Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre

Sobre fechos de módulos sobre anéis semiprimos e não-singulares

Tese submetida como requerimento parcial
para obtenção do grau de
doutor no Curso de Pós-Graduação em Matemática

por

Janice Nery

2002

Dedico este trabalho à minha família e em especial aos meus pais. Ao meu pai Nelson, hoje não mais conosco, pelo seu empenho para que eu tivesse o melhor nos meus estudos, e pela sua bondade e serenidade. À minha mãe Alice, pela sua dedicação e sabedoria com que me ensinou tantas coisas ao longo desta vida. Agradeço sobretudo a força positiva que me transmitiu em alguns momentos difíceis e pela forma leve e alegre que passou os tantos momentos em que eu estive ausente.

Também dedico este trabalho a todos aqueles que acreditam na experiência de existir como uma possibilidade de rebeldia.

Agradecimentos

Agradeço de forma especial ao meu orientador, Professor Miguel Ferrero, pela dedicação e paciência ao longo destes anos de trabalho e pela orientação segura, sem a qual eu não teria concluído esta tese. E agradeço sobretudo o seu posicionamento firme sempre que foi preciso, e sua amizade sincera.

Agradeço muito ao professor e amigo José Francisco Porto da Silveira pela amizade, por todos os seus ensinamentos e por todas as instalações feitas no meu computador para que a redação desta tese fosse a melhor possível.

Também agradeço aos professores e amigos Antônio Paques, Eduardo Brietzke e Jaime Rippol pelos seus ensinamentos e incentivo.

Em particular agradeço:

Ao Rogério Steffenon e ao Claus Haetinger, meus ex-alunos, amigos e colegas, pela boa convivência e companheirismo;

Aos colegas Maria Medianeira, Maria Alice, Telmo, Marcus, Beti Búrigo, Wagner, Suzana, Virgínia e Bárbara, pelo apoio, estímulo e amizade;

Às colegas Sílvia Regina Lopes, Luisa Doering e Elizabeth Ferreira da Costa Gomes pela amizade e contribuições neste trabalho. A todos os da Secretaria do Instituto de Matemática e os da Secretaria de Pós-Graduação, e ao Schardong e Jane da Biblioteca da Matemática, pela amizade e dedicação.

Um abraço forte aos meus amigos fora da Matemática, Rose e Valentino, e muito obrigada pela amizade sincera e pelos passeios e devaneios por esta vida afora.

Finalmente, em especial, meus sinceros agradecimentos aos meus primeiros professores de Matemática, que foram o grande incentivo para que eu seguisse esta jornada: Ada Maria de Souza Doering, Antônio Ribeiro, Arno Closs, Carmen Silvia S. Fagundes, Ernesto Bruno Cossi, Maria Isaura Paim, Matilde G. Gus e Roberto Baldino.

A todos e a tantos outros amigos o meu sincero Muito Obrigada.

Abstract

In case R is a right nonsingular ring and Q is its right maximal quotients ring, there is a theorem that gives equivalent conditions for the injective hull of a right ideal of R to be a Q-bimodule ([8]). This theorem is proved using the orthogonality of a family of ideals.

In this thesis we extended the orthogonality of a family of ideals to a family of modules over semiprime and right nonsingular rings. With this notion we extend the result of [8] to centralizing bimodules over semiprime and right nonsingular rings.

Resumo da Tese

Se R é um anel não-singular à direita e Q é o seu anel maximal de quocientes à direita, existe um teorema que estabelece condições equivalentes para que a envoltória injetiva de um ideal à direita de R seja um Q-bimódulo ([8]). Este teorema é provado usando a ortogonalidade de uma família de ideais.

Nesta tese estendemos a ortogonalidade de uma família de ideais para uma família de módulos sobre anéis semiprimos e não-singulares à direita. Com esta noção estendemos o resultado de [8] acima mencionado, para bimódulos centralizantes sobre anéis semiprimos e não-singulares à direita.

Indice

Introdução

Submódulos fechados de bimódulos centralizantes sobre anéis primos e semiprimos têm sido estudados nos últimos anos, como podemos encontrar nas referências [1] e [2]. Em particular, se R é um anel semiprimo e M é um R-bimódulo centralizante existe M^*, a extensão canônica livre de torção de M, que é um Q_σ-bimódulo centralizante, onde Q_σ é o anel de quocientes simétrico de R. E existe uma correspondência biunívoca entre os R-sub-bimódulos fechados à direita de M e os Q_σ-sub-bimódulos fechados à direita de M^*, como foi provado em [2]. Recentemente tal correspondência biunívoca foi estabelecida por Miguel Ferrero em [4], para bimódulos normalizantes sobre anéis semiprimos, e esta generaliza as situações anteriores mencionadas.

Em [8], se R é um anel não-singular à direita e $Q = Q^r_{max}(R)$ é o seu anel maximal de quocientes à direita é provado um teorema que estabelece condições equivalentes para que a envoltória injetiva $E(I_R)$ de um ideal à direita I de R, em Q, seja um Q-bimódulo usando a ortogonalidade de uma família de ideais à direita de R (ver Teorema 3.1.10).

Os resultados desta tese estão relacionados com as questões acima mencionadas e são obtidos usando uma noção de ortogonalidade de uma família de módulos, que aqui desenvolvemos e, que estende a noção de ortogonalidade de uma família de ideais.

Primeiramente R é considerado um anel semiprimo e Q_σ é o seu anel de quocientes simétrico.

Se L é um R-bimódulo livre centralizante, com base em [2], construimos L^*, a extensão canônica livre de torção de L, e estendemos a noção de ortogonalidade de uma família de ideais à direita de R para uma família de submódulos à direita de L.

Se M é um R-bimódulo centralizante, usando as idéias de [2] e a ortogonalidade de módulos, acima mencionada, provamos, de modo distinto ao obtido em [2], o teorema que estabelece uma correspondência biunívoca entre os R-sub-bimódulos fechados de M e os Q_σ-sub-bimódulos fechados de M^*. Também no caso em que M, além de centralizante, é livre de torção como um R-módulo à direita estendemos a noção de ortogonalidade e provamos um resultado similar ao de [8], anteriormente mencionado, estabelecendo condições equivalentes para que o fecho essencial de um submódulo à direita de M em M^*, seja um Q_σ-sub-bimódulo de M^*.

Como uma aplicação, assim como em [8], estudamos uma nova dimensão de módulos, que é uma espécie de dimensão híbrida entre as dimensões uniformes unilateral e bilateral.

Uma questão importante no desenvolvimento dos resultados desta tese é a passagem da essencialidade bilateral para a essencialidade unilateral, que ocorre sem problemas para sub-bimódulos de um módulo centralizante e livre de torção, no caso em que o anel considerado é semiprimo. Outra, é a propriedade do anel de quocientes simétrico, que o define. Tais não se verificam, em geral, se R é um anel não-singular à direita e Q é o seu anel maximal de quocientes à direita.

Suponhamos, agora, que R é um anel não-singular à direita e que $Q = Q^r_{max}(R)$ é o seu anel maximal de quocientes à direita.

Se M é um R-módulo à direita definimos a extensão canônica livre de torção M^* de M, e provamos a sua existência sempre que M é não-singular à direita.

Se L é um R-bimódulo livre centralizante e L^* é a sua extensão canônica livre de torção provamos resultados similares aos de [8] e que antes provamos para módulos centralizantes sobre anéis semiprimos. Como conseqüência obtivemos extensões do resultado de [8], inicialmente citado. Mais precisamente, no caso em que L tem uma base centralizante finita, se N é um submódulo à direita de L, estabelecemos condições equivalentes para que a envoltória injetiva $E(N_R)$ de N, seja um Q-bimódulo. O mesmo resultado obtivemos no caso em que R foi considerado um anel semiprimo e Noetheriano à direita e, em particular, não-singular à direita, e L um R-bimódulo livre centralizante qualquer.

Também estendemos os resultados de [8], que provamos para módulos centralizantes sobre anéis semiprimos, para o caso de módulos centralizantes e não-singulares sobre anéis não-singulares à direita e esquerda com os seus anéis maximais de quocientes à direita e esquerda iguais.

Para finalizar, como uma aplicação, estendemos um Teorema de estrutura obtido em [8]. Provamos que se R é um anel semiprimo, Q_σ é o seu anel de quocientes simétrico, M é um R-bimódulo centralizante e livre de torção como um R-módulo à direita e M^* é a sua extensão canônica livre de torção, então para certos submódulos N de M, o estudo de somas diretas arbitrárias de submódulos de N que são essenciais à direita em N, corresponde, exatamente, ao estudo do fecho essencial à direita de N em M^* como um Q_σ-sub-bimódulo de M^*, que é isomorfo a um Q_σ-sub-bimódulo essencial à direita de um produto direto de Q_σ-bimódulos, com soma direta essencial à direita.

No mesmo contexto, também relacionamos a dimensão híbrida, a dimensão de Goldie e módulos primos com o fecho essencial à direita de um módulo à direita, quando esse fecho é isomorfo a um submódulo de um produto direto de módulos.

CAPITULO 1

Pré-Requisitos

1.1 Noções Gerais

Seja R um anel qualquer.

Se M é um R-módulo, entendemos que M pode ser tanto um R-bimódulo como um R-módulo à direita ou à esquerda. Os submódulos de M serão sempre considerados submódulos da mesma natureza.

Se N é um submódulo de um R-módulo (R-bimódulo) M, escrevemos $N \subseteq M$ ($N \subseteq {}_RM_R$). Se N é um submódulo à direita de um R-bimódulo (R-módulo à direita) M, escrevemos $N \subseteq M_R$. Se N é um submódulo à esquerda de um R-bimódulo (R-módulo à esquerda) M, escrevemos $N \subseteq {}_RM$.

Se nos referirmos a N como um R-módulo à direita (à esquerda), as vezes escreveremos N_R (${}_RN$).

Se I é um ideal bilateral de R, se não houver ambigüidade de interpretação, diremos apenas que I é um ideal de R. Nesse caso, se I é um ideal (ideal à direita, ideal à esquerda) de R, escrevemos $I \trianglelefteq R$, ($I \trianglelefteq R_R$, $I \trianglelefteq {}_RR$).

Segue a mesma convenção para os homomorfismos de módulos.

Lembramos os conceitos de módulos livres e módulos centralizantes:

Um ***R-módulo à direita livre*** é um R-módulo à direita L tal que existe $S \subseteq L$, dito ser uma ***base de elementos de L***, tal que todo $l \in L$ pode ser escrito na forma

$$l = \sum_{s \in S} s r_s,$$

onde os elementos $r_s \in R$ são nulos a menos de um número finito e são univocamente determinados.

Seja M um R-bimódulo. Uma família $X = (x_i)_{i \in \Omega}$ de elementos de M é dita ser um ***sistema de geradores R-centralizantes de M***, se $M = \sum_{i \in \Omega} Rx_i$ e $rx_i = x_i r$, para cada $r \in R$ e cada $i \in \Omega$. Dizemos que M é um ***R-bimódulo centralizante***, se possui um sistema de geradores R-centralizantes.

Um ***R-bimódulo livre centralizante*** é um R-módulo à direita livre com uma base de elementos R-centralizantes.

Segundo a definição dos módulos subgerados desenvolvida em [15], se M e N são dois R-módulos, N é dito ser M-gerado se existem um conjunto de índices Λ e um homomorfismo sobrejetivo $\Phi : M^\Lambda \to N$ de R-módulos. Neste contexto, observemos que um R-bimódulo centralizante M é um R-módulo que é R-gerado como um R-bimódulo e L é um R-módulo à direita livre se, e somente se, L é um R-módulo à direita e existem um conjunto de índices Λ e um isomorfismo de R-módulos à direita $\Phi : R^\Lambda \to L$. Se para cada $i \in \Lambda$, $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\Lambda}$, onde $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$, se $s_i = \Phi(e_i)$ para cada $i \in \Lambda$, temos que $S = (s_i)_{i\in\Lambda}$ é uma base de L.

Da mesma forma, L é um R-módulo livre centralizante se, e somente se, L é um R-bimódulo R-gerado e $\Phi : R^\Lambda \to L$, como acima, é um isomorfismo de R-bimódulos. No caso, se $s_i = \Phi(e_i)$ para cada $i \in \Lambda$, temos que $S = (s_i)_{i\in\Lambda}$ é uma base de elementos R-centralizantes de L.

Em [2] encontramos os seguintes exemplos: se R é um anel qualquer e se G é um grupo ou até um semigrupo, o anel de grupo ou semigrupo RG é um exemplo de R-bimódulo centralizante. Em particular assim o é um anel de polinômios com coeficientes em R, em qualquer conjunto de indeterminadas, comutativas ou não. Também um anel de matrizes sobre R e um produto tensorial $S = R \otimes_L K$, onde L é um corpo e R e K são L-álgebras. Estes são todos, exemplos de extensões centralizantes de um anel R e são exemplos de bimódulos centralizantes sobre R. Por outro lado, novamente como em [2], cada módulo M sobre um anel comutativo R é um bimódulo centralizante e se S é uma álgebra sobre R, então $S \otimes_R M$ é um bimódulo centralizante sobre S. Finalmente, um anel de matrizes infinitas sobre R tal que cada matriz tem apenas um número finito de entradas não-nulas é também um bimódulo centralizante sobre R.

1.2 Extensões essenciais e envoltórias injetivas

Os resultados que enunciaremos não serão provados aqui e podem ser encontrados em [6] e em [13].

No que segue R é um anel qualquer.

1.2.1 Definição (a) *Sejam $A \subseteq B$ dois R-módulos. Dizemos que A é um **submódulo essencial de B** se para cada submódulo não-nulo C de B, se verifica que $C \cap A \neq 0$. Escrevemos $A \subseteq_e B$.*

(b) *Mais geralmente, se A é um R-módulo, definimos uma **extensão essencial***

de A *como sendo qualquer monomorfismo de R-módulos $f : A \to B$, tal que $f(A) \subseteq_e B$. Neste caso dizemos que f é um* ***monomorfismo essencial****.*

1.2.2 Proposição *(a) Se $A \subseteq B \subseteq C$ são R-módulos, então $A \subseteq_e C$ se, e somente se, $A \subseteq_e B$ e $B \subseteq_e C$.*

(b) Se A, A', B, B' e C são R-módulos tais que $A \subseteq_e B \subseteq C$ e $A' \subseteq_e B' \subseteq C$, então $A \cap A' \subseteq_e B \cap B'$.

(c) Se $f : B \to C$ é um homomorfismo de R-módulos e $A \subseteq_e C$, então $f^{-1}(A) \subseteq_e B$.

(d) Se $(A_\alpha)_\alpha$ e $(B_\alpha)_\alpha$ são duas famílias de R-módulos tais que $(A_\alpha)_\alpha$ é uma família independente de submódulos de C e $A_\alpha \subseteq_e B_\alpha \subseteq C$ para cada α, então $(B_\alpha)_\alpha$ é uma família independente de submódulos de C e $\sum \oplus A_\alpha \subseteq_e \sum \oplus B_\alpha$.

1.2.3 Definição *Sejam $A \subseteq B$ dois R-módulos à direita. Dizemos que A é* ***denso à direita em B****, se para cada $x, y \in B$ tal que $x \neq 0$, existe $r \in R$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in A$. Escrevemos $A \subseteq_d B$.*

1.2.4 Proposição *Sejam A e B dois R-módulos à direita. Se $A \subseteq_d B$, então $A \subseteq_e B$.*

Observemos que a recíproca da Proposição 1.2.4, em geral, não é verdadeira. Por exemplo, se tomamos $A = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, que são dois $\mathbb{Z}$-módulos à direita, é fácil verificar que $A \subseteq_e B$ mas A não é denso à direita em B.

1.2.5 Definição *(a) Um R-módulo I é* ***injetivo****, se para qualquer monomorfismo de R-módulos $f : A \to B$ e cada homomorfismo de R-módulos $g : A \to I$, existe um homomorfismo de R-módulos $h : B \to I$ tal que $h \circ f = g$.*

(b) Dizemos que R é um ***anel auto-injetivo*** *se R_R é injetivo.*

1.2.6 Proposição *Sejam A e E dois R-módulos e $f : A \to E$ um monomorfismo de R-módulos onde E é injetivo. Se B é um R-módulo e $A \subseteq_e B$, então f se estende a um monomorfismo $\overline{f} : B \to E$.*

A Proposição que enunciaremos a seguir é conhecida como o ***Critério de Baer***.

1.2.7 Proposição *Um R-módulo à direita I é injetivo se, e somente se, para cada ideal à direita J de R, se verifica que cada homomorfismo $f : J \to I$ se estende a um homomorfismo $\overline{f} : R \to I$.*

A Proposição 1.2.6 mostra que, se A e E são dois R-módulos onde E é injetivo e $f : A \to E$ é um monomorfismo de R-módulos, então o módulo injetivo E contém cópias isomorfas de todas as extensões essenciais de A, o que sugere que olhemos, em E, para a extensão essencial maximal de A ou para o supremo das extensões essenciais de A.

1.2.8 Proposição *Seja E um R-módulo. Então E é injetivo se, e somente se, E não tem extensão essencial própria.*

1.2.9 Teorema *Seja A um R-módulo. Então existe um R-módulo E contendo A tal que:*

(i) *E é extensão essencial maximal de A no sentido que $A \subseteq_e E$ e sempre que $A \subseteq_e B$, a inclusão $i : A \to E$ se estende a um monomorfismo $f : B \to E$.*

(ii) *E é extensão injetiva minimal de A no sentido que E é injetivo e cada monomorfismo $f : A \to E'$ onde E' é injetivo, se estende a um monomorfismo $\overline{f} : E \to E'$.*

1.2.10 Definição *Seja A um R-módulo. Qualquer R-módulo E que satisfaz a condição (ii) do Teorema 1.2.9, se chama uma **envoltória injetiva de A**.*

Dado um R-módulo A, duas envoltórias injetivas E e E' de A podem ser distintas como conjuntos, mas, como veremos na proposição seguinte, serão sempre isomorfas.

Escrevemos $E(A)$ para representar qualquer envoltória injetiva de A e $B = E(A)$ quando queremos nos referir a uma determinada envoltória injetiva B de A.

1.2.11 Proposição *Seja A um R-módulo. Então:*

(i) *Se E é um R-módulo injetivo e $E \supseteq A$, então E é uma envoltória injetiva de A se, e somente se, $A \subseteq_e E$.*

(ii) *Se F é um R-módulo injetivo e $F \supseteq A$, então F contém ao menos uma envoltória injetiva de A.*

(iii) *Se E e E' são R-módulos que são envoltórias injetivas de A, então a inclusão $i : A \to E$ se estende a um isomorfismo $f : E' \to E$.*

1.3 Anéis semiprimos

1.3.1 Definição *Dizemos que um anel R é um* ***anel semiprimo****, se para cada ideal I de R tal que $I^2 = 0$, se verifica que $I = 0$.*

A seguir revizaremos as noções de ideal denso à direita e ideal essencial de um anel R qualquer e veremos que no caso em que R é um anel semiprimo, esses conceitos se equivalem.

Pelas definições 1.2.1 e 1.2.3:

Dizemos que um ideal (ideal à direita) I de R é ***essencial em R***, se I (I_R) é essencial em R como um submódulo de R (R_R).

Dizemos que um ideal I de R é ***essencial à direita em R***, se I_R é essencial em R como um submódulo de R_R. Denotamos: $\varepsilon = \{I \trianglelefteq R \mid I \trianglelefteq_e R_R\}$.

Dizemos que um ideal (ideal à direita) I de R é ***denso à direita em R***, se I_R é denso à direita em R como um submódulo de R_R. Escrevemos $I \trianglelefteq_d R$ $(I \trianglelefteq_d R_R)$.

Os resultados seguintes são clássicos e não serão provados aqui. Citamos [6] como uma referência.

1.3.2 Proposição *Sejam R um anel semiprimo e $I \trianglelefteq R$.*

(a) *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *I é um ideal denso à direita em R.*

(ii) *I é um ideal essencial de R.*

(iii) *I é um ideal essencial à direita de R.*

(b) $Ann^r(I) = \{a \in R \mid Ia = 0\} = \{a \in R \mid aI = 0\} = Ann^l(I)$ *e denotamos tais anuladores por* $Ann(I)$*. Além disso,* I *é um ideal essencial de* R *se, e somente se,* $Ann(I) = 0$*.*

(c) $I + Ann(I) = I \oplus Ann(I)$ *é um ideal essencial de* R*.*

1.3.3 Proposição *Sejam* R *um anel semiprimo e* $I \trianglelefteq R$*. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $J = Ann(I)$*.*

(ii) J *é maximal, como um ideal de* R*, tal que* $I \cap J = 0$*.*

(iii) J *é um complemento essencial de* I *como um ideal à direita de* R*, isto é,* $I \oplus J \subseteq_e R_R$*.*

1.3.4 Proposição *Seja* R *um anel semiprimo. Se* I *é um ideal anulador de* R*, então* $I = Ann(Ann(I))$*.*

1.4 Submódulos singulares

Se R é um anel qualquer, denotamos por $\xi(R)$ o seguinte conjunto:

$$\xi(R) = \{I \trianglelefteq R_R \mid I \trianglelefteq_e R_R\}.$$

Facilmente podemos provar que $\xi(R)$, como um subconjunto do conjunto dos ideais à direita de R, é um filtro, isto é, $\emptyset \notin \xi(R)$, $R \in \xi(R)$, se $I, J \trianglelefteq R_R$, $I \subseteq J$ e $I \in \xi(R)$, então $J \in \xi(R)$ e, se $I, J \in \xi(R)$, então $I \cap J \in \xi(R)$. Também, se $I \in \xi(R)$ e $r \in R$, então $r^{-1}I := \{x \in R \mid rx \in I\} \in \xi(R)$.

Quando não houver ambigüidade à respeito do anel R considerado escreveremos apenas ξ, em vez de $\xi(R)$.

1.4.1 Definição *Sejam* R *um anel e* A *um* R*-módulo à direita. O submódulo à direita*

$$Z_R(A_R) = \{x \in A \mid xI = 0 \text{ para algum } I \in \xi\}$$

de A*, se chama um* ***submódulo singular à direita de A****.*

É fácil ver que $Z_R(A_R) = \{x \in A \mid Ann^r(x) \in \xi\}$.

Se A é um R-módulo à direita e não houver ambigüidade à respeito de A ou de R, escrevemos apenas $Z(A_R)$ ou $Z(A)$, em vez de $Z_R(A_R)$. Para módulos à esquerda temos as mesmas definições e convenções.

Temos que $Z(R_R)$ é um ideal de R, chamado o ***ideal singular à direita de R***, e o denotamos por $Z_r(R)$. De forma análoga definimos o ideal singular à esquerda $Z_l(R)$ de R, o qual, em geral, é tal que $Z_r(R) \neq Z_l(R)$.

1.4.2 Definição *Sejam R um anel e A um R-módulo. Dizemos que A é um* ***módulo singular*** *se $Z(A) = A$ e que A é um* ***módulo não-singular*** *se $Z(A) = 0$.*

Dizemos que R é um ***anel não-singular à direita (à esquerda)*** *se $Z_r(R) = 0$ ($Z_l(R) = 0$).*

As provas dos seguintes resultados podem ser encontradas em 1.20, 1.21, 1.22 e 1.23 de [6].

1.4.3 Proposição *Um R-módulo B é não-singular se, e somente se, para cada R-módulo singular A, se verifica que todo homomorfismo de R-módulos $f : A \to B$ é nulo.*

1.4.4 Proposição *Sejam B um R-módulo não-singular e A um submódulo de B. Então B/A é singular se, e somente se, $A \subseteq_e B$.*

1.4.5 Proposição *(i) A classe de todos os R-módulos não-singulares é fechada quanto a submódulos, produtos diretos e extensões essenciais.*

(ii) A classe de todos os R-módulos singulares é fechada quanto a submódulos, módulo fator e somas diretas.

No que segue R é um anel não-singular à direita. Enunciaremos algumas propriedades e, se A é um R-módulo à direita, definiremos o R-módulo não-singular à direita S^0A que usaremos na seção seguinte. Tais resultados são clássicos e podem ser encontrados em [6].

1.4.6 Proposição *(i) $Z(A/Z(A)) = 0$, para todo R-módulo à direita A.*

(ii) *Um R-módulo A é singular se, e somente se, para todo R-módulo não-singular B, se verifica que todo homomorfismo de R-módulos $f : A \to B$ é nulo.*

(iii) *A classe de todos os R módulos singulares à direita é fechada quanto a extensões essenciais.*

(iv) $\xi = \{I \trianglelefteq R_R \mid I \trianglelefteq_e R_R\}$ *é fechado quanto a produtos finitos.*

1.4.7 Definição *Seja A um R-módulo à direita. Definimos $S^0A := E(A/Z(A))$, como sendo uma particular envoltória injetiva de $(A/Z(A))_R$.*

1.4.8 Observação Pelas proposições 1.4.5 e 1.4.6 temos que S^0A é um R-módulo à direita, não-singular à direita e injetivo.

Pelo fato que R é um anel não-singular à direita podemos considerar que $R \subseteq S^0R$. Pelo fato que S^0R é um R-módulo à direita temos produtos em S^0R da forma xr, onde $x \in S^0R$ e $r \in R$. Se existe uma estrutura de anel, $(S^0R, +, .)$, onde $(S^0R, +)$ é exatamente o grupo aditivo abeliano herdado da estrutura de R-módulo à direita de S^0R e a operação de multiplicação em S^0R é uma extensão da operação de multiplicação definida acima, de S^0R como um R-módulo à direita, dizemos que esta estrutura de anel definida em S^0R é compatível com a estrutura de R-módulo à direita de S^0R. De forma semelhante, cada estrutura de S^0R-módulo sobre S^0A onde A é um R-módulo, a qual usa a adição do R-módulo A e estende a sua multiplicação é dita ser uma estrutura compatível com a estrututra de R-módulo definida em A.

1.4.9 Teorema *(a)* *S^0R tem uma única estrutura de anel compatível com a sua estrutura de R-módulo à direita. Em particular, R é um subanel de S^0R tal que $R \subseteq_e (S^0R)_R$ e S^0R também é um anel não-singular à direita.*

(b) *S^0A tem uma única estrutura de S^0R-módulo à direita compatível com a sua estrutura de R-módulo à direita, para cada R-módulo à direita A.*

1.4.10 Proposição *Seja $Q = S^0R$. Então:*

(a) $\xi(Q) = \{I \trianglelefteq Q_Q \mid I \cap R \in \xi(R)\}$ *e* $\xi(R) = \{J \trianglelefteq R_R \mid JQ \in \xi(Q)\}$.

(b) $Z_Q(A) = Z_r(A)$ *para todo A que é um Q-módulo à direita.*

(c) $Z_r(Q) = 0$.

1.4.11 Proposição *Sejam R e Q dois anéis quaiquer tais que $R_R \trianglelefteq_e Q_R$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Q é um anel von Neumann regular (v.N.r.), isto é, para cada $x \in Q$, existe $y \in Q$ tal que $xyx = x$ e auto-injetivo.

(ii) $Z_r(R) = 0$ e Q_Q é injetivo.

(iii) $Z_r(R) = 0$ e $Q = S^0(R)$.

Dos resultados anteriores segue que

1.4.12 Corolário *Seja R um anel não-singular à direita. Então R é um subanel do anel $Q = S^0R$ e, em particular, $R_R \trianglelefteq_e Q_R$ e Q é um anel não-singular à direita, auto-injetivo, v.N.r. e tal que Q_R é injetivo.*

1.5 Anéis de quocientes

Nesta seção vamos fazer uma revisão à respeito de anéis de quocientes e citamos [6], [9], [10], [12] e [14], como referências. Esses anéis foram introduzidos em [10], como uma ferramenta para estudar anéis satisfazendo uma identidade polinomial, no caso unilateral e, em [12], para o caso simétrico. Esta teoria pode ser vista como uma generalização da localização, na teoria dos anéis comutativos.

1.5.1 Definição *Seja R um anel qualquer. Um* ***anel de quocientes à direita de R*** *é um anel Q que contém R como um subanel, tal que $R \subseteq_d Q_R$.*

Lembramos da Seção 1.2 que, se R é um anel qualquer e $A \subseteq B$ são dois R-módulos à direita, então $A \subseteq_d B$ implica que $A \subseteq_e B$ mas a recíproca, em geral, não é verdadeira.

1.5.2 Lema *Sejam R um anel qualquer e $A \subseteq B$ dois R-módulos à direita. Se B é não-singular à direita e $A \subseteq_e B$, então $A \subseteq_d B$.*

1.5.3 Proposição *Seja R um subanel de um anel Q. Se R é não-singular à direita, então Q é um anel de quocientes à direita de R se, e somente se, $R \subseteq_e Q_R$.*

1.5.4 Proposição *Sejam R um subanel de um anel T, que é um subanel de um anel Q.*

(a) Se $R \subseteq_d T_R$, então $T \subseteq_d Q_R$ se, e somente se, $T \subseteq_d Q_T$.

(b) Q é um anel de quocientes à direita de R se, e somente se, Q é um anel de quocientes à direita de T e T é um anel de quocientes à direita de R.

1.5.5 Definição *Seja R um anel qualquer. Um* ***anel maximal de quocientes à direita de R*** *é um anel de quocientes à direita Q tal que, sempre que T é um anel de quocientes à direita de R, a inclusão $i : R \to Q$ se estende a um monomorfismo $f : T \to Q$.*

No que segue veremos que se R é um anel qualquer, então R tem um anel maximal de quocientes à direita e que este é único a menos de um isomorfismo de anéis. Os resultados que enunciaremos são clássicos e não serão provados aqui.

Seja $\mathcal{D} = \{H \trianglelefteq R_R \mid H \trianglelefteq_d R_R\}$ e observemos que $\mathcal{D}$, como um subconjunto do conjunto dos ideais à direita de R, é um filtro multiplicativamente fechado. Se $H \in \mathcal{D}$ denotemos por $Hom_R(H, R_R)$, o conjunto de todos os homomorfismos de R-módulos à direita de H em R. É fácil verificar que se $H \in \mathcal{D}$, então $H \neq 0$ e que se $f \in Hom_R(H, R_R)$ e $J \in \mathcal{D}$, então $f^{-1}(J) \in \mathcal{D}$.

Seja ∂ o conjunto de todos os pares (H, f) onde $H \in \mathcal{D}$ e $f \in Hom_R(H, R_R)$. Em ∂ definimos a seguinte relação $\sim$:

se $(H, f), (K, g) \in \partial$ dizemos que $(H, f) \sim (K, g)$, se existe $J \in \mathcal{D}$ tal que $J \subseteq H \cap K$ e $f \restriction J = g \restriction J$.

É fácil verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência em ∂ e que pode, equivalentemente, ser definida assim:

$(H, f) \sim (K, g)$ se, e somente se, $f \restriction H \cap K = g \restriction H \cap K$.

Denotamos por $Q_{\mathcal{D}}$, o conjunto quociente $\partial/\sim$ e por $[H, f]$, a classe de equivalência de (H, f), onde $(H, f) \in \partial$.

É fácil definir em $Q_{\mathcal{D}}$ uma estrutura de anel de modo que R seja um subanel de $Q_{\mathcal{D}}$.

Definimos a soma e o produto em $Q_{\mathcal{D}}$ de modo que se $[H, f]$ e $[K, g]$ são dois elementos de $Q_{\mathcal{D}}$, então:

(*i*) $[H,f]+[K,g]:=[H\cap K, f+g]$, onde $f+g: H\cap K \to R$ é tal que a cada $a\in H\cap K$ associa $f(a)+g(a)$.

(*ii*) $[H,f].[K,g]:=[g^{-1}(H), f\circ g]$, onde $f\circ g: g^{-1}(H)\to R$ é tal que a cada $a\in g^{-1}(H)$ associa $f\circ g(a)=f(g(a))$ (bem definida já que $g^{-1}(H)\in\mathcal{D}$).

É fácil verificar que essas operações estão bem definidas e provar o seguinte:

1.5.6 Teorema $(Q_{\mathcal{D}},+,.)$ *é um anel com unidade que tem* R *como um subanel, no sentido que* R *é isomorfo a um subanel de* $Q_{\mathcal{D}}$.

Lembramos que para cada $a\in R$, se $a_l: R\to R$ é a multiplicação à esquerda por a e consideramos $[R,a_l]$, que é um elemento de $Q_{\mathcal{D}}$, definimos o homomorfismo de anéis $\Phi: R\to Q_{\mathcal{D}}$, tal que $\Phi(a)=[R,a_l]$ para cada $a\in R$. Temos que Φ é um monomorfismo de anéis e R é isomorfo a $\Phi(R)$.

1.5.7 Definição *Um* ***anel de quocientes à direita próprio de R*** *é um anel de quocientes à direita* Q *de* R *tal que* R *é um subanel próprio de* Q.

É claro que se $q=[H,f]\in Q_{\mathcal{D}}$, então $qr\in R$, para cada $r\in H$. Além disso, se $q_1,\ldots,q_n\in Q_{\mathcal{D}}$, então existe $H\in\mathcal{D}$ tal que $q_iH\subseteq R$, para cada $i=1,\ldots,n$.

É também evidente que se $q\in Q_{\mathcal{D}}$ e $H\in\mathcal{D}$, então $qH=0$ implica $q=0$.

1.5.8 Teorema (*a*) *Um anel de quocientes à direita* T *de* R *é um anel maximal de quocientes à direita de* R *se, e somente se,* T *não tem um anel de quocientes à direita próprio.*

(*b*) *Se* Q *e* $Q^{'}$ *são dois anéis maximais de quocientes à direita de* R, *então a identidade* $i: R\to R$ *se estende a um isomorfismo de* Q *sobre* $Q^{'}$.

1.5.9 Teorema $Q_{\mathcal{D}}$ *é um anel maximal de quocientes à direita de* R *e é único, a menos de um isomorfismo de anéis.*

Pelo Teorema 1.5.8 nos referiremos a $Q_{\mathcal{D}}$ como o anel maximal de quocientes à direita de R e, muitas vezes, o denotaremos por $Q^r_{max}(R)$.

De forma semelhante podemos definir e provar a existência do anel maximal de quocientes à esquerda de R, $Q^l_{max}(R)$. Este tem as propriedades análogas às de $Q^r_{max}(R)$ e também é único a menos de um isomorfismo de anéis. Podemos provar que, em geral, $Q^r_{max}(R) \neq Q^l_{max}(R)$.

A seguir enunciaremos algumas propriedades que usaremos nos capítulos seguintes desta tese. Lembramos que um anel R é dito ser um ***anel primo***, se para cada $I, J \trianglelefteq R$ tais que $IJ = 0$, se verifica que $I = 0$ ou $J = 0$.

1.5.10 Proposição *Se R é um anel primo (semiprimo), então todo anel de quocientes à direita de R também é um anel primo (semiprimo).*

1.5.11 Definição (a) $V_{Q_\mathcal{D}}(R) = \{q \in Q_\mathcal{D} \mid qr = rq, \text{ para cada } r \in R\}$ *é denominado o* ***centralizador de R*** em $Q_\mathcal{D}$.

(b) $C = \{q \in Q_\mathcal{D} \mid qq' = q'q, \text{ para cada } q' \in Q_\mathcal{D}\}$ *é denominado o* ***centro*** *de* $Q_\mathcal{D}$.

Temos que os elementos de $Q_\mathcal{D}$ são obtidos de R-homomorfismos à direita definidos em elementos $H \in \mathcal{D}$. Agora faremos uma descrição dos elementos de C como sendo, precisamente, os elementos de $Q_\mathcal{D}$ que são obtidos de homomorfismos de R-bimódulos, definidos em ideais de R que pertencem a $\mathcal{D}$.

1.5.12 Proposição *Seja $q = [H, f] \in Q_\mathcal{D}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $q \in C$.

(ii) *Existem um ideal K de R tal que $K \in \mathcal{D}$ e $H \subseteq K$ e $f^* : K \to R$ um homomorfismo de R-bimódulos, tal que f^*, quando restrita a H, é um homomorfismo de R-módulos à direita que coincide com f.*

(iii) $q \in V_{Q_\mathcal{D}}(R)$.

Além disso, se uma das condições acima se verificar, então f^*, como em (ii), é definida por $f^*(a) = qa$, para cada $a \in K$.

1.5.13 Proposição (a) *Se R é um anel primo, então C é um corpo.*

(b) *Se R é um anel semiprimo, então C é um anel v.N.r..*

1.5.14 Observação Seja R um anel semiprimo.

Um exemplo de anel de quocientes à direita de R é o ***Anel de Martindale***, definido por $Q_{MART} = \{q = [H, f] \in Q_{\mathcal{D}} \mid H \trianglelefteq R \text{ e } H \trianglelefteq_d R_R\}$. Lembramos da Seção 1.3 que $\varepsilon = \{H \trianglelefteq R \mid H \trianglelefteq_e R_R\}$ e, então, pela Proposição 1.3.2, temos que $Q_{MART} = \{q \in Q_{\mathcal{D}} \mid \exists H \in \varepsilon \text{ tal que } qH \subseteq R\}$. Denotamos $Q_{MART} = Q_\varepsilon$ que também será chamado de anel de quocientes à direita de R, com respeito à ε. Da Proposição 1.5.12 temos que o centro de Q_ε coincide com o centro C de $Q_{\mathcal{D}}$.

Podemos provar que $Q_\sigma := \{q \in Q_\varepsilon \mid \exists H \in \varepsilon \text{ tal que } Hq \subseteq R\}$ é um subanel de Q_ε que contém R como um subanel. Q_σ é chamado de ***anel de quocientes simétrico de R***.

A construção de Q_ε pode ser feita de maneira semelhante à de $Q_{\mathcal{D}}$, independentemente.

No que segue R é um anel semiprimo. Vamos caracterizar os elementos idempotentes de C, o centro de Q_ε. A prova de tal resultado pode ser encontrada em ([3], Section 1).

1.5.15 Proposição *Um elemento $c \in C$ é idempotente se, e somente se, existem um ideal não-nulo H de R e um homomorfismo de R-bimódulos $\alpha : H \oplus Ann(H) \to R$ que é a projeção sobre H, tais que $c = c_H := [H \oplus Ann(H), \alpha]$. Ademais, $c = c_H = 1$ se, e somente se, $H \in \varepsilon$.*

1.5.16 Observação Seja R um anel não-singular à direita.

Se $\xi = \{H \trianglelefteq R_R \mid H \trianglelefteq_e R_R\}$, pelo Lema 1.5.2 temos que $\xi = \mathcal{D}$ e denotamos $Q^r_{max}(R) = Q_\xi$ que também será chamado de anel de quocientes de R, com respeito a ξ.

O teorema que agora vamos enunciar segue como uma conseqüência dos resultados anteriores.

1.5.17 Teorema *Se R é um anel não-singular à direita, então Q_ξ é um anel não-singular à direita, v.N.r, auto-injetivo e tal que $(Q_\xi)_R$ é injetivo.*

CAPITULO 2

Submódulos fechados

O objetivo deste capítulo é estudar os submódulos fechados de um módulo centralizante sobre um anel semiprimo.

Sejam R um anel semiprimo e Q_σ o seu anel de quocientes simétrico. Em [2] Miguel Ferrero provou que se M é um R-bimódulo centralizante, então existe a extensão canônica livre de torção de M a um Q_σ-bimódulo centralizante, M^*. Também provou que existe uma correspondência biunívoca entre os R-submódulos fechados à direita de M e os Q_σ-submódulos fechados à direita de M^*, que é o principal resultado de [2], e que vamos chamar de Teorema da correspondência biunívoca.

Vamos definir a noção de ortogonalidade de uma família de submódulos à direita de um R-bimódulo livre centralizante, que estende a ortogonalidade de uma família de ideais à direita de R e, com esta noção, provar, de modo distinto, o Teorema da correspondência biunívoca. Estes resultados serão utilizados no capítulo seguinte.

Através deste capítulo R é um anel semiprimo e usaremos as mesmas notações especificadas no Capítulo 1, para ε e Q_σ. Lembramos que submódulo de um bimódulo significa sub-bimódulo deste bimódulo.

2.1 Resultados básicos

Sejam M um R-bimódulo e $N \subseteq P$ dois R-submódulos de M. Observemos que $[N]_P := \{x \in P \mid \exists H \in \varepsilon \text{ tal que } xH \subseteq N\}$ é um submódulo de M tal que $N \subseteq [N]_P \subseteq P$.

2.1.1 Definição *Sejam M um R-bimódulo e $N \subseteq P$ dois submódulos de M.*

(a) *Definimos o **fecho à direita de N em P**, por*

$$[N]_P := \{x \in P \mid \exists H \in \varepsilon \text{ tal que } xH \subseteq N\}.$$

(b) *Dizemos que **N é um submódulo fechado à direita de P**, se $[N]_P = N$.*

(c) *Dizemos que* ***N é um submódulo denso à direita de P****, se* $[N]_P = P$.

(d) *Os elementos de* $[0]_M$ *são chamados de* ***elementos de torção de M****. Dizemos que* ***M é livre de torção como um R-módulo à direita****, se* $[0]_M = 0$.

(e) *Se* P' *é um R-módulo à direita, dizemos que é* ***livre de torção****, se* $x \in P'$ *e* $H \in \varepsilon$ *são tais que* $xH = 0$*, então* $x = 0$.

Facilmente podemos verificar os seguintes exemplos: se $\mathbb{Z}$ é o domínio dos inteiros e $\mathbb{Q}$ é o corpo dos racionais, temos que $\mathbb{Z}$ é um anel semiprimo, é um $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathbb{Q}$ e é tal que $[\mathbb{Z}]_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ e $[0]_{\mathbb{Q}} = 0$. Se $R = M_2(\mathbb{Z})$ é o anel das matrizes de ordem dois sobre o domínio dos inteiros e consideramos o ideal bilateral $I = \begin{pmatrix} n\mathbb{Z} & n\mathbb{Z} \\ n\mathbb{Z} & n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ de R, onde n é um número inteiro qualquer, como R é um anel semisimples, em particular temos que R é um anel semiprimo e $[I]_R = I$, de modo que I é um ideal fechado à direita de R.

Notemos que esta definição de densidade em 2.1.1, em geral, não é a mesma que aquela dada na Definição 1.2.3 do Capítulo 1, como podemos ver no exemplo que segue. Adiante veremos que estão relacionadas.

2.1.2 Exemplo O seguinte exemplo mostra que, caso M não seja livre de torção como um R-módulo à direita, o fato de termos $N \subseteq P \subseteq M$ e N ser denso à direita em P não implica que, para $m_1, m_2 \in P$, existe $r \in R$ tal que $0 \neq m_1 r$ e $m_2 r \in N$, embora se tenha que N é essencial à direita em P. De fato, tomemos o anel $R = \mathbb{Z}$ que é semiprimo. Consideremos os R-bimódulos $P = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $N = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, e notemos que P não é livre de torção. Temos que N é denso à direita em P e tomando $0 \neq p_1 = \overline{2} \in P$ e $p_2 = \overline{1} \in P$, temos que não existe $r \in R$ tal que $p_1 r \neq 0$ e $p_2 r \in N$.

Lembramos que se P é um R-bimódulo qualquer, um submódulo (respectivamente à direita, à esquerda) N de P é dito ser um complemento em P, se existe um submódulo (respectivamente à direita, à esquerda) T de P, tal que N é maximal com respeito à condição $N \cap T = 0$.

O seguinte resultado foi provado em ([3], Theorem 2.1).

2.1.3 Teorema *Sejam* M *um* R*-bimódulo centralizante e* N *um submódulo de* M *tais que* $N \supseteq [0]_M$*. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) N é um submódulo fechado à direita de M.

(ii) Se P é um submódulo à direita de M tal que $P \supset N$, então existe $0 \neq x \in P$ tal que $RxR \cap N = 0$.

(iii) N é um complemento no reticulado dos submódulos à direita de M.

A seguir enunciaremos um resultado importante provado por Miguel Ferrero em [2] e que usaremos no que segue.

2.1.4 Proposição *Sejam $N \subseteq P$ dois submódulos de um bimódulo centralizante sobre um anel semiprimo. Então $[N]_P = \{x \in P \,|\, \exists H \in \varepsilon \, \text{tal que} Hx \subseteq N\}$. Além disso, $[N]_P$ é um submódulo fechado à direita de P.*

Pela Proposição 2.1.4, naquelas condições, diremos que $[N]_P$ é o fecho de N em P em vez de dizer que é o fecho à direita de N em P. Da mesma forma, se um submódulo de P é fechado à direita em P, diremos que é apenas fechado em P.

Vamos provar agora uma conseqüência do Teorema 2.1.3.

2.1.5 Corolário *Sejam M um R-bimódulo centralizante livre de torção como um R-módulo à direita e $N \subseteq P \subseteq P'$ submódulos de M, tais que $N \subseteq_e P_R$. Então $[N]_{P'} = [P]_{P'}$.*

Prova: É imediato que $[N]_{P'} \subseteq [P]_{P'}$ e suponhamos que $[N]_{P'} \subset [P]_{P'}$. Então temos que $[[N]_{P'}]_M \subset [[P]_{P'}]_M$. Pelo Teorema 2.1.3 e pela Proposição 2.1.4, existe $0 \neq x \in [[P]_{P'}]_M$ tal que $RxR \cap [[N]_{P'}]_M = 0$, o que é uma contradição, já que sendo M livre de torção como um R-módulo à direita, $N \subseteq_e P_R$ implica $[[N]_{P'}]_M \subseteq_e ([[P]_{P'}]_M)_R$. $\diamondsuit$

Relacionamos agora a densidade, a essencialidade e a noção de densidade da Definição 1.2.3, do Capítulo 1.

2.1.6 Lema *Sejam M um R-bimódulo livre de torção como um R-módulo à direita e $N \subseteq P$, dois submódulos de M. Se N é um submódulo denso à direita de P, então para cada $m_1, m_2 \in P$ tal que $m_1 \neq 0$, existe $r \in R$ tal que $m_1 r \neq 0$ e $m_2 r \in N$.*

Prova: Sejam $m_1, m_2 \in P$ tal que $m_1 \neq 0$. Sejam $H, K \in \varepsilon$ tais que $m_1 H \subseteq N$ e $m_2 K \subseteq N$. Temos que $m_1(H \cap K) \neq 0$, uma vez que $H \cap K \in \varepsilon$, $0 \neq m_1 \in P$ e $[0]_M = 0$. Então existe $0 \neq r \in H \cap K$ tal que $m_1 r \neq 0$ e $m_2 r \in m_2(H \cap K) \subseteq N$, o que completa a prova. $\diamondsuit$

2.1.7 Proposição *Sejam M e $N \subseteq P$ como no Lema 2.1.6. Se N é denso à direita em P, então N é essencial à direita em P.*

Prova: Seja $0 \neq x \in P$. Segue pelo Lema 2.1.6 que existe $r \in R$ tal que $xr \neq 0$ e $xr \in N$. Logo $0 \neq xr \in xR \cap N$. $\diamondsuit$

Em particular, se I é um ideal de R, pelo Lema 2.1.6, as condições (i) e (ii) abaixo são equivalentes:

(i) $[I]_R = R$

(ii) Para cada $a_1, a_2 \in R$ onde $a_1 \neq 0$, existe $r \in R$ tal que $a_1 r \neq 0$ e $a_2 r \in I$.

Segue daí que se I é um ideal de R, então I é um ideal denso à direita em R se, e somente se, I é um ideal essencial à direita em R.

O exemplo dado em 2.1.2 mostra que, caso M não seja livre de torção como um R-módulo à direita, o fato de termos $N \subseteq P \subseteq M$ e N ser denso à direita em P, não implica que N é denso à direita em P segundo a Definição 1.2.3 do Capítulo 1, embora se tenha que N é essencial à direita em P.

O seguinte exemplo mostra que, caso M não seja livre de torção como um R-módulo à direita, o fato de $N \subseteq M$ ser denso à direita em M não implica que N seja essencial à direita em M. De fato, tomemos o anel semiprimo $R = \mathbb{Z}$ e os R-módulos $M = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ e $N = 4\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Temos que N é denso à direita em M mas não é essencial à direita em M já que $0 \neq \overline{3} \in M$ é tal que $\overline{3}\mathbb{Z} \cap N = \{\overline{0}, \overline{3}\} \cap N = (\overline{0})$.

No caso em que R é um anel semiprimo temos que R é livre de torção como um R-módulo à direita e, se I é um ideal de R, temos que I é essencial à direita em R se, e somente se, I é essencial em R. A seguir, como uma consequência do Teorema 2.1.3, segue uma generalização deste resultado, importante para o que segue.

2.1.8 Corolário *Seja M um R-bimódulo centralizante tal que M é livre de torção como um R-módulo à direita. Sejam $N \subseteq P$ dois submódulos de M. Então as seguintes condicões são equivalentes:*

(*i*) *N é essencial à direita em P.*

(*ii*) *N é essencial em P.*

Prova: Basta provar que $(ii) \Rightarrow (i)$.

Como M é livre de torção como um R-módulo à direita, temos que $N \subseteq_e ([N]_P)_R$ e, portanto, $N \subseteq_e [N]_P \subseteq_e P$. A partir deste fato, pelo Corolário 2.1.5 temos que $[[N]_P]_M = [P]_M$. Suponhamos que N não é essencial à direita em P. Então $[N]_P \subset P$ e, portanto, $[[N]_P]_M \subset [P]_M$, o que é uma contradição. $\diamondsuit$

2.1.9 Corolário *Seja M como no Corolário 2.1.8. Sejam $N \subseteq P$ dois submódulos de M. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(*i*) $[N]_P = P$.

(*ii*) *Para cada $m_1, m_2 \in P$ onde $m_1 \neq 0$, existe $r \in R$ tal que $m_1 r \neq 0$ e $m_2 r \in N$.*

Prova: $(i) \Rightarrow (ii)$ Segue do Lema 2.1.6.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Como M é livre de torção como um R-módulo à direita, temos que $N \subseteq_e ([N]_P)_R$. De (ii) temos que $N \subseteq_e P_R$ e, portanto, $N \subseteq_e ([N]_P)_R \subseteq_e P_R$. Então, pelo Corolário 2.1.5, segue que $[N]_P = P$. $\diamondsuit$

2.2 Ortogonalidade de módulos, extensão canônica e o Teorema da correspondência biunívoca

A seguinte definição foi dada por Miguel Ferrero em ([2], Definition 4.2).

2.2.1 Definição *Seja M um R-bimódulo centralizante. Um par (M^*, j), onde M^* é um Q_σ-bimódulo centralizante livre de torção como um R-módulo à direita e $j : M \to M^*$ é um homomorfismo de R-bimódulos é dito ser uma* ***extensão canônica livre de torção de M****, se para cada Q_σ-módulo à direita P o qual é livre de torção como um R-módulo à direita e cada homomorfismo de R-módulos à direita $f : M \to P$, existe e é único um homomorfismo de Q_σ-módulos à direita $f^* : M^* \to P$, tal que $f^* \circ j = f$.*

Seguem alguns exemplos, de fácil verificação, de extensões canônicas livres de torção de bimódulos centralizantes sobre anéis semiprimos.

Sejam R um anel semiprimo e Q_σ o seu anel de quocientes simétrico.

Seja G um grupo ou semigrupo. O anel de grupo ou semigrupo $M = RG$ é um R-bimódulo centralizante e sua extensão canônica livre de torção é (M^*, j), onde M^* é o anel de grupo ou semigrupo $Q_\sigma G$ e $j : M \to M^*$ é a inclusão. Em particular, um anel de polinômios com coeficientes em R sobre um conjunto qualquer de indeterminadas, que comutam ou não, é um R-bimódulo centralizante M que tem extensão canônica livre de torção (M^*, j), onde M^* é o anel de polinômios com coeficientes em Q_σ, sobre o mesmo conjunto de indeterminadas que define M, e $j : M \to M^*$ é a inclusão.

Se $M = M_n(R)$ é o anel das matrizes de ordem n sobre R, temos que M é um R-bimódulo centralizante e sua extensão canônica livre de torção é (M^*, j), onde $M^* = M_n(Q_\sigma)$ é o anel das matrizes de ordem n sobre Q_σ e $j : M \to M^*$ é a inclusão. Também se M é o anel das matrizes infinitas sobre R tal que cada matriz tem apenas um número finito de entradas não-nulas, temos que M é um R-bimódulo centralizante e sua extensão canônica livre de torção é (M^*, j), onde M^* é o anel das matrizes infinitas sobre Q_σ tal que cada matriz tem apenas um número finito de entradas não-nulas e $j : M \to M^*$ é a inclusão.

Seja L um R-bimódulo livre com uma base $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in\Omega}$, de elementos centralizantes.

Definimos $L^* = \sum_{i\in\Omega} \oplus Q_\sigma v_i$ como sendo o Q_σ-bimódulo livre com a mesma base $\mathcal{B}$ de L, de elementos centralizantes sobre Q_σ. Podemos considerar $L \subseteq L^*$ e a inclusão $i : L \to L^*$, que é um homomorfismo de R-bimódulos. Veremos que (L^*, i) é uma extensão canônica livre de torção de L. Este exemplo é importante para o que segue.

Se K é um submódulo de L, lembramos que $[K]_{L^*}$ representa o seu fecho como um R-submódulo de L^*. Se K é um submódulo de L^*, denotamos por $[K]$ o seu fecho como um Q_σ-submódulo de L^*.

2.2.2 Lema *Sejam N e P dois R-submódulos de L^* tais que N é denso à direita em P. Então existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os submódulos fechados de P e o conjunto de todos os submódulos fechados de N. Ademais, esta correspondência associa o submódulo fechado K de P com o submódulo fechado I de N, se $I = K \cap N$ (equivalentemente, $K = [I]_P$).*

Prova: Se I é um submódulo fechado de N, a I associamos $K = [I]_P$ que é um submódulo fechado de P. Além disso, temos que $K \cap N = I$. Se K é um submódulo fechado de P, a K associamos $I = K \cap N$. Temos que I é um submódulo fechado de N, já que $[I]_N = [K \cap N]_N = [K]_P \cap N = K \cap N = I$. Além disso $[I]_P = K$, já que $I = K \cap N$, K é um submódulo fechado de P e N é denso em P. $\diamondsuit$

2.2.3 Lema *L é denso à direita em L^*. Em particular, $L \subseteq_e (L^*)_R$. Ademais, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os submódulos fechados de L e o conjunto de todos os R-submódulos fechados de L^*, como no Lema 2.2.2.*

Prova: A prova é evidente. $\diamondsuit$

2.2.4 Proposição *(L^*, i) é uma extensão canônica livre de torção de L e é única a menos de um isomorfismo de Q_σ-bimódulos.*

Prova: A prova é evidente. $\diamondsuit$

A partir da Proposição 2.2.4 diremos que (L^*, i) é a extensão canônica livre de torção de L.

Vamos definir a ortogonalidade de uma família de submódulos à direita de L, que estende a noção de ortogonalidade de uma família de ideais à direita de R. Esta noção vai permitir estudar uma condição para que o fecho $[N]_{L^*}$ de um submódulo N de L, em L^*, seja um Q_σ-submódulo de L^*. Resultado semelhante é abordado em ([8], Proposition 3.3) para ideais à direita de um anel não-singular à direita R, considerando o anel de quocientes de R como sendo o seu anel maximal de quocientes à direita.

Lembramos que uma família $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de ideais à direita de um anel qualquer é dita ser uma família de ideais à direita mutuamente ortogonais, se $I_{\lambda_1}.I_{\lambda_2} = 0$ para cada $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

2.2.5 Definição *Uma família $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de submódulos à direita de L é dita ser uma **família de submódulos à direita mutuamente ortogonais de L**, se $\sum_{\lambda\in\Lambda} Q_\sigma N_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} \oplus Q_\sigma N_\lambda$, em L^*.*

Observemos que a Definição 2.2.5 estende a definição de ortogonalidade de uma família de ideais à direita de R. De fato, seja $(I_\lambda)_\lambda$ uma família de ideais à direita de R tais que $I_{\lambda_1} I_{\lambda_2} = 0$, para cada $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Se para algum n e para algum $k = 1, \ldots, n$ temos que $Q_\sigma I_{\lambda_k} \cap (Q_\sigma I_{\lambda_1} + \cdots + \widehat{Q_\sigma I_{\lambda_k}} + \cdots + Q_\sigma I_{\lambda_n}) \neq 0$, então $J = RI_{\lambda_k} \cap (RI_{\lambda_1} + \cdots + \widehat{RI_{\lambda_k}} + \cdots + RI_{\lambda_n}) \neq 0$. Mas $J^2 = 0$ de modo que $J = 0$, o que é uma contradição.

Por outro lado, seja $(I_\lambda)_\lambda$ uma família de ideais à direita de R, mutuamente ortogonais segundo a Definição 2.2.5. Temos para $\lambda_1 \neq \lambda_2$ que, $I_{\lambda_1}.I_{\lambda_2} \subseteq (RI_{\lambda_1}).(RI_{\lambda_2}) \subseteq RI_{\lambda_1} \cap RI_{\lambda_2} \subseteq Q_\sigma I_{\lambda_1} \cap Q_\sigma I_{\lambda_2} = 0$. Portanto, $I_{\lambda_1} I_{\lambda_2} = 0$.

Quando temos dois módulos que são mutuamente ortogonais, diremos apenas que são ortogonais.

Lembramos que se P é um módulo à direita sobre um anel qualquer, uma família $(N_\lambda)_\lambda$ de submódulos à direita de P é dita ser uma família independente se $\sum_\lambda N_\lambda = \sum_\lambda \oplus N_\lambda$.

Veremos que para uma família de sub-bimódulos de L, as propriedades de independência e ortogonalidade se equivalem.

2.2.6 Proposição *$(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família independente de sub-bimódulos de L se, e somente se, $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de sub-bimódulos de L mutuamente ortogonais.*

Prova: Seja $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família independente de sub-bimódulos de L e suponhamos que $Q_\sigma N_{\lambda_k} \cap (Q_\sigma N_{\lambda_1} + \cdots + \widehat{Q_\sigma N_{\lambda_k}} + \cdots + Q_\sigma N_{\lambda_n}) \neq 0$, para algum n e para algum $k = 1, \ldots, n$. Como para $0 \neq q \in Q_\sigma$, existe $H \in \varepsilon$ tal que $0 \neq Hq \subseteq R$, segue que $N_{\lambda_k} \cap (N_{\lambda 1} + \cdots + \widehat{N_{\lambda k}} + \cdots + N_{\lambda_n}) = RN_{\lambda_k} \cap (RN_{\lambda_1} + \cdots + \widehat{RN_{\lambda_k}} + \cdots + RN_{\lambda_n}) \neq 0$, o que é uma contradição. A recíproca é evidente. $\diamondsuit$

2.2.7 Lema *Se N é um submódulo de L, então $[N]_{L^*} = [N]_{L^*} Q_\sigma$. Em particular, $[N]_{L^*}$ é um (R, Q_σ)-submódulo de L^*.*

Prova: Temos que $[N]_{L^*} Q_\sigma$ é um R-submódulo à direita de L^*. Além disso, $N \subseteq_e ([N]_{L^*} Q_\sigma)_R$. De fato, seja $0 \neq x \in [N]_{L^*} Q_\sigma$ e escrevamos $x = l_1 q_1 + \cdots + l_r q_r$ onde $l_i \in [N]_{L^*}$ e $q_i \in Q_\sigma$, para cada $i = 1, \ldots, r$. Temos que existe $H \in \varepsilon$ tal que $0 \neq q_i H \subseteq R$, para cada $i = 1, \ldots, r$. Como L^*_R é livre de torção, segue que $0 \neq xH \subseteq [N]_{L^*}$ e, portanto, $[N]_{L^*} \subseteq_e ([N]_{L^*} Q_\sigma)_R$. Logo $N \subseteq_e ([N]_{L^*})_R \subseteq_e ([N]_{L^*} Q_\sigma)_R$ e daí, pelo Teorema 2.1.3, obtemos que $[N]_{L^*} = [N]_{L^*} Q_\sigma$, o que completa a prova. $\diamondsuit$

2.2.8 Proposição *Seja N um submódulo de L. Se $N \subseteq_e (Q_\sigma N)_R$, então $Q_\sigma N \subseteq_e ([N]_{L^*})_R$. Em particular, neste caso, $[N]_{L^*} = [Q_\sigma N]_{L^*}$ é um Q_σ-submódulo de L^*.*

Prova: $Q_\sigma N$ é um R-submódulo de L^* e consideremos $[Q_\sigma N]_{L^*}$, o seu fecho à direita em L^*. Temos que $N \subseteq_e (Q_\sigma N)_R \subseteq_e [Q_\sigma N]_{L^*}$ e, portanto, $[N]_{L^*} \subseteq_e ([Q_\sigma N]_{L^*})_R$. Logo, pelo Teorema 2.1.3, segue que $[N]_{L^*} = [Q_\sigma N]_{L^*}$. $\diamondsuit$

2.2.9 Proposição *Se $(L_k)_k$ é uma família qualquer de submódulos de L mutuamente ortogonais tais que $\sum_k \oplus L_k \subseteq_e L_R$, então $L_k \subseteq_e (Q_\sigma L_k)_R$, para cada k. Em particular, $[L_k]_{L^*} = [Q_\sigma L_k]_{L^*}$ é um Q_σ-submódulo de L^*, $Q_\sigma L_k \subseteq_e ([L_k]_{L^*})_R$, para cada k e se N é um submódulo qualquer de L, então $[N]_{L^*}$ é um Q_σ-submódulo de L^*.*

Prova: Seja $0 \neq x \in Q_\sigma L_k$. Como $\sum_i \oplus L_i \subseteq_e L_R \subseteq_e L^*_R$ temos que $xR \cap \sum_i \oplus L_i \neq 0$ e, então, existem um número inteiro n e $r \in R$ tais que $0 \neq xr = l_1 + \cdots + l_n$ onde $l_i \in L_i$, para cada i. Se cada $i \neq k$, obtemos que $Q_\sigma L_k \cap (Q_\sigma L_1 + \cdots + Q_\sigma L_n) \neq 0$, o que é uma contradição. Então existe algum $i = 1, \ldots, n$, tal que $i = k$. Segue que $xr - l_k = l_1 + \cdots + \widehat{l_k} + \cdots + l_n$, donde $xr = l_k$, já que $(L_k)_k$ é uma família de submódulos de L mutuamente ortogonais. A conclusão da prova segue pela aplicação da Proposição 2.2.8 e do fato que se N é um submódulo qualquer de L, então existe um submódulo maximal N' de L tal que $N \cap N' = 0$, donde $N \oplus N' \subseteq_e {}_R L_R$ e, portanto, $N \oplus N' \subseteq_e L_R$. $\diamondsuit$

Observemos que se $(L_k)_k$ é como na Proposição 2.2.9, então é fácil verificar que $\sum_k [L_k]_{L^*} = \sum_k \oplus [L_k]_{L^*}$ e $\sum_k \oplus [L_k]_{L^*} \subseteq_e [\sum_k \oplus L_k]_{L^*} = L^*$.

O seguinte teorema foi provado em ([2], Theorem 3.18). Faremos aqui uma prova distinta.

2.2.10 Teorema *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os R-submódulos fechados de L e o conjunto de todos os Q_σ-submódulos fechados de L^*. Ademais, essa correspondência associa um R-submódulo fechado à direita N de L com $[N]_{L^*}$, onde $N = [N]_{L^*} \cap L$.*

Prova: Pelo Lema 2.2.3 temos que L é denso à direita em L^* e existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os R-submódulos fechados de L e o conjunto de todos os R-submódulos fechados de L^*. Além disso, se N é um submódulo fechado de L, tal correspondência associa a N o seu fecho $[N]_{L^*}$, em L^*. Resta provar que $[N]_{L^*}$ é um Q_σ-submódulo fechado de L^*. Pela Proposição 2.2.9 temos que $[N]_{L^*}$ é um Q_σ-submódulo de L^*. Resta mostrar que é um Q_σ-submódulo fechado de L^*. Sejam $[[N]_{L^*}]$, o seu fecho como um Q_σ-submódulo de L^*, e $x \in [[N]_{L^*}]$. Então, existe $H \in \varepsilon(Q_\sigma)$ tal que $xH \subseteq [N]_{L^*}$ e temos que $H \cap R \in \varepsilon$ é tal que $x(H \cap R) \subseteq [N]_{L^*}$. Portanto $x \in [N]_{L^*}$, o que completa a prova. $\diamondsuit$

A seguir vamos enunciar o Teorema da existência da extensão canônica livre de torção para bimódulos centralizantes e o Teorema da correspondência biunívoca, no caso geral. Tais teoremas foram provados por Miguel Ferrero em ([2], Theorems 4.3, 4.4) e salientamos que em ambas as provas é usado fortemente o resultado do Teorema 2.2.10, motivo pelo qual, na introdução deste capítulo, mencionamos que provaríamos o Teorema da correspondência biunívoca, sem explicitar, embora aqui o tenhamos provado apenas para o caso livre.

2.2.11 Teorema *Existe uma extensão canônica livre de torção* (M^*, j) *de* M *e esta é única, a menos de um isomorfismo de* Q_σ*-bimódulos.*

2.2.12 Observação Como em [2], se M é livre de torção como um R-módulo à direita, a aplicação $j : M \to M^*$ é um monomorfismo. Então, no sentido de M estar imerso em M^* através de j, podemos considerar que $M \subseteq M^*$. Além disso, também como em [2], $(j(x_i))_{i\in\Omega}$ é um sistema de geradores Q_σ-centralizantes de M^* e no caso em que M é livre de torção como um R-módulo à direita, através do monomorfismo j, passaremos a identificar $j(x_i)$ com x_i, para cada i e diremos que $X = (x_i)_{i\in\Omega}$ é um sistema de geradores Q_σ-centralizantes de M^*.

Através do Teorema 2.2.11, pela questão da unicidade, diremos que (M^*, j) é a extensão canônica livre de torção de M.

2.2.13 Teorema *Seja* (M^*, j) *a extensão canônica livre de torção de* M*. Então existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os* R*-submódulos fechados de* M *e o conjunto de todos os* Q_σ*-submódulos fechados de* M^**. Ademais, esta correspondência associa um submódulo fechado* N *de* M *com o* Q_σ*-submódulo fechado* N^* *de* M^**, tal que* $j^{-1}(N^*) = N$*.*

CAPITULO 3

Sobre fechos essenciais

Em [8] um dos principais teoremas estabelece condições equivalentes para que a envoltória injetiva em Q de um ideal à direita de um anel não-singular à direita R seja um Q-bimódulo, onde Q é o anel maximal de quocientes à direita de R. Tal resultado é obtido usando a ortogonalidade de uma família de ideais à direita de R.

Neste capítulo, no caso em que R é um anel não-singular à direita e $Q = Q^r_{max}(R)$ é o seu anel maximal de quocientes à direita, se M é um R-módulo à direita, definimos (M^*, j), a extensão canônica livre de torção de M, e provamos a sua existência sempre que M é não-singular.

Desenvolvemos uma noção de ortogonalidade de uma família de módulos sobre anéis semiprimos e não-singulares à direita e, com esta noção, abordamos o resultado de [8], acima mencionado, para fechos essenciais de submódulos à direita de módulos livres centralizantes, na sua extensão canônica livre de torção. Ademais , obtemos uma generalização deste resultado de [8].

Também com esta noção de ortogonalidade, se R é um anel não-singular tal que os seus anéis maximais de quocientes à direita e esquerda coincidem, provamos o resultado acima para fechos essenciais à direita de submódulos à direita de um R-bimódulo centralizante e não-singular M, na sua extensão canônica livre de torção, M^*.

Como uma aplicação destes resultados estendemos de [8] para módulos, descrições equivalentes de uma nova dimensão que é uma espécie de dimensão híbrida entre as dimensões uniformes bilateral e unilateral.

Na primeira seção deste capítulo desenvolvemos os resultados acima para o caso em que o anel R é semiprimo e o seu anel de quocientes é o de quocientes simétrico. Tais resultados foram necessários para a obtenção dos principais resultados posteriores.

3.1 Caso semiprimo

Usaremos as mesmas notações e convenções dos capítulos anteriores. Nesta seção R é um anel semiprimo e Q_σ é o seu anel de quocientes simétrico, com respeito a $\varepsilon = \{H \trianglelefteq R \mid H \trianglelefteq_e R_R\}$. Ainda, M é um R-bimódulo centralizante com um sistema de geradores centralizantes $X = (x_i)_{i\in\Omega}$, livre de torção como um R-módulo à direita e (M^*, j) é a sua extensão canônica livre de torção.

Observemos que sendo R um anel semiprimo e M um R-bimódulo centralizante, M é livre de torção como um R-módulo à direita equivale a que M seja não-singular à direita. De fato, se M é não-singular à direita, então M é livre de torção como um R-módulo à direita já que todo ideal bilateral de R que é essencial à direita em R é um ideal à direita de R que é essencial à direita em R. Reciprocamente, seja $Z_r(M) = \{x \in M \mid \exists H \subseteq_e R_R \text{ tal que } xH = 0\}$ o submódulo singular à direita de M, que é um R-submódulo de M. Como $Z_r(M)$ é R-singular, ou seja, é singular na categoria $\sigma(R)$ dos bimódulos subgerados por R ([5], Page 178), então de ([5], Proposition 4.1) segue que $Z_r(M) = [0]_M = 0$.

Sejam $N \subseteq P$ dois submódulos à direita de M. Pelo Lema de Zorn existe um submódulo à direita N' de P, maximal tal que $N \subseteq_e N'_R$. Veremos a seguir que N' é único.

3.1.1 Proposição *Sejam $N \subseteq P$ dois submódulos à direita de M e seja $N' \subseteq P$ um submódulo à direita, maximal tal que $N \subseteq_e N'$. Então $N' = \{x \in P \,|\, \exists\, H \subseteq_e R_R \text{ tal que } xH \subseteq N\} := N_P^c$.*

Prova: N_P^c é um submódulo à direita de P tal que $N \subseteq_e N_P^c$, uma vez que M é não-singular à direita. Por outro lado, como N' é não-singular à direita e $N \subseteq_e N'$, temos que N'/N é um R-módulo à direita, singular à direita e, portanto, para cada $x \in N'$ temos que $Ann^r(\overline{x}) \subseteq_e R_R$, onde $\overline{x} = x + N \in N'/N$. Então basta tomar $H = Ann^r(\overline{x})$. $\diamondsuit$

3.1.2 Definição *Sejam $N \subseteq P$ dois submódulos à direita de M. O submódulo*

$$N_P^c = \{x \in P \,|\, \exists\, H \subseteq_e R_R \text{ tal que } xH \subseteq N\}$$

*de P é chamado de **fecho essencial à direita de** N **em** P.*

A seguir veremos que se $N \subseteq P$ são dois submódulos de M, então o fecho de N em P e o fecho essencial à direita de N em P coincidem.

3.1.3 Proposição *Se $N \subseteq P$ são dois submódulos de M, então $[N]_P = N_P^c$.*

Prova: Temos que $[N]_P \subseteq N_P^c$ e suponhamos que $[N]_P \subset N_P^c$. Como N é um submódulo de P, é fácil verificar que N_P^c também o é. Então podemos considerar o seu fecho em M e segue que $[[N]_P]_M \subset [N_P^c]_M$. Como $[[N]_P]_M$ é um submódulo fechado de M tal que $[[N]_P]_M \supseteq [0]_M$, pelo Teorema 2.1.3, existe $0 \neq x \in [N_P^c]_M$ tal que $RxR \cap [[N]_P]_M = 0$ e, portanto, $[[N]_P]_M$ não é essencial à direita em $[N_P^c]_M$, o que é uma contradição já que $N \subseteq_e (N_P^c)_R \subseteq_e ([N_P^c]_M)_R$ uma vez que M é livre de torção como um R-módulo à direita e, equivalentemente, não-singular à direita. $\diamondsuit$

Se N é um submódulo à direita de M, vamos estudar condições equivalentes para que o fecho essencial à direita $N_{M^*}^c$ de N, em M^*, seja um Q_σ-submódulo de M^*.

3.1.4 Lema *$M \subseteq_e M_R^*$. Ademais, M_R^* é não-singular à direita.*

Prova: Seja $0 \neq x = \sum_{i=1}^n x_i q_i \in M^*$ onde $X = (x_i)_{i\in\Omega}$ é o sistema de geradores Q_σ-centralizantes de M^* e $q_i \in Q_\sigma$, para cada i. Existe $H \in \varepsilon$ tal que $q_i H \subseteq R$ para cada i e temos que $xH \subseteq M$. Além disso, como M é livre de torção como um R-módulo à direita, temos que $xH \neq 0$. Logo $M \subseteq_e M_R^*$.

O resto da prova é evidente, pela aplicação da Proposição 1.4.5. $\diamondsuit$

A seguinte definição é uma extensão daquela dada no Capítulo 2, para o caso livre.

3.1.5 Definição *Dizemos que $(M_\alpha)_\alpha$ é uma família de submódulos à direita de M **mutuamente ortogonais** se $\sum_\alpha Q_\sigma M_\alpha = \sum_\alpha \oplus Q_\sigma M_\alpha$, em M^*.*

Como em 2.2.6, temos que as propriedades de independência e ortogonalidade se equivalem quando se trata de uma família de submódulos de M.

3.1.6 Lema *Se $N \subseteq M_R$, então $N_{M^*}^c$ é um Q_σ-módulo à direita. Ademais, se N é um submódulo de M, então $N_{M^*}^c$ é um (R, Q_σ)-submódulo de M^*.*

Prova: Sejam $x \in N^c_{M^*}$ e $q \in Q_\sigma$. Seja $H \subseteq_e R_R$ tal que $xH \subseteq N$. Temos que $H \subseteq_e R_R \subseteq_e (Q_\sigma)_R$ e, portanto, $H^c_{Q_\sigma} = Q_\sigma$. Então existe $K \subseteq_e R_R$ tal que $qK \subseteq H$ e segue que $xqK \subseteq xH \subseteq N$, de modo que $xq \in N^c_{M^*}$. O resto da prova é evidente. $\diamondsuit$

3.1.7 Proposição *Seja $N \subseteq M_R$. Se $N \subseteq_e (Q_\sigma N)_R$, então $Q_\sigma N \subseteq_e (N^c_{M^*})_R$. Em particular, neste caso, $N^c_{M^*} = (Q_\sigma N)^c_{M^*} = [Q_\sigma N]_{M^*}$ é um Q_σ-submódulo de M^*.*

Prova: Temos que $N \subseteq_e (Q_\sigma N)_R \subseteq_e ((Q_\sigma N)^c_{M^*})_R$ e, então, como $N^c_{M^*} \subseteq (Q_\sigma N)^c_{M^*}$, segue que $N^c_{M^*} = (Q_\sigma N)^c_{M^*}$. Além disso, como $Q_\sigma N$ é um R-sub-bimódulo de M^*, segue que $N^c_{M^*} = (Q_\sigma N)^c_{M^*} = [Q_\sigma N]_{M^*}$, o que completa a prova. $\diamondsuit$

A seguinte proposição caracteriza famílias de módulos mutuamente ortogonais.

3.1.8 Proposição *Seja $(M_k)_k$ uma família de submódulos à direita de M tais que $\sum_k \oplus M_k \subseteq_e M_R$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $M_k \subseteq_e (Q_\sigma M_k)_R$, *para cada* k.

(ii) $Q_\sigma M_k \subseteq_e ((M_k)^c_{M^*})_R$, *para cada* k.

(iii) $\sum_k Q_\sigma M_k = \sum_k \oplus Q_\sigma M_k$, *isto é,* $(M_k)_k$ *é uma família de submódulos à direita de* M *mutuamente ortogonais.*

Prova: $(i) \Rightarrow (ii)$ É imediato pela Proposição 3.1.7.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponhamos que para algum n e para algum $k = 1, \ldots, n$, temos que $Q_\sigma M_k \cap (Q_\sigma M_1 + \cdots + \widehat{Q_\sigma M_k} + \cdots + Q_\sigma M_n) \neq 0$. Então existe $0 \neq x \in Q_\sigma M_k \cap (Q_\sigma M_1 + \cdots + \widehat{Q_\sigma M_k} + \cdots + Q_\sigma M_n)$ e escrevemos $x = x_1 + \cdots + \widehat{x_k} + \cdots + x_n$, onde $x_i \in Q_\sigma M_i \subseteq (M_i)^c_{M^*}$ para cada i. Usando a hipótese, existem $H_i \subseteq_e R_R$ tais que $x_i H_i \subseteq M_i$, para cada $i \neq k$ e $xH_k \subseteq M_k$. Tomando $F = \bigcap_{i=1}^n H_i$, obtemos que $F \subseteq_e R_R$ e, portanto, existe $r \in F$ tal que $0 \neq xr = x_1 r + \cdots + \widehat{x_k r} + \cdots + x_n r$, o que é uma contradição.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Seja $0 \neq x \in Q_\sigma M_k$. Como $\sum_i \oplus M_i \subseteq_e M_R \subseteq_e M^*_R$, segue que existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in Q_\sigma M_k \cap (\sum_i \oplus M_i)$, donde para algum n, $0 \neq xr = m_1 + \cdots + m_n$, onde $m_i \in M_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Daí, para algum $i = 1, \ldots, n$

temos que $i = k$ e $(xr - m_k) \in Q_\sigma M_k \cap (Q_\sigma M_1 + \cdots + \widehat{Q_\sigma M_k} + \cdots + Q_\sigma M_n) = 0$, de modo que $0 \neq xr = m_k$. Logo $M_k \subseteq_e Q_\sigma M_k$. $\diamondsuit$

A seguinte proposição é evidente de 3.1.7 e 3.1.8.

3.1.9 Proposição *Seja $(M_k)_k$, como na Proposição 3.1.8. Se $(M_k)_k$ é uma família de submódulos à direita de M mutuamente ortogonais, então $(M_k)^c_{M^*}$ é um Q_σ-submódulo de M^*, para cada k e $\sum_k (M_k)^c_{M^*} = \sum_k \oplus (M_k)^c_{M^*} \subseteq_e M^*_R$.*

Mesmo na situação particular em que R é um anel semiprimo, Q_σ é o seu anel de quocientes simétrico e I é um ideal à direita de R, pode ocorrer que $I^c_{Q_\sigma}$ não seja um ideal de Q_σ. Por exemplo, sejam $R = M_2(\mathbb{Q})$ o anel das matrizes de ordem dois com elementos em $\mathbb{Q}$, o corpo dos números racionais, Q_σ o anel de quocientes simétrico de R e $I = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Neste caso temos que R é semiprimo e $Q_\sigma = R$. Como $\mathbb{Q}$ é um corpo, temos que R é um anel semisimples e, portanto, $Q_\sigma = R$ também o é. Então I, que é um ideal à direita de Q_σ, é um somando direto e, portanto, $I^c_{Q_\sigma} = I$ é um ideal à direita e não é um ideal à esquerda de Q_σ.

A seguir se $N \subseteq M_R$, vamos estudar condições equivalentes para que $N^c_{M^*}$ seja um Q_σ-bimódulo. Este teorema que provaremos é uma extensão de ([8], Theorem 3.5), que primeiramente vamos transcrever.

3.1.10 Teorema *Sejam R um anel não-singular à direita, $Q = Q^r_{max}(R)$, o seu anel maximal de quocientes à direita e I um ideal à direita de R. Seja $E(I)$ uma envoltória injetiva de I. Então as seguintes condicões são equivalentes:*

(*i*) *$E(I)$ é um ideal de Q.*

(*ii*) *$E(I) = eQ$, onde e é um idempotente central de Q.*

(*iii*) *Existe um ideal à direita P' de Q ortogonal com $E(I)$, tal que $E(I) \oplus P' = Q$.*

(*iv*) *Existe um ideal à direita P' de Q ortogonal com $E(I)$, tal que $E(I) \oplus P' \subseteq_e Q_R$.*

(*v*) *Existe um ideal à direita J de R ortogonal com I, tal que $I \oplus J \subseteq_e R_R$.*

(*vi*) *Existe um ideal P de Q, tal que $I \subseteq_e P_R$.*

Agora provaremos o teorema, que estende o Teorema 3.1.10 para módulos sobre anéis semiprimos.

3.1.11 Teorema *Se $N \subseteq M_R$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $N^c_{M^*}$ *é um Q_σ-submódulo de M^*.*

(ii) *Existem um Q_σ-submódulo K de M^* tal que $K \subseteq_e M^*_R$ e $f : K \to K$ um endomorfismo idempotente de Q_σ-bimódulos, tais que $N^c_{M^*} = f(K)$.*

(iii) *Existe $U \subseteq M^*_{Q_\sigma}$ ortogonal com $N^c_{M^*}$, tal que $N^c_{M^*} \oplus U \subseteq_e M^*_R$.*

(iv) *Existe $N' \subseteq M_R$ ortogonal com N, tal que $N \oplus N' \subseteq_e M_R$.*

(v) *Existe um Q_σ-submódulo P de M^*, tal que $N \subseteq_e P_R$.*

Prova: $(i) \Rightarrow (v)$ Basta tomar $P = N^c_{M^*}$.

$(v) \Rightarrow (iv)$ Suponhamos que exista um Q_σ-submódulo P de M^*, tal que $N \subseteq_e P_R$. Temos que $P \cap M$ é um R-submódulo de M e, portanto, existe um R-submódulo N' de M, maximal tal que $(P \cap M) \cap N' = 0$. Segue que $(P \cap M) \oplus N' \subseteq_e M$ e, então, pelo Corolário 2.1.8, temos que $(P \cap M) \oplus N' \subseteq_e M_R$. Como $N \subseteq_e (P \cap M)_R$, obtemos que $N \oplus N' \subseteq_e (P \cap M) \oplus N' \subseteq_e M_R$. Ainda, N e N' são ortogonais já que $P \cap M$ e N' o são.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Pela Proposição 3.1.9 temos que $N^c_{M^*}$ é um Q_σ-submódulo de M^*.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ Seja $N' \subseteq_e M_R$ ortogonal com N, tal que $N \oplus N' \subseteq_e M_R$. Conseqüentemente, temos que $N^c_{M^*}$ e $(N')^c_{M^*}$ são Q_σ-submódulos de M^* e $N^c_{M^*} \oplus (N')^c_{M^*} \subseteq_e M^*_R$. Então tomamos $K = N^c_{M^*} \oplus (N')^c_{M^*}$ e $f : K \to K$, a projeção sobre $N^c_{M^*}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sejam K e f como na hipótese (ii). Tomemos $(1 - f) : K \to K$, que é um endomorfismo idempotente de Q_σ-bimódulos e $U = (1 - f)(K)$, que é um Q_σ-submódulo de M^*. Facilmente verificamos que U satisfaz (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sejam $U \subseteq M^*_{Q_\sigma}$ ortogonal com $N^c_{M^*}$ tal que $N^c_{M^*} \oplus U \subseteq_e M^*_R$ e $N' = U \cap M$. Temos que $N' \subseteq M_R$, N e N' são ortogonais e $N \oplus N' \subseteq_e M_R$. De fato, $Q_\sigma N \cap Q_\sigma N' = Q_\sigma N \cap Q_\sigma(U \cap M) \subseteq Q_\sigma(N^c_{M^*}) \cap Q_\sigma U = 0$. Ainda, como $M \subseteq_e M^*_R$, obtemos que $N' = U \cap M \subseteq_e U_R$. Então $N \oplus N' \subseteq_e (N^c_{M^*} \oplus U)_R \subseteq_e M^*_R$. Como $N \oplus N' \subseteq M_R$, segue que $N \oplus N' \subseteq_e M_R$. $\diamondsuit$

Se no Teorema 3.1.11 tivermos N como um submódulo de M ao invés de N ser um submódulo à direita de M, neste, podemos acrescentar a condição equivalente:

(iv') Existe N'' um submódulo de M ortogonal com N, tal que $N \oplus N'' \subseteq_e M_R$.

De fato, basta provar que $(iv) \Rightarrow (iv')$. Mas sendo $N' \subseteq M_R$ ortogonal com N tal que $N \oplus N' \subseteq_e M_R$, basta tomar $N'' = RN'$.

Em [8], quando R é um anel não-singular à direita e $Q = Q^r_{max}(R)$ é o seu anel maximal de quocientes à direita, é introduzida uma nova dimensão de módulos que é uma espécie de dimensão híbrida entre as dimensões uniformes unilateral e bilateral. Como uma aplicação são obtidas novas descrições para tal dimensão, de certos ideais de R. Vamos estender estes resultados para módulos, inicialmente sobre anéis semiprimos.

Lembramos que se S e T são dois anéis e P é um (S,T)-bimódulo, definimos a dimensão uniforme bilateral do (S,T)-bimódulo P, $\mu dim({}_SP_T)$, como sendo o supremo do conjunto dos números inteiros n para os quais P contém uma soma direta de n (S,T)-submódulos não-nulos. De forma análoga definimos a dimensão uniforme à direita (esquerda) de um T-módulo à direita (S-módulo à esquerda) P, denotando-a por $\mu dim(P_T)$ ($\mu dim({}_SP)$).

3.1.12 Definição *Sejam S e T dois anéis e P um (S,T)-bimódulo. Definimos a dimensão $d(P)$ de P como sendo o supremo do conjunto dos números naturais n, para os quais existe uma soma direta de n (S,T)-submódulos $N = \sum_{k=1}^{n} \oplus P_k$ de P, tais que $N \subseteq_e P_T$.*

É fácil verificar que $d(P) \leq \mu dim({}_SP_T) \leq min\{\mu dim(P_T),\ \mu dim({}_SP)\}$.

Pelos resultados de [8] parece não haver maneira de $d(P)$ ser interpretada como uma dimensão uniforme sobre um anel particular. A partir desse fato fica difícil obter uma informação geral sobre d na total categoria dos (S,T)-bimódulos. Algumas propriedades usuais da dimensão uniforme, definitivamente, não valem para d, outras, no entanto, são preservadas. Por exemplo, como podemos ver em ([8], Section 3), é possível apresentar exemplos de bimódulos $N \subseteq P$ tais que $d(P) < \infty$ e $d(N) = \infty$.

Se pode constatar que d tem um bom comportamento nos ideais I de um anel semiprimo ou não-singular à direita T, para os quais existe um ideal bilateral I' de T tal que $I \oplus I' \subseteq_e T_T$.

Dentre as equivalências dadas no Teorema 3.1.11 podemos notar a (iv), no aspecto que envolve somente o módulo M e não a sua extensão M^*. Isso sugere a seguinte formulação geral:

Se S e T são dois anéis e P é um (S,T)-bimódulo, definimos

$$\mathcal{F}({}_SP_T) = \{N \subseteq {}_SP_T \mid \exists N' \subseteq {}_SP_T \text{ tal que } N \oplus N' \subseteq_e P_T\}.$$

Em particular:

(a) Se T é um anel, temos que $\mathcal{F}(T) := \mathcal{F}({}_TT_T) = \{I \trianglelefteq T \,|\, \exists J \trianglelefteq T \text{ tal que } I \oplus J \subseteq_e T_T\}$.

Observemos que para um anel semiprimo R, temos que $\mathcal{F}(R) = \{I \mid I \trianglelefteq R\}$.

(b) Se R é um anel semiprimo e M é um R-bimódulo centralizante e livre de torção como um R-módulo à direita, então $\mathcal{F}(M) := \mathcal{F}({}_RM_R) = \{N \subseteq M \,|\, \exists N' \subseteq M \text{ tal que } N \oplus N' \subseteq_e M_R\} = \{N \subseteq M \mid \exists N' \subseteq M$ ortogonal com N, tal que $N \oplus N' \subseteq_e M_R\}$ e os elementos de $\mathcal{F}(M)$ são caracterizados por qualquer uma das condições equivalentes do Teorema 3.1.11.

3.1.13 Lema *$\mathcal{F}(M)$ é fechado quanto à soma direta arbitrária e quanto à intersecção finita.*

Prova: A prova é evidente, usando o Teorema 3.1.11.

3.1.14 Proposição *Seja $N \in \mathcal{F}(M)$. Sejam $m \leq \infty$ o supremo dos números $n \in \mathbb{N}$ para os quais existem $N_1, \ldots, N_n \subseteq N_R$ mutuamente ortogonais, tais que $N_1 \oplus \cdots \oplus N_n \subseteq_e N_R$ e m' o supremo dos números $k \in \mathbb{N}$ para os quais existem $M_1, \ldots, M_k \subseteq N$, tais que $M_1, \ldots, M_k \in \mathcal{F}(M)$ e $M_1 \oplus \cdots \oplus M_k \subseteq N$. Então $d(N) = m = m'$.*

Prova: (i) $m' \leq d(N)$

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que existem $M_1, \ldots, M_k$ submódulos de N, tais que $M_i \in \mathcal{F}(M)$ para cada $i = 1, \ldots, k$ e $M' = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k \subseteq N$. Pelo Lema 3.1.13, temos que $M' \in \mathcal{F}(M)$ e, então, existe N' um submódulo de M ortogonal com M', tal que $M' \oplus N' \subseteq_e M_R$. Assim, $M' \oplus (N' \cap N) \subseteq_e N_R$. Logo, $M_1, \ldots, M_k$ e $N' \cap N$ são submódulos de N tais que $M_1 \oplus \ldots \oplus M_{k-1} \oplus (M_k \oplus N' \cap N) \subseteq_e N_R$. Portanto, $k \in \mathbb{N}$ é tal que existem $N_1, \ldots, N_k \subseteq N$ tais que $N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \subseteq_e N_R$ e, então, $m' \leq d(N)$.

(ii) $m \leq m'$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que existem $N_1, \ldots, N_n \subseteq N$ mutuamente ortogonais, tais que $\sum_{k=1}^n \oplus N_k \subseteq_e N_R$. Consideremos os R-submódulos $RN_1, \ldots, RN_n$ de M. Como $N_1, \ldots, N_n$ são mutuamente ortogonais, temos que $Q_\sigma N_k \cap (Q_\sigma N_1 + \cdots + \widehat{Q_\sigma N_k} + \cdots + Q_\sigma N_n) = 0$ e, então, $(RN_k)_{k=1}^n$ é uma família independente de submódulos de M tais que $\sum_{k=1}^n \oplus RN_k \subseteq N_R$. Resta mostrar que $M_k := RN_k \in \mathcal{F}(M)$, para cada $k = 1, \dots, n$. Como $N \in \mathcal{F}(M)$, existe $N^{'} \subseteq M$ ortogonal com N tal que $N \oplus N^{'} \subseteq_e M_R$. Portanto, como $\sum_{k=1}^{n} \oplus N_k \subseteq_e N_R$, segue que $\sum_{k=1}^{n} \oplus RN_k \subseteq_e N_R$ e, então, $(RN_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{RN_k} \oplus \cdots \oplus RN_n) \cap N^{'} = 0$. Tomemos $M_k^{'} := (RN_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{RN_k} \oplus \cdots \oplus RN_n) \oplus N^{'}$ e temos que $M_k^{'} \subseteq M$ e $M_k \oplus M_k^{'} \subseteq_e N \oplus N^{'} \subseteq_e M_R$. Logo $M_k := RN_k \in \mathcal{F}(M)$, para cada $k = 1, \dots, n$.

(iii) $d(N) \leq m$

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $N_1, \dots, N_n$ sub-bimódulos de N tais que $\sum_{k=1}^{n} \oplus N_k \subseteq_e N_R$. Temos que $N_1, \dots, N_n$ são mutuamente ortogonais, o que completa a prova. $\diamondsuit$

3.1.15 Proposição *Se $N \in \mathcal{F}(M)$, então $d(N)$ é o supremo do conjunto dos números $r \in \mathbb{N}$ para os quais existe uma cadeia*

$$(0) \subseteq B_1 \subset B_2 \ldots \subset B_r \subseteq N$$

tais que $B_i \in \mathcal{F}(M)$ e B_i não é essencial à direita em (B_{i+1}), para cada i.

Prova: Seja $m^{''}$ o supremo do conjunto dos números $r \in \mathbb{N}$, do enunciado.

(i) $d(N) = m^{'} \leq m''$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que existem $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{F}(M)$ tais que $\sum_{i=1}^{k} \oplus M_i \subseteq N$, temos que $\sum_{i=1}^{k} \oplus M_i \in \mathcal{F}(M)$. Tomando $B_1 := M_1$, $B_2 := M_1 \oplus M_2$, ..., $B_k := M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$, temos que $(0) \subseteq B_1 \subset \ldots \subset B_k \subseteq N$ e B_i não é essencial à direita em B_{i+1}, para cada $i = 1, \dots, k$.

(ii) $m^{''} \leq m^{'} = d(N)$

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $(0) \subseteq B_1 \subset \ldots \subset B_r \subseteq N$ tais que $B_i \in \mathcal{F}(M)$ e B_i não é essencial à direita em B_{i+1}, para cada i. Portanto B_i não é essencial em B_{i+1}, para cada i.

Como B_1 não é essencial em B_2, existe A_2 um submódulo de B_2, maximal tal que $A_2 \cap B_1 = 0$. Pela escolha de A_2, $B_1 \oplus A_2 \subseteq_e (B_2)_R$ e sendo que $B_2 \in \mathcal{F}(M)$, existe $B_2^{'} \in \mathcal{F}(M)$ tal que $B_2 \oplus B_2^{'} \subseteq_e M_R$. Então temos que $B_1 \oplus A_2 \oplus B_2^{'} \subseteq_e B_2 \oplus B_2^{'} \subseteq_e M_R$. Segue que $A_2 \oplus B_2^{'} \in \mathcal{F}(M)$ e sendo que $N \in \mathcal{F}(M)$, temos que $(A_2 \oplus B_2^{'}) \cap N \in \mathcal{F}(M)$. Então, tomando $M_1 = B_1$ e $M_2 = (A_2 \oplus B_2^{'}) \cap N$ temos que $M_1, M_2 \in \mathcal{F}(M)$ e $M_1 \oplus M_2 \subseteq N$.

Repetindo o raciocínio é facil obter $M_3, \dots, M_r \in \mathcal{F}(M)$ tais que $\sum_{k=1}^{r} \oplus M_k \subseteq N$, o que completa a prova. $\diamondsuit$

3.2 Caso não-singular

Existem anéis não-singulares à direita que não são semiprimos, tais como os anéis não-singulares à direita e que têm ideais nilpotentes não-nulos. Como exemplo podemos citar $R = \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$ onde F é um corpo, que é um anel não-singular à direita e que tem o ideal nilpotente não-nulo $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$. Também existem anéis semiprimos que não são não-singulares à direita tais como os anéis semiprimos R, tais que R_R têm dimensão finita e que não têm condição de cadeia ascendente sobre os ideais anuladores à direita ([6], Corollary 3.32). Mas existem muitos anéis semiprimos que são também não-singulares à direita, tais como os anéis comutativos, simples, semisimples, regulares, anéis semiprimos R tais que $socle(R)$ é essencial à direita em R, semiprimos que possuem condição de cadeia ascendente sobre os anuladores à direta e, em particular, os anéis semiprimos e Noetherianos à direita, etc. Então é natural estender resultados que são válidos para anéis semiprimos, aos anéis não-singulares à direita.

No que segue R é um anel não-singular à direita, $Q = Q^r_{max}(R)$ é o seu anel maximal de quocientes à direita e $\xi = \{H \trianglelefteq R_R \mid H \trianglelefteq_e R_R\}$. Lembramos que $Q = Q_\xi$ é o anel de quocientes à direita de R, com respeito a ξ.

Sejam $N \subseteq P$ dois R-módulos à direita. Pelo Lema de Zorn existe um submódulo N' de P, maximal tal que $N \subseteq_e N'$.

Como na seção anterior, se $N \subseteq P$ são dois R-módulos à direita, um submódulo à direita N' de P maximal tal que $N \subseteq_e N'$ é denominado um ***fecho essencial à direita de N em P***. Dizemos que ***N é essencialmente fechado à direita em P***, se N não possui uma extensão essencial à direita própria em P.

Se $N \subseteq P$ são dois R-módulos à direita e P é não-singular à direita, é fácil verificar que N tem um único fecho essencial à direita em P que denotaremos por N^c_P. Além disso, $N^c_P = \{x \in P \mid \exists\, H \subseteq_e R_R \text{ tal que } xH \subseteq N\}$.

Extensão canônica livre de torção

3.2.1 Definição *Seja M um R-módulo à direita. Um par (M^*, j) onde M^* é um Q-módulo à direita e $j : M \to M^*$ é um homomorfismo de R-módulos à direita é dito ser uma **extensão canônica livre de torção de M**, se para cada Q-módulo à direita P o qual é não-singular à direita como um R-módulo à direita e cada homomorfismo de R-módulos à direita $f : M \to P$, existe e é único um homomorfismo de Q-módulos à direita $f^* : M^* \to P$, tal que $f^* \circ j = f$.*

Exemplos de extensões canônicas livres de torção neste caso em que R é um anel não-singular à direita e $Q = Q^r_{max}(R)$ é o seu anel maximal de quocientes à direita são similares aos da Seção 2.2.

No que segue L é um R-módulo à direita livre com uma base $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in \Omega}$ e definimos $L^* = \sum_{i \in \Omega} \oplus v_i Q$, como sendo o Q-módulo à direita livre, com a mesma base $\mathcal{B}$ de L. Podemos considerar $L \subseteq L^*$, ou seja, a inclusão $i : L \to L^*$, que é um homomorfismo de R-módulos à direita, como uma identificação. Temos que (L^*, i) é uma extensão canônica livre de torção de L, como é fácil de verificar.

3.2.2 Lema *L é não-singular à direita e $L \subseteq_e L^*_R$. Ademais, L^*_R é não-singular à direita.*

Prova: A prova segue facilmente do fato que L e L^* são livres e de que R é não-singular à direita. $\diamondsuit$

Observemos que se $N \subseteq P$ são dois R-módulos à direita e P é não-singular à direita, então N também é não-singular à direita e, portanto, cada submódulo de N tem um único fecho essencial à direita em N.

O seguinte lema foi provado em ([5], Section 3). Escreveremos a prova para uma melhor compreensão do que segue.

3.2.3 Lema *Sejam $N \subseteq_e P$ dois R-módulos à direita tais que P é não-singular à direita. Então existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os submódulos essencialmente fechados à direita de N e o conjunto de todos os submódulos essencialmente fechados à direita de P. Ademais, tal correspondência associa um submódulo essencialmente fechado à direita U de N, com o submódulo essencialmente fechado à direita U^c_P de P e $U^c_P \cap N = U$.*

Prova: Se U é um submódulo essencialmente fechado à direita de N, temos que U^c_P é um submódulo essencialmente fechado à direita de P e $U^c_P \cap N = U^c_N = U$.

Por outro lado, se V é um submódulo essencialmente fechado à direita de P, temos que $V = V^c_P$ e, portanto, $V \cap N = V^c_P \cap N = (V \cap N)^c_N$ é um submódulo essencialmente fechado à direita de N e $((V \cap N)^c_N)^c_P = (V \cap N)^c_P = V^c_P = V$. $\diamondsuit$

3.2.4 Lema *Se $J \subseteq L_R$, então $J^c_{L^*} = J^c_{L^*} Q$, ou seja, $J^c_{L^*}$ é um Q-submódulo à direita de L^*.*

Prova: Já que $J^c_{L^*}Q$ é um R-submódulo à direita de L^*, basta mostrarmos que $J^c_{L^*} \subseteq_e (J^c_{L^*}Q)_R$. Seja $0 \neq x = z_1q_1 + \cdots + z_nq_n \in J^c_{L^*}Q$, onde $z_i \in J^c_{L^*}$ e $q_i \in Q$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Temos que existe $H \in \xi$ tal que $0 \neq q_iH \subseteq R$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Então $H \subseteq_e R_R$ e $0 \neq xH \subseteq J^c_{L^*}$, o que completa a prova. $\diamondsuit$

3.2.5 Teorema *Se M é um R-módulo à direita não-singular, então existe uma extensão canônica livre de torção (M^*, j) de M. Ademais, M^* é não-singular à direita como um R-módulo à direita, $M \subseteq_e M^*_R$ e (M^*, j) é única a menos de um isomorfismo de Q-módulos à direita.*

Prova: Seja $X = (x_i)_{i\in\Omega}$ um sistema de geradores de M. Sejam L um R-módulo à direita livre, com uma base $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in\Omega}$, e $\phi : L \to M$ o homomorfismo de R-módulos à direita definido por $\phi(v_i) = x_i$, para cada $i \in \Omega$. Seja $L^* = \sum_{i\in\Omega} \oplus v_iQ$ o Q-módulo à direita livre, com a mesma base $\mathcal{B}$ sobre Q. Consideremos a inclusão $i : L \to L^*$, que é um homomorfismo de R-módulos à direita, como uma identificação. Assim $L \subseteq L^*$, como antes.

Temos que (0) é um submódulo essencialmente fechado à direita de M. Como $\phi : L \to M$ é um epimorfismo de R-módulos à direita segue que $I = \phi^{-1}(0)$ é um submódulo essencialmente fechado à direita de L, como é fácil de verificar. Temos que L e L^* são R-módulos à direita que são não-singulares à direita tais que $L \subseteq_e L^*$ e, então, pelo Lema 3.2.3, existe um R-submódulo à direita, essencialmente fechado à direita I^* de L^*, tal que $I^* \cap L = I$. Pelo Lema 3.2.4 temos que I^* é um Q-submódulo à direita de L^* e definimos $M^* = L^*/I^*$, que é então um Q-módulo à direita. Seja $\pi : L^* \to M^* = L^*/I^*$ a projeção canônica, que é um homomorfismo de Q-módulos à direita.

Mostremos que M^*_R é não-singular à direita. Sejam $x \in M^*$ e $H \subseteq_e R_R$ tal que $xH = 0$ e escrevemos $x = \overline{l} = \pi(l)$ onde $l \in L^*$. Temos que $xH = 0$ implica que $\pi(lH) = 0$, ou seja, que $lH \subseteq I^*$. Segue que $l \in (I^*)^c_{L^*} = I^*$ e, portanto, $x = \overline{l} = \pi(l) = 0$.

É fácil verificar que se definirmos $j : M \to M^*$ tal que $j(\sum_{i=1}^n x_ir_i) = \sum_{i=1}^n \pi(v_i)r_i$, temos que j é um homomorfismo (bem definido) de R-módulos à direita. Além disso, temos que $ker(j) = (0)$. De fato, seja $x \in ker(j)$ e escrevemos $x = \sum_{i=1}^n x_ir_i$. Então $\pi(\sum_{i=1}^n v_ir_i) = \sum_{i=1}^n \pi(v_ir_i) = j(x) = 0$ e, portanto, $\sum_{i=1}^n v_ir_i \in I^* \cap L = I = \phi^{-1}(0)$. Segue que $x = \sum_{i=1}^n x_ir_i = \phi(\sum_{i=1}^n v_ir_i) = 0$. Então $M \hookrightarrow M^*$, e neste sentido, podemos considerar que $M \subseteq M^*$. Como M^* é não-singular à direita como um R-módulo à direita, é facil verificar que $M \subseteq_e M^*_R$.

Agora a prova se completa, de maneira canônica, como em ([2], Theorem 4.3). $\diamondsuit$

A partir do Teorema 3.2.5, devido à unicidade da extensão canônica livre de torção de M a menos de um isomorfismo de Q-módulos à direita, passamos a nos referir à extensão canônica livre de torção (M^*, j) de M.

Da prova acima, temos que $(j(x_i))_{i\in\Omega}$ é um sistema de geradores de M^* como um Q-módulo à direita e, da identificação dos elementos de M com os elementos de M^* através de j, passaremos a considerar que $X = (x_i)_{i\in\Omega}$ é um sistema de geradores de M^* como um Q-módulo à direita.

Se M é um R-bimódulo centralizante com um sistema de geradores centralizantes $X = (x_i)_{i\in\Omega}$, segue da prova do Teorema 3.2.5 que M^* é um (R, Q)-bimódulo que é R-centralizante e não-singular como um R-módulo à direita.

Caso livre

No que segue vamos generalizar o resultado de ([8], Theorem 3.5). Primeiramente, vamos estabelecer condições equivalentes para que o fecho essencial à direita de um R-submódulo à direita de um R-bimódulo livre centralizante, na sua extensão canônica livre de torção, seja um Q-bimódulo. Após, obteremos condições equivalentes para que a envoltória injetiva de um submódulo à direita de um módulo livre com uma base centralizante finita seja um Q-bimódulo e uma generalização de ([8], Theorem 3.5), para o caso livre, onde R é um anel não-singular à direita do tipo semiprimo e Noetheriano à direita.

Sejam L um R-bimódulo livre com base $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in\Omega}$ de elementos centralizantes e $L^* = \sum_{i\in\Omega} \oplus Qv_i$, o Q-bimódulo livre centralizante com a mesma base $\mathcal{B}$ sobre Q. Como antes (L^*, i), onde $i : L \to L^*$ é a inclusão, é a extensão canônica livre de torção de L.

Assim como no Lema 3.2.4, se $N \subseteq L_R$, então $N^c_{L^*}$ é um Q-módulo à direita. Ademais, se N é um submódulo de L, então $N^c_{L^*}$ é um (R, Q)-submódulo de L^*.

Agora temos a seguinte extensão da Proposição 3.1.7.

3.2.6 Proposição *Seja $N \subseteq L_R$. Se $N \subseteq_e (QN)_R$, então $QN \subseteq_e (N^c_{L^*})_R$. Em particular, neste caso, $N^c_{L^*} = (QN)^c_{L^*}$ é um Q-submódulo de L^*.*

Prova: Temos que $QN \subseteq {}_RL^*_R$ e consideremos o seu fecho essencial à direita $(QN)^c_{L^*}$, em L^*. Segue que $N \subseteq_e (QN)_R \subseteq_e ((QN)^c_{L^*})_R$ e, portanto, $N^c_{L^*} \subseteq_e ((QN)^c_{L^*})_R$. Logo, $N^c_{L^*} = (QN)^c_{L^*}$. $\diamondsuit$

3.2.7 Observação Neste caso não-singular definimos a ortogonalidade de uma família $(L_k)_k$, de submódulos à direita de L, como no caso semiprimo. Temos que esta definição estende a definição de ortogonalidade de uma família $(I_k)_{k=1}^n$ de ideais à direita de R, que são tais que existe $J \subseteq R_R$ tal que $\sum_{k=1}^n \oplus I_k \oplus J \subseteq_e R_R$ e $I_k J = J I_k = 0$, para cada k. De fato, seja $(I_k)_{k=1}^n$ como acima. Então são equivalentes:

(i) $I_j I_k = I_k I_j = 0$, para cada $j, k = 1, \ldots, n$, tal que $j \neq k$.

(ii) $QI_k \cap (QI_1 + \cdots + \widehat{QI_k} + \cdots + QI_n) = 0$, para cada $k = 1, \ldots, n$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponhamos que a família $(I_k)_{k=1}^n$ é de ideais à direita de R mutuamente ortogonais. Então de ([8], Proposition 3.3), temos que cada envoltória injetiva $E((I_k)_R)$ de I_k e $E(J_R)$ de J, (formadas em Q), são Q-bimódulos e $\sum_{k=1}^n \oplus E((I_K)_R) \oplus E(J_R) = Q$. Então $QI_k \subseteq E((I_k)_R)$ para cada k, $QJ \subseteq E(J_R)$ e $\sum_{k=1}^n QI_k = \sum_{k=1}^n \oplus QI_k$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sejam $j, k = 1, \ldots, n$, tais que $j \neq k$. Temos que $I_j I_k \subseteq RI_j RI_k \subseteq RI_j \cap RI_k \subseteq QI_j \cap QI_k = 0$.

Assim como em 3.1.8, a seguinte proposição caracteriza famílias de módulos mutuamente ortogonais.

3.2.8 Proposição *Seja $(L_k)_k$ uma família de submódulos à direita de L tal que $\sum_k \oplus L_k \subseteq_e L_R$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$L_k \subseteq_e (QL_k)_R$, para cada k.*

(ii) *$QL_k \subseteq_e (L_k)^c_{L^*}$, para cada k.*

(iii) *$\sum_k QL_k = \sum_k \oplus QL_k$, isto é, $(L_k)_k$ é uma família de submódulos à direita de L mutuamente ortogonais.*

Prova: É como a prova da Proposição 3.1.8. $\diamondsuit$

3.2.9 Proposição *Seja $(L_k)_k$ como na Proposição 3.2.8. Se a família $(L_k)_k$ é de submódulos à direita de L mutuamente ortogonais, então $(L_k)^c_{L^*}$ é um Q-submódulo de L^*, para cada k e $\sum_k (L_k)^c_{L^*} = \sum_k \oplus (L_k)^c_{L^*} \subseteq_e L^*_R$.*

Prova: É como a prova da Proposição 3.1.9. $\diamondsuit$

A seguir provaremos, independentemente da Proposição 1.5.4, que $Q = Q^r_{max}(R) = Q^r_{max}(Q)$.

3.2.10 Lema *Sejam A e B dois anéis tais que A é um subanel de B, B como um A-módulo à direita é não-singular e para cada $b \in B$ existe um ideal à direita denso I de A, tal que $bI \subseteq A$. Então:*

(a) *Existe um único homomorfismo $g : B \to Q^r_{max}(A)$ de A-módulos à direita tal que $g \circ i = f$, onde $i : A \to B$ é a inclusão e $f : A \to Q^r_{max}(A)$ é o homomorfismo canônico (de A-módulos à direita que a cada $a \in A$ associa $[A, a_l] \in Q^r_{max}(A)$, sendo que a_l é a multiplicação à esquerda por a definida em A). Além disso, este homomorfismo g é um monomorfismo de anéis. Em particular, B é um anel de quocientes à direita de A.*

(b) *B é o anel maximal de quocientes à direita de A se, e somente se, para cada ideal à direita denso I de A e cada homomorfismo de A-módulos à direita $\alpha : I \to A$, existe $b \in B$ tal que $\alpha(a) = ba$ para cada $a \in I$.*

Prova: Temos que B é um A-bimódulo e A é um A-submódulo de B. Sejam $\mathcal{D} = \{I \trianglelefteq A_A \,|\, I \trianglelefteq_d A_A\}$, $Q_{\mathcal{D}}$ como no Teorema 1.5.9 e temos que $Q^r_{max}(A) = Q_{\mathcal{D}}$.

(a) Seja $b \in B$ e seja I um ideal à direita denso de A, tal que $bI \subseteq A$. Definimos $g(b) = [I, b_l] \in Q^r_{max}(A)$ onde $b_l : I \to A$ é a multiplicação à esquerda por b definida em I. É fácil verificar que $g : B \to Q^r_{max}(A)$ está bem definida e é um homomorfismo de A-módulos à direita. Também, usando o fato que B_A é não-singular à direita, é fácil verificar que g é um monomorfismo de A-módulos à direita e é único satisfazendo as propriedades do item (a). Finalmente, como I é um ideal à direita denso de A, temos que $[A]_B = B$. Como B_A é não-singular à direita segue que $A \subseteq_d B_A$ e, portanto, B é um anel de quocientes à direita de A.

(b) A condição suficiente é uma conseqüencia óbvia da definição de $Q^r_{max}(A)$. A condição necessária segue do fato que $g : B \to Q^r_{max}(A)$, definida como na prova do item (a), é um isomorfismo de anéis. $\diamondsuit$

3.2.11 Lema $Q = Q^r_{max}(R) = Q^r_{max}(Q)$.

Prova: Como $Q = Q^r_{max}(R)$ e R é um anel não-singular à direita, temos que Q é um anel von Neumann regular e auto-injetivo à direita. Em particular, temos que Q é um anel semiprimo e, portanto, se I é um ideal de Q, então I é denso à direita em Q se, e somente se, $I \subseteq_e Q_Q$. Pelo Teorema 1.5.17 temos que Q é um anel não-singular à direita. Além disso, se I é um ideal de Q denso à direita e $\alpha : I_Q \to Q_Q$ é um homomorfismo de Q-módulos à direita, como Q_Q é um Q-módulo à direita que é injetivo, temos que α se estende a um homomorfismo de Q-módulos à direita, $\overline{\alpha} : Q_Q \to Q_Q$. Tomamos $b := \overline{\alpha}(1)$ e temos que para cada $q \in Q$, $\overline{\alpha}(q) = \overline{\alpha}(1q) = \overline{\alpha}(1)q = bq$. Em particular, $\alpha(a) = \overline{\alpha}(a) = ba$, para cada $a \in I$. Logo, pelo (Lema 3.2.10, (b)), segue facilmente que $Q = Q^r_{max}(Q)$. $\diamondsuit$

No que segue usaremos que $\varepsilon(Q) = \{H \trianglelefteq Q \,|\, H \trianglelefteq_e Q_Q\}$ e que $Q_\sigma(Q)$ é o anel de quocientes simétrico de Q, com respeito à $\varepsilon(Q)$.

3.2.12 Lema *$Q = Q^r_{max}(Q) = Q_\sigma(Q)$ é o anel de quocientes simétrico de Q, com respeito a $\varepsilon(Q)$.*

Prova: Evidente, pois $Q = Q^r_{max}(Q)$ e $Q \subseteq Q_\sigma(Q) \subseteq Q^r_{max}(Q)$. $\diamondsuit$

3.2.13 Observação Note que usando o Lema 3.2.12 obtemos que $(L^*, \overline{i})$, onde $\overline{i} : L^* \to L^*$ é a inclusão, é a extensão canônica livre de torção de L^*, como é fácil de verificar.

Provamos agora o resultado correspondente ao Teorema 3.1.11.

3.2.14 Teorema *Se $N \subseteq L_R$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$N^c_{L^*}$ é um Q-submódulo de L^*.*

(ii) *Existem um Q-submódulo K de L^* e $f : K \to K$ um endomorfismo idempotente de Q-bimódulos, tais que $K \subseteq_e L^*_R$ e $N^c_{L^*} = f(K)$.*

(iii) *Existe $U \subseteq L^*_Q$ ortogonal com $N^c_{L^*}$, tal que $N^c_{L^*} \oplus U \subseteq_e L^*_R$.*

(iv) *Existe $N' \subseteq L_R$ ortogonal com N, tal que $N \oplus N' \subseteq_e L_R$.*

(v) *Existe um Q-submódulo P de L^*, tal que $N \subseteq_e P_R$.*

Prova: $(i) \Rightarrow (iii)$ Temos que Q é um anel semiprimo e, pelo Lema 3.2.12, $Q = Q^r_{max}(Q) = Q_\sigma(Q)$. L^* é um Q-bimódulo centralizante e é tal que L^*_Q é não-singular à direita, já que L^*_R é não-singular à direita. Além disso, $(L^*, \overline{i})$ é a extensão canônica livre de torção de L^*. Temos que $N^c_{L^*} \subseteq L^*_Q$ e $(N^c_{L^*})^c_{L^*} = N^c_{L^*}$ é um Q-submódulo de L^*. Então, pelo Teorema 3.1.11, existe $U \subseteq L^*_Q$ ortogonal com $N^c_{L^*}$, tal que $N^c_{L^*} \oplus U \subseteq_e L^*_Q$. Segue que $N^c_{L^*} \oplus U \subseteq_e L^*_R$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ É como a prova de $(iii) \Rightarrow (iv)$, do Teorema 3.1.11.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Segue pela Proposição 3.2.9.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Como (i) equivale a (iv), seja $N' \subseteq L_R$ ortogonal com N tal que $N \oplus N' \subseteq_e L_R$. Então, pela Proposição 3.2.9, $N^c_{L^*}$ e $(N')^c_{L^*}$ são dois Q-submódulos de L^* tais que $N^c_{L^*} \oplus (N')^c_{L^*} \subseteq_e L^*_R$. Tomemos $K = N^c_{L^*} \oplus (N')^c_{L^*}$ e $f : K \to K$ a projeção sobre $N^c_{L^*}$ e assim concluimos (ii).

$(v) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que P seja um Q-submódulo de L^*, tal que $N \subseteq_e P_R$. Temos, como é fácil de verificar, que $N^c_{L^*} \subseteq_e (P^c_{L^*})_R$ já que $N \subseteq_e P_R$. Logo $N^c_{L^*} = P^c_{L^*}$. Ainda, como P é um Q-submódulo de L^*, pela aplicação do Teorema 3.1.11 e do Lema 3.2.12, segue que $P^c_{L^*}$ é um Q-submódulo de L^*, o que completa esta prova.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sejam K e f, como na hipótese (ii). Tomemos $(1-f) : K \to K$, que é um endomorfismo idempotente de Q-bimódulos, e $U = (1-f)(K)$, que é um Q-submódulo de L^*. Facilmente verificamos que U satisfaz (iii). $\diamondsuit$

Assim como no caso semiprimo podemos ampliar o resultado do Teorema 3.2.14 acrescentando a condição equivalente:

(iii') Existe $U \subseteq L^*_R$ ortogonal com $N^c_{L^*}$, tal que $N^c_{L^*} \oplus U \subseteq_e L^*_R$.

Da mesma forma, se no Teorema 3.2.14 tivermos que $N \subseteq {}_RL_R$ ao invés de $N \subseteq L_R$, podemos acrescentar a condição equivalente:

(v') Existe $N' \subseteq {}_RL_R$ ortogonal com N, tal que $N \oplus N' \subseteq_e L_R$.

O teorema seguinte é uma conseqüência do Teorema 3.2.14 e generaliza o resultado de ([8], Theorem 3.5).

3.2.15 Teorema *Suponhamos que a base centralizante de L seja finita. Sejam $N \subseteq L_R$ e a envoltória injetiva $E(N_R)$ de N. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$E(N_R)$ é um Q-submódulo de L^*.*

(ii) *Existem um Q-submódulo K de L^* e um endomorfismo idempotente de Q-bimódulos $f : K \to K$, tais que $K \subseteq_e L^*_R$ e $E(N_R) = f(K)$.*

(iii) *Existe $U \subseteq L^*_Q$ ortogonal com $E(N_R)$, tal que $E(N_R) \oplus U \subseteq_e L^*_R$.*

(iv) *Existe* $N' \subseteq L_R$ *ortogonal com* N*, tal que* $N \oplus N' \subseteq_e L_R$.

(v) *Existe um* Q*-submódulo* P *de* L^**, tal que* $N \subseteq_e P_R$.

Prova: Seja $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1}^n$ a base de elementos R-centralizantes de L e de elementos Q-centralizantes de L^*. Se $Q_i = Q$, para cada $i = 1, \ldots, n$, temos que o produto direto $\Pi_{i=1}^n Q_i$ é injetivo como um R-módulo à direita, já que Q_R é injetivo. Como L_R^* é isomorfo a $(\Pi_{i=1}^n Q_i)_R$, segue que L_R^* é injetivo. Deste fato decorre que se $N \subseteq L_R$, então a envoltória injetiva $E(N_R)$ de N se forma em L_R^* e, portanto, $E(N_R) = N_{L^*}^c$. Então o resultado é conseqüência imediata do Teorema 3.2.14. $\diamondsuit$

Observemos que os anéis semiprimos e Noetherianos à direita são também anéis não-singulares à direita. Consequentemente temos:

3.2.16 Corolário *Suponhamos que* R *é um anel semiprimo e Noetheriano à direita. Sejam* $N \subseteq L_R$ *e* $E(N_R)$ *a envoltória injetiva de* N*. Então as condições* (i) *a* (v) *do Teorema 3.2.15 são equivalentes.*

Prova: Sendo R um anel Noetheriano à direita, então $\sum_{i\in\Omega} \oplus Q_i$, onde $Q_i = Q$ para cada i, é injetivo como um R-módulo à direita já que Q_R é injetivo ([6], Page 10). Como L_R^* é isomorfo a $(\sum_{i\in\Omega} \oplus Q_i)_R$, então L^* é injetivo e a conclusão segue como no Teorema 3.2.15. $\diamondsuit$

Caso geral

Na tentativa de estender o Teorema 3.2.14 para o caso geral em que R é um anel não-singular à direita, $Q = Q_{max}^r(R)$ é o seu anel maximal de quocientes à direita e M é um R-bimódulo centralizante não-singular à direita, encontramos duas dificuldades. A primeira e maior consistiu no fato de o anel maximal de quocientes à direita de R não possuir, como no caso em que R é semiprimo, a propriedade que define o anel de quocientes simétrico de R. A segunda consistiu em não termos, neste caso, a equivalência das essencialidades, unilateral e bilateral, para submódulos de módulos centralizantes, como no caso semiprimo.

Com estas dificuldades, embora tenhamos conseguido provar a existência da extensão canônica livre de torção M^* de M, como um (R, Q)-bimódulo R-centralizante, não conseguimos provar que M^* fosse um Q-bimódulo centralizante. Se esta condição tivesse sido alcançada poderíamos tratar este caso geral com as mesmas idéias do caso livre.

É possível provar uma extensão do Teorema 3.2.14 trabalhando sobre anéis de Utumi bilaterais, que são identificados como os anéis não-singulares que têm os seus anéis maximais de quocientes à direita e esquerda iguais. Passaremos a definir tais anéis e, antes, enunciaremos alguns resultados que não serão provados aqui e que podem ser encontrados em ([14], Page 251).

3.2.17 Proposição *Se T é um anel qualquer, então $I_T^c \subseteq Ann_r(Ann_l(I))$, para cada $I \trianglelefteq T_T$.*

3.2.18 Proposição *Seja T um anel não-singular à direita e $Q^r_{max}(T)$ o seu anel maximal de quocientes à direita. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *Cada $I \trianglelefteq T_T$ que é essencialmente fechado à direita, é um ideal anulador à direita.*
- (ii) *Para cada $I \trianglelefteq T_T$, se verifica que $I_T^c = Ann_r(Ann_l(I))$.*
- (iii) *Para cada $I \trianglelefteq T_T$ tal que I não é essencial à direita em T, se verifica que $Ann_l(I) \neq 0$.*
- (iv) *Para cada ideal à esquerda não-nulo J de $Q^r_{max}(T)$, se verifica que $J \cap T \neq 0$.*

3.2.19 Definição *Um anel T é dito ser um* ***anel de Utumi à direita****, se T é um anel não-singular à direita e satisfaz qualquer uma das condições equivalentes da Proposição 3.2.18.*

Observemos que, de forma similar à Definição 3.2.19, definimos um ***anel de Utumi à esquerda*** e dizemos que T é um ***anel de Utumi bilateral***, se for um anel de Utumi à direita e à esquerda.

3.2.20 Proposição *Seja T um anel não-singular. Então $Q^r_{max}(T) = Q^l_{max}(T)$ se, e somente se, T é um anel de Utumi bilateral.*

Sejam R um anel de Utumi bilateral e Q o seu anel maximal de quocientes à direita, que é tal que $Q = Q^r_{max}(R) = Q^l_{max}(R)$. Seja M um R-bimódulo centralizante e não-singular, isto é, M é não-singular à direita e não-singular à esquerda.

Como no caso livre podemos provar a existência da extensão canônica livre de torção (M^*, j) de M, que será um (R, Q)-bimódulo R-centralizante, não-singular tal que $M \subseteq_e M^*_R$ e, usando o fato que $Q = Q^l_{max}(R) = Q^r_{max}(R)$, também podemos provar que M^* é um Q-bimódulo centralizante. Como na Observação 3.2.7 definimos uma família de submódulos à direita de M mutuamente ortogonais e, com provas semelhantes, obtemos extensões dos resultados 3.2.4, 3.2.6, 3.2.8 e 3.2.9 e, também, do Teorema 3.2.14. As observações e os resultados que seguem o Teorema 3.1.11 também valem neste caso. Em particular podemos definir a dimensão híbrida (3.1.12) e provar os resultados 3.1.13 e 3.1.14.

As seguintes observações e exemplos surgiram das dificuldades em resolver no caso não-singular, os problemas que aqui abordamos para o caso semiprimo.

3.2.21 Observação Sejam T um anel não-singular à direita, $Q(T) = Q^r_{max}(T)$ o seu anel maximal de quocientes à direita e P um T-bimódulo centralizante e não-singular à direita. Seja $N \subseteq {}_T P_T$.

(a) As condições (i) e (ii) abaixo são equivalentes:

(i) N é essencialmente fechado à direita em P.

(ii) Se $N \subset U_T \subseteq P_T$, então existe $0 \neq x \in U$ tal que $xT \cap N = 0$.

(b) As condições (iii) e (iv) abaixo não são equivalentes:

(iii) Se $N \subset U_T \subseteq P_T$, então existe $0 \neq x \in U$ tal que $xT \cap N = 0$.

(iv) Se $N \subset U_T$, então existe $0 \neq x \in U$ tal que $TxT \cap N = 0$.

De fato, o item (a) é evidente. Para mostrar o item (b), sejam $T = \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$ onde F é um corpo e $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$, que é um ideal de T. Temos que T é até um anel de Utumi bilateral e tomando $U = P = T$, segue que N satisfaz (iii) e não satisfaz (iv). Vejamos:

T é um anel não-singular à esquerda porque, como é fácil de verificar, temos que os únicos ideais à esquerda de T são: (0), T, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$ e, portanto, os únicos ideais à esquerda de T que são essenciais à esquerda em T são T e N. Além disso, se T ou N são anuladores à esquerda de um elemento $x \in T$, é claro que $x = 0$. Da mesma forma, facilmente verificamos que T é um anel não-singular à direita. Como $Q^r_{max}(T) = \begin{pmatrix} F & F \\ F & F \end{pmatrix} = Q^l_{max}(T)$, segue que T é um anel de Utumi bilateral.

N é essencialmente fechado à direita em T porque, se existe um ideal à direita N' de T tal que $N \subset_e N'$, temos que $N' = T$ e, portanto, tomando $0 \neq a \in F$, segue que $0 \neq x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N'$ e $xT \cap N \neq 0$, o que é uma contradição. Logo N satisfaz (iii). Para finalizar, N não satisfaz (iv) porque $N \subseteq_e {}_T T_T$, já que $N \subseteq_e {}_T T$.

3.2.22 Observação O exemplo da Observação 3.2.21 mostra que mesmo num anel de Utumi bilateral, o fecho à direita de um submódulo não precisa coincidir com o seu fecho à esquerda. De fato, T e N, como em 3.2.21, são tais que T é um anel de Utumi bilateral e o submódulo N de T é tal que $N^c_T \neq {}^c_T N$, já que $N^c_T = N$ e ${}^c_T N = T$.

3.2.23 Observação O exemplo da Observação 3.2.21 também mostra a existência de um anel de Utumi bilateral T com anel maximal de quocientes à direita $Q(T)$ e que possui um ideal bilateral N tal que $N^c_{Q(T)}$ é um ideal à direita e não é um ideal à esquerda de $Q(T)$, já que $N^c_{Q(T)} = N$.

CAPITULO 4

Teorema de estrutura

Se R é um anel não-singular à direita, o anel maximal de quocientes à direita $Q = Q^r_{max}(R)$ de R é um anel von Neumann regular e auto-injetivo à direita. A teoria de decomposição de um tal anel Q em um produto (possivelmente infinito) de anéis primos é analisado em [7]. Em [8], usando a notação do Capítulo 3, é provado que para cada $I \in \mathcal{F}(R)$, o estudo da soma direta arbitrária $\sum_{i \in C} \oplus I_i$ de ideais de R essencial à direita em I corresponde exatamente ao estudo da decomposição em produto direto arbitrário de anéis da envoltória injetiva $E(I_R)$ de I, que é um anel von Neumann regular e auto-injetivo à direita associado à I.

No que segue, como uma aplicação dos resultados do Capítulo 3, vamos estudar estas questões para módulos, na situação em que R é um anel semiprimo e $Q = Q_\sigma$ é o seu anel de quocientes simétrico, com respeito à ε, como na Seção 3.1 do Capítulo 3.

Para o que segue é importante registrar a existência de anéis que admitem famílias de bimódulos, $(M_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$, tais que $\sum_{\lambda \in \Omega} \oplus M_\lambda \subseteq_e (\Pi_{\lambda \in \Omega} M_\lambda)_R$. Inicialmente abordaremos esta questão.

4.1 Produto direto com soma direta essencial

Seja R um anel qualquer. Se $(M_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ é uma família independente qualquer de R-bimódulos, nem sempre se verifica que $\sum_{\lambda \in \Omega} \oplus M_\lambda \subseteq_e (\Pi_{\lambda \in \Omega} M_\lambda)_R$. De fato, por exemplo, se $R = \mathbb{Z}$ e $M_n = 2n\mathbb{Z}$ para $n \in \mathbb{N}$, é fácil verificar que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \oplus M_n$ não é essencial à direita em $(\Pi_{n \in \mathbb{N}} M_n)_{\mathbb{Z}}$.

4.1.1 Definição *Sejam R um anel e $(M_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ uma família de R-bimódulos. Dizemos que o R-bimódulo $M = \Pi_{\lambda \in \Omega} M_\lambda$ é um* ***produto direto de R-bimódulos com soma direta essencial****, se $\sum_{\lambda \in \Omega} \oplus M_\lambda \subseteq_e (\Pi_{\lambda \in \Omega} M_\lambda)_R$.*

4.1.2 Exemplo Na notação da Definição 4.1.1, se Ω é um conjunto finito de índices, temos que $\sum_{\lambda \in \Omega} \oplus M_\lambda = \Pi_{\lambda \in \Omega} M_\lambda$ e, portanto, $\sum_{\lambda \in \Omega} \oplus M_\lambda \subseteq_e (\Pi_{\lambda \in \Omega} M_\lambda)_R$.

4.1.3 Exemplo Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $R_n = \mathbb{Z}$, e consideremos o anel semiprimo $R = \Pi_{n\in\mathbb{N}} R_n$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ seja $M_m = \Pi_{i\in\mathbb{N}} X_i$, onde $X_i = (0)$, se $i \neq m$ e $X_i = X_m = 2m\mathbb{Z}$, se $i = m$. Temos que M_m é um R-bimódulo, definido com as operações naturais, para cada $m \in \mathbb{N}$. Ademais, como é fácil verificar, $M = \Pi_{m\in\mathbb{N}} M_m$ é um produto direto com soma direta essencial.

4.1.4 Exemplo Seja R um anel não-nulo qualquer. Para cada $0 \neq a \in R$, seja $\mathcal{M}_a$ um ideal maximal de R relativo à propriedade que $a \notin \mathcal{M}_a$. Consideremos o anel $\mathcal{R} = \Pi_{0\neq a\in R}(R/\mathcal{M}_a)$. Podemos construir $\mathcal{R}$-bimódulos M que são produtos diretos com soma direta essencial à direita, da seguinte forma:

Para cada $0 \neq a \in R$ tomamos M_a um $R/\mathcal{M}_a$-bimódulo e fazemos a identificação: $M_a = \Pi_{0\neq b\in R}(X_b)$, onde $X_b = (0)$ se $b \neq a$ e $X_a = M_a$. Temos que M_a é um $\mathcal{R}$-bimódulo com as operações naturais, para cada $0 \neq a \in R$ e, da mesma forma, $M = \Pi_{0\neq a\in R}(M_a)$. Ainda, M é um produto direto da família $(M_a)_{0\neq a\in R}$ com soma direta essencial à direita.

4.1.5 Exemplo Seja R um anel não-singular à direita e suponhamos que R_R é de dimensão finita, isto é, que R não tem uma família independente infinita de R-submódulos à direita.

Se $(A_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$, onde Ω é um conjunto infinito de índices, é uma família de R-módulos à direita independentes que são não-singulares à direita, temos que $\Pi_{\alpha\in\Omega} A_\alpha / \sum_{\alpha\in\Omega} \oplus A_\alpha$ é não-singular à direita e, então, não teremos que $\sum_{\alpha\in\Omega} \oplus A_\alpha$ é essencial à direita em $\Pi_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$.

4.1.6 Exemplo Seja R um anel tal que $R/J(R)$ é um anel semisimples, onde $J(R)$ é o radical de Jacobson de R. Seja $(M_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ uma família infinita de R-bimódulos semisimples. Então $M = \Pi_{\lambda\in\Omega} M_\lambda$ é um R-bimódulo semisimples, logo não tem submódulo essencial à direita não trivial. Daí $\sum_{\lambda\in\Omega} \oplus M_\lambda$ não é essencial à direita em $\Pi_{\lambda\in\Omega} M_\lambda$.

4.2 Teorema de estrutura

Lembramos que se R é um anel qualquer, um R-bimódulo K é dito ser ***primo como um R-módulo à direita*** se (0) é um submódulo primo como um R-

submódulo à direita de K, no sentido que cada submódulo à direita não-nulo de K tem o mesmo anulador à direita que é igual ao anulador à direita de K.

Vamos provar agora o último resultado deste trabalho, que estende ([8], Theorem 4.1)

4.2.1 Teorema *Sejam R um anel semiprimo, $Q = Q_\sigma$ o seu anel de quocientes simétrico e M um R-bimódulo centralizante, tal que M é livre de torção como um R-módulo à direita. Sejam (M^*, j) a extensão canônica livre de torção de M, $N \in \mathcal{F}(M)$ e C um conjunto qualquer de índices. Então:*

(i) Se $N^c_{M^*} = \Pi_{i\in C} P_i$ é um produto direto com soma direta essencial à direita de Q-submódulos P_i de M^*, então $N_i := P_i \cap N \subseteq {}_R M_R$ para cada $i \in C$ e $\sum_{i\in C} \oplus N_i \subseteq_e N_R$.

(ii) Suponhamos que N contém uma família $(N_i)_{i\in C}$ de submódulos à direita de M mutuamente ortogonais, tais que $\sum_{i\in C} \oplus N_i \subseteq_e N_R$. Se $\Pi_{i\in C}(N_i)^c_{M^*}$ é um produto direto com soma direta essencial à direita, então $N^c_{M^*}$ é isomorfo, como um Q-submódulo de M^*, a um submódulo P de $\Pi_{i\in C}(N_i)^c_{M^*}$ tal que $P \subseteq_e (\Pi_{i\in C}(N_i)^c_{M^*})_R$.

(iii) Se $(N_i)_{i\in C}$ é uma família de submódulos de M que tem as mesmas propriedades que a família dada em (ii), então para cada $i \in C$ se verifica,

$$d(N_i) = 1 \text{ se, e somente se, } d_G((N_i)^c_{M^*}) = 1,$$

onde $d_G((N_i)^c_{M^*})$ é a dimensão de Goldie bilateral de $(N_i)^c_{M^*}$ e além disso, neste caso, $(N_i)^c_{M^*}$ é um módulo primo como um Q-módulo à direita.

(iv) As afirmações (a) e (b) abaixo são equivalentes:

(a) $N^c_{M^*}$ é isomorfo, como um Q-submódulo de M^*, a um submódulo P de um produto direto com soma direta essencial à direita de Q-submódulos de M^*, $\Pi_{i\in C} P_i$, tal que $P \subseteq_e (\Pi_{i\in C} P_i)_R$ e $d_G(P_i) = 1$, para cada $i \in C$.

(b) Para cada $i \in C$ existe $N_i \subseteq {}_R N_R$, tal que $d(N_i) = 1$ e tal que $\sum_{i\in C} \oplus N_i \subseteq_e N_R$ e $\Pi_{i\in C}(N_i)^c_{M^*}$ é um produto direto de Q-submódulos de M^*, com soma direta essencial à direita.

Prova: (i) Temos que $N_i := P_i \cap N \subseteq_e (P_i \cap N^c_{M^*})_R = (P_i)_R$. Portanto, $\sum_{i\in C} \oplus N_i = \sum_{i\in C} \oplus (P_i \cap N) \subseteq_e (\sum_{i\in C} \oplus P_i)_R \subseteq_e (\Pi_{i\in C} P_i)_R = N^c_{M^*}$.

(ii) Como $N \in \mathcal{F}(M)$, seja $N' \subseteq M_R$ ortogonal com N tal que $N \oplus N' \subseteq_e M_R$ e, temos que $N^c_{M^*}$ e $(N')^c_{M^*}$ são ortogonais e $N^c_{M^*} \oplus (N')^c_{M^*} \subseteq_e M^*_R$. Sejam

$K = N^c_{M^*} \oplus (N')^c_{M^*}$ e $f : K \to K$ a projeção de K sobre $N^c_{M^*}$. Temos que $N^c_{M^*} = f(K)$ e f é um homomorfismo idempotente de Q-bimódulos.

Suponhamos que $(N_i)_{i\in C}$ seja uma família de submódulos à direita de M mutuamente ortogonais tal que $\sum_{i\in C} \oplus N_i \subseteq_e N_R$ e consideremos $(N_i)^c_{M^*}$, para cada $i \in C$. Temos que $N_i \oplus (N' \oplus \sum_{i\neq j} \oplus N_j) \subseteq_e M_R$ e, ainda, são ortogonais. Além disso, N e N', assim como N_i e $\sum_{j\neq i} \oplus N_j$, são, respectivamente, ortogonais para cada $i \in C$, como é fácil de verificar. Como $N_i \oplus (N' \oplus \sum_{j\neq i} \oplus N_j) \subseteq_e M_R$ para cada $i \in C$, segue pelo Teorema 3.1.11 que $(N_i)^c_{M^*} \subseteq {}_Q(M^*)_Q$ e $(N_i)^c_{M^*} = f_i(K)$ onde $K = N^c_{M^*} \oplus (N')^c_{M^*} = (N_i)^c_{M^*} \oplus (N' \oplus \sum_{j\neq i} \oplus N_j)^c_{M^*})$ e $f_i : K \to K$ é a projeção de K sobre $(N_i)^c_{M^*}$, que é um homomorfismo idempotente de Q-bimódulos para cada $i \in C$.

Definimos $\Phi : N^c_{M^*} \to \Pi_{i\in C}(N_i)^c_{M^*}$, que a $x \in N^c_{M^*}$ associa $(f_i(x))_{i\in C}$, e mostremos que é um monomorfismo de Q-bimódulos. É evidente que Φ é um homomorfismo de Q-bimódulos. Seja $x \in N^c_{M^*}$ tal que $\Phi(x) = 0$. Então $f_i(x) = 0$, para cada $i \in C$ e, portanto, $x \in ker(f_i) = (N' \oplus \sum_{j\neq i} \oplus N_j)^c_{M^*}$, para cada $i \in C$, ou seja, $x \in (N')^c_{M^*}$. Logo $x = 0$, o que prova que Φ é injetiva.

Notemos que $\sum_{i\in C} \oplus (N_i)^c_{M^*} \subseteq_e (N^c_{M^*})_R$, já que $\sum_{i\in C} \oplus N_i \subseteq_e N_R \subseteq_e (N^c_{M^*})_R$. Seja $P = \Phi(N^c_{M^*})$ e temos que P é um Q-submódulo de $\Pi_{i\in C}(N_i)^c_{M^*}$. Resta provar que $P \subseteq_e \Pi_{i\in C}(N_i)^c_{M^*}$. Como $\sum_{i\in C} \oplus N_i \subseteq_e N_R$, temos que $\sum_{i\in C} \oplus (N_i)^c_{M^*} \subseteq_e (N^c_{M^*})_R = P$. Então, como $\sum_{i\in C} \oplus (N_i)^c_{M^*} \subseteq_e \Pi_{i\in C}(N_i)^c_{M^*}$, segue que $P \subseteq_e \Pi_{i\in C}(N_i)^c_{M^*}$.

(iii) Suponhamos que $d(N_i) = 1$. Se $d_G((N_i)^c_{M^*}) > 1$, existem dois Q-submódulos X_1 e X_2 não-nulos de $(N_i)^c_{M^*}$ que são independentes. Então $X_1 \cap N_i$ e $X_2 \cap N_i$ são dois submódulos não-nulos e independentes de N_i. Segue que existe $X_3 \subseteq {}_R(N_i)_R$ não nulo, maximal tal que $X_3 \cap (X_1 \cap N_i) = (0)$, e temos que $(X_1 \cap N_i) \oplus X_3 \subseteq_e {}_R(N_i)_R$. Como R é um anel semiprimo segue que $(X_1 \cap N_i) \oplus X_3 \subseteq_e (N_i)_R$, o que contradiz o fato de que $d(N_i) = 1$. Logo, $d_G((N_i)^c_{M^*}) = 1$.

Reciprocamente, suponhamos que $d_G((N_i)^c_{M^*}) = 1$. Se $d(N_i) > 1$, existem dois submódulos não-nulos X e Y de N_i, tais que $X \oplus Y \subseteq_e (N_i)_R$. Como X e Y são ortogonais, segue que $X^c_{M^*}$ e $Y^c_{M^*}$ são dois Q-submódulos de M^*. Ademais, $X^c_{M^*}$ e $Y^c_{M^*}$ são não-nulos e independentes, o que contradiz o fato de que $d_G((N_i)^c_{M^*}) = 1$. Logo, $d(N_i) = 1$.

Resta provar que, no caso em que $d_G((N_i)^c_{M^*}) = 1$, então $(N_i)^c_{M^*}$, que é um Q-submódulo de M^*, é um módulo primo como um Q-módulo à direita. Seja $S \subseteq ((N_i)^c_{M^*})_Q$ e mostremos que $Ann^r_Q(S) = Ann^r_Q((N_i)^c_{M^*})$. Consideremos QS, que é um Q-submódulo de $(N_i)^c_{M^*}$. Seja $S' \subseteq {}_Q(N^c_{M^*})_Q$ maximal tal que $QS \cap S' = (0)$ e, como Q é semiprimo, temos que $QS \oplus S' \subseteq_e ((N_i)^c_{M^*})_Q$. Como $d_G((N_i)^c_{M^*}) = 1$ segue que $S' = 0$ e, portanto, que $QS \subseteq_e ((N_i)^c_{M^*})_Q$. Seja $a \in Q$

tal que $QSa = 0$. Como $QS \subseteq_e ((N_i)^c_{M^*})_Q$, segue que $[QS]$, o fecho de QS em M^* como um Q-bimódulo, é tal que $[QS] = (N_i)^c_{M^*}$. Então, se $x \in (N_i)^c_{M^*}$ segue que existe $K \subseteq_e Q_Q$ tal que $Kx \subseteq QS$ e, portanto, $Kxa = 0$. Logo $xa = 0$ e temos mostrado que $a \in Ann^r_Q((N_i)^c_{M^*})$. Segue que $Ann^r_Q(S) = Ann^r_Q(QS) = Ann^r_Q((N_i)^c_{M^*})$.

(iv) $(a) \Rightarrow (b)$ Suponhamos que $N^c_{M^*}$ seja isomorfo a um submódulo P de um produto direto com soma direta essencial à direita de Q-submódulos de M^*, $\Pi_{i\in C}P_i$, tal que $P \subseteq_e (\Pi_{i\in C}P_i)_R$ e $d_G(P_i) = 1$, para cada i. Definimos $N_i := P_i \cap N$ e temos, pelo item (i), que $\sum_{i\in C} \oplus N_i \subseteq_e N_R$ e, pelo item (iii), que $d(N_i) = 1$, para cada $i \in C$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Suponhamos que para cada $i \in C$ exista $N_i \subseteq {}_RN_R$ tal que $d(N_i) = 1$, $\sum_{i\in C} \oplus N_i \subseteq_e N_R$ e tal que $\Pi_{i\in C}(N_i)^c_{M^*}$ seja um produto direto de Q-submódulos de M^*, com soma direta essencial à direita. Observemos que $(N_i)_{i\in C}$ é uma família de submódulos de N mutuamente ortogonais e, portanto, a conclusão segue de (ii) e (iii) definindo-se $P_i := (N_i)^c_{M^*}$, para cada $i \in C$. $\diamondsuit$

4.2.2 Corolário *Sejam R, $Q = Q_\sigma$, M e (M^*, j) como no Teorema 4.2.1. Seja $N \in \mathcal{F}(M)$. Então:*

(i) *Se $N^c_{M^*} = \sum_{i=1}^n \oplus P_i$ onde P_i é um Q-submódulo de M^* para cada i, então $N_i := P_i \cap N \subseteq {}_RM_R$ para cada i, e $\sum_{i=1}^n \oplus N_i \subseteq_e N_R$.*

(ii) *Suponhamos que $(N_i)_{i=1}^n$ é uma família de submódulos à direita de M mutuamente ortogonais, tais que $\sum_{i=1}^n \oplus N_i \subseteq_e N_R$. Então cada $(N_i)^c_{M^*}$ é um Q-submódulo de M^* e $N^c_{M^*} = \sum_{i=1}^n \oplus (N_i)^c_{M^*}$.*

(iii) *As afirmações (a) e (b) abaixo são equivalentes:*

(a) Existe um número natural n tal que $N^c_{M^*} = \sum_{i=1}^n \oplus P_i$, onde cada P_i é um Q-submódulo de M^* tal que $d_G(P_i) = 1$.

(b) Existe um número natural n tal que para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $N_i \subseteq {}_RN_R$, onde $d(N_i) = 1$, $\sum_{i=1}^n \oplus N_i \subseteq_e N_R$, $((N_i)^c_{M^*})_{i=1}^n$ é uma família independente de Q-submódulos de M^*, onde cada $(N_i)^c_{M^*}$ é um módulo primo como um Q-módulo à direita e $N^c_{M^*} = \sum_{i=1}^n \oplus (N_i)^c_{M^*}$.

Ademais, vale o Teorema 4.2.1 quando $N = M$ e, em particular, quando $N = M$ e $d_G({}_RM_R) < \infty$, temos os resultados deste corolário para M^*.

Bibliografia

[1] M. Ferrero: *Centred bimodules over prime rings: Closed submodules and applications to ring extensions*, J. Algebra 172 (1995), 470-505.

[2] M. Ferrero: *Closed submodules of centred bimodules over semiprime rings, and applications to ring extensions*, Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra, vol.5, Number 4, pp. 309-346, 1996.

[3] M. Ferrero: *Some news results on closed submodules and ideals*, East-West J. of Mathematics: vol.1, $n^0 1$ (1998) p.p. 95-107.

[4] M. Ferrero: *Closed submodules of normalizing bimodules over semiprime rings*, Communications in Algebra, 29(4), (2001) 1513-1550.

[5] M. Ferrero and R. Wisbauer: *Closure Operations in Module Categories*, Algebra Colloq. 3:2 (1996), 169-182.

[6] K.R. Goodearl: *Ring Theory, Nonsingular Rings and Modules*, Monographs in Pure and Applied Mth., vol.33, Marcel Dekker, New York, 1976.

[7] K.R. Goodearl: *Von Neumann Regular Rings*, 2nd ed., Krieger, Malabar, FL, 1991.

[8] S.K. Jain, T.Y. Lam, A. Leroy: *On uniform dimensions of ideals in right nonsingular rings*, Journal of Pure and Applied Algebra 133 (1998) 117-139.

[9] N.H. McCoy: *The theory of rings*, New York, The Macmillan Company, 6^{th} printing, 1969.

[10] W.S. Martindale: *Prime rings satifying a generalized polynomial identity*, J. Algebra 12 (1969), 576-584.

[11] S. Montgomery: *Fixed Rings of Finite Automorphism Groups of Associative Rings*, Lecture Notes in Math. n^0 818, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[12] D.S. Passman: *Computing the symmetric rings of quotients*, J. Algebra 105 (1) (1987), 207-235.

[13] L. H. Rowen: *Ring Theory*, Pure and applied mathematics; 127-128. Academic Press, Inc, 1988.

[14] B. Stenström: *Ring of Quotients*, Springer-Verlag, Berlin-Heideberg, New York, 1975.

[15] R. Wisbauer: *Foundation of Module and Ring Theory*, Verlag Reinhard Fischer, Münschen 1988.