

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

IANES RATNIEKS

**IDENTIFICAÇÃO E PREVISÃO DE *BULL* E *BEAR* MARKETS: UMA ANÁLISE
PARA O ÍNDICE IBOVESPA**

PORTO ALEGRE

2013

Ianes Ratnieks

**IDENTIFICAÇÃO E PREVISÃO DE *BULL* E *BEAR* MARKETS: UMA ANÁLISE
PARA O ÍNDICE IBOVESPA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. João Frois Caldeira

PORTO ALEGRE

2013

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

Responsável: Biblioteca Gládis W. do Amaral, Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS

Ratnieks, Ianes

Identificação e previsão de bull e bear markets:
uma análise para o índice Ibovespa / Ianes Ratnieks. -
- 2013.
67 f.

Orientador: João Frois Caldeira.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-RS, 2013.

1. Bull e Bear Markets. 2. Mudança de regime
markoviano. 3. Regras não paramétricas. 4. Previsão.
5. Estratégia de investimento. I. Caldeira, João
Frois, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os
dados fornecidos pelo(a) autor(a).

IANES RATNIEKS

**IDENTIFICAÇÃO E PREVISÃO DE *BULL E BEAR MARKETS*: UMA ANÁLISE
PARA O ÍNDICE IBOVESPA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. João Frois Caldeira

Aprovada em: Porto Alegre, 11 de Julho de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Frois Caldeira - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Prof. Dr. André Alves Portela Santos
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Hudson da Silva Torrent
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Prof. Dr. Marcelo Scherer Perlin
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

À minha esposa e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha família, e em especial à minha agora esposa Melina, que me acompanhou durante todo este processo. Foram muitos dias e noites de estudo e dedicação ao mestrado, sempre podendo contar com o seu apoio e dedicação, muito obrigado por tudo.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Economia da UFRGS, que propiciaram o aprendizado e também o desenvolvimento pessoal. Em especial ao meu orientador, João Caldeira, que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho acreditando no tema e incentivando o mesmo. Também agradeço aqui a secretaria do programa, em especial a Iara, Raquel e Steici, sempre muito prestativas.

Não poderia deixar de registrar aqui um agradecimento muito especial aos companheiros de curso, amigos com quem pude contar durante todo este período e que sem este apoio esta jornada talvez não fosse possível. Muito obrigado aos amigos Bernardo Keiserman, Diego Tristão, Eduardo Tillmann, Fernando Cruz, Gabriel Torres, Leandro Padulla, Rodrigo Fernandez e Tiago Tristão. Além disto, agradeço ao Gabriel pela oportunidade de trabalhar este tema na dissertação, me indicando o primeiro artigo e também a orientação do professor Caldeira. Ao Leandro agradeço também pela ajuda na formatação desta dissertação.

Aos demais amigos agradeço pela compreensão neste período em que nem sempre pude estar presente. Registro aqui também o agradecimento ao amigo Diego Balduco, por seu exemplo e incentivo para que eu realizasse este curso.

Ao pessoal da Quero-Quero, com quem trabalho desde o segundo ano do mestrado, agradeço pela flexibilidade e compreensão para que pudesse cursar as últimas cadeiras do curso e também desenvolver esta dissertação.

**It's not whether you're right or wrong that's important,
but how much money you make when you're right
and how much you lose when you're wrong.**

(George Soros)

RESUMO

O presente trabalho busca identificar *bull* e *bear markets* para o mercado financeiro brasileiro, especificamente para o índice Ibovespa, através das principais metodologias existentes na literatura: regras não paramétricas e modelos de mudança de regime markoviano. A primeira abordagem foi utilizada como *benchmark* para comparação com melhor modelo econométrico estimado pela segunda abordagem, visto que trata-se de um método *ex-post* de identificação. No tange aos modelos de mudança de regime markoviano, constatou-se que permitir regimes distintos também para a variância da série contribui para a identificação dos mesmos. Desta forma, o melhor modelo obtido fora o MSARMA(2,1)-2 para a série de retornos semanais do índice Ibovespa. O modelo foi capaz de identificar os principais eventos que impactaram a economia e o mercado financeiro brasileiro no período. Além disto, o modelo se mostrou útil para a tomada de decisão, visto que a estratégia de investimento, baseada na previsão um passo à frente do estado do mercado, foi capaz de preservar o capital do investidor, gerando um melhor desempenho do que na estratégia *buy-and-hold* de longo prazo.

Palavras-chave: *Bull* e *Bear Markets*. Mudança de regime markoviano. Regras não paramétricas. Previsão. Estratégia de investimento.

ABSTRACT

This paper seeks to identify bull and bear markets in the Brazilian stock market, specifically to the time series of the Ibovespa index, through the main methodologies present in literature: identification based on rules and Markov switching models. The first method was used as a benchmark to compare with the best regime switching model, since it is an ex-post method of identification. Modelling a Markov switching model with two regimes also for the variance of the process resulted in a better identification of the markets. Thus, the best Markov switching model estimated was the MSARMA(2,1)-2 to the time series of the Ibovespa weekly returns. The model was able to identify the main events that have impacted the Brazilian economy and also the stock market in the period. Furthermore, the model proved its value in decision making, since in an investment strategy, based on the model's one step ahead forecast about the regime of the market, it was able to preserve investor capital, generating a better performance than the buy-and-hold strategy.

Keywords: *Bull e Bear Markets. Markov switching. Rules based approach. Forecast. Investment strategy.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Índice Ibovespa semanal	28
Figura 2	Retorno semanal do Índice Ibovespa	29
Figura 3	Taxa de crescimento Ibovespa - observações semanais	29
Figura 4	Identificação dos <i>bear markets</i> por RNP com $\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 15\%$	30
Figura 5	Identificação dos <i>bear markets</i> por RNP com $\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 10\%$	31
Figura 6	Identificação dos <i>bear markets</i> por RNP com $\lambda_1 = 15\%$ e $\lambda_2 = 15\%$	32
Figura 7	Identificação dos <i>bear markets</i> por RNP com $\lambda_1 = 15\%$ e $\lambda_2 = 10\%$	32
Figura 8	Probabilidade e identificação dos <i>bear markets</i> pelo modelo MS-1 para taxa de crescimento do Ibovespa	35
Figura 9	Probabilidade e identificação dos <i>bear markets</i> pelo modelo MS-2 para taxa de crescimento do Ibovespa	36
Figura 10	Correlograma dos resíduos do modelo MS-2	37
Figura 11	Correlograma dos resíduos do modelo MSARMA(2,1)-2	38
Figura 12	Probabilidade e identificação dos <i>bear markets</i> pelo modelo MSARMA(2,1)-2	39
Figura 13	Probabilidade e identificação dos <i>bear markets</i> pelo modelo DDMS-1	40
Figura 14	Probabilidade de sair de um <i>bear</i> para <i>bull market</i> após d semanas.	41
Figura 15	Probabilidade de sair de um <i>bull</i> para um <i>bear market</i> após d semanas.	41
Figura 16	Identificação de <i>bear markets</i> - MSARMA(2,1)-2 vs. RNP com $\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 15\%$	45
Figura 17	Previsão um passo à frente para a probabilidade de <i>bear market</i> - MSARMA(2,1)-2	48
Figura 18	Comparativo de desempenho - estratégias de investimento vs. <i>buy-and-hold</i> fora da amostra	50
Figura 19	Comparativo de desempenho - estratégias de investimento vs. <i>buy-and-hold</i> amostra completa	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Possível realização dos processos S_t e D_t	25
Tabela 2	Matriz genérica de probabilidades de transição para $\tau = 4$	26
Tabela 3	Estimativas do modelo MS-1 para a taxa de crescimento do Ibovespa . .	34
Tabela 4	Estimativas do modelo MS-2 para a taxa de crescimento do Ibovespa . .	35
Tabela 5	Estimativas do modelo MS-2	37
Tabela 6	Estimativas do modelo MSARMA(2,1)-2	38
Tabela 7	Estimativas do modelo DDMS-1 por <i>Gibbs-sampling</i>	40
Tabela 8	Identificação e retorno dos <i>bear markets</i> - Comparativo $MS-1$ e $MS-2$ para a taxa de crescimento do Ibovespa	43
Tabela 9	Identificação e retorno dos <i>bear markets</i> - $MSARMA(2,1) - 2$ para os retornos semanais do Ibovespa	44
Tabela 10	Identificações coincidentes - modelo de mudança de regime markoviano e regra não paramétrica	45
Tabela 11	Estimativas do modelo MSARMA(2,1)-2 dados até 2007	47
Tabela 12	Comparativo estratégias de investimento vs. <i>Buy-and-hold</i> fora da amostra	50
Tabela 13	Comparativo estratégias de investimento vs. <i>Buy-and-hold</i> amostra completa	52

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	LITERATURA SOBRE IDENTIFICAÇÃO DE <i>BULL</i> E <i>BEAR MARKETS</i> . . .	14
3	MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO	19
3.1	ABORDAGEM POR REGRA NÃO PARAMÉTRICA	19
3.2	ABORDAGEM POR MUDANÇA DE REGIME MARKOVIANO	21
4	APLICAÇÃO PARA SÉRIE DO ÍNDICE IBOVESPA	28
4.1	DADOS	28
4.2	IDENTIFICAÇÃO POR REGRA NÃO PARAMÉTRICA	29
4.3	IDENTIFICAÇÃO POR MUDANÇA DE REGIME MARKOVIANO	33
4.4	ANÁLISE E COMPARATIVO DA IDENTIFICAÇÃO DE REGIMES	41
5	AVALIAÇÃO ECONÔMICA DO MODELO	47
6	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	56
	ANEXO A - INFERÊNCIA BAYESIANA	60

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas a modelagem de séries temporais financeiras tem sido uma área muito ativa e de grande destaque dentro da pesquisa acadêmica. Um dos importantes desafios da moderna literatura de econometria e finanças tem sido examinar o comportamento e potencial previsibilidade dos preços de ações. Em geral, a análise destas séries ocorre a nível de retornos, ao invés da utilização da série de preços. Campbell et al. (1997) destaca que a utilização dos retornos contém toda informação necessária ao investidor, resumindo a oportunidade de investimento. Além disto, séries de retorno possuem propriedades estatísticas mais atrativas que séries de preços. Neste sentido, muitos modelos e técnicas têm sido desenvolvidas para analisar e capturar as características deste tipo de série.

Desde os trabalhos de Samuelson (1965) e Leroy (1973) os modelos *random walk* e martingale têm sido referência na análise do comportamento dos retornos condicionais. No entanto, recentemente, contrariando a hipótese de mercados eficientes, vários autores sugeriram que existe um certo grau de previsibilidade nos retornos das ações (por exemplo, Rapach et al. (2005), Cochrane (2008), Campbell e Thompson (2008), Anatolyev e Gospodinov (2010) e Nyberg (2011), entre outros). Além disto, é consenso entre os participantes do mercado financeiro a existência de períodos de recorrentes elevações nos preços dos ativos, assim como outros caracterizados por seguidas quedas nos preços dos mesmos. Estes períodos são classificados na literatura como *bull* e *bear markets*, respectivamente.

Apesar de inúmeros estudos relacionados à previsibilidade dos retornos, relativamente menos atenção tem se dado à existência de *bull* e *bear markets* no mercado financeiro. Desta forma, o objetivo principal deste trabalho é identificar e prever qual o estado do mercado de ações brasileiro. Posteriormente, as previsões são utilizadas na implementação de uma estratégia de gestão ativa e os resultados são comparados à estratégia passiva *buy-and-hold*.

Em geral, classificar o mercado de ações como *bull* e *bear* é similar a identificar períodos de recessão e expansão da atividade econômica real. Identificar o estado da economia e entender a transição entre recessão e expansão foi um importante tópico nas pesquisas sobre ciclos de negócios por muito tempo. Em princípio, os mesmos métodos que são utilizados para determinar os pontos de mudanças nos ciclos de negócios também podem ser empregados para encontrar os pontos de inflexão no mercado de ações. Maheu e McCurdy (2000), Pagan e Sossounov (2003), Lunde e Timmermann (2004) e Candelon et al. (2008) consideram diferentes métodos para identificação destes pontos de inflexão. Na maioria das vezes a definição de *bull* e *bear*

market ocorre através de regras não paramétricas de identificação, baseadas em algoritmos como o de Bry e Boschan (1971), ou pela utilização de modelos de mudança de regime markoviano. Ambas as abordagens destacam-se dos trabalhos clássicos por tratarem a dependência dos retornos de forma não-linear.

A utilização de regras não paramétricas para a identificação dos mercados é uma abordagem *ex-post*, visto que dada a realização da série, busca-se através da análise de picos e vales locais, classificar as observações em intervalos de *bull* e *bear markets*, tendo por referência os trabalhos de Pagan e Sossounov (2003) e Lunde e Timmermann (2004) para o mercado norte americano. Já a modelagem por mudança de regime markoviano, introduzida por Hamilton (1989, 1990), trata o estado do mercado, seja ele *bull* ou *bear market*, como uma variável não observável e baseia-se na construção de um modelo econométrico, permitindo diferentes parametrizações.

A identificação dos estado do mercado tem grande impacto nas decisões estratégicas de gestão de portfólio e pode gerar diferentes oportunidades de investimento, por isso, investidores e gestores que operam nos mercados financeiros têm especial interesse na previsão desses períodos ao tomar suas decisões de alocação de ativos. Uma crescente área de pesquisas em finanças explora as decisões de alocação estratégica entre diferentes classes de ativos. Guidolin e Timmermann (2005, 2007), Tu (2010) e Guidolin e Hyde (2012), entre outros, são exemplos de estudos recentes que consideraram o problema de alocação de ativos na presença de mudança de regime nos retornos. Este fato afeta diretamente a precificação dos ativos, pois são importantes fontes de variação no prêmio de risco ao longo do tempo (ver, por exemplo, Gordon e St-Amour (2000), Ang et al. (2006)). A existência de regimes, como *bull* e *bear markets* leva à necessidade de *hedge* contra o risco de mudanças de regime no futuro. Como exemplo, durante o *bear market* as ações deixam de ser um investimento atrativo, uma vez que os preços geralmente estão caindo. Se o estado futuro do mercado é previsível os gestores podem deslocar seus investimentos para ativos livres de risco quando ocorre um *bear market* e vice-versa com o *bull market*.

Além de ser importante para as tomadas de decisões estratégias de gestão de portfólios, a identificação dos estados do mercado também é relevante do ponto de vista econômico, uma vez que o movimento nos mercados de ações está geralmente relacionado a fundamentos macroeconômicos (ver, por exemplo, Piger et al. (2005), Morley e Piger (2012)). Conforme destacaram Stock e Watson (2003), o comportamento dos preços das ações pode ajudar a prever variáveis macroeconômicas à medida que representam dividendos futuros descontados. Existe também

uma vasta literatura que relaciona a distribuição dos retornos das ações às condições dos ciclos de negócios Ebell (2001). Além disso, as mudanças no mercado de ações são consideradas indicadores antecedentes das mudanças nos ciclos de negócios, Grobys (2012). Particularmente, como observaram Candelon et al. (2008), mercados em estado *bull* induzem a expansão nos colaterais de crédito, principalmente em países com fraco ambiente regulatório. Portanto, uma inversão de tendência do mercado de *bull* para *bear* pode causar problemas generalizados de liquidez levando a uma crise de crédito nos mercados financeiros (a esse respeito ver Rigobon e Sack (2003), Bohl et al. (2007)).

Portanto, visando identificar e prever *bull* e *bear markets* para o mercado brasileiro, propõe-se a estimação e avaliação de diferentes modelos de mudança de regime markoviano, como o proposto originalmente por Hamilton (1989) e suas extensões, que demonstraram bastante êxito em identificar períodos de *bull* e *bear markets* (ver, por exemplo, Maheu e McCurdy (2000), Chen (2009), Kole e Dijik (2010), Maheu et al. (2011)). No tangente a identificação dos mercados, busca-se ainda a comparação do modelo com a abordagem de regras não paramétricas, como apresentada em Lunde e Timmermann (2004). Este trabalho difere em vários aspectos importantes dos poucos estudos anteriores que abordam o problema de avaliação econômica da identificação e previsão de *bull* e *bear markets*. Em primeiro lugar, a base de dados utilizada neste trabalho, uma vez que se refere a um mercado diferente e trata-se de dados semanais do índice Ibovespa, que é um dos principais índices dos mercados de ações entre as economias emergentes. E em segundo lugar, considera duas modalidades de estratégias de gestão ativa de portfólios em comparação com a tradicional estratégia passiva *buy-and-hold*.

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma: na próxima seção são apresentados os conceitos e formas de identificação de *bull* e *bear markets* na literatura. A seção 3 apresenta a metodologia que será utilizada neste trabalho para a determinação dos períodos do mercado. A seção 4 traz a aplicação das técnicas propostas, juntamente com o comparativo e análise dos resultados obtidos. Na seção 5 avalia-se o desempenho das previsões do modelo dentro de uma estratégia de gestão ativa de investimento. Por fim, a última seção traz as conclusões.

2 LITERATURA SOBRE IDENTIFICAÇÃO DE *BULL* E *BEAR* MARKETS

Para construir previsões sobre o estado do mercado de ações é necessário primeiro determinar os períodos de *bull* e *bear market*. Na terminologia do mercado de ações, *bull* e *bear markets* estão relacionados a prolongados períodos elevação e quedas nos preços, respectivamente (ver, por exemplo, Chauvet e Potter (2000)). Em outras palavras, as séries de retornos nos mercados de ações exibem tendências de baixa frequência (Gonzalez et al. (2005)). Neste sentido, estes dois regimes correspondem a períodos de recessão e expansão da atividade econômica real examinados na literatura ciclo de negócios (ver, por exemplo, Estrella e Mishkin (1998), Hamilton (2011)). Candelon et al. (2012) definem *bull market* como uma tendência positiva de longo prazo nos preços (meses a anos), podendo apresentar uma série de elevações intermediárias mais agudas (semanas a meses) alternadas com períodos de pequenas quedas, enquanto que o *bear market* corresponde a uma tendência negativa de longo prazo, com curtos momentos de quedas mais acentuadas intercalados com momentos de leves altas.

Como destacaram Gonzales et al. (2006), embora a ideia dos regimes de *bull* e *bear markets* seja intuitivamente razoável, não há consenso na literatura como esses períodos devem ser identificados. Fabozzi e Francis (1977), Kim e Zumwalt (1979) e Chen (1982) classificam *bull market* como aqueles no qual o retorno mensal exceda um determinado valor limite. Já Hardouvelis e Theodossiou (2002) classificam *bull* e *bear markets* como aqueles em que, em um determinado período, registram-se ao menos n retornos mensais consecutivos de mesmo sinal algébrico. Outros autores propõe utilizar uma regra de identificação através de uma média móvel, onde os regimes são baseados em um retorno médio ao longo dos últimos períodos (ver, por exemplo, Chen (2009), Asem e Tian (2011)). Se o retorno médio é positivo (negativo) o estado do mercado é *bull* (*bear*). Regras não paramétricas de identificação também podem ser utilizadas para definição dos regimes do mercado, esta técnica baseia-se em uma série de regras para isolar padrões nos dados, tendo por base o algoritmo proposto por Bry e Boschan (1971) para identificar os pontos de inflexão nos ciclos de negócios. Variações deste algoritmo foram amplamente utilizados na literatura para identificação destes pontos na atividade econômica real (ver, Harding e Pagan (2002), Gonzalez et al. (2005), Candelon et al. (2008), Claessens et al. (2009), Berge e Jorda (2011)). Uma abordagem alternativa é baseada em modelos paramétricos, tais como modelos de *Markov Switching* (MS daqui por diante), onde se assume que o estado não observado subjacente do mercado de ações segue um processo de Markov (Maheu e McCurdy (2000), Maheu et al. (2011), dentre outros). Independentemente se é utilizado apenas um índice ou um conjunto de índices para mensurar a performance do mercado de ações, o

grande desafio é determinar os pontos de inflexão. O que está em linha com o esforço feito por investidores para identificar o estado do mercado com base em retornos realizados.

A abordagem de regras não paramétricas é uma técnica *ex-post*, isto é, identifica o estado do mercado somente após a sua realização, similar aos procedimentos empregados para identificar pontos de inflexão nos ciclos de negócios. Pagan e Sossounov (2003) observam que a natureza dos preços dos ativos é suficientemente diferente de variáveis reais, de forma que são necessários ajustes no algoritmo original de Bry e Boschan (1971) para identificação de *bull* e *bear markets*. Lunde e Timmermann (2004) propuseram outro algoritmo de classificação baseado nos retornos acumulados desde o último pico ou última depressão. Ou seja, se o mercado acumular certa variação percentual positiva (negativa) desde a última depressão (pico) este é classificado como *bull (bear) market*.

A partir da regra proposta, Lunde e Timmermann (2004) investigaram as propriedades de *bull* e *bear markets* para a série nominal e real de retornos diários do mercado acionário dos Estados Unidos no período compreendido entre 1885 e 1997. Para isto, foram testados quatro diferentes tamanhos de filtros para a identificação dos mercados, ou seja, alterou-se os valores mínimos de variação acumulada para a classificação dos mercados. Os autores analisaram as médias incondicionais dos regimes identificados pelos diferentes parâmetros, tendo a média de retorno semanal variado entre 1,5% e 2,5% para o *bull market* e entre -3,4% e -1,5% para o *bear market*.

Uma vantagem dos algoritmos para a classificação de *bull* e *bear markets* está em não eliminar sequências de retornos de sinais algébricos opostos dentro de um mesmo mercado, evitando possíveis distorções na análise dos mercados, em especial na utilização de dados de maior frequência. Apesar dos métodos baseados em regras serem mais transparentes, os pontos de mudanças são identificados apenas algum tempo após sua ocorrência. Métodos de identificação *ex-post* não podem ser usados para fazer inferência estatística sobre os retornos ou para decisões de investimento, o que requer mais informações sobre a distribuição dos retornos. Para se adequar à gestão de risco e decisões de investimentos é necessário um modelo de probabilidade para os retornos em que a sua distribuição possa mudar ao longo do tempo.

Uma alternativa à abordagem baseada em regras são os modelos de MS, que se baseiam em um modelo específico para o processo gerador de dados dos preços dos ativos subjacentes. Dentro desta classe, os modelos de MS, propostos por Hamilton (1989, 1990) são os mais populares. Nesta parametrização, os regimes são processos latentes e seguem uma cadeia de Markov de primeira ordem. Diferentemente dos métodos baseados em regras, estes modelos não envolvem configurações subjetivas que podem vir a afetar os resultados, os dados é que

decidem, ou oferece algum critério estatístico para avaliar as configurações alternativas. Além disso, os modelos de mudança de regime markoviano possibilitam a identificação e previsão em uma única etapa.

Hamilton (1989) utiliza um modelo de mudança de regime markoviano aplicado para dados trimestrais da taxa de crescimento do Produto Nacional Bruto (PNB) dos Estados Unidos, buscando identificar os ciclos de negócios e estimar probabilidades de transição markovianas associadas às fases de expansão e recessão dos ciclos. Durland e McCurdy (1994) ampliaram o modelo de Hamilton (1989) ao permitirem que a duração do regime afetasse as probabilidades de transição. Os autores buscaram avaliar o efeito da duração sobre os regimes de expansão e recessão da taxa de crescimento do PNB dos Estados Unidos. Pelagatti (2002) também busca analisar o efeito da duração sobre os regimes do ciclo de negócios norte-americano, mas através da especificação de um MS-VAR, ou seja, através de um modelo multivariado.

Vários autores aplicaram modelos de MS para identificação de estados nos mercados de ações. Rydén et al. (1998) mostraram que este tipo de modelo se adapta às características e propriedades das séries de retorno de ações, permitindo diferentes especificações de modelos. Pode-se considerar que a média e variância sejam distintas entre os regimes e que as probabilidades de transição sejam ou não afetadas pela duração do regime. Ou, que apenas a média ou variância sejam distintas entre os regimes, tendo ou não influência da duração sobre as probabilidades de transição.

Turner et al. (1989) encontram evidência de que o S&P pode exibir diferentes médias e variâncias sob regimes de *bull* e *bear markets*. A especificação de um modelo com dois regimes com média e variância distintas entre os estados não observáveis para o mercado de ações identifica endogenamente um *bull market* com retornos positivos e baixa variância e um *bear market* com retornos negativos e variância elevada, como em Maheu e McCurdy (2000), que consideraram ainda o efeito da duração como condicionante da média e variância de cada regime, flexibilizando ainda mais o modelo base com duração proposto por Durland e McCurdy (1994). Os autores estudaram os retornos mensais do mercado de ações norte-americano no período entre 1802 e 1995, através de um modelo de MS com dois estados não observáveis, identificando os *bull* e *bear markets*. O modelo identificou corretamente a maior parte da série, sendo capaz de precisar pontos de mudança de regime de eventos históricos tais como a crise de 1929. Maheu e McCurdy (2000) reportaram retornos médios de $-1,4\%$ para *bear markets* e de $2,9\%$ para *bull markets*, com médias condicionais dependentes da duração do regime. No caso do *bull market*, por exemplo, o retorno condicional se reduz a cada período, até o limite de $0,68\%$ após

16 períodos nesse estado, ou seja, o *bull market* apresenta retornos positivos mas decrescentes. Portanto, os autores concluem que os melhores ganhos estão no início de um *bull market*. Já Chen e Shen (2007), consideraram a hipótese de regimes distintos apenas para os retornos e não para sua variância, mas também levaram em consideração os efeitos da duração sobre as probabilidades de transição de regime. Mais recentemente, Ang e Bekaert (2002), Guidolin e Timmermann (2005), Kole et al. (2006) e Candelon et al. (2008) examinam problemas de gestão ativa de portfólios quando os retornos dos ativos estão sujeitos a mudanças de regimes.

Nos modelos de mudança de regime markoviano a dependência na duração pode captar estruturas não lineares da média condicional. Por exemplo, quando um *bull market* persiste, os investidores podem se tornar mais otimistas em relação ao futuro e, portanto, investir mais em ações. Este comportamento significa que a probabilidade de deixar um *bull market* se reduz com a sua duração (Perez-Quiros e Timmermann (2001), Chen e Shen (2007), Guidolin e Timmermann (2007)).

Aplicações empíricas de MS para o mercado de ações normalmente distinguem dois regimes, com diferentes médias e volatilidades e inovações normalmente distribuídas, mas o número de regimes pode ser facilmente aumentado para melhorar o ajuste do modelo. Guidolin e Timmermann (2005) usam um modelo com três regimes para identificar períodos de alta e de baixa nos retornos mensais de ações e títulos públicos do Reino Unido, analisando suas implicações para a previsibilidade e decisões de alocações ótimas de ativos. Guidolin e Timmermann (2006) incluem um estado adicional, a fim de modelar a dinâmica não-linear conjunta de retornos mensais associados às ações de empresas de pequeno e grande porte (*small e large caps*) e títulos de longo prazo. Kim et al. (1998) encontram evidências de que um modelo com três estados na variância de retornos mensais propicia um bom ajuste. Maheu et al. (2011) propõem ainda um modelo com quatro estados, sendo dois no regime de *bull* e dois no regime de *bear market*, buscando acomodar reversões de curto prazo dentro de cada regime de mercado. Segundo os autores, separar as reversões de curto prazo das tendências primárias é uma importante regularidade empírica que deve ser capturada pelo modelo, de forma que este seja capaz de reproduzir as principais características do mercado.

Kole e Dijik (2010) comparam os métodos propostos por Lunde e Timmermann (2004), Pagan e Sossounov (2003) e Maheu e McCurdy (2000) para o mercado de ações norte-americano, avaliando capacidade preditiva em termos estatísticos e também através de uma estratégia ativa de investimento. Em relação à previsão fora da amostra, os modelos de MS apresentaram melhores resultados em termos de acurácia estatística. No entanto, o melhor desempenho na

de estratégia de investimento fora alcançado pela abordagem de Lunde e Timmermann (2004), que superou inclusive a estratégia passiva *buy-and-hold*.

Desde a publicação dos trabalhos em favor das hipóteses de passeio aleatório e martingale para os retornos de séries financeiras (Samuelson (1965), Leroy (1973)), a literatura empírica de finanças tem tido pouco sucesso em contestar tais hipóteses, indicando dependência quase nula entre os retornos e reforçando a hipótese dos mercados eficientes e do modelo de passeio aleatório. Cabe destacar que a grande parte dos trabalhos baseia-se em testes estatísticos comuns, como análise de correlação serial e de sequências de retornos do mesmo tipo. No entanto, a teoria de precificação de ativos sugere que a dependência nos retornos esperados pode exibir forma não linear. Nesse sentido, a identificação de *bull* e *bear markets*, seja pela abordagem de regras não paramétricas ou por modelos de MS têm se destacado na literatura por considerar essa natureza não linear dos retornos, apresentando maior sucesso na obtenção de dependência condicional dos retornos de ações.

A questão da identificação de *bull* e *bear markets* está diretamente relacionada a previsibilidade dos retornos. As regras de identificação propostas por Pagan e Sossounov (2003) e Lunde e Timmermann (2004) sugerem uma dependência entre os retornos. Da mesma forma, a identificação através de um modelo de mudança de regime markoviano nos permite obter probabilidades acerca do estado não observável em que o mercado se encontra e, conseqüentemente, acerca dos retornos do mesmo.

3 MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO

Nesta seção são apresentadas as metodologias para identificação de *bull* e *bear market* consideradas neste trabalho: a abordagem através de regras não paramétricas baseadas no algoritmo de Bry e Boschan (1971) e a abordagem baseada modelos de mudança de regime markoviano de Hamilton (1989).

3.1 ABORDAGEM POR REGRA NÃO PARAMÉTRICA

A primeira abordagem considerada neste trabalho baseia-se nas regras não paramétricas propostas por Lunde e Timmermann (2004) para classificação do mercado em períodos de *bull* e *bear markets*. Basicamente, o algoritmo consiste em um filtro que controla os movimentos da série entre picos e vales locais. Segue-se a convenção usada na literatura de ciclos econômicos em que a observação de pico é classificada como o último período do *bull market* e o vale corresponde a último período do *bear market*. É interessante notar que as definições de *bull* e *bear market* empregadas não descartam a possibilidade de que, durante o *bull market* (*bear*) possam ocorrer retornos negativos (positivos).

Pela regra proposta por Lunde e Timmermann (2004), define-se um *bull market* se o índice (preço) considerado subiu por, pelo menos, λ_1 desde o último vale e um *bear market* é identificado se índice caiu, pelo menos, λ_2 desde o último pico. Para identificar picos e depressões em uma série de tempo, o investidor utiliza um processo de busca iterativo que começa com um pico ou vale local.

Uma vez que pontos de inflexão são identificados é construída uma série de tempo binária, y_t , $t = 1, \dots, T$ em que zero significa *bear market* e um significa *bull market*. Isto é,

$$y_t = \begin{cases} 0, & \text{estado de } \textit{bear market} \text{ no tempo } t \\ 1, & \text{estado de } \textit{bull market} \text{ no tempo } t. \end{cases} \quad (3.1)$$

Seja y_t definida em (3.1) e seja $\lambda_i, i = 1, 2$ um escalar definindo o *trheshold* dos movimentos no índice que define mudanças de *bear market* para um *bull market* e vice-versa. Assume-se que o tempo está em uma escala discreta e que o preço do índice no período t é P_t . Suponha que em t_0 o mercado encontra-se em um máximo local, neste caso $P_{t_0} = P^{\max}$. Define-se as variáveis

temporais de encerramento associadas a um *bull market* como:

$$\tau_{\max}(P_{t_0}^{\max}, t_0 | I_{t_0} = 1) = \inf\{t_0 + \tau : P_{t_0+\tau} \geq P_{t_0}^{\max}\} \quad (3.2)$$

$$\tau_{\min}(P_{t_0}^{\max}, t_0, \lambda_2 | I_{t_0} = 1) = \inf\{t_0 + \tau : P_{t_0+\tau} \leq (1 - \lambda_2)P_{t_0}^{\max}\} \quad (3.3)$$

em que $\tau \geq 1$. Assim, $\min\{\tau_{\max}, \tau_{\min}\}$ é a primeira vez que o processo que controla o preço muda de estado: $\{P_{t_0}^{\max}, (1 - \lambda_2)P_{t_0}^{\max}\}$. Se $\tau_{\max} < \tau_{\min}$, o estado *bull market* continua, atualiza-se para o novo o valor do máximo local para:

$$P_{t_0+\tau_{\max}}^{\max} = P_{t_0+\tau_{\max}}.$$

e o mercado permanece no estado *bull market* entre $t_0 + 1$ e $t_0 + \tau_{\max}$, $y_{t_0+1} = \dots = y_{t_0+\tau_{\max}} = 1$. Se $\tau_{\max} > \tau_{\min}$ encontra-se um vale em $t_0 + \tau_{\min}$ e tem-se um *bear market* de $t_0 + 1$ a $t_0 + \tau_{\min}$, $y_{t_0+1} = \dots = y_{t_0+\tau_{\min}} = 0$. Neste caso tem-se:

$$P_{t_0+\tau_{\min}}^{\min} = P_{t_0+\tau_{\min}},$$

e define-se t_0 como um pico.

Por outro lado, suponha que t_0 é um mínimo local. A variáveis temporais de encerramento de *bear market* são:

$$\tau_{\min}(P_{t_0}^{\min}, t_0 | I_{t_0} = 0) = \inf\{t_0 + \tau : P_{t_0+\tau} \leq P_{t_0}^{\min}\} \quad (3.4)$$

$$\tau_{\max}(P_{t_0}^{\min}, t_0, \lambda_1 | I_{t_0} = 0) = \inf\{t_0 + \tau : P_{t_0+\tau} \geq (1 + \lambda_1)P_{t_0}^{\min}\} \quad (3.5)$$

Se $\tau_{\min} < \tau_{\max}$, o *bear market* continua, atualiza-se o ponto de vale $P_{t_0+\tau_{\min}}^{\min} = P_{t_0+\tau_{\min}}$, descarta-se o vale anterior no tempo t_0 e define $y_{t_0+1} = \dots = y_{t_0+\tau_{\min}} = 0$. Se $\tau_{\min} > \tau_{\max}$ encontra-se um pico em em $t_0 + \tau_{\max}$ e tem-se um *bull market* de $t_0 + 1$ a $t_0 + \tau_{\max}$, $y_{t_0+1} = \dots = y_{t_0+\tau_{\max}} = 1$. Armazena-se o valor $P_{t_0+\tau_{\max}}^{\max} = P_{t_0+\tau_{\max}}$ e define t_0 como um pico e volta-se ao início do processo com *bull market*. Este processo é repetido até a última observação dos dados. Esta definição de *bull* e *bear market* particiona a série de dados analisada em subconjuntos de *bull* e *bear* mutuamente exclusivos e exaustivos com base nas sequências dos tempos de fechamento. Com isto, a função indicadora resultante y_t gera uma variável aleatória, Δ , que mede a duração dos estados *bull* e *bear markets*, dado como o tempo entre as sucessivas mudanças em y_t .

É possível considerar diferentes valores para λ_1 e λ_2 . Quanto menores forem os valores desses parâmetros maior o número de *bull* e *bear markets* que se espera encontrar. Em geral, os valores destes parâmetros são definidos empiricamente, testando-se diferentes combinações.

No entanto, é razoável considerar $\lambda_1 > \lambda_2$, ou seja, que a variação percentual necessária para caracterizar uma mudança de *bear* para *bull* seja maior que o percentual exigido para identificar uma mudança de *bull* para *bear*. Esta parametrização define um maior prevalência de estados *bull* ao longo do tempo, em linha com o que se espera encontrar na prática.

3.2 ABORDAGEM POR MUDANÇA DE REGIME MARKOVIANO

Em um modelo de regressão sem mudança de regime, $y_t = x_t\beta + \varepsilon_t$ com $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$, os parâmetros do modelo podem ser estimados a partir da maximização da função de verossimilhança, $\ln(L) = \sum_{t=1}^T \ln[f(y_t)]$, sendo $f(\cdot)$ uma função de densidade.

Para um modelo com quebra estrutural nos parâmetros, o modelo passa a $y_t = x_t\beta_{S_t} + \varepsilon_t$, onde $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_{S_t}^2)$, com $S_t = 1, 2$. Neste caso, se as datas de mudança entre os regimes são conhecidos *a priori* a função log da verossimilhança é dada por $\ln(L) = \sum_{t=1}^T \ln[f(y_t|S_t)]$, onde no caso de uma distribuição normal $f(y_t|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{S_t}^2}} \exp(-\frac{(y_t - x_t\beta_{S_t})^2}{2\sigma_{S_t}^2})$ e pode-se maximizar a função em relação aos parâmetros $\beta_1, \beta_2, \sigma_1^2$, e σ_2^2 .

No entanto, se S_t é desconhecido para cada instante do tempo o processo de estimação não é direto. Precisamos considerar a densidade conjunta de y_t e do estado não observável S_t , a qual é dada pelo produto das densidades condicionais e marginais: $f(y_t, S_t|\psi_{t-1}) = f(y_t|S_t, \psi_{t-1}) f(S_t|\psi_{t-1})$, onde ψ_{t-1} refere-se a toda informação até o tempo $t - 1$. Para obter a densidade marginal de y_t integra-se S_t para fora da densidade conjunta e soma-se para todos os possíveis valores de S_t , de forma que a função de log verossimilhança passa a ser dada por:

$$\ln(L) = \sum_{t=1}^T \ln\left(\sum_{S_t=1}^2 f(y_t|S_t, \psi_{t-1}) Pr[S_t|\psi_{t-1}]\right) \quad (3.6)$$

Para estimar esta equação é necessária uma hipótese sobre o comportamento estocástico de S_t , de forma que seja possível calcular os fatores de peso para cada regime, dados por $Pr(S_t = 1|\psi_{t-1})$ e $Pr(S_t = 2|\psi_{t-1})$.

Se o processo estocástico de S_t depende de $S_{t-1}, S_{t-2}, S_{t-3}, \dots, S_{t-r}$ este é denominado de processo de mudança markoviana de ordem r . O processo será classificado como discreto se o número de estados S_t nos quais a variável pode se encontrar é finito ou numerável, caracterizando uma cadeia de Markov. Se o estado da variável puder ser predito com certa probabilidade baseando-se unicamente no conhecimento do estado imediatamente anterior da

mesma, este processo caracteriza uma cadeia de Markov de primeira ordem, de forma que $Pr(S_t = j | S_{t-1} = i, S_{t-2} = i, S_{t-3} = i, \dots) = Pr(S_t = j | S_{t-1} = i)$. As probabilidades de transição entre os k diferentes estados existentes podem ser representadas em uma matriz de probabilidade de transição conforme (3.7).

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde, p_{ij} denomina a probabilidade de passar do estado i para o j , de forma que $\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ para $i = 1, 2, \dots, k$, $p_{ij} \geq 0$ para $i, j = 1, 2, \dots, k$.

Um processo de Markov ergódico é aquele que garante a convergência dos regimes para uma distribuição de probabilidade não condicional. Para que uma cadeia de Markov seja ergódica é necessário que exatamente um dos autovalores da matriz de transição de estados seja igual a unidade e todos os demais autovalores estejam dentro do círculo unitário. Neste caso, o autovetor normalizado associado ao autovalor unitário da matriz de transição de estados corresponde as probabilidades incondicionais de transição de estados, dito vetor ergódico de probabilidades (π) de uma cadeia de Markov. No caso mais simples, com apenas dois estados ($k = 2$), as probabilidades ergódicas serão dadas por:

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1-p_{22}}{2-p_{11}-p_{22}} \\ \frac{1-p_{11}}{2-p_{11}-p_{22}} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Portanto, em um modelo de mudança de regime markoviano o estado em que a variável se encontra é não observável e evolui de acordo com uma matriz de probabilidades de transição. Supondo uma função de distribuição normal para a variável y_t com dois regimes tem-se:

$$f(y_t | S_t = j, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \quad j = 1, 2. \quad (3.9)$$

onde no regime um $y_t \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e no regime dois $y_t \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, sendo o vetor de parâmetros dado por $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)'$. A função de densidade conjunta de y_t e S_t é dada pelo produto das densidades marginal e condicional, de forma que integrando a variável S_t para fora da densidade conjunta e somando todos os possíveis valores de S_t obtemos:

$$f(y_t|\theta) = \frac{Pr(S_t = j|\theta)}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \quad j = 1, 2. \quad (3.10)$$

De forma que o log da verossimilhança será dado por:

$$\ln(L) = \sum_{t=1}^T \ln f(y_t|\theta) \quad (3.11)$$

Definida a função de verossimilhança, busca-se maximizá-la para os dados observados sujeito aos parâmetros do vetor θ e as probabilidades de transição. No entanto, como as equações que irão descrever os diferentes parâmetros estimados para cada estado são não-lineares não há uma solução analítica definida. Desta forma, é necessária a utilização de um algoritmo de iteração que permita a obtenção de uma estimativa de máxima verossimilhança.

O algoritmo EM, originalmente proposto por Dempster et al. (1977), é um método para a maximização da função de verossimilhança para modelos com variáveis não observáveis, como no caso de S_t . O algoritmo é um processo iterativo que consiste em duas etapas: expectativa (E) e maximização (M). A partir de um vetor inicial de parâmetros $\theta^{(0)}$ e de probabilidades de transição para $t = 0$, geralmente definidas como as probabilidades ergódicas de transição dadas pela equação (3.8), são estimadas as probabilidades para as variáveis não observáveis: $Pr(S_t, S_{t-1}|\theta) = Pr(S_t|S_{t-1})Pr(S_{t-1}|\theta)$.

Dadas as probabilidades obtidas no passo anterior, um novo vetor de parâmetros $\theta^{(1)}$ é derivado a partir da condição de primeira ordem da equação do log da verossimilhança (equação 3.11). Desta forma, obtem-se a média para cada estado e é possível calcular a matriz de variância-covariância e as probabilidades de transição de estado. Consequentemente, este novo vetor de parâmetros permite efetuar uma nova iteração do algoritmo.

Portanto, cada iteração do algoritmo EM envolve um passo do filtro e do alisamento das probabilidades dos regimes, gerando uma nova estimativa para os parâmetros do modelo e consequentemente aumentando o valor da função de verossimilhança. Dado o vetor θ , a probabilidade que o processo esteja em determinado regime com base na informação disponível até o tempo t é chamada de probabilidade filtrada. Por outro lado, se toda informação disponível for utilizada para a obtenção da probabilidade do regime S_t esta é denominada probabilidade suavizada. Para maiores detalhes a respeito do algoritmo EM, ver Hamilton (1990) e Kim e Nelson (1999).

Sob esta ótica, pode-se trabalhar com diferentes especificações de modelos de mudança de regime markoviano para a identificação de *bull* e *bear markets*. Nesta modelagem, o mercado vigente é governado pela variável de estado S_t , sendo que no caso de dois regimes distintos, um para o *bear market* e outro para o *bull market*, tem-se $S_t = 1, 2$. Permitindo-se que apenas a média da série seja distinta entre os regimes, um modelo autorregressivo de ordem l ($AR(l)$), ou seja, um MSAR-1 é definido pela seguinte equação:

$$y_t = \mu_{S_t} + \sum_{i=1}^l \phi_i (y_{t-i} - \mu_{S_{t-i}}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2) \quad (3.12)$$

Onde, y_t é o retorno total, l é o número de termos autorregressivos, μ_{S_t} é a média condicional do regime S_t . O termo de erro ε_t é independente padrão normal distribuído com variância σ^2 , e portanto é independente de valores passados de y_t e S_t .

Outra parametrização possível é permitir que a média e a variância sejam distintas entre os regimes, neste caso tem-se um MSAR-2, dado pela equação (3.13).

$$y_t = \mu_{S_t} + \sum_{i=1}^l \phi_i (y_{t-i} - \mu_{S_{t-i}}) + \sigma(S_t) v_t, \quad v_t \sim NID(0, 1) \quad (3.13)$$

onde v_t é uma inovação normal padrão independente de y_t e S_t .

Durland e McCurdy (1994) estenderam o modelo proposto por Hamilton (1989) permitindo que as probabilidades de transição sejam funções não somente do regime atual mas também do número de períodos que o sistema se encontra neste regime, ou seja, que as probabilidades de transição sejam dependentes da duração do regime. A inclusão de duração no modelo de mudança de regime markoviano pode se mostrar eficiente na captura do acúmulo de volatilidade da série, fato estilizado importante das séries financeiras, e também pode ajudar a explicar a dinâmica dos retornos condicionais. A variável duração é definida como

$$D(S_t) = \begin{cases} D(S_{t-1}) + 1 & , \text{ se } S_t = S_{t-1} \\ 1 & \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3.14)$$

Portanto, a duração corresponde a quantidade de estados consecutivos S_t . Uma possível realização de uma cadeia de Markov (S_t, D_t) com dois estados é apresentada na tabela 1.

Tabela 1: Possível realização dos processos S_t e D_t .

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
S_t	2	2	2	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2
D_t	3	4	5	6	1	2	1	1	2	3	4	5	6	1	2

Fonte: Elaborado pelo autor.

A inclusão de dependência na duração dos regimes resultaria em uma cadeia de Markov de ordem elevada, tornando o modelo intratável, visto que incorre na perda de muitos graus de liberdade para tornar possível a parametrização da matriz de transição de estados. Visando evitar este problema, propõe-se a construção de novas variáveis de estado contemplando todas as possibilidades de duração para cada regime. Desta forma, expande-se a dimensão da matriz de transição de estados permanecendo com uma cadeia de Markov de primeira ordem, tornando o modelo tratável. Ainda assim, o efeito da duração sobre as probabilidades de transição deve ser restrito a um valor máximo τ para a variável D_t , de forma a tornar a estimação possível. Sendo assim, a cadeia de Markov (S_t, D_t) fica definida no espaço de estados finito

$$\{(S_t = 1, D_t = 1), (S_t = 1, D_t = 2), \dots, (S_t = 1, D_t = \tau), (S_t = 2, D_t = 1), \dots, (S_t = 2, D_t = \tau)\}$$

com uma matriz de probabilidades de transição também finita. Portanto, no caso de dois regimes, o número de estados distintos é 2τ , conseqüentemente a dimensão da matriz de probabilidades de transição é de $2\tau \times 2\tau$ e a probabilidade de passar do estado i para o estado j com duração d é dada por $p_{ij}(d)$. Considerando-se $\tau = 4$, tem-se a matriz de probabilidade de transição de estado apresentada na tabela 2, ou seja, a matriz gerada por esta parametrização do modelo é esparsa e possui no máximo 2τ elementos independentes e diferentes de zero.

As probabilidades de transição devem necessariamente estar entre 0 e 1, assim como a soma destas probabilidades para todos estados possíveis deve ser igual a um para cada estado vigente, ou seja, na matriz apresentada na tabela 2 cada linha deverá somar um. Visando garantir que as probabilidades de transição estejam no intervalo entre zero e um utiliza-se a função logística para parametrizá-las. Sendo i o índice para os estados e d para a duração, as probabilidades de transição para $i = 1, 2$ e para os parâmetros $\gamma_1(i)$ e $\gamma_2(i)$ são definidas pelas equações (3.15) e (3.16).

$$P(S_t = i | S_{t-1} = i, D(S_{t-1}) = d) = \frac{\exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i)d)}{1 + \exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i)d)}, \quad \text{para } d \leq \tau \quad (3.15)$$

Tabela 2: Matriz genérica de probabilidades de transição para $\tau = 4$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{ij}(2) & 0 & 0 & p_{ij}(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{ij}(3) & 0 & p_{ij}(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{ij}(4) & p_{ij}(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{ij}(4) & p_{ij}(1) & 0 & 0 & 0 \\ p_{ij}(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{ij}(2) & 0 & 0 \\ p_{ij}(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{ij}(3) & 0 \\ p_{ij}(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{ij}(4) \\ p_{ij}(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{ij}(4) \end{bmatrix}$$

$$P(S_t = i | S_{t-1} = i, D(S_{t-1}) = d) = \frac{\exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i)\tau)}{1 + \exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i)\tau)}, \quad \text{para } d > \tau \quad (3.16)$$

Tem-se que com a inclusão do parâmetro τ permite-se que a duração afete as probabilidades de transição até o período τ , tornando, portanto, as probabilidades de transição constantes após este período. Define-se também funções de risco, que correspondem a probabilidade condicional de uma mudança de estado dado que o mesmo alcançou duração igual a d . Esta função é definida da seguinte forma,

$$1 - P(S_t = i | S_{t-1} = i, D(S_{t-1}) = d) = \frac{1}{1 + \exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i)d)}, \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (3.17)$$

O parâmetro $\gamma_2(i)$ resume o efeito da duração sobre cada regime. Se este parâmetro for menor que zero isto implica relação de dependência na duração positiva, isto é, a probabilidade de mudar de estado se eleva com a duração do regime.

Aliando-se esta parametrização das probabilidades de transição com os modelos (3.12) e (3.13), define-se os modelos DDMSAR-1 e DDMSAR-2 respectivamente.

Pelagatti (2003), na modelagem com dependência na duração, propõe a seguinte especificação para a equação (3.12):

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 S_t + \sum_{i=1}^l \phi_i (y_{t-i} - \mu_0 - \mu_1 (S_{t-i})) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2) \quad (3.18)$$

Onde S_t é uma variável binária que assume valor zero para o *bear market* e um para o *bull*

market, y_t é o retorno total, l é o número de termos autorregressivos, μ_0 é a média condicional para o *bear market* e $\mu_0 + \mu_1$ corresponde a média condicional do regime *bull market*. Com esta especificação para o modelo, o termo μ_1 corresponde a diferença da média condicional do *bull* para o *bear market*. O termo de erro ε_t é independente padrão normal distribuído com variância σ^2 , e portanto é independente de valores passados de y_t e S_t . A partir deste modelo o autor sugere a estimação das probabilidades de transição através da especificação de um modelo probit mais parcimonioso. Considere o modelo linear abaixo

$$S_t = [\beta_1 + \beta_2 D_{t-1}]S_{t-1} + [\beta_3 + \beta_4 D_{t-1}](1 - S_{t-1}) + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (3.19)$$

S_t é a variável latente definida por

$$Pr(S_t \geq 0 \mid S_{t-1}, D_{t-1}) = Pr(S_t = 1 \mid S_{t-1}, D_{t-1}) \quad (3.20)$$

$$Pr(S_t < 0 \mid S_{t-1}, D_{t-1}) = Pr(S_t = 0 \mid S_{t-1}, D_{t-1}) \quad (3.21)$$

Pode-se demonstrar que

$$p_{1|1}(d_{t-1}) = Pr(S_t = 1 \mid S_{t-1} = 1, D_{t-1} = d_{t-1}) = 1 - \varphi(-\beta_1 - \beta_2 d_{t-1}) \quad (3.22)$$

$$p_{0|0}(d_{t-1}) = Pr(S_t = 0 \mid S_{t-1} = 0, D_{t-1} = d_{t-1}) = \varphi(-\beta_3 - \beta_4 d_{t-1}) \quad (3.23)$$

onde $d_{t-1} = 1, \dots, \tau$, e $\varphi(\cdot)$ corresponde a função de distribuição normal padrão. Desta forma, os quatro parâmetros β definem a matriz de probabilidades de transição.

Para estimação dos parâmetros do modelo de mudança de regime markoviano com dependência na duração pode-se utilizar o método da quase-máxima verossimilhança, como em Durland e McCurdy (1994), ou empregar um *Gibbs sampler*, como em Pelagatti (2001). Neste trabalho, para estimação desta hipótese, adota-se este último método, o qual está descrito no anexo¹.

¹Uma vantagem deste procedimento é que sua implementação pode ser feita facilmente, visto que o pacote para estimação através do Oxmetrics está disponível no site http://www.statistica.unimib.it/utenti/p_matteo/. Para detalhes sobre o procedimento de estimação ver Pelagatti (2003).

4 APLICAÇÃO PARA SÉRIE DO ÍNDICE IBOVESPA

4.1 DADOS

A série utilizada neste trabalho é o índice Ibovespa entre 2 de janeiro de 1995 até 30 de julho de 2012, totalizando 4.381 observações diárias. No entanto, a análise fora conduzida a partir de dados semanais, pegando-se o fechamento de cada semana, totalizando 917 observações semanais. A série pode ser observada na figura 1.



Figura 1: Índice Ibovespa semanal

A partir da análise visual da série conclui-se que trata-se de uma série não estacionária, motivo pelo qual a modelagem e análise de séries financeiras na literatura costuma ser feita sobre os retornos da série. Portanto, para a identificação dos *bull* e *bear markets* será utilizada a série de retornos, testando duas diferentes especificações: retornos semanais, e o retorno em 52 semanas, ou seja, a taxa de crescimento em um ano como fora proposto em Chen e Shen (2007). Em função desta última especificação, para que os resultados obtidos sejam comparáveis, a análise com retornos semanais será feita para o mesmo período, ou seja, entre a primeira semana de janeiro de 1996 e a última semana de julho de 2012, totalizando 865 observações. O retorno semanal e o comportamento da taxa de crescimento do índice Ibovespa podem ser observadas nas figuras 2 e 3 respectivamente.

O teste de Dickey-Fuller Aumentado para a série da taxa de crescimento do índice Ibovespa

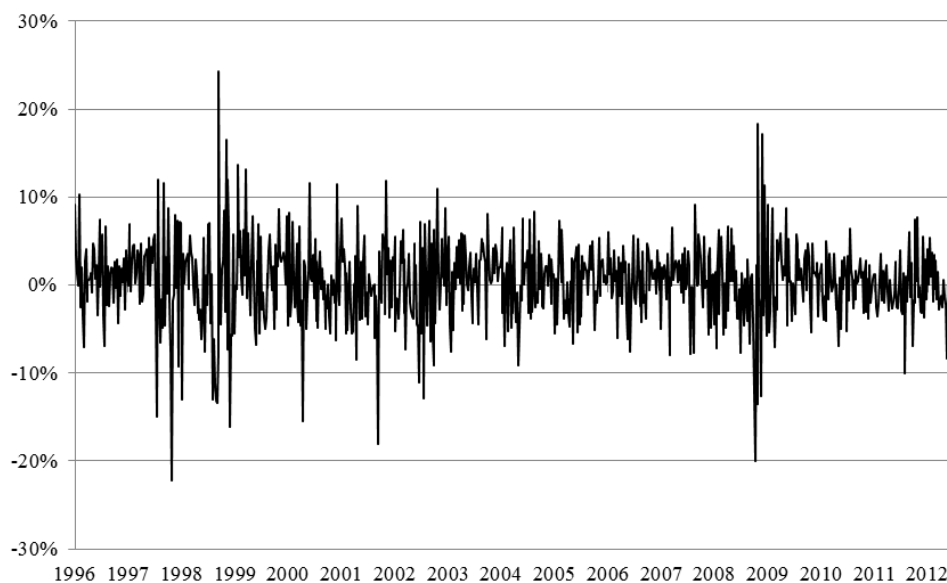


Figura 2: Retorno semanal do Índice Ibovespa

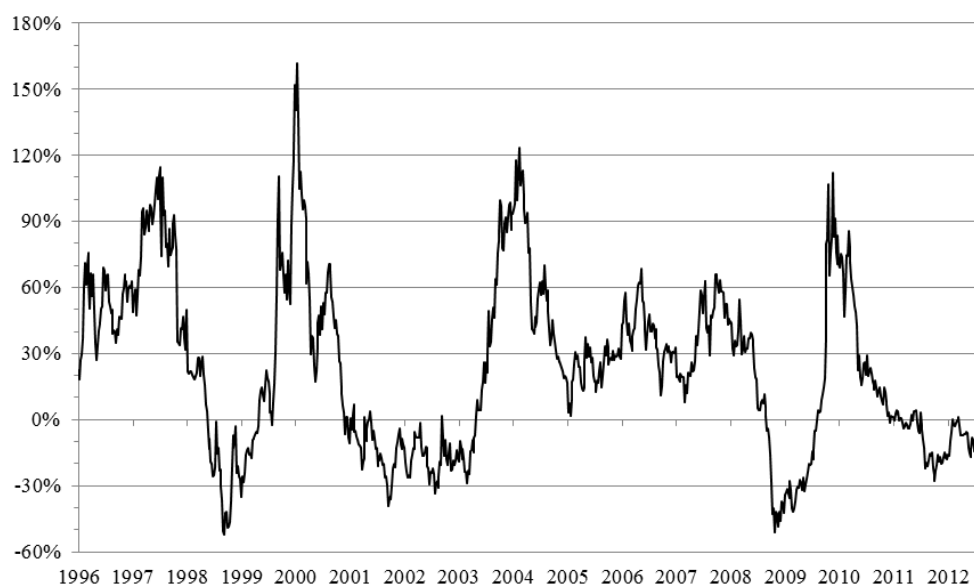


Figura 3: Taxa de crescimento Ibovespa - observações semanais

rejeita a hipótese nula de raiz unitária. Diante disto pode-se considerar a série estacionária, pré-condição para a modelagem econométrica.

4.2 IDENTIFICAÇÃO POR REGRA NÃO PARAMÉTRICA

Nesta seção busca-se realizar a identificação dos regimes através da regra proposta por Lunde e Timmermann (2004), implementada pelo autor com o auxílio do *software* MATLAB. Para a

aplicação desta técnica será utilizada a série de retornos semanais do Índice Ibovespa.

Conforme apresentado na seção 3.1, os parâmetros λ_1 e λ_2 definem a variação limite que dispara uma mudança de um *bear* para um *bull market* e de um *bull* para um *bear market* respectivamente. Procurou-se analisar quatro diferentes definições para estes parâmetros, sendo elas: 1) $\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 15\%$, 2) $\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 10\%$, 3) $\lambda_1 = 15\%$ e $\lambda_2 = 15\%$ e 4) $\lambda_1 = 15\%$ e $\lambda_2 = 10\%$.

Na figura 4 temos a identificação dos *Bear Markets* considerando-se a primeira definição para os parâmetros λ_1 e λ_2 . Com esta parametrização tem-se a identificação de 15 *bear markets* e 15 *bull markets*, sendo que as últimas 8 observações da amostra ainda não estão classificadas entre os regimes, pois neste período o índice se valorizou desde o último mínimo mas não superou a variação de λ_1 , ou seja, não registra uma alta de pelo menos 20% desde o último vale. Ainda nesta parametrização o retorno médio semanal dos *bear markets* foi de -1,29%, com variância de 0,00232. Já para os *bull markets* o retorno médio semanal foi de 1,32%, com variância de 0,00167. O *bear market* prevaleceu em 35,3% da amostra identificada.

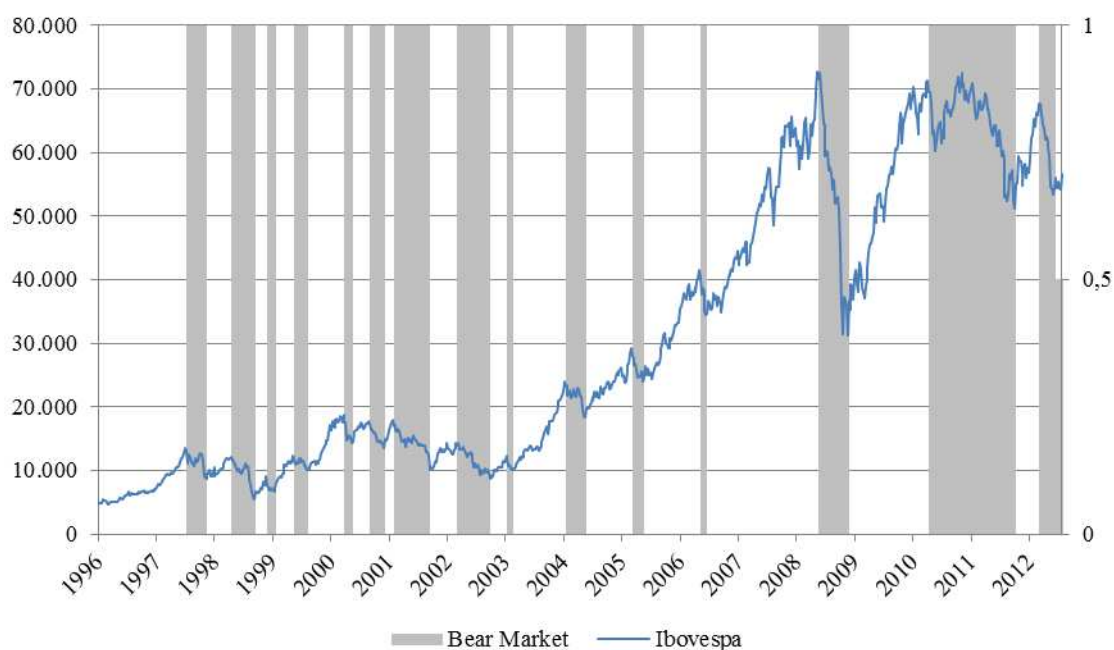


Figura 4: Identificação dos *bear markets* por RNP com $\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 15\%$

Com a segunda combinação de parâmetros proposta, o retorno médio semanal dos *bear markets* foi de -1,18% contra 1,41% dos *bull markets* com variâncias de 0,00225 e 0,00166 respectivamente. Nessa parametrização foram identificados 17 *bull markets* e 17 *bear markets* com este último representando 39% da amostra identificada. Como λ_1 é o mesmo da primeira parame-

trização, também não se tem definição de regime para as últimas 8 observações da amostra. A identificação dos mercados por esta combinação pode ser observada na figura 5.



Figura 5: Identificação dos *bear markets* por RNP com $\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 10\%$

No terceiro caso analisado, onde $\lambda_1 = \lambda_2$, tem-se a identificação de 16 *bear markets* e 16 *bull markets*. O retorno médio semanal observado foi de $-1,54\%$ para os *bear markets* e de $1,25\%$ para os *bull markets* com variâncias de 0,00223 e 0,00173 respectivamente. Com $\lambda_1 = 15\%$ as últimas 8 observações da amostra também não ficam classificadas entre os regimes, visto que, após o último vale, a maior variação foi de apenas $5,9\%$. Com esta parametrização o *bear market* prevaleceu em apenas $30,7\%$ da amostra identificada, períodos que podem ser observados na figura 6.

No quarto caso tem-se a combinação dos menores gatilhos de variação necessárias para se determinar a mudança entre os mercados, sendo de 15% para determinar a mudança de um *bear* para *bull market* (λ_1) e de 10% de um *bull* para *bear market* (λ_1). Com esta parametrização foram identificados 19 *bear markets* e 19 *bull markets*, sendo, portanto, a parametrização com a maior alternância entre os regimes, resultado esperado devido aos menores valores de gatilho. Fora observado um retorno médio semanal de $-1,40\%$ para os *bear market* e de $1,36\%$ para o *bull market*, com variâncias de 0,00214 e 0,00174 respectivamente. A prevalência do *bear market* fora de $35,1\%$ da amostra identificada e estes períodos podem ser observados na figura 7.



Figura 6: Identificação dos *bear markets* por RNP com $\lambda_1 = 15\%$ e $\lambda_2 = 15\%$

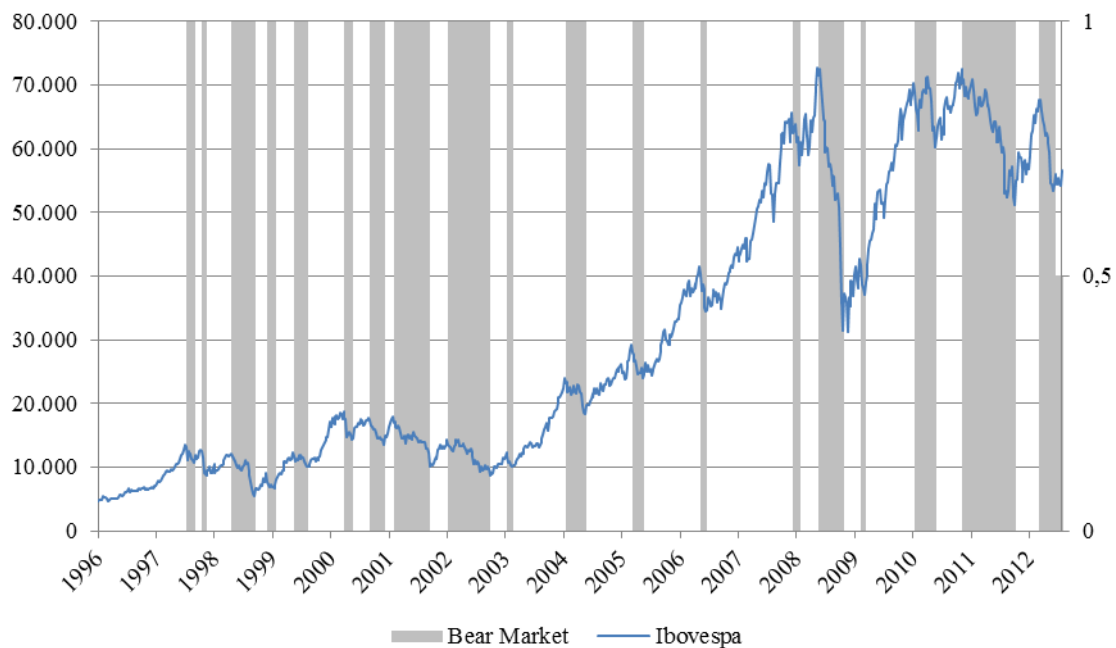


Figura 7: Identificação dos *bear markets* por RNP com $\lambda_1 = 15\%$ e $\lambda_2 = 10\%$

Dentre os diferentes valores analisados para os parâmetros λ_1 e λ_2 , alguns resultados se mostraram consistentes entre os cenários. Nas quatro parametrizações distintas, o *bear market* apresentou uma variância para o retorno médio semanal mais elevada. Além disto, o número de observações definidas como *bear market* se manteve estável entre as diferentes definições,

oscilando entre 30,7% e 39% da amostra, evidenciando uma maior prevalência de *bull markets*. Dentre as especificações, o retorno médio semanal para o *bear market* variou entre -1,54% e -1,18% e para o *bull market* variou entre 1,25% e 1,41%. Estes resultados estão de acordo com a literatura de finanças.

4.3 IDENTIFICAÇÃO POR MUDANÇA DE REGIME MARKOVIANO

Nesta seção, busca-se a construção de modelos de mudança de regime markoviano com dois estados para a identificação dos *bear* e *bull markets*. O critério adotado para definição dos diferentes regimes foi o de probabilidades acima de 50%. Propõe-se a identificação dos regimes a partir de três modelos base: O modelo autorregressivo de mudança de regime markoviano apenas para a média da série (MSAR-1), o modelo autorregressivo de mudança de regime markoviano para a média e variância da série (MSAR-2) e o modelo autorregressivo de mudança de regime markoviano dependente da duração apenas para a média da série (DDMSAR-1). Para tal serão utilizados os *softwares* Oxmetrics² e PcGive.

A maior parte dos modelos de séries financeiras têm foco na volatilidade, devido a sua grande relevância dentro do tema. Entretanto, para a identificação de *bull* e *bear markets* a volatilidade da série pode se sobrepor aos retornos, dificultando a identificação correta dos pontos de mudança entre os regimes. Diante disto, busca-se avaliar se um modelo autorregressivo de mudança de regime markoviano apenas para média (MSAR-1) pode obter melhores resultados para a identificação dos mercados.

Utilizando-se os retornos semanais do índice Ibovespa, o modelo MSAR-1 apresenta uma identificação dos mercados muito errática, classificando as observações em regimes alternados sem identificar períodos claros de *bull* ou *bear markets*. Diante disto, estimou-se este modelo baseado na série da taxa de crescimento do índice Ibovespa com observações semanais. O melhor modelo obtido em termos da identificação dos regimes fora com $p = 0$, ou seja, um modelo apenas para a média, sem termos autorregressivos (MS-1). A inclusão de termos autorregressivos na estimação fez com que a identificação dos mercados perdesse sentido. Os coeficientes estimados por esta parametrização foram todos significativos e podem ser observados na tabela 3.

O modelo MS-1 identificou um regime com média da taxa de crescimento do Ibovespa de $\mu_1 = -0,051$ e outro regime com média $\mu_2 = 0,583$, caracterizando, portanto, o *bear* e *bull*

²Pacote para estimação disponível em http://www.statistica.unimib.it/utenti/p_matteo/

Tabela 3: Estimativas do modelo MS-1 para a taxa de crescimento do Ibovespa

Parâmetro	Coefficiente	Desvio Padrão	t-valor	p-valor
μ_1	-0,051	0,013	-4,05	0,000
μ_2	0,583	0,014	41,10	0,000
σ	0,225	0,005	41,10	0,000
$p_{1 1}$	0,988	0,005	194,00	0,000
$p_{2 1}$	0,015	0,006	2,40	0,017
Log-Veross.	20,18			
Observações	865	Parâmetros	5	
AIC.T	-30,360	AIC	-0,035	
Média(Retorno)	0,238	Var(Retorno)	0,150	

Fonte: Elaborado pelo autor.

market respectivamente. O modelo identificou 54,3% das observações como *bear market*, distribuídas em 6 intervalos distintos que, juntamente com a probabilidade suavizada de *bear market*, podem ser observados na figura 8. Quanto as probabilidades de transição estimadas, ambos regimes se mostraram persistentes. Estando em um *bear market* a probabilidade de permanecer no mesmo é de 98,8% ($p_{1|1}$), já para o *bull market* a probabilidade de permanecer no regime é de 98,5% ($p_{2|2}$). Estas probabilidades de transição indicam uma duração esperada de aproximadamente 81 semanas para o *bear market* e de cerca de 66 semanas para o *bull market*.

Permitindo que a variância da série também seja dependente dos regimes tem-se o modelo MSAR-2. Inicialmente buscou-se a modelagem da série sobre a taxa de crescimento do índice Ibovespa, visando comparar os resultados com o modelo MSAR-1. No entanto, permitindo que a variância se altere com o regime é possível estimar o modelo a partir dos retornos semanais do índice Ibovespa, pois a variância permite maior coesão dos retornos de sinais distintos em semanas consecutivas. Diante disto, testou-se o modelo para as duas séries distintas de retornos.

Na modelagem sobre a taxa de crescimento do índice Ibovespa a melhor identificação dos regimes ocorreu com $p = 0$, ou seja, assim como na modelagem desta série apenas para a média fora especificado um modelo sem termos autorregressivos, caracterizando um MS-2. Como no caso anterior, a inclusão de termos autorregressivos ao modelo fez com que a identificação de regimes do modelo não fizesse sentido dentro dos conceitos de *bull e bear markets*. O resultado da estimação deste modelo pode ser observado na tabela 4 e mostra que todos coeficientes estimados foram significativos.

Esta parametrização identificou um regime de retornos negativos $\mu_1 = -0,143$ para a taxa de

Tabela 4: Estimativas do modelo MS-2 para a taxa de crescimento do Ibovespa

Parâmetro	Coefficiente	Desvio Padrão	t-valor	p-valor
μ_1	-0,1431	0,010	-14,90	0,000
μ_2	0,4871	0,014	35,50	0,000
σ_1	0,1386	0,007	20,90	0,000
σ_2	0,2817	0,009	31,50	0,000
$p_{1 1}$	0,9899	0,005	187,00	0,000
$p_{2 1}$	0,0070	0,004	1,96	0,051
<hr/>				
Log-Veross.	81,88			
Observações	865	Parâmetros	6	
AIC.T	-151,779	AIC	-0,176	
Média(Retorno)	0,238	Var(Retorno)	0,150	

Fonte: Elaborado pelo autor.

crescimento do Ibovespa, e outro com retornos positivos $\mu_2 = 0,487$, os quais caracterizam *bear* e *bull markets* respectivamente. No entanto, a variância estimada para o *bear market* foi inferior a estimada para o *bull market*, de 0,0192 e 0,0794 respectivamente, em desacordo com a literatura empírica de finanças. O *bear market* representou 39,5% da amostra, sendo distribuído em 4 períodos distintos, os quais podem ser observados, juntamente com a probabilidade



Figura 8: Probabilidade e identificação dos *bear markets* pelo modelo MS-1 para taxa de crescimento do Ibovespa

suavizada, na figura 9. As probabilidades de transição estimadas indicam que os regimes são altamente persistentes, sendo a probabilidade de se manter em um *bear market* de 98,99% e de se manter em um *bull market* de 99,30%. Com isto, a duração média esperada é de cerca de 99 semanas para um *bear market* e de aproximadamente 142 semanas para um *bull market*.



Figura 9: Probabilidade e identificação dos *bear markets* pelo modelo MS-2 para taxa de crescimento do Ibovespa

Na modelagem sobre os retornos semanais, estimou-se inicialmente um modelo sem termos autorregressivos e de médias móveis (MS-2), cujos resultados podem ser observados na tabela 5. A estimação deste modelo identifica um regime com retornos médios negativos e maior variância e outro regime com retornos médios positivos e menor variância, de acordo com o indicado na literatura empírica, definindo o *bear* e o *bull market* respectivamente. Neste modelo, a média incondicional de um *bear market* ($S_t = 1$) foi estimada em $\mu_1 = -0,0056$, com variância de 0,0065. Já o *bull market* ($S_t = 2$) apresentou média incondicional de $\mu_2 = 0,0057$ com variância de 0,0012. No entanto, analisando-se o correlograma dos resíduos do modelo, o qual é demonstrado na figura 10, notam-se lags significativos, indicando que os resíduos não caracterizam um processo de ruído branco.

Visando tornar os resíduos do modelo ruído branco, testou-se diversas especificações de modelo com termos autorregressivos e de médias móveis. A melhor especificação fora obtida com a inclusão de dois termos autorregressivos e um de média móvel, caracterizando um MSARMA(2,1)-2, cujos parâmetros estimados podem ser observados na tabela 6. No modelo

Tabela 5: Estimativas do modelo MS-2

Parâmetro	Coefficiente	Desvio Padrão	t-valor	p-valor
μ_1	-0,0056	0,008	-0,73	0,467
μ_2	0,0057	0,001	4,23	0,000
σ_1	0,0809	0,006	13,00	0,000
σ_2	0,0351	0,001	33,80	0,000
$p_{1 1}$	0,9374	0,026	35,70	0,000
$p_{2 1}$	0,0107	0,005	2,31	0,021
<hr/>				
Log-Veross.	1530,90			
Observações	865	Parâmetros	6	
AIC.T	-3049,81	AIC	-3,53	
Média(Retorno)	0,0040	Var(Retorno)	0,0020	

Fonte: Elaborado pelo autor.

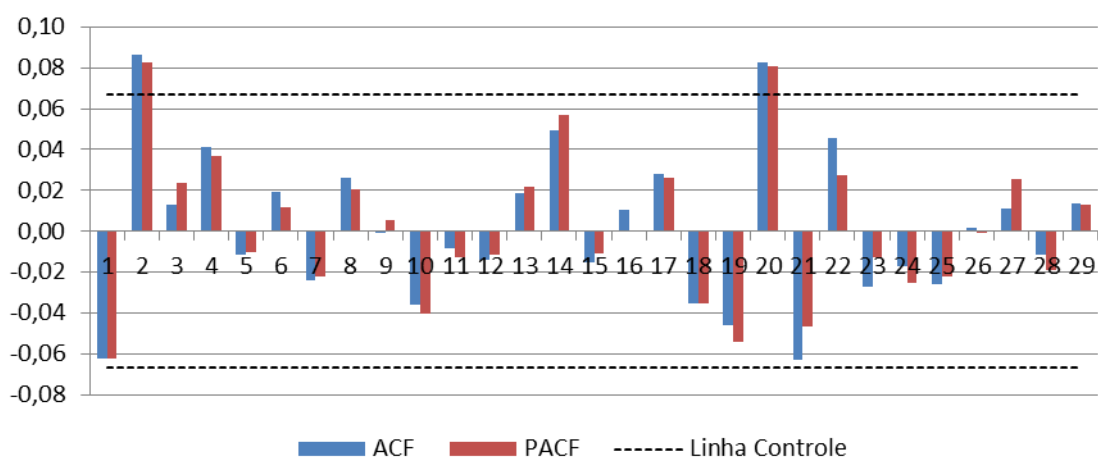


Figura 10: Correlograma dos resíduos do modelo MS-2

obtido, os coeficientes estimados podem ser considerados significativos a 5%, com exceção da constante do regime $S_t = 1$. No entanto, ainda assim a constante estimada para este regime se mostrou mais significativa neste modelo do que no estimado anteriormente (tabela 5). O correlograma dos resíduos deste modelo indica o comportamento de ruído branco e pode ser observado na figura 11.

A média incondicional obtida para o regime $S_t = 1$ é de $\mu_1 = -0,0614$ com uma variância de 0,0066. Já para o regime $S_t = 2$, observa-se uma média incondicional $\mu_2 = 0,0340$ com uma variância de 0,0012. Novamente, o modelo de mudança de regime markoviano foi capaz de identificar um regime com retornos negativos e com variância elevada (*bear market*) e um regime com retornos positivos e menor variância (*bull market*), de acordo com o conceito destes

Tabela 6: Estimativas do modelo MSARMA(2,1)-2

Parâmetro	Coefficiente	Desvio Padrão	t-valor	p-valor
$AR(1)$	0,5091	0,197	2,59	0,010
$AR(2)$	0,1078	0,035	3,12	0,002
$MA(1)$	-0,5780	0,195	-2,96	0,003
μ_1	-0,0235	0,023	-1,01	0,315
μ_2	0,0130	0,007	1,98	0,048
σ_1	0,0813	0,006	12,80	0,000
σ_2	0,0348	0,001	33,60	0,000
$p_{1 1}$	0,9350	0,027	34,10	0,000
$p_{2 1}$	0,0104	0,004	2,32	0,021
Log-Veross.	1535,40			
Observações	863	Parâmetros	9	
AIC.T	-3052,80	AIC	-3,54	
Média(Retorno)	0,0040	Var(Retorno)	0,0020	

Fonte: Elaborado pelo autor.

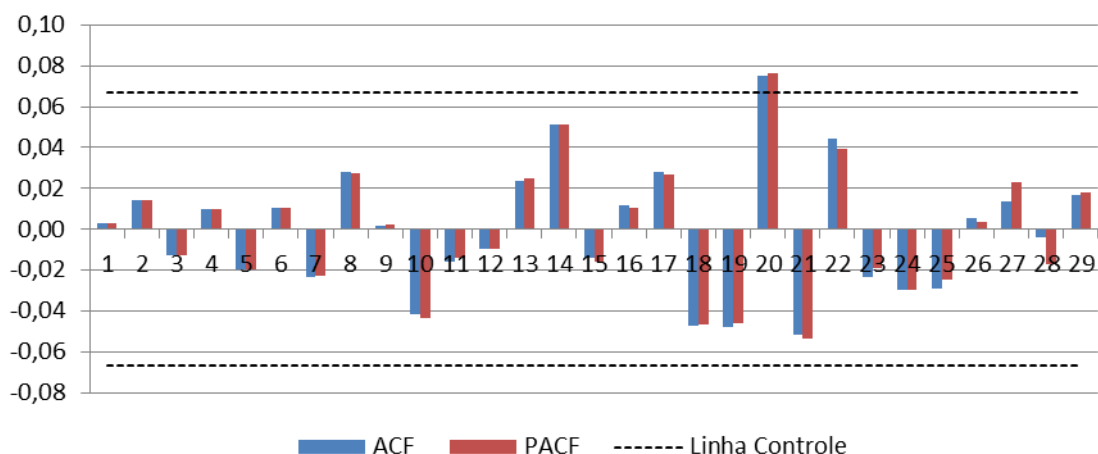


Figura 11: Correlograma dos resíduos do modelo MSARMA(2,1)-2

mercados na literatura. O modelo identificou 12,4% das observações como *bear market*, distribuídas em 6 intervalos distintos, os quais podem ser observados na figura 12, juntamente com a probabilidade suavizada de ocorrência de *bear market* ao longo da amostra. No tangente as probabilidades de transição, ambos regimes mostraram alta persistência, sendo a probabilidade de se manter em um *bear market* de 93,5% e a de se manter em um *bull market* de 99%. Com estas estimativas das probabilidades de transição, tem-se que no *bull market* a duração esperada do regime é de 96 semanas, já no *bear market* a duração esperada do regime é de 15 semanas.

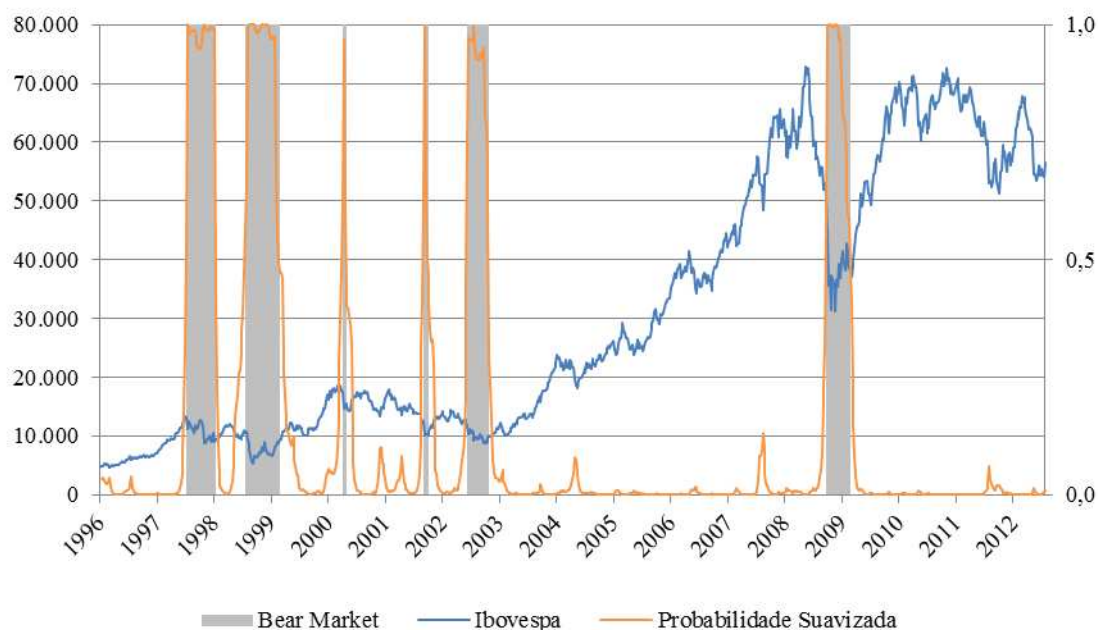


Figura 12: Probabilidade e identificação dos *bear markets* pelo modelo MSARMA(2,1)-2

Assim como em Chen e Shen (2007), propõe-se a elaboração de um modelo auto-regressivo de mudança de regime markoviano apenas para a média mas com probabilidades de transição de regime dependentes da duração do mesmo, ou seja, *autoregressive duration dependent markov switching* (DDMSAR-1). Para tal, fora utilizada a série da taxa de crescimento do índice Ibovespa, baseando-se na estimação proposta por Pelagatti (2003) e de acordo com a equação (3.18).

Estimou-se um DDMSAR-1, com o efeito da duração restrito a até 52 semanas ($\tau = 52$) e com $p = 0$, visto que ordens auto-regressivas não se mostraram significativas. A probabilidade estimada para o *bear market* ao longo da amostra, juntamente com a identificação destes períodos, pode ser observada na figura 13. O modelo resultou na identificação de 6 *bear* e 6 *bull markets* distintos, sendo que o primeiro prevaleceu em 57% do total da amostra. A média da taxa de crescimento estimada para o *bear market* (μ_0) foi de -3,8%, já para o *bull market* a média estimada foi de 59,9% ($\mu_0 + \mu_1$). O resumo da distribuição marginal posterior está na tabela 7, baseada no *Gibbs sampler* com 16.000 pontos, dos quais os primeiros 1.000 foram descartados.

As figuras 14 e 15 demonstram como a duração de um estado (*bull* ou *bear*) influencia a probabilidade de transição de regime. Em ambos os casos a probabilidade de transição aumenta com a duração do regime, sendo este impacto mais sensível no *bear market*. No entanto, apesar da relação estimada, o impacto da duração sobre a probabilidade de transição do *bull* para o *bear*



Figura 13: Probabilidade e identificação dos *bear markets* pelo modelo DDMS-1

Tabela 7: Estimativas do modelo DDMS-1 por *Gibbs-sampling*

Parâmetro	Priori		Posteriori				
	Média	Variância	Média	Desvio Padrão	2,5%	50%	97,5%
μ_0	-0,3	1	-0,038	0,0141	-0,067	-0,038	-0,013
μ_1	0,8	1	0,637	0,0157	0,606	0,637	0,668
β_1	0	5	3,400	0,6593	2,289	3,348	4,826
β_2	0	5	-0,031	0,0145	-0,061	-0,030	-0,005
β_3	0	5	-3,037	0,5669	-4,287	-2,979	-2,079
β_4	0	5	0,018	0,0123	-0,004	0,017	0,044

market não se mostrou significativo. Portanto, para os dados em questão, o resultado obtido indica que apenas os *bear markets* são dependentes da duração. A probabilidade de transição de um *bear market* para um *bull market* é diretamente afetada pela duração do *bear market*, com poucas semanas a probabilidade de mudança de regime é bastante baixa, já com a permanência no regime esta probabilidade passa a aumentar, atingindo cerca de 80% após 52 semanas no *bear market*.

Nesta seção foram estimados quatro modelos de mudança de regime markoviano com diferentes parametrizações, os quais buscaram identificar e estimar *bull* e *bear markets* para o índice Ibovespa. Dentre os modelos estimados dois permitem regimes distintos para média e variância da série, enquanto outros dois modelos apenas para a média. Os modelos que consideram re-

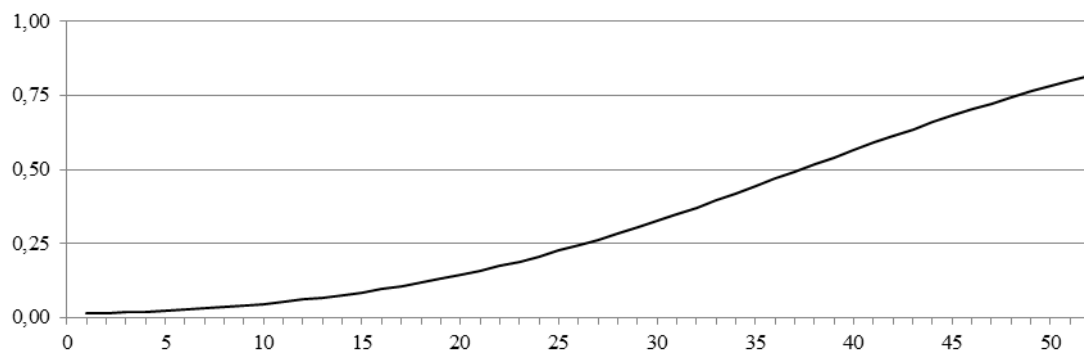


Figura 14: Probabilidade de sair de um *bear* para *bull market* após d semanas.

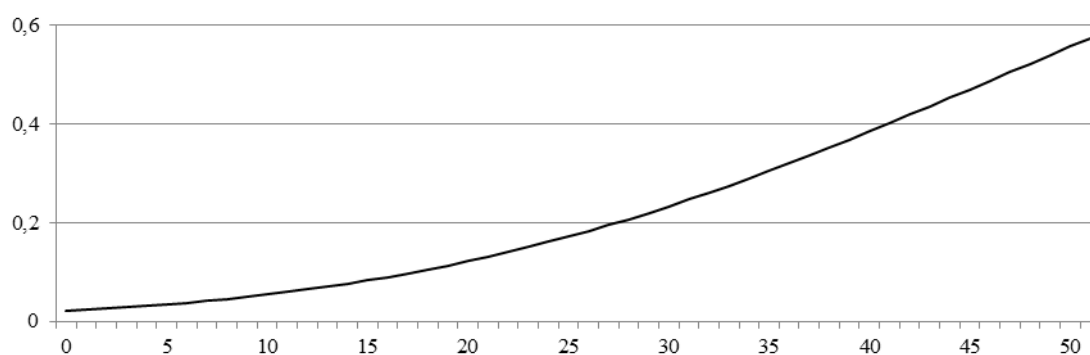


Figura 15: Probabilidade de sair de um *bull* para um *bear market* após d semanas.

gimes distintos apenas para a média da série tiveram de ser elaborados a partir da série da taxa de crescimento do índice Ibovespa, visto que a parametrização sobre os retornos semanais foi incapaz de identificar *bull* e *bear markets*. Dos modelos que permitem que a variância também seja regime dependente, um deles foi modelado a partir da taxa de crescimento do índice, para efeitos de comparação, e outro a partir dos retornos semanais. Apesar das diferentes especificações de modelos, em todas as abordagens propostas foram identificados um regime com média negativa e outro com média positiva, caracterizando o *bear* e *bull market* respectivamente.

4.4 ANÁLISE E COMPARATIVO DA IDENTIFICAÇÃO DE REGIMES

Na identificação de *bull* e *bear markets* com o foco nos retornos pode-se considerar a abordagem de regras não paramétricas como precisa na identificação dos mercados, visto que sua classificação ocorre baseada apenas no retorno e somente após a realização da série. Diante disto, busca-se comparar a capacidade de identificação de regimes dos diferentes modelos de mudança de regime markoviano, frente a abordagem por regra não paramétrica. Além disto,

busca-se discutir o impacto da volatilidade sobre a identificação e o retorno dos mercados identificados por estes modelos.

A identificação dos mercados através da regra proposta por Lunde e Timmermann resulta em um maior número de períodos distintos de *bull* e *bear markets*, variando entre 15 e 19 períodos dependendo da definição dos parâmetros λ_1 e λ_2 . A participação dos *bear markets* na amostra foi semelhante entre os modelos, oscilando entre 30,7% e 39% da amostra.

Já através da identificação de regimes por modelos de mudança de regime markoviano, o número de *bull* e *bear markets* distintos variou entre 4 e 6 períodos, dependendo do modelo. No entanto, a participação dos *bear markets* na amostra oscilou bastante, ficando entre 12,4% e 57,0%.

Os modelos MS-1 e DDMS-1, elaborados sobre a taxa de crescimento do Ibovespa, permitem que apenas a média se altere entre os regimes. A identificação dos mercados por estes modelos diferiu para apenas 29 das 865 observações, onde o DDMS-1 classificou 26 destas observações como *bear market* e o MS-1 como *bull market*. A ocorrência de *bear market* na amostra foi de 54,3% pelo modelo MS-1 e de 57% no DDMS-1. Portanto, apesar do modelo DDMS-1 levar em consideração a duração do regime sobre as probabilidades de transição, o resultado em termos de identificação de regimes não diferiu muito em relação a uma parametrização mais simples.

Ao compararmos o modelo MS-1 e MS-2, baseados na taxa de crescimento do Ibovespa, podemos avaliar a contribuição da variância sobre a identificação dos regimes. Na modelagem que permite que a variância seja distinta entre os regimes tem-se uma menor prevalência do *bear market*, representando 39,5% do total, contra 54,3% do modelo MS-1. O modelo MS-2 também identificou um menor número de *bear markets* distintos, apenas 4 contra 6 na parametrização do MS-1. A maior diferença de identificação entre os modelos ocorreu no período de 2004 até 2008, período no qual pelo MS-1 ocorreram 2 *bear markets* e pelo MS-2 nenhum. No entanto, analisando-se os retornos destes dois períodos identificados pelo MS-1, observa-se ganhos entre o início e fim dos períodos marcados como *bear market*, em desacordo com o esperado para este regime. Fora isso, os demais *bear markets* identificados pelos modelos foram semelhantes, sendo que o MS-1 identifica períodos um pouco mais longos que o MS-2, iniciando antes e terminando depois. Na tabela 8 pode-se comparar o retorno observado entre o início e término dos *bear markets* identificados por estes modelos. Diante destas evidências, permitir que a variância seja distinta entre os regimes parece contribuir para a identificação correta dos *bull* e *bear markets*, visto que realmente destaca períodos de retornos negativos como

Tabela 8: Identificação e retorno dos *bear markets* - Comparativo $MS - 1$ e $MS - 2$ para a taxa de crescimento do Ibovespa

$MS - 1$			$MS - 2$		
Data Início	Duração	Retorno	Data Início	Duração	Retorno
16/01/1998	83	11,2%	08/05/1998	54	0,4%
27/10/2000	142	-5,1%	17/11/2000	133	-4,8%
12/11/2004	43	24,5%	04/07/2008	62	-9,3%
05/01/2007	18	14,5%	22/10/2010	93*	-21,3%
13/06/2008	68	-12,3%			
14/05/2010	116*	-10,0%			

*Até a última observação da série.

Fonte: Elaborado pelo autor.

bear markets.

A estimação embasada na série dos retornos semanais do índice Ibovespa só foi possível com a parametrização de média e variância distintas entre os regimes. A partir desta definição, o $MSARMA(2, 1) - 2$ foi o melhor modelo obtido. Com esta especificação foram identificados 6 períodos de *bear market*, os quais representaram apenas 12,4% do total da amostra. Na tabela 9 são demonstrados o início de cada *bear market*, sua respectiva duração em semanas e o retorno acumulado no período. Em todos os casos o retorno observado no período foi negativo, em linha com o que se espera de um *bear market*. Comparando-se com o resultado obtido pelo modelo $MS-2$ para a taxa de crescimento, a modelagem sobre a série de retornos semanais parece ter captado *bear markets* mais significativos em termos do retorno, apresentando retornos negativos superiores a 10% em todos os casos. Diante disso, apesar do modelo identificar um menor número de observações como pertencentes ao *bear market*, estas estão distribuídas em um maior número de períodos distintos, indicando maior precisão do modelo na identificação, o que se reflete no retorno acumulado observado nestes períodos.

Portanto, o modelo de mudança de regime markoviano que obteve maior sucesso na identificação de períodos de *bear markets* foi o $MSARMA(2, 1) - 2$ para os retornos semanais do Ibovespa. Apesar do modelo identificar uma menor proporção de *bear markets* estas indicações se mostraram mais precisas, em especial se observarmos os retornos destes períodos. Levando-se em conta que a proporção de *bear markets* obtida pela identificação via regras não paramétricas oscilou entre 30,7% e 39%, se o modelo de mudança de regime markoviano for capaz de identificar parte destas observações ele agregará valor em uma estratégia de investimento. Por outro lado, ao buscar identificar todos estes períodos através do modelo de mudança de

Tabela 9: Identificação e retorno dos *bear markets* - $MSARMA(2, 1) - 2$ para os retornos semanais do Ibovespa

$MSARMA(2, 1) - 2$		
Data Início	Duração	Retorno
11/07/1997	27	-30,0%
24/07/1998	31	-19,4%
07/04/2000	3	-12,8%
06/09/2001	4	-20,6%
14/06/2002	20	-17,4%
26/09/2008	22	-28,0%

Fonte: Elaborado pelo autor.

regime markoviano pode-se incorrer no risco de classificar demasiados *bull markets* como *bear markets* fazendo com que o modelo deixe de agregar valor dentro de uma estratégia de investimento. Na tabela 10 compara-se o número de identificações de regime coincidentes entre o modelo $MSARMA(2, 1) - 2$ e as diferentes parametrizações da técnica de regras não paramétricas. Neste comparativo, o maior número de identificações coincidentes ocorreu contra a regra não paramétrica com parâmetros $\lambda_1 = \lambda_2 = 15\%$, com um total de 69,5% das observações com a mesma classificação de regime. A parametrização de $\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 15\%$ também obteve um alto índice de identificações coincidentes, 67,1%, mas com um resultado mais equilibrado entre o *bull* e o *bear market*. Vale notar que o percentual de observações coincidentes para o *bear market* é diretamente relacionado a ocorrência deste mercado conforme a definição dos lambdas, quanto menor a ocorrência é esperado que haja um menor número de identificações coincidentes.

A figura 16 compara as identificações de *bear markets* entre a regra não paramétrica com $\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 15\%$ e do modelo $MSARMA(2,1)-2$. Em verde no gráfico pode-se observar as identificações coincidentes entre as técnicas, em laranja os períodos classificados somente pelo modelo de mudança de regime markoviano e em cinza os períodos identificados somente pela regra não paramétrica. Desta forma, a soma das áreas verde e laranja corresponde a identificação completa do modelo $MSARMA(2,1)-2$, tal como na figura 12. A partir do gráfico, pode-se perceber que o modelo econométrico não consegue captar o início e término dos regimes no mesmo momento que a regra não paramétrica, o que é esperado, visto que a regra não paramétrica sempre marca as mudanças de regime em picos e vales locais. Entretanto, o modelo proposto consegue identificar períodos de *bear markets* importantes trazendo informação relevante sobre os retornos.

Tabela 10: Identificações coincidentes - modelo de mudança de regime markoviano e regra não paramétrica

	$\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 15\%$	$\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 10\%$	$\lambda_1 = 15\%$ e $\lambda_2 = 15\%$	$\lambda_1 = 15\%$ e $\lambda_2 = 10\%$
Ocorrência de <i>Bear Market</i>	35,3%	39,0%	30,7%	35,1%
<i>Bear Market</i>	64	66	54	56
%	59,8%	61,7%	50,5%	52,3%
<i>Bull Market</i>	512	482	542	506
%	68,2%	64,2%	72,2%	67,4%
Total	576	548	596	562
%	67,1%	63,9%	69,5%	65,5%

Fonte: Elaborado pelo autor.

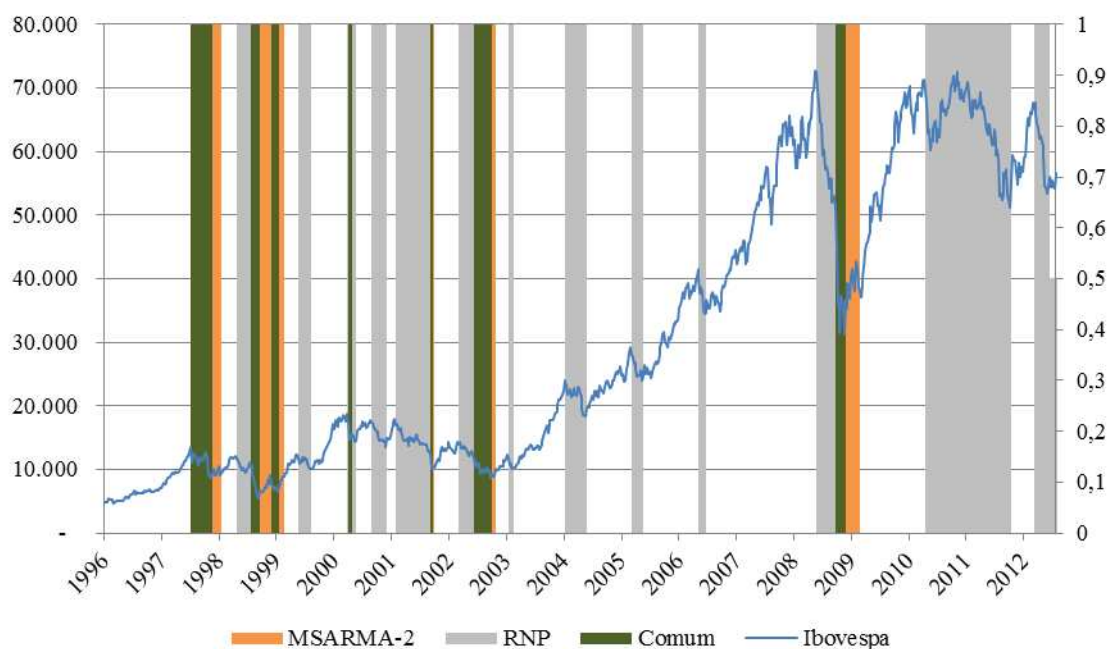


Figura 16: Identificação de *bear markets* - MSARMA(2,1)-2 vs. RNP com $\lambda_1 = 20\%$ e $\lambda_2 = 15\%$

Analisando-se economicamente a identificação dos mercados pelo modelo de mudança de regime markoviano, percebe-se que este foi capaz de identificar crises e eventos importantes relacionados com a bolsa de valores brasileira. A indicação de 11/07/1997 como início de um *bear market* coincide com início da crise asiática daquele ano, retomando um *bull market* somente em janeiro de 1998. A moratória da dívida externa russa em agosto de 1998 também é identificada pelo modelo, o qual indica o início de um novo *bear market* na semana de 24/07/1998. O início dos anos 2000 foi marcado pela crise das empresas ponto-com na bolsa

norte americana, condizente com a indicação do início de um *bear market* na bolsa brasileira em abril daquele ano. No entanto, a indicação de um *bull market* logo em seguida não condiz com um bom desempenho do mercado acionário brasileiro e terminou na indicação de um novo *bear market* no início de setembro de 2001, coincidindo com o agravamento da crise energética no país. O nervosismo eleitoral e a alta do dólar que precederam a eleição do presidente Lula em outubro de 2002 também refletiram na indicação pelo modelo de um *bear market* em junho de 2002. Após a eleição de Lula, com a manutenção das políticas econômicas vigentes e o forte crescimento da China o mercado acionário passa a experimentar o seu melhor momento pós plano Real, o que coincide com a indicação do início de um *bull market* a partir do início de novembro de 2002. Este período foi o que apresentou maior duração, totalizando 308 semanas de *bull market*, culminando no estouro da bolha imobiliária americana (crise do *subprime*) em 2008, a qual é capturada pelo modelo com a indicação do início de um *bear market* em setembro de 2008. Desde a última semana de fevereiro de 2009 o modelo indica que o mercado acionário brasileiro encontra-se em um *bull market*, tendo registrado desde então ganhos de 46,1% até a semana do dia 27 de julho de 2012.

Ainda que o modelo de mudança de regime markoviano não seja capaz de identificar todos os *bear markets* ocorridos, se ele for capaz de identificar ao menos uma parcela deles corretamente, o modelo trará informação relevante para a tomada de decisão. No caso de um investidor, por exemplo, este poderia evitar períodos com retornos negativos, agregando valor dentro de uma estratégia de investimento. Diante disto, no próximo capítulo, busca-se avaliar economicamente o modelo a partir das previsões um passo à frente geradas pelo mesmo.

5 AVALIAÇÃO ECONÔMICA DO MODELO

Neste capítulo busca-se elaborar uma estratégia de investimento baseada na previsão um passo à frente do modelo $MSARMA(2, 1) - 2$ para os retornos semanais do índice Ibovespa. Pretende-se avaliar se a identificação de mercados via este tipo de modelo pode trazer valor adicional ao investidor em relação a estratégia *buy-and-hold* de longo prazo. A ideia é que o investidor baseie sua tomada de decisão a partir da probabilidade um passo à frente do mercado estar em um *bull* ou *bear market*.

O investidor pode construir uma série de diferentes estratégias de investimento a partir da probabilidade prevista para o mercado. A forma mais direta de se construir um estratégia de investimento é através de um modelo binário simples de decisão. Se o modelo utilizado prever um *bull market* o investidor posiciona-se no mercado comprando índice, caso contrário mantêm-se fora do mercado. Dentro deste mesmo tipo de estratégia, pode-se considerar também a aplicação do capital em renda fixa quando a previsão for de *bear market*.

Para obtenção da previsão um passo a frente a partir do modelo $MSARMA(2, 1) - 2$ dividiu-se a amostra em duas partes. A primeira parte da amostra compreende os dados até a última semana de 2007, contendo 626 observações semanais, sendo esta parte da amostra utilizada para a estimação do modelo. As 239 observações subsequentes, até a última semana de julho de 2012, compreendem o exercício de previsão fora da amostra. A estimação do modelo para a primeira parte da amostra é apresentada na tabela 11.

Tabela 11: Estimativas do modelo $MSARMA(2,1)-2$ dados até 2007

Parâmetro	Coefficiente	Desvio Padrão	t-valor	p-valor
$AR(1)$	0,4727	0,186	2,54	0,011
$AR(2)$	0,1047	0,040	2,64	0,008
$MA(1)$	-0,5512	0,182	-3,03	0,003
μ_1	-0,0207	0,021	-1,01	0,312
μ_2	0,0165	0,007	2,27	0,024
σ_1	0,0787	0,007	11,50	0,000
σ_2	0,0359	0,001	28,30	0,000
$p_{1 1}$	0,9282	0,034	27,60	0,000
$p_{2 1}$	0,0130	0,006	2,06	0,040
Log-Veross.	1086,68			
Observações	624	Parâmetros	9	
AIC.T	-2155,37	AIC	-3,45	
Média(Retorno)	0,0054	Var(Retorno)	0,0021	

Fonte: Elaborado pelo autor.

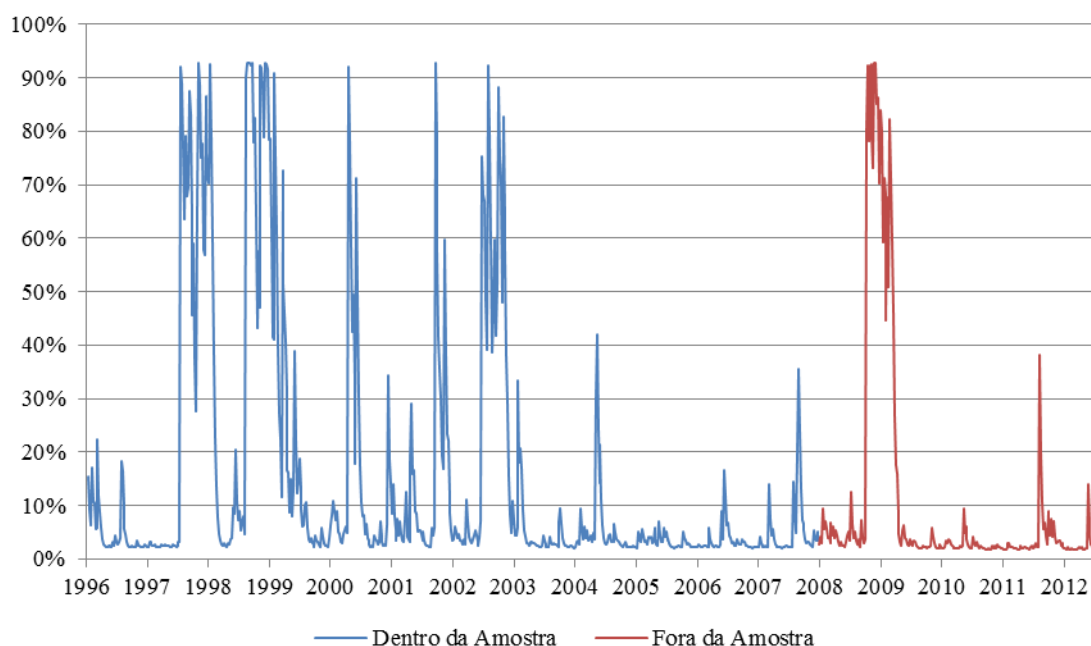


Figura 17: Previsão um passo à frente para a probabilidade de *bear market* - $MSARMA(2, 1) - 2$

As estimativas obtidas para esta parte da amostra são muito semelhantes as obtidas para o total da amostra na tabela 6, o que demonstra a consistência do modelo. Para obtenção da previsão um passo à frente para o período fora da amostra procedeu-se da seguinte forma: A cada semana, a nova observação foi incorporada à amostra, os parâmetros do modelo foram reestimados e uma nova previsão um passo à frente fora obtida. A figura 17 ilustra a previsão um passo à frente do modelo $MSARMA(2, 1) - 2$ para a probabilidade de *bear market* ao longo de toda a amostra, tanto fora como dentro do período de estimação, a qual será utilizada como critério de decisão na estratégia de investimento.

A partir das previsões um passo à frente efetua-se a identificação dos *bull* e *bear markets* considerando-se a regra de 50%. Desta forma, para o período fora da amostra foram identificados dois *bear markets* distintos, ambos com retornos negativos. Aplicando-se a estratégia binária simples de investimento, embasada no modelo de mudança de regime markoviano proposto, observa-se um retorno de 9,9% no período, enquanto que o retorno acumulado pelo Ibovespa foi de -11,5%, o qual corresponde ao retorno da estratégia *buy-and-hold*. Portanto, o investidor ao manter-se fora do mercado nos períodos de *bear market* foi capaz de preservar seu patrimônio, gerando ganhos superiores aos de mercado.

Na implementação desta estratégia de investimento, pode-se considerar ainda que durante os regimes de *bear market* previstos pelo modelo, o investidor ao invés de abster-se do mercado

financeiro por completo, aplique seus recursos em renda fixa. Visando analisar o desempenho desta alternativa, considerou-se a taxa do CDI diário em cada período³ como a remuneração do investimento em renda fixa. Sob esta ótica a estratégia de investimento apresentou retorno total 15,7% para o período fora da amostra, o que representa um desempenho 58% superior ao da estratégia anterior. Portanto, esta estratégia permite alavancar ainda mais o retorno do investidor, visto que não só evita possíveis perdas, mas também remunera o capital do investidor durante a ocorrência de *bear markets*.

No entanto, ao avaliar-se o desempenho de uma estratégia de investimento é fundamental considerar o risco envolvido. Uma boa performance da estratégia de investimento está relacionada com a capacidade de gerar retorno com baixo risco. Para quantificar esta característica, propõe-se o cálculo do índice de Sharpe das estratégias utilizadas. Sharpe (1966), propôs a seguinte fórmula para medir o retorno ajustado ao risco:

$$R/V = \frac{R_i - R_f}{\sigma_i} \quad (5.24)$$

Onde, R_i é o retorno da carteira i , R_f é o retorno livre de risco e σ_i é o desvio padrão da carteira. Esta fórmula ficou conhecida como índice de Sharpe de uma carteira.

Avaliando-se as estratégias de investimento propostas sob esta ótica, verifica-se que ambas conseguiram gerar um retorno maior com um menor nível de risco, o que é comprovado através de um índice de Sharpe (SR) inferior ao do mercado. A estratégia binária simples apresentou um SR de -0,0326, já a estratégia binária com renda fixa obteve um SR de -0,0258 enquanto que a estratégia *buy-and-hold* registrou um SR de -0,0372.

A tabela 12 resume a identificação dos *bull* e *bear markets* pelo modelo para o período fora da amostra, trazendo também o comparativo entre as estratégias de investimento a partir de um capital inicial de 100 unidades monetárias. Na figura 18 tem-se o comparativo de desempenho das estratégias neste período.

Considerando-se a análise de toda a amostra, foram identificados 39 mercados distintos, sendo 19 *bear markets* e 20 *bull markets*. Do total dos períodos identificados como *bear market* 9 apresentaram retorno negativo, outros 8 registraram ganhos de até 5%, um período registrou ganho de 5,5% e apenas um apresentou retorno mais elevado, de 10,3% no período.

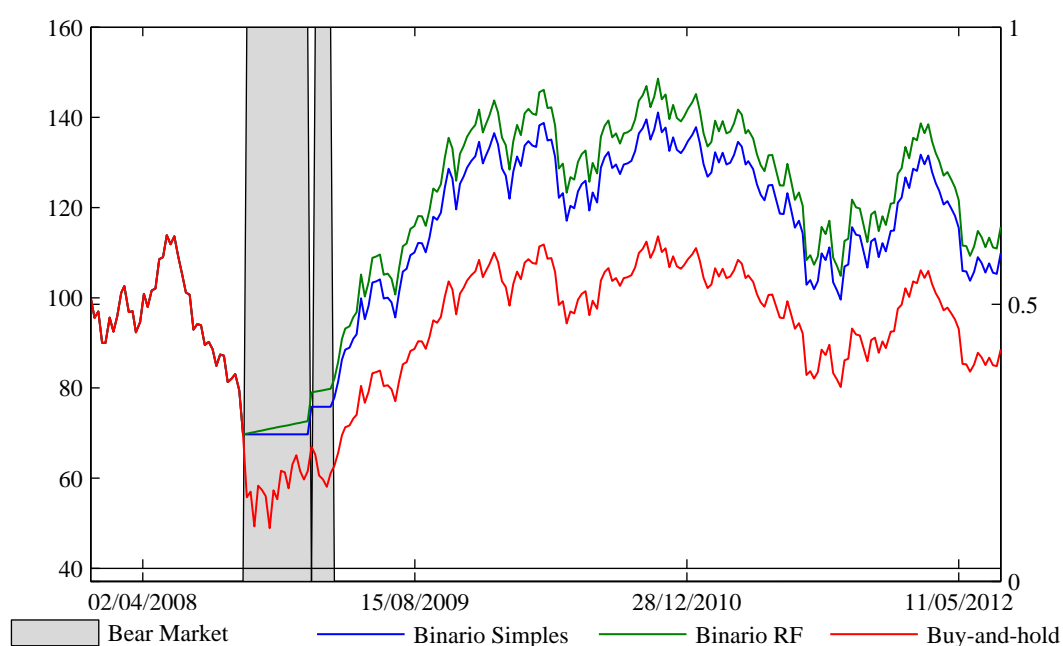
Aplicando-se estratégia binária simples de investimento para toda a amostra, registra-se um re-

³A série do CDI diário pode ser obtida em <https://www3.bcb.gov.br/sgspub/> série número 12.

Tabela 12: Comparativo estratégias de investimento vs. *Buy-and-hold* fora da amostra

Mercado	Data Início	Duração	Retorno	Binária	Binária+RF	Buy-and-hold
<i>Bull</i>	28/12/2007	40	-30,3%	69,7	69,7	69,7
<i>Bear</i>	10/10/2008	17	-11,7%	69,7	72,6	61,5
<i>Bull</i>	06/02/2009	1	8,8%	75,8	79,0	66,9
<i>Bear</i>	13/02/2009	5	-8,7%	75,8	79,8	61,1
<i>Bull</i>	20/03/2009	176	45,0%	109,9	115,7	88,5
<i>Índice de Sharpe</i>				-0,0326	-0,0258	-0,0372

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18: Comparativo de desempenho - estratégias de investimento vs. *buy-and-hold* fora da amostra

torno total de 2.192%. Já a estratégia *buy-and-hold* apresentou um retorno total de 1.067%, que corresponde ao desempenho do índice Ibovespa no período. Portanto, também ao considerar-se toda a amostra, o investidor foi capaz de preservar seu patrimônio ao manter-se fora do mercado nos períodos de *bear market*, sem perder grandes rentabilidades por indicação equivocada do modelo. Consequentemente, ao utilizar o modelo proposto para tomar sua decisão de investimento, o investidor alcançou um retorno 96% superior ao da estratégia *buy-and-hold* de longo prazo.

Considerando-se o investimento em renda fixa nos períodos de *bear market*, a estratégia de investimento apresentou retorno total de 3.312% para toda a amostra, o que corresponde a um

desempenho 49% superior ao da estratégia sem renda fixa. Com esta parametrização, além de evitar possíveis perdas, o investidor também reduz o seu custo de oportunidade nos períodos identificados como *bear market* mas que apresentam retorno positivo. Ajustando-se o retorno do Ibovespa pelo ganho obtido com renda fixa nos 10 *bear markets* que apresentaram retorno positivo, em apenas um dos casos o retorno do Ibovespa continuaria superior a 5%.

A tabela 13 resume a identificação dos *bull* e *bear markets* pelo modelo ao longo de toda a amostra, trazendo também o comparativo entre as estratégias de investimento a partir de um capital inicial de 100 unidades monetárias para toda a série. Na figura 19 é possível observar o desempenho das diferentes estratégias para toda a amostra.

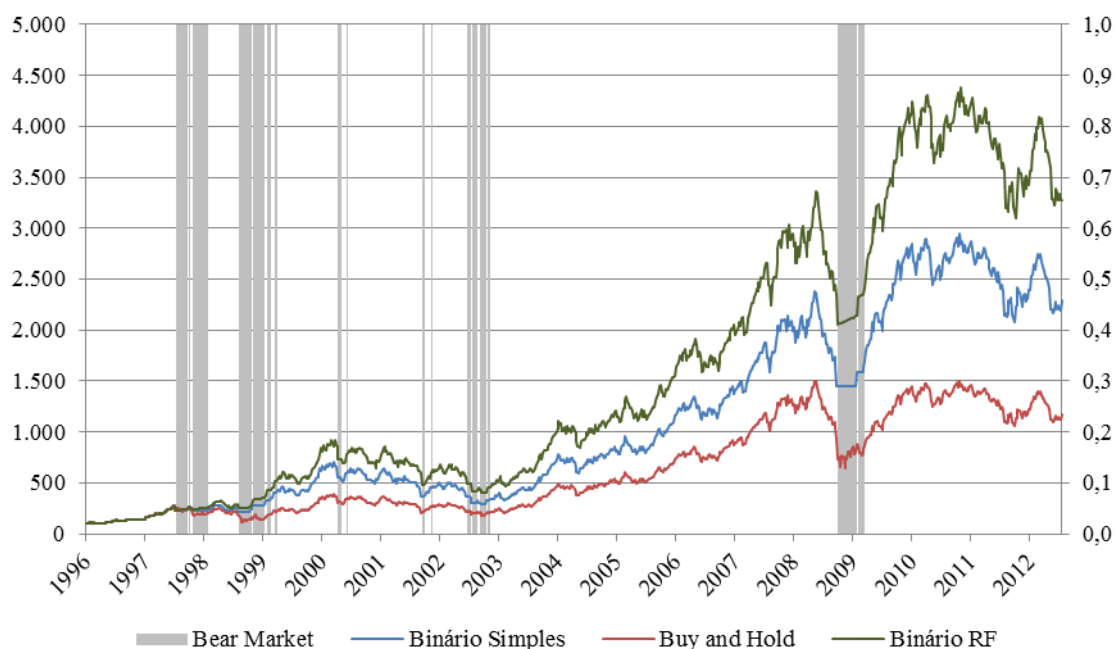


Figura 19: Comparativo de desempenho - estratégias de investimento vs. *buy-and-hold* amostra completa

O resultado obtido pelas estratégias de investimento demonstra que a utilização de um modelo de mudança de regime markoviano para a identificação dos mercados trás informação relevante para o investidor, sendo uma ferramenta útil para a tomada de decisão.

Tabela 13: Comparativo estratégias de investimento vs. *Buy-and-hold* amostra completa

Mercado	Data Início	Duração	Retorno	Binária	Binária+RF	<i>Buy-and-hold</i>
<i>Bull</i>	05/01/1996	79	130,7%	231	231	231
<i>Bear</i>	25/07/1997	10	3,1%	231	239	238
<i>Bull</i>	03/10/1997	1	8,7%	251	260	259
<i>Bear</i>	10/10/1997	1	1,6%	251	261	263
<i>Bull</i>	17/10/1997	2	-9,4%	227	237	238
<i>Bear</i>	31/10/1997	14	-15,8%	227	259	201
<i>Bull</i>	06/02/1998	27	-4,1%	218	248	192
<i>Bear</i>	14/08/1998	10	-28,0%	218	262	138
<i>Bull</i>	23/10/1998	1	8,4%	236	284	150
<i>Bear</i>	30/10/1998	1	-3,1%	236	286	145
<i>Bull</i>	06/11/1998	1	16,6%	275	333	169
<i>Bear</i>	13/11/1998	10	-17,9%	275	351	139
<i>Bull</i>	22/01/1999	2	21,1%	334	425	169
<i>Bear</i>	05/02/1999	3	10,3%	334	432	186
<i>Bull</i>	26/02/1999	4	20,2%	401	520	224
<i>Bear</i>	26/03/1999	2	-1,3%	401	525	221
<i>Bull</i>	09/04/1999	54	38,3%	555	726	305
<i>Bear</i>	20/04/2000	3	2,9%	555	733	314
<i>Bull</i>	12/05/2000	4	6,6%	591	782	335
<i>Bear</i>	09/06/2000	1	0,7%	591	784	337
<i>Bull</i>	16/06/2000	66	-38,6%	363	482	207
<i>Bear</i>	21/09/2001	3	1,6%	363	486	210
<i>Bull</i>	11/10/2001	5	24,8%	453	607	263
<i>Bear</i>	16/11/2001	1	1,2%	453	609	266
<i>Bull</i>	23/11/2001	31	-19,3%	366	492	215
<i>Bear</i>	28/06/2002	3	5,5%	366	497	226
<i>Bull</i>	19/07/2002	2	-16,0%	308	417	190
<i>Bear</i>	02/08/2002	4	5,0%	308	423	200
<i>Bull</i>	30/08/2002	2	0,4%	309	425	200
<i>Bear</i>	13/09/2002	1	4,8%	309	426	210
<i>Bull</i>	20/09/2002	1	-5,8%	291	401	198
<i>Bear</i>	27/09/2002	4	-5,9%	291	407	186
<i>Bull</i>	25/10/2002	1	11,0%	323	451	207
<i>Bear</i>	01/11/2002	3	-1,3%	323	456	204
<i>Bull</i>	22/11/2002	307	350,4%	1454	2055	919
<i>Bear</i>	10/10/2008	17	-11,7%	1454	2141	811
<i>Bull</i>	06/02/2009	1	8,8%	1581	2329	882
<i>Bear</i>	13/02/2009	5	-8,7%	1581	2354	805
<i>Bull</i>	20/03/2009	176	45,0%	2292	3412	1167

Fonte: Elaborado pelo autor.

6 CONCLUSÃO

Recentemente alguns trabalhos têm procurado investigar uma característica peculiar e instigante das séries financeiras, a existência de *bull* e *bear markets*. A partir da literatura internacional, este trabalho buscou a identificação e previsão destes períodos para o mercado financeiro brasileiro, especificamente para a série do índice Ibovespa. O estudo fora conduzido a partir da elaboração de modelos de mudança de regime markoviano e da análise por regras não paramétricas de identificação, para as observações semanais do índice entre a primeira semana de janeiro de 1996 e a última semana de julho de 2012.

A identificação de *bull* e *bear markets* por regra não paramétrica é bastante precisa no que diz respeito aos retornos, visto que trata-se de uma técnica *ex-post*. Foram analisadas quatro diferentes parametrizações para os gatilhos de troca entre os regimes, variando entre 10% e 20%. A participação de *bear markets* oscilou entre 30,7% e 39% da amostra nas diferentes combinações. Já o retorno médio semanal oscilou entre -1,5% e -1,2% para o *bear market* e entre 1,2% e 1,4% para o *bull market*.

No tangente aos modelos de mudança de regime markoviano, foram utilizadas duas séries distintas: a série de retornos semanais e a série da taxa de crescimento do índice Ibovespa. Foram parametrizados dois regimes distintos, um para o *bear* e outro para o *bull market*, avaliando-se a modelagem com apenas a média distinta entre os regimes, com a média e variância distintas e também apenas com a média distinta mas com probabilidades de transição dependentes da duração do regime.

A modelagem apenas para a média distinta só foi possível sobre a taxa de crescimento do índice, visto que sobre os retornos semanais a identificação dos regimes foi errática, não agregando informação. Fazendo com que as probabilidades de transição fossem dependentes da duração do regime, não obteve-se uma melhor identificação dos regimes pelo modelo, apesar de mostrar que os *bear markets* são dependentes da duração do regime, isto é, que a probabilidade de passar para um *bull market* se eleva com a duração do *bear market*. Ainda baseando-se na série da taxa de crescimento do índice, a modelagem obteve melhor identificação dos regimes ao permitir que a média e variância fossem distintas entre eles, tornando a identificação dos períodos de *bear market* mais precisa e significativa, tendo este regime representado 39,5% da amostra distribuído em quatro períodos distintos.

A modelagem sobre a série de retornos semanais do índice só foi possível ao permitir média e variância distintas entre os regimes. O modelo estimado fora um MSARMA(2,1)-2 e iden-

tificou 6 regimes de *bear market* distintos, que corresponderam a 12,4% do total da amostra. Apesar de identificar uma menor proporção de *bear markets*, todos períodos identificados tiveram retornos negativos superiores a 10%, demonstrando maior precisão do modelo em relação à modelagem sobre a taxa de retorno. Neste modelo, foi estimado um retorno médio de -6,1% com variância de 0,0066 para o *bear market* e um retorno médio de 3,4% com variância de 0,0012 para o *bull market*.

Diante das evidências, é possível concluir que permitir que a variância seja distinta entre os regimes na modelagem é consistente com a identificação de *bull* e *bear markets*, gerando uma identificação mais precisa dos mercados. Esta conclusão empírica ressalta a importância da variância na caracterização dos mercados, isto é, que a mesma é fundamental na definição e identificação deste períodos. Nos modelos obtidos fica clara a associação de uma menor variância nos regimes de *bull market* e uma variância mais elevada nos regimes de *bear market*.

Comparando-se o modelo de mudança de regime markoviano (MSARMA(2,1)-2) com as parametrizações de regra não paramétrica o percentual de identificações coincidentes oscilou entre 63,9% e 69,5%. Em linhas gerais o modelo econométrico demora mais a captar o início e término de um regime em relação a regra não paramétrica, o que é esperado, visto que a regra não paramétrica sempre data as mudanças de regime em picos e vales locais. Ainda assim, o modelo proposto foi capaz de identificar importantes crises e eventos relacionados ao mercado financeiro brasileiro.

Como objetivo secundário desta dissertação, buscou-se avaliar economicamente o modelo obtido, utilizando suas previsões um passo à frente como *input* em uma estratégia de investimento. Simulou-se uma estratégias de investimento binária com e sem renda fixa. Na estratégia sem renda fixa para o período fora da amostra, a partir de 2008, o investidor registrou retorno de 9,9% frente a -11,5% do índice Ibovespa no período. Já na estratégia que considera a aplicação em renda fixa nos períodos de *bear market*, o retorno foi de 15,7% para o período fora da amostra, um desempenho 58% superior ao da estratégia sem renda fixa. Em ambas as estratégias o nível de risco se mostrou inferior ao do mercado, apresentando um índice de Sharpe inferior. Ao considerar-se o total da amostra, o investidor obteve um retorno 96% e 192% superior ao da estratégia *buy-and-hold* na estratégia binária sem renda fixa e na com renda fixa respectivamente.

Ainda que o modelo proposto não seja capaz de captar todos os *bear markets* ocorridos, ele se mostrou capaz de preservar o capital do investidor, gerando retornos acima da média do mercado no longo prazo. Desta forma, conclui-se que o modelo de mudança de regime markoviano

para a identificação dos mercados traz informação relevante e auxilia na tomada de decisão.

Para trabalhos futuros seria interessante a estimação de outras parametrizações não contempladas neste trabalho, em especial do DDMSAR-2, considerando-se média e variância distinta entre os regimes com probabilidades de transição dependentes da duração, não contemplado aqui por limitações computacionais. Ainda nesta mesma linha, seria interessante também a especificação de um maior número de regimes buscando acomodar movimentos de curto prazo dentro das tendências de longo prazo dos *bull* e *bear markets*.

REFERÊNCIAS

- ALBERT, J. H.; CHIB, S. Bayesian analysis of binary and polychotomous response data. **Journal of the American statistical Association**, Taylor & Francis Group, v. 88, n. 422, p. 669–679, 1993.
- ANATOLYEV, S.; GOSPODINOV, N. Modeling financial return dynamics via decomposition. **Journal of Business & Economic Statistics**, v. 28, n. 2, 2010.
- ANG, A.; BEKAERT, G. International asset allocation with regime shifts. **Review of Financial studies**, Soc Financial Studies, v. 15, n. 4, p. 1137–1187, 2002.
- ANG, A.; CHEN, J.; XING, Y. Downside risk. **Review of Financial Studies**, Soc Financial Studies, v. 19, n. 4, p. 1191–1239, 2006.
- ASEM, E.; TIAN, G. Y. Market dynamics and momentum profits. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 45, n. 06, p. 1549–1562, January 2011.
- BERGE, T. J.; JORDA, O. Evaluating the classification of economic activity into recessions and expansions. **American Economic Journal: Macroeconomics**, v. 3, n. 2, p. 246–77, 2011.
- BOHL, M. T.; SIKLOS, P. L.; WERNER, T. Do central banks react to the stock market? the case of the bundesbank. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 719–733, 2007.
- BRY, G.; BOSCHAN, C. **Cyclical Analysis of Time Series: Selected Procedures and Computer Programs**. New York: NBER, 1971.
- CAMPBELL, J. Y.; THOMPSON, S. B. Predicting excess stock returns out of sample: Can anything beat the historical average? **Review of Financial Studies**, Soc Financial Studies, v. 21, n. 4, p. 1509–1531, 2008.
- CAMPBELL, Y. J.; LO, W. A.; MACKINLAY, C. A. **The Econometrics of Financial Markets**. [S.l.]: Princeton: Princeton University Press, 1997.
- CANDELON, B.; AHMED, J.; STRAETMANS, S. T. M. **Predicting and Capitalizing on Stock Market Bears in the US**. [S.l.]: METEOR, Maastricht research school of Economics of Technology and ORganizations, 2012.
- CANDELON, B.; PIPLACK, J.; STRAETMANS, S. On measuring synchronization of bulls and bears: The case of east asia. **Journal of banking & finance**, Elsevier, v. 32, n. 6, p. 1022–1035, 2008.
- CARTER, C. K.; KOHN, R. On gibbs sampling for state space models. **Biometrika**, Biometrika Trust, v. 81, n. 3, p. 541–553, 1994.
- CHAUVET, M.; POTTER, S. Coincident and leading indicators of the stock market. **Journal of Empirical Finance**, v. 7, p. 87–111, 2000.
- CHEN, S. N. An examination of risk return relationship in bull and bear markets using time-varying betas. **Journal of Financial**, v. 17, p. 265–286, 1982.

- CHEN, S.-S. Predicting the bear stock market: Macroeconomic variables as leading indicators. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 33, n. 2, p. 211–223, 2009.
- CHEN, S.-W.; SHEN, C.-H. Evidence of the duration-dependence from the stock markets in the pacific rim economies. **Applied Economics**, v. 39, p. 1461–1474, 2007.
- CLAESSENS, S.; KOSE, M. A.; TERRONES, M. E. What happens during recessions, crunches and busts? **Economic Policy**, Wiley Online Library, v. 24, n. 60, p. 653–700, 2009.
- COCHRANE, J. H. The dog that did not bark: A defense of return predictability. **Review of Financial Studies**, Soc Financial Studies, v. 21, n. 4, p. 1533–1575, 2008.
- DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M.; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, JSTOR, p. 1–38, 1977.
- DURLAND, J. M.; MCCURDY, T. H. Duration-dependent transitions in a markov model of u.s. gnp growth. **Journal of Business & Economic Statistics.**, v. 12, p. 279–288, 1994.
- EBELL, M. **Why are Asset Returns More Volatile during Recessions? A Theoretical Explanation.** [S.l.], abr. 2001. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/szg/worpaper/0101.html>>.
- ESTRELLA, A.; MISHKIN, F. S. Predicting U.S. Recessions: Financial Variables as Leading Indicators. **Review of Economics and Statistics**, MIT Press, v. 80, n. 1, p. 45–61, fev. 1998.
- FABOZZI, F. J.; FRANCIS, J. C. Stability tests for alphas and betas over bull and bear market conditions. **Journal of Finance**, v. 32, p. 1093–1099, 1977.
- GONZALES, L. et al. Defining and dating bull and bear markets: Two centuries of evidence. **Multinational Finance Journal**, v. 10, p. 81–116, 2006.
- GONZALEZ, L. et al. Two centuries of bull and bear market cycles. **International Review of Economics & Finance**, Elsevier, v. 14, n. 4, p. 469–486, 2005.
- GORDON, S.; ST-AMOUR, P. A preference regime model of bull and bear markets. **The American Economic Review**, JSTOR, v. 90, n. 4, p. 1019–1033, 2000.
- GROBYS, K. Have bull and bear markets changed over time? empirical evidence from the us-stock market. **Journal of Finance and Investment Analysis**, International Scientific Press, v. 1, n. 1, p. 151–171, 2012.
- GUIDOLIN, M.; HYDE, S. Can var models capture regime shifts in asset returns? a long-horizon strategic asset allocation perspective. **Journal of Banking & Finance**, v. 36, n. 3, p. 695–716, 2012.
- GUIDOLIN, M.; TIMMERMANN, A. Economic implications of bull and bear regimes in uk stock and bond returns. **The Economic Journal**, v. 115, p. 111–143, 2005.
- GUIDOLIN, M.; TIMMERMANN, A. An econometric model of nonlinear dynamics in the joint distribution of stock and bond returns. **Journal of Applied Econometrics**, Wiley Online Library, v. 21, n. 1, p. 1–22, 2006.

- GUIDOLIN, M.; TIMMERMANN, A. Asset allocation under multivariate regime switching. **Journal of Economic Dynamics and Control**, Elsevier, v. 31, n. 11, p. 3503–3544, 2007.
- HAMILTON, J. D. A new approach to the economic analysis of non-stationary time series and the business cycle. **Econometrica.**, v. 57, p. 357–384, 1989.
- HAMILTON, J. D. Analysis of time series subject to changes in regime. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 45, n. 1, p. 39–70, 1990.
- HAMILTON, J. D. **Time Series Analysis**. [S.l.]: Princeton., 1994.
- HAMILTON, J. D. Calling recessions in real time. **International Journal of Forecasting**, v. 27, n. 4, p. 1006–1026, October 2011.
- HARDING, D.; PAGAN, A. Dissecting the cycle: a methodological investigation. **Journal of Monetary Economics**, v. 49, n. 2, p. 365–381, March 2002.
- HARDOUVELIS, G. A.; THEODOSSIOU, P. The asymmetric relation between initial margin requirements and stock market volatility across bull and bear markets. **The Review of Financial Studies**, v. 15, p. 1525–1559, 2002.
- KIM, C.-J.; NELSON, C. R. **State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications**. [S.l.]: the MIT Press, 1999.
- KIM, C.-J.; NELSON, C. R.; STARTZ, R. Testing for mean reversion in heteroskedastic data based on gibbs-sampling-augmented randomization. **Journal of Empirical Finance**, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 131–154, 1998.
- KIM, M. K.; ZUMWALT, J. K. An analysis of risk in bull and bear markets. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 14, p. 1015–1025, 1979.
- KOLE, E.; DIJK, D. J. C. van. How to identify and predict bull and bear markets? Setembro 2010.
- KOLE, E.; KOEDIJK, K.; VERBEEK, M. Portfolio implications of systemic crises. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 30, n. 8, p. 2347–2369, 2006.
- LEROY, S. F. Risk aversion and the martingale property of stock prices. **International Economic Review**, v. 14, p. 436–446, 1973.
- LUNDE, A.; TIMMERMANN, A. Duration dependence in stock prices: An analysis of bull and bear markets. **Journal of Business & Economic Statistics.**, v. 22, p. 253–273, 2004.
- MAHEU, J. M.; MCCURDY, T. H. Identifying bull and bear markets in stock returns. **Journal of Business & Economic Statistics.**, v. 18, p. 100–112, 2000.
- MAHEU, J. M.; MCCURDY, T. H.; SONG, Y. Components of bull and bear markets: bull corrections and bear rallies. Working Paper. University of Toronto, Department of Economics. Julho 2011.
- MORLEY, J.; PIGER, J. The asymmetric business cycle. **The Review of Economics and Statistics**, v. 94, n. 1, p. 208–221, February 2012.

NYBERG, H. Forecasting the direction of the us stock market with dynamic binary probit models. **International Journal of Forecasting**, Elsevier, v. 27, n. 2, p. 561–578, 2011.

PAGAN, A. R.; SOSSOUNOV, K. A. A simple framework for analysing bull and bear markets. **Journal of Applied Econometrics**, v. 18, p. 23–46, 2003.

PELAGATTI, M. Gibbs sampling for a duration dependent markov switching model with an application to the us business cycle. **Quaderno di Dipartimento QD2001/2, Dipartimento di Statistica, Universita degli Studi di Milano Bicocca**, 2001.

PELAGATTI, M. Duration-dependent markov-switching var models with applications to the business cycle analysis. In: **Proceedings of the XLI Scientific Meeting of the Italian Statistics Society**. [S.l.: s.n.], 2002.

PELAGATTI, M. M. Ddmsvar for ox: a software for time series model with duration dependent markov-switching vector autoregressions. In: **1st OxMetrics User Conference, London**. [S.l.: s.n.], 2003.

PEREZ-QUIROS, G.; TIMMERMANN, A. Business cycle asymmetries in stock returns: Evidence from higher order moments and conditional densities. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 103, n. 1, p. 259–306, 2001.

PIGER, J.; MORLEY, J.; KIM, C.-J. Nonlinearity and the permanent effects of recessions. **Journal of Applied Econometrics**, v. 20, n. 2, p. 291–309, 2005.

RAPACH, D. E.; WOCHAR, M. E.; RANGVID, J. Macro variables and international stock return predictability. **International Journal of Forecasting**, Elsevier, v. 21, n. 1, p. 137–166, 2005.

RIGOBON, R.; SACK, B. Measuring the reaction of monetary policy to the stock market. **The quarterly journal of Economics**, Oxford University Press, v. 118, n. 2, p. 639–669, 2003.

RYDÉN, T.; TERÄSVIRTA, T.; ÅSBRINK, S. Stylized facts of daily returns series and the hidden markov model. **Journal of Applied Econometrics**, v. 13, p. 217–244, 1998.

SAMUELSON, P. A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. **Industrial Management Review**, v. 6, 1965.

SHARPE, W. F. Mutual fund performance. **The Journal of Business**, JSTOR, v. 39, n. 1, p. 119–138, 1966.

STOCK, J. H.; WATSON, M. W. Forecasting output and inflation: The role of asset prices. **Journal of Economic Literature**, American Economic Association, v. 41, n. 3, p. 788–829, 2003.

TU, J. Is regime switching in stock returns important in portfolio decisions? **Management Science**, v. 56, n. 7, p. 1198 – 1215, 2010.

TURNER, C. M.; STARTZ, R.; NELSON, C. R. A markov model of heteroskedasticity, risk, and learning in the stock market. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 25, n. 1, p. 3–22, 1989.

ANEXO A - INFERÊNCIA BAYESIANA

A inferência Bayesiana sobre os parâmetros desconhecidos do modelo $(\mu, \Phi, \sigma^2, \beta, \{(S_t, D_t)\}_{t=1}^T)$, onde $\mu = (\mu_0^l, \mu_1^l)'$ e $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$, é feita através da técnica de *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC).

Visando a conjugação, ou seja, obter distribuições a posteriori da mesma família que a priori, define-se a prioriis normais (truncadas) para os coeficientes da regressão e a distribuição gamma invertida para a variância

$$\mu \sim N(m_0, \sigma_y^2 M_0) I(\{\mu_0 \leq \mu_1\}), \quad (6.25)$$

$$\Phi \sim N(\phi_0, \sigma_y^2 \Phi_0) I(\{\Phi(L) \text{ estacionário}\}), \quad (6.26)$$

$$\sigma_y^2 \sim IG(n_0, n_0 v_0), \quad (6.27)$$

$$\beta \sim N(b_0, B_0), \quad (6.28)$$

Definindo a probabilidade inicial para cada estado possível, ou seja, S_0^* , que pode ser definida como a probabilidade ergódica da cadeia de Markov $\{S_t, D_t\}$, tem-se a definição de todas a prioriis do modelo.

Seja θ o conjunto de todos os parâmetros desconhecidos do modelo, definimos θ_i para $i = 1, \dots, I$ como uma partição deste conjunto e θ_{-i} como o conjunto θ sem os elementos de θ_i . Para implementar um *Gibbs sampler* visando amostrar a partir da distribuição conjunta posterior de todos parâmetros desconhecidos do modelo, é suficiente encontrar a distribuição posterior completa $p(\theta_i | \theta_{-i}, y)$ para $i = 1, \dots, I$. Uma iteração do *Gibbs sampler* corresponde a geração de números aleatórios a partir de $p(\theta_i | \theta_{-i}, y)$, $i = 1, \dots, I$, onde os elementos de θ_{-i} são substituídos pelos valores gerados mais recentemente. Como, sob condições moderadas, a cadeia de Markov definida para $\theta^{(i)}$, onde $\theta^{(i)}$ é o valor de θ gerado na i –ésima iteração do *Gibbs sampler*, converge para sua distribuição estacionária, e que esta distribuição é a verdadeira distribuição posterior $p(\theta | y)$, é suficiente fixar um período inicial de M iterações que serão descartadas, de maneira que a cadeia de Markov “esqueça” os valores iniciais de $\theta^{(0)}$,

definidos pelo pesquisador, para formar a distribuição conjunta posterior. As amostras obtidas para cada elemento de θ são amostras da distribuição marginal posterior de cada parâmetro. Em linhas gerais, dados os valor iniciais $\theta^0 = (S^0, \mu^0, \Phi^0, (\sigma^2)^0, \beta^0)$ o algoritmo segue a seguinte lógica

$$(1) \text{ Obtenha } S^{(1)} \text{ de } p(S^1 | \mu^0, \Phi^0, (\sigma^2)^0, \beta^0)$$

$$(2) \text{ Obtenha } \mu^{(1)} \text{ de } p(\mu^1 | S^1, \Phi^0, (\sigma^2)^0, \beta^0)$$

⋮

$$(5) \text{ Finalmente obtenha } \beta^{(1)} \text{ de } p(\beta^1 | S^1, \mu^1, \Phi^1, (\sigma^2)^1)$$

Os passos de 1-5 representam uma iteração para as variáveis do modelo. Estes passos podem ser iterados J vezes para obter θ^J .

Gibbs sampler

Passo 1: Gerando $\{S_t^*\}_{t=1}^T$

O amostrador utilizado é baseado no método de estimação proposto por Carter e Kohn (1994), que apresenta maior eficiência computacional e convergência mais rápida. Busca-se obter o vetor de estados a partir da distribuição conjunta dada por

$$p(S_1^*, S_2^*, \dots, S_T^* | y_t) = p(S_T^* | y_T) \prod_{t=1}^{T-1} p(S_t^* | S_{t+1}^*, y_t) \quad (6.29)$$

Dado y_t e os parâmetros do modelo, defina $\hat{\xi}_t | i$ como o vetor contendo as probabilidades de S_t estar em cada estado e η_t o vetor contendo a verossimilhança de cada estado, cujos elementos são definidos por

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_t - \hat{y}_t)' \Sigma^{-1} (y_t - \hat{y}_t)\right\} \quad (6.30)$$

onde

$$\hat{y}_t = \mu_0 + \mu_1 S_t + \phi_1 (y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 (S_{t-1})) + \dots + \phi_p (y_{t-p} - \mu_0 - \mu_1 (S_{t-p}))$$

muda conforme o estado de S_t^* .

As probabilidades filtradas dos estados podem ser calculadas através do filtro de Hamilton (1994)

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t}{\hat{\xi}_{t|t-1} \eta_t}$$

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = P \hat{\xi}_{t|t}$$

o símbolo \odot indica multiplicação elemento a elemento. Com o vetor de probabilidades a priori $\hat{\xi}_{1|0}$ sendo definido pelas probabilidades ergódicas (estacionárias) de cada estado o filtro está completo.

Para amostrar a partir da distribuição de $\{S_t^*\}_1^T$ dada toda informação de y_t , pode-se mostrar que

$$Pr(S_t^* = i | S_{t+1}^* = k, y_t) = \frac{p_{i|k} \hat{\xi}_{t|t}^{(i)}}{\sum_{j=1}^m p_{j|k} \hat{\xi}_{t|t}^{(j)}} \quad (6.31)$$

onde $p_{j|k}$ indica a probabilidade de transição do estado k para o estado j e $\hat{\xi}_{t|t}^{(i)}$ é o j -ésimo elemento do vetor $\hat{\xi}_{t|t}$.

Com as funções de probabilidade definidas, a partir da equação (6.29) pode-se gerar os estados iniciando-se a partir da probabilidade filtrada $\hat{\xi}_{T|T}$ e proceder para trás utilizando-se a equação (6.31) substituindo k pelo último valor gerado para S_{t+1}^* . Após gerar uma amostra completa de $\{S_t^*\}$ automaticamente têm-se um amostra disponível para $\{S_t\}$ e $\{D_t\}$.

Passo 2: Gerando (Φ, σ^2)

Utilizando-se os valores da última iteração pode-se calcular

$$y_t^* = (y_t - \mu_0 - \mu_1 S_t) \quad (6.32)$$

O modelo inicial pode ser reescrito como

$$y_t^* = \phi_1 y_{t-1}^* + \dots + \phi_1 y_{t-1}^* \quad (6.33)$$

que é um modelo linear. Assim, valores para o vetor Φ e para σ^2 podem ser obtidos a partir de sua distribuição posteriori.

Passo 3: Gerando μ

A partir dos valores mais recentes dos demais parâmetros, calcula-se

$$\tilde{y}_t = \phi(L)y_t \quad (6.34)$$

$$c_t = \phi(1) \quad (6.35)$$

$$\tilde{s}_t = \phi(L)s_t \quad (6.36)$$

onde L corresponde ao operador de lag. Pode-se reescrever a equação (3.12) como

$$\tilde{y}_t = \mu_0 c_t + \mu_1 \tilde{s}_t + \varepsilon_t \quad (6.37)$$

que é um modelo linear com variância σ_y^2 conhecida.

Novas estimativas para o vetor μ podem ser obtidas a partir das premissas a seguir. Sabe-se que a partir de uma a priori da forma Gamma Normal (truncada) para β e σ_y^2 após observar y temos a distribuição posteriori

$$\sigma_y^2 \sim IG(n_1/2, n_1 v_1/2), \quad (6.38)$$

$$\beta \mid \sigma_y^2 \sim N(b_1, \sigma_y^2 B_1) I(\{\text{conditional}\}), \quad (6.39)$$

com

$$B_1 = (B_0^{-1} + X'X)^{-1} \quad (6.40)$$

$$b_1 = B_1(B_0^{-1}b_0 + X'y) \quad (6.41)$$

$$n_1 = n_0 + n \quad (6.42)$$

$$n_1 v_1 = n_0 v_0 + (y - Xb_1)'y + (b_0 - b_1)'B_0^{-1}b_0 \quad (6.43)$$

Passo 4: Gerando β

Albert e Chib (1993) propuseram um método baseado em um algoritmo de aumento de dados para simular valores para os parâmetros de um modelo probit. Dados os valores de s_t e os quatro β gerados pela última iteração do amostrador de Gibbs, pode-se agora gerar os S_t do modelo probit a partir das normais truncadas:

$$S_t \mid (S_t = 0, x_t, \beta) \sim N(x_t' \beta, 1) I_{(-\infty, 0)} \quad (6.44)$$

$$S_t \mid (S_t = 1, x_t, \beta) \sim N(x_t' \beta, 1) I_{[0, \infty)} \quad (6.45)$$

com

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)'$$

$$x_t = (s_{t-1}, d_{t-1}, (1 - s_{t-1}), (1 - s_{t-1})d_{t-1})'$$

onde $I_{(a,b)}$ é variável indicadora utilizada para denotar truncamento.

Com os valores de S_t o modelo probit torna-se um modelo linear com variância conhecida. Novos valores para β são gerados a partir de sua distribuição posteriori.