Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

VOLUMES DE ESPESSAMENTOS DE SUPERFÍCIES COMPACTAS EM VARIEDADES RIEMANNIANAS COMPLETAS DE DIMENSÃO 3 E APLICAÇÕES

por

Edson Sidney Figueiredo

Porto Alegre (RS), Agosto de 2006

Tese submetida por EDSON SIDNEY FIGUEIREDO([1])([2]) como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:
Prof^a. Dra Susana Cândida Fornari
Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito
Prof. Dr. Luis Gustavo Doninelli Mendes

Data de Defesa: 04 de Agosto de 2006

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPQ no período de 02/2004 á 07/2005;
[2]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES no período de 06/2005 á 05/2006.

Agradecimentos

Inicialmente, quero agradecer a UFRGS pela estrutura concedida para que eu pudesse realizar este trabalho.

Aos professores da pós-graduação em Matemática pelo incentivo constante e valiosa participação na minha formação matemática.

Ao professor Jaime Ripoll, pelo enorme e essencial apoio a mim dispensado e, principalmente pelo seu exemplo de professor, pesquisador e grande amigo.

A CAPES e ao CNPQ pelo importante apoio financeiro.

A todos os funcionários da pós-graduação, em especial a Rosane pela dedicação que realiza seu trabalho.

A todos os amigos da pós-graduação: Carmen Vieira Mathias, Giovanni da Silva Nunes, Fidélis Bittencourt, João Roberto Lazzarin, Arì João Aiolfi, Ivan Ricardo Tosmann, Lisandra de Oliveira Sauer pela humorada companhia durante este tempo.

Agradeço a todos os colegas da pós-graduação pela amizade e pelo apoio nunca negado.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente, contribuiram para a realização deste trabalho.

E finalmente agradeço a Gilmara João, minha amiga e companheira, que junto trilhou mais esta etapa de minha vida.

À Lían Víctor, por ser o tesouro da minha vida, e à Gilmara João, esposa, amiga e acima de tudo uma grande mulher.

Resumo

Nesta tese conseguimos obter uma extensão para a fórmula do volume de tubos de H. Weyl para o caso hiperbólico e obter estimativas para o raio de injetividade em termos de invariantes geométricos/topológicos. Provamos, também, que se M é mínima, compacta e mergulhada em $\mathbb{S}^3$, e se Λ é uma das componentes conexas de Λ então, obtivemos uma estimativa por baixo para o $\operatorname{vol}(\Lambda)$ em termos da topologia e da geometria intrínsica de M.

Abstract

In this work we obtain an extension of Weysl's tube formula to the hiperbolic space and estimatives of the radius of injectivity in terms of geometric and topological invariants. We also prove that if M is a minimal surface, compact and embedded in $\mathbb{S}^3$, and if Λ is the connected component of Λ, then obtain a below estimatives for $\mathrm{vol}\,(\Lambda)$ in terms of the topology and intrinsic geometry of M.

Sumário

Introdução

Dada M uma subvariedade mergulhada (possivelmente com fronteira) em uma variedade Riemanniana N, e dado $t > 0$, o tubo $\mathrm{T}_t^N(M)$ de raio t ao redor de M é definido por

$$T_t^N(M) = \{p \in N \mid d(p, M) \leq t\},$$

sendo d a distância riemanniana em M.

Em 1939 H. Weyl [WH] obteve a seguinte fórmula para o volume de um tubo $\mathrm{T}_t^{\mathbb{R}^n}(M)$ de raio pequeno t (t é menor do que a distância de M a seu mais próximo ponto focal em $\mathbb{R}^n$) ao redor de uma subvariedade M com fecho compacto de dimensão ν no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{Vol}_M^{\mathbb{R}^n}(t) = \Omega_m \sum_e \frac{t^{m+e}}{(m+2)\,(m+4)\cdot \ldots \cdot (m+e)} k_e, \ e \text{ par}, \ 0 \leq e \leq \nu, \qquad (1)$$

onde $m = n - \nu$, Ω_m é o volume da bola euclidiana de raio 1 em $\mathbb{R}^m$, e k_e são invariantes integrais sobre M que dependem unicamente da métrica de M induzida por $\mathbb{R}^n$. No mesmo trabalho, Weyl tambem obteve a seguinte fórmula similar a (1) para um tubo $\mathrm{T}_t^{\mathbb{S}^n}(M)$ em torno de $M \subset \mathbb{S}^n$:

$$\mathrm{Vol}_M^{\mathbb{S}^n}(t) = m\Omega_m \sum_e \frac{J_e(t)}{(m+2)\,(m+4)\cdot \ldots \cdot (m+e-2)} k_e, \ e \text{ par}, \ 0 \leq e \leq \nu, \qquad (2)$$

onde

$$J_e(t) = \int_0^t (\operatorname{sen}\rho)^{m+e-1} (\cos\rho)^{\nu-e} d\rho.$$

Em 1982, A. Gray obteve uma generalização da fórmula (1) para M, compacta, isometricamente mergulhada em uma variedade riemanniana completa N^n. Esta generalização é feita no sentido que se a curvatura seccional K_N satisfaz $K_N \geq 0$ e, denotando por $\Gamma(n, \nu, t)$ a expressão do membro direito de (1), então $\mathrm{Vol}_M^N(t) \leq \Gamma(n, \nu, t)$ e, se $K_N \leq 0$, então $\mathrm{Vol}_M^N(t) \geq \Gamma(n, \nu, t)$ ([GA], [GA1]).

Este resultado de Gray pode ser visto como uma generalização parcial do teorema de comparação do volume de bolas geodésicas de Bishop (veja, por exemplo, Capítulo I do [SY]), do qual decorre, em particular, que se a curvatura de Ricci (não normalizada) Ric_M de M satisfaz $\mathrm{Ric}_M \geq (n-1)K_0$, $n = \dim M$, então, dados $x \in M$ e $t > 0$, vale

$$\mathrm{Vol}(B_x(t)) \leq \mathrm{Vol}(K_0, t),$$

sendo $\mathrm{Vol}(K_0, t)$ o volume da bola de raio t em um espaço de curvatura constante K_0.

Nesta tese, obtemos extensões parciais e combinadas dos resultados de Weyl e Gray quando $\dim N = 3$ e $\dim M = 2$, M compacta e mergulhada em N dividindo N em duas componentes conexas. Conseguimos, então, estimativas para volumes de espessamentos (termo usado para tubos quando a codimensão do tubo é 1) de M usando cotas superior e inferior para a curvatura seccional de N. Tiramos também diversas conseqüências geométricas e topológicas das estimativas obtidas.

Neste ponto é interessante comentar que, apesar do caso abordado na tese ser bastante particular quando comparado aos casos mencionados acima, o problema de se estimar o volume de uma das componentes conexas de $N \backslash M$, no caso em que N é compacto, é um problema não trivial, mesmo no caso por exemplo em que $N = \mathbb{S}^3$ e ainda com a hipótese de M ser mínima. Neste sentido, é interessante mencionar a conjectura de Blaine Lawson, que revelou-se finalmente falsa, afirmando que sendo M minima (compacta e mergulhada) em $\mathbb{S}^3$ então M divide $\mathbb{S}^3$ em duas componentes conexas de mesmo volume[3]. De fato, a motivação inicial para este trabalho foi a de obter, tendo em vista a falsidade da conjectura de Lawson, alguma estimativa do volume de uma das componentes conexas de $\mathbb{S}^3 \backslash M$. Abaixo, ainda nesta introdução, apresentamos o que conseguimos nesta direção (estimativa (7)).

Denotemos por $\mathrm{Vol}_{M^+}^N(t)$ o volume de uma das componentes conexas de $\mathrm{T}_t^N(M) \backslash M$.

[3]Contra-exemplos construídos por Karcher e colaboradores (veja [HK1])

Dadas constantes K_1 e K_0, provamos que se $K_1 \geq K_N \geq K_0 > 0$, então

$$\begin{aligned}4K_1 \operatorname{Vol}_{M^+}^{N}(t) \geq{}& 4\pi\chi\left(M\right)t - \int_M H\sigma \\ &- \left\{\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{K_0}} + \sqrt{K_0}\right)\operatorname{sen} 2\sqrt{K_0}t + 2\left|\lambda\right| + 4\left|\lambda\right|\cos^2\sqrt{K_0}t\right\} A\left(M\right),\end{aligned}$$

onde $\chi\left(M\right)$ é a caracterítica de Euler de M, σ a forma área de M, H a curvatura média de M em relação ao vetor normal apontando para o interior da componente de $\mathrm{T}_t^N(M)\backslash M$ considerada, λ o supremo das curvaturas principais de M com relação a este mesmo vetor normal e $A(M)$ a área de M. Por outro lado, se

$$0 > K_1 \geq \overline{K}_N \geq K_0,$$

então

$$\begin{aligned}4(-K_1) \operatorname{Vol}_{M^+}^{N^3}(t) \leq{}& -4\pi\chi\left(M\right)t + \int_M H_0\sigma \\ &+ \left\{\left(\frac{\lambda^2\left(M\right)}{\sqrt{-K_0}} + \sqrt{-K_0}\right)\operatorname{senh} 2\sqrt{-K_0}t + 2\left|\lambda\left(M\right)\right|\right\} A\left(M\right).\end{aligned}$$

Obtemos também uma extensão parcial da fórmula de Weyl (2) para o caso em que N é o espaço hiperbólico e uma fórmula explicita para $\operatorname{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t)$ (que não decorre de (2)), bem como de $\operatorname{Vol}_{M}^{\mathbb{S}^3}(t)$, a saber:

$$\operatorname{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) = \pi\chi\left(M\right)\left(t - \operatorname{sen} t\cos t\right) + \operatorname{sen} t\cos t A\left(M\right) - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\int_M H\sigma. \tag{3}$$

Como a curvatura média troca de sinal ao trocarmos de componente conexa de $\mathbb{S}^3\backslash M$, obtemos de (3)

$$\operatorname{Vol}_{M}^{\mathbb{S}^3}(t) = \operatorname{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) + \operatorname{Vol}_{M^-}^{\mathbb{S}^3}(t) = 2\pi\chi\left(M\right)t + 2(A\left(M\right) - \pi\chi(M))\operatorname{sen} t\cos t. \tag{4}$$

Denote por $\mathbb{H}^3$ o espaço hiperbólico de curvatura seccional constante -1. Supondo agora que $M \subset \mathbb{H}^3$ (compacta, mergulhada), provamos:

$$\operatorname{Vol}_{M^+}^{\mathbb{H}^3}(t) = \pi\chi\left(M\right)\left(\operatorname{senh} t\cosh t - t\right) + \operatorname{senh} t\cosh t A\left(M\right) - \frac{\operatorname{senh}^2 t}{2}\int_M H\sigma \tag{5}$$

do que decorre, como no caso esférico:

$$\mathrm{Vol}_M^{\mathbb{H}^3}(t) = 2\pi\chi\left(M\right)\left(\operatorname{senh} t \cosh t - t\right) + 2 \operatorname{senh} t \cosh t A\left(M\right). \tag{6}$$

É possível que estas fórmulas sejam conhecidas, porém não as encontramos na literatura e nem por indagação direta a diversos matemáticos que trabalham com geometria integral.

Denotando por $K_{\max} = \max_M K$, onde K denota a curvatura seccional de M, relacionado à conjectura de Lawson acima mencionada, provamos que se M é mínima, compacta e mergulhada em $\mathbb{S}^3$, e se Λ é uma das componentes conexas de $\mathbb{S}^3 \backslash M$, então vale a seguinte desigualdade

$$\mathrm{Vol}(\Lambda) \geq \pi\chi(M)\left(\operatorname{arccot}\sqrt{1-K_{\max}} - \frac{\sqrt{1-K_{\max}}}{2-K_{\max}}\right) + \frac{\sqrt{1-K_{\max}}}{2-K_{\max}}A(M), \tag{7}$$

que dá uma estimativa por baixo de $\mathrm{Vol}(\Lambda)$ em termos da topologia e da geometria intrínsica de M (Note que decorre da equação de Gauss que a curvatura seccional de qualquer superficie mínima em $\mathbb{S}^3$ é menor ou igual a 1). Observe que segue de imediato de (7) uma estimativa por cima para a área de M em termos da topologia e da curvatura de M.

Um problema bastante investigado em Geometria Diferencial é o de obter estimativas para o raio de injetividade $\mathrm{inj}(M)$ de M em N em termos de invariante geométricos/topológicos de M e de N (veja a definição de $\mathrm{inj}(M)$ no início do Capítulo 2). Sendo M compacta, mergulhada em $\mathbb{S}^3$, de genus g, provamos usando (4) que se $g = 0$ então

$$\mathrm{inj}(M) \leq \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\pi^2}{A(M)} \tag{8}$$

e se $g \geq 1$, então

$$\mathrm{inj}(M) \leq \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2\pi^2 g}{A\left(M\right) + 2\pi(g-1)}\right). \tag{9}$$

Observe que decorre de (8), por exemplo, que se M é homeomorfa a uma esfera e $A(M) \geq 2\pi^2$ então $\mathrm{inj}(M) \leq \pi/4$. A estimativa (9) é "sharp" pois o toro de Clifford em $\mathbb{S}^3$ tem área $2\pi^2$ e $\mathrm{inj}(M) = \pi/4$. Não deixa de ser surpreendente a existência de uma estimativa para $\mathrm{inj}(M)$ que do ponto de vista geométrico dependa apenas da área de M, já que área é um invariante geométrico muito "fraco".

Note que decorre de (4), pondo $\mathrm{V}(t) = \mathrm{Vol}_M^{\mathbb{S}^3}(t)$ ou $\mathrm{V}(t) = \mathrm{Vol}_M^{\mathbb{H}^3}(t)$, a seguinte fórmula interessante para a terceira variação infinitesimal de volume de M:

$$\mathrm{V}'''(0) = A\,(M) - \pi\chi(M).$$

Para provarmos os resultados da tese usamos técnicas diferentes das utilizadas por Weyl e Gray. Os resultados fundamentais que utilizamos são a fórmula de Reilly e a generalização do Teorema de Rauch, obtida por Warner para estimativas do módulo de campos de Jacobi. A fórmula da co-área é também utilizada para reduzir as estimativas de volume a integrais sobre M.

A tese está organizada da seguinte forma: nos Capítulos 1 e 2 fixamos as notações e introduzimos fatos básicos de Geometria Riemanniana sobre hipersuperfícies paralelas, que serão usados no decorrer da tese. No Capítulo 3 provamos diversos lemas auxiliares estimando a curvatura média de superfícies paralelas. No Capítulo 4 provamos os resultados principais da tese, enunciados nesta introdução.

Capítulo 1

Preliminares Gerais

Neste capítulo introduziremos algumas definições e provaremos resultados que serão usados como ferramentas para provar diversos outros resultados da tese.

Indicamos por N^n uma variedade riemanniana completa de dimensão n e por $\chi(N)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em N. Usamos também a notação $N^n(k)$ para indicar um espaço simplesmente conexo, completo, $n-$dimensional, de curvatura seccional constante $k \in \mathbb{R}$. Vamos relembrar a seguir as definições de algumas noções bastante comuns da Geometria Riemanniana.

Dada $f : N \to \mathbb{R}$ diferenciável, o Hessiano de f é a forma bilinear

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f : \chi(N) \times \chi(N) \to \mathbb{R} \\ \operatorname{Hess} f(X, Y) = \left\langle \overline{\nabla}_X (\operatorname{grad} f), Y \right\rangle. \end{aligned}$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de N^n.

Note que $\operatorname{Hess} f$ é um tensor, isto é, $\operatorname{Hess} f(X, Y)(p)$, só depende do valor dos campos X e Y no ponto $p \in N$, ou seja, dados $X', Y' \in \chi(N)$ tais que $X'(p) = X(p)$ e $Y'(p) = Y(p)$ temos que $\operatorname{Hess} f(X, Y)(p) = \operatorname{Hess} f(X', Y')(p)$; além disso, Hess é simétrico, ou sejam $\operatorname{Hess} f(X, Y) = \operatorname{Hess} f(Y, X)$ para todo $X, Y \in \chi(N)$.

Seja p um ponto qualquer de N e seja $\{E_i\}$ uma base ortonormal de T_pN. O Laplaciano de f é a função $\Delta f \in C^\infty(M)$ definida por

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Hess} f(E_i, E_i)(p).$$

A norma $|\text{Hess}\, f|^2$ do hessiano de f em p é

$$|\text{Hess}\, f|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\overline{\nabla}_{E_i} (\text{grad}\, f)\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} (\text{grad}\, f), \overline{\nabla}_{E_i} (\text{grad}\, f) \right\rangle .$$

A curvatura R de N é a correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(N)$ uma aplicação

$$R(X,Y) : \chi(N) \to \chi(N)$$

dada por

$$R(X,Y)\, Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \chi(N)$$

A curvatura de Ricci em $p \in N$, denotado por $\text{Ric}\,(X,Y)$ é definido por

$$\text{Ric}\,(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)\, E_i, Y \rangle .$$

Se M é uma hipersuperfície de N e η um campo de vetores unitário e normal à M, definimos a segunda forma fundamental B de M em N com relação à η em um ponto $p \in M$ por

$$B_p(u,v) = \left\langle \overline{\nabla}_u \eta, v \right\rangle, \ u, v \in T_pM.$$

Neste trabalho, consideramos a curvatura média não normalizada de M, definida como segue: para cada $p \in M$ a curvatura média H de M em p com relação à η é

$$H = -\sum_{i=1}^{n-1} B_p(E_i, E_i) = -\sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} \eta, E_i \right\rangle$$

onde $\{E_1, E_2, ..., E_{n-1}\}$ é uma base ortonormal qualquer de T_pM.

Feitas as definições iniciais, provamos o seguinte lema:

Lema 1.1 (Weitzenböck) *Seja N uma variedade Riemanniana e $f \in C^3(N)$. Então:*

$$\frac{1}{2}\Delta\left(|\text{grad}\, f|^2\right) = |\text{Hess}\,(f)|^2 + \langle \text{grad}\, \Delta f, \text{grad}\, f \rangle + \text{Ric}\,(\text{grad}\, f, \text{grad}\, f)$$

Demonstração. Fixe um ponto $p \in N$. Escolha um referencial geodésico ortonormal $\{E_i\}$ em torno de p. Em particular, neste referencial $\nabla_{E_i} E_j (p) = 0$ para i, j. Calculando em p temos:

$$\Delta f = \sum_i E_i (E_i (f)) \text{ e } \operatorname{grad} f = \sum_i E_i (f) E_i.$$

Logo,

$$\Delta f = \sum_i E_i \langle \operatorname{grad} f, E_i \rangle = \sum_i (\langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i \rangle).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \left(|\operatorname{grad} f|^2 \right) &= \frac{1}{2} \sum_i E_i E_i \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle = \sum_i E_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle + \sum_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f \rangle . \end{aligned}$$

O primeiro termo é

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle &= \left\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \sum_j E_j (f) E_j \right\rangle = \\ &= \sum_j E_j (f) \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j \rangle = \\ &= \sum_j \langle \operatorname{grad} f, E_j \rangle \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j \rangle . \end{aligned}$$

Porém $\nabla_{E_i} E_j (p) = 0$, logo em p

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j \rangle = E_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j \rangle = E_i (\operatorname{Hess}(f) (E_i, E_j)) .$$

Como $\operatorname{Hess}(f)$ é uma forma bilinear simétrica, ou seja,

$$\operatorname{Hess}(f) (E_i, E_j) = \operatorname{Hess}(f) (E_j, E_i)$$

tem-se

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j \rangle = E_i (\operatorname{Hess}(f) (E_i, E_j)) = E_i (\operatorname{Hess}(f) (E_j, E_i)) =$$

$$= E_i\left(\left\langle \nabla_{E_j} \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle\right) = \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j} \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle$$

Pelo definição de tensor de curvatura tem-se

$$\langle R\,(E_j,E_i) \operatorname{grad} f, E_i\rangle = \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j} \operatorname{grad} f - \nabla_{E_j}\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f + \nabla_{[E_j,E_i]} \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle,$$

mas no ponto p $[E_j, E_i] \equiv 0$, logo

$$\left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j} \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle = \langle R\,(E_j,E_i) \operatorname{grad} f, E_i\rangle + \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j} \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle.$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\left(|\operatorname{grad} f|^2\right) &= \sum_{i,j} \langle \operatorname{grad} f, E_j\rangle \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j\rangle + \sum_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f\rangle = \\
&= \sum_{i,j} \langle \operatorname{grad} f, E_j\rangle \left(\langle R\,(E_j,E_i) \operatorname{grad} f, E_i\rangle + \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j} \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle\right) \\
&+ \sum_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f\rangle.
\end{aligned}$$

O primeiro termo é por definição $\operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)$; O segundo termo é

$$\sum_i (\operatorname{grad} f)\,(\langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i\rangle - \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \nabla_{\operatorname{grad} f} E_i\rangle) = (\operatorname{grad} f) \sum_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i\rangle \tag{1.1}$$

pois

$$\langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \nabla_{\operatorname{grad} f} E_i\rangle = 0 \text{ em } p.$$

Portanto, a expressão (1.1) fica

$$(\operatorname{grad} f) \sum_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i\rangle = (\operatorname{grad} f)\,(\Delta f) = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f)\rangle,$$

e o terceiro termo é por definição $\|\operatorname{Hess}(f)\|^2$. ■

O poder da fórmula acima é que temos a liberdade da escolha para a função f. Muitos dos resultados de comparação em geometria usam a fórmula acima e são obtidos escolhendo-se funções f adequadas, tais como: função distância, autofunções do laplaciano, além de outras.

Podemos, agora, provar a fórmula de Reilly, considerando ainda as seguintes hipóteses e convenções como em [CW].

N^n é uma variedade de dimensão n, compacta, orientável e com bordo $\partial N = M$. Orientamos M com um vetor normal unitário η apontando para o exterior de M.

Seja f uma função definida em N diferenciável em N e em M. Denotemos $z = f|_M$ e $u = \dfrac{\partial f}{\partial n}$ a derivada da função f na direção do vetor normal exterior η. Então

Lema 1.2 (Reilly)

$$\int_N \left(\overline{\Delta} f\right)^2 - |\mathrm{Hess}\,(f)|^2 - \mathrm{Ric}\,(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f)\,\omega = \int_M (2\Delta z - Hu)\, u + B\,(\mathrm{grad}\, z, \mathrm{grad}\, z)\,\sigma$$

onde ω é a forma volume de N, σ a forma volume de M, sendo B e H a segunda forma fundamental e a curvatura média de M com relação à η respectivamente.

Demonstração. Integrando a fórmula de Weitzenböck dada pelo Lema 1.1 tem-se

$$\int_N \frac{1}{2}\overline{\Delta}\left(|\mathrm{grad}\, f|^2\right)\omega = \int_N |\mathrm{Hess}\,(f)|^2 + \left\langle \mathrm{grad}\,\overline{\Delta} f, \mathrm{grad}\, f\right\rangle + \mathrm{Ric}\,(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f)\,\omega \tag{1.2}$$

usando o Teorema da Divergência ([CI] pág. 143) no lado esquerdo da igualdade (1.2) se obtém:

$$\int_N \frac{1}{2}\overline{\Delta}\left(|\mathrm{grad}\, f|^2\right)\omega = \frac{1}{2}\int_M \left\langle \left(\mathrm{grad}\left(|\mathrm{grad}\, f|^2\right)\right)_{|M}, E_n\right\rangle \sigma$$

onde $E_n = \eta$.

Mas

$$\frac{1}{2}\left\langle \left(\mathrm{grad}\left(|\mathrm{grad}\, f|^2\right)\right)_{|M}, E_n\right\rangle = \frac{1}{2}E_n\left(|\mathrm{grad}\, f|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}E_n\left\langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{E_n}\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f\right\rangle =$$

$$= \left\langle \overline{\nabla}_{E_n}\mathrm{grad}\, f, \sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{grad}\, f, E_i\right\rangle E_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{grad}\, f, E_i\right\rangle\left\langle \overline{\nabla}_{E_n}\mathrm{grad}\, f, E_i\right\rangle$$

onde $\{E_1, E_2, ..., E_{n-1}\}$ é uma base ortonormal qualquer de T_pM.

Portanto
$$\int\limits_N \frac{1}{2}\overline{\Delta}\left(|\operatorname{grad} f|^2\right)\omega = \int\limits_M \left(f_n f_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{in}\right)\sigma \tag{1.3}$$
onde f_i e f_{ij} são dadas por
$$f_i = \langle \operatorname{grad} f, E_i\rangle$$
$$f_{ij} = \operatorname{Hess} f\,(E_i, E_j) = \left\langle \overline{\nabla}_{E_j} \operatorname{grad} f, E_i\right\rangle$$
Agora, usando o Teorema de Stokes ([CI] pág. 144) para a segunda parcela do lado direito de (1.2) vem:
$$\int\limits_N \left\langle \operatorname{grad} \overline{\Delta} f, \operatorname{grad} f\right\rangle = -\int\limits_N \left(\overline{\Delta} f\right)^2 + \int\limits_M \left(\overline{\Delta} f\right)_{|M} \frac{\partial f}{\partial E_n} =$$
$$= -\int\limits_N \left(\overline{\Delta} f\right)^2 + \int\limits_M \left(\overline{\Delta} f\right)_{|M} \langle \operatorname{grad} f, E_n\rangle =$$
$$= -\int\limits_N \left(\overline{\Delta} f\right)^2 + \int\limits_M f_n \left(f_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii}\right). \tag{1.4}$$
Então, subtraindo (1.3) e (1.4) segue que
$$\int\limits_N \frac{1}{2}\overline{\Delta}\left(|\operatorname{grad} f|^2\right) - \int\limits_N \left\langle \operatorname{grad} \overline{\Delta} f, \operatorname{grad} f\right\rangle =$$
$$= \int\limits_M \left(f_n f_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{in}\right) - \int\limits_M f_n \left(f_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii}\right) + \int\limits_N \left(\overline{\Delta} f\right)^2 =$$
$$= \int\limits_M f_n f_{nn} + \int\limits_M \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{in} - \int\limits_M f_n f_{nn} - \int\limits_M f_n \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} + \int\limits_N \left(\overline{\Delta} f\right)^2 =$$
$$= \int\limits_M \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{in} - \int\limits_M f_n \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} + \int\limits_N \left(\overline{\Delta} f\right)^2. \tag{1.5}$$

Mas observe que para $1 \leq i \leq n-1$

$$f_{in} = \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle = E_i \left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle - \left\langle (\operatorname{grad} f)_{|M}, \overline{\nabla}_{E_i} E_n \right\rangle =$$
$$= u_i - \left\langle \operatorname{grad} z + E_n(f) E_n, \overline{\nabla}_{E_i} E_n \right\rangle = u_i - \left\langle \operatorname{grad} z, \overline{\nabla}_{E_i} E_n \right\rangle - E_n(f) \left\langle E_n, \overline{\nabla}_{E_i} E_n \right\rangle =$$
$$= u_i - \left\langle \operatorname{grad} z, \overline{\nabla}_{E_i} E_n \right\rangle$$

pois $\left\langle E_n, \overline{\nabla}_{E_i} E_n \right\rangle = 0$. Além disso

$$f_{in} = u_i - \left\langle \sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} z, E_j \right\rangle E_j, \overline{\nabla}_{E_i} E_n \right\rangle = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} z_j \left\langle E_j, \overline{\nabla}_{E_i} E_n \right\rangle = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} z_j h_{ij}$$

onde $h_{ij} = B(E_i, E_j)$. Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{in} &= \sum_{i=1}^{n-1} f_i \left(u_i - \sum_{j=1}^{n-1} z_j h_{ij} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle E_i \left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle \sum_{j=1}^{n-1} z_j h_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle (\operatorname{grad} f)_{|M}, E_i \right\rangle E_i \left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle (\operatorname{grad} f)_{|M}, E_i \right\rangle \sum_{j=1}^{n-1} z_j h_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} \left(f_{|M} \right), E_i \right\rangle E_i \left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} \left(f_{|M} \right), E_i \right\rangle \sum_{j=1}^{n-1} z_j h_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} z, E_i \right\rangle E_i \left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} z, E_i \right\rangle \sum_{j=1}^{n-1} z_j h_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} z, E_i \right\rangle E_i \left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{n-1} z_i z_j h_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} z, E_i \right\rangle \left\langle \operatorname{grad} \left(\left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle \right), E_i \right\rangle - B(\operatorname{grad} z, \operatorname{grad} z) = \\
&= \left\langle \operatorname{grad} \left(\left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle \right), \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} z, E_i \right\rangle E_i \right\rangle - B(\operatorname{grad} z, \operatorname{grad} z) = \\
&= \left\langle \operatorname{grad} \left(\left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle \right), \operatorname{grad} z \right\rangle - B(\operatorname{grad} z, \operatorname{grad} z) = \\
&= \left\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} z \right\rangle - B(\operatorname{grad} z, \operatorname{grad} z). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Agora

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \left(E_i \left\langle \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle - \left\langle \operatorname{grad} f, \overline{\nabla}_{E_i} E_i \right\rangle \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (E_i \left\langle \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle - \left\langle \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i} E_i \right\rangle + \left\langle \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i} E_i \right\rangle - \left\langle \operatorname{grad} f, \overline{\nabla}_{E_i} E_i \right\rangle) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (E_i \left\langle \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle - \left\langle \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i} E_i \right\rangle - \left\langle \operatorname{grad} f, \overline{\nabla}_{E_i} E_i - \nabla_{E_i} E_i \right\rangle) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left\langle \operatorname{grad} f, E_j \right\rangle \left\langle E_j, \overline{\nabla}_{E_i} E_i - \nabla_{E_i} E_i \right\rangle = \qquad (1.7) \\
&= \Delta z - \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle \left\langle E_n, \overline{\nabla}_{E_i} E_i \right\rangle = \Delta z + \left\langle \operatorname{grad} f, E_n \right\rangle \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_n, E_i \right\rangle = \\
&= \Delta z - Hu \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Observe que em (1.7) usamos a definição de Δz e o fato de que ∇ é a projeção ortogonal de $\overline{\nabla}$ em M. Agora fazendo a substituição de (1.6) e (1.8) em (1.5) teremos:

$$
\int_N \frac{1}{2} \overline{\Delta} \left(|\operatorname{grad} f|^2 \right) \omega - \int_N \left\langle \operatorname{grad} \overline{\Delta} f, \operatorname{grad} f \right\rangle \omega =
$$

$$
\int_M \left\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} z \right\rangle - B \left(\operatorname{grad} z, \operatorname{grad} z \right) - u \left(\Delta z - Hu \right) \sigma + \int_N \left(\overline{\Delta} f \right)^2 \omega. \qquad (1.9)
$$

Agora substituindo (1.9) em (1.2) segue então:

$$
\int_N \left(\overline{\Delta} f \right)^2 - |\operatorname{Hess} f|^2 - Ric \left(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \right) \omega =
$$

$$
= \int_M \left(\Delta z - Hu \right) u - \left\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} z \right\rangle + B \left(\operatorname{grad} z, \operatorname{grad} z \right) \sigma.
$$

Usando novamente o Teorema de Stokes e o fato de M ser compacta, segue o desejado. ∎

Usaremos as notações

$$S_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sen} \sqrt{k} t, & k > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \operatorname{senh} \sqrt{-k} t, & k < 0 \end{cases}$$

e

$$C_k(t) = S_k'(t) = \frac{dS_k(t)}{dt}.$$

Note que

$$C_k' = -kS_k. \tag{1.10}$$

Lema 1.3 *Sejam $N(k)$ uma variedade de curvatura constante $k \neq 0$ e $\gamma : [0, a] \to N(k)$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, todo campo de Jacobi $J_{k,\lambda}$ ao longo de γ e ortogonal à γ, satisfazendo as condições iniciais*

$$J_{k,\lambda}(0) = E, \quad J_{k,\lambda}'(0) = \lambda E,$$

é dado por

$$J_{k,\lambda}(t) = (C_k(t) + \lambda S_k(t)) E(t),$$

onde $E(t)$ é o campo de vetores paralelos ao longo de γ tal que $E(0) = E$.

Demonstração. Ver [CI] página 73. ■

Teorema 1.4 (Warner) *Seja N uma variedade Riemanniana completa, de dimensão n, cujas curvaturas seccionais são limitadas inferiormente por k, com $k \neq 0$, de maneira uniforme. Seja M uma hipersuperfície de N admitindo um campo unitário normal η. Dado $p \in M$, defina*

$$\lambda(p) = \sup\{\langle \overline{\nabla}_v v, \eta \rangle \mid v \in T_pM, \ |v| = 1\}$$

e

$$\lambda = \max_{p \in M} \lambda(p).$$

Seja $\beta_{k,\lambda} \in (0, \infty)$ o primeiro zero de $J_{k,\lambda}(t)$, quando este existe, caso contrário ponha $\beta_{k,\lambda} = \infty$.

Temos: se $\gamma : [0, a] \to N$ é uma geodésica normalizada tal que $\gamma(0) \in M$ e $\gamma'(0) = \eta(\gamma(0))$, então M tem um ponto focal ao longo de γ a uma distância $\beta \leq \beta_{k,\lambda}$.

Além disso, sendo $J(t)$ um campo de Jacobi ao longo de γ, ortogonal a γ, então

$$|J(t)| \leq (C_k(t) + \lambda S_k(t))\, |J(0)|$$

para todo $t \in [0, \beta]$.

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\gamma : [0, a] \to N$ é uma geodésica normalizada tal que $\gamma(0) \in M$ e $\gamma'(0) = \eta(p)$. Fixe $t \in (0, \beta)$. A forma índice (veja [CI] pág. 130) de γ é a forma quadrática dada por

$$I_t(X, X) = \left\langle \overline{\nabla}_{X(0)} X(0), \eta \right\rangle + \int_0^t \left\{ |X'(s)|^2 - \langle R(\gamma'(s), X(s)\gamma'(s), X(s)) \rangle \right\} ds,$$

onde X é um campo de vetores qualquer ao longo de γ. No caso em que $X = J$ é um campo de Jacobi, é fácil ver que

$$I_t(J, J) = \langle J(t), J'(t) \rangle .$$

Como os campos de Jacobi minimizam a forma índice para qualquer campo X tal que $X(t) = J(t)$ tem-se então que

$$\begin{aligned} \langle J(t), J'(t) \rangle &\leq \left\langle \overline{\nabla}_{X(0)} X(0), \eta \right\rangle + \int_0^t \left\{ |X'(s)|^2 - \langle R(\gamma'(s), X(s)\gamma'(s), X(s)) \rangle \right\} ds \\ &\leq \lambda |X(0)|^2 + \int_0^t \left\{ |X'(s)|^2 - k |X(s)|^2 \right\} ds \end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos a hipótese de que todas as curvaturas seccionais ao longo de γ são limitadas por baixo por k. Tomemos agora o campo especifico X dado por:

$$X(s) = \frac{(C_k + \lambda S_k)(s)}{(C_k + \lambda S_k)(t)} \tau_{s-t} J(t), \quad s \in [0, t].$$

onde τ indica o transporte paralelo ao longo de γ. Segue-se que:

$$\begin{aligned} \lambda |X(0)|^2 + \int_0^t \left\{ |X'(s)|^2 - k |X(s)|^2 \right\} ds &= \langle X(t), X'(t) \rangle \\ &= \frac{(C_k + \lambda S_k)'(t)}{(C_k + \lambda S_k)(t)} |J(t)|^2 . \end{aligned}$$

Portanto tem-se que

$$\langle J(t), J'(t)\rangle \leq \frac{(C_k + \lambda S_k)'(t)}{(C_k + \lambda S_k)(t)} |J(t)|^2 . \tag{1.11}$$

Que implica no teorema, pois isto é equivalente à desigualdade

$$\left\{ \frac{|J(t)|}{(C_k + \lambda S_k)(t)} \right\}' \leq 0,$$

ou seja, a função

$$g(t) = \frac{|J(t)|}{(C_k + \lambda S_k)(t)}$$

é não crescente e portanto

$$g(t) \leq g(0).$$

Que é a desigualdade que queríamos provar. ■

Corolário 1.5 ((da prova do Teorema 1.4)) *Com as mesma hipóteses do Teorema 1.4, tem-se, para todo $t \in [0, \beta)$,*

$$\langle J(t), J'(t)\rangle \leq \frac{\lambda C_k(t) - kS_k(t)}{C_k(t) + \lambda S_k(t)} |J(t)|^2,$$

onde J é qualquer campo de Jacobi ao longo e ortogonal a uma geodésica $\gamma : [0, \beta) \to N$ com $\gamma(0) \in M$, $\gamma'(0) = \eta(\gamma(0))$.

Demonstração. Decorre de (1.11) e de (1.10). ■

Capítulo 2

Preliminares Sobre Hipersuperfícies Paralelas

Suponha agora que M seja uma hipersuperfície mergulhada, compacta, em N^n, tal que $N \backslash M$ é desconexa e consiste de duas componentes conexas. Denote por A uma destas componentes. Seja η um campo de vetores unitários normais a M que aponte na direção de A. Seja $r > 0$ tal que

$$\phi : M \times (-r, r) \to N$$

dada por

$$\phi(p,t) = \exp_p t\eta(p),\ p \in M,\ t \in (-r,r)$$

seja um difeomorfismo sobre sua imagem. O maior r com esta propriedade é dito raio de injetividade de M, sendo denotado por $\mathrm{inj}(M)$.

Dado $t \in [0, \mathrm{inj}(M))$, $\varphi_t(p) = \phi(p,t)$, $p \in M$, é um difeo de M sobre $M_t := \phi(M,t)$. Defina também

$$\Omega_t\,(M) = \{\phi(p,s) \mid p \in M,\ s \in [0,t]\} \tag{2.1}$$

e

$$\Omega(M) = \bigcup_{t \in [0, \mathrm{inj}(M))} \Omega_t\,(M)\,. \tag{2.2}$$

Seja $f : N \to \mathbb{R}$ a função distância à M, a saber, $f(x) = d(x,M)$, onde d é a distância riemanniana de N.

Mostramos no que segue que $|\mathrm{grad}\, f| = 1$ em $\Omega(M)$.

Dado $x \in \Omega(M)$, existe $p \in M$ tal que

$$f\left(x\right) = t = d\left(x, p\right).$$

Assim, a geodésica

$$\gamma(s) = \exp_p s\eta(p), \;\; s \in [0, \mathrm{inj}(M))$$

é tal que $x = \gamma(t)$. Além disso, vale

$$\gamma'\left(t\right) = \mathrm{grad}\, f\left(x\right).$$

De fato: seja $\{E_1, ..., E_n\}$ uma base ortonormal de T_xN tal que $E_n\left(x\right) = \gamma'\left(t\right)$. Então

$$\mathrm{grad}\, f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \mathrm{grad}\, f\left(x\right), E_i\right\rangle E_i$$

A mostrar: $\left\langle \mathrm{grad}\, f\left(x\right), E_i\right\rangle = 0$ para $i = 1, ..., n-1$. Temos

$$\left\langle \mathrm{grad}\, f\left(x\right), E_i\right\rangle = df_x\left(E_i\right) = \frac{d}{ds} f\left(\alpha\left(s\right)\right)|_{s=0}$$

onde α é uma curva tal que $\alpha\left(0\right) = x$ e $\alpha'\left(0\right) = E_i$. Como $E_i \perp E_n$, podemos escolher uma curva α na hipersuperfície paralela M_t, pois E_i é tangente a esta hipersuperfície em x. Então,

$$f\left(\alpha\left(s\right)\right) = t$$

logo,

$$0 = \frac{d}{ds} f\left(\alpha\left(s\right)\right)_{s=0} = \left\langle \mathrm{grad}\, f\left(x\right), E_i\right\rangle, \;\; i = 1, ..., n-1.$$

Assim,

$$\mathrm{grad}\, f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \mathrm{grad}\, f\left(x\right), E_i\right\rangle E_i = \left\langle \mathrm{grad}\, f\left(x\right), E_n\right\rangle E_n = df_x\left(E_n\right) E_n,$$

mas

$$df_x(E_n) = \frac{d}{ds} f(\gamma(s)) = \frac{d}{ds}(s) = 1.$$

Portanto,

$$\operatorname{grad} f(x) = E_n = \gamma'(t).$$

Segue-se que $|\operatorname{grad} f(x)| = 1$ para todo $x \in \Omega(M)$. Ressaltamos que $\operatorname{grad} f(x)$ é ortogonal a $M_{f(x)}$ e aponta para o exterior de $\Omega_x(M)$ se $x \notin M$. Se $x \in M$ então, $\operatorname{grad} f(x)$ aponta para o interior de $\Omega(M)$. Usaremos a notação

$$\eta_t = \operatorname{grad}(f)|_{M_t}, \; t \in [0, \operatorname{inj}(M)). \tag{2.3}$$

Definição 2.1 Definimos a função $H : \Omega(M) \to \mathbb{R}$ requerendo que $H(x)$ seja a curvatura média da hipersuperfície $M_{f(x)}$ no ponto x com relação à normal $\eta = \operatorname{grad} f$. Usaremos a notação $H_t = H|_{M_t}$, para $t \in [0, \operatorname{inj}(M))$.

Lema 2.2 *Com as notações dadas acima, tem-se que*

$$\overline{\Delta} f(x) = -H(x)$$

$\forall x \in \Omega(M)$, *onde* $\overline{\Delta}$ *é o laplaciano em* N.

Demonstração. Seja $x \in \Omega(M)$. Tome $\{E_1, ..., E_{n-1}, \eta = \operatorname{grad} f\}$ uma base ortonormal de T_xN. Assim

$$\overline{\Delta} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i \right\rangle = -H(x).$$

■

Lema 2.3 *Nas mesma notações anteriores, tem-se:*

$$|\operatorname{Hess}(f)|^2 = H^2 - 2\sigma_2 = H^2 + 2\sum_{i<j} \overline{K}(E_i, E_j) - 2\sum_{i<j} K(E_i, E_j)$$

onde $\overline{K}$ *é a curvatura seccional em* N *e* K *é a curvatura seccional da hipersuperfície paralela.*

Demonstração. Seja $x \in \Omega(M)$ e seja $\{E_1, E_2, ..., E_{n-1}, E_n\}$ uma base ortonormal de T_xN tal que $E_n = \operatorname{grad} f(x)$ e tal que $\{E_1, E_2, ..., E_{n-1}\}$ diagonaliza a segunda forma fundamental de $M_{f(x)}$. Escreva:

$$\overline{\nabla}_{E_i}\eta_t = -\lambda_i E_i, \ t = f(x), \ \eta_t = \operatorname{grad} f|_{M_t}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Hess}(f)|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j \right\rangle^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}\eta_t, E_j \right\rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right)^2 - 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j \\
&= H^2 - 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j.
\end{aligned}$$

Da equação de Gauss tem-se

$$K(E_i, E_j) - \overline{K}(E_i, E_j) = \lambda_i\lambda_j,$$

de modo que

$$|\mathrm{Hess}(f)|^2 = H^2 + 2\sum_{i<j} \overline{K}(E_i, E_j) - 2\sum_{i<j} K(E_i, E_j).$$

■

Corolário 2.4 *Se* $\dim N = 3$, *então tem-se a seguinte relação*

$$|\mathrm{Hess}(f)|^2 = 2\overline{K} - 2K + H^2.$$

Capítulo 3

Estimativas Para a Integral da Curvatura Média de Hipersuperfícies Paralelas

Observamos que no que segue estaremos considerando as notações e hipóteses descritas no início do Capítulo 2.

Definição 3.1 Dados $t \in [0, \mathrm{inj}(M))$, $p \in M_t$, definimos

$$S_t(v) = -\left(\overline{\nabla}_v \eta_t\right)^T, \quad v \in T_p M_t,$$

onde η_t está definido em (2.3, p.15). S_t é a segunda forma fundamental da superfície paralela M_t com relação ao normal η_t. Denotamos também $S_0 = S$.

Lema 3.2 *Seja $p \in M$. Dado $t \in [0, \mathrm{inj}(M))$, a curvatura média de M_t no ponto $x = \varphi_t(p)$ em relação à η_t satisfaz a seguinte desigualdade*

$$-H_t(x) \leq (n-1) \sup_{J \in \mathcal{J}} \frac{\langle J(t), J'(t) \rangle}{\|J(t)\|^2}$$

onde $\mathcal{J}$ é o conjunto de todos os campos de Jacobi J não nulos ao longo da geodésica $\gamma : [0, \mathrm{inj}(M)) \to N$,

$$\gamma(s) = \varphi_s(p) = \exp_p s\eta(p),$$

tais que $J(0) \in T_pM$, $|J(0)| = 1$ *e* $J'(0) + S(J(0)) \in T_pM^{\perp}$, $S = S_0$.

Demonstração. Temos

$$-H_t(x) = \sum_{i=1}^{n-1} - \langle E_i, S_t(E_i) \rangle$$

onde $\{E_1, ..., E_{n-1}\}$ é uma base ortonormal qualquer de T_xM_t. Basta então mostrarmos que

$$-\langle E, S_tE \rangle \leq \sup_{J \in \mathcal{J}} \frac{\langle J(t), J'(t) \rangle}{\|J(t)\|^2},$$

onde E é um vetor unitário qualquer em T_xM_t. Fixemos um tal vetor E. Como a exponencial normal é um difeomorfismo de M sobre M_t, existe um campo de Jacobi J_0 ao longo de γ, satisfazendo as condições acima especificadas (a saber, $J_0(0) \in T_pM$, $|J_0(0)| = 1$ e $J_0'(0) + S(J_0(0)) \in T_pM^{\perp}$) tal que $J_0(t)/|J_0(t)| = E$. É fácil de provar que $J_0'(t) + S_t(J_0(t)) \in (T_xM_t)^{\perp}$ (veja Lema 4.1 do [DC]). Daí,

$$\langle J_0(t), J_0'(t) + S_t(J_0(t)) \rangle = 0$$

ou seja,

$$-\langle E, S_t(E) \rangle = \frac{\langle J_0(t), J_0'(t) \rangle}{|J_0(t)|^2}$$

de modo que

$$-\langle E, S_t(E) \rangle \leq \sup_{J \in \mathcal{J}} \frac{\langle J(t), J'(t) \rangle}{\|J(t)\|^2}$$

o que prova o lema. ■

Lembramos que $N^n(k)$ denota uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa, de curvatura seccional constante k de dimensão n.

Lema 3.3 *Suponha* $M^{n-1} \subset N^n(k)$. *Sejam* $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ *as curvaturas principais de* M *em relação à normal* $\eta = \eta_0$. *Então a curvatura média* H_t *de* M_t *em* $x = \varphi_t(p)$, $p \in M$, *com relação à normal* η_t *é dada por*

$$H_t(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{kS_k(t) + \lambda_i(p)C_k(t)}{C_k(t) - \lambda_i(p)S_k(t)} \tag{3.1}$$

Demonstração. Sejam $E_1, ..., E_n \in T_pM$ as direções principais de M em p em relação à η. Assim

$$S(E_i) = \lambda_i E_i.$$

Seja $E_i(t)$ o transporte paralelo de E_i ao longo da geodésica $\gamma(s) = \exp_p s\eta(p)$, $i = 1, ..., n$, $s \in [0, \mathrm{inj}(M))$. Assim $\{E_1(t), ..., E_{n-1}(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(t)}M_t$, de modo que

$$H_t\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle E_i, S_t\left(E_i\right)\right\rangle \tag{3.2}$$

Pelo Lema 1.3 sabemos que o campo de Jacobi J_i ao longo de γ satisfazendo as condições iniciais $J_i(0) = E_i$ e $J_i'(0) = -\lambda_i E_i$, sendo, como é o caso, γ uma geodésica de um espaço simplesmente conexo, completo e de curvatura seccional constante k, é dado por

$$J_i\left(t\right) = \left(C_k\left(t\right) - \lambda_i S_k\left(t\right)\right) E_i\left(t\right),$$

donde obtemos

$$E_i(t) = \frac{J_i\left(t\right)}{\left\| J_i\left(t\right)\right\|}. \tag{3.3}$$

Substituindo (3.3) em (3.2), observando que

$$\left\langle J_i\left(t\right), S_t\left(J_i\left(t\right)\right)\right\rangle = -\left\langle J_i\left(t\right), J_i'\left(t\right)\right\rangle$$

tem-se

$$\begin{aligned} H_t\left(x\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \frac{J_i\left(t\right)}{\left\| J_i\left(t\right)\right\|}, S_t\left(\frac{J_i\left(t\right)}{\left\| J_i\left(t\right)\right\|}\right)\right\rangle = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left\| J_i\left(t\right)\right\|^2} \left\langle J_i\left(t\right), S_t\left(J_i\left(t\right)\right)\right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left\| J_i\left(t\right)\right\|^2} \left\langle J_i\left(t\right), J_i'\left(t\right)\right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(C_k\left(t\right) - \lambda_i S_k\left(t\right)\right)^2} \left\langle \left(C_k\left(t\right) - \lambda_i S_k\left(t\right)\right) E_i\left(t\right), \left(C_k\left(t\right) - \lambda_i S_k\left(t\right)\right)' E_i\left(t\right)\right\rangle \end{aligned}$$

Como cada E_i é unitário tem-se então,

$$\begin{aligned} H_t(x) &= -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left(C_k(t) - \lambda_i S_k(t)\right)'}{C_k(t) - \lambda_i S_k(t)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{kS_k(t) + \lambda_i(p)C_k(t)}{C_k(t) + \lambda_i(p)S_k(t)} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Corolário 3.4 *Suponha $M^2 \subset \mathbb{S}^3(1)$. Então,*

$$H_t(x) = \frac{H(p)\left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right) + 2 \operatorname{sen} t \cos t \left(2 - K(p)\right)}{\left(\cos t - \lambda_1(p) \operatorname{sen} t\right)\left(\cos t - \lambda_2(p) \operatorname{sen} t\right)} \tag{3.4}$$

onde $\lambda_i(p)$ são as curvaturas principais em $p \in M$, $x = \varphi_t(p)$, $H = H_0$.

Demonstração. Decorre de (3.1) considerando que $C_1(t) = \cos t$ e $S_1(t) = \operatorname{sen} t$ e usando a equação de Gauss $K = 1 - \lambda_1\lambda_2$. $\blacksquare$

Teorema 3.5 *Suponha $M^{n-1} \subset N^n(k)$, $k \neq 0$. Então,*

$$\int_{M_t} H_t \sigma_t = \sum_{i=0}^{n-1} C_k^{n-1-i}(t)\, S_k^i(t) \int_M f_{n-1-i,i}(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})\, \sigma$$

onde σ_t é a forma área da hipersuperfície paralela M_t, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ as curvaturas principais de M e $f_{n-1,j}$ são funções polinomiais definidas pela igualdade polinomial trigonométrica em $C_k(t)$ e $S_k(t)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[f_{n-1-i,i}(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})\right] C_k^{n-1-i}(t)\, S_k^i(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n-1} \left(C_k(t) - \lambda_j S_k(t)\right)\left(\lambda_i C_k(t) + kS_k(t)\right).$$

Demonstração. Vamos usar o difeomorfismo $\varphi_t : M \to M_t$ para transformar

$$\int_{M_t} H_t \sigma_t$$

em uma integral sobre M. Seja $w_t = \varphi_t^*(\sigma_t)$, isto é,

$$w_t(p)(v_1, v_2, ..., v_{n-1}) = \sigma_t(\varphi_t(p)) \left(d(\varphi_t)_p(v_1), ..., d(\varphi_t)_p(v_{n-1}) \right)$$

com $p \in M$, $v_1, v_2, ..., v_{n-1} \in T_pM$. Então, por Fubini

$$\int_{M_t} H_t \sigma_t = \int_M (H_t \circ \varphi_t) w_t.$$

Porém existe $\delta : M \to \mathbb{R}$ tal que $w_t = \delta\sigma$, onde σ é a forma volume de M, de forma que

$$\int_{M_t} H_t \sigma_t = \int_M (H_t \circ \varphi_t) \delta\sigma. \tag{3.5}$$

Mostremos que

$$\delta(p) = \prod_{i=1}^{n-1} |(C_k(t) - \lambda_i(p) S_k(t))|, \; p \in M. \tag{3.6}$$

Fixe $p \in M$. Sejam $E_1, ..., E_{n-1}$ as direções principais de M em p. Temos

$$\sigma(p)(E_1, ..., E_{n-1}) = 1,$$

de modo que

$$\delta(p) = w_t(p)(E_1, E_2, ..., E_{n-1}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \delta(p) = w_t(p)(E_1, E_2, ..., E_{n-1}) = \\ &= \sigma_t(\varphi_t(p)) \left(d(\varphi_t)_p(E_1), ..., d(\varphi_t)_p(E_{n-1}) \right) \\ &= \sigma_t(\varphi_t(p))(J_1(t), ..., J_{n-1}(t)) \\ &= \sqrt{\det \langle J_i(t), J_k(t) \rangle} \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $J_i(t) = d(\phi_t)_p(E_i)$ é o campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma(s) = \exp_p(s\eta(p))$, $s \in [0, t]$ satisfazendo as condições iniciais $J_i(0) = E_i$ e $J_i'(0) = -\lambda_i(p)E_i$. Como N é um espaço forma de curvatura constante k, pelo Lema 1.3 tem-se

$$J_i(s) = (C_k(s) - \lambda_i(p) S_k(s)) E_i(s), \; i = 1, .., n-1,$$

onde $E_i(s)$ é o transporte paralelo de E_i ao longo de γ. Daí e de (3.7) decorre (3.6).

Aplicando em (3.5) a fórmula (3.1) e (3.6) ficamos com

$$\int_{M_t} H_t \sigma_t = \sum_{i=1}^{n-1} \int_M \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n-1} \left(C_k - \lambda_j S_k(t)\right)\left(kS_k(t) + \lambda_i(p) C_k(t)\right)\sigma$$

Efetuando todos os produtos e fazendo o somatório, conclui-se então que:

$$\int_{M_t} H_t \sigma_t = \sum_{i=0}^{n-1} C_k^{n-1-i}(t)\, S_k^i(t) \int_M f_{n-1-i,i}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1})\,\sigma$$

■

Observação 3.6 Diversos cálculos nos levam a conjecturar que as funções polinomiais f_{ij} têm a seguinte fórmula geral: para $i \neq n-1$,

$$f_{n-1-i,i}(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) = (-1)^i \left((i+1) \sum_{j_1<...<j_{i+1}}^{n-1} \lambda_{j_1} ... \lambda_{j_{i+1}} - k(n-i) \sum_{j_1<...<j_{i-1}}^{n-1} \lambda_{j_1} ... \lambda_{j_{i-1}} \right)$$

e

$$f_{0,n-1}(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) = (-1)^{i+1} \sum_{j_1<j_2<...<j_{n-2}}^{n-1} \lambda_{j_1} ... \lambda_{j_{n-2}}.$$

Podemos verificar que estas fórmulas são válidas até $n = 6$. Para este valor de n, as funções $f_{n-1-i,i}$ são dadas por:

$$f_{5,0} = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i = H_0$$

$$f_{4,1} = -\left(2 \sum_{i<j}^{5} \lambda_i \lambda_j - 5k\right)$$

$$f_{3,2} = 3 \sum_{i<j<k}^{5} \lambda_i \lambda_j \lambda_k - 4kH_0$$

$$f_{2,3} = -\left(4 \sum_{i<j<k<l}^{5} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l - 3k \sum_{i<j}^{5} \lambda_i \lambda_j\right)$$

$$f_{1,4} = 5\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - 2k\sum_{i<j<k}^{5}\lambda_i\lambda_j\lambda_k$$

$$f_{0,5} = k\sum_{i<j<k<l}^{5}\lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_l$$

Corolário 3.7 *Suponha* $M^2 \subset \mathbb{S}^3(1)$. *Então*

$$\int_{M_t} H_t\sigma_t = \left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right)\int_M H_0\sigma + 4\operatorname{sen} t\cos t A(M)$$
$$- 4\pi\chi(M)\operatorname{sen} t\cos t$$

Demonstração. Decorre do Teorema (3.5), pois como $k = 1$, tem-se que $C_1(t) = \cos t$ e $S_1(t) = \operatorname{sen} t$. Logo

$$\int_{M_t} H_t\sigma_t = \sum_{i=0}^{2}\cos^{2-i}(t)\operatorname{sen}^i(t)\int_M f_{2-i,i}(\lambda_1, \lambda_2). \tag{3.8}$$

Além disso, temos

$$f_{2,0} = H_0$$
$$f_{1,1} = -(2\lambda_1\lambda_2 - 2)$$
$$f_{0,2} = -H_0$$

Substituindo em (3.8) vem

$$\int_{M_t} H_t\sigma_t = \left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right)\int_M H_0 + 2\cos t\operatorname{sen} t\int_M (1 - \lambda_1\lambda_2),$$

mas por Gauss temos

$$K - 1 = \lambda_1\lambda_2,$$

ou seja,

$$\int_{M_t} H_t\sigma_t = \left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right)\int_M H_0\sigma + 4\operatorname{sen} t\cos t\left(A(M) - \frac{1}{2}\int_M K(p)\sigma\right).$$

Como

$$\int_M K\sigma = 2\pi\chi\left(M\right),$$

segue o desejado. ■

Lema 3.8 *Seja M uma superfície compacta, mergulhada em uma variedade riemanniana completa N de dimensão 3 tal que $\overline{K}_N \geq \overline{K}_0 > 0$. Defina, para cada $p \in M$,*

$$\lambda(p) = \max\{\left\langle \overline{\nabla}_v v, \eta \right\rangle \mid v \in T_pM,\ |v| = 1\},$$

e

$$\lambda = \max_{p\in M} \lambda(p).$$

Então, dado $t \in [0, \mathrm{inj}(M))$, tem-se

$$-\int_{M_t} H_t\sigma_t \leq \left\{\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{\overline{K}_0}} + \sqrt{\overline{K}_0}\right)\operatorname{sen} 2\sqrt{\overline{K}_0}t - 2\left|\lambda\right| + 4\left|\lambda\right|\cos^2\sqrt{\overline{K}_0}t\right\} A\left(M\right). \tag{3.9}$$

Demonstração. Para estimar

$$-\int_{M_t} H_t\sigma_t$$

vamos estimar por cima a área $A(M_t)$ de M_t e H_t em um ponto qualquer $x \in M_t$. Seja $p \in M$ tal que a geodésica $\gamma(s) = \exp_p s\eta(p)$ satisfaz $x = \gamma(t)$. Do Lema 3.2 obtemos

$$-H_t(x) \leq (n-1)\sup_{J\in\mathcal{J}}\frac{\left\langle J\left(t\right), J'\left(t\right)\right\rangle}{\left\|J\left(t\right)\right\|^2},$$

onde, lembramos, $\mathcal{J}$ é o espaço dos campos de Jacobi ao longo de γ descritos no Lema 3.2. Do Corolário 1.5 tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\left\langle J\left(t\right),J'\left(t\right)\right\rangle}{\left\|J\left(t\right)\right\|^{2}} &\leq \frac{-\sqrt{K_0}\operatorname{sen}\left(\sqrt{K_0}t\right)+\lambda\cos\left(\sqrt{K_0}t\right)}{\cos\left(\sqrt{K_0}t\right)+\frac{\lambda}{\sqrt{K_0}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{K_0}t\right)} \\
&\leq \left|\frac{-\sqrt{K_0}\operatorname{sen}\left(\sqrt{K_0}t\right)+\lambda\cos\left(\sqrt{K_0}t\right)}{\cos\left(\sqrt{K_0}t\right)+\frac{\lambda}{\sqrt{K_0}}\sin\left(\sqrt{K_0}t\right)}\right| \\
&\leq \frac{\sqrt{K_0}\operatorname{sen}\left(\sqrt{K_0}t\right)+|\lambda|\cos\left(\sqrt{K_0}t\right)}{\cos\left(\sqrt{K_0}t\right)+\frac{|\lambda|}{\sqrt{K_0}}\sin\left(\sqrt{K_0}t\right)}.
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
-\int_{M_t}H_t\sigma_t &\leq (n-1)\,\frac{\sqrt{K_0}\operatorname{sen}\sqrt{K_0}t+|\lambda|\cos\sqrt{K_0}t}{\cos\sqrt{K_0}t+\frac{|\lambda|}{\sqrt{K_0}}\operatorname{sen}\sqrt{K_0}t}\int_{M_t}\sigma_t \\
&= (n-1)\,\frac{\sqrt{K_0}\operatorname{sen}\sqrt{K_0}t+|\lambda|\cos\sqrt{K_0}t}{\cos\sqrt{K_0}t+\frac{|\lambda|}{\sqrt{K_0}}\operatorname{sen}\sqrt{K_0}t}A(M_t)
\end{aligned}$$

sendo $A(M_t)$ área de M_t. Podemos estimar $A(M_t)$ usando a mesma técnica do Teorema 3.5. De fato: temos, usando a mesma notação deste teorema,

$$A(M_t)=\int_{M_t}\sigma_t=\int_M\delta\sigma.$$

Em cada ponto p de M e para certos campos de Jacobi ao longo da geodésica normal a M em p:

$$\delta(p)=\sqrt{\det\left\langle J_i(t),J_k(t)\right\rangle}\leq|J_1(t)||J_2(t)|.$$

Podemos, então, usar o Teorema 1.4 para obter

$$|J_i(t)|\leq\cos\sqrt{K_0}t+\frac{|\lambda|}{\sqrt{K_0}}\operatorname{sen}\sqrt{K_0}t,\quad i=1,2,$$

o que nos dá

$$A(M_t) \leq \left(\cos\sqrt{K_0}t + \frac{|\lambda|}{\sqrt{K_0}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{K_0}t\right)^2 A(M).$$

Juntando com a desigualdade anterior, obtemos (3.9). ■

Lema 3.9 *Suponha que* $\dim N = 3$ *e que*

$$0 > \overline{K} \geq \overline{K}_0.$$

Então, dado $t \in [0, \mathrm{inj}(M))$,

$$-\int_{M_t} H_t \sigma_t \leq \left\{ \left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{-\overline{K}_0}} + \sqrt{-\overline{K}_0} \right) \mathrm{senh}\, 2\sqrt{-\overline{K}_0}t + 2\,|\lambda| \right\} A\,(M) \qquad (3.10)$$

Demonstração. É a mesma prova anterior, usando também o Teorema 1.4, porém substituindo os cossenos e senos trigonométricos por cossenos e senos hiperbólicos. ■

Capítulo 4

Volume de $\Omega_t(M) \subset N^n$

Novamente observe que seguimos adotando as notações introduzidas no Capítulo 2.

Proposição 4.1 *A fórmula de Reilly para a função* $f(x) = d(x, M)$ *na região* $\Omega_t(M)$, $t \in (0, \mathrm{inj}(M))$, *é dada por*

$$\int_{\Omega_t(M)} \left(\left(\overline{\Delta} f \right)^2 - |\mathrm{Hess}\,(f)|^2 - \mathrm{Ric}\,(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f) \right) \omega = \int_M H_0 \sigma - \int_{M_t} H_t \sigma_t. \quad (4.1)$$

Demonstração. Note que a fronteira de $\Omega_t(M)$ é composta por duas superfícies de nível M_0 e M_t, ou seja, $\partial \Omega_t(M) = M_0 \cup M_t$. Além disso, convém observar que a função distância f restrita a cada superfície de nível é constante. De fato, temos $f|_M = 0$ e $f|_{M_t} = t$. Assim, tem-se $\mathrm{grad}\,(f|_M) = 0 = \mathrm{grad}\,(f|_{M_t})$ e $\Delta\,(f|_M) = \Delta\,(f|_{M_t}) = 0$. Outro fato é que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 = \left(\langle \mathrm{grad}\, f, \eta \rangle \right)^2 = \left(\langle \eta, \eta \rangle \right)^2 = 1.$$

Aplicando estas igualdades na fórmula de Reilly (Lema 1.2) segue o desejado observando o seguinte fato importante sobre as orientações consideradas: na integral sobre M, a normal a ser utilizada, de acordo com a fórmula de Reilly, é a normal exterior, a saber, $\eta_0 = -\,\mathrm{grad}\, f$. Por esta razão, aparece trocado o sinal de H_0 na integral sobre M em (4.1) em relação ao sinal do Lema 1.2 , já que como convencionamos anteriormente H_t é a curvatura média de M_t em relação à normal $\eta_t = \mathrm{grad}\, f$. ■

Teorema 4.2 *Suponha $M^{n-1} \subset N^n(k)$ $k \neq 0$ divida N em duas componentes conexas . Dado $t \in [0, \mathrm{inj}(M))$, tem-se*

$$(n-1)\,k\,\mathrm{Vol}_{M^+}^{N(k)}(t) = 2\int_{\Omega_t(M)} \sigma_2\omega - \int_M H_0\sigma + \sum_{i=0}^{n-1} C_k^{n-1-i}(t)\,S_k^i(t)\int_M f_{n-1-i,i}\sigma \tag{4.2}$$

Demonstração. Considere a função $f(x) = d(x, M)$ na região $\Omega_t(M)$. Pelos Lemas 2.2 e 2.3 e o fato de $\mathrm{Ric}\,(\Omega_t(M)) = (n-1)\,k$ a fórmula (4.1) fica

$$(n-1)\,k\,\mathrm{Vol}_{M^+}^{N(k)}(t) = 2\int_{\Omega_t(M)} \sigma_2\omega - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t.$$

A igualdade (4.2) decorre então do Teorema 3.5. ∎

Corolário 4.3 *Suponha $M \subset \mathbb{S}^3(1)$ divida $\mathbb{S}^3(1)$ em duas componentes conexas. Seja $t \in [0, \mathrm{inj}(M))$. Então*

$$\mathrm{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) = \pi\chi(M)(t - \operatorname{sen} t\cos t) + \operatorname{sen} t\cos t A(M) - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\int_M H_0\sigma \tag{4.3}$$

onde $\chi(M)$ a característica de Euler de M e $A(M)$ a área de M.

Demonstração. Usando os Corolário 2.4, Lema 2.2 e o fato que $\mathrm{Ricc}\,(\mathbb{S}^3(1)) = 2$ a fórmula (4.1) fica

$$2\int_{\Omega_t(M)} K\omega - 2\int_{\Omega_t(M)} \overline{K}\omega = 2\,\mathrm{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) + \int_M H_0\sigma - \int_{M_t} H_t\sigma_t.$$

Como $\overline{K} = 1$ a fórmula acima passa a ser

$$4\,\mathrm{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) = 2\int_{\Omega_t(M)} K\omega - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t.$$

Usando a fórmula da coárea para calcular a primeira integral sobre as superfícies paralelas $M_t = f^{-1}(t)$, como $|\operatorname{grad} f| = 1$, obtemos

$$4\,\mathrm{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) = 2\int_0^t\int_{M_t} K\sigma_t dt - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t.$$

Como

$$\int_{M_t} K\sigma_t = 2\pi\chi\left(M_t\right) = 2\pi\chi\left(M\right)$$

segue então que

$$4\operatorname{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) = 4\pi\chi\left(M\right)t - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t \tag{4.4}$$

Na ultima integral do lado direito usando o Corolário 3.7 temos

$$\begin{aligned}
4\operatorname{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) = {} & 4\pi\chi\left(M\right)t - \int_M H_0\sigma + 4\operatorname{sen}t\cos tA\left(M\right) \\
& - 4\pi\chi\left(M\right)\operatorname{sen}t\cos t + \left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right)\int_M H_0\sigma \\
= {} & 4\pi\chi\left(M\right)t + 4\operatorname{sen}t\cos tA\left(M\right) - 4\pi\chi\left(M\right)\operatorname{sen}t\cos t - 2\operatorname{sen}^2 t\int_M H_0\sigma.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) &= \pi\chi\left(M\right)t + \operatorname{sen}t\cos tA\left(M\right) - \pi\chi\left(M\right)\operatorname{sen}t\cos t - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\int_M H_0\sigma \\
&= \pi\chi\left(M\right)\left(t - \operatorname{sen}t\cos t\right) + \operatorname{sen}t\cos tA\left(M\right) - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\int_M H_0\sigma. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

■

O que foi feito para o caso $M \subset \mathbb{S}^3\left(1\right)$ pode ser feito para o caso $M \subset \mathbb{H}^3$ onde então, tem-se:

Corolário 4.4 *Seja $M \subset \mathbb{H}^3$ compacta, mergulhada e seja $t \in [0, \operatorname{inj}(M))$. Então,*

$$\operatorname{Vol}_{M^+}^{\mathbb{H}^3}(t) = \pi\chi\left(M\right)\left(\operatorname{senh}t\cosh t - t\right) + \operatorname{senh}t\cosh tA\left(M\right) - \frac{\operatorname{senh}^2 t}{2}\int_M H_0\sigma.$$

Demonstração. A prova é inteiramente análoga a anterior, considerando apenas o fato de que, neste caso,

$$\int_{M_t} H_t\sigma_t = \left(\operatorname{senh}^2 t + \cosh^2 t\right)\int_M H_0\sigma - 4\operatorname{senh}t\cosh tA\left(M\right) - 4\pi\chi\left(M\right)\operatorname{senh}t\cosh t$$

e $\operatorname{Ricc}\left(\mathbb{H}^3\right) = -2$. ■

Corolário 4.5 *Seja $M \subset \mathbb{S}^3(1)$, compacta, mergulhada, mínima com genus g. Seja $t \in [0, inj(M))$. Então:*

$$\mathrm{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) \leq 2\pi(t-g) + \operatorname{sen} t \cos t \,(10\pi g + 6\pi) \tag{4.6}$$

Demonstração. Considerando que

$$\chi(M) = 2 - 2g$$

e, pelo Corolário 5 de [CW]

$$A(M) \leq 8\pi(g+1),$$

substituindo na equação (4.5) o resultado segue. ■

Corolário 4.6 *Seja M compacta, mergulhada, de genus g em $\mathbb{S}^3$. Se*

a) $g = 0$ então

$$\mathrm{inj}(M) \leq \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2\pi^2}{A(M)}\right) \tag{4.7}$$

b) $g \geq 1$ então

$$\mathrm{inj}(M) \leq \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2\pi^2 g}{A(M) + 2\pi(g-1)}\right).$$

Demonstração. Consideremos a fórmula (4.3), a saber

$$\mathrm{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) = \pi\chi(M)\,t + \frac{\sin 2t}{2}(A(M) - \pi\chi(M)) - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\int_M H_0\sigma. \tag{4.8}$$

Então:

$$\mathrm{Vol}_{M}^{\mathbb{S}^3}(t) = \mathrm{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(t) + \mathrm{Vol}_{M^-}^{\mathbb{S}^3}(t) = 2\pi\chi(M)\,t + 2(A(M) - \pi\chi(M))\operatorname{sen} t \cos t.$$

Fazendo $t \to r = \mathrm{inj}(M)$, obtemos:

$$\mathrm{Vol}_{M}^{\mathbb{S}^3}(r) = 2\pi\chi(M)\,r + 2(A(M) - \pi\chi(M))\operatorname{sen} r \cos r.$$

Temos então,

$$2\pi\chi\,(M)\,r + 2(A\,(M) - \pi\chi(M))\,\mathrm{sen}\,r\cos r \leq \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^3) = 2\pi^2,$$

ou seja,

$$\pi\chi\,(M)\,r + (A\,(M) - \pi\chi(M))\,\mathrm{sen}\,r\cos r \leq \pi^2. \tag{4.9}$$

Se $\chi(M) > 0$, isto é, $\chi(M) = 2$, então, como

$$\frac{1}{2}\sin(2r) = \sin r\cos r \leq r,$$

obtemos

$$2\pi\sin(2r) + (A\,(M) - 2\pi)\sin(2r) \leq 2\pi^2,$$

ou seja,

$$A\,(M)\sin(2r) \leq 2\pi^2$$

o que nos dá

$$\mathrm{inj}(M) \leq \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\pi^2}{A(M)}.$$

Suponhamos agora $\chi(M) \leq 0$. De (4.9), como $r \leq \pi/2$, obtemos

$$\begin{aligned}(A\,(M) - \pi\chi(M))\,\mathrm{sen}\,r\cos r \leq \pi^2 - \frac{\pi^2\chi(M)}{2} &= \pi^2\left(1 - \frac{\chi(M)}{2}\right)\\ &= \pi^2\left(\frac{2-\chi(M)}{2}\right) = \pi^2 g,\end{aligned}$$

ou seja,

$$(A\,(M) - \pi\chi(M))\frac{\sin(2r)}{2} \leq \pi^2 g$$

onde resulta

$$\sin(2r) \leq \frac{2\pi^2 g}{A\,(M) - \pi(2-2g)} = \frac{2\pi^2 g}{A\,(M) + 2\pi(g-1)}.$$

Portanto

$$r \leq \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2\pi^2 g}{A\,(M) + 2\pi(g-1)}\right), \quad g \geq 1.$$

■

Note que decorre de (4.7) que se M é homeomorfa a uma esfera e $A(M) \geq 2\pi^2$ então $\mathrm{inj}(M) \leq \pi/4$.

Corolário 4.7 *Seja M mínima, compacta e mergulhada em $\mathbb{S}^3$, e seja Λ uma das componentes conexas de $\mathbb{S}^3 \backslash M$. Seja $K_{\max} = \max_M K$, onde K denota a curvatura seccional de M. Então*

$$\mathrm{Vol}(\Lambda) \geq \pi\chi(M)\left(\operatorname{arccot}\sqrt{1-K_{\max}} - \frac{\sqrt{1-K_{\max}}}{2-K_{\max}}\right) + \frac{\sqrt{1-K_{\max}}}{2-K_{\max}}A(M). \quad (4.10)$$

Demonstração. Sendo $r = \mathrm{inj}(M)$, fazendo $t \to r$ em (4.8) obtemos

$$\mathrm{Vol}(\Lambda) \geq \mathrm{Vol}_{M^+}^{\mathbb{S}^3}(r) = \pi\chi(M)\,r + \frac{\sin 2r}{2}(A(M) - \pi\chi(M)). \quad (4.11)$$

Agora, usando as notações e a demonstração do Teorema 3.5, decorre de (3.6), considerando que nas hipóteses presentes temos $\lambda_1 = -\lambda_2$, e denotando $\lambda = \lambda_1$,

$$\varphi_r^*(\sigma_r) = \delta\sigma = \left(\cos^2 r - \lambda^2 \sin^2 r\right)\sigma = \left(\cos^2 r + (K-1)\sin^2 r\right)\sigma,$$

onde usamos a equação de Gauss $K = 1 - \lambda^2$. Como $r = \mathrm{inj}(M)$, deve existir $p \in M$ tal que

$$\cos^2 r + (K(p) - 1)\sin^2 r = 0.$$

Além disso, como

$$r = \inf\{t \mid \text{existe } q \in M \text{ tal que } \cos^2 t + (K(q) - 1)\sin^2 t = 0\},$$

tem-se

$$K(p) = \max_M K = K_{\max}.$$

Isolando r, $\sin r$, $\cos r$ de

$$\cos^2 r + (K_{\max} - 1)\sin^2 r = 0$$

e substituindo em (4.11) segue (4.10). ■

Teorema 4.8 *Suponha que* $\dim N = 3$ *e que*

$$0 < K_0 \leq \overline{K}_N \leq K_1$$

onde K_1 *e* K_0 *são constantes e* $\overline{K}_N$ *a curvatura seccional de* N, *então*

$$\begin{aligned} 4K_1 \operatorname{Vol}_{M^+}^{N^3}(t) &\geq 4\pi\chi(M)\, t - \int_M H_0\sigma \\ &- \left\{ \left(\frac{\lambda^2(M)}{\sqrt{K_0}} + \sqrt{K_0} \right) \operatorname{sen} 2\sqrt{K_0}t - 2\left|\lambda(M)\right| + 4\left|\lambda(M)\right| \cos^2 \sqrt{K_0}t \right\} A(M) \end{aligned}$$

Demonstração. Decorre do Lema 2.2, Corolário 2.4 e que $Ricc\,(N^3) \leq 2K_1$ aplicados na fórmula (4.1) que

$$2K_1 \operatorname{Vol}_{M^+}^{N^3}(t) \geq 2\int_{\Omega_t(M)} \left(K - \overline{K_N}\right)\omega - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t.$$

Logo

$$\begin{aligned} 2K_1 \operatorname{Vol}_{M^+}^{N^3}(t) &\geq 2\int_{\Omega_t(M)} \left(K - \overline{K_N}\right)\omega - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t \\ &\geq 2\int_0^t \int_{M_t} K\sigma_t dt - 2K_1 \operatorname{Vol}\left(\Omega_t(M)\right) - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t. \end{aligned}$$

Usando a fórmula da coárea para a primeira integral do lado direito vem

$$4K_1 \operatorname{Vol}_{M^+}^{N^3}(t) \geq 4\pi\chi(M)\, t - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t.$$

Basta agora substituir a estimativa do Lema 3.8 na última parcela do lado direito que teremos o desejado. ■

Teorema 4.9 *Suponha que* $\dim N = 3$ *e que*

$$0 > K_1 \geq \overline{K}_N \geq K_0$$

onde, K_1 e K_0 são constantes, então

$$-4K_1 \operatorname{Vol}_{M^+}^{N^3}(t) \leq -4\pi\chi(M)\, t + \int_M H_0\sigma$$
$$+ \left\{ \left(\frac{\lambda^2(M)}{\sqrt{-K_0}} + \sqrt{-K_0} \right) \operatorname{senh} 2\sqrt{-K_0}t + 2\left|\lambda(M)\right| \right\} A(M)$$

Demonstração. Usando a Proposição 4.1 temos que

$$\int_{\Omega_t(M)} \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\, \omega = \int_{\Omega_t(M)} \left(\overline{\Delta} f\right)^2 - \left|\operatorname{Hess}(f)\right|^2 \omega + \int_M H_0\sigma - \int_{M_t} H_t\sigma_t.$$

Para ter uma limitação por baixo do volume devemos ter $\operatorname{Ric}(N^3) \leq 2K_1$, mas isso ocorre devido a hipótese de que a curvatura seccional é limitada por cima por K_1. Além disso, usando o Corolário 2.4 e o Lema 2.2 segue que

$$2K_1 \operatorname{Vol}_{M^+}^{N^3}(t) \geq 2\int_{\Omega_t(M)} \left(K - \overline{K}_N\right) - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t$$

$$2K_1 \operatorname{Vol}_{M^+}^{N^3}(t) \geq 2\int_{\Omega_t(M)} K - 2\int_{\Omega_t(M)} \overline{K}_N - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t.$$

Note que temos $\overline{K}_N \leq K_1$ logo,

$$-2\int_{\Omega_t(M)} \overline{K}_N \geq -2\int_{\Omega_t(M)} K_1.$$

E para a primeira integral do lado direito usamos a formula da coárea. Segue então

$$4K_1 \operatorname{Vol}_{M^+}^{N^3}(t) \geq 4\pi\chi(M)\, t - \int_M H_0\sigma + \int_{M_t} H_t\sigma_t.$$

Para concluir a prova usamos o Lema 3.9 ■

Referências Bibliográficas

[CI] Chavel, I., *"Riemannian Geometry - A Modern Introduction",* Cambridge Tracts In Mathematics, **108,** (1993).

[CW] Choi, H. I. and Wang A., *"A First Eigenvalue Estimate For Minimal Hypersurfaces",* J. Differential Geometry, **18**, 559-562, (1983).

[DC] Do Carmo, M., *"Geometria Riemanniana",* Projeto Euclides, IMPA, 2^a edição, Rio de Janeiro, 1988.

[GA] Gray, A., *"Comparison Theorems For the Volumes Of Tubes As Generalizarions Of The Weyl Tube Formula",* Topology, **21,** 201-228, (1982).

[GA1] Gray, A., *"Tubes",* 2 edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

[HK] Heintze E. and Karcher H., *"A general comparasion theorem with applications to volume estimates for submanifolds",* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **11**, 451-470, (1978).

[HK1] Karcher, H., Pinkall U., Sterling I., *"New Minimal Surfaces in $\mathbb{S}^3$",* J. Differential Geometry, **28**, 169-185, (1988).

[LA] Lichnerowicz, A., *"Géometrie des groupes de transformation",* Dunod, Paris, (1958).

[RR] Reilly, R., *"Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold,* Indiana Univ. Math. J., **26**, 459-472, (1977).

[SY] Schoen, R., Yau, S-T, *"Lectures on Differential Geometry",* Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, Edited by N. Hitchin, R. Kirby and J. Wolf

[WF] Warner, F. W., *"Extension Of The Rauch Comparison Theorem To Submanifolds"*, Trans. Am. Math. Soc., **157**, 347-371, (1971).

[WH] Weyl, H., *"On the volume of tubes"*, Am. J. Math., **61**, 461-472, (1939).