1t}, a_{2t} | \Xi_t) = \frac{a_{1t}^2}{\sigma_{11,t}^2} + \frac{a_{2t}^2}{\sigma_{22,t}^2} - \frac{2\rho_{21,t} a_{1t} a_{2t}}{\sqrt{\sigma_{11,t}^2 \sigma_{22,t}^2}}$ .

A função ln de densidade de  $a_t$ , relevante ao estimador de máxima verossimilhança, é dada por

$$\ell(a_{1t}, a_{2t} | \Xi_t) = -\frac{1}{2\Pi} \left\{ \ln[\sigma_{11,t}^2 \sigma_{22,t}^2 (1 - \rho_{21,t}^2)] + \frac{1}{1 - \rho_{21,t}^2} \left( \frac{a_{1t}^2}{\sigma_{11,t}^2} + \frac{a_{2t}^2}{\sigma_{22,t}^2} - \frac{2\rho_{21,t} a_{1t} a_{2t}}{\sqrt{\sigma_{11,t}^2 \sigma_{22,t}^2}} \right) \right\} \quad (2.3.7)$$

Essa reparametrização é útil visto que ela modela as covariâncias e correlações diretamente. Todavia, este modelo apresenta desvantagens: primeiro, a função de verossimilhança fica muito complicada quando  $k > 2$ ; segundo, o modelo requer uma maximização condicionada na estimação para assegurar que  $\Sigma_t$  seja positiva definida.

### 2.3.2 Decomposição de Cholesky

A segunda reparametrização de  $\Sigma_t$  é através da decomposição de Cholesky. Esta metodologia possui algumas vantagens em relação à anterior, uma vez que não requer um parâmetro restritivo para que  $\Sigma_t$  seja positiva definida. Além disso, essa reparametrização é uma transformação ortogonal, de modo que a função de verossimilhança resultante é extremamente simples.

Como  $\Sigma_t$  é positiva definida, existe uma matriz inferior triangular  $L_t$  com diagonal unitária e uma matriz  $G_t$  com diagonal positiva tal que



$$\Sigma_t = L_t G_t L_t' \quad (2.3.8)$$

Esta é a decomposição de Cholesky para  $\Sigma_t$ . Para o caso bivariado, teremos que

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{21,t} \\ \sigma_{12,t} & \sigma_{22,t} \end{bmatrix}, \quad L_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{21,t} & 1 \end{bmatrix}, \quad G_t = \begin{bmatrix} g_{11,t} & 0 \\ 0 & g_{22,t} \end{bmatrix}, \quad (2.3.9)$$

onde  $g_{ii,t} > 0$ , para  $i=1, 2$ . Usando a equação (2.3.8), temos que

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{21,t} \\ \sigma_{12,t} & \sigma_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11,t} & q_{21,t} g_{11,t} \\ q_{21,t} g_{11,t} & g_{22,t} + q_{21,t}^2 g_{11,t} \end{bmatrix}. \quad (2.3.10)$$

Sendo assim, temos que

$$\sigma_{11,t} = g_{11,t}, \quad \sigma_{12,t} = q_{21,t} g_{11,t}, \quad \sigma_{22,t} = g_{22,t} + q_{21,t}^2 g_{11,t}. \quad (2.3.11)$$

Resolvendo a equação (2.3.11), temos que

$$\sigma_{11,t} = g_{11,t}, \quad q_{21,t} = \frac{\sigma_{21,t}}{\sigma_{11,t}}, \quad g_{22,t} = \sigma_{22,t} - \frac{\sigma_{21,t}^2}{\sigma_{11,t}}. \quad (2.3.12)$$

Todavia, consideremos a regressão linear simples condicional

$$a_{2t} = \beta a_{1t} + b_{2t}, \quad (2.3.13)$$

onde  $b_{2t}$  é o erro. Pelo método dos mínimos quadrados, sabemos que

$$\beta = \frac{\text{Cov}(a_{1t}, a_{2t})}{\text{Var}(a_{1t})} = \frac{\sigma_{21,t}}{\sigma_{11,t}}. \quad (2.3.14)$$

Portanto, da expressão (2.3.13), obtemos

$$\text{Var}(b_{2t}) = \text{Var}(a_{2t}) - \beta^2 \text{Var}(a_{1t}) = \sigma_{22,t} - \frac{\sigma_{21,t}^2}{\sigma_{11,t}}. \quad (2.3.15)$$

Como o erro  $b_{2t}$  é não correlacionado com o regressor  $a_{1t}$ , obtemos que

$$\sigma_{11,t} = g_{11,t}, \quad q_{21,t} = \beta, \quad g_{22,t} = \text{Var}(b_{2t}), \quad b_{2t} \perp a_{1t}, \quad (2.3.16)$$

onde  $\perp$  implica ausência de correlação. Sendo assim, a decomposição de Cholesky de uma matriz quadrada  $\Sigma_t$  de ordem 2 gera uma transformação ortogonal de  $a_t$  para  $b_t = (b_{1t}, b_{2t})'$  tal que

$$b_{1t} = a_{1t} \quad \text{e} \quad b_{2t} = a_{2t} - q_{21,t} a_{1t}, \quad (2.3.17)$$

onde  $q_{21,t} = \beta$  é obtido através da regressão linear (2.3.13) e  $\text{Cov}(b_t)$  é uma matriz diagonal com elementos  $g_{ii,t}$ . Podemos interpretar  $q_{21,t}$  e  $g_{ii,t}$  da seguinte maneira:

- a) o primeiro elemento da diagonal de  $G_t$  é a variância de  $a_{1t}$ ;
- b) o segundo elemento da diagonal de  $G_t$  é a variância residual da regressão linear simples da equação (2.3.13);
- c) o elemento  $q_{21,t}$  da matriz triangular inferior  $L_t$  é o coeficiente  $\beta$  de (2.3.13).

O raciocínio também é válido para casos de dimensões maiores do que 2. Sendo assim, a utilização da decomposição de Cholesky através de uma

transformação ortogonal de  $a_t$  para  $b_t$ , onde  $b_{1t} = a_{1t}$ , e  $b_{it}$ , para  $1 < i \leq k$  é definido recursivamente pela regressão de mínimos quadrados

$$a_{it} = q_{i1,t}b_{1t} + q_{i2,t}b_{2t} + \dots + q_{i(i-1),t}b_{(i-1)t} + b_{it}, \quad (2.3.18)$$

onde  $q_{ij,t}$  é o (i,j)-ésimo elemento da matriz triangular inferior  $L_t$ , para  $1 \leq j < i$ .

Podemos reescrever essa transformação da seguinte maneira

$$b_t = L_t^{-1}a_t. \quad (2.3.19)$$

A matriz de covariância de  $b_t$  é a matriz diagonal  $G_t$  da decomposição de Cholesky pois

$$\text{Cov}(b_t) = L_t^{-1}\Sigma_t(L_t^{-1})' = G_t. \quad (2.3.20)$$

Desta forma, o vetor de parâmetros relevante para a modelagem da volatilidade sob tal transformação é dado por

$$\Xi_t = (g_{11,t}, \dots, g_{kk,t}, q_{21,t}, q_{31,t}, q_{32,t}, \dots, q_{k1,t}, \dots, q_{k(k-1),t}) \quad (2.3.21)$$

com dimensão  $k(k+1)/2$ . Essa transformação simplifica a função de verossimilhança. Como  $|L_t| = 1$ , temos que

$$|\Sigma_t| = |L_t G_t L_t'| = |G_t| = \prod_{i=1}^k g_{ii,t}. \quad (2.3.22)$$

Caso a distribuição condicional de  $a_t$ , dada a informação passada, seja normal multivariada  $N(0, \Sigma_t)$ , então a distribuição condicional da série transformada  $b_t$

é normal multivariada  $N(0, G_t)$ , e a função log verossimilhança passa a ser extremamente simples

$$\ell(a_t, \Sigma_t) = \ell(b_t, \Xi_t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left[ \ln(g_{ii,t}) + \frac{b_{it}^2}{g_{ii,t}} \right], \quad (2.3.23)$$

onde  $g_{ii,t}$  é a variância de  $b_{it}$ .

Usar a decomposição de Cholesky para reparametrizar  $\Sigma_t$  tem diversas vantagens. De fato:

- a) pela equação (2.3.22), temos que  $\Sigma_t$  é positiva definida caso  $g_{ii,t} > 0$ , para todo  $i$ . Podemos alcançar a restrição de que  $\Sigma_t$  é positiva definida modelando  $\ln(g_{ii,t})$  ao invés de  $g_{ii,t}$ ;
- b) elementos do vetor de parâmetros  $\Xi_t$  da equação (2.3.21) são tanto coeficientes quanto variâncias residuais da regressão linear múltipla que ortogonalizam o choque dos retornos;
- c) o coeficiente de correlação entre  $a_{1t}$  e  $a_{2t}$  é dado por

$$\rho_{21,t} = \frac{\sigma_{21,t}}{\sqrt{\sigma_{11,t} \sigma_{22,t}}} = q_{21,t} \frac{\sqrt{\sigma_{11,t}}}{\sqrt{\sigma_{22,t}}}, \quad (2.3.24)$$

que varia ao longo do tempo caso  $q_{21,t} \neq \frac{\gamma \sqrt{\sigma_{22,t}}}{\sqrt{\sigma_{11,t}}}$ , onde  $\gamma$  é uma constante.

Através da utilização da equação (2.3.21) e da ortogonalidade entre os choques transformados  $b_{it}$ , obtemos

$$\sigma_{ii,t} = \text{Var}(a_{it} | F_{t-1}) = \sum_{v=1}^i q_{iv,t}^2 g_{vv,t}, \quad i = 1, \dots, k \quad (2.3.25)$$

$$\sigma_{ii,t} = \text{Cov}(a_{it}, a_{jt} | F_{t-1}) = \sum_{v=1}^i q_{iv,t} q_{jv,t} g_{vv,t} \quad j < i, \quad i = 2, \dots, k, \quad (2.3.26)$$

onde  $q_{vv,t} = 1$  para  $v = 1, \dots, k$ . Essas equações mostram a parametrização de  $\Sigma_t$  sob a decomposição de Cholesky.

### 2.3.3 Modelos **GARCH** Multivariados

Agora que já vimos alguns modelos de reparametrização de  $\Sigma_t$ , veremos nesta seção alguns modelos GARCH multivariados.

#### 2.3.3.1 Estimação da Covariância Exponencialmente Ponderada (*Exponentially Weighted Moving Averages - EWMA*)

Seja  $y_t$  um vetor  $k \times 1$  de uma série temporal multivariada

$$y_t = c + \epsilon_t, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, T,$$

onde  $c$  é o vetor de média  $k \times 1$ , e  $\epsilon_t$  é um vetor ruído branco  $k \times 1$  com média zero. A matriz de covariância da amostra é dada por

$$\Sigma = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})(y_t - \bar{y})', \quad (2.3.27)$$

onde  $\bar{y}$  é o vetor  $k \times 1$  da média amostral. Para permitir que a matriz de variância varie ao longo do tempo, usamos a seguinte ponderação exponencial decrescente

$$\Sigma_t = \lambda \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-1}' + \lambda^2 \epsilon_{t-2} \epsilon_{t-2}' + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \epsilon_{t-i} \epsilon_{t-i}', \quad (2.3.28)$$

onde  $0 < \lambda < 1$  para que ponderações menores sejam aplicadas em informações mais antigas. Assim, como temos que

$$\lambda + \lambda^2 + \dots = \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad (2.3.29)$$

os pesos são usualmente normalizados para que a soma de todos eles seja a unidade e então

$$\Sigma_t = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i}. \quad (2.3.30)$$

Podemos reescrever a equação (2.3.30) para obter a seguinte forma recursiva para a matriz de covariância exponencialmente ponderada

$$\Sigma_t = (1 - \lambda) \epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1} + \lambda \Sigma_{t-1}. \quad (2.3.31)$$

Referimo-nos a equação (2.3.31) como o modelo EWMA de covariância variante ao longo do tempo. Dada a equação (2.3.31), com um dado  $\lambda$  e com uma estimativa inicial de  $\Sigma_1$ , a matriz de EWMA pode ser calculada facilmente.

Se assumimos que  $\epsilon_t$  tem uma distribuição normal multivariada com média zero, e  $\Sigma_t = \text{Cov}_{t-1}(\epsilon_t | F_{t-1})$  seja tratada como a covariância de  $\epsilon_t$  condicionada aos dados passados, então a função de log-verossimilhança da série temporal será dada por

$$\ln L = -\frac{kT}{2} \ln(2\Pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T |\Sigma_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (y_t - c)' \Sigma_t^{-1} (y_t - c). \quad (2.3.32)$$

Como a matriz  $\Sigma_t$  pode ser calculada recursivamente, a função de log-verossimilhança pode ser encontrada facilmente. Portanto, o vetor de médias  $c$  e  $\lambda$  podem ser tratados como parâmetros desconhecidos e estimados usando uma estimação de quase-máxima verossimilhança, dado o valor inicial  $\Sigma_1$ .

### 2.3.3.2 Modelo *Vector Error Correction* Diagonal (VEC Diagonal)

A partir da equação (2.3.31), no contexto univariado, o modelo EWMA é dado por

$$\Sigma_t = (1 - \lambda) \epsilon_{t-1}^2 + \lambda \Sigma_{t-1}, \quad (2.3.33)$$

que é basicamente um GARCH(1,1) com  $a_1 = 1 - \lambda$ ,  $b_1 = \lambda$  e  $a_1 + b_1 = 1$ . Como  $a_1 + b_1$  corresponde ao coeficiente AR(1) na representação ARMA de modelos GARCH, a condição  $a_1 + b_1 = 1$  implica que o modelo GARCH é não estacionário no sentido fraco. No contexto univariado, Engle e Bollerslev (1986) denominaram este modelo de IGARCH. Dada a não estacionaridade dos modelos IGARCH e do EWMA, estes por vezes são desfavorecidos na modelagem da volatilidade.

Para preservar a intuição por trás do modelo EWMA que permite um modelo flexível e estacionário para a covariância variável ao longo do tempo, podemos generalizar o modelo EWMA da seguinte forma

$$\Sigma_t = A_o + \sum_{i=1}^p A_i \otimes (\epsilon_{t-i} \epsilon_{t-i}') + \sum_{j=1}^q B_j \otimes \Sigma_{t-j}, \quad (2.3.34)$$

onde o símbolo  $\otimes$  é o produto de Hadamard, e todas as matrizes de coeficientes tem dimensão  $k \times k$ . Esse modelo foi proposto por Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988) e é chamado de modelo DVEC(p,q).

Para o melhor entendimento do modelo, apresentamos o DVEC(1,1)

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} A_0^{(11)} & \\ A_0^{(21)} & A_0^{(22)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1^{(11)} & \\ A_1^{(21)} & A_1^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{t-1}^{(1)} \epsilon_{t-1}^{(1)} & \\ \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(1)} & \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^{(11)} & \\ B_1^{(21)} & B_1^{(22)} \end{bmatrix} \Sigma_{t-1} \quad (2.3.35)$$

onde  $\Sigma_t = \begin{bmatrix} \Sigma_t^{(11)} & \\ \Sigma_t^{(21)} & \Sigma_t^{(22)} \end{bmatrix}$  e somente a parte triangular inferior do sistema é considerado. A notação  $X^{(ij)}$  indica o elemento  $(i,j)$ -ésimo da matriz  $\mathbf{X}$ , e  $\epsilon_{t-1}^{(i)}$  é o elemento  $i$ -ésimo do vetor  $\epsilon_{t-1}$ . Podemos reescrever a matriz acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Sigma_t^{(11)} &= A_0^{(11)} + A_1^{(11)} \epsilon_{t-1}^{(1)} \epsilon_{t-1}^{(1)} + A_1^{(12)} \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(1)} + B_1^{(11)} \Sigma_{t-1}^{(11)} \\ \Sigma_t^{(12)} &= A_0^{(12)} + A_1^{(11)} \epsilon_{t-1}^{(1)} \epsilon_{t-1}^{(2)} + A_1^{(12)} \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(2)} + B_1^{(12)} \Sigma_{t-1}^{(12)} \\ \Sigma_t^{(21)} &= A_0^{(21)} + A_1^{(21)} \epsilon_{t-1}^{(1)} \epsilon_{t-1}^{(1)} + A_1^{(22)} \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(1)} + B_1^{(21)} \Sigma_{t-1}^{(21)} \\ \Sigma_t^{(22)} &= A_0^{(22)} + A_1^{(21)} \epsilon_{t-1}^{(1)} \epsilon_{t-1}^{(2)} + A_1^{(22)} \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(2)} + B_1^{(22)} \Sigma_{t-1}^{(22)}. \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

Desta forma, o elemento  $(i,j)$  da matriz de covariância variante ao longo do tempo depende somente de seus elementos defasados e dos correspondentes produtos cruzados de seus erros. Como resultado, a volatilidade de cada série segue um processo GARCH, e o processo da covariância também pode ser visto como um modelo GARCH em termos dos momentos cruzados dos erros.

Como a matriz de covariância deve ser simétrica, na prática basta que tratemos a matriz  $\Sigma_t$  como simétrica e consideremos somente o triângulo inferior do sistema. A matriz de covariância também deve ser positiva semi-definida. Entretanto, no modelo DVEC, a matriz  $\Sigma_t$  não pode ser positiva semi-definida, o que é considerado uma desvantagem deste modelo.



### 2.3.3.3 Modelo Baba, Engle, Kraf e Kroner (BEKK<sup>2</sup>)

Engle e Kroner (1995) propuseram uma representação alternativa para o VEC. O modelo BEKK fornece uma formulação alternativa da equação da variância condicional. Define-se o BEKK do GARCH(1,1) – M da seguinte forma

$$r_t = l\alpha_0 + \frac{[\delta_0 + \lambda_0 w'_{t-1} \Omega_t w_{t-1}] \Omega_t w_{t-1}}{w'_{t-1} \Omega_t w_{t-1}} + \varepsilon_t$$

$$(\varepsilon_t | F_{t-1}) \sim N(0, \Omega_t) \quad (2.3.37)$$

$$\Omega_t = C_0^* C_0^* + C_{111}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} C_{111}^* + C_{211}^* \Omega_{t-1} C_{211}^*,$$

onde  $C_0^*$ ,  $C_{111}^*$  e  $C_{211}^*$  são matrizes  $n \times n$  dos parâmetros e  $C_0^*$  é triangular.

No modelo VEC as matrizes de variância e covariância condicionais são somente dependentes de seus elementos defasados e dos produtos cruzados entre eles. Como exemplo, suponha que ocorra um choque em uma série  $Y_t$  no período  $t$ . A volatilidade condicional de  $Y_t$  e a correlação condicional entre  $Y_t$  e outra série, digamos,  $X_t$  do período  $t+1$  serão os únicos elementos que sofrerão impacto. Sendo assim, o choque em  $Y_t$  não afetará diretamente  $X_t$ . O BEKK é um modelo mais dinâmico do que o VEC, uma vez que fornece uma flexibilidade maior na matriz de covariância condicional. Entretanto, uma maior flexibilidade no modelo é penalizada pelo fato de que o BEKK necessita de dois parâmetros extras (parâmetros esses que não são necessários no VEC).

O modelo BEKK elimina as poucas representações definidas positivas permitidas pelo modelo VEC, ou seja, todas as representações VEC diagonais definidas positivas podem ser escritas pelo modelo BEKK. Este último, representa

<sup>2</sup> O termo BEKK surgiu do *paper* que antecede Engle e Kroner (1995) e que sintetiza o trabalho no *Multivariate Simultaneous Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* de Yoshi Baba, Robert Engle, Dennis Kraf e Ken Kroner.

o GARCH(1,1) multivariado e  $K = 1$ , e é estacionário quando  $\left[ (c_{111}^{*ij})^2 + (c_{211}^{*ij})^2 \right] < 1$ . A representação BEKK do GARCH-M é flexível e mais eficiente que a representação do operador VEC, já que garante que a matriz de variâncias e covariâncias condicionais seja positiva definida.

### 2.3.4 Modelos **GARCH** para Retornos Bivariados

Para uma série de retornos de um ativo de dimensão  $k$ , um modelo GARCH multivariado considera “equações exatas” para descrever a evolução do vetor  $\Xi_t$ , de dimensão  $k(k+1)/2$ , ao longo do tempo. “Equações exatas” ou “determinísticas” são equações que não possuem nenhum choque estocástico. Todavia, estas equações podem se tornar complicadas já para o caso  $k = 2$ , onde  $\Xi_t$  é tri-dimensional. Para simplificar o modelo, aplicaremos algumas restrições à estas equações.

#### 2.3.4.1 Modelo de Correlação Constante

Para manter o número de equações de volatilidade reduzidas, consideremos o caso específico onde o coeficiente de correlação  $\rho_{21,t} = \rho_{21}$  é invariante ao longo do tempo, com  $|\rho_{21}| < 1$ . Sob tais restrições,  $\rho_{21}$  é um parâmetro constante e o modelo de volatilidade consiste em duas equações para  $\Xi_t^*$ , o qual é definido por  $\Xi_t^* = (\sigma_{11,t}, \sigma_{22,t})$ . Um modelo GARCH(1,1) para  $\Xi_t^*$  é dado por

$$\Xi_t^* = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \Xi_{t-1}^*, \quad (2.3.38)$$

onde  $a_{t-1}^2 = (a_{1,t-1}^2, a_{2,t-1}^2)'$ ,  $\alpha_0$  é um vetor positivo de duas dimensões, e  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  são matrizes definidas não-negativas. Podemos expressar o modelo da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11,t} \\ \sigma_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1}^2 \\ a_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} \\ \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix}, \quad (2.3.39)$$

onde  $\alpha_{i0} > 0$ , para  $i = 1, 2$ . Definindo  $\eta_t = a_t^2 - \Xi_t^*$ , podemos reescrever o modelo inicial dado pela expressão (2.3.39) da seguinte forma

$$a_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)a_{t-1}^2 + \eta_t - \beta_1\eta_{t-1} \quad (2.3.40)$$

que é um modelo ARMA(1,1) bivariado para o processo  $a_t^2$ . O resultado é uma generalização direta do modelo univariado GARCH(1,1). Desta forma, temos os seguintes resultados:

- a) Caso todos os autovalores de  $\alpha_1 + \beta_1$ , com exceção de um, sejam positivos, então o modelo ARMA(1,1) bivariado para  $a_t^2$  é fracamente estacionário, e, portanto,  $E(a_t^2)$  existe. Isto implica que o processo dos retornos  $a_t$  tem uma matriz de covariâncias não condicional definida. A variância não condicional dos elementos de  $a_t$  é  $(\sigma_1^2, \sigma_2^2)' = (I - \alpha_1 - \beta_1)^{-1} \phi_0$ , e a covariância não condicional entre  $a_{1t}$  e  $a_{2t}$  é dada por  $\rho_{21}\sigma_1\sigma_2$ .
- b) Caso  $\alpha_{12} = \beta_{12} = 0$ , então a volatilidade de  $a_{1t}$  não depende da volatilidade passada de  $a_{2t}$ . Da mesma forma, caso  $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$ , então a volatilidade de  $a_{2t}$  não depende da volatilidade passada de  $a_{1t}$ .

- c) Caso tanto  $\alpha_1$  quanto  $\beta_1$  sejam diagonais, o modelo será reduzido para dois GARCH(1,1) univariados. Neste caso, o processo das duas volatilidades  $a_{1t}$  e  $a_{2t}$  não será dinamicamente relacionado.
- d) Estimções da volatilidade através do modelo podem ser obtidas por métodos de estimação similares àqueles do vetor do modelo ARMA(1,1). Para estimarmos  $\ell$  passos a frente, temos que:

$$\Xi_h^*(\ell) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\Xi_h^*(\ell - 1), \quad \ell > 1. \quad (2.3.41)$$

Estas estimativas são para a volatilidade marginal de  $a_{it}$ , para  $i = 1, 2$ . A estimativa da covariância entre  $a_{1t}$  e  $a_{2t}$  para  $\ell$  passos a frente é dada por  $\hat{\rho}_{21} [\sigma_{11,h}(\ell)\sigma_{22,h}(\ell)]^{0.5}$ , onde  $\hat{\rho}_{21}$  é a estimativa de  $\rho_{21}$  e  $\sigma_{ii,h}(\ell)$  é o  $i$ -ésimo elemento da matriz  $\Xi_h^*(\ell)$ .

#### 2.4 Vector Autoregression (VAR)

Seja  $Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt})'$  um vetor ( $n \times 1$ ) de uma série temporal. O modelo VAR básico  $p$ -defasado é dado por:

$$Y_t = c + \Pi_1 Y_{t-1} + \Pi_2 Y_{t-2} + \dots + \Pi_n Y_{t-n} + \varepsilon_t \quad (2.4.1)$$

onde  $t = 1, \dots, T$ ,  $\Pi_i$  é uma matriz ( $n \times n$ ) de coeficientes e  $\varepsilon_t$  é um vetor ruído branco ( $n \times 1$ ) com média zero não observável (não correlacionado ou independente) com matriz de covariância  $\Sigma$  invariante ao longo do tempo.

Um modelo bivariado VAR(2) tem o seguinte formato:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_{11}^1 & \pi_{12}^1 \\ \pi_{21}^1 & \pi_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_{11}^2 & \pi_{12}^2 \\ \pi_{21}^2 & \pi_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-2} \\ y_{2t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

onde  $\text{cov}(e_{1t}, e_{2s}) = \sigma_{12}$  para  $t = s$ ; 0 caso contrário. Podemos perceber que cada equação possui os mesmos regressores (valores defasados de  $y_{1t}$  e  $y_{2t}$ ). Portanto, o modelo VAR( $p$ ) é uma *seemingly unrelated regression* (SUR) com variáveis defasadas e termos determinísticos como regressores comuns.

Na notação de operadores defasados, o VAR( $p$ ) é escrito como:

$$\Pi(L)Y_t = c + e_t \quad (2.4.3)$$

onde  $\Pi(L) = I_n - \Pi_1 L - \dots - \Pi_p L^p$ . O VAR( $p$ ) é estável se as raízes de

$$\det(I_n - \Pi_1 z - \dots - \Pi_p z^p) = 0 \quad (2.4.4)$$

fiquem de fora do círculo unitário.

Caso  $Y_t$  de (2.4.1) tenha covariância estacionária, então a média não condicional é dada por:

$$\mu = (I_n - \Pi_1 - \dots - \Pi_p)^{-1} c. \quad (2.4.5)$$

Sendo assim, a forma da média ajustada do VAR( $p$ ) é dada por:

$$Y_t - \mu = \Pi_1(Y_{t-1} - \mu) + \Pi_2(Y_{t-2} - \mu) + \dots + \Pi_n(Y_{t-n} - \mu) + e_t \quad (2.4.6)$$

O modelo VAR( $p$ ) básico pode ser muito restritivo para representar suficientemente as características básicas dos dados. Convém ressaltar que outros termos determinísticos como a tendência linear ao longo do tempo ou *dummies* sazonais podem ser requeridas para representar apropriadamente aos

dados. Além disso, variáveis estocásticas exógenas podem ser necessárias também.

#### 2.4.1 Causalidade de Granger

Uma das aplicações mais comuns do modelo VAR( $p$ ) é a previsão. A estrutura do modelo VAR nos fornece informações sobre o uso de uma variável (ou grupo de variáveis) para a previsão de outra variável ou grupo de variáveis. Se uma variável  $y_1$  é encontrada ser útil para prever outra variável  $y_2$ , então dizemos que  $y_1$  causa-Granger  $y_2$ . Formalmente,  $y_1$  falha para causar-Granger  $y_2$  se, para todo  $s > 0$ , o erro quadrático médio de uma previsão de  $y_{2,t+s}$  baseada em  $(y_{2,t}, y_{2,t-1}, \dots)$  é idêntico ao da previsão de  $y_{2,t+s}$  baseada em  $(y_{2,t}, y_{2,t-1}, \dots)$  e  $(y_{1,t}, y_{1,t-1}, \dots)$ . Claramente o conceito de causalidade de Granger não implica em causalidade verdadeira; ela apenas implica em habilidade de previsão.

A seguir damos o exemplo do modelo VAR bivariado. Em um modelo bivariado VAR( $p$ ) para  $Y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ ,  $y_2$  falha em causar-Granger se para todo o coeficiente de matrizes  $p$  VAR  $\Pi_1, \dots, \Pi_p$  são triangulares inferiores. Desta forma, o modelo VAR( $p$ ) tem a forma

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_{11}^1 & 0 \\ \pi_{21}^1 & \pi_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_{11}^p & 0 \\ \pi_{21}^p & \pi_{22}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-p} \\ y_{2,t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix} \quad (2.4.7)$$

de modo que todos os coeficientes dos valores defasados de  $y_2$  são zero na equação para  $y_1$ . De modo semelhante,  $y_1$  falha ao causar-Granger  $y_2$  se todos os coeficientes defasados de  $y_1$  são zero nas equações de  $y_2$ . As  $p$  restrições lineares dos coeficientes implicados pela não causalidade de Granger podem ser testados através da utilização da estatística de Wald. Definimos a estatística de Wald como

$$Wald = (R \cdot \text{vec}(\hat{\Pi}) - r)' \{ R [a \text{ var}(\text{vec}(\hat{\Pi}))] R' \}^{-1} (R \cdot \text{vec}(\hat{\Pi}) - r) \quad (2.4.8)$$

Note que se  $y_2$  falha ao causar-Granger  $y_1$  e ao mesmo tempo  $y_1$  falha ao causar-Granger  $y_2$ , então as matrizes de coeficientes do modelo VAR  $\Pi_1, \dots, \Pi_p$  são diagonais.

Como exemplo, considere um VAR( $p$ ) com  $n = 3$  e  $Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})'$ . Neste modelo,  $y_2$  não causa Granger  $y_1$  se todos os coeficientes defasados de  $y_2$  são zero na equação de  $y_1$ . De modo semelhante,  $y_3$  causa Granger  $y_1$  se algum de seus coeficientes defasados é diferente de zero na equação de  $y_1$ .

### 3 MODELOS EMPÍRICOS DE VOLATILIDADE

Neste capítulo, descreveremos alguns artigos que fizeram uso do mesmo instrumental teórico que o utilizado nesta dissertação. A revisão bibliográfica foi dividida em duas partes: GARCH Univariado e GARCH Multivariado.

#### 3.1 GARCH Univariado

Começamos com o caso mais simples: GARCH Univariado.

##### 3.1.1 MORAIS e PORTUGAL (1998)

Morais e Portugal (1998) comparam a estimativa da volatilidade do IBovespa obtida por processos determinísticos (quando a variância passada é conhecida) e estocásticos (quando a variância passada é desconhecida) em três períodos: a crise do México, a crise asiática e a moratória russa. A amostra de 1060 observações compreende o período de 04/07/1994 a 09/10/1998. A justificativa desta data se deve ao fato de que os autores objetivam estudar o comportamento dos agentes frente a um novo cenário, tal como o Plano Real. Os modelos são comparados via AIC e Schwartz e, depois, em relação ao melhor ajuste de previsão um passo a frente vinte e uma vezes, através da análise das estatísticas de erro.

No caso determinístico, o melhor modelo encontrado pelos autores foi um  $AR(2) + D1 + D2 + GARCH(1,1)$ , onde  $D1$  e  $D2$  são variáveis *dummies*. Já no caso estocástico, o modelo mais eficiente foi o  $AR(2) + D1 + D2 + Stochastic Volatility (SV)$  estacionário. Neste último, foi constatado que a presença de variáveis *dummies* no modelo obtém melhores resultados, visto que estes são bons sinalizadores da existência de *outliers*.

Pelo critério do erro médio (ME) na previsão dos modelos, os autores concluíram que o modelo AR-SV é melhor. Entretanto, através da raiz do erro



quadrático médio (RMSE) e *Minimum Average Error* (MAE) indicam que o GARCH deve ser preferido.

Morais e Portugal concluem que GARCH(1,1) é o modelo que melhor estima a volatilidade em períodos de calma no mercado. Todavia, em períodos mais conturbados, o modelo estocástico obtém resultados mais satisfatórios. Através de testes utilizando variáveis *dummies*, os autores não encontraram na série indícios de efeitos de “fim de semana” e “dia de semana”. Este resultado vai de encontro com o que se esperava, visto que o período analisado é dado por taxas de inflação e desvio padrão dos retornos nominais baixos.

O efeito *leverage* foi evidenciado para a série nos modelos EGARCH e GJR<sup>3</sup>, enquanto a aglomeração da variância ocorreu somente no modelo EGARCH. A utilização do GARCH-t (distribuição *t* – Student) para ajustar a distribuição dos erros gerou poucos ganhos de previsão. Na seleção dos modelos determinísticos, o GARCH (1,1) apresentou, em geral, melhores resultados.

### 3.1.2 SILVEIRA, BARCINSKI, ALMEIDA e GARCIA (1997)

Silveira et al. (1997) ressaltam que a família GARCH sofre o inconveniente de não capturar o “efeito assimetria”. Este efeito se baseia no fato de que, na prática, choques negativos no retorno dos ativos apresentam impactos maiores que os positivos sobre a volatilidade deste mesmo ativo. Desta forma, os autores propõem uma reestimação da volatilidade do retorno dos ativos a partir de modelos parametricamente menos restritivos.

Dentre os modelos que captam o “efeito assimetria”, os autores utilizam o GJR e o EGARCH. Todavia, ao comparar estes dois modelos com outros da família GARCH (IGARCH sem constante e com constante e o GARCH(1,1)), através de testes de especificação, testes de *stress* e de simulações históricas, os autores concluem que o modelo com o melhor desempenho é um IGARCH sem constante. Esta conclusão desencoraja o uso dos modelos GJR e do EGARCH.

---

<sup>3</sup> Especificação utilizada para captar o efeito de assimetria proposto por Glosten, Jagannathan e Runkle (1993).

### 3.1.3 ZIEGELMANN e PEREIRA (1997)

Ziegelmann e Pereira (1997) buscam incorporar o conceito de deformação temporal na estimação da volatilidade. Para os autores, dias em que novidades não surgem, sejam “boas” ou “ruins”, são caracterizados por pouca movimentação de preços. Desta forma, o mercado financeiro se modifica com a chegada de novas informações e não com o decorrer do tempo calendário.

Os autores iniciam o trabalho filtrando a série do IBovespa (uma vez que os retornos da série são autocorrelacionados). Após usar o modelo AR(1), os autores concluem que a estrutura de autocorrelação dos retornos, observada antes de filtrar a série, foi eliminada. Ziegelmann e Pereira (1997) utilizam os resíduos do AR(1), os retornos, os valores absolutos, o volume de negociação em US\$, todas as defasagens de um período e o número de noite entre dois dias consecutivos em que o mercado esteve aberto (para incorporar o efeitos de dias sem negociação, visto que o mercado reage diferentemente após um fim-de-semana, por exemplo) para estimar o modelo de deformação temporal.

Após estimar sete modelos (1 sem deformação temporal, 3 com deformação temporal a tempo discreto e 3 com deformação temporal a tempo contínuo) e compará-los, os autores concluem que a volatilidade estimada com deformação temporal é mais eficiente, visto que:

- a) possui menos ruído;
- b) utiliza a idéia de alteração do mercado à medida que chegam novas informações;
- c) há relação entre as variações destes processos e o comportamento da volatilidade;
- d) é possível utilizar esta abordagem para dados de alta frequência.

Entretanto, dependendo da deformação, uma desvantagem deste processo pode ser a impossibilidade de previsão mais do que um passo a frente.

Na aplicação dos dados do IBovespa, o artigo concluiu que: quanto maior o volume negociado no dia anterior, maior a volatilidade do dia em questão; retornos

negativos no dia anterior conduzem a uma volatilidade maior do que retornos positivos no dia anterior.

#### 3.1.4 KARANASOS e KIM (2000)

Os autores procuram selecionar o melhor modelo para as seguintes séries: *Korean Stock Price Index* (KOSPI), *Japanese Nikkei Index* (NIKKEI), *Taiwanese SE Weighted Index* (SE) e *Singaporean Straits Time Price Index* (ST). Usando do critério AIC, os autores concluem que, supondo que a distribuição condicional é normal, o EGARCH(1,4) foi considerado o melhor modelo para dois dos quatro índices. Para uma distribuição condicional “double exponential”, o EGARCH(1,3) foi escolhido para o SE e NIKKEI, enquanto o EGARCH(2,1) e EGARCH(1,2) foram escolhidos para o KOSPI e ST, respectivamente. Quando supomos que a distribuição condicional é o erro generalizado, o EGARCH(1,2), EGARCH(2,1) e EGARCH(3,3) foram escolhidos, respectivamente, para os índices SE, ST e KOSPI.

#### 3.1.5 UNE e PORTUGAL (2005)

Ao ser eleito como Presidente do Brasil em 2002, Lula declarou: “a esperança venceu o medo”. Traduzindo econometricamente a frase de Lula, devemos analisar se o parâmetro da média condicional visto como uma variável fracamente exógena na equação da variância condicional é estatisticamente diferente de zero e positivo. O artigo de Une e Portugal (2005) procura analisar as interrelações entre Risco-País (“esperança”) e variância condicional (“medo”).

Os autores dividem a série “*EMBI Plus Brazilian Stripped Sovereign Spread*” em três grandes clusters: o primeiro se deve à “*Tequila Crises*” e a segundo é uma consequência da primeira. O terceiro cluster é devido a crise eleitoral brasileira.

Une e Portugal (2005) enquadram a série nos seguintes modelos: GARCH, TGARCH, AEGARCH, PGARCH, CGARCH e o TCGARCH. Ao realizar a estimação, os autores detectaram que algumas especificações não foram serialmente não correlacionadas ou não obtiveram erros homoscedásticos padronizados. Para resolver este problema, foi incorporada uma variável *dummy* que assume o valor 1 para estes *outliers* e 0 caso contrário. Para evitar o problema da multi-modalidade na presença de *outliers* (Doornik e Ooms, 2003), os autores também incluíram uma *dummie* defasada em um período na equação da variância condicional. Caso a incorporação das *dummies* não seja suficiente para garantir que os erros sejam ruídos brancos, o processo continua.

Além de analisar o ajuste do modelo, os autores também utilizam a função de verossimilhança e o *Mean Squared Forecast Error* (MSFE) para mensurar a eficiência do modelo. Definimos MSFE por

$$MSFE = \sum_{t=n}^{R+P} \left( h_t - \hat{h}_{t-n}^{(i)} \right)^2. \quad (2.1)$$

Une e Portugal (2005) usam o modelo GARCH(1,1) como *benchmark* em relação aos modelos estimados.

No geral, com exceção do AEGARCH, a inclusão do efeito “*in-mean*” não minimizou o critério de informação, aumentou a log-verossimilhança e tampouco se mostrou estatisticamente diferente de zero. Isso indica que “medo” não supera “esperança”.

Teoricamente, modelos com menor critério de AIC devem ter o menor MSFE. Na tabela de cálculo do MSFE, os autores constatam que a inclusão do efeito “*in-Mean and Level*” aprimora a *performance* de estimação nos modelos. Desta forma, a inclusão do efeito “*in-mean*” não diminui o critério de informação. Entretanto, constatou-se que a inclusão do efeito “*level*” aprimora o critério de informação. Os autores constataram que o melhor modelo foi o AEGARCH.

Como conclusão, os autores afirmam que Lula estava certo ao fazer a afirmação supra citada. “Medo” e “esperança” não só exercem um papel

importante no curto prazo, no caso brasileiro, como têm se movido na mesma direção ao longo do tempo. Todavia, como citado anteriormente, quando a incerteza muda para um regime mais alto sem um aumento do mesmo patamar no “*level*” não há condição suficiente para que uma crise de confiança ocorra em um mercado emergente.

### 3.2 GARCH Multivariado

Consideraremos agora o caso do GARCH Multivariado.

#### 3.2.1 MANERA (2003)

Manera (2003) investiga interações financeiras entre os países da *Pacific Basin Region* (Coréia, Cingapura, Malásia e Hong Kong) com os países Japão e EUA. A inovação do artigo está na utilização do modelo STAR-GARCH (*Smooth Transition Autoregressive – GARCH*). O trabalho almeja testar se o mercado acionário americano impacta mais do que o Japão no mercado dos países da *Pacific Basin Region*, mesmo que não de forma linear. Desta forma, a idéia é descobrir quem é o líder financeiro dos países da *Pacific Basin Region*.

O autor executou os seguintes passos para a investigação empírica:

- a) checkou as propriedades de autocorrelação e, através deste, determinou a ordem “*p*” do modelo AR;
- b) testou a existência de linearidade e também o poder explicatório de variáveis “*threshold*” alternativas;
- c) estimou um L-STAR e testou a adequação do mesmo;
- d) testou se existem efeitos ARCH nos resíduos STAR;
- e) estimou um modelo STAR-GARCH;
- f) corrigiu a presença de *outliers* através dos algoritmos STA e STA modificado;
- g) reestimou o modelo STAR e checkou se houve melhora significativa.

Apesar de se verificar que o Japão detinha a liderança sobre os países da *Pacific Basin Region* antes dos anos 90, os autores concluem que, após a crise japonesa, os EUA obtiveram a liderança financeira sobre os países da *Pacific Basin Region*. Isso é um indicativo de abertura dos países asiáticos frente a um mercado financeiro global.

### 3.2.2 GALVÃO, PORTUGAL e RIBEIRO (2000)

Galvão, Portugal e Ribeiro (2000) buscam verificar a relação entre o mercado acionário brasileiro futuro e à vista, de forma a observar o comportamento da volatilidade nesse mercado e inferir relações de causalidade. Os autores procuram verificar como ocorre a transmissão entre os mercado à vista e futuro no Brasil e se o último tem desestabilizado o primeiro, no sentido de aumentar sua volatilidade.

Os autores fazem uma análise empírica da relação entre a volatilidade nos mercados futuro e à vista do índice de ações para um período em que choques exógenos afetaram este mercado. Para testar a hipótese de causalidade os autores utilizam os correlogramas cruzados e um modelo GARCH bivariado.

Para verificar a hipótese de que a volatilidade do mercado futuro não causa volatilidade no mercado à vista, os autores empregam dois testes. Ambos são baseados no conceito de causalidade de Wiener-Granger. Para o caso de causalidade na variância, foi utilizado o método de Comte e Liebermann (1997). Os autores demonstram que existem interrelações entre causalidade na média e causalidade na variância. No segundo teste, consideram o efeito da não-causalidade na variância, impondo restrições em um modelo GARCH bivariado.

Na parte final do trabalho, os autores apresentam os resultados dos testes de causalidade baseados nas correlações cruzadas dos resíduos padronizados ao quadrado. Os resultados indicam forte correlação contemporânea, resultado de que boa parte da troca de informação entre os mercado é realizada no mesmo dia. Também constatam que o mercado à vista lidera o mercado futuro. No entanto, esses resultados não implicam na causalidade em variância. Isto se deve ao fato

de que causalidade em variância se refere ao caso de simples resultados padronizados, diferentemente dos resultados encontrados pelos autores.

Já na abordagem de Comte e Liebermann (1997), os autores utilizam o modelo *Vector Autoregressive* (VAR). Os testes de diagnósticos dos resíduos indicam heteroscedasticidade. Esse problema não é resolvido com a inclusão de novos componentes autoregressivos. No entanto, são conduzidos testes de causalidade utilizando o teste de Wald para restrições, com ressalvas para o problema dos resíduos não serem gaussianos. Os autores utilizam um modelo GARCH bivariado obtendo a mesma conclusão.

Os resultados indicam que o mercado à vista lidera a transmissão de informações no mercado, o que implica que o mercado futuro não causa aumento de volatilidade no mercado à vista.

### 3.2.3 TSE e TSUI (2000)

O artigo de Tse e Tsui (2000) foi motivado pela necessidade do modelo MGARCH incorporar correlações variantes ao longo do tempo e ainda por cima, satisfazer a condição de ser positiva-definida durante a otimização. Os autores citam o modelo BEKK de Engle e Kroner (1995) como alternativa. Todavia, ressaltam que o modelo possui parâmetros de difícil interpretação. Além disso, seus efeitos na variância futura e na covariância ainda não foram vistos.

No artigo, os autores propõem um modelo MGARCH inovador, o VC-GARCH, com correlação variante ao longo do tempo. As variáveis de interesse são a variância condicional e a correlação condicional. Assume-se uma estrutura VECM diagonal na qual as variâncias condicionais dos termos seguem uma formulação GARCH univariada. O modelo construído, segundo os autores, também possui uma matriz de correlação condicional positiva definida durante a otimização. Impondo algumas restrições na equação da matriz de correlação condicional, os autores constroem um modelo MGARCH no qual essa matriz é garantida como positiva definida durante a otimização. Desta forma, o modelo

proposto possui a intuição e interpretação de um modelo GARCH univariado e ainda retém a propriedade de ter uma matriz positiva-definida.

Após definir o modelo, Tse e Tsui (2000) aplicam o modelo a três bases de dados reais:

- a) Marco Alemão x USD e Ien Japonês x USD.
- b) NAg Seng Index (Hong Kong) e SES Index (Cingapura);
- c) Preço setorial dos índices de finanças, propriedades e utilidades da bolsa de Hong Kong.

Como conclusão, os autores acreditam que permitir que o modelo de correlação constante tenha correlações variantes ao longo do tempo leva a resultados que efetivamente não podem ser encontrados através do modelo de correlação constante. Todavia, os autores enfatizam que o VC-MGARCH não deve ser entendido como o melhor modelo MGARCH para os dados, mas que deve ser visto como uma alternativa interessante visto a sua facilidade de estimação.

#### 3.2.4 KLAASSEN (1999)

Klaassen (1999) analisa a dependência ao longo do tempo da correlação da taxa de câmbio através de um novo modelo GARCH multivariado. A idéia do modelo vem do fato de que a correlação entre diferentes taxas cambiais é que faz com que o GARCH multivariado seja mais difícil de modelar do que o GARCH univariado.

O primeiro passo para a criação do modelo de Klaassen (1999) é remover todas as correlações não-condicionais através da retirada dos principais componentes da taxa de câmbio. Feito isso, é especificado um modelo GARCH univariado para cada um destes componentes. Após, Klaassen (1999) usa o inverso dos componentes principais para transformar os componentes dos



momentos condicionais na média condicional e na variância da própria taxa cambial.

A justificativa da criação do modelo se baseia no fato de que temos que estimar não só as variâncias condicionais, mas também as covariâncias condicionais no modelo. Desta forma, o GARCH multivariado canônico resulta ficar com muitos parâmetros. O autor sugere a utilização do BEKK como alternativa. Todavia, quando o sistema aumenta, a estimação também fica mais complexa. Como alternativa, Klaassen (1999) sugere a utilização de seu modelo, que por sua vez possui vantagens práticas em relação às outras opções.

Os dados incluem a taxa de câmbio USD *versus Belgian Franc, Canadian Dollar, French Franc, German Mark, Italian Lira, Japanese Yen, Dutch Guilder e British Pound*. Os dados são compostos por 1.216 observações de retornos semanais que vão de 1974 até 1989.

Klaassen mostra que a incorporação do último componente permite que o modelo fator GARCH capture os efeitos da política monetária implantada pelo Banco Central Alemão a partir de 1985. Neste ano o Banco Central fez uma política de taxa cambial fixa para o *Guilder-Mark*.

O autor conclui que as taxas de câmbio das séries analisadas começaram a cair após o primeiro choque de petróleo. Todavia, ao final dos anos 70, estas estavam aumentando, e, nos anos 80, estavam no patamar mais alto da série. Klaassen (1999) também mostra que a taxa de câmbio ficou mais frouxa, ou seja, menos relacionada com as outras séries a partir dos anos 80. Esse fato se deve ao colapso dos mercados emergentes em 1992, que por sua vez fez com que as taxas de câmbio européias ficassem menos correlacionadas.

### 3.2.5 HO e TSUI (2004)

Ho e Tsui (2004) utilizam dois modelos GARCH multivariados com correlação variante ao longo do tempo para analisar os setores do mercado acionário japonês. A utilização destes modelos possibilita ganhos em eficiência ao

se fazer a estimação conjunta dos parâmetros além de fornecer a variação histórica da correlação condicional entre as séries dos retornos setoriais do mercado. Os setores analisados são os seguintes: *Air Transportation* (ATRN), *Electric Power and Gas* (EPOW), *Precision Instruments* (PREI) e *Other Products* (OPRD).

O primeiro modelo utilizado é o *Varying Correlations Fractionally Integrated Asymmetric Power ARCH* (VC-FIAPARCH) e o VC-FI *Asymmetric GARCH*. A justificativa da utilização destes modelos se deve ao fato de que eles capturam bem a assimetria e a longa persistência na volatilidade, bem como a correlação variante ao longo do tempo. Além disso, os autores consideram o modelo simples de ser estimado e interpretado, visto que uma vez que a convergência é atingida, a matriz de variância e covariância condicionais automaticamente satisfaz a condição de positiva-definida. Os modelos acima descritos são aplicados ao TOPIX (*Tokyo Stock Price Index*) e ao TSE (*Tokyo Stock Exchange*).

Ho e Tsui (2004) constatam que a ausência da assimetria na volatilidade em alguns setores têm uma grande implicação no apreçamento de opções e na construção de portfólios diversificados baseado em diferentes setores. A justificativa disto é que o apreçamento do ativo pode estar incorreto ao se considerar o efeito assimetria. Além disso, os autores detectam evidências de que há uma longa persistência na volatilidade para todos os setores, independente do modelo GARCH utilizado. Alguns setores aparentam ter graus de integração fracionada muito similares a outros. Finalmente, é observado que as correlações condicionais são altamente positivas e significativamente variantes ao longo do tempo, o que implica que a natureza dinâmica da correlação setorial pode ser melhor explorada ao construir portfólios diversificados.

Os autores concluem que os modelos propostos conseguem, parcimoniosamente, capturar a longa memória, a volatilidade condicional assimétrica e a correlação variante ao longo do tempo associada aos retornos do mercado acionário. Ho e Tsui (2004) provam que o efeito assimetria não é invariavelmente presente nos índices setoriais. Além disso, a correlação condicional é freqüentemente positiva e significativamente variante ao longo do

tempo. Há também uma evidência da existência de persistência da volatilidade e longa memória. Finalmente, os autores concluem que modelos com integração fracionária (FI) geralmente têm uma *performance* melhor do que os modelos sem estruturas de memória longa na variância condicional.

## 4 ANÁLISE QUANTITATIVA DA VOLATILIDADE ENTRE OS ÍNDICES DOW JONES, IBOVESPA E S&P 500

Neste capítulo buscaremos tirar conclusões com base na metodologia vista nos capítulos anteriores. Primeiramente, faremos a estimação da volatilidade das séries financeiras IBovespa, Dow Jones e *S&P 500* através de modelos GARCH univariados. Após encontrar o modelo que melhor se ajusta aos dados, faremos o mesmo processo para modelos GARCH bivariado – onde analisaremos modelos para as séries combinadas IBovespa X *S&P 500*, IBovespa X Dow Jones e Dow Jones X *S&P 500*. Buscaremos, através desta metodologia, averiguar se existe alguma relação causal entre estes três índices. Nossa hipótese é que os índices da bolsa americana impactam o índice brasileiro, visto que, dentre outros motivos, os índices americanos têm um volume de negociação muito superior, servindo assim de referência para o mercado brasileiro.

Após realizar esta estimação, poderemos obter uma previsão da volatilidade plausível para cada uma das três séries. Deste modo, poderemos utilizar estes modelos para tomar algumas decisões importantes quanto à volatilidade destes ativos.

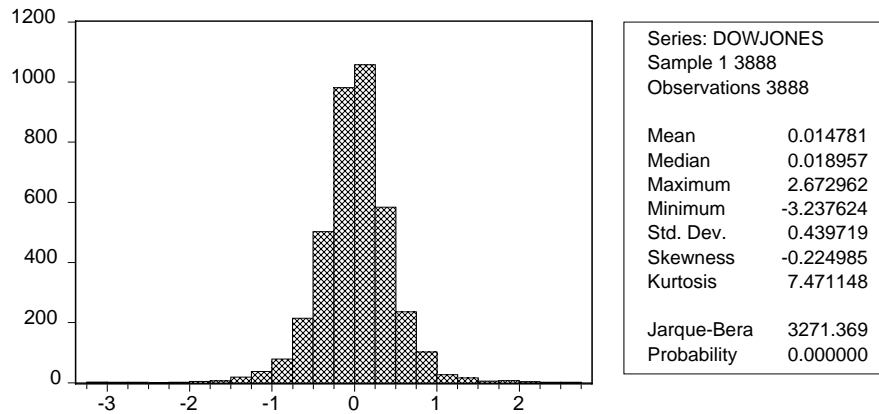
### 4.1 Análise dos Dados

Inicialmente, faremos uma análise dos dados a serem utilizados ao longo deste capítulo. Para modelarmos a variância destas séries através de um processo ARCH, é necessário que transformemos estas séries. Com este intuito, consideramos a seguinte transformação

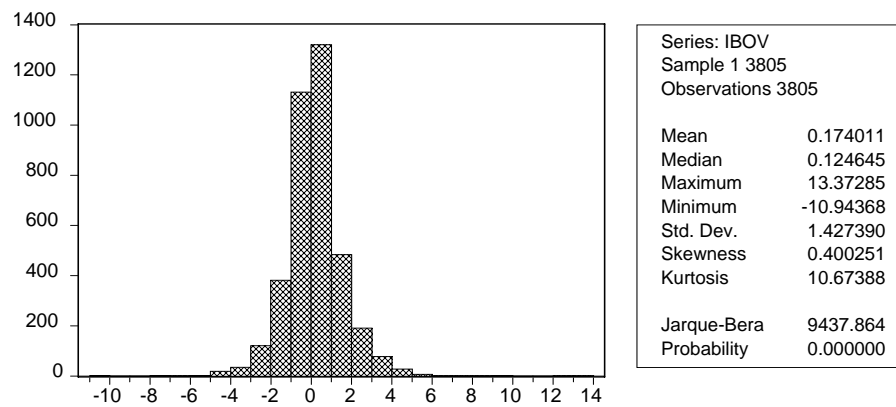
$$y_t = 100 ( \ln X_t - \ln X_{t-1} ),$$

onde  $X_t$  é a série original dos dados. Com essa transformação, teremos a série dos retornos do índice. O gráfico do retorno dos índices IBovespa, Dow Jones e S&P 500 pode ser visto na Introdução.

A seguir, na Figura 4.1.1 (a), (b) e (c), apresentamos o histograma e algumas características estatísticas das três séries dos retornos.



(a)



(b)

(CONTINUA)

(CONTINUAÇÃO)

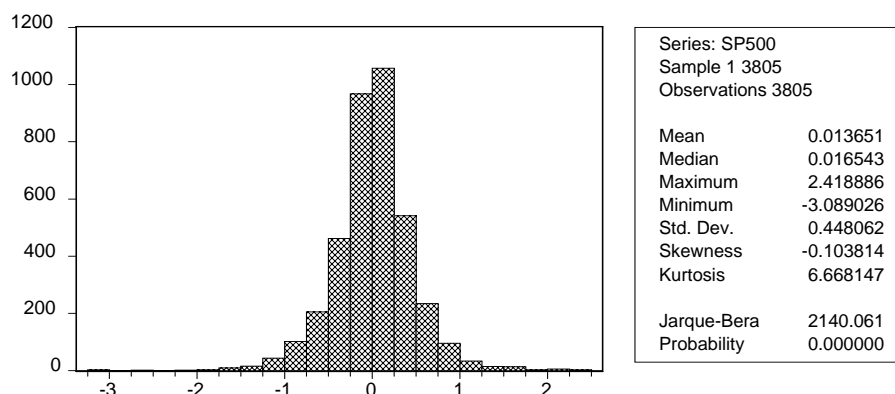


Figura 4.1.1 - (a) Histograma e estatísticas da série Dow Jones

(b) Histograma e estatísticas da série Ibovespa

(c) Histograma e estatísticas da série S&P 500

A Figura 4.1.1 (a) indica um histograma que apresenta uma cauda um pouco mais longa do lado direito, indicando um largo retorno positivo. Para modelos GARCH, quando um retorno é maior do que outro, em módulo, podemos dizer que o maior acaba levando a uma volatilidade maior (volatilidade essa que acaba possuindo diferentes níveis em modelos que incorporam o efeito assimétrico). A Figura 4.1.1 (b), pelo outro lado, aparentemente possui a cauda esquerda do mesmo tamanho que a direita. Por último, podemos reparar que a Figura 4.1.1 (c) apresenta uma cauda levemente mais longa do lado direito, indicando que, assim como a Figura 4.1.1 (a), o retorno positivo é maior do que o negativo. No geral, podemos reparar que a Figura 4.1.1 (a) e (c) tem comportamento muito semelhante, seja pelas caudas que indicam maior retorno positivo, quanto pelos indicadores de média, desvio padrão e curtose.

Podemos perceber que a distribuição marginal das três séries é praticamente simétrica. Entretanto, esta distribuição não aparenta ser uma normal, o que é confirmado pelo teste Jarque-Bera. Neste teste de normalidade, Jarque-Bera mostraram que, assintoticamente, a estatística JB segue a distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade, de modo que, se o valor  $p$  calculado for suficientemente baixo, podemos rejeitar a hipótese de que os resíduos têm

distribuição normal. Salientamos que a curtose deveria ter um coeficiente em torno de 3 caso a distribuição fosse normal. Podemos perceber, através do quadro ao lado do gráfico, que tanto a Figura 4.1.1 (a) quanto as Figuras 4.1.1 (b) e (c), um valor  $p$  muito próximo de zero, indicando assim a não normalidade residual dos dados. Cabe, por fim, ressaltar que esta não normalidade dos resíduos das séries é condizente com a hipótese de existência de heteroscedasticidade. Devido a esta hipótese, os pressupostos de ruído branco para os resíduos são quebrados.

Para termos certeza de que o modelo GARCH que pretendemos utilizar é o ideal para as séries é interessante que façamos antes um teste para averiguar a existência de efeitos ARCH nos dados. Para testarmos a existência desses efeitos, podemos realizar o teste LM (*Lagrange Multiplier*). Para os retornos do índice IBovespa foi encontrado o valor de 431,3995, enquanto que para os índices S&P 500 e Dow Jones encontramos respectivamente 440,6671 e 409,1512 para a estatística de teste. Todavia, para todas as séries, encontrou-se um  $p$ -valor menor do que 0.001, rejeitando assim a hipótese nula de que não existem efeitos ARCH. Desta forma, prosseguiremos com a análise buscando adequar a série à algum modelo da família GARCH.

Seja  $r_t$  o retorno de um ativo do índice IBovespa. A idéia básica ao analisarmos a volatilidade de um ativo é que o mesmo é serialmente não correlacionado, porém dependente. Para o melhor entendimento, é interessante analisarmos o gráfico da Função de Autocorrelação (ACF) e o da Função de Autocorrelação Parcial (PACF) das séries, bem como a ACF das séries ao quadrado. A ACF e PACF para cada uma das séries de índices podem ser vistas no Anexo A1, A2 e A3.

Podemos observar que as três séries possuem ACF relativamente bem comportadas para a série dos retornos. Além disso, pode-se perceber que os dados possuem uma dependência que decai lentamente para a série elevada ao quadrado. Isso sugere que o retorno das séries é não independente. Em outras palavras, podemos ver, através da ACF da série ao quadrado, que os retornos de todos os índices possuem autocorrelação ao menos até o lag 7, indicando que os índices Dow Jones, IBovespa e S&P 500 devem exibir uma heteroscedasticidade

condicional variante ao longo do tempo, ou, em outras palavras, *clusters* de volatilidade. Portanto, podemos aceitar a hipótese de existência de heteroscedasticidade nos dados. Desta maneira, é condizente seguirmos para o próximo passo ajustando um modelo da família GARCH para cada uma das séries.

#### 4.2 GARCH Univariado

O comportamento volátil do mercado financeiro é comumente referido como “volatilidade”. Esta se tornou um conceito fundamental para algumas práticas financeiras, tais como: gestão de risco, diversificação de portfólio, apreçamento de ativos, entre outros. Supondo como verdadeira a hipótese de heteroscedasticidade, buscaremos nesta parte da dissertação ajustar modelos GARCH univariados a cada uma das três séries. A idéia básica por detrás desta adequação é capacidade de prever movimentos do mercado financeiro. No momento em que conseguimos modelar um índice financeiro como o IBovespa, conseguimos prever qualquer outro papel deste mercado. Desta forma, conseguiremos ter um maior controle sobre o risco, o que possibilitaria ao investidor uma melhor gestão sobre o seu portfólio. A seguir mostraremos alguns modelos estimados para a série do Dow Jones. Com o intuito de analisar qual o modelo que melhor explica o comportamento da série serão usados dois critérios: o de informação de Akaike (AIC) e o bayesiano, também conhecido como o critério de informação de Schwarz (BIC). Tanto o AIC, quanto o BIC, servem para avaliar o ajuste do modelo aos dados. Formalmente, definimos

$$AIC(k) = T \ln\left(\frac{SQR}{n}\right) + 2k \quad (4.2.1)$$

e

$$BIC(k) = T \ln\left(\frac{SQR}{n}\right) + k \ln(n), \quad (4.2.2)$$



onde  $k$  é o número de parâmetros ARMA estimados,  $n$  é o número de observações e  $SQR$  é a soma dos quadrados dos resíduos do modelo. Vejamos agora na Tabela 2 a avaliação dos modelos<sup>4</sup>.

#### 4.2.1 Dow Jones

Tabela 2 - Análise de modelos GARCH univariado para a série dos retornos do índice Dow Jones.

<b>Modelo</b>	<b>AIC</b>	<b>BIC</b>	<b>Variável Significativa?<sup>5</sup></b>
GARCH(0,1)	11.129,35	11.148,14	Sim
GARCH(1,0)	10.962,94	10.981,74	Sim
GARCH(1,1)	10.267,74	10.292,80	Sim
GARCH(2,1)	10.269,14	10.300,46	Sim
GARCH(1,2)	10.270,53	10.310,85	Sim
GARCH(2,2)	10.467,07	10.504,66	Sim
EGARCH(0,1)	11.128,86	11.147,65	Não
EGARCH(1,0)	11.008,47	11.027,27	Sim
EGARCH(1,1)	10.260,32	10.285,38	Sim
EGARCH(2,1)	10.260,9	10.292,22	Sim
EGARCH(1,2)	10.263,3	10.294,62	Sim
EGARCH(2,2)	10.275,45	10.313,04	Sim
TGARCH(0,1)	11.129,35	11.148,14	Sim
TGARCH(1,0)	10.926,93	10.951,99	Sim
TGARCH(1,1)	10.190,06	10.221,38	Sim
<b>TGARCH(2,1)</b>	<b>10.175,84</b>	<b>10.219,70</b>	<b>Sim</b>
TGARCH(1,2)	10.191,37	10.228,96	Sim
TGARCH(2,2)	10.192,59	10.242,72	Sim
PGARCH(0,1)	14.067,61	14.092,67	Sim
PGARCH(1,0)	22.148,05	22.173,11	Sim
PGARCH(1,1)	10.263,62	10.294,95	Sim
PGARCH(2,1)	10.264,41	10.302,00	Sim
PGARCH(1,2)	10.267,49	10.305,09	Sim
PGARCH(2,2)	10.310,83	10.354,68	Sim

<sup>4</sup> Todos os modelos foram analisados através do *software* S-PLUS 6.1.

<sup>5</sup> Considerando-se um coeficiente de significância de 95%.

Como pode ser visto, não utilizamos somente modelos GARCH para a adequação do modelo aos dados. Buscamos também modelar a série com modelos EGARCH, TGARCH e PGARCH. A justificativa do uso destes modelos é muito simples: os modelos GARCH não são flexíveis o suficiente para capturar algumas propriedades encontradas em séries financeiras, como o impacto diferenciado de choques positivos e negativos, de mesma magnitude, no retorno corrente dos ativos sobre a volatilidade de retornos futuros (efeito assimetria). Desta forma, é conveniente re-estimar a volatilidade do retorno dos ativos a partir de modelos parametricamente menos restritivos e capazes de se ajustar mais adequadamente aos dados analisados. Sendo assim, esperamos que os modelos acima citados propostos forneçam estimativas mais eficazes para os dados.

A Tabela 2 apresenta, em negrito, o melhor modelo, dado por um TGARCH(2,1). O modelo estimado pode ser visto no APÊNDICE. Podemos ver que todas as variáveis são significativas à 95% de confiança com exceção do EGARCH(0,1). Na estatística Jarque-Bera, foi encontrado um valor de 539,2 com p-valor 0,000, indicando que o modelo tem erros com distribuição normal. A tabela de Ljung-Box<sup>6</sup> do modelo nos indica que pode não haver autocorrelação dos resíduos nem dos resíduos ao quadrado.

Ao analisarmos o gráfico dos resíduos, resíduos padronizados e o gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo (vide apêndice A1), podemos perceber pelo último gráfico que o modelo TGARCH(2,1) tem erros com uma distribuição que tende a ser normal. Se os erros, de fato, forem normais, então os quantis estarão posicionados como uma linha de 45°. Segundo o gráfico, podemos perceber que os quantis estão razoavelmente próximos de uma linha de 45°. O gráfico pode ser visto no APÊNDICE. Todavia, procuraremos aprimorar a normalidade do resíduo em outros modelos mais completos (ver Seção 4.2).

---

<sup>6</sup> A tabela pode ser vista no Anexo B1.

Tabela 3 - Dados realizados e seus respectivos preditos no modelo TGARCH(2,1) para o índice Dow Jones.

<b>Passo</b>	<b>Realizado</b>	<b>Predito</b>
1	-0,38241	0,73059
2	0,02515	0,75417
3	0,06650	0,75757
4	-0,02573	0,76078
5	0,10831	0,76394

Da Tabela B.1.1 do APÊNDICE, temos que a volatilidade estimada é dada por

$$\hat{\sigma}_{iDowJones}^2 = 0,01273 - 0,03136\varepsilon_{t-1}^2 + 0,04577\varepsilon_{t-2}^2 + 0,19116S_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 - 0,10532S_{t-2}\varepsilon_{t-2}^2 + 0,92892\hat{\sigma}_{t-1}^2. \quad (4.2.3)$$

#### 4.2.2 IBovespa

Façamos agora a mesma análise para o índice da Bolsa de Valores de São Paulo. Vejamos a Tabela 3.2.3 abaixo.

Tabela 4 - Análise de modelos GARCH univariados para a série dos retornos do índice IBovespa.

(CONTINUA)

<b><u>Modelos</u></b>	<b><u>AIC</u></b>	<b><u>BIC</u></b>	<b><u>Variável Significativa?</u></b>
<i>GARCH(0,1)</i>	13.498,53	13.517,26	<i>Sim</i>
<i>GARCH(1,0)</i>	12.922,86	12.941,59	<i>Sim</i>
<i>GARCH(1,1)</i>	11.851	11.875,97	<i>Sim</i>
<i>GARCH(2,1)</i>	11.852,94	11.884,16	<i>Sim</i>
<i>GARCH(1,2)</i>	11.853,83	11.885,05	<i>Sim</i>
<i>GARCH(2,2)</i>	11.856,5	11.893,96	<i>Sim</i>
<i>EGARCH(0,1)</i>	13.197,89	13.216,62	<i>Não</i>

<i>EGARCH(1,0)</i>	13.093,71	13.112,45	<i>Sim</i>
<i>EGARCH(1,1)</i>	11.854,32	11.879,29	<i>Sim</i>
<i>EGARCH(2,1)</i>	11.856,17	11.887,39	<i>Sim</i>
<i>EGARCH(1,2)</i>	11.856,38	11.887,6	<i>Sim</i>
<i>EGARCH(2,2)</i>	12.085,97	12.123,43	<i>Sim</i>
<i>TGARCH(0,1)</i>	13.498,53	13.517,26	<i>Sim</i>
<i>TGARCH(1,0)</i>	12.923,39	12.948,37	<i>Sim</i>
<i>TGARCH(1,1)</i>	11.837,48	11.868,7	<i>Sim</i>
<b><i>TGARCH(2,1)</i></b>	<b>11.821,71</b>	<b>11.865,42</b>	<b><i>Sim</i></b>
<i>TGARCH(1,2)</i>	11.840,28	11.877,74	<i>Sim</i>
<i>TGARCH(2,2)</i>	11.838,65	11.888,61	<i>Sim</i>
<i>PGARCH(0,1)</i>	15.677,62	15.702,6	<i>Não</i>
<i>PGARCH(1,0)</i>	39.724,45	39.749,42	<i>Sim</i>
<i>PGARCH(1,1)</i>	11.850,81	11.882,03	<i>Sim</i>
<i>PGARCH(2,1)</i>	11.852,88	11.890,35	<i>Sim</i>
<i>PGARCH(1,2)</i>	11.853,96	11.891,43	<i>Sim</i>
<i>PGARCH(2,2)</i>	11.900,67	11.944,38	<i>Sim</i>

Após analisar a Tabela 4, também foi escolhido como melhor modelo o TGARCH(2,1) para a série dos retornos do IBovespa. Os resultados do modelo podem ser vistos no APÊNDICE.

Todas as variáveis do modelo são significativas a 5% com exceção dos modelos EGARCH(0,1) e PGARCH(0,1). Na estatística Jarque-Bera, foi encontrado um valor de 189,7 com p-valor 0,000, indicando que o modelo tem erros com distribuição normal. As estatísticas de Ljung-Box podem ser vistas no APÊNDICE.

Ao analisarmos os resíduos, resíduos padronizados e o gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo<sup>7</sup> podemos perceber que, ao contrário do Dow Jones, o IBovespa, apesar de não possuir autocorrelação nos resíduos ao quadrado, possui autocorrelação nos resíduos.

<sup>7</sup> Gráficos no APÊNDICE.

Segundo o gráfico QQ dos resíduos padronizados, podemos concluir que os erros se aproximam de uma normal, uma vez que os quantis estão razoavelmente próximos de uma linha de 45°.

Tabela 5 - Dados realizados e seus respectivos preditos no modelo TGARCH(2,1) para o índice IBovespa.

<b><u>Passo</u></b>	<b><u>Realizado</u></b>	<b><u>Predito</u></b>
1	-0,44799	0,7836002
2	-1,35407	0,8391555
3	-0,91041	0,8466520
4	-0,56698	0,8538053
5	-0,38489	0,8608819

Da Tabela B.2.1 do APÊNDICE, temos que a volatilidade estimada é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{t|Bovespa}^2 = & 0,01369 + 0,03095\varepsilon_{t-1}^2 + 0,06716\varepsilon_{t-2}^2 + 0,17961S_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 \\ & - 0,14582S_{t-2}\varepsilon_{t-2}^2 + 0,88276\hat{\sigma}_{t-1}^2. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

#### 4.2.3 S&P 500

Finalmente, procuraremos ajustar algum modelo da família GARCH ao índice financeiro S&P 500. Vejamos a Tabela 6 logo abaixo.

Tabela 6 - Análise de modelos GARCH univariado para a série dos retornos do índice S&amp;P 500.

<u>Modelo</u>	<u>AIC</u>	<u>BIC</u>	<u>Variável Significativa?</u>
GARCH(0,1)	4.758,344	4.777,141	Sim
GARCH(1,0)	4.546,583	4.565,381	Sim
GARCH(1,1)	3.769,543	3.794,607	Sim
GARCH(2,1)	3.771,477	3.802,806	Sim
GARCH(1,2)	3.771,701	3.803,03	Sim
GARCH(2,2)	4.033,233	4.070,329	Sim
EGARCH(0,1)	8.034,508	8.053,306	Não
EGARCH(1,0)	4.599,981	4.618,779	Sim
EGARCH(1,1)	3.765,012	3.790,076	Sim
EGARCH(2,1)	3.766,258	3.797,587	Sim
EGARCH(1,2)	4.018,308	4.049,638	Sim
EGARCH(2,2)	3.995,568	4.033,163	Sim
TGARCH(0,1)	4.758,344	4.777,141	Sim
TGARCH(1,0)	4.520,047	4.545,111	Sim
TGARCH(1,1)	3.683,599	3.714,928	Sim
<b>TGARCH(2,1)</b>	<b>3.664,561</b>	<b>3.708,422</b>	<b>Sim</b>
TGARCH(1,2)	3.689,911	3.727,506	Sim
TGARCH(2,2)	3.677,123	3.727,25	Sim
PGARCH(0,1)	7.689,633	7.714,696	Não
PGARCH(1,0)	5.765,617	5.790,681	Sim
PGARCH(1,1)	3.766,273	3.797,603	Sim
PGARCH(2,1)	3.767,559	3.805,155	Sim
PGARCH(1,2)	3.769,959	3.807,555	Sim
PGARCH(2,2)	3.858,419	3.902,28	Sim

Após analisar a Tabela 6, também foi escolhido como melhor modelo o TGARCH(2,1) para a série dos retornos do S&P 500. Os resultados do modelo estão no APÊNDICE.

Podemos ver que, a 5%, todas as variáveis são significativas, com exceção dos modelos EGARCH(0,1) e PGARCH(0,1). Na estatística Jarque-Bera, foi encontrado um valor de 508,8 com p-valor 0,000, indicando que o modelo tem erros com distribuição normal. As estatísticas de Ljung-Box estão no APÊNDICE.

Ao analisarmos os resíduos, resíduos padronizados e o gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo podemos perceber que, assim como a IBovespa, o S&P 500 possui autocorrelação nos resíduos e não possui autocorrelação nos resíduos ao quadrado. Os gráficos dos resíduos estão no APÊNDICE. Segundo o gráfico QQ dos resíduos padronizados, podemos concluir que os erros se aproximam de uma normal, uma vez que os quantis estão razoavelmente próximos a uma linha de 45°.

Tabela 7 - Dados realizados e seus respectivos preditos no modelo TGARCH(2,1) para o índice S&P500.

<u>Passo</u>	<u>Realizado</u>	<u>Predito</u>
1	-0,299260	0,3024039
2	0,054071	0,3023895
3	-0,009070	0,3040931
4	-0,094050	0,3057441
5	0,226974	0,3073680

Da Tabela B.3.1 do APÊNDICE, temos que a volatilidade estimada é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{iS\&P500}^2 = & 0,002083 - 0,046296\varepsilon_{i-1}^2 + 0,057403\varepsilon_{i-2}^2 + 0,185385S_{i-1}\varepsilon_{i-1}^2 \\ & - 0,087065S_{i-2}\varepsilon_{i-2}^2 + 0,928245\hat{\sigma}_{i-1}^2. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

#### 4.3 GARCH Bivariado

Agora ajustaremos as três séries a um modelo GARCH multivariado. Buscaremos encontrar o melhor modelo para as três séries analisadas duas-a-

duas: IBovespa x Dow Jones; IBovespa x S&P 500 e Dow Jones x S&P 500. A idéia é modelar a volatilidade e o co-movimento das séries multivariadas.

Inicialmente veremos o gráfico dos retornos das séries de retornos dos índices Dow Jones, IBovespa e S&P 500.

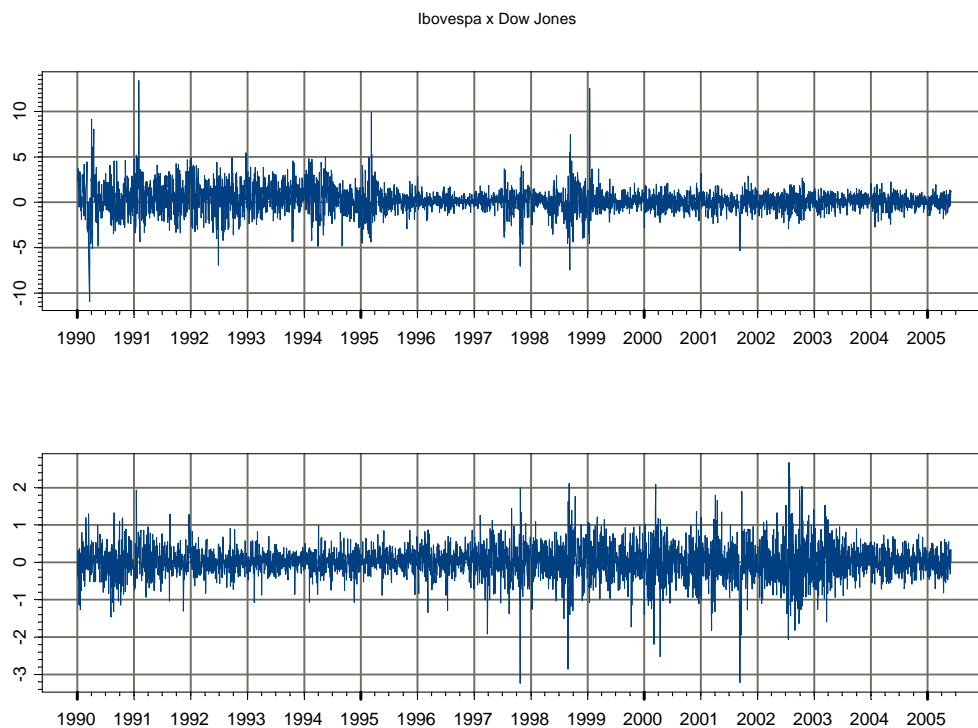


Figura 5 - (a) Série dos Retornos do índice IBovespa  
(b) Série dos Retornos do índice Dow Jones.

Através da Figura 5, podemos observar que as duas séries parecem ter uma relação entre si. O ano de 1991, 1998 e 1999, por exemplo parecem ter um comportamento semelhante em ambas as séries. O movimento brusco de volatilidade de 1991, por exemplo, aparece tanto no IBovespa quanto no Dow Jones; entretanto, o movimento é muito mais sutil no índice Dow Jones. Buscaremos no decorrer do capítulo descobrir qual série que impactou a outra. Podemos também notar que a série dos retornos do IBovespa parece ter uma volatilidade muito maior que a do índice Dow Jones (observar diferença de escala entre os gráficos).



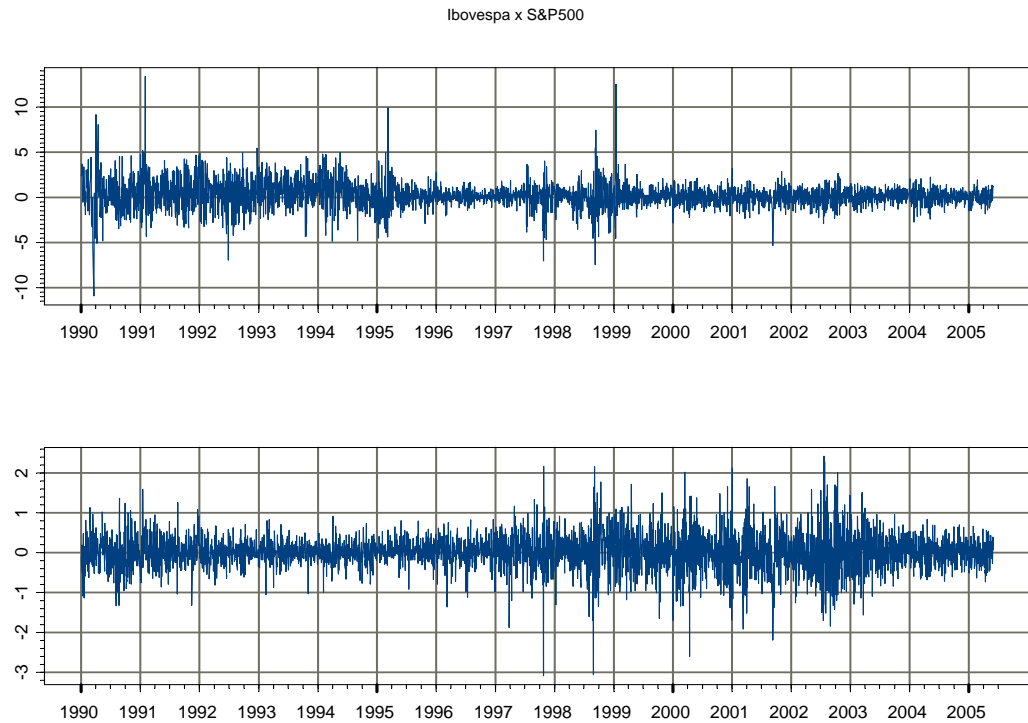


Figura 6 - (a) Série dos Retornos do índice IBovespa  
(b) Série dos Retornos do índice S&P 500.

A Figura 6 acima também mostra similaridade entre as duas séries. Assim como a Figura 5, podemos notar que a série dos retornos do IBovespa parece ter uma volatilidade maior do que a do índice S&P 500. Finalmente, veremos agora a série do Dow Jones x S&P 500.

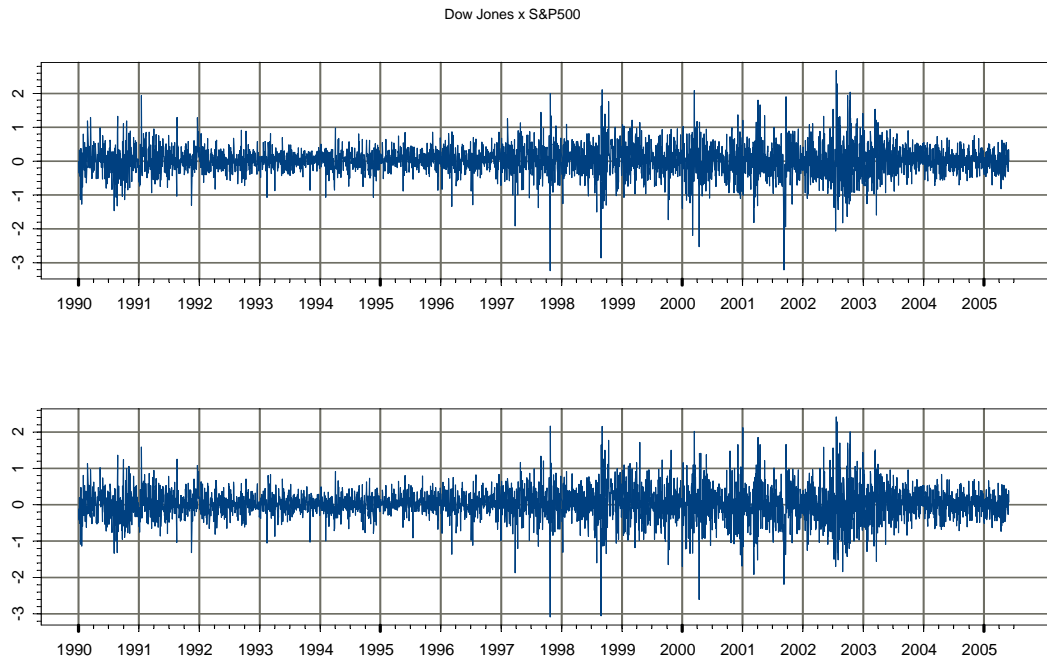


Figura 7 - (a) Série dos Retornos do índice Dow Jones  
(b) Série dos Retornos do índice S&P 500.

A Figura 7 mostra uma relação muito forte entre as duas séries dos índices Dow Jones e S&P 500. As séries tem comportamentos proporcionais e de magnitude muito semelhante, indicando que há uma forte correlação entre os dois índices.

O gráfico da Função de Autocorrelação Parcial (FACP) ao quadrado, que pode ser visualizado nas Figuras 8,9 e 10, entre as três séries duas-a-duas (Dow Jones x IBovespa, IBovespa x S&P 500 e Dow Jones x S&P 500) mostra a existência de autocorrelação serial.

## Multivariate Series : biv.ibo.dj^2

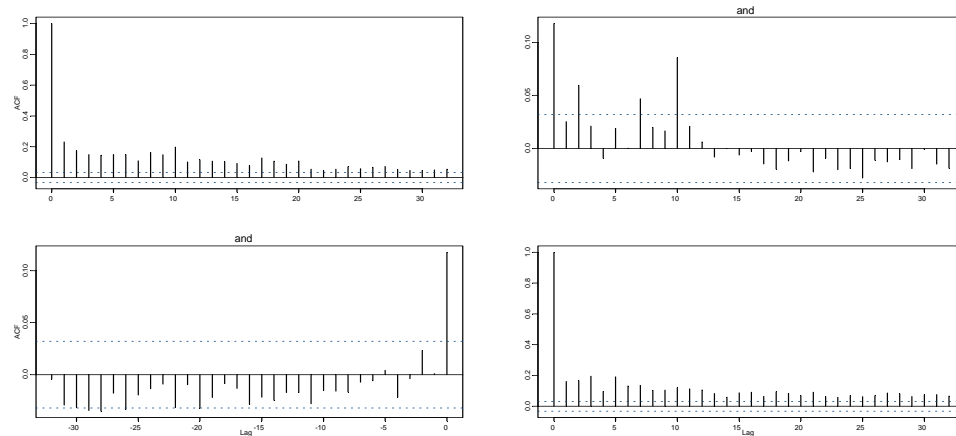


Figura 8 - (a) Função de Autocorrelação da série Ibovespa ao quadrado  
 (b) Função de Correlação Cruzada das séries Ibovespa x Dow Jones ao quadrado  
 (c) Função de Correlação Cruzada das séries Dow Jones x Ibovespa ao quadrado  
 (d) Função de Autocorrelação da série Dow Jones ao quadrado.

## Multivariate Series : biv.ibo.sp^2

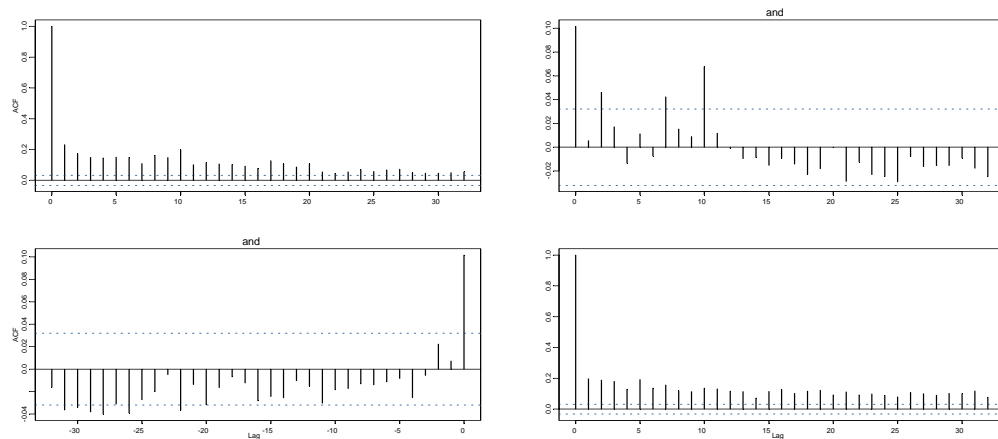


Figura 9 - (a) Função de Autocorrelação da série Ibovespa ao quadrado  
 (b) Função de Correlação Cruzada das séries Ibovespa x S&P 500 ao quadrado  
 (c) Função de Correlação Cruzada das séries Dow Jones x S&P 500 ao quadrado  
 (d) Função de Autocorrelação da série S&P 500 ao quadrado.

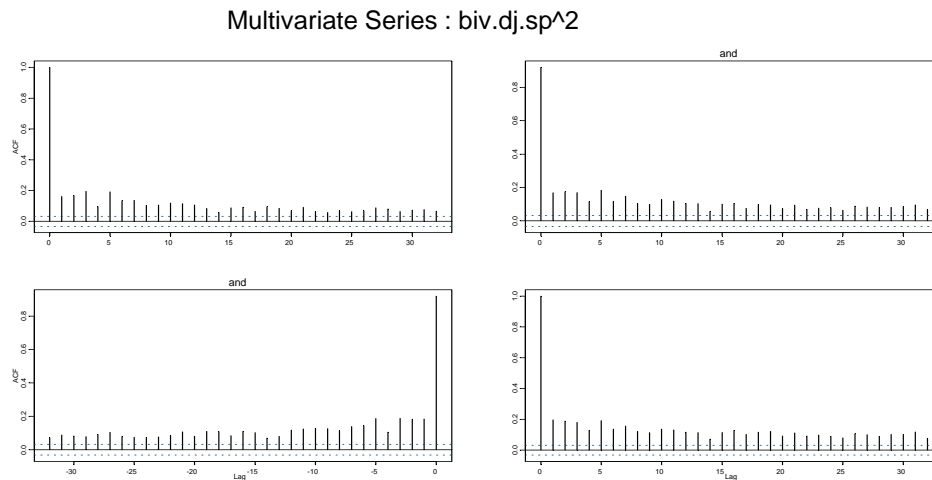


Figura 10 - (a) Função de Autocorrelação da série Dow Jones ao quadrado  
 (b) Função de Correlação Cruzada das séries Dow Jones x S&P 500 ao quadrado  
 (c) Função de Correlação Cruzada das séries S&P 500 x Dow Jones ao quadrado  
 (d) Função de Autocorrelação da série Dow Jones ao quadrado.

As Figuras 8 a 10 mostram que tanto a autocorrelação quanto a de correlação cruzada do momento de segunda ordem são significantes até a defasagem 5 ao menos, o que indica que a matriz de covariância de cada uma das duas séries pode ser variante ao longo do tempo e serialmente correlacionada.

Desta forma, assim como já vimos anteriormente, tudo indica existência de heteroscedasticidade nas séries, e, desta forma, partiremos para a estimação de modelos GARCH bivariados.

#### 4.3.1 GARCH Bivariado IBovespa x Dow Jones

Feito o ajuste do modelo as séries através de modelos GARCH univariados consideraremos agora o ajuste de modelos GARCH multivariados aos dados. Iniciemos com os índices IBovespa e Dow Jones. Vejamos agora os modelos ajustados através da Tabela 8 logo abaixo.

Tabela 8 - Seleção de modelos para as séries do IBovespa e Dow Jones.

<b><u>Modelo</u></b>	<b><u>AIC</u></b>	<b><u>BIC</u></b>
<i>EWMA(1)</i>	15.122,44	15.141,12
<i>EWMA(2)</i>	15.151,6	15.170,28
<i>DVEC(0,1)</i>	17.595,13	17.644,97
<i>DVEC(1,0)</i>	19.894,95	19.944,76
<b><i>DVEC(1,1)</i></b>	<b>14.932,49</b>	<b>15.000,98</b>
<i>DVEC(2,1)</i>	14.937,54	15.024,71
<i>DVEC(1,2)</i>	14.936,06	15.023,23
<i>DVEC(2,2)</i>	15.639,47	15.745,32
<i>BEKK(0,1)</i>	17.941,38	17.997,42
<i>BEKK (1,0)</i>	16.881,38	16.937,41
<i>BEKK (1,1)</i>	14.978,00	15.058,94
<i>BEKK (2,1)</i>	14.933,49	15.039,34
<i>BEKK (1,2)</i>	14.972,17	15.078,02
<i>BEKK (2,2)</i>	15.698,42	15.829,17

O melhor modelo ajustado é dado em negrito. Os resultados do modelo podem ser vistos no APÊNDICE. Todavia, como podemos ver no APÊNDICE, o teste de autocorrelação é feito separadamente para cada série. Para uma análise de autocorrelação multivariada mais apurada, recorreremos ao teste Portmanteau de Autocorrelação multivariada, visto que o teste de autocorrelação simples serve somente para modelos univariados. O teste tem como hipótese nula a ausência de correlação serial.

Tabela 9 - Teste Portmanteau Multivariado (Tipo Ljung-Box) para a série dos índices IBovespa x Dow Jones.

<b><u>Estatística de Teste</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Tamanho Amostral</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
85.4621	0.0007	3738	48

A Tabela 9 indica um p-valor muito baixo, levando-nos a rejeitar a hipótese nula de ausência de correlação serial dos resíduos do modelo. Desta forma, aparentemente o modelo está se ajustando bem aos dados.

A Figura 11 abaixo apresenta o gráfico dos resíduos do melhor modelo ajustado, DVEC(1,1).

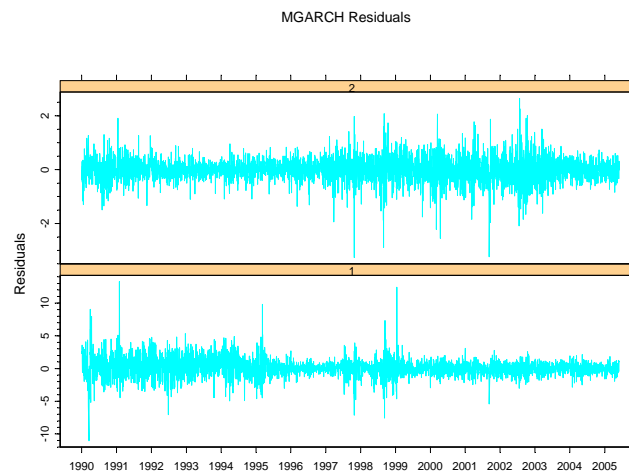


Figura 11 - Resíduos do modelo DVEC(1,1).

Aparentemente os resíduos do modelo não parecem seguir uma normal. Confirmaremos isso a seguir. Todavia, primeiro vejamos a Figura 12 onde vemos, o gráfico dos resíduos padronizados do DVEC(1,1).

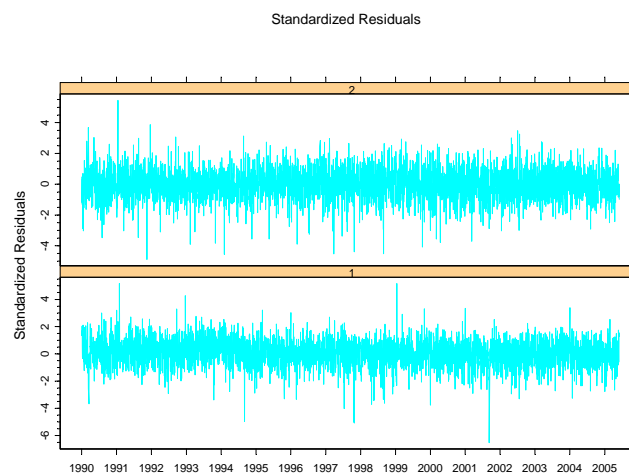


Figura 12 - Resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1).

O gráfico acima mostra claramente a estacionariedade dos resíduos padronizados, indicando que o modelo se ajusta bem aos dados.

A seguir, a Figura 13 apresenta o gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1).

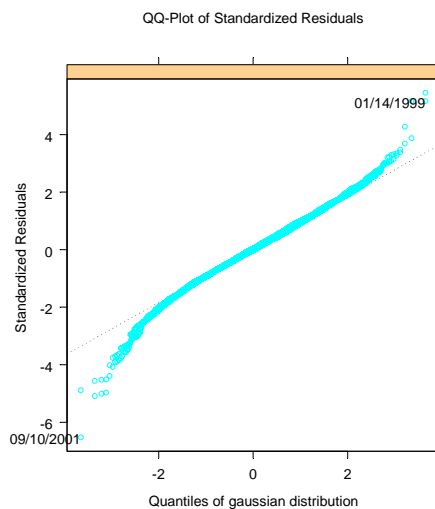


Figura 13 - Gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1).

Podemos ver pelo gráfico QQ que existem significativos desvios na cauda do gráfico em relação à linha QQ de 45 graus. Isso nos indica que os resíduos não podem ser entendidos como normais. Esta afirmação também é confirmada pela estatística Jarque-Bera dada no APÊNDICE. Como encontramos um p-valor demasiadamente baixo, devemos rejeitar a hipótese de normalidade residual.

A Figura 14 apresenta o gráfico da volatilidade multivariada condicional do modelo DVEC(1,1).

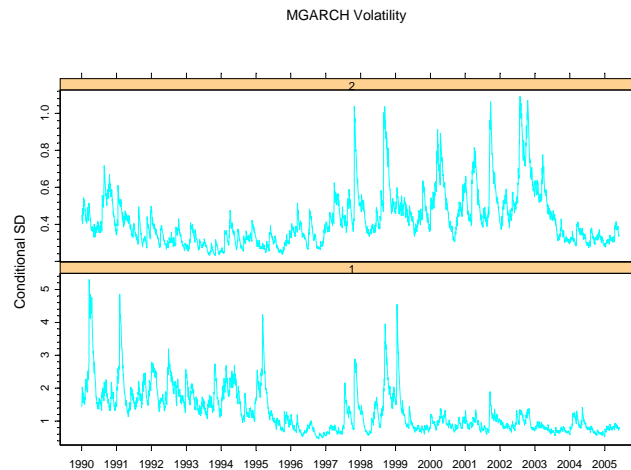


Figura 14 - Volatilidade condicional multivariada do modelo DVEC(1,1).

Vejamos agora o gráfico de correlação cruzada entre as séries IBovespa e Dow Jones.

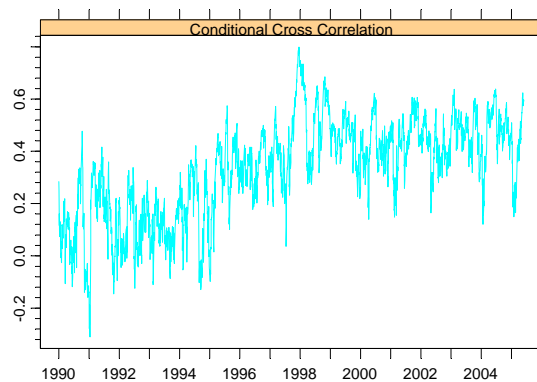


Figura 15 - Correlação Cruzada entre os índices IBovespa e Dow Jones.

Podemos perceber que a correlação varia entre  $-0,2$  e  $0,8$ . Pode-se reparar também que a correlação vem crescendo ao longo do tempo. Vejamos a matriz de correlação condicional constante:



Tabela 9 - Matriz de Correlação Condicional Constante do modelo DVEC(1,1).

<u>Série</u>	<u>IBovespa</u>	<u>Dow Jones</u>
<u>IBovespa</u>	<b>1.0000</b>	<b>0.3344</b>
<u>Dow Jones</u>	<b>0.3344</b>	<b>1.0000</b>

A Tabela 9 mostra que a correlação condicional constante do modelo DVEC(1,1) ajustado às séries de índices IBovespa e Dow Jones é de 0,3344. É interessante ressaltar também que após a incorporação do Real em 1994, as séries passam a ter um comportamento diretamente proporcional, ou seja, assumem correlação positiva (ver Figura 15). A partir da Tabela C.1.1 do APÊNDICE, obtemos o modelo GARCH bivariado para o IBovespa x Dow Jones

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}_t^{(11)} &= 0.014142 + 0.100171 \epsilon_{t-1}^{(1)} \epsilon_{t-1}^{(1)} + 0.895739 \Sigma_{t-1}^{(11)} \\
 \hat{\Sigma}_t^{(21)} &= 0.002462 + 0.062128 \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(1)} + 0.937179 \Sigma_{t-1}^{(21)} \\
 \hat{\Sigma}_t^{(22)} &= 0.002367 + 0.062128 \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(2)} + 0.926747 \Sigma_{t-1}^{(22)}
 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

#### 4.3.2 GARCH Bivariado IBovespa x S&P 500

Feito o ajuste das séries IBovespa x Dow Jones, passaremos agora para a análise multivariada entre o IBovespa e o S&P 500. Vejamos agora alguns modelos ajustados através da Tabela 10 logo abaixo.

Tabela 10 - Seleção de modelos para as séries dos índices IBovespa e S&amp;P 500.

<u>Modelo</u>	<u>AIC</u>	<u>BIC</u>
<i>EWMA(1)</i>	15.037,54	15.056,22
<i>EWMA(2)</i>	15.067,54	15.086,22
<i>DVEC(0,1)</i>	17.698,39	17.748,20
<i>DVEC(1,0)</i>	18.234,65	18.284,46
<b><i>DVEC(1,1)</i></b>	<b>14.860,39</b>	<b>14.928,88</b>

<i>DVEC(2,1)</i>	14.864,80	14.951,97
<i>DVEC(1,2)</i>	14.882,00	14.969,16
<i>DVEC(2,2)</i>	14.854,67	14.960,52
<i>BEKK(0,1)</i>	17.851,64	17.907,68
<i>BEKK(1,0)</i>	16.940,89	16.996,36
<i>BEKK(1,1)</i>	14.892,86	14.973,80
<i>BEKK(2,1)</i>	14.865,97	14.971,82
<i>BEKK(1,2)</i>	14.891,55	14.997,39
<i>BEKK(2,2)</i>	15.697,42	15.828,17

O resumo do modelo DVEC(1,1) pode ser visto no APÊNDICE. Todavia, como podemos ver, o teste de autocorrelação é feito separadamente para cada série. Para uma análise de autocorrelação multivariada mais apurada, recorreremos novamente ao teste Portmanteau de Autocorrelação multivariada.

Tabela 11 - Teste Portmanteau Multivariado (Tipo Ljung-Box) para a série dos índices IBovespa x S&P 500.

<b><u>Estatística de Teste</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Tamanho Amostral</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
74.9250	0.0077	3738	48

A Tabela 11 indica um p-valor baixo, levando-nos a rejeitar a hipótese nula de ausência de correlação serial dos resíduos do modelo.

A Figura 16 abaixo apresenta o gráfico dos resíduos do melhor modelo ajustado, DVEC(1,1).

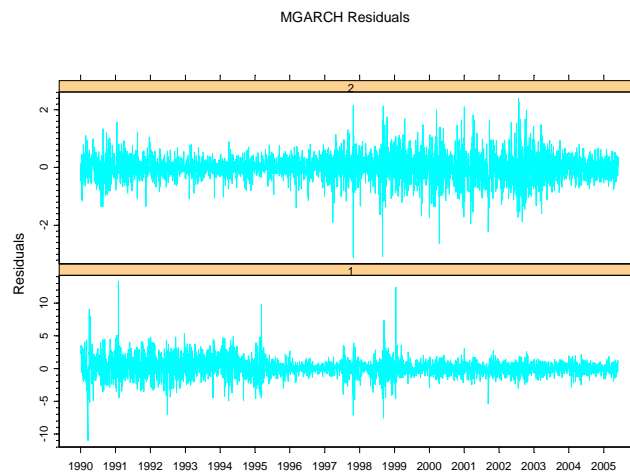


Figura 16 - Resíduos do modelo DVEC(1,1).

Através deste gráfico podemos observar que o modelo DVEC(1,1) não aparenta ter resíduos normais. Todavia, antes de confirmarmos essa suposição, veremos a Figura 17 onde pode-se analisar o gráfico dos resíduos padronizados do DVEC(1,1).

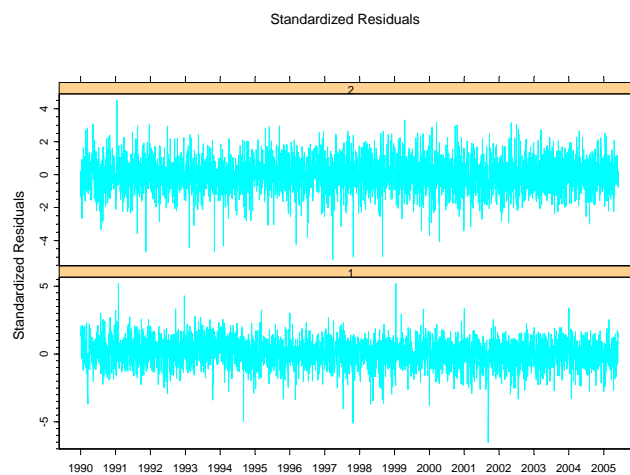


Figura 17 - Resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1).

O gráfico acima mostra claramente a estacionariedade dos resíduos padronizados, indicando que o modelo se ajusta bem aos dados. A Figura 18 apresenta o gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1).

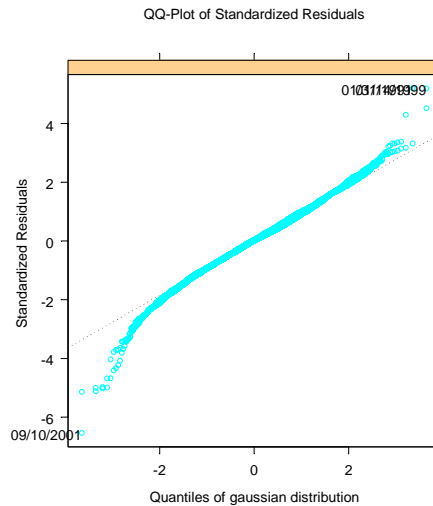


Figura 18 - Gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1).

Podemos ver pelo gráfico QQ da Figura 18 que também existem significativos desvios na cauda do gráfico em relação à linha QQ de 45 graus. Isso nos indica que os resíduos não podem ser entendidos como normais. Esta afirmação também é confirmada pela estatística Jarque-Bera dada no APÊNDICE. Também encontramos um p-valor baixo, e, com isso, devemos rejeitar a hipótese de normalidade residual.

A Figura 19 apresenta o gráfico da volatilidade multivariada condicional do modelo DVEC(1,1).

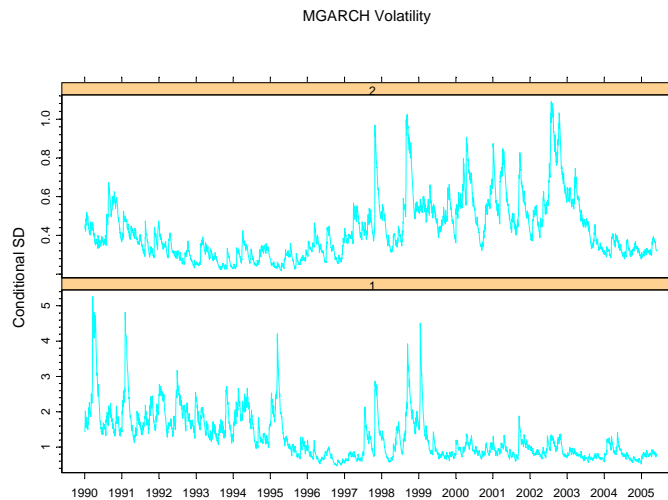


Figura 19 - Volatilidade condicional multivariada do modelo DVEC(1,1).

Veamos agora o gráfico de correlação cruzada entre as séries IBovespa e S&P 500:

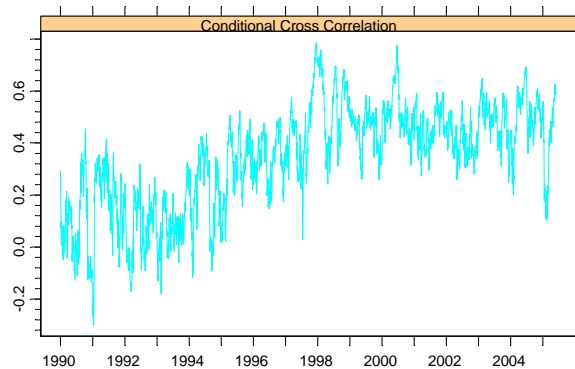


Figura 20 - Correlação Cruzada entre IBovespa e S&P 500.

Podemos perceber que a correlação entre as duas séries é muito similar à da regressão multivariada vista anteriormente na seção anterior, crescendo ao

longo do tempo e variando de  $-0,2$  à  $0,8$ . Por último, vejamos a matriz de correlação condicional constante:

Tabela 12 - Matriz de Correlação Condicional Constante do modelo DVEC(1,1).

<u>Série</u>	<u>IBovespa</u>	<u>S&amp;P 500</u>
<u>IBovespa</u>	<b>1.0000</b>	<b>0.3498</b>
<u>S&amp;P 500</u>	<b>0.3498</b>	<b>1.0000</b>

A Tabela 12 mostra que a correlação condicional constante do modelo DVEC(1,1) ajustado às séries de índices IBovespa e S&P 500 é de 34,98%. Este valor é ligeiramente mais alto do que a correlação condicional constante entre as séries de índices IBovespa e Dow Jones. É interessante ressaltar também que após a implementação do Real em 1994, as séries passam a ter um comportamento diretamente proporcional, ou seja, assumem correlação positiva (ver Figura 15). A partir da Tabela C.2.1 do APÊNDICE, temos o modelo GARCH Bivariado para o IBovespa x Dow Jones

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}_t^{(11)} &= 0.14470 + 0.098668 \epsilon_{t-1}^{(1)} \epsilon_{t-1}^{(1)} + 0.895920 \Sigma_{t-1}^{(11)} \\
 \hat{\Sigma}_t^{(21)} &= 0.002154 + 0.055574 \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(1)} + 0.940883 \Sigma_{t-1}^{(21)} \\
 \hat{\Sigma}_t^{(22)} &= 0.001638 + 0.055574 \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(2)} + 0.936762 \Sigma_{t-1}^{(22)}
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

#### 4.3.3 GARCH Bivariado Dow Jones x S&P 500

Feitos os ajustes dos modelos às séries IBovespa x Dow Jones e IBovespa x S&P 500, passaremos agora para a última análise bivariada: Dow Jones x S&P 500. Vejamos alguns modelos ajustados através da Tabela 13 abaixo.

Tabela 13 - Seleção de modelos para as séries dos índices Dow Jones e S&amp;P 500.

<b><u>Modelo</u></b>	<b><u>AIC</u></b>	<b><u>BIC</u></b>
<i>EWMA(1)</i>	-570,6087	-551,9298
<i>EWMA(2)</i>	-543,6717	-524,9927
<i>DVEC(0,1)</i>	4002,399	4052,209
<i>DVEC(1,0)</i>	718,2993	768,1098
<i>DVEC(1,1)</i>	-374,7245	-306,2351
<i>DVEC(2,1)</i>	-400,2562	-313,0879
<i>DVEC(1,2)</i>	-452,7008	-365,5326
<i>DVEC(2,2)</i>	-255,4294	-149,5822
<i>BEKK(0,1)</i>	1.290,032	1.346,068
<i>BEKK (1,0)</i>	767,2652	823,3020
<i>BEKK (1,1)</i>	-622.8623	-541.9203
<b><i>BEKK (2,1)</i></b>	<b>-654.7539</b>	<b>-548.9067</b>
<i>BEKK (1,2)</i>	-256.5255	-150.6783
<i>BEKK (2,2)</i>	-248,4373	-117,6849

Como podemos ver pelas Tabelas 8 e 10, o DVEC(1,1) é o melhor modelo para as séries multivariadas de IBovespa x Dow Jones e IBovespa x S&P 500. Todavia, na Tabela 13, podemos constatar que para o Dow Jones x S&P 500 encontraram-se dois modelos razoavelmente semelhantes. Apesar do modelo BEKK(2,1) ter um coeficiente BIC levemente pior do que o do modelo EWMA(1), o mesmo possui um coeficiente AIC muito superior. Desta forma, escolheu-se o BEKK(2,1) como o modelo que melhor ajusta estes dados.

Caso o modelo seja efetivo em modelar a correlação serial na série temporal e a variância ao longo do tempo na matriz de covariância, não deverá haver autocorrelação serial no momento de primeira e segunda ordem do resíduo padronizado. Para analisarmos se o modelo é de fato efetivo, devemos realizar os testes de Ljung-Box e o Multiplicador de Lagrange. Para os três modelos, a estatística de Ljung-Box apresentou p-valores maiores do que 0.05, indicando que

a hipótese nula de que não há autocorrelação não pode ser negada. Igualmente, os três modelos se mostraram efetivos ao modelar a variância ao longo do tempo na matriz de covariância, uma vez que, no teste de Multiplicador de Lagrange, encontrou-se um p-valor superior a 0.05.

O resumo do modelo pode ser visto no APÊNDICE. Deste anexo, através da Tabela C.3.1 obtemos o modelo estimado dado por:

$$\hat{\Omega}_t = \hat{C}_o^{*'} C_o^* + C_{111}^{*'} \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' C_{111}^* + C_{121}^{*'} \varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-2}' C_{121}^* + C_{211}^{*'} \hat{\Omega}_{t-1} C_{211}^* \quad (4.3.5)$$

onde

$$C_o^* = \begin{pmatrix} 0.04704 & \\ & 0.03253 & 0.01301 \end{pmatrix}, \quad C_{111}^* = \begin{pmatrix} 0.28678 & -0.13241 \\ 0.01796 & 0.14310 \end{pmatrix},$$

$$C_{121}^* = \begin{pmatrix} 0.22036 & -0.01000 \\ 0.24984 & -0.04894 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_{211}^* = \begin{pmatrix} 0.92600 & 0.03372 \\ -0.02550 & 0.98730 \end{pmatrix}.$$

O teste de autocorrelação é feito separadamente para cada série. Para uma análise de correlação multivariada mais apurada, recorreremos novamente ao teste Portmanteau de Autocorrelação multivariada.

Tabela 14 - Teste Portmanteau Multivariado (Tipo Ljung-Box) para a série dos índices Dow Jones x S&P 500.

<u>Estatística de Teste</u>	<u>p-valor</u>	<u>Tamanho Amostral</u>	<u>Graus de Liberdade</u>
103.7292	0.0000	3738	48

A Figura 21 apresenta o gráfico dos resíduos do melhor modelo ajustado, BEKK(2,1).



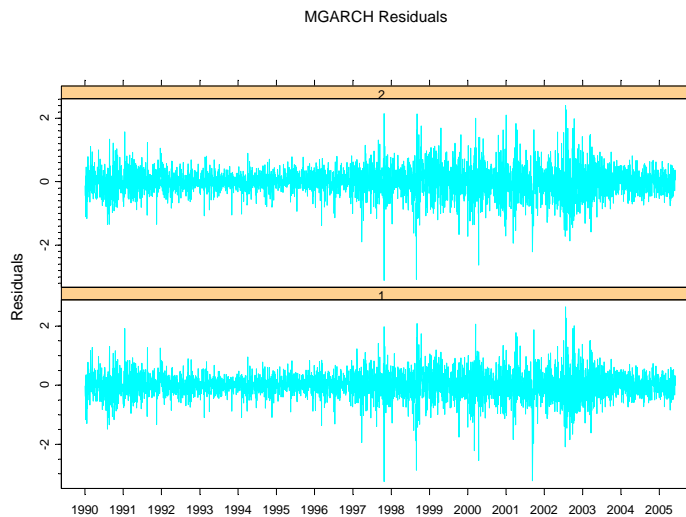


Figura 21 - Resíduos do modelo BEKK(2,1).

Através deste gráfico podemos observar que o modelo BEKK(2,1) não aparenta ter resíduos normais. Todavia, antes de confirmarmos essa suposição, veremos a Figura 22 onde pode-se analisar o gráfico dos resíduos padronizados do BEKK(2,1).

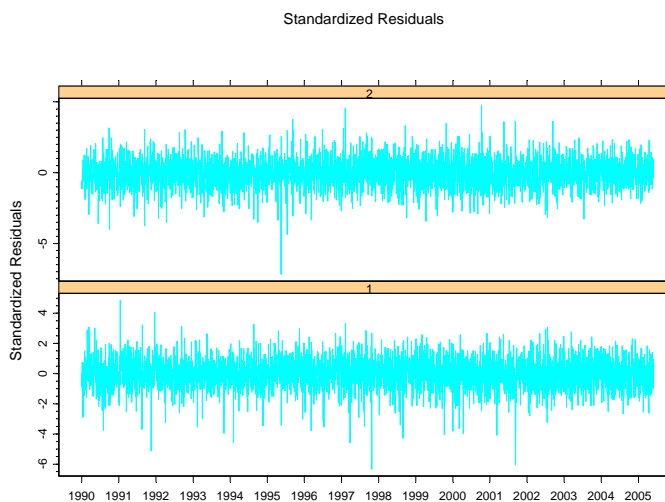


Figura 22 - Resíduos padronizados do modelo BEKK(2,1).

O gráfico acima mostra claramente a estacionariedade dos resíduos padronizados, indicando que o modelo se ajusta bem à série. A Figura 23 apresenta o gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo BEKK(2,1).

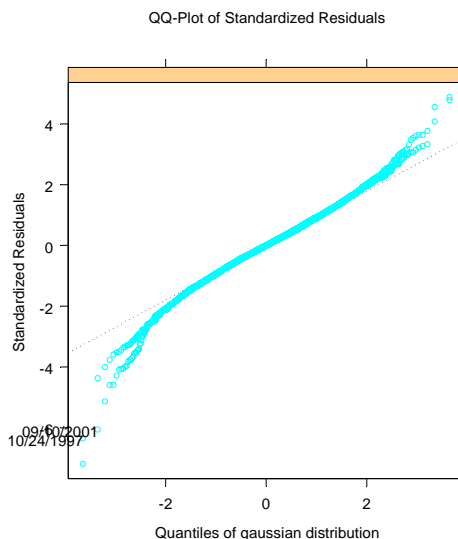


Figura 23 - Gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo BEKK(2,1).

Podemos ver pelo gráfico QQ da Figura 23 que, assim como nos dois casos bivariados anteriores, também existem significativos desvios na cauda do gráfico em relação à linha QQ de 45 graus. Isso novamente nos indica que os resíduos não podem ser vistos como normais. A estatística Jarque-Bera dada no APÊNDICE também vem de encontro com esta constatação. Ao encontramos um p-valor demasiadamente baixo, devemos rejeitar a hipótese de normalidade residual.

A Figura 24 apresenta o gráfico da volatilidade multivariada condicional do modelo BEKK(2,1).

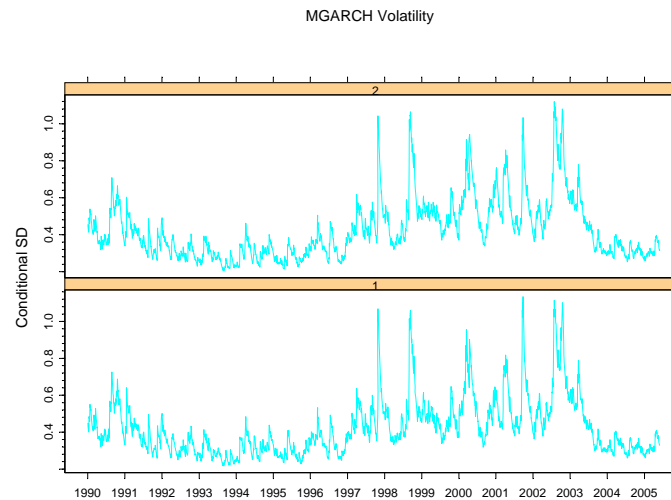


Figura 24 - Volatilidade condicional multivariada do modelo BEKK(2,1).

Vejamos agora o gráfico de correlação cruzada entre os índices Dow Jones e S&P 500:

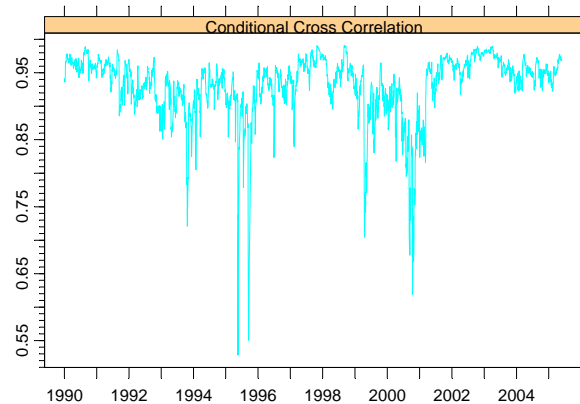


Figura 25 - Correlação Cruzada entre os índices Dow Jones e S&P 500.

A Figura 25 indica que as duas séries são diretamente proporcionais. A correlação cruzada entre elas é sempre positiva e, geralmente, fica muito próxima da unidade. Desta forma, podemos concluir que as duas séries têm

comportamentos muito semelhantes, visto que a correlação é muito próxima da unidade, excetuando-se os anos de 1994 à 1996 e 2001. Vejamos a matriz de correlação condicional constante:

Tabela 15 - Matriz de Correlação Condicional Constante do modelo BEKK(2,1).

<u>Série</u>	<u>Dow Jones</u>	<u>S&amp;P 500</u>
<u>Dow Jones</u>	1.0000	0.9325
<u>S&amp;P 500</u>	0.9325	1.0000

A Tabela 15 mostra que a correlação condicional constante do modelo BEKK(2,1) ajustado às séries de índices Dow Jones e S&P 500 é de 93,25%. Como podemos ver, a correlação condicional é realmente muito próxima a unidade, diferentemente da calculada no modelo GARCH multivariado entre IBovespa e Dow Jones e IBovespa e S&P 500.

Pode-se observar na Tabela 16 abaixo que os valores encontrados nas respectivas matrizes de Correlação Condicionais Constantes pouco diferem das correlações simples calculadas e mostradas na Introdução deste trabalho.

Tabela 16 - Comparação da Correlação Simples com a Correlação Condicional Constante.

<u>Índice</u>	<u>Correlação Simples</u>			<u>Correlação Condicional Constante</u>		
	<u>Dow Jones</u>	<u>IBovespa</u>	<u>S&amp;P 500</u>	<u>Dow Jones</u>	<u>IBovespa</u>	<u>S&amp;P 500</u>
<u>Dow Jones</u>	100%	29%	94%	100%	33,44%	93,25%
<u>IBovespa</u>	29%	100%	28%	33,44%	100%	34,98%
<u>S&amp;P 500</u>	94%	28%	100%	93,25%	34,98%	100%

#### 4.3.4 Dummies no Modelo **GARCH** Bivariado IBovespa x Dow Jones

Após rodar os modelos, incorporou-se uma *dummy* nas 2<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> feiras das três séries com o intuito de averiguar a veracidade da hipótese de que nesses dias da semana existe uma volatilidade maior. Chegamos aos seguintes resultados:

Tabela 17 - Seleção de modelos para as séries dos índices Dow Jones e S&P 500 com *dummies*.

<b><u>Parâmetro</u></b>	<b><u>Valor Estimado</u></b>	<b><u>Erro Padrão</u></b>	<b><u>Valor t</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>
C(1)	0.17713	2.455e-002	7.215	3.240e-013
C(2)	0.01537	7.123e-003	2.158	1.548e-002
A(1, 1)	0.18567	2.033e-002	9.132	0.000e+000
A(2, 1)	0.01654	2.832e-003	5.839	2.849e-009
A(2, 2)	0.01810	2.642e-003	6.851	4.277e-012
ARCH(1; 1, 1)	0.10000	8.116e-003	12.321	0.000e+000
ARCH(1; 2, 1)	0.10000	7.848e-003	12.742	0.000e+000
ARCH(1; 2, 2)	0.10000	7.665e-003	13.047	0.000e+000
GARCH(1; 1, 1)	0.81000	1.519e-002	53.321	0.000e+000
GARCH(1; 2, 1)	0.81000	1.866e-002	43.407	0.000e+000
GARCH(1; 2, 2)	0.81000	1.550e-002	52.264	0.000e+000
Z(1,1)	0.00000	6.423e+005	0.000	5.000e-001
Z(2,1)	0.00000	3.677e+005	0.000	5.000e-001

O modelo obteve os seguintes critérios de informação:  $AIC(13)^8 = 15.682,16$  e  $BIC(13) = 15.763,10$ , valores estes maiores do que o AIC e BIC anteriores, sem *dummies*. Como podemos ver, ambas as *dummies* (Z(1,1) e Z(2,1)) obtiveram um p-valor maior do que 0,05 e, com isso, pode-se concluir que as variáveis são não-significativas. Alguns testes de especificação podem ser vistos no APÊNDICE.

<sup>8</sup> Onde 13 é o número de parâmetros estimados no modelo.

#### 4.3.5 Dummies no Modelo **GARCH** Bivariado IBovespa x S&P 500

Vejam os resultados obtidos com a incorporação da *dummy* nas 2<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> feiras do modelo GARCH Bivariado entre as séries IBovespa e S&P 500.

Tabela 18 - Seleção de modelos para as séries dos índices IBovespa e S&P 500 com *dummies*.

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Erro Padrão</b>	<b>Valor t</b>	<b>p-valor</b>
C(1)	0.17713	2.486e-002	7.124	6.265e-013
C(2)	0.01404	7.286e-003	1.927	2.703e-002
A(1, 1)	0.18567	1.992e-002	9.323	0.000e+000
A(2, 1)	0.01713	3.094e-003	5.538	1.638e-008
A(2, 2)	0.01853	2.702e-003	6.855	4.147e-012
ARCH(1; 1, 1)	0.10000	7.944e-003	12.589	0.000e+000
ARCH(1; 2, 1)	0.10000	8.365e-003	11.955	0.000e+000
ARCH(1; 2, 2)	0.10000	8.533e-003	11.719	0.000e+000
GARCH(1; 1, 1)	0.81000	1.497e-002	54.117	0.000e+000
GARCH(1; 2, 1)	0.81000	1.894e-002	42.774	0.000e+000
GARCH(1; 2, 2)	0.81000	1.662e-002	48.738	0.000e+000
Z(1,1)	0.00000	7.097e+005	0.000	5.000e-001
Z(2,1)	0.00000	3.853e+005	0.000	5.000e-001

O modelo obteve os seguintes critérios de informação: AIC(13) = 15.681,14 e BIC(13) = 15.762,08, valores estes que também foram menores do que o AIC e BIC anteriores sem *dummies*. As *dummies* (Z(1,1) e Z(2,1)) obtiveram um p-valor de 0,5 e, com isso, podemos concluir que as variáveis são não-significativas. Os testes de especificação do modelo podem ser vistos no APÊNDICE.

4.3.6 Dummies no Modelo **GARCH** Bivariado Dow Jones x S&P 500

Vejam os resultados obtidos com a incorporação da *dummy* nas 2<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> feiras do modelo GARCH Bivariado entre as séries Dow Jones e S&P 500.

Tabela 19 - Seleção de modelos para as séries do Dow Jones e S&P 500 com *dummies*.

<u>Parâmetro</u>	<u>Valor</u>	<u>Erro Padrão</u>	<u>Valor t</u>	<u>p-valor</u>
C(1)	1.537e-002	6.978e-003	2.203e+000	1.383e-002
C(2)	1.404e-002	7.128e-003	1.970e+000	2.448e-002
A(1, 1)	1.345e-001	9.106e-003	1.477e+001	0.000e+000
A(2, 1)	1.279e-001	1.001e-002	1.278e+001	0.000e+000
A(2, 2)	4.643e-002	4.180e-003	1.111e+001	0.000e+000
ARCH(1; 1, 1)	3.162e-001	4.360e-002	7.253e+000	2.462e-013
ARCH(1; 2, 1)	4.391e-012	5.660e-002	7.759e-011	5.000e-001
ARCH(1; 1, 2)	-8.209e-012	4.520e-002	-1.816e-010	5.000e-001
ARCH(1; 2, 2)	3.162e-001	5.638e-002	5.609e+000	1.092e-008
ARCH(2; 1, 1)	1.000e-002	1.945e+000	5.140e-003	4.979e-001
ARCH(2; 2, 1)	-2.160e-011	2.163e+000	-9.985e-012	5.000e-001
ARCH(2; 1, 2)	2.658e-010	1.994e+000	1.333e-010	5.000e-001
ARCH(2; 2, 2)	1.000e-002	2.206e+000	4.533e-003	4.982e-001
GARCH(1; 1, 1)	9.000e-001	3.270e-002	2.752e+001	0.000e+000
GARCH(1; 2, 1)	-2.261e-012	3.339e-002	-6.770e-011	5.000e-001
GARCH(1; 1, 2)	8.170e-013	3.372e-002	2.423e-011	5.000e-001
GARCH(1; 2, 2)	9.000e-001	3.392e-002	2.654e+001	0.000e+000
Z(1,1)	1.036e-005	6.257e+004	1.656e-010	5.000e-001
Z(2,1)	-1.870e-005	7.000e+004	-2.671e-010	5.000e-001

O modelo obteve os seguintes critérios de informação: AIC(19) = -252.637 e BIC(19) = -134.3372, valores estes maiores do que o AIC e BIC anteriores sem *dummies*. Ambas as *dummies* (Z(1,1) e Z(2,1)) obtiveram um p-valor maior do que

0,05 e, com isso, podemos concluir que as variáveis são não-significativas. Os testes de especificação do modelo podem ser visto no APÊNDICE.

Devido ao fato das *dummies* de todos os modelos GARCH bivariados apresentarem p-valores demasiadamente altos, rejeitou-se a hipótese de que 2<sup>as</sup> e 6<sup>as</sup> feiras são dias da semana com maior volatilidade do que os outros dias.

#### 4.4 Comparação entre os Modelos Univariados

Nesta parte do trabalho buscaremos comparar os modelos estimados anteriormente com o objetivo de obter nossas conclusões finais. Vejamos primeiramente o caso univariado. Com o intuito de obter estimativas da volatilidade de um índice foram feitas simulações a partir da última observação dos dados estimados. Este processo foi repetido diversas vezes e então considerou-se a estimativa média destas simulações. No nosso caso, foram feitas 1000 estimações de 100 passos à frente, de modo que obtivemos com uma matriz 100 x 1000 de simulações. A média dessas 1000 simulações, dada pela linha contínua, é a previsão do modelo para cada um dos 100 passos à frente. Os círculos representam a estimativa analítica.

Apresentamos, a seguir, o gráfico das simulações de cada série univariada.



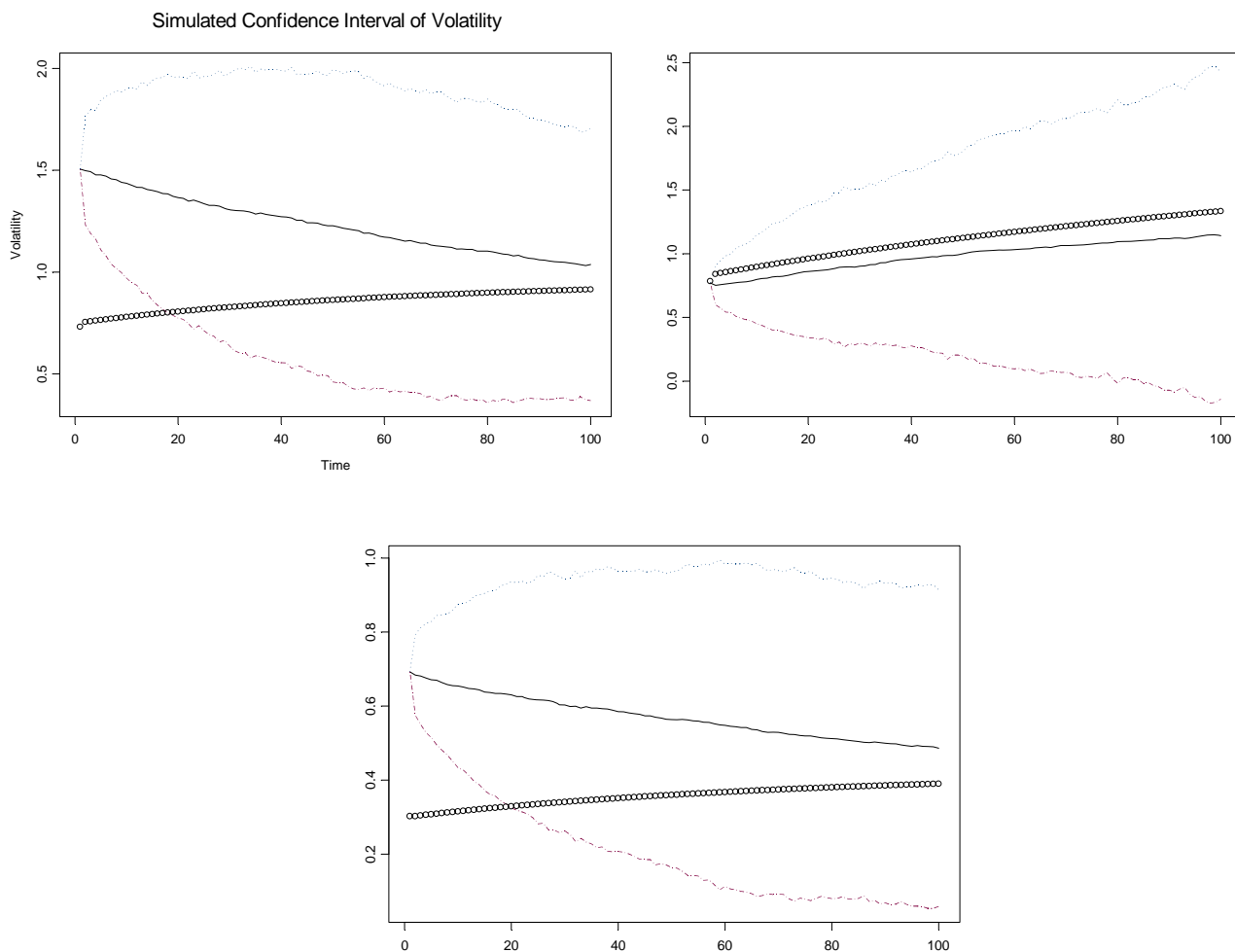


Figura 26 - (a) Simulação do Dow Jones.  
 (b) Simulação do IBovespa.  
 (c) Simulação do S&P 500.

A Figura 26 apresenta o intervalo a 95% de confiança para a previsão da volatilidade à 100 passos à frente, simulada a partir do modelo TGARCH(2,1) e representada por um círculo, que é simplesmente a média das 1000 simulações para cada passo. Os limites de confiança são dados pela linha tracejada e os valores no eixo da abscissa significam os 100 passos à frente para o cálculo da previsão da volatilidade. Além disso, o gráfico ainda apresenta as previsões analíticas (em linha normal) para efeito de comparação.

Percebemos na Figura 26 que as simulações dos índices Dow Jones e S&P 500 possuem comportamentos muito semelhantes, diferindo apenas do ponto de partida. As simulações do índice Bovespa mostrou ser claramente superior às outras duas, uma vez que as estimações estão muito próximas das previsões analíticas. Desta forma, concluímos que o modelo TGARCH(2,1) se ajustou melhor aos dados da bolsa brasileira.

Como podemos ver na Figura 26, o intervalo de confiança do Dow Jones varia de 0,5 a 2,0, já o do IBovespa varia de 0 a 2,5 e, finalmente, o do S&P 500 varia de 0,0 a 1,0. Ao analisarmos o gráfico, fica evidente que, para todos os índices, a previsão vai piorando ao longo do tempo. Em outras palavras, a medida que nos aproximamos do  $t = 100$ , os intervalos de confiança vão ficando muito amplos.

A conclusão que damos para a maior eficácia na previsão do índice brasileiro vai de encontro com a que Torres, Bonomo e Fernandes (2002) encontram em seu artigo. Devido ao fato da eficiência de mercado da bolsa brasileira ser menor do que a do mercado americano, torna-se mais efetiva a previsão do IBovespa com modelos GARCH do que a previsão dos índices Dow Jones e S&P 500. Todavia, após a incorporação do plano Real em 1994, o IBovespa tem se tornado um índice mais maduro e a tendência é que ele deixe de ter um resquício de ineficiência.

#### 4.5 Causalidade de Granger

Com o intuito de averiguar se o mercado americano impacta o mercado brasileiro ou se ocorre o inverso, decidiu-se realizar um teste de Causalidade de Granger entre as séries Dow Jones, IBovespa e S&P 500. Para realizar este resultado, realizou-se a seguinte estimação:

$$y_{2t} = y_{2t-1} + y_{1t} + y_{1t-1} + y_{1t-2} + y_{1t-3} + \varepsilon_t \quad (4.5.1)$$

Portanto, para analisar a relação de causalidade entre IBovespa e Dow Jones estimamos o seguinte modelo:

$$IBo_t = IBo_{t-1} + DJ_t + DJ_{t-1} + DJ_{t-2} + DJ_{t-3} + \varepsilon_t \quad (4.5.2)$$

Desta forma,  $DJ_t$  causaria Granger  $IBo_t$  se algum de seus coeficientes defasados forem diferente de zero na equação de  $IBo_t$ .

Embora para realizar a previsão de índices financeiros seja interessante analisar os dados de fechamento (uma vez que o investidor está interessado em como fechará o mercado), para a análise de causalidade é mais conveniente analisarmos a abertura dos mercados. Ao fazer a análise de causalidade de Granger, queremos saber como o mercado americano impacta o mercado brasileiro ao longo do dia. Levando isto em conta, fizemos a análise de Causalidade de Granger com os dados de abertura dos três índices utilizados neste trabalho.

Os resultados obtidos na estimação dos modelos propostos podem ser vistos logo abaixo.

**Dow Jones causa Granger IBovespa à 5% de significância.**

**S&P 500 causa Granger IBovespa à 5% de significância.**

**IBovespa não causa Granger Dow Jones nem à 10% de significância.**

**IBovespa não causa Granger S&P 500 nem à 10% de significância.**

Desta forma, podemos concluir que movimentos de abertura da bolsa americana, seja no índice Dow Jones, seja no S&P 500, afetam o IBovespa.

#### 4.6 Comparação dos Modelos Bivariados com os Modelos Univariados

Nesta seção, comparamos os resultados do GARCH univariado, vistos na Seção 3.4, com os resultados dos modelos GARCH bivariados, estudados na Seção 3.5. Para o caso multivariado, também realizamos simulações a partir da última observação dos dados estimados. Todavia, neste processo foram feitas 200 estimações de 100 passos à frente para um tamanho amostral de 10 observações, de modo que obtivemos com uma matriz 100 x 200 de simulações. A média dessas 200 simulações é a previsão do modelo para cada um dos 100 passos à frente.

Primeiramente, vejamos o gráfico de simulação para o modelo GARCH bivariado DVEC(1,1), aplicado para IBovespa x Dow Jones.

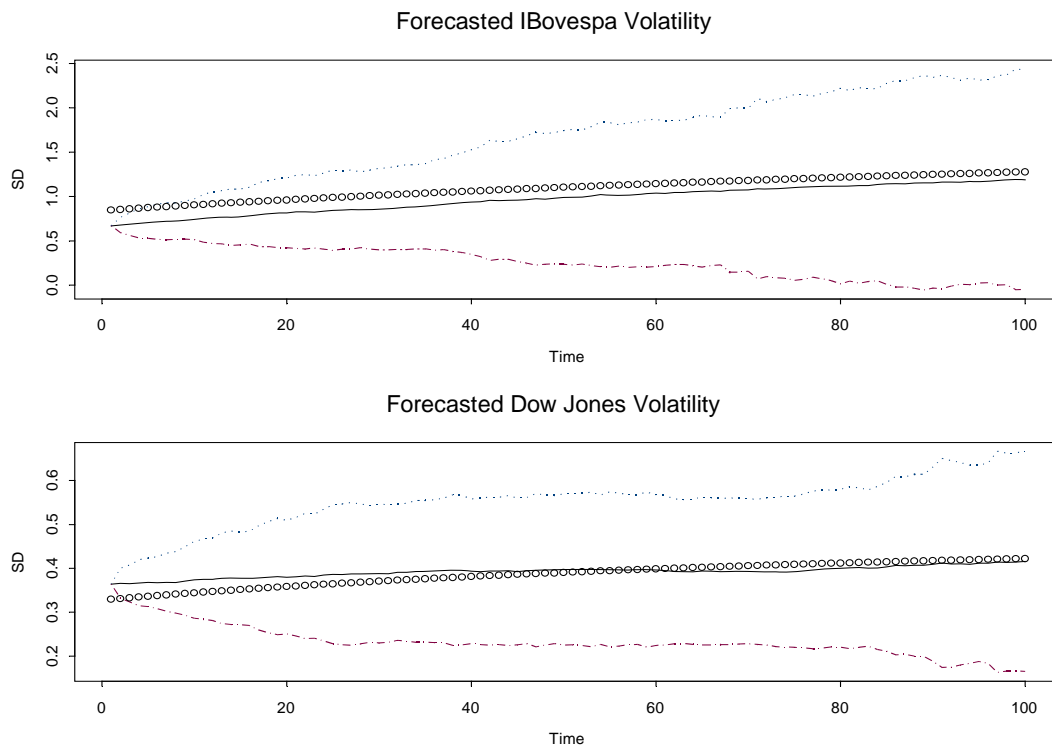


Figura 27 - (a) Simulação para o IBovespa.

(b) Simulação para o Dow Jones.

Ao analisarmos a simulação do IBovespa, dado pela Figura 27 (a), no modelo bivariado IBovespa x Dow Jones, podemos perceber que, apesar de seus intervalos de confiança exibirem uma variação semelhante em relação ao modelo univariado do IBovespa (ambos variam de 0,0 à 2,5), esta figura exibe uma variação do desvio padrão menos volátil durante as 40 primeiras observações. Em outras palavras, apesar da previsão do modelo bivariado, quando  $n = 100$ , ter um intervalo de confiança tão amplo quanto o modelo univariado, nas primeiras previsões (até  $n = 40$  passos à frente), o intervalo de variação do desvio padrão apresenta menor amplitude e, portanto, menor variabilidade, para o caso bivariado. Além disso, podemos observar que a diferença entre a previsão de simulação e a previsão analítica se tornou levemente menor, principalmente quando olhamos o caso extremo  $n = 100$ .

Ao compararmos as estimativas do índice Dow Jones univariada e bivariada (com o IBovespa), dados pelas Figuras 26 (a) e 27 (b), respectivamente, podemos observar que, além do intervalo exibir menor amplitude, a variação do intervalo de confiança diminui de 0,5 à 2,0 para 0,2 à 0,6. Além disso, a previsão de simulação se encontra muito mais perto a estimativa analítica do que antes. Isso nos sugere que o modelo bivariado IBovespa x Dow Jones é mais eficiente do que a estimativa univariada do IBovespa. Isto porque observamos, via simulação, que o erro de previsão do IBovespa torna-se menor quando incorporamos ao modelo o índice Dow Jones. Esta constatação vem de encontro com o esperado, pois uma vez que o Dow Jones impacta o IBovespa, é de se esperar que ao considerarmos um modelo GARCH bivariado IBovespa x Dow Jones, o modelo se torne mais significativo.

Façamos agora o mesmo estudo para o caso do IBovespa x S&P 500. Vejamos inicialmente o gráfico de simulação do modelo bivariado DVEC(1,1) para o caso IBovespa x S&P 500.

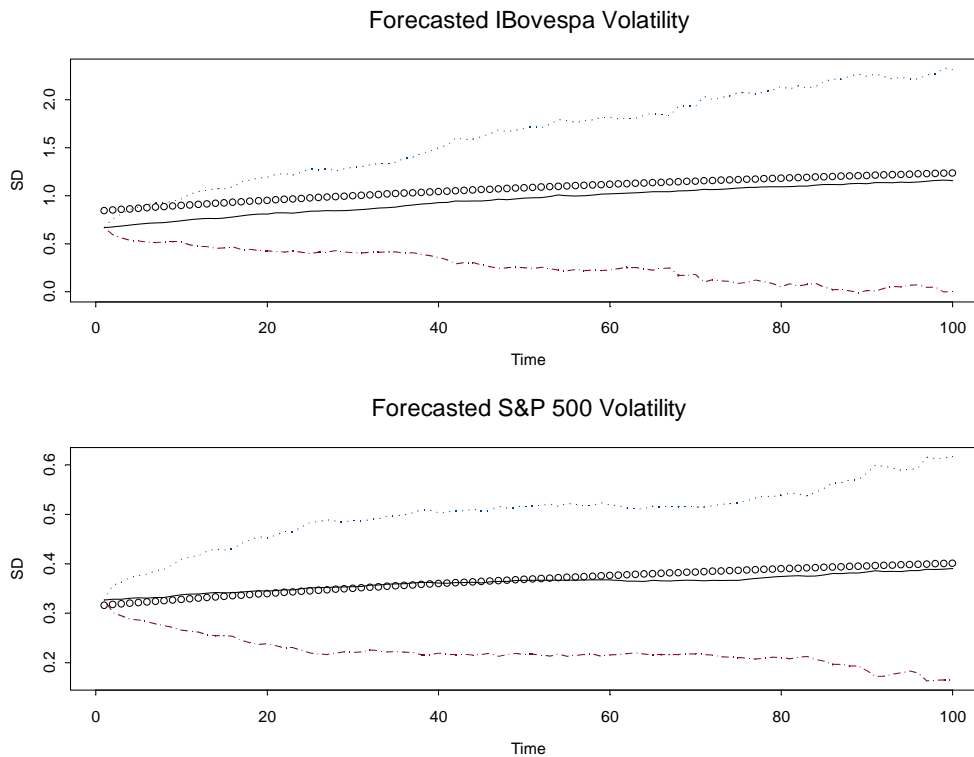


Figura 28 - (a) Simulação para o IBovespa.  
(b) Simulação para o S&P 500.

Comparando as estimativas univariada e bivariada do IBovespa (com a incorporação do S&P 500), dados pelas Figuras 26 (b) e 28 (a), respectivamente, podemos perceber que, além de ter havido uma redução no intervalo de confiança final (passando de 0,0 à 2,5 para 0,0 à 2,0), os intervalos de confiança ao longo das observações têm menor amplitude. Além disso, a estimativa de simulação encontra-se mais próxima a estimativa analítica. O mesmo raciocínio também é válido para o caso do índice S&P 500: enquanto no modelo univariado o intervalo de confiança do S&P 500 variava entre 0,0 e 1,0, no modelo bivariado ele varia entre 0,2 e 0,6. Podemos também constatar que a estimativa de simulação acompanha de maneira praticamente perfeitamente a estimativa analítica, indicando assim um excelente ajuste. Esta constatação também vem de encontro com o esperado, uma vez que como o S&P 500 impacta o IBovespa, é de se esperar que ao considerarmos um modelo GARCH bivariado IBovespa x S&P 500, o modelo se torne mais significativo.

Façamos agora o último estudo para o caso do Dow Jones x S&P 500. Vejamos o gráfico de simulação do modelo bivariado BEKK(2,1) para o caso Dow Jones x S&P 500.

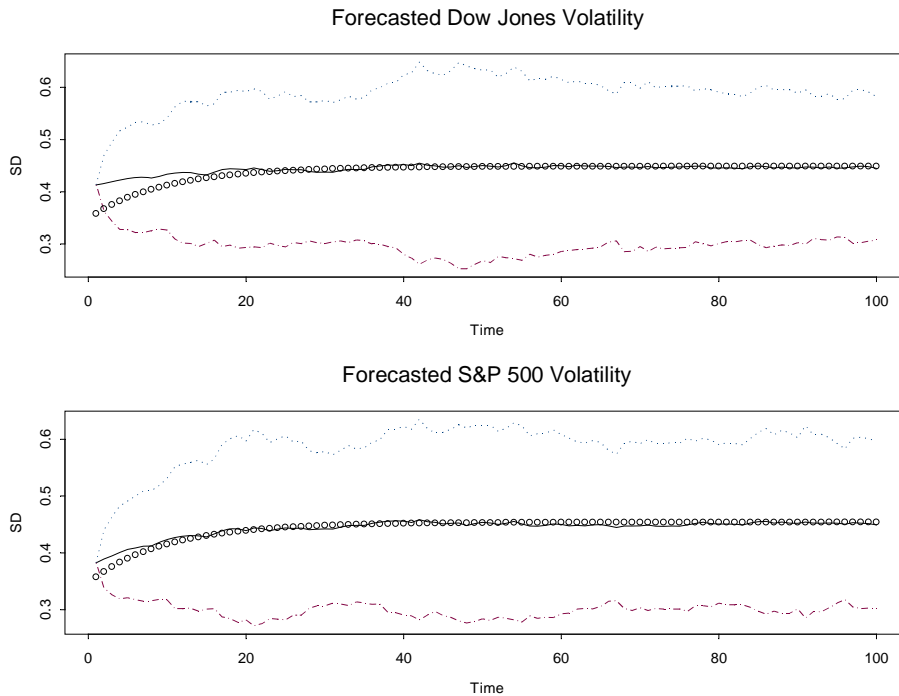


Figura 29 - (a) Simulação para o Dow Jones.  
(b) Simulação para o S&P 500.

Comparando as estimativas univariada e bivariada do Dow Jones (com a incorporação do S&P 500), dados pelas Figuras 26 (a) e 29 (a), respectivamente, podemos perceber que, além de ter havido uma redução extremamente significativa no intervalo de confiança final (passando de 0,5 à 2,0 para 0,3 à 0,6), os intervalos de confiança ao longo das observações têm amplitudes muito menores. Fica também evidente que a distância entre a estimativa de simulação e a analítica se tornaram menores. Desta forma, podemos concluir que a incorporação bivariada do S&P 500 ao Dow Jones tornou a previsão do modelo muito superior. Para o S&P 500 ocorre o mesmo: enquanto no modelo univariado o intervalo de confiança do S&P 500 variava entre 0,0 e 1,0, no modelo bivariado

ele varia entre 0,3 e 0,6. Podemos também perceber que a estimativa de simulação se ajustou quase que perfeitamente a estimativa analítica. Esta constatação também vem de encontro com o esperado, uma vez que como o S&P 500 impacta o Dow Jones, é de se esperar que ao rodarmos um modelo GARCH bivariado Dow Jones x S&P 500, o modelo se torne mais eficiente.



## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho tratamos da análise da volatilidade entre os índices Dow Jones, IBovespa e S&P 500. Para realizar a modelagem da variância destes três índices, consideramos as séries temporais dos seus respectivos retornos obtidos após a transformação por cem vezes o logaritmo do cociente entre os índices nos tempos  $t$  e  $t-1$ .

Uma análise descritiva das três séries temporais permite-nos perceber que o índice brasileiro é mais volátil do que os índices americanos: enquanto o primeiro varia de  $-12$  a  $12$  unidades, os americanos variam de  $-3$  a  $3$  unidades. O teste de normalidade Jaque-Bera permite concluir que os resíduos das séries dos retornos devem ser não normais. Através da função de autocovariância dos retornos e do quadrado dos retornos das três séries, mostramos a não independência deles. Os resultados destas duas análises são condizentes com a hipótese de existência de heteroscedasticidade.

Para modelar a volatilidade consideramos a análise através de modelos GARCH univariados e bivariados. No primeiro caso, o melhor modelo que ajusta as três séries aqui consideradas foi um TGARCH (*Threshold GARCH*) com parâmetros  $p = 2$  e  $q = 1$ . Este modelo é capaz de modelar os efeitos de *leverage* das séries dos retornos. Para cada uma das três séries de retornos descrevemos a volatilidade estimada através do modelo

$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \hat{a}_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \hat{\gamma}_1 S_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \hat{\gamma}_2 S_{t-2} \varepsilon_{t-2}^2 + \hat{b}_1 \hat{\sigma}_{t-1}^2.$$

Por exemplo, para a série dos retornos do índice Dow Jones, a volatilidade estimada é dada por

$$\hat{\sigma}_t^2 = 0.01273 + 0.03136 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.04577 \varepsilon_{t-2}^2 + 0.19116 S_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 - 0.10532 S_{t-2} \varepsilon_{t-2}^2 + 0.92892 \hat{\sigma}_{t-1}^2.$$

A análise dos resíduos, dos resíduos padronizados e o gráfico QQ dos resíduos padronizados permitem concluir que o modelo TGARCH(2,1) é o que melhor ajusta as três séries de retornos.

Com o intuito de compararmos os modelos univariados, realizamos uma simulação para cada um dos índices. A simulação realizava uma previsão da volatilidade 100 passos à frente. Para cada um dos 100 passos a frentes, foram realizadas 1000 simulações. A média dessas 1000 simulações seria a previsão do modelo.

Ao compararmos os modelos univariados, concluímos que o IBovespa foi quem melhor se adequou ao TGARCH(2,1). A justificativa vai de encontro com a teoria que Torres et al. (2002) encontra em seu artigo. Segundo os autores, o IBovespa é um índice com resquícios de ineficiência de mercado, o que se deve ao fato de que o mercado brasileiro ainda não é tão maduro quanto o americano. Todavia, após a incorporação do Real esse cenário vem se alterando. Desta forma, por ter resquícios de ineficiência, faz sentido a previsão do IBovespa com modelos GARCH ser mais efetiva do que a dos índices Dow Jones e S&P 500.

Uma análise de correlação simples destes três índices nos permitiu obter às seguintes conclusões: os índices IBovespa e Dow Jones têm uma correlação de 29%, já o IBovespa e S&P 500 têm 28%, e, por último os dois índices americanos possuem uma correlação de 94%. Consideramos também a análise da volatilidade através de modelos GARCH bivariados. Para os índices IBovespa x Dow Jones e IBovespa x S&P 500, o melhor modelo encontrado foi o DVEC(1,1). Mostramos que a correlação entre as séries dos retornos bivariados do IBovespa x Dow Jones foi de 33,44% e que entre o IBovespa x S&P 500 foi de 34,98%.

Observamos que após a implementação do Real em 1994, as séries bivariadas IBovespa x Dow Jones e IBovespa x S&P 500 passam a ter um comportamento diretamente proporcional assumindo, a partir de então, correlação positiva. Observou-se que a correlação condicional constante é ligeiramente mais alta entre os retornos bivariados IBovespa x S&P 500 do que entre IBovespa x Dow Jones. Se o modelo que melhor ajusta as séries bivariadas de retornos IBovespa x Dow Jones e IBovespa x S&P 500 é um DVEC(1,1), a volatilidade

estimada é dada então pelo modelo descrito na expressão (1.3.35) com base nos dados das Tabelas C.1.1. e C.2.1. do APÊNDICE.

Para a série bivariada de retornos Dow Jones x S&P 500 o modelo BEKK(2,1) foi o que apresentou o melhor ajuste. A volatilidade estimada é dada pela expressão (1.3.37) com base nos dados da Tabela C.3.1. do APÊNDICE. Mostramos que a correlação condicional constante entre estas duas séries de retornos foi de 93,25%, isto é, muito próxima da unidade. No entanto, ao compararmos os resultados obtidos pelo caso de correlação simples com o caso de GARCH bivariado, pode-se concluir que as correlações entre as três séries de retornos estão razoavelmente próximas entre si.

Com o intuito de averiguar a veracidade da hipótese de que nas segundas e sextas-feiras a volatilidade é maior, realizamos análise incluindo uma variável *dummy* no modelo GARCH bivariado entre as três possíveis combinações para as séries de retornos. Concluímos que esta *dummy* não foi significativa para nenhum dos três pares de séries de retornos. Portanto, rejeitou-se a hipótese de que a volatilidade é mais alta nas segundas e sextas-feiras em relação aos demais dias da semana.

Realizamos também neste trabalho uma análise de Causalidade de Granger. A idéia deste estudo era de averiguar se o mercado brasileiro é influenciado pelo mercado americano ou se o inverso é o que ocorre. Para executar esta análise, utilizamos os dados de abertura dos índices, uma vez que, para a análise de causalidade, estamos interessados na relação dos índices *intraday* e não no fechamento do mercado. Através desta análise, concluiu-se que o IBovespa é impactado pelo Dow Jones e pelo S&P 500 a 5% de significância. Pelo outro lado, o IBovespa não impacta os índices americanos nem a 10% de significância.

Finalmente, fizemos uma análise de simulação comparando os modelos GARCH univariados com os modelos bivariados. Através do gráfico de simulação, concluímos que, para todos os casos bivariados, tivemos uma melhor de previsão em relação ao modelo univariado. Esta conclusão vem de encontro com o esperado, uma vez que como o IBovespa é impactado pelos índices americanos,

é de se esperar que a inclusão bivariada do Dow Jones ou S&P 500 no índice brasileiro traga uma melhora de previsibilidade no modelo.

Como sugestões de pesquisas futuras, temos os seguintes assuntos:

- a) *Incorporar cadeias de Markov ao modelo bivariado.* Buscaremos averiguar se ao incorporarmos *Markov Switching* ao modelo aumentaremos a eficácia do mesmo. Será que ao dividirmos a série em regimes teremos um aumento da previsibilidade do modelo? Acreditamos que sim, visto que a série do IBovespa, por exemplo, claramente possui um comportamento diferente antes e depois da incorporação do Plano Real em 1994. Todavia, este assunto poderá ser analisado mais profundamente em pesquisas futuras.
- b) *Analisar a função resposta ao impulso.* Já sabemos que a abertura do mercado americano impacta o IBovespa. Todavia, seria interessante analisarmos o quanto irá variar a previsão do IBovespa no período  $t+h$  caso ocorra um choque no Dow Jones ou S&P 500 em algum momento no período  $t$ , *caeteris paribus*. Entretanto, esta análise também ficará como sugestão para trabalhos futuros.
- c) *Analisar se a volatilidade dos três índices deste trabalho possuem longa dependência.* Muitos trabalhos empíricos encontraram forte evidência de longa dependência na volatilidade de séries financeiras. Seria interessante analisarmos se a longa memória se aplica ao Dow Jones, IBovespa e S&P500.

## REFERÊNCIAS

ANG, A.; BEKAERT, G. *Regime Switches in Interest Rates*. Research Paper: Stanford University, n. 1486, 1998.

BEBER, A. *Determinants of the implied volatility function on the Italian Stock Market*. Pisa, Italy: Laboratory of Economics and Management (LEM), Sant'Anna School of Advanced Studies, 2001. LEM Papers Series 2001/05

BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, n. 31, 1986.

BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R.F.; WOOLDRIDGE, J.M. A capital-asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, n. 96, 1988.

COMTE, F.; LIEBERMANN, O. Definition and testing of variance noncausality in multivariate GARCH process. Cidade: CREST-ENSAR, 1997.

CUTHBERTSON, K.; HALL, S.G.; TAYLOR, M.P (1992). **Applied Econometric Techniques**. Londres: Havesstor Wheatsheaf, 1992.

DOORNIK, J. A.; OOMS, M. Multimodality in the GARCH regression modelo. *Nuffield Economics Discussion Papers*, Oxford, n.2330/w20, 2003.

DHRYMES, P. **Time Series, Unit Roots, and Cointegration**. San Diego: Academic Press, 1998.

ENDERS, W. **Applied Econometric Time Series**. New York: John Willey & Sons, 1995.

ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, n. 50, 1982.

ENGLE, R. F.; BOLLERSLEV, T. Modeling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, n. 5, 1986.

ENGLE, R. F.; KRONER, K. F. Multivariate Simultaneous GARCH. *Econometric Theory*, n. 11, 1995.

FAN, J.; YAO, Q. ***Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods***. New York: Springer-Verlag. 2003.

GALAGEDERA, D. U.; SHAMI, R. Association between Markov Regime-Switching market volatility and Beta risk: Evidence from Dow-Jones Industrial securities. Monash University, Department of Econometrics and Business Statistics, 2003.

GALVÃO, A. B.; PORTUGAL, M. S.; RIBEIRO, E. P. Volatilidade e Causalidade: Evidências para o mercado à vista e futuro de índice de ações no Brasil. *Revista Brasileira de Economia*, 54, n. 1, 2000.

GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On the Relation Between Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance*, n. 48, 1993.

GOURIÉROUX, C. ***ARCH Models and Financial Applications***. New York: Springer-Verlag, 1997.

GREENE, W. ***Econometric Analysis***. 4.th. New Jersey: Prentice Hall International. 2000.

GUJARATI, D. ***Econometria Básica***. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2003.

HAMILTON, J.D. **Time Series Analysis**. New Jersey: Princeton University Press. 1994.

HAUSSMAN, J.A. Specification Tests in Econometrics. *Econometrica*, n. 46, 1978.

HILL, C.; GRIFFITHS, W.; JUDGE, G. **Econometria**. São Paulo: Editora Saraiva. 2000.

HO, K.; TSUI, A. K. C. An Analysis of the Sectorial Índices of Tokyo Stock Exchange: A Multivariate GARCH Approach with Time-Varying Correlations. 2004

KARANASOS, M.; KIM, J. **Moments of the ARMA-EGARCH Model**. University of York. 2000.

KLAASSEN, F. Have Exchange Rates Become More Closely Tied? Evidence from a New Multivariate GARCH Model. Center Discussion Paper, Tilburg, n. 10, 1999.

LAURINI, M.; PORTUGAL, M.S. Markow Switching Based Nonlinear Tests for Market Efficiency using the R\$/U\$ Exchange Rate. Preprint. 2002.

MADDALA, G. S. **Introduction to Econometrics**. 2.ed. New York: Macmillan Publishing Company. 1998.

MANERA, M. STAR-GARCH Models for Stock Market Interactions in the Pacific Basin Region, Japan and US. 2003.

MARTIN, D., et al. Identificando bolhas especulativas racionais no IBovespa (Pós-Plano Real), a partir de regimes markovianos de conversão. In: Encontro Brasileiro de Finanças, 2004, Rio de Janeiro, RJ. Anais..., 2004.

MORAIS, I.A.C. **Modelagem e Previsão de Volatilidade Determinística e Estocástica para a Série do IBOVESPA**. 1999. UFRGS: Dissertação (Mestrado em Economia) – Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1999.

MORAIS, I.A.C.; PORTUGAL, M.S. Modelagem e previsão de Volatilidade Determinística e Estocástica para a Série do Ibovespa. *Estudos Econômicos*, v. 29, n.3, 1998.

NELSON, C. **Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting**. San Francisco: Holden-Day. 1973.

PANDLEY, A. Modeling and Forecasting Volatility in Indian Capital Market. IIMA Working Papers. 2003.

PETERS, R.; VILDER, R. The S&P 500 future stock index as a time changed Brownian motion. 2002.

SARAIVA, J.C.D. **Teste de Eficiência para o Mercado Acionário**. 1999. UFRGS: Dissertação (Mestrado em Economia) - Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1999.

SILVEIRA, M., et al. Estimação da Volatilidade do Retorno das Ações Brasileiras – Um método alternativo à família GARCH. In: Lemgruber, Eduardo Faço et al. (Org.). Gestão de riscos e derivativos: Aplicações no Brasil. São Paulo, 2001.

TORRES R.; BONOMO, M.; FERNANDES, C. A aleatoriedade do passeio na Bovespa: testando a eficiência do mercado acionário brasileiro. In: BONOMO, M. Finanças Aplicadas ao Brasil. 2002.



TSAY, R. S. **Analysis of Financial Time Series**. New York: John Wiley & Sons. 2002.

TSE, Y. K.; TSUI, A. K. C. A Multivariate GARCH Model with Time-Varying Correlations. Journal of Business and Economic Statistics, n. 3. 2002.

UNE, M. Y. **Medo de interrupções**: um modelo de mudanças markovianas de regimes para volatilidade condicional do risco Brasil entre 1994 e 2002. UFRGS: Dissertação (Mestrado em Economia) - Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

UNE, M. Y.; PORTUGAL, M. S. Can fear beat hope? A story of GARCH-in-Mean-Level effects for Emerging Market Country Risks. 2005.

VAN NORDEN, S.; SCHALLER, H. Speculative Behavior, Regime-Switching and Stock Market Crashes. Working Paper:. Bank of Canada, n. 96-13. 1996.

WONNACOTT, R.; WONNACOTT, T. **Econometrics**. New York: John Willey & Sons. 1970.

ZIEGELMANN, F. A.; PEREIRA, P. L. V. Modelos de Volatilidade Estocástica com Deformação Temporal: um estudo empírico para o índice IBOVESPA. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, v. 27, n. 2, 1997.

## APÊNDICE A – Gráficos da FAC e da FACP

### APÊNDICE A1 – Dow Jones

Este apêndice contém os gráficos das funções de autocorrelação, de autocorrelação parcial e de autocorrelação ao ao quadrado da série de retornos do índice Dow Jones.

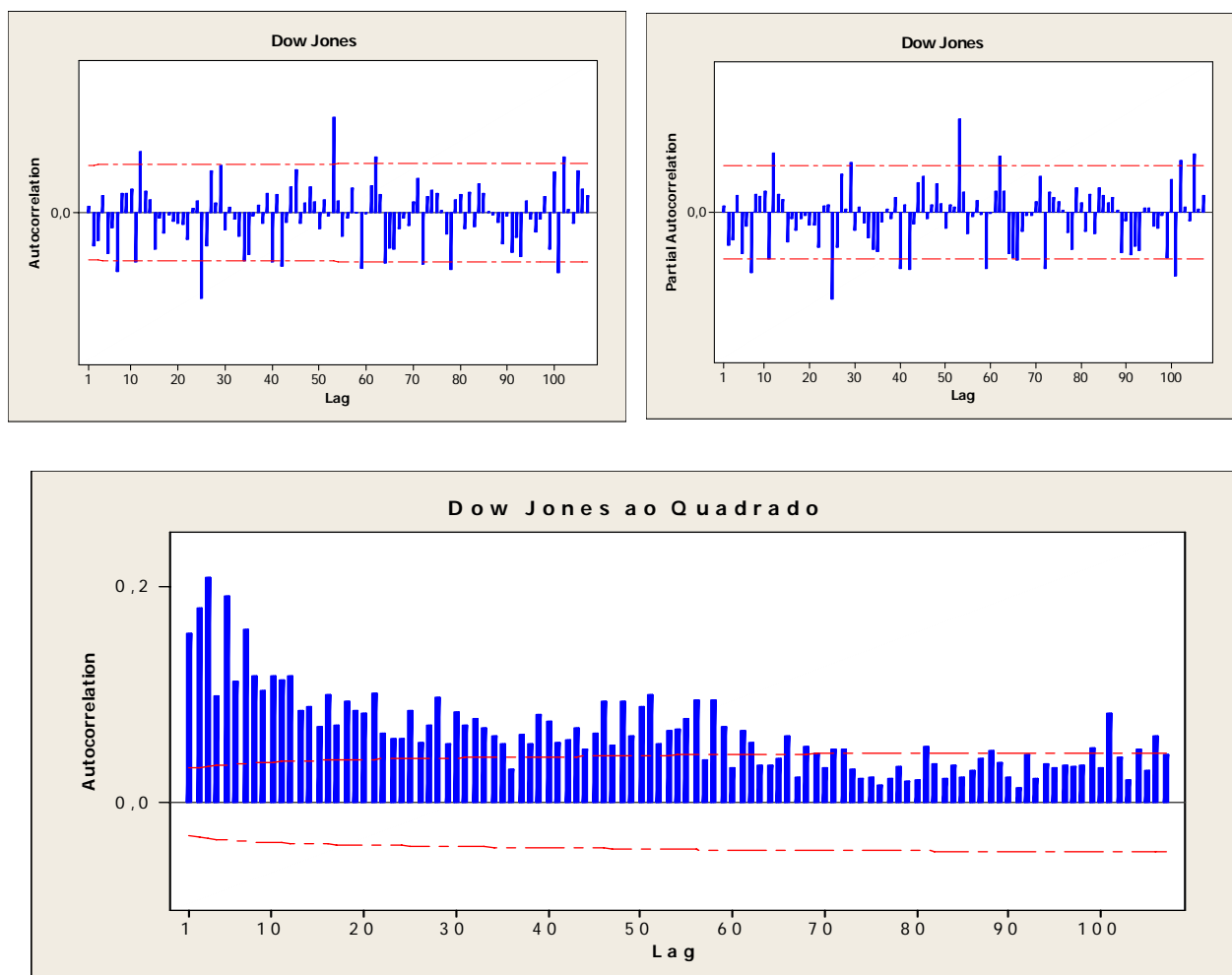


Figura A.1: (a) Função de Autocorrelação do Dow Jones  
(b) Função de Autocorrelação Parcial do Dow Jones  
(c) Função de Autocorrelação do Dow Jones ao Quadrado.

## APÊNDICE A2 – IBovespa

Este apêndice contém os gráficos das funções de autocorrelação, de autocorrelação parcial e de autocorrelação ao ao quadrado da série de retornos do índice IBovespa.

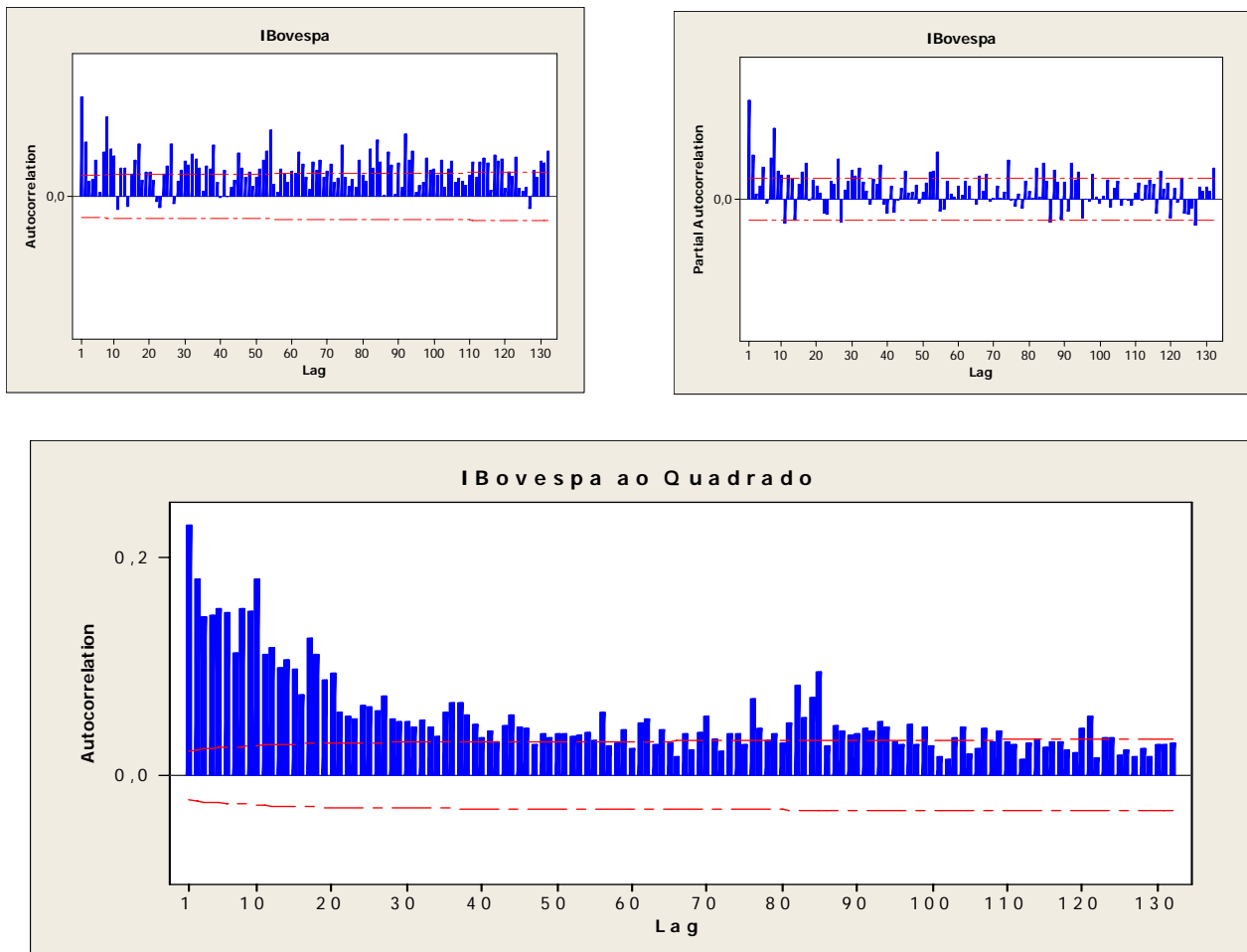


Figura A.2: (a) Função de Autocorrelação do IBovespa  
(b) Função de Autocorrelação Parcial do IBovespa  
(c) Função de Autocorrelação do IBovespa ao Quadrado.

## APÊNDICE A3 – S&P 500

Este apêndice contém os gráficos das funções de autocorrelação, de autocorrelação parcial e de autocorrelação ao quadrado da série de retornos do índice S&P 500.

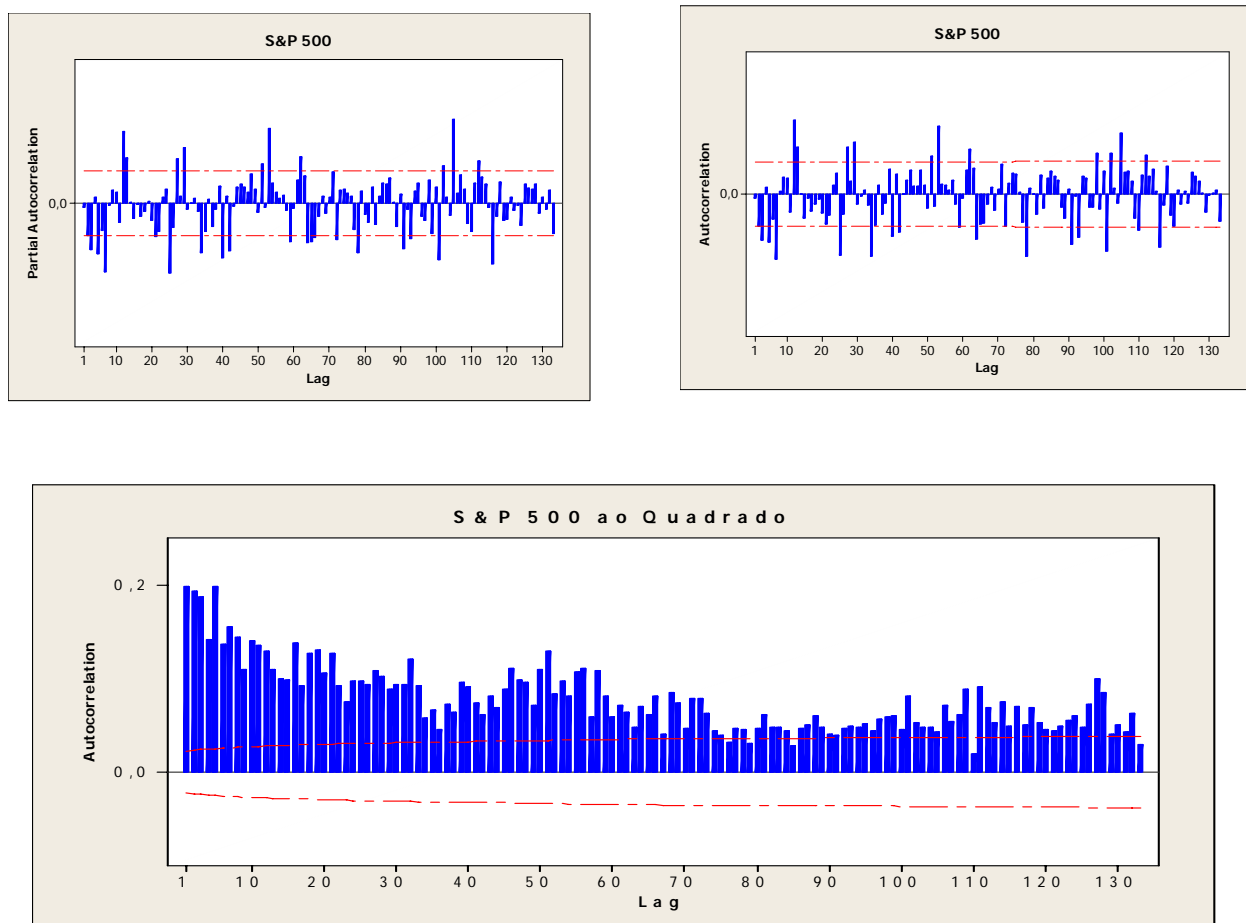


Figura A.3: (a) Função de Autocorrelação do S&P 500  
(b) Função de Autocorrelação Parcial do S&P 500  
(c) Função de Autocorrelação do S&P 500 ao Quadrado.



## APÊNDICE B – Estimação dos Modelos e Análises de Resíduos

### APÊNDICE B1 – Dow Jones

Este apêndice contém a tabela dos coeficientes estimados do modelo TGARCH(2,1) para a série dos retornos do índice Dow Jones. Contém também o teste de Ljung-Box para os resíduos simples e padronizados ao quadrado, bem como os gráficos dos resíduos simples e padronizados para a mesma série de retornos.

Tabela B.1.1: Coeficientes estimados do TGARCH(2,1).

<b><u>Parâmetro</u></b>	<b><u>Valor Estimado</u></b>	<b><u>Erro Padrão</u></b>	<b><u>Valor t</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>
<b>C</b>	0.03137	0.013526	2.319	1.021e-002
<b>A</b>	0.01273	0.001685	7.556	2.576e-014
<b>ARCH(1)</b>	-0.03136	0.008269	-3.792	7.580e-005
<b>ARCH(2)</b>	0.04577	0.009913	4.617	2.012e-006
<b>GARCH(1)</b>	0.92892	0.006408	144.952	0.000e+000
<b>GAMMA(1)</b>	0.19116	0.022359	8.550	0.000e+000
<b>GAMMA(2)</b>	-0.10532	0.022465	-4.688	1.425e-006

Tabela B.1.2: Teste de Ljung-Box para resíduos simples e padronizados ao quadrado para a série Dow Jones.

<b><u>Resíduo</u></b>	<b><u>Estatística</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
<b>Simple</b>	14.84	0.2501	12
<b>Quadrado</b>	6.142	0.9088	12

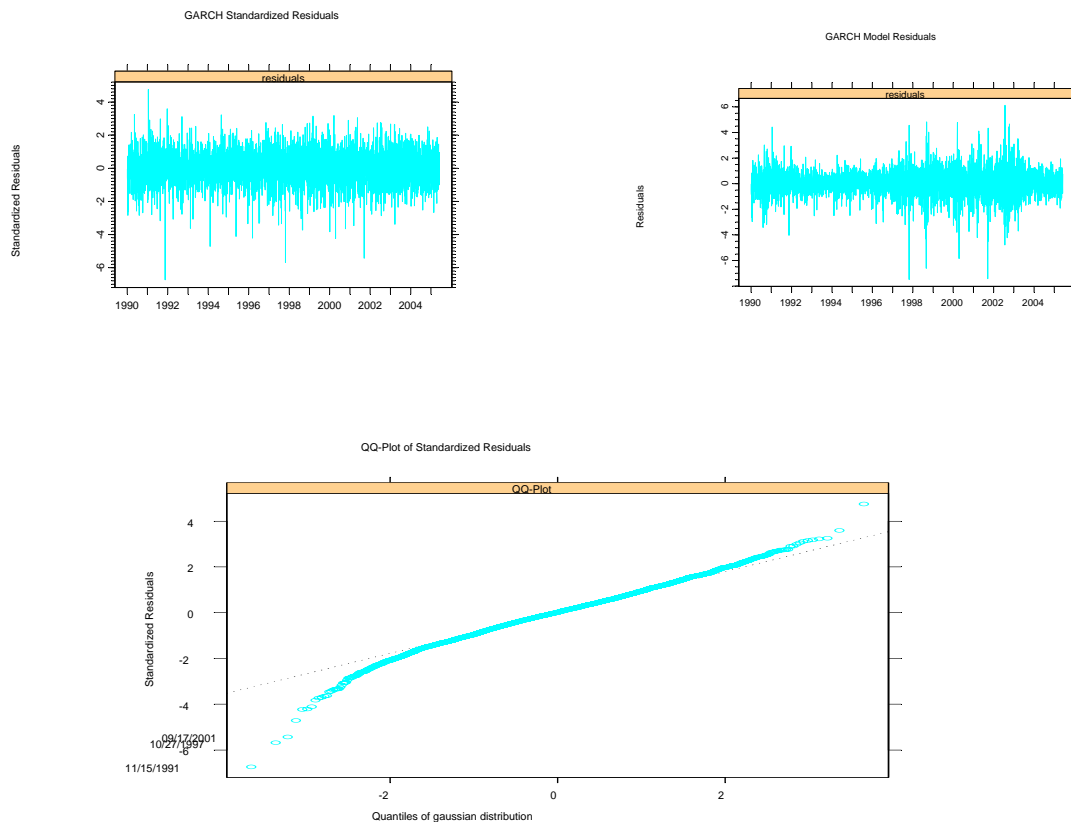


Figura B.1.3: (a) Resíduos do modelo TGARCH(2,1)  
(b) Resíduos padronizados do modelo TGARCH(2,1)  
(c) Gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo TGARCH(2,1).

## APÊNDICE B2 - IBovespa

Este apêndice contém a tabela dos coeficientes estimados do modelo TGARCH(2,1) para a série dos retornos do índice IBovespa. Contém também o teste de Ljung-Box para os resíduos simples e padronizados ao quadrado, bem como os gráficos dos resíduos simples e padronizados para a mesma série de retornos.

Tabela B.2.1: Coeficientes estimados do TGARCH(2,1).

<b><u>Parâmetro</u></b>	<b><u>Valor Estimado</u></b>	<b><u>Erro Padrão</u></b>	<b><u>Valor t</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>
<b>C</b>	0.08958	0.015929	5.624	1.003e-008
<b>A</b>	0.01369	0.002983	4.589	2.295e-006
<b>ARCH(1)</b>	0.03095	0.011487	2.694	3.544e-003
<b>ARCH(2)</b>	0.06716	0.014069	4.774	9.378e-007
<b>GARCH(1)</b>	0.88276	0.009061	97.429	0.000e+000
<b>GAMMA(1)</b>	0.17961	0.026613	6.749	8.573e-012
<b>GAMMA(2)</b>	-0.14582	0.028151	-5,180	1.168e-007

Tabela B.2.2: Teste de Ljung-Box para resíduos simples e padronizados ao quadrado para a série do IBovespa.

<b><u>Resíduo</u></b>	<b><u>Estatística</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
<b>Simple</b>	106.6	0.0000	12
<b>Quadrado</b>	12.52	0.4046	12



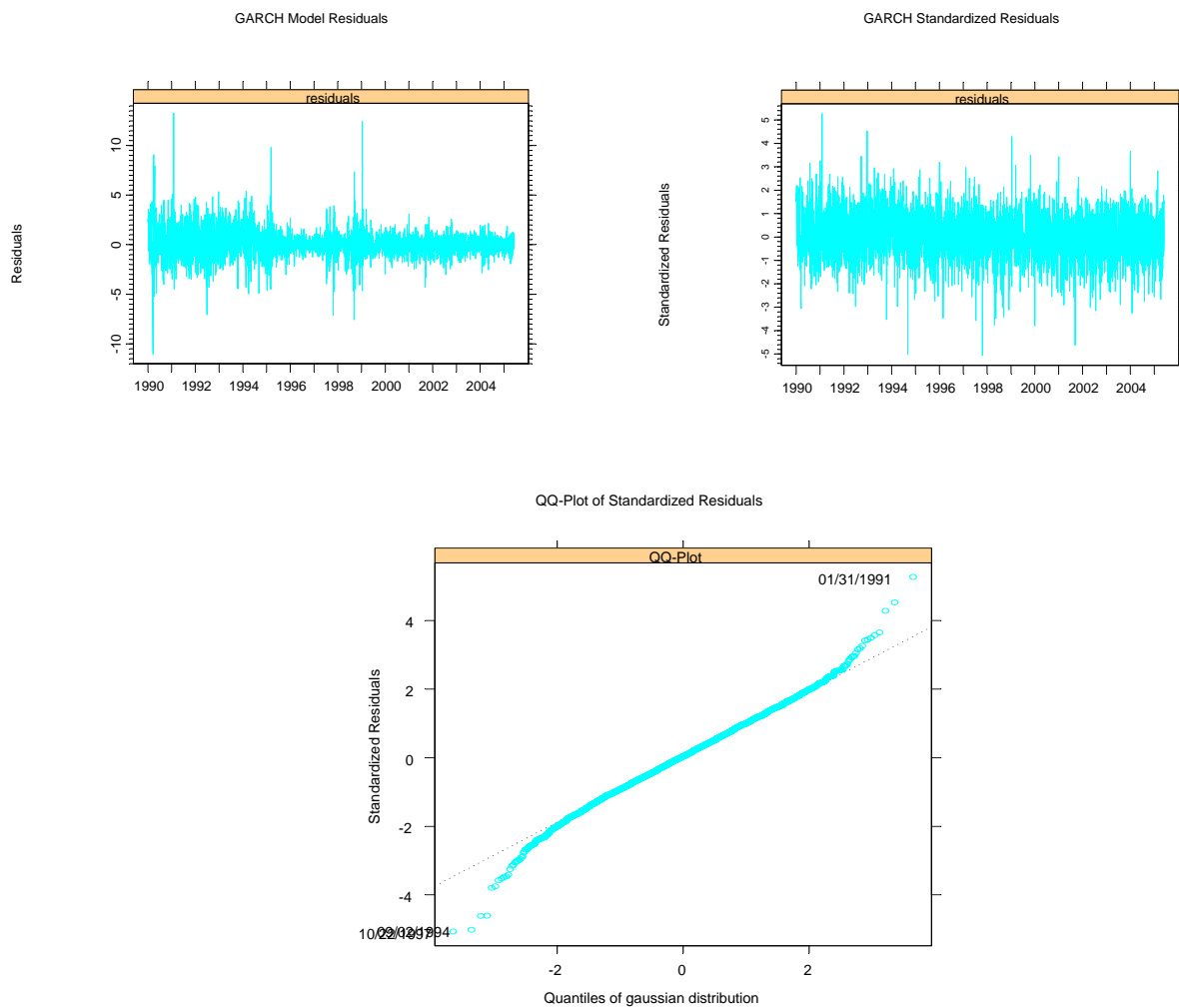


Figura B.2.3: (a) Resíduos do modelo TGARCH(2,1)  
 (b) Resíduos padronizados do modelo TGARCH(2,1)  
 (c) Gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo TGARCH(2,1).

## APÊNDICE B3 – S&P 500

Este apêndice contém a tabela dos coeficientes estimados do modelo TGARCH(2,1) para a série dos retornos do índice S&P 500. Contém também o teste de Ljung-Box para os resíduos simples e padronizados ao quadrado, bem como os gráficos dos resíduos simples e padronizados para a mesma série de retornos.

Tabela B.3.1: Coeficientes estimados do TGARCH(2,1).

<b><u>Parâmetro</u></b>	<b><u>Valor Estimado</u></b>	<b><u>Desvio Padrão</u></b>	<b><u>Valor t</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>
<b>C</b>	0.011863	0.0057092	2.078	1.889e-002
<b>A</b>	0.002083	0.0002856	7.296	1.794e-013
<b>ARCH(1)</b>	-0.046296	0.0060764	-7.619	1.599e-014
<b>ARCH(2)</b>	0.057403	0.0074566	7.698	8.660e-015
<b>GARCH(1)</b>	0.928245	0.0059727	155.415	0.000e+000
<b>GAMMA(1)</b>	0.185385	0.0223371	8.299	0.000e+000
<b>GAMMA(2)</b>	-0.087065	0.0226513	-3.844	6.156e-005

Tabela B.3.2: Teste de Ljung-Box para resíduos simples e padronizados ao quadrado para a série do S&P 500.

<b><u>Resíduo</u></b>	<b><u>Estatística</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
<b>Simple</b>	23.05	0.0273	12
<b>Quadrado</b>	6.442	0.8922	12

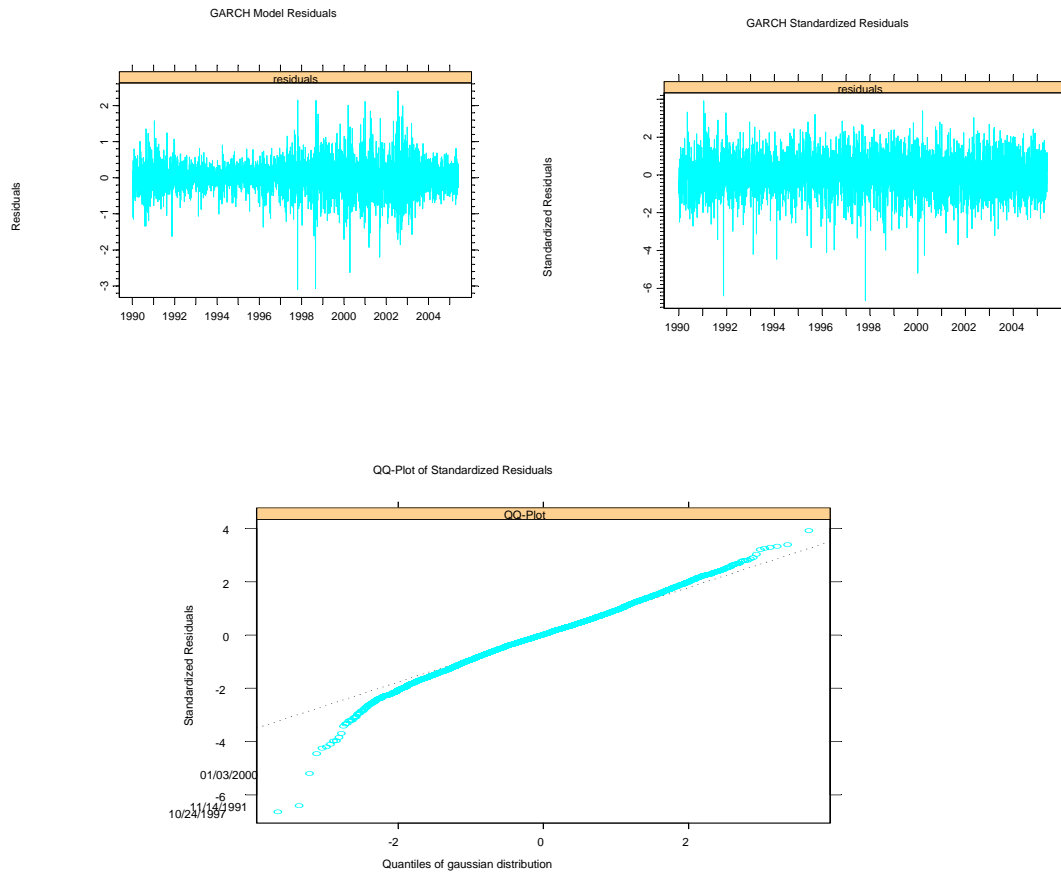


Figura B.3.3: (a) Resíduos do modelo TGARCH(2,1)  
(b) Resíduos padronizados do modelo TGARCH(2,1)  
(c) Gráfico QQ dos resíduos padronizados do modelo TGARCH(2,1).

## APÊNDICE C – Análise GARCH Bivariado

### Apêndice C1 – IBovespa x Dow Jones

Este apêndice contém os resultados da análise bivariada das séries de retornos dos índices IBovespa e Dow Jones. Apresentamos os coeficientes estimados do melhor modelo, o teste de normalidade, os testes de Ljung-Box para os resíduos padronizados e padronizados ao quadrado e o do Multiplicador de Lagrange.

Tabela C.1.1: Coeficientes estimados do DVEC(1,1).

<u>Parâmetro</u>	<u>Valor Estimado</u>	<u>Erro Padrão</u>	<u>Valor t</u>	<u>p-valor</u>
C(1)	0.094157	0.0150424	6.259	2.151e-010
C(2)	0.025981	0.0059588	4.360	6.675e-006
A(1, 1)	0.014142	0.0023968	5.900	1.973e-009
A(2, 1)	0.002462	0.0004990	4.933	4.215e-007
A(2, 2)	0.002367	0.0003646	6.493	4.752e-011
ARCH(1; 1, 1)	0.100171	0.0059636	16.797	0.000e+000
ARCH(1; 2, 1)	0.048037	0.0043563	11.027	0.000e+000
ARCH(1; 2, 2)	0.062128	0.0045371	13.693	0.000e+000
GARCH(1; 1, 1)	0.895739	0.0061053	146.714	0.000e+000
GARCH(1; 2, 1)	0.937179	0.0053840	174.068	0.000e+000
GARCH(1; 2, 2)	0.926747	0.0055833	165.985	0.000e+000

Tabela C.1.2: Teste de Normalidade para o DVEC(1,1).

<u>Série</u>	<u>Jarque-Bera</u>	<u>p-valor</u>
<b>IBovespa</b>	416.1	0
<b>Dow Jones</b>	297.5	0

Tabela C.1.3: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados.

<u>Resíduos Padronizado</u>	<u>Estatística</u>	<u>p-valor</u>	<u>Graus de Liberdade</u>
<b>IBovespa</b>	96.45	2.776e-015	12
<b>Dow Jones</b>	14.99	2.421e-001	12

Tabela C.1.4: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados ao quadrado.

<u>Resíduos ao Quadrado</u>	<u>Estatística</u>	<u>p-valor</u>	<u>Graus de Liberdade</u>
<b>IBovespa</b>	16.192	0.1826	12
<b>Dow Jones</b>	4.808	0.9641	12

Tabela C.1.5: Teste do Multiplicador de Lagrange.

<u>Série</u>	<u>Estatística de Teste</u>	<u>p-valor</u>	<u>Estatística F</u>	<u>p-valor da Estatística F</u>
<b>IBovespa</b>	15.655	0.2075	1.4292	0.2599
<b>Dow Jones</b>	4.727	0.9665	0.4302	0.9923

## APÊNDICE C2 – IBovespa x S&P 500

Este apêndice contém os resultados da análise bivariada das séries de retornos dos índices IBovespa e S&P 500. Apresentamos os coeficientes estimados do melhor modelo, o teste de normalidade, os testes de Ljung-Box para os resíduos padronizados e padronizados ao quadrado e o do Multiplicador de Lagrange.

Tabela C.2.1: Coeficientes estimados do DVEC(1,1).

<u>Coeficiente</u>	<u>Valor</u>	<u>Erro Padrão</u>	<u>Valor t</u>	<u>p-valor</u>
C(1)	0.096361	0.0147934	6.514 4.	153e-011
C(2)	0.027392	0.0059175	4.629	1.900e-006
A(1, 1)	0.014470	0.0023064	6.274	1.963e-010
A(2, 1)	0.002154	0.0004671	4.611	2.075e-006
A(2, 2)	0.001638	0.0002587	6.333	1.349e-010
ARCH(1; 1, 1)	0.098668	0.0056200	17.557	0.000e+000
ARCH(1; 2, 1)	0.046611	0.0044271	10.529	0.000e+000
ARCH(1; 2, 2)	0.055574	0.0041915	13.259	0.000e+000
GARCH(1; 1, 1)	0.895920	0.0057860	154.844	0.000e+000
GARCH(1; 2, 1)	0.940883	0.0049890	188.592	0.000e+000
GARCH(1; 2, 2)	0.936762	0.0047912	195.518	0.000e+000

Tabela C.2.2: Teste de Normalidade para o DVEC(1,1).

<u>Série</u>	<u>Jarque-Bera</u>	<u>p-valor</u>
<b>IBovespa</b>	414.9	0
<b>S&amp;P 500</b>	313.5	0

Tabela C.2.3: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados.

<b><u>Resíduos Padronizado</u></b>	<b><u>Estatística</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
<b>IBovespa</b>	97.05	2.109e-015	12
<b>S&amp;P 500</b>	29.49	3.329e-003	12

Tabela C.2.4: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados ao quadrado.

<b><u>Resíduos ao Quadrado</u></b>	<b><u>Estatística</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
<b>IBovespa</b>	16.460	0.1710	12
<b>S&amp;P 500</b>	6.222	0.9045	12

Tabela C.2.5: Teste do Multiplicador de Lagrange.

<b><u>Série</u></b>	<b><u>Estatística de Teste</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Estatística F</u></b>	<b><u>p-valor da Estatística F</u></b>
<b>IBovespa</b>	15.923	0.1948	1.4538	0.2486
<b>S&amp;P 500</b>	6.181	0.9067	0.5628	0.9476

### APÊNDICE C3 – Dow Jones x S&P 500

Este apêndice contém os resultados da análise bivariada das séries de retornos dos índices Dow Jones e S&P 500. Apresentamos os coeficientes estimados do melhor modelo, o teste de normalidade, os testes de Ljung-Box para os resíduos padronizados e padronizados ao quadrado e o do Multiplicador de Lagrange.

Tabela C.3.1: Coeficientes estimados do BEKK(2,1).

<u>Parâmetro</u>	<u>Valor</u>	<u>Erro Padrão</u>	<u>Valor t</u>	<u>p-valor</u>
C(1)	0.02223	0.005874	3.7853	7.797e-005
C(2)	0.02279	0.005831	3.9092	4.713e-005
A(1,1)	0.04704	0.004390	10.7156	0.000e+000
A(2, 1)	0.03253	0.004311	7.5466	2.798e-014
A(2, 2)	0.01301	0.002255	5.7686	4.322e-009
ARCH(1; 1, 1)	0.28678	0.028040	10.2275	0.000e+000
ARCH(1; 2, 1)	0.01796	0.032709	0.5491	2.915e-001
ARCH(1; 1, 2)	-0.13241	0.027970	-4.7340	1.141e-006
ARCH(1; 2, 2)	0.14310	0.029894	4.7869	8.798e-007
ARCH(2; 1, 1)	0.22036	0.044508	4.9511	3.853e-007
ARCH(2; 2, 1)	0.24984	0.028284	8.8333	0.000e+000
ARCH(2; 1, 2)	-0.01000	0.037150	-0.2692	3.939e-001
ARCH(2; 2, 2)	-0.04894	0.032090	-1.5250	6.368e-002
GARCH(1; 1, 1)	0.92600	0.010707	86.4883	0.000e+000
GARCH(1; 2, 1)	-0.02550	0.010774	-2.3664	9.006e-003
GARCH(1; 1, 2)	0.03372	0.010012	3.3684	3.819e-004
GARCH(1; 2, 2)	0.98730	0.009875	99.9780	0.000e+000



Tabela C.3.2: Teste de Normalidade para o BEKK(2,1).

<u>Série</u>	<u>Jarque-Bera</u>	<u>p-valor</u>
<b>Dow Jones</b>	679.8	0
<b>S&amp;P 500</b>	396.6	0

Tabela C.3.3: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados.

<u>Série</u>	<u>Estatística</u>	<u>p-valor</u>	<u>Graus de Liberdade</u>
<b>Dow Jones</b>	16.55	0.1673	12
<b>S&amp;P 500</b>	13.39	0.3413	12

Tabela C.3.4: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados ao quadrado.

<u>Série</u>	<u>Estatística</u>	<u>p-valor</u>	<u>Graus de Liberdade</u>
<b>Dow Jones</b>	10.58	0.5650	12
<b>S&amp;P 500</b>	39.41	0.0001	12

Tabela C.3.5: Teste do Multiplicador de Lagrange.

<u>Série</u>	<u>Estatística de Teste</u>	<u>p-valor</u>	<u>Estatística F</u>	<u>p-valor da Estatística F</u>
<b>Dow Jones</b>	10.74	0.5517	0.9788	0.57619
<b>S&amp;P 500</b>	39.05	0.0001	3.5873	0.01022

## APÊNDICE D – Análise GARCH Bivariado com *Dummies*

### APÊNDICE D1 – IBovespa x Dow Jones

Este apêndice contém os resultados da análise bivariada com *dummie* das séries de retornos dos índices IBovespa e Dow Jones. Apresentamos o teste de normalidade, os testes de Ljung-Box para os resíduos padronizados e padronizados ao quadrado e o do Multiplicador de Lagrange.

Tabela D.1.1: Teste de Normalidade para o modelo DVEC(1,1) com *dummies*.

<u>Coeficiente</u>	<u>Jarque-Bera</u>	<u>p-valor</u>
IBovespa	602.5	0
Dow Jones	334.1	0

Tabela D.1.2: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1) com *dummies*.

<u>Coeficiente</u>	<u>Estatística</u>	<u>p-valor</u>	<u>Graus de Liberdade</u>
IBovespa	123.97	0.0000	12
Dow Jones	16.01	0.1906	12

Tabela D.1.3: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados ao quadrado do modelo DVEC(1,1) com *dummies*.

<u>Coeficiente</u>	<u>Estatística</u>	<u>p-valor</u>	<u>Graus de Liberdade</u>
IBovespa	196.32	0.00000000	12
Dow Jones	44.23	0.00001398	12

Tabela D.1.4: Teste de Multiplicador de Lagrange do modelo DVEC(1,1) com *dummies*.

<b><u>Coeficiente</u></b>	<b><u>Estatística de Teste</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Estatística F</u></b>	<b><u>p-valor da Estatística F</u></b>
IBovespa	125.85	0.0000000	11.841	0.0000348
Dow Jones	41.49	0.0000406	3.814	0.0078547

## **APÊNDICE D2 – IBovespa x S&P 500**

Este apêndice contém os resultados da análise bivariada com *dummie* das séries de retornos dos índices IBovespa e S&P 500. Apresentamos o teste de normalidade, os testes de Ljung-Box para os resíduos padronizados e padronizados ao quadrado e o do Multiplicador de Lagrange.

Tabela D.2.1: Teste de Normalidade para o modelo DVEC(1,1) com *dummies*.

<b><u>Coeficiente</u></b>	<b><u>Jarque-Bera</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>
IBovespa	602.5	0
S&P 500	351.6	0

Tabela D.2.2: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados do modelo DVEC(1,1) com *dummies*.

<b><u>Coeficiente</u></b>	<b><u>Estatística</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
IBovespa	123.97	0.000000	12
S&P 500	26.23	0.009963	12

Tabela D.2.3: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados ao quadrado do modelo DVEC(1,1) com *dummies*.

<b><u>Coeficiente</u></b>	<b><u>Estatística</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
IBovespa	196.32	0.000000	12
S&P 500	36.82	0.0002389	12

Tabela D.2.4: Teste de Multiplicador de Lagrange do modelo DVEC(1,1) com *dummies*.

<b><u>Coeficiente</u></b>	<b><u>Estatística de Teste</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Estatística F</u></b>	<b><u>p-valor da Estatística F</u></b>
IBovespa	125.85	0.0000000	11.841	0.0000348
S&P 500	34.05	0.0006618	3.124	0.0181520

### **APÊNDICE D3 – Dow Jones x S&P 500**

Este apêndice contém os resultados da análise bivariada com *dummie* das séries de retornos dos índices Dow Jones e S&P 500. Apresentamos o teste de normalidade, os testes de Ljung-Box para os resíduos padronizados e padronizados ao quadrado e o do Multiplicador de Lagrange.

Tabela D.3.1: Teste de Normalidade para o modelo BEKK(2,1) com *dummies*

<b><u>Coeficiente</u></b>	<b><u>Jarque-Bera</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>
Dow Jones	664.8	0
S&P 500	451.8	0

Tabela D.3.2: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados do modelo BEKK(2,1) com *dummies*.

<b><u>Coeficiente</u></b>	<b><u>Estatística</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
Dow Jones	17.21	0.1417	12
S&P 500	14.13	0.2924	12

Tabela D.3.3: Teste de Ljung-Box para resíduos padronizados ao quadrado do modelo BEKK(2,1) com *dummies*.

<b><u>Coeficiente</u></b>	<b><u>Estatística</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Graus de Liberdade</u></b>
Dow Jones	31.99	1.390e-003	12
S&P 500	99.84	5.551e-016	12

Tabela D.3.4: Teste de Multiplicador de Lagrange do modelo EWMA(1) com *dummies*.

<b><u>Coeficiente</u></b>	<b><u>Estatística de Teste</u></b>	<b><u>p-valor</u></b>	<b><u>Estatística F</u></b>	<b><u>p-valor da Estatística F</u></b>
Dow Jones	29.05	3.870e-003	2.662	0.0342027
S&P 500	80.51	3.295e-012	7.481	0.0003468