

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE  
FORMULAÇÕES GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS PARA  
ESCOAMENTOS NÃO NEWTONIANOS SENSÍVEIS À CINEMÁTICA

por

Flávia Schwarz Franceschini Zinani

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, setembro de 2006

DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE FORMULAÇÕES  
GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS PARA ESCOAMENTOS NÃO NEWTONIANOS  
SENSÍVEIS À CINEMÁTICA

por

Flávia Schwarz Franceschini Zinani

Engenheira de Alimentos

Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Comissão de avaliação:

Prof. Dr. Álvaro Toubes Prata, UFSC

Prof. Dr. Paulo Roberto de Souza Mendes, PUC-RJ

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen, PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Adriane Prisco Petry, PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Flávio José Lorini  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 29 de setembro de 2006

*“É melhor saber algumas das perguntas do que todas as respostas.”*

James Thurber

## **AGRADECIMENTOS**

Ao longo deste trabalho, contei com o apoio e a boa vontade de muitas pessoas, e gostaria de agradecer formalmente às seguintes:

Meu orientador, Prof. Dr. Sérgio Frey, por ter me dado a oportunidade de ingressar no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS como sua aluna, pela confiança, pelo estímulo, pela lealdade e pela amizade ao longo desses anos.

Colegas do LAMAC, pelo apoio e pelo companheirismo.

Professores, funcionários e alunos do Departamento de Engenharia Mecânica e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS por sempre terem sido prestativos e por terem tornado meu local de trabalho um segundo lar.

Meus amigos, que me aconselharam, me alegraram, me fizeram companhia e aceitaram minhas eventuais ausências.

Meu grande amigo, João Américo Aguirre Oliveira Jr., por estar sempre ao meu lado aprendendo e ensinando.

Meus mestres que, ao longo da minha vida acadêmica, foram exemplos de vidas dedicadas à ciência e ao conhecimento.

Minha querida família por todo amor, dedicação, confiança, incentivo, consolo, enfim, por tudo o que fizeram na construção de quem sou hoje.

Meu marido, Luís Fernando, pelo amor e pela felicidade de cada dia.

Finalmente, gostaria de agradecer às agências CAPES, pela bolsa de Doutorado, e CNPq, pelo financiamento das atividades de pesquisa.

## RESUMO

Este trabalho objetiva o desenvolvimento e a implementação computacional de aproximações Galerkin mínimos-quadrados (GLS) para escoamentos não Newtonianos inelásticos utilizando os modelos de Líquido Newtoniano Generalizado (GNL) e Fluido Quasi-Newtoniano sensível ao tipo de escoamento. Apesar de escoamentos de fluidos não Newtonianos serem cruciais em problemas de engenharia, eles representam, ainda hoje, um assunto em aberto, devido à dificuldade de se criar um modelo matemático para o comportamento não-linear das funções materiais medidas em laboratório e também à complexidade do problema gerado quando da aproximação dos modelos mecânicos disponíveis por métodos numéricos usuais. As equações clássicas de GNL possuem funções de viscosidade capazes de prever comportamentos pseudoplástico, viscoplástico ou dilatante, representado ajustes de curvas de tensão de cisalhamento versus taxa de cisalhamento em escoamentos viscométricos. Os modelos sensíveis ao tipo de escoamento são capazes de representar o comportamento diferenciado em regiões de cisalhamento e extensão, utilizando um parâmetro cinemático de classificação de escoamentos e curvas de escoamento em regimes viscométrico e extensional. As formulações multi-campos em tensão extra, pressão e velocidade ( $\tau$ - $p$ - $\mathbf{u}$ ), ou ainda com a taxa de deformação como variável primal, são alternativas para a aproximação numérica de escoamentos não Newtonianos que possuem diversas vantagens. Elas tornam desnecessário o pós-processamento do campo de velocidade para a obtenção dos campos de tensão, representando uma aproximação mais precisa especialmente para elementos de baixa ordem, desejáveis do ponto de vista computacional. Além disso, permitem a intuitiva extensão para a implementação de modelos viscoelásticos diferenciais. No entanto, a compatibilização dos sub-espacos funcionais das variáveis é uma dificuldade na implementação numérica, além das instabilidades numéricas intrínsecas aos operadores advectivos dos modelos. Como forma de superar essas dificuldades, uma estratégia de estabilização do tipo GLS é utilizada, a fim de permitir a implementação numérica das formulações em estudo, gerando a estabilidade necessária para várias combinações de sub-espacos funcionais. É apresentado um estudo dos princípios da Mecânica do Contínuo, de teoria constitutiva, e do método de elementos finitos, com ênfase nos métodos estabilizados do tipo GLS para formulações  $\mathbf{u}$ - $p$ ,  $\tau$ - $p$ - $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{D}$ - $p$ - $\mathbf{u}$ . São apresentados resultados numéricos validando o código computacional desenvolvido, e também investigando escoamentos de fluidos Newtonianos, viscoplásticos, pseudoplásticos e quasi-Newtonianos em geometrias como cavidades e contrações. O método se mostra estável e os resultados fisicamente realistas. No entanto, o modelo sensível ao tipo de escoamento demonstra sérios problemas de convergência nos casos nos quais a não-linearidade material é acentuada.

## ABSTRACT

“Development and Computational Implementation of Galerkin Least-Squares Formulations in  
for Non Newtonian Kinematic Sensitive Fluids”

This work aims the development and computational implementation of Galerkin least-squares (GLS) approximations for non Newtonian purely viscous flows employing Generalized Newtonian Liquid (GNL) and Quasi-Newtonian flow type sensitive models. Despite non Newtonian flows are crucial in many problems in engineering, they represent an open subject, due to the difficulty of building a mathematical model for the non-linear behavior of material functions obtained experimentally, and also due to the complexity of the problem generated by the approximation of the available mechanical models via usual numerical methods. In the classical GNL equations there are viscosity functions that are able to predict pseudoplastic, viscoplastic and dilatant behavior, representing the curve fitting of shear stress versus shear rate in viscometric flows. The flow type sensitive models are able to predict the different behavior in regions of shearing and extension, employing a kinematic parameter to classify the flows and the flow curves in viscometric and extensional flows. Multi-field formulations in extra-stress, pressure and velocity ( $\boldsymbol{\tau}$ - $p$ - $\mathbf{u}$ ), or even with the strain rate as a primal variable, are alternatives to the numerical approximation of non Newtonian flows that possess many advantages. They render unnecessary the post-processing of the velocity field to obtain the stress fields, representing a more accurate for low-order elements, eligible from the numerical standpoint. Besides, they allow the intuitive extension for the implementation of viscoelastic differential models. However, the compatibilization of functional sub-spaces of the variables is a difficulty in the numerical implementation, besides the numerical instability intrinsic to the advective operators in the models. As a path to come over these difficulties, a stabilization strategy of GLS type is employed, so as to allow the numerical implementation of the formulations, achieving the necessary stability for various combinations of functional sub-spaces. A study of the principles of Continuum Mechanics, constitutive theory and the finite element method is presented, with emphasis in the GLS methods for  $\mathbf{u}$ - $p$ ,  $\boldsymbol{\tau}$ - $p$ - $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{D}$ - $p$ - $\mathbf{u}$  formulations. Numerical results are presented, validating the computational code developed, and investigating flows of Newtonian, viscoplastic, pseudoplastic and quasi-Newtonian fluids different geometry, as cavities and contractions. The methods are noticeable stable and physically comprehensive. Although, the flow type sensitive model shows serious convergence problems in the cases when the non-linearity is too pronounced.

# ÍNDICE

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS .....	3
1.1.1 Viscosidade variável em escoamentos puramente cisalhantes .....	5
1.1.2 Efeitos de diferenças de tensões normais em escoamentos cisalhantes.....	5
1.1.3 Efeitos de memória.....	6
1.1.4 Viscosidade extensional variável .....	7
1.1.5 Grupos adimensionais na dinâmica dos fluidos não Newtonianos.....	7
1.2 CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO DE ESCOAMENTOS.....	8
1.3 ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS .....	10
1.4 O MÉTODO DE GALERKIN .....	11
1.5 MÉTODOS ESTABILIZADOS .....	12
1.6 FORMULAÇÕES MULTI-CAMPOS.....	14
1.7 PLANO DO TRABALHO .....	15
<b>2. PRINCÍPIOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO.....</b>	<b>16</b>
2.1 CINEMÁTICA.....	16
2.1.1 Tensores de medidas de deformações .....	18
2.1.2 Transformações sob uma mudança de referencial .....	21
2.1.3 Indiferença ao referencial.....	23
2.1.4 Derivadas objetivas.....	23
2.2 CLASSIFICAÇÃO CINEMÁTICA DE ESCOAMENTOS.....	25
2.3 AS LEIS DE BALANÇO.....	28
2.3.1 Conservação da massa.....	28
2.3.2 Balanço de quantidade de movimento .....	29
2.3.3 Conservação da energia e princípio de aumento de entropia .....	31
<b>3. COMPORTAMENTO MATERIAL .....</b>	<b>34</b>
3.1 FLUIDOS PURAMENTE VISCOSOS .....	36
3.2 FLUIDOS VISCOELÁSTICOS .....	40
3.2.1 Expansões de Rivlin-Ericksen .....	41
3.2.2 Modelos diferenciais .....	43
3.2.3 Modelos integrais.....	50
3.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS SENSÍVEIS AO TIPO DE ESCOAMENTO.....	51
<b>4. O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>56</b>
4.1 O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A PROBLEMAS DE ESCOAMENTO SEM INÉRCIA .....	58
4.1.1 Formulação forte.....	58
4.1.2 Formulação fraca.....	58
4.1.3 Formulação de Galerkin .....	59
4.1.4 Funções de aproximação .....	61
4.1.5 A dificuldade do método de Galerkin.....	62
4.1.6 Uma formulação estabilizada para problemas de escoamentos sem inércia .....	63
4.1.7 Considerações sobre estabilidade.....	63
4.1.8 Exemplos numéricos.....	65
4.2 O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A PROBLEMAS DE ESCOAMENTOS COM INÉRCIA .....	68
4.2.1 Formulação forte.....	68
4.2.2 Formulação de Galerkin .....	68

4.2.3	<i>As dificuldades do método de Galerkin</i> .....	69
4.2.4	<i>Uma formulação estabilizada para problemas de escoamento com inércia</i> .....	72
4.2.5	<i>Considerações sobre estabilidade</i> .....	73
4.2.6	<i>Sistema matricial</i> .....	75
4.2.7	<i>Método de Newton</i> .....	76
4.2.8	<i>Exemplos numéricos - validação</i> .....	78
4.3	<b>O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A FORMULAÇÕES MULTI-CAMPOS PARA PROBLEMAS DE ESCOAMENTOS</b> .....	81
4.3.1	<i>Formulação em três campos (<math>\tau</math>-<math>p</math>-<math>u</math>) – formulação forte</i> .....	81
4.3.2	<i>Formulação de Galerkin</i> .....	82
4.3.3	<i>As dificuldades do método de Galerkin</i> .....	82
4.3.4	<i>Uma formulação estabilizada para o problema de Stokes em três campos</i> .....	84
4.3.5	<i>Considerações sobre estabilidade</i> .....	85
4.3.6	<i>Formulações multi-campos para problema linearizado de escoamento de fluido Oldroyd-B</i> .....	86
4.3.7	<i>Formulações GLS multi-campos para um problema linearizado de escoamento de fluido Oldroyd-B</i> .....	88
4.3.8	<i>Formulação em três campos para problemas de escoamento com advecção</i> .....	92
<b>5.</b>	<b>METODOLOGIA E RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	<b>94</b>
5.1	<b>METODOLOGIA</b> .....	94
5.1.1	<i>Equação constitutiva e funções para a viscosidade</i> .....	94
5.1.2	<i>Modelo mecânico: duas formulações multi-campos</i> .....	99
5.1.3	<i>Formulações estabilizadas de elementos finitos</i> .....	99
5.1.4	<i>Sistema de equações algébricas e algoritmo de solução</i> .....	101
5.2	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	103
5.2.1	<i>Escoamentos Newtonianos em cavidade forçada</i> .....	105
5.2.2	<i>Escoamentos não Newtonianos em cavidade forçada</i> .....	111
5.2.3	<i>Escoamentos de fluidos pseudoplásticos em contração planar</i> .....	118
5.2.4	<i>Escoamentos de fluidos pseudoplásticos em contração axissimétrica</i> .....	123
5.2.5	<i>Escoamentos puramente cisalhantes</i> .....	129
5.2.6	<i>Escoamentos quasi-Newtonianos através de uma contração abrupta com quina arredondada</i> .....	134
5.2.7	<i>Escoamentos quasi-Newtonianos através de uma contração abrupta com quina viva</i> .....	139
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b> .....	<b>145</b>
6.1	<b>CONCLUSÕES</b> .....	145
6.2	<b>PERSPECTIVAS FUTURAS</b> .....	147
<b>7.</b>	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>150</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>a</b>	Aceleração .....	[m/s <sup>2</sup> ]
<b><math>\mathcal{A}</math></b>	Vetor incremental do método de Newton .....	[ ]
<b>A</b>	Pontos nodais da malha de elementos finitos .....	[ ]
<b><math>A_N</math></b>	$N$ -ésimo tensor de Rivlin-Ericksen.....	[s <sup>-1</sup> ]
<b>b</b>	Força de corpo por unidade de volume .....	[N/m <sup>3</sup> ]
<b><math>b_m</math></b>	Força de corpo por unidade de massa .....	[N/kg]
<b><math>\mathcal{B}</math></b>	Corpo material.....	[ ]
<b>B</b>	Forma do funcional do método de elementos finitos .....	[ ]
<b>B</b>	Tensor de Green .....	[ ]
<b>C</b>	Tensor de Cauchy .....	[ ]
<b><math>C^0</math></b>	Espaço das funções contínuas .....	[ ]
<b><math>C_h</math></b>	Partição do domínio $\Omega$ em elementos finitos .....	[ ]
<b>D</b>	Tensor taxa de deformação.....	[s <sup>-1</sup> ]
<b><math>d_A</math></b>	Graus de liberdade incógnitos para um problema genérico .....	[ ]
<b>De</b>	Número de Deborah .....	[ ]
<b><math>d_i</math></b>	Autovetores de $\mathbf{W}_D$ .....	[ ]
<b>d</b>	Taxa de deformação incógnita .....	[s <sup>-1</sup> ]
<b>E</b>	Matrizes associada à equação constitutiva .....	[ ]
<b><math>e_i</math></b>	Vetor canônico na direção $i$ .....	[ ]
<b>err</b>	Erro máximo admitido para o método de Newton .....	[ ]
<b>f</b>	Deformação .....	[m]
<b>F</b>	Funcional dos métodos de elementos finitos .....	[ ]
<b>F</b>	Tensor gradiente de deformação .....	[ ]
<b><math>F_{abc}</math></b>	Funcional que define a forma da derivada objetiva .....	[ ]
<b>G</b>	Matriz associada aos termos de pressão e continuidade.....	[ ]
<b><math>g^h</math></b>	Função de velocidade .....	[m/s]
<b>H</b>	Matriz associada aos termos forças de corpo .....	[ ]
<b><math>H_0^1</math></b>	Espaço de Sobolev.....	[ ]
<b><math>H^1</math></b>	Espaço de Sobolev.....	[ ]
<b>I</b>	Tensor unitário .....	[ ]

$int$	Função que retorna a parte inteira do argumento .....	[ ]
$I_J, II_J, III_J$	Invariantes de um tensor genérico $\mathbf{J}$ .....	[ ]
$II_J$	Traço do quadrado do tensor genérico $\mathbf{J}$ : $tr\mathbf{J}^2$ .....	[ ]
$\mathbf{K}$	Matriz associada aos termos difusivos .....	[ ]
$L$	Dimensão característica.....	[m]
$\mathbf{L}$	Tensor gradiente de velocidade .....	[s <sup>-1</sup> ]
$L^2$	Espaço das funções de quadrado integráveis .....	[ ]
$\mathbf{n}$	Normal exterior unitária .....	[ ]
$n$	Parâmetro <i>power-law</i> nas funções de viscosidade .....	[ ]
$\mathbf{N}(\mathbf{u})$	Matriz associada ao termo de advecção do problema pressão-velocidade .....	[ ]
$N_A$	Função de forma associada ao nó global $A$ da partição $C_h$ .....	[ ]
$nsd$	Número de dimensões do problema .....	[ ]
$\mathbf{o}$	Origem de um sistema referencial .....	[ ]
$P$	Espaço funcional da pressão.....	[ ]
$\mathcal{P}$	Parte de um corpo material.....	[ ]
$p$	Pressão .....	[Pa]
$P$	Pressão termodinâmica.....	[Pa]
$\mathbf{P}$	Tensor de persistência de deformação linear .....	[ ]
$p^h$	Aproximação do campo de pressão do fluido .....	[Pa]
$P^h$	Sub-espaço de $P$ .....	[ ]
$P_m$	Espaço polinomial de grau $m$ para elemento triangular ou tetraédrico .....	[ ]
$\mathbf{q}$	Fluxo de calor .....	[W/m <sup>2</sup> ]
$q$	Função peso de pressão .....	[ ]
$\mathbf{Q}$	Tensor ortogonal (rotação).....	[ ]
$Q_m$	Espaço polinomial de grau $m$ para elemento quadrilátero ou hexaédrico.....	[ ]
$R_A$	Parâmetro de classificação de escoamentos de Astarita.....	[ ]
$R_R$	Parâmetro de classificação de escoamentos de Thompson e Souza Mendes.....	[ ]
$R_r$	Parâmetro de classificação de escoamentos normalizado .....	[ ]
$\mathcal{R}$	Espaço dos números reais.....	[ ]
$\mathbf{R}$	Quadrado do tensor taxa de rotação relativa, $\mathbf{R}=\bar{\mathbf{W}}^2$ , .....	[ ]
$\mathbf{r}$	Translação .....	[m]
$Re$	Número de Reynolds .....	[ ]
$Re_K$	Número de Reynolds de malha .....	[ ]

$R_m$	Espaço polinomial de grau $m$ ..... [ ]
$S$	Entropia ..... [J/K]
$\mathbf{S}$	Função peso para tensão/taxa de deformação ..... [ ]
$T$	Temperatura.....[K]
$\mathbf{T}$	Tensor tensão..... [Pa]
$\mathbf{t}$	Vetor tensão..... [Pa]
$t$	Tempo ..... [s]
$t^*$	Tempo adimensional ..... [ ]
$t_f$	Tempo característico do sistema ..... [s]
$\mathcal{U}$	Variável genérica..... [ ]
$U$	Energia interna por unidade de massa ..... [J/kg]
$\mathbf{U}$	Tensor de estiramento à direita ..... [ ]
$U_{el}$	Acúmulo de energia interna ..... [J/kg]
$\mathbf{u}$	Velocidade incógnita ..... [m/s]
$u_0$	Velocidade de referência ..... [m/s]
$\mathbf{u}^h$	Função teste para a velocidade..... [m/s]
$\mathcal{V}$	Espaço funcional do campo de velocidade..... [ ]
$\mathbf{V}$	Tensor de estiramento à esquerda ..... [ ]
$\mathbf{v}$	Velocidade..... [m/s]
$\mathcal{V}_g^h$	Sub-espaço de $\mathcal{V}$ ..... [ ]
$\mathcal{V}^h$	Sub-espaço de $\mathcal{V}$ ..... [ ]
$\mathbf{v}^h$	Função peso da velocidade na discretização $C_h$ ..... [ ]
$\bar{\mathbf{W}}$	Tensor taxa de rotação relativa dos autovetores de $\mathbf{D}$ ..... [ ]
$\mathbf{W}$	Tensor vorticidade..... [s <sup>-1</sup> ]
$\mathbf{W}_D$	Tensor taxa de rotação dos autovetores de $\mathbf{D}$ ..... [ ]
$We$	Número de Weissenberg ..... [ ]
$\mathbf{w}^h$	Função de velocidade ..... [ ]
$w_i$	Autovalores de $\mathbf{W}_D$ ..... [ ]
$\mathbf{X}$	Posição de referência ..... [m]
$\mathbf{x}$	Posição..... [m]
$\mathbf{x}_A$	Coordenada global do nó $A$ ..... [m]
$\mathbf{Y}$	Espaço funcional das tensões/taxas de deformação ..... [ ]
$\mathbf{Y}^h$	Sub-espaço de $\mathbf{Y}$ ..... [ ]

## LETRAS GREGAS

$\alpha, \beta, \sigma$	Parâmetros a valor real .....	[ ]
$\delta_{ij}$	Função delta de Kroenecker .....	[ ]
$\delta_2$	Parâmetro de estabilidade .....	[ ]
$\delta$	Parâmetro do método EVSS .....	[ ]
$\varepsilon$	Espaço euclidiano .....	[ ]
$\dot{\varepsilon}$	Taxa de extensão .....	[s <sup>-1</sup> ]
$\Phi$	Função tensorial arbitrária .....	[ ]
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação .....	[s <sup>-1</sup> ]
$\dot{\gamma}_c$	Taxa de deformação característica .....	[s <sup>-1</sup> ]
$\Gamma$	Fronteira do domínio $\Omega$ .....	[ ]
$\Gamma_g$	Parte da fronteira $\Gamma$ na qual são impostas condições de Dirichlet.....	[ ]
$\Gamma_h$	Parte da fronteira $\Gamma$ na qual são impostas condições de Neumann .....	[ ]
$\eta$	Função viscosidade .....	[Pa.s]
$\eta_\infty$	Viscosidade à taxa de deformação infinita .....	[Pa.s]
$\eta_1, \eta_2$	Funções de viscosidades elongacionais.....	[Pa.s]
$\eta_c$	Viscosidade característica .....	[Pa.s]
$\eta_u$	Função viscosidade de Trouton.....	[Pa.s]
$\eta_0$	Parâmetro de viscosidade de modelos não Newtonianos .....	[ ]
$\lambda$	Tempo característico do fluido.....	[s]
$\mathfrak{M}$	Massa da região $\mathcal{P}$ de um corpo .....	[kg]
$\mu$	Viscosidade de fluido Newtoniano.....	[Pa.s]
$\nu$	Viscosidade cinemática .....	[m <sup>2</sup> /s]
$\rho$	Massa específica .....	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\Sigma$	Função peso para taxa de deformação no método EVSS.....	[s <sup>-1</sup> ]
$\tau$	Parâmetro de estabilidade .....	[ ]
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor extra de tensão.....	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}'$	Tensor deviatórico igual a $\boldsymbol{\tau} + p\mathbf{I}$ .....	[Pa]
$\tau_{ij}$	Componentes do tensor extra de tensão .....	[Pa]
$\tau_0$	Tensão limite de escoamento ( <i>yield stress</i> ).....	[Pa]

$\Omega$	Domínio do problema .....	[ ]
$\omega$	Vetor taxa de rotação relativa .....	[ ]
$\Psi_1$	Coeficiente de primeira diferença de tensões normais .....	[Pa.s <sup>2</sup> ]
$\Psi_2$	Coeficiente de segunda diferença de tensões normais .....	[Pa.s <sup>2</sup> ]

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Pág.
1.1: Comportamento dos filamentos microscópicos em escoamentos puramente cisalhantes ....	9
1.2: Comportamento dos filamentos microscópicos em escoamentos puramente extensionais ..	10
3.1: O modelo de Maxwell.....	44
3.2: O modelo de Jeffreys .....	45
4.1: Esquema do problema de escoamento forçado em cavidade .....	66
4.2: Resultados do método de Galerkin para escoamento sem inércia em cavidade (elemento $Q_2/Q_1$ ): vetores de velocidade, isobáricas e elevação da pressão.....	66
4.3: Resultados do método de Galerkin para escoamento sem inércia em cavidade (elemento $Q_1/Q_1$ ): vetores de velocidade e elevação da pressão.....	67
4.4: Resultados do método GLS para escoamento sem inércia em cavidade (elemento $Q_1/Q_1$ ): vetores de velocidade e elevação da pressão.....	67
4.5: Algoritmo 1 .....	78
4.6: Linhas de corrente na cavidade, formulação GLS, 50x50 elementos $Q_1/Q_1$ . (a) Re=400, (b) Re=5000 .....	79
4.7: Elevação da pressão, GLS 50x50 elementos $Q_1/Q_1$ . (a) Re=400, (b) Re=5000 .....	80
4.8: Formulação GLS, 120x120 elementos $Q_1/Q_1$ . Perfis de (a) velocidade horizontal, (b) velocidade vertical, Re=400.....	80
5.1: Função viscosidade de Carreau. Padrão ( $\lambda=10, n=0.5$ ), fluido 1 ( $\lambda=0.5, n=0.5$ ) e fluido 2 ( $\lambda=10, n=0.05$ ). .....	95
5.2: Funções de viscosidade de Carreau em cisalhamento e extensão.....	97
5.3: $f(R_r)$ versus $R_r$ .....	98
5.4: Função viscosidade versus $R_r$ e $\dot{\gamma}$ .....	98
5.5: Algoritmo 2 .....	103
5.6: Esquema do problema de escoamento em cavidade .....	105
5.7: Elevação da pressão para os casos a e c.....	106
5.8: Campos de $\tau_{12}$ , $\tau_{11}$ e $\tau_{22}$ para o caso a .....	107
5.9: Linhas de corrente para (a) Re=1 e (b) Re=400.....	108
5.10: Velocidade horizontal versus posição em $x_2$ . (a) Re=1, (b) Re=100, (c) Re=400. ....	109

5.11: Perfis de pressão na linha média horizontal.....	110
5.12: Elevação da pressão (a) $Re=50, n=1.5$ ; e (b) $Re=500, n=0.5$ . ....	112
5.13: Linhas de corrente para $Re=100$ . (a) $n=0.25$ , (b) $n=0.5$ , (c) $n=0.75$ , (d) $n=1$ , (e) $n=1.5$ . ...	113
5.14: Linhas de corrente para $n=0.5$ . (a) $Re=50$ , (b) $Re=200$ , (c) $Re=300$ , (d) $Re=500$ .....	113
5.15: Linhas de corrente para $n=1.5$ . (a) $Re=50$ , (b) $Re=200$ , (c) $Re=300$ , (d) $Re=500$ .....	114
5.16: Posição do olho do vórtice. (a) detalhe com as etiquetas para $Re$ , (b) posição das curvas na cavidade.....	115
5.17: (a) Velocidade horizontal versus $x_2$ , $Re=50, n=0.5$ , (b) velocidade vertical versus $x_1$ , $Re=50, n=0.5$ , (c) velocidade horizontal versus $x_2$ , $Re=100, n=1.5$ , (b) velocidade vertical versus $x_1$ , $Re=100, n=1.5$ .....	116
5.18: (a) Velocidade horizontal versus $x_2$ , (b) velocidade vertical versus $x_1$ , $Re=100$ .....	116
5.19: (a) Velocidade horizontal versus $x_2$ , (b) velocidade vertical versus $x_1$ , $n=0.5$ . ....	117
5.20: (a) Velocidade horizontal versus $x_2$ , (b) velocidade vertical versus $x_1$ , $n=1.5$ . ....	117
5.21: Colocação do problema de escoamento pseudoplástico em contração planar. ....	118
5.22: Elevação da pressão para (a) $Re=1$ e (b) $Re=100$ . ....	118
5.23: Campos de viscosidade: (a) $Cu=0.5, n=0.5$ , (b) $Cu=0.5, n=0.1$ , (c) $Cu=50, n=0.5$ and (d) $Cu=50, n=0.1$ .....	119
5.24: Campos de $\tau_{11}$ : (a) $Cu=0.5, n=0.5$ , (b) $Cu=0.5, n=0.1$ , (c) $Cu=50, n=0.5$ , (d) $Cu=50, n=0.1$ . ....	120
5.25: Campos de $\tau_{12}$ : (a) $Cu=0.5, n=0.5$ , (b) $Cu=0.5, n=0.1$ , (c) $Cu=50, n=0.5$ , (d) $Cu=50, n=0.1$ . ....	120
5.26: Campos de $u_2$ : (a) $Cu=0.5, n=0.5$ , (b) $Cu=0.5, n=0.1$ , (c) $Cu=50, n=0.5$ , (d) $Cu=50, n=0.1$ . ....	121
5.27: Perfil de $u^*$ . (a) Perfil totalmente desenvolvido à montante da contração, (b) a uma distância $L$ à montante da contração, (c) no plano da contração.....	122
5.28: Queda de pressão ao longo do plano de simetria: (a) Fluido Newtoniano a $Re=1$ e fluidos a baixo $Cu$ e $Re=1$ , (b) fluido Newtoniano a $Re=100$ e fluidos a altos $Cu$ e $Re=1$ . ....	123
5.29: Colocação do problema de escoamento pseudoplástico em contração axissimétrica... ..	123
5.30: Campos de viscosidade: (a) $Cu=10, n=0.2$ , (b) $Cu=100, n=0.2$ .....	124
5.31: Iso-regiões de $u_1^*$ e linhas de corrente para $Re=2$ e $n=0.2$ . (a) $Cu=10$ , (b) $Cu=100$ ....	125
5.32: Iso-regiões de $\tau_{12}$ para $Re=2$ e $n=0.2$ . (a) Fluido Newtoniano (b) $Cu=10$ , (c) $Cu=100$ .125	125
5.33: Iso-regiões de $\tau_{11}$ para $Re=2$ e $n=0.2$ . (a) Fluido Newtoniano (b) $Cu=10$ , (c) $Cu=100$ .126	126
5.34: Iso-regiões de $u_2^*$ para $Re=2$ e $n=0.2$ . (a) Fluido Newtoniano (b) $Cu=10$ , (c) $Cu=100$ .126	126

5.35. Perfis da velocidade axial no plano de contração, (a) $Re=2$ , $n=0.2$ , vários $Cu$ , (b) $Re=2$ , $Cu=100$ , vários $n$ , (c) $n=0.2$ , $Cu=100$ , vários $Re$ .	127
5.36. Perfis da velocidade axial ao longo da linha de simetria, (a) $Re=2$ , $n=0.2$ , vários $Cu$ , (b) $Re=2$ , $Cu=100$ , vários $n$ , (c) $n=0.2$ , $Cu=100$ , vários $Re$ .	128
5.37. Queda de pressão ao longo da linha de simetria.	129
5.38: Domínio do problema de escoamento entre duas placas planas.	129
5.39: Perfis de (a) velocidade axial $u_1$ e (b) $D_{12}$	131
5.40: Perfis de velocidade para os diversos fluidos	131
5.41: Perfis de $D_{12}$ para os diversos fluidos	132
5.42: Perfis de viscosidade para os diversos fluidos.	133
5.43: Colocação do problema de escoamento através de contração abrupta com quina arredondada.	134
5.44: Campo de $R_r$ no escoamento Newtoniano através da contração.	135
5.45: Linhas de corrente para o escoamento Newtoniano através da contração	135
5.46: Função viscosidade para (a) $n_s=0.1$ e $n_{ex}=1.0$ , (b) $n_s=0.5$ e $n_{ex}=1.5$ e (c) $n_s=1.0$ e $n_{ex}=2.5$ .	136
5.47: Perfis de velocidade a diferentes distâncias da contração: (a) $-11L$ , (b) $-0.5L$ , (a) $-0.5L$ (detalhe), (d) $0.375L$ e (e) $2.5L$ .	137
5.48: Perfis de $\tau_{11}^*$ e $\tau_{22}^*$ ao longo da linha de simetria do escoamento.	139
5.49: Colocação do problema de escoamento através de contração abrupta	139
5.50: Campo de $R_r$ no escoamento Newtoniano através da contração abrupta.	140
5.51: Linhas de corrente para o escoamento Newtoniano através da contração abrupta	141
5.52: Função viscosidade para (a) $n_s=0.1$ e $n_{ex}=1.0$ , (b) $n_s=0.5$ e $n_{ex}=1.5$ e (c) $n_s=1.0$ e $n_{ex}=2.5$ .	141
5.53: Perfis de velocidade a diferentes distâncias da contração: (a) $-11L$ , (b) $-0.5L$ , (a) $-0.5L$ (detalhe), (d) $0L$ e (e) $2.5L$	143
5.54: Perfis de $\tau_{11}^*$ e $\tau_{22}^*$ ao longo da linha de simetria do escoamento.	144

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela	Pág.
5.1: Posição do olho do vórtice no problema da cavidade .....	110
5.2: Valores mínimos e máximos das componentes da velocidade nas linhas médias da cavidade .....	117
5.3: Fator de atrito no escoamento entre duas placas planas para os fluidos estudados .....	133

## 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho foi motivado pelo interesse demonstrado atualmente, tanto por pesquisadores da área acadêmica quanto por pesquisadores dos setores industriais de engenharia, pela aplicação da Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD – *Computational Fluid Dynamics*) em problemas envolvendo fluidos não Newtonianos. Esse interesse tem gerado uma alta produção científica, abrangendo os mais diversos enfoques que envolvem este vasto tema. Entre os enfoques, pode-se citar: o desenvolvimento de modelos constitutivos que melhor aproximam o comportamento real de fluidos; a identificação de parâmetros materiais dentro desses modelos; a aproximação numérica das equações constitutivas, utilizando os diversos métodos existentes; a proposição de novas metodologias de aproximação das equações; a análise de viabilidade, erro e convergência das aproximações propostas; a validação das aproximações; a aproximação numérica de problemas de referência, com solução conhecida, para a validação de modelos constitutivos e numéricos; a investigação da dinâmica dos escoamentos envolvendo fluidos não Newtonianos; a simulação de escoamentos com direta aplicação prática; entre outros.

Entretanto, a alta produtividade em pesquisa relacionada ao tema fluidos não Newtonianos está em grande parte ligada ao fato de este ser ainda um assunto em aberto. Do ponto de vista de simulação numérica, entre as principais dificuldades encontradas no assunto, destacam-se duas:

- A escolha da equação constitutiva adequada. Vários livros dedicados a este assunto [Bird et al., 1987; Tanner, 1988] fornecem uma gama de equações constitutivas disponíveis, explorando suas vantagens e desvantagens. No entanto, cada modelo constitutivo é construído visando a situações específicas de escoamento, e sua aplicação não é geral, o que faz com que o modelo possa vir a representar um comportamento fisicamente não realista, o que dificulta sua aplicação na maioria dos escoamentos reais.
- A dificuldade numérica de resolver os sistemas altamente não-lineares gerados pelas aproximações numéricas propostas. Além de os sistemas gerados pelas aproximações serem exigentes em termos computacionais, devido ao número elevado de graus de liberdade, estes sistemas também apresentam dificuldades de convergência relacionadas ao método numérico e também à natureza das equações constitutivas.

Visando à aplicação da CFD a problemas reais, a escolha do modelo constitutivo está relacionada não só às propriedades físicas dos fluidos, mas também à cinemática dos escoamentos de interesse. As propriedades físicas em questão são as funções materiais obtidas

em ensaios reológicos. Já a cinemática dos escoamentos pode ser investigada através de metodologias de classificação de escoamentos, destacadas nos trabalhos de Astarita, 1979, Huilgol, 1980, Schunk e Scriven, 1990, Brunn e Ryssel, 1997a, Thompson et al., 1999, Thompson e Souza Mendes, 2005, entre outros. Esses trabalhos evoluíram no sentido de apresentar uma classificação geral e local baseada na cinemática dos escoamentos e no desenvolvimento de modelos constitutivos que incorporam os critérios de classificação, adaptando localmente os modelos aos escoamentos. Surpreendentemente, alguns modelos baseados nessa filosofia apresentam-se geralmente mais simples e de mais fácil implementação do que os modelos clássicos para a modelagem do comportamento de fluidos viscoelásticos. Neste trabalho, são utilizados modelos puramente viscosos, os quais são tratados em dois grupos: modelo de Líquido Newtoniano Generalizado (GNL), utilizando funções de viscosidade que aproximam o comportamento destes materiais em escoamentos viscométricos; e fluidos Quasi-Newtonianos sensíveis ao tipo de escoamentos, em que a função viscosidade é construída de forma a representar o comportamento do fluido em diversas situações de escoamento através da incorporação de um parâmetro de classificação de escoamentos.

Quanto aos métodos numéricos para a aproximação dos escoamentos, este trabalho segue a linha dos métodos de elementos finitos estabilizados para problemas mistos, que caracteriza o grupo de pesquisa. Esses métodos, sempre com a filosofia de manter a simplicidade das funções de interpolação usuais, constituem-se na adição de termos à formulação clássica de Galerkin, visando a estabilizar a formulação e a compatibilizar os sub-espacos funcionais das variáveis. No caso de aproximações de fluidos não Newtonianos, a necessidade de computar explicitamente variáveis tensoriais, como tensões e taxas de deformação, apresenta-se como um custo extra tanto na modelagem numérica quanto no esforço computacional. A aproximação dos sistemas gerados pelas modelagens existentes ainda hoje representa um problema, envolvendo a estabilidade, a convergência e a compatibilização dos espacos de funções. Assim, foram estudadas algumas das diversas possibilidades de aproximação dos sistemas resultantes da modelagem mecânica de problemas de escoamentos de fluidos não Newtonianos, a fim de atingir um grau de estabilidade e convergência convenientes.

Os resultados numéricos apresentados neste trabalho foram gerados no código computacional GNLFEM, desenvolvido em linguagem FORTRAN 90 no LAMAC – Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional – do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. O GNLFEM consiste de um programa de elementos finitos que atualmente está estruturado para a solução de problemas de escoamentos, problemas térmicos e problemas de transferência de massa em regime

permanente. O GNLFEM é baseado na estrutura do código FEM [Frey, 1991] e modificado por esta autora para a implementação da metodologia descrita nesta tese.

No restante desta introdução, são apresentados maiores detalhes sobre as características dos escoamentos de fluidos não Newtonianos, e a base dos métodos de elementos finitos em fluidos.

## 1.1 FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS

Os comportamentos dos materiais considerados ideais são os comportamentos de **sólido Hookeano** e de **fluido Newtoniano**. Para sólidos Hookeanos, a tensão é diretamente proporcional à deformação e não depende das taxas de deformação, e quando a tensão é removida o corpo reassume sua configuração inicial. Para fluidos Newtonianos, a tensão é diretamente proporcional à taxa de deformação, o fluido escoar, i.e., deforma, continuamente enquanto sobre ele houver tensão aplicada, e a remoção da tensão não resulta na recuperação da configuração inicial. Entre estes dois extremos, o comportamento real dos materiais com capacidade de deformação e escoamento, englobando sólidos não-Hookeanos e fluidos não Newtonianos, é o foco do estudo da ciência chamada **Reologia**.

Exemplos de fluidos não Newtonianos são encontrados tanto na natureza e no cotidiano como também na indústria. São fluidos não Newtonianos alguns óleos, tintas, detergentes, cosméticos como xampus, cremes e pastas, alimentos como doces e sucos de frutas, iogurtes, nata e vários produtos lácteos, molhos, sorvetes, pastas, soluções de estabilizantes, flavorizantes e espessantes, soluções utilizadas industrialmente, principalmente soluções de polímeros e polímeros fundidos.

Os fluidos não Newtonianos geralmente são constituídos de soluções ou misturas de compostos formados por macromoléculas, o que lhes confere uma estrutura microscópica que influencia seu comportamento macroscópico na resposta à aplicação de tensões. Alguns fenômenos reológicos que caracterizam o comportamento não Newtoniano de certos materiais podem ser observados em laboratório através de experiências demonstrativas relativamente simples, algumas das quais são detalhadas em Bird et al., 1987. Quantitativamente, são as funções materiais que permitem descrever o comportamento reológico dos materiais, relacionando as diversas grandezas do escoamento, como tensões e deformações. As funções materiais são medidas em situações em que a cinemática do escoamento é conhecida. Elas também são utilizadas para a formulação de modelos empíricos para o comportamento dos materiais.

Nos escoamentos puramente cisalhantes em regime permanente, as funções materiais mais importantes são: a função viscosidade,  $\eta$ , e as funções coeficientes de tensões normais,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ . As três são dadas em função da taxa de deformação a que está submetido o fluido, denotada por  $\dot{\gamma}$ , na forma:

$$\begin{aligned}\tau_{21} &= \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \\ \tau_{11} - \tau_{22} &= \Psi_1(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2 \\ \tau_{22} - \tau_{33} &= \Psi_2(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde  $\tau_{ij}$ ,  $i,j=1,2,3$ , são os componentes da tensão em relação a um sistema coordenado no qual a tensão de cisalhamento é aplicada na direção 1, na superfície orientada na direção 2. Uma discussão mais detalhada das definições das tensões e taxas de deformação é apresentada no Capítulo 3, quando é abordado o comportamento material de fluidos.

No caso de escoamentos puramente extensionais, as funções materiais mais importantes são as viscosidades elongacionais, ou extensionais. Elas representam ajustes de medidas de diferenças de tensões normais versus da taxa de extensão,  $\dot{\epsilon}$ , e são dadas na forma:

$$\begin{aligned}\tau_{11} - \tau_{22} &= \eta_1(\dot{\epsilon})\dot{\epsilon} \\ \tau_{22} - \tau_{33} &= \eta_2(\dot{\epsilon})\dot{\epsilon}\end{aligned}\tag{1.2}$$

No caso de escoamento extensional uniaxial, tem-se que apenas uma das viscosidades extensionais é diferente de zero, e esta é então denominada viscosidade de Trouton, denotada por  $\eta_u$ . Para fluidos Newtonianos  $\eta_u$  tem três vezes o valor da viscosidade em cisalhamento [Bird et al., 1987]. No caso de escoamento elongacional planar, existem dois coeficientes de viscosidade, sendo que a viscosidade extensional planar no plano de extensão ( $\eta_1$  quando as direções que formam o plano de extensão são 1 e 2) é igual a quatro vezes a viscosidade em cisalhamento, e  $\eta_2$  é igual a duas vezes a viscosidade em cisalhamento, quando tratando-se de um fluido Newtoniano.

Outras funções materiais importantes são aquelas relacionadas a ensaios de resposta transiente dos fluidos. Estas funções materiais estão relacionadas principalmente a efeitos de memória dos materiais. Inúmeras funções materiais são utilizadas nos mais diversos testes reológicos [Bird et al., 1987; Ferguson e Kemblowski, 1991].

A seguir, é apresentada uma breve descrição dos efeitos não Newtonianos mais conhecidos. Sugere-se Bird et al., 1987 e Ferguson e Kemblowski, 1991, para uma descrição

mais completa, compreendendo a descrição dos experimentos utilizados para a visualização destes efeitos.

### 1.1.1 Viscosidade variável em escoamentos puramente cisalhantes

A viscosidade de um fluido pode ser entendida como a resistência que este apresenta ao escoamento. Em escoamentos puramente cisalhantes, ela é uma função material que pode ser obtida através de medidas realizadas em viscosímetros, determinando-se dados de tensão versus taxa de deformação, ou seja, a chamada curva de escoamento (ver Capítulo 3 para uma discussão mais detalhada). Para um fluido Newtoniano, a viscosidade é uma função constante; para os fluidos não Newtonianos, ela pode ser uma função da taxa de deformação, permitindo a seguinte classificação:

- **Fluidos *shear-thinning* ou pseudoplásticos:** São fluidos cuja viscosidade diminui com o aumento da taxa de deformação. A dependência da tensão com a taxa de deformação pode variar muito entre diferentes fluidos, e também para um mesmo fluido, em diferentes temperaturas e concentrações. Exemplos: sucos concentrados, molhos de salada [Steffe, 1992].
- **Fluidos *shear-thickening* ou dilatantes:** São fluidos cuja viscosidade aumenta com o aumento da taxa de deformação. Este tipo de comportamento geralmente é encontrado em suspensões de alta concentração, como soluções de amido em água.
- **Fluidos viscoplásticos:** São fluidos que se comportam como materiais extremamente viscosos a baixas tensões. Quando a tensão aplicada ultrapassa um limite mínimo, chamado de tensão crítica de escoamento (*yield stress*), neste trabalho denotada por  $\tau_0$ , sua viscosidade sofre uma queda dramática e o material passa a apresentar comportamento Newtoniano, pseudoplástico ou dilatante [Souza Mendes e Dutra, 2004]. Exemplos: pasta de tomate, creme dental.

### 1.1.2 Efeitos de diferenças de tensões normais em escoamentos cisalhantes

Alguns efeitos importantes no escoamento de fluidos não Newtonianos podem ser atribuídos ao fato de muitos destes exibirem diferenças de tensões normais em escoamentos puramente cisalhantes. Utiliza-se a seguinte convenção: se o fluido move-se ao longo de apenas uma direção coordenada, e a sua velocidade varia apenas em outra direção coordenada, então chama-se a direção da velocidade do fluido de direção 1; a direção da variação de velocidade de direção 2; e a direção neutra remanescente, de direção 3. Sendo  $\tau_{ij}$  os componente do tensor extra

de tensão em relação ao sistema coordenado definido pelas linhas de corrente do escoamento, chama-se  $\tau_{11}-\tau_{22}$  de **primeira diferença de tensões normais**, e  $\tau_{22}-\tau_{33}$  de **segunda diferença de tensões normais**. Para fluidos Newtonianos, as diferenças de tensões normais são nulas em escoamentos cisalhantes [Bird et al., 1987].

Para fluidos não Newtonianos que apresentam estes efeitos, a primeira diferença de tensões normais é quase sempre positiva e de ordem maior do que a segunda. Isto significa que, para uma primeira aproximação, estes fluidos exibem, além das tensões cisalhantes, uma tensão extra ao longo das linhas de corrente, ou seja, na direção 1. O aparecimento destas diferenças de tensões pode ser utilizada para se obter explicações qualitativas de alguns experimentos, como o efeito Weissenberg [Weissenberg, 1947]. A segunda diferença de tensões normais tem sido encontrada experimentalmente como sendo negativa, usualmente muito menor em magnitude que a primeira. Isto significa que, em um escoamento cisalhante, o fluido exibe uma pequena tensão extra na direção 3. Bird et al., 1987, enfatiza que a segunda diferença de tensões normais é muito pequena, e é normalmente observável apenas em situações onde a primeira diferença de tensões normais, por razões geométricas, não tem efeito.

### 1.1.3 Efeitos de memória

Os efeitos de memória surgem do fato que alguns materiais são capazes de acumular parte da energia mecânica que lhes é transferida e, conseqüentemente, apresentar um atraso em sua resposta mecânica. A acumulação e a subseqüente relaxação da energia mecânica caracterizam os fluidos viscoelásticos. Este tipo de comportamento se situa naquela faixa compreendida entre os comportamentos de sólido elástico (Hookeano) ideal e fluido Newtoniano ideal. O material apresenta tanto características elásticas, na forma em que possui memória de suas configurações passadas, como também características viscosas, dissipando parte da energia mecânica a ele transferida.

Alguns efeitos de memória geram fenômenos observáveis em experimentos de laboratório em escoamentos simples transientes. Entre estes experimentos citamos a relaxação de tensões após cessação do escoamento, o cisalhamento oscilatório em baixa amplitude, o efeito *recoil*, i.e., o retorno elástico do fluido após cessação de escoamento permanente. A resposta transiente em escoamentos cisalhantes caracteriza os materiais com memória e, portanto, estes são chamados fluidos viscoelásticos.

Nos experimentos utilizados para caracterizar os materiais viscoelásticos, as funções materiais são medidas transientes que visam relacionar a resposta do fluido em relação a mudança nos estados de tensão e deformação, caracterizando a memória do fluido. Algumas

demonstrações práticas também são utilizadas para demonstrar a resposta elástica de alguns materiais.

#### 1.1.4 Viscosidade extensional variável

Os coeficientes de viscosidade em escoamento extensional também podem sofrer variações com a taxa de deformação (neste caso, taxa de extensão). No entanto, ao contrário do que ocorre sob cisalhamento, a viscosidade extensional costuma ser uma função crescente da taxa de deformação, caracterizando o fenômeno chamado *extensional-thickening*. Algumas vezes, ocorre o fenômeno de *extensional-thickening* a baixas taxas de deformação seguido de um comportamento de redução da viscosidade (*extensional-thinning*) a altas taxas de deformação [Barnes e Roberts, 1992]. A medição das viscosidades extensionais é bastante complexa [Thompson e Souza Mendes, 2005, e referências], mas a variação das viscosidades extensionais representa um fenômeno importante em diversos processos, como operações de revestimento utilizando polímeros [Schunk e Scriven, 1990].

#### 1.1.5 Grupos adimensionais na dinâmica dos fluidos não Newtonianos

No estudo da dinâmica dos fluidos Newtonianos, o número de Reynolds aparece como o grupo adimensional mais importante, relacionando as forças de inércia e forças viscosas. No estudo dos fluidos não Newtonianos, além da necessidade da definição de uma viscosidade característica,  $\eta_c$ , para a definição do número de Reynolds, surge a necessidade de outros grupos adimensionais para caracterizar a semelhança de escoamentos, em vista dos demais parâmetros que constituem os modelos reológicos empregados na modelagem destes.

O **número adimensional de Deborah**,  $De$ , é definido como a taxa entre o tempo característico do fluido,  $\lambda$ , e o tempo característico do sistema,  $t_f$  [Astarita e Marrucci, 1974; Crochet et al., 1984; Bird et al., 1987]:

$$De = \frac{\lambda}{t_f} \quad (1.3)$$

O tempo característico do fluido é tomado como a maior constante de tempo que descreve os movimentos moleculares, ou como alguma constante média de tempo determinada pela viscoelasticidade linear, ou mesmo um parâmetro de tempo constante de uma equação constitutiva. O tempo característico do sistema geralmente é tomado como o tempo da observação experimental, ou o tempo de duração de um experimento. Em regime permanente, o

tempo característico do escoamento é geralmente tomado como sendo o recíproco de uma taxa de deformação característica. A discussão em torno da definição deste parâmetro é detalhada em Astarita e Marrucci, 1974 e em Bird et al., 1987. De acordo com estas referências, a dúvida quanto à determinação do tempo característico do escoamento pode levar a diferentes definições de um outro parâmetro adimensional, o **número de Weissenberg**,  $We$ , explorado em seqüência. Sua definição é dada conforme Astarita e Marrucci, 1974:

$$We = \lambda \dot{\gamma}_c \quad (1.4)$$

onde  $\dot{\gamma}_c$  é uma taxa de deformação característica.

Na maioria dos casos, os números de Deborah e de Weissenberg são idênticos e a diferença entre eles se torna apenas um problema de nomenclatura entre diversos autores.

Para  $De$ , são classicamente identificados dois valores limites, que explicam a dependência do comportamento observado com o tempo de observação de um experimento. No limite quando  $De$  tende a zero ( $De \rightarrow 0$ ), tem-se o comportamento de fluido Newtoniano, sem efeitos de memória; no limite quando  $De$  tende ao infinito ( $De \rightarrow \infty$ ), tem-se o comportamento de um sólido elástico ideal [Reiner, 1960].

Cabe ressaltar que, diferentemente da dinâmica dos fluidos Newtonianos, os grupos adimensionais de escoamentos não Newtonianos não são aplicados de forma simples e intuitiva em regras de escalonamento. Segundo Astarita e Marrucci, [1974], as regras de escalonamento somente poderiam ser derivadas para um mesmo material no modelo e no protótipo. No entanto, estes autores também sugerem o conceito de materiais homólogos, i.e., materiais descritos por uma mesma equação constitutiva. Com base neste conceito, alguns parâmetros além de  $\lambda$  e  $\eta_c$  podem aparecer, e o conjunto de parâmetros adimensionais e tal que englobe de forma coerente todos estes parâmetros.

Outro parâmetro adimensional que vem ganhando importância e que, neste trabalho, representa a base de um tipo de equação constitutiva explorado, é o parâmetro de classificação de escoamentos, que quantifica o quanto um escoamento se aproxima, localmente, de um escoamento puramente cisalhante, extensional, ou de um movimento de corpo rígido. O próximo item aborda o significado físico da definição de tal parâmetro.

## 1.2 CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO DE ESCOAMENTOS

As funções reológicas que caracterizam os fluidos não Newtonianos são determinadas através de experimentos realizados sob condições específicas de escoamentos, como

escoamentos puramente cisalhantes ou puramente extensionais. Quando da aplicação de equações constitutivas à solução de escoamentos, algumas falhas na representação do comportamento físico real podem estar relacionadas ao tipo de escoamento a que o fluido está submetido não condizer com as condições ideais para as quais foi construído o modelo reológico e sob as quais foram medidas as funções materiais pertinentes. Assim, a necessidade de um critério de classificação de escoamentos surge naturalmente com a necessidade de se ter idéias qualitativas e quantitativas das características locais de um escoamento.

Neste estudo, emprega-se um critério de classificação puramente cinemático, baseado na idéia de que a classificação de escoamentos está ligada ao conceito de persistência de deformação linear, ou *persistence of straining* [Astarita, 1979; Schunk e Scriven, 1990, Thompson e Souza Mendes, 2005]. Através deste conceito, Astarita, 1979, propôs um critério de classificação de escoamentos que é matematicamente apresentado em função da taxa de rotação relativa, uma medida da rotação experimentada pelas direções principais da taxa de deformação (que formam a base de autovetores para o tensor taxa de deformação) em relação à taxa de rotação do próprio escoamento. Este critério permite inferir o quanto a taxa de rotação local dos filamentos de fluido está, de certa forma, evitando o estiramento destes filamentos.

Schunk e Scriven, 1990, explicam como se daria este fenômeno em escala sub-microscópica. Em escoamentos puramente cisalhantes, os movimentos de deformação tendem a alinhar os filamentos numa direção entre a direção de escoamento e a direção de máxima deformação (direção principal do tensor taxa de deformação), sendo deformado linearmente. No entanto, devido à rotação do próprio escoamento, o filamento é alinhado a uma direção de menor persistência de deformação linear, voltando à sua forma original. Assim, cria-se um ciclo em que o filamento é alinhado com as direções de menor e maior persistência de deformação linear, sendo estirado e voltando a enrolar-se continuamente, como ilustra a Fig. 1.1.

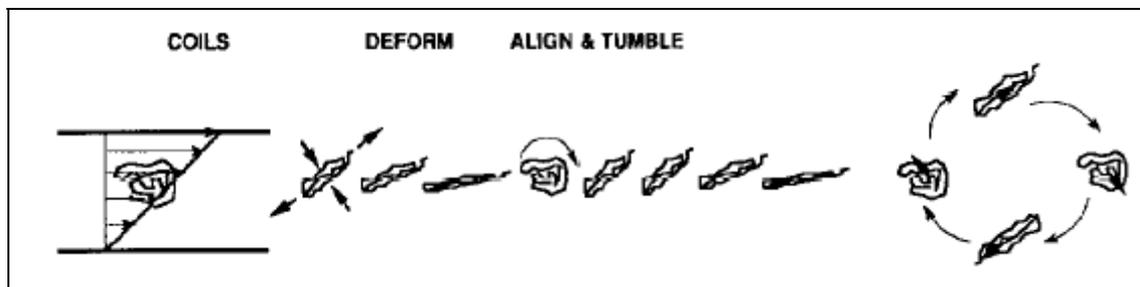


Figura 1.1: Comportamento dos filamentos microscópicos em escoamentos puramente cisalhantes [Schunk e Scriven, 1990]

Em escoamentos puramente extensionais, o fluido não gira em relação à direção de estiramento, sendo continuamente mais e mais estirado, caracterizando uma total persistência de deformação linear, como ilustra a Fig. 1.2.

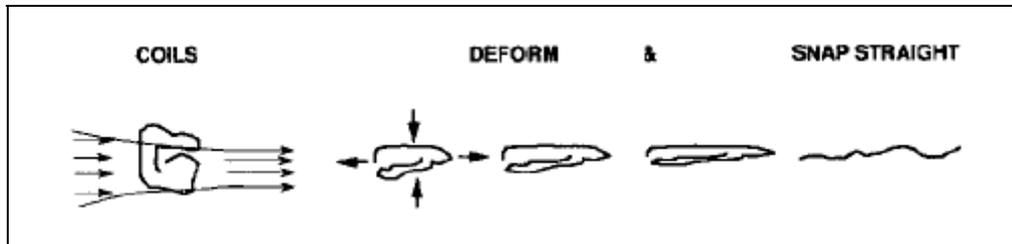


Figura 1.2: Comportamento dos filamentos microscópicos em escoamentos puramente extensionais [Schunk e Scriven, 1990]

A explicação física e microscópica dos fenômenos que ocorrem em escoamentos em regimes de extensão e cisalhamento são úteis para a modelagem mecânica de um critério de classificação aplicável a uma descrição contínua dos escoamentos. Assim, os critérios de classificação até hoje propostos utilizam a teoria do contínuo, visando, através da análise de parâmetros cinemáticos locais, classificar os escoamentos de forma geral e única, assunto o qual é abordado em seguida, no Capítulo 2 deste trabalho.

### 1.3 ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS

No âmbito da Dinâmica dos Fluidos Computacional, *Computational Fluid Dynamics* ou CFD, as principais técnicas numéricas utilizadas são o **método de diferenças finitas** [Ferziger e Péric, 1999; e autores vinculados à UFRGS: Claeysen et al., 2006], o **método de volumes finitos** [Maliska, 2004; Patankar, 1980; e autores vinculados à UFRGS: Vielmo e Prata, 1994, Manica e Bortoli, 2004] e o **método de elementos finitos**, o qual é utilizado neste trabalho [Hughes, 1987; Reddy e Gartling, 1994; Oden e Carey, 1983; Zienkiewicz, 1975; e autores vinculados à UFRGS: Kessler e Awruch, 2004; Franca e Frey, 1992, Petry e Awruch, 2006].

Antes de apresentar as vantagens e desvantagens do método de elementos finitos, deve-se chamar a atenção para o notável desenvolvimento alcançado pelo método nas áreas de mecânica dos sólidos e de estruturas nas últimas décadas, desde o aparecimento do termo elementos finitos com os trabalhos pioneiros de Turner et al., 1956, e Clough, 1960. Este desempenho, aliado aos avanços que o método vem obtendo na área de fluidos - principalmente a partir dos resultados teóricos de Babuška, 1973, e Brezzi, 1974, para problemas mistos - permitem afirmar que,

atualmente, o sucesso de elementos finitos em fluidos já é tão grande quanto o alcançado na área de sólidos.

As vantagens que o método dos elementos finitos apresenta devem-se basicamente à sua alta flexibilidade, a qual permite tratar com relativa facilidade:

- Geometrias complicadas,
- Condições de contorno genéricas,
- Materiais com respostas não-lineares e/ou com propriedades variáveis.

Finalmente, pode-se ainda destacar uma última, porém talvez a mais importante vantagem do método: o método de elementos finitos possui um sólido respaldo matemático, o qual dá confiabilidade aos seus códigos e, em muitos problemas, torna possível estabelecer a priori uma estimativa para o erro envolvido na aproximação de elementos finitos.

#### 1.4 O MÉTODO DE GALERKIN

O método de elementos finitos, em sua forma mais usual, é o conhecido **método de Galerkin** [Hughes, 1987], o qual tem sido aplicado nas últimas décadas a uma vasta classe de problemas. Ao contrário das técnicas de diferenças finitas, o método de Galerkin não opera diretamente sobre as equações diferenciais que modelam o problema. Partindo de uma formulação variacional do problema (em Mecânica, pode-se introduzi-la através do **Princípio das Potências Virtuais**, [Gurtin, 1981]) e uma discretização de seu domínio em elementos finitos, que suportam os pontos nodais ( $A$ ) de coordenadas  $\mathbf{x}_A$ , constrói-se uma solução aproximada  $U^h$  em termos da combinação linear de funções base  $N_A(\mathbf{x})$  conhecidas e graus de liberdade incógnitos  $d_A$ . Gera-se, desta maneira, um sistema de equações algébricas, a ser resolvido numericamente.

$$U^h = \sum_{A=1}^n N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (1.5)$$

Assim descrito, o método de elementos finitos não inova em nada em relação aos métodos variacionais clássicos [Rektorys, 1975]. O que há de novo e poderoso em elementos finitos é a escolha particular das funções base  $N_A(\mathbf{x})$ : utilizam-se funções polinomiais por parte de suporte compacto, construídas de modo a valerem um nos pontos nodais a elas associadas e zero nos demais nós ( $N_A(\mathbf{x}_B) = \delta_{AB}$ ). É esta importante característica que faz com que a matriz associada à formulação de Galerkin seja uma matriz de banda, reduzindo assim drasticamente os custos da solução numérica do sistema de equações algébricas.

## 1.5 MÉTODOS ESTABILIZADOS

A aplicação do método de Galerkin a problemas de fluidos apresentam um desenvolvimento lento e problemático até meados da década de 70. Nas aplicações de análise de estruturas, quando impostas as restrições usuais, obtêm-se operadores elípticos e, em geral, simétricos, o que possibilita resultados de convergência quase ótimos. Já no caso de fluidos, os modelos utilizados apresentam dificuldades adicionais: para os escoamentos isocóricos (de grande interesse em engenharia), surge a necessidade de se computar também o campo de pressão como multiplicador de Lagrange associado à restrição de incompressibilidade do fluido, gerando assim um problema dito misto em velocidade e pressão. Dessa forma, introduz-se a necessidade de compatibilizar os espaços de elementos finitos empregados para aproximar estes campos. Além disso, em problemas advectivo-dominados (sujeitos a altos números de Reynolds), o termo advectivo da equação de movimento, de natureza assimétrica, faz com que a discretização de Galerkin, a qual, para elementos lineares, coincide com a discretização por diferenças centrais, tenha comportamento oscilatório, invalidando a aproximação com o surgimento de patologias numéricas, tais como o trancamento (*locking*) do campo de velocidade e oscilações espúrias no campo de pressão.

Os resultados de Babuška, 1973, e Brezzi, 1974, para problemas mistos vieram a elucidar a instabilidade associada à compatibilização dos sub-espaços de elementos finitos para velocidade e pressão. Ficou provado que estes espaços não poderiam ser escolhidos arbitrariamente (sob pena de gerar soluções numéricas irrealis) e sim deve-se aproximar o par velocidade/pressão por elementos que satisfaçam a chamada condição de Babuška-Brezzi (ou, simplesmente, condição *inf-sup*). Esta condição restringe a escolha de elementos finitos a um número limitado de combinações e cria dificuldades computacionais, em particular, impedindo que se aproximem os dois campos com o mesmo elemento (igual ordem). Entretanto, é importante salientar que, mesmo se utilizando uma combinação de elementos estáveis, o método de Galerkin ainda assim oscilará em situações localmente advectivo-dominadas, devido à assimetria do operador advectivo.

A fim de contornar estas dificuldades, foram surgindo diferentes estratégias: métodos de penalização [Hughes et al., 1979], integração reduzida seletiva [Malkus e Hughes, 1978], elementos finitos não-conformes [Crouzeix e Raviart, 1973], método de características [Pironneau, 1989], etc. De maneira geral, podem-se enquadrar todas elas dentro da seguinte dualidade: manutenção da formulação de Galerkin utilizando porém elementos não *standard*, ou utilização de elementos finitos simples com a alteração da formulação de Galerkin clássica de

modo a adicionar ao problema a requerida estabilidade – criando assim o conceito **de métodos estabilizados**.

O ponto de partida no desenvolvimento de métodos estabilizados deu-se com os trabalhos de Brooks e Hughes, 1982, e Hughes e Brooks, 1982, nos quais foi introduzido o método *streamline-upwind/Petrov-Galerkin*, ou, simplesmente, SUPG. Este método consiste numa formulação Petrov-Galerkin com funções peso descontínuas, construídas através da adição de uma perturbação (*streamline upwind*), a qual atua somente na direção do escoamento, às funções clássicas do método de Galerkin clássico. Estas funções peso modificadas atuam sobre todos os termos da equação, fazendo com que a condição de ortogonalidade do resíduo com relação a estas funções seja satisfeita, constituindo-se, portanto, em uma formulação consistente de resíduos ponderados. O método SUPG apresenta elevada precisão, estabilidade e estimativas de erro ótimas ou quase-ótimas [Johnson et al., 1984]. Evoluções em torno do método SUPG surgiram através de algumas estratégias simples para a estabilização do problema. Estas estratégias consistem principalmente na adição de termos dependentes da malha ao método clássico de Galerkin. Estes termos de perturbação, analogamente ao método SUPG, são projetados sem comprometimento da consistência e podem ser estendidos a diversas situações, com grande flexibilidade, sendo construídos de forma a aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem prejudicar sua consistência, já que a solução exata do problema satisfaz os resíduos de Euler-Lagrange [Hughes et al., 1986; Franca et al., 1992].

Os métodos desenvolvidos através destes princípios são referidos como **métodos estabilizados**. O método Galerkin mínimos-quadrados, ou GLS (*Galerkin least-squares*), introduzido em Hughes et al., 1986, no contexto do problema de Stokes, e, posteriormente, em Hughes et al., 1989, para equações do tipo advecção-difusão, é o método no qual este trabalho se baseia a fim de atingir a estabilidade das formulações dos problemas de escoamentos estudados. A sua denominação está ligada ao fato de que os termos estabilizadores resultam de uma minimização pelo método dos mínimos quadrados dos resíduos da equações de Euler-Lagrange dos problemas analisados. Estes termos não comprometem a consistência do método, já que a solução exata do problema satisfaz os resíduos de Euler-Lagrange. O método GLS não exige que uma condição de compatibilidade entre os sub-espacos das variáveis envolvidas nas formulações mistas seja satisfeita, além de tornar estáveis as aproximações de escoamentos advectivo-dominados.

## 1.6 FORMULAÇÕES MULTI-CAMPOS

A formulação das equações do movimento em três campos é a forma natural de apresentar as equações do movimento quando a equação constitutiva para o tensor extra de tensão não é explícita. No entanto, este tipo de formulação adiciona algumas dificuldades teóricas e numéricas à aproximação via método de elementos finitos. A principal delas é a necessidade adicional de compatibilizar os sub-espacos de tensão e velocidade, além da satisfação da condição de Babuška-Brezzi envolvendo os sub-espacos de velocidade e pressão.

A análise de metodologias de elementos finitos que permitam a aproximação deste tipo de problema vem sendo abordada por diversos pesquisadores e constitui um ingrediente chave para a viabilidade das soluções de elementos finitos de escoamentos isocóricos de fluidos não Newtonianos, em especial aqueles modelados por equações constitutivas diferenciais. No contexto simplificado do problema de Stokes (escoamento Newtoniano, isocórico, permanente e sem efeitos de inércia), formulações em três campos têm sido desenvolvidas e analisadas por autores como Marchal e Crochet, 1987, Franca e Stenberg, 1991, Baranger e Sandri, 1992, Ruas et al., 1993, Baaijens, 1998, Carneiro de Araujo e Ruas, 1998, Bonvin et al., 2001, entre outros. Outros autores propõem formulações em quatro campos, como a *Elastic Viscous Split Stress* (EVSS), e métodos derivados, a fim de suavizar o compromisso da compatibilização dos espacos [Guénette e Fortin, 1995; Sun et al., 1999; Gatica et al., 2004]. Em ambos os casos, a utilização de métodos estabilizados, nos moldes do método Galerkin mínimos quadrados, é apresentada por alguns autores como uma alternativa possível a fim de garantir a estabilidade na solução dos problemas [Franca e Stenberg, 1991; Behr et al., 1993; Fan et al., 1999; Bonvin et al., 2001, Behr et al., 2004]. No Capítulo 4, no qual é introduzido o método de elementos finitos, são abordadas algumas das alternativas até hoje apresentadas para a obtenção da estabilidade e compatibilidade almejadas.

No caso de modelos constitutivos sensíveis ao tipo de escoamento, o cálculo do parâmetro de classificação seguindo a filosofia de Astarita, 1979, necessita que sejam calculadas as segundas derivadas do campo de velocidade, a fim de obter as derivadas do tensor taxa de deformação. No contexto do método de elementos finitos, é interessante que estas derivadas sejam aproximadas utilizando-se uma metodologia coerente com a empregada na aproximação das variáveis primais do problema, a mesma filosofia de interpolação das variáveis através de funções de forma de elementos finitos. No entanto, o emprego dos elementos finitos usuais de baixa ordem fornece segundas derivadas do campo de velocidade nulas ou descontínuas, o que remete à utilização de formulações multi-campos como alternativas para a obtenção de um campo suave para o parâmetro de classificação de escoamentos.

Por conseguinte, utiliza-se neste trabalho o método Galerkin mínimos-quadrados (GLS), para aproximar problemas de escoamentos em formulações multi-campos, nas quais, além da velocidade e da pressão, a tensão ou a taxa de deformação foram tratadas como variáveis primais. Estas aproximações foram empregadas em problemas de escoamentos de fluidos inelásticos (puramente viscosos, sem efeitos de elasticidade), utilizando os modelos Newtoniano, Newtoniano Generalizado e quasi-Newtoniano sensível ao tipo de escoamento.

## 1.7 PLANO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é: desenvolver e implementar em um código computacional formulações GLS mistas  $\mathbf{u}-p$  e  $\boldsymbol{\tau}-p-\mathbf{u}$  para escoamentos de fluidos inelásticos Newtonianos e não Newtonianos sensíveis à cinemática.

Sendo assim, esta tese é composta dos seguintes itens:

- Revisão da mecânica do Contínuo (Capítulo 2): estudo da cinemática e dinâmica dos corpos contínuos, definição de grandezas e leis de conservação da mecânica utilizadas na modelagem de problemas de escoamentos de fluidos não Newtonianos;
- Comportamento material (Capítulo 3): estudo da teoria constitutiva para o comportamento material de fluidos não Newtonianos;
- Método dos elementos finitos (Capítulo 4): descrição do método de elementos finitos, dificuldades do método em problemas de escoamentos, metodologias utilizadas para superar estas dificuldades, métodos estabilizados. Formulação de Galerkin mínimos-quadrados em dois campos, exemplos numéricos. Revisão bibliográfica para formulações multi-campos;
- Metodologia e Resultados numéricos (Capítulo 5): Equação constitutiva, funções materiais, formulações de elementos finitos e algoritmo de solução implementados no código GNLFFEM. Resultados numéricos: escoamentos em cavidade forçada, escoamentos em contrações.

No Capítulo 6 são encontradas as referências bibliográficas citadas no texto.

## 2. PRINCÍPIOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

O **modelo contínuo** é adotado neste trabalho como modelo para a descrição dos corpos materiais e estudo da cinemática e da dinâmica dos mesmos. Este modelo baseia-se na hipótese de que a massa é distribuída continuamente no espaço, exceto nas superfícies de descontinuidade, como ondas de choque e interfaces de fase, desprezando-se os fenômenos em nível molecular.

A fim de facilitar o entendimento dos fenômenos físicos envolvidos no estudo da cinemática e da dinâmica dos fluidos através da teoria da Mecânica do Contínuo, cria-se a idéia de **ponto material**, ou **partícula material**. Um ponto material, denotado por  $\mathbf{p}$ , representa as propriedades físicas e a condição cinemática de uma dada posição em um corpo material  $\mathcal{B}$ . Assim, pode-se dizer que um corpo é formado por um conjunto de pontos materiais. As sub-regiões de um corpo  $\mathcal{B}$  são chamadas partes, e denotadas por  $\mathcal{P}$ , cuja fronteira é denotada por  $\partial\mathcal{P}$ .

### 2.1 CINEMÁTICA

Seja  $\mathcal{B}$  um corpo. O movimento de  $\mathcal{B}$  é uma transformação de classe  $C^3$  no espaço Euclidiano,  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{f} : B \times \mathcal{R}^+ \rightarrow \varepsilon \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{f}(\cdot, t)$  é uma **deformação** para um  $t$  fixo. Assim, o **movimento** é dado por uma família de deformações suave no parâmetro tempo, com  $t \in [0, \infty)$  [Gurtin, 1981].

A fim de descrever o movimento analiticamente, introduz-se um sistema de coordenadas fixo referido como **posição** e denotada por  $\mathbf{x}$ . Refere-se a

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) \quad (2.2)$$

como o local no espaço Euclidiano em que é mapeada a partícula material  $\mathbf{p}$  no instante de tempo  $t$ . Em termos das coordenadas cartesianas retangulares, o vetor posição é dado por:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \quad (2.3)$$

obedecendo-se a notação de somatório de Einstein [Billington e Tate, 1981]. A base ortogonal cartesiana para os campos vetoriais no espaço Euclidiano é denotada pelos vetores  $\mathbf{e}_i$ .

*OBSERVAÇÃO:* Em virtude de, neste trabalho, ser empregada uma base ortogonal cartesiana, as componentes das bases dual e natural são equivalente [Slattery, 1999].

O mapeamento inverso da posição existe e é dado por:

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

Considere-se uma partícula  $\mathbf{p}$  do fluido movendo-se ao longo do escoamento. Em um instante arbitrado como tempo inicial,  $t_0$ , esta partícula ocupa a **posição de referência**  $\mathbf{X}$ . No instante genérico  $t$ , ela terá se movido para a posição  $\mathbf{x}$ . Variando-se o tempo  $t$ , isto é,  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \cdot)$ , tem-se a trajetória da partícula  $\mathbf{p}$ , ao passo que para um tempo fixo  $t$  a transformação  $\mathbf{f}$  define uma família de deformações a partir da configuração de referência do corpo material  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\cdot, t)$ . Assim, pode-se escrever o mapeamento da partícula material no espaço Euclidiano e o mapeamento inverso em relação à posição de referência  $\mathbf{X}$ , nas formas:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{X} &= \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Os campos associados ao movimento do corpo podem ser descritos como função de um ponto material no domínio  $\mathcal{B} \times \mathcal{R}^+$ , através das **variáveis materiais**  $(\mathbf{p}, t)$  ou  $(\mathbf{X}, t)$  (abordagem Lagrangeana); ou como função da posição, através das **variáveis espaciais**  $(\mathbf{x}, t)$  (abordagem Euleriana). Graças à transformação das Eqs. (2.5), qualquer grandeza genérica  $\psi$  referente a um corpo material, função de suas variáveis espaciais, também o será de suas variáveis materiais e vice-versa, o que é relacionado por suas descrições **material** e **espacial** (subscritos  $m$  e  $s$ ), nas formas:

$$\begin{aligned} \psi_m(\mathbf{X}, t) &= \psi(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \\ \psi_s(\mathbf{x}, t) &= \psi(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para a derivada material de um campo espacial  $\psi$  emprega-se a notação usual:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(\mathbf{x}, t) &= \frac{d_{(m)}\psi(\mathbf{x}, t)}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) + [\text{grad } \psi(\mathbf{x}, t)] \cdot \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) + [\text{grad } \psi(\mathbf{x}, t)] \cdot \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde  $\partial\psi/\partial t$  e  $\dot{\psi}$  são conhecidas como derivada espacial e derivada material de  $\psi$ . O campo

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \tag{2.8}$$

chamado **velocidade**, representa a taxa de variação da posição de uma partícula material. Sua descrição espacial é dada na forma

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{d_{(m)}\mathbf{x}}{dt} \tag{2.9}$$

A aceleração de uma partícula é definida como a taxa de variação da velocidade, ou seja,

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \tag{2.10}$$

É conveniente que se expresse o campo de aceleração como função da descrição espacial do campo de velocidade  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Empregando-se a relação cinemática da Eq. (2.7), obtém-se:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + [\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \tag{2.11}$$

### 2.1.1 Tensores de medidas de deformações

O tensor gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  relaciona duas configurações (a deformada através da deformação genérica  $\mathbf{f}$ , cujas partículas infinitesimalmente próximas ocupam as posições  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ ; e a configuração de referência, onde as mesmas partículas ocupam as posições  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$ ), tal que:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{x} &= \mathbf{F}d\mathbf{X} \\
\mathbf{F} &= \text{grad } \mathbf{f}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

denotando  $\Omega_\delta$  o círculo fechado de raio  $\delta$ ,

$$\det \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\mathbf{f}(\Omega_\delta))}{\text{vol}(\Omega_\delta)} \quad (2.13)$$

i.e., o determinante de  $\mathbf{F}$  dá a relação entre o volume deformado e o volume na configuração de referência. Sendo assim  $\det(\mathbf{F}) > 0$  e sendo  $\mathbf{F}$  inversível [Astarita e Marrucci, 1974], a decomposição polar [Billington e Tate, 1981] de  $\mathbf{F}$  fica:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{U}; \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{Q} \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é um tensor ortogonal e  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são tensores simétricos, positivos definidos, chamados tensores de medidas de deformação,  $\mathbf{U}$  à direita e  $\mathbf{V}$ , à esquerda. Ainda,

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2; \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 \quad (2.15)$$

são os tensores de Cauchy e Green, respectivamente, onde  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  [Astarita e Marrucci, 1974].

Os comprimentos  $d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{X}$  estão relacionados por

$$d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{X}\mathbf{F}^T\mathbf{F}d\mathbf{X} = d\mathbf{X}\mathbf{C}d\mathbf{X} \quad (2.16)$$

A Eq. (2.16) permite que  $d\mathbf{x}^2$  seja calculado a qualquer instante de tempo se a distância entre dois pontos no instante de referência,  $d\mathbf{X}$ , e o tensor  $\mathbf{C}$  são conhecidos. Além disso, a derivada da magnitude do deslocamento de dois pontos materiais com respeito ao tempo, avaliada no tempo de referência  $t_0$  segue da Eq. (2.16):

$$\left. \frac{d\mathbf{x}^2}{dt} \right|_{t=t_0} = d\mathbf{X} \frac{d\mathbf{C}(t_0)}{dt} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \mathbf{A}_N(t_0) d\mathbf{X} \quad (2.17)$$

que define o  $N$ -ésimo tensor de Rivlin-Ericksen  $\mathbf{A}_N$ :

$$\mathbf{A}_N(t_0) \equiv \frac{d^N \mathbf{C}(t_0)}{dt^N} \bigg|_{t=t_0} \quad (2.18)$$

e a fórmula de recorrência para o cálculo destes tensores é

$$\mathbf{A}_{N+1} = \dot{\mathbf{A}}_N + [\text{grad } \mathbf{v}]^T \mathbf{A}_N + \mathbf{A}_N [\text{grad } \mathbf{v}] \quad (2.19)$$

A relevância dos tensores de Cauchy-Green e Rivlin-Ericksen está na sua relação com a **história das deformações** sofridas pelo corpo. Esta é de extrema importância para a descrição

de materiais que exibem efeitos de memória. Os tensores de Rivlin-Ericksen permitem que, sob condições suficientes de suavidade, se expanda a história do tensor de Cauchy a partir de um instante de observação  $t_0$  na forma de uma expansão em série de Taylor:

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \frac{1}{N!} \mathbf{A}_N (t_0 - t)^N \quad (2.20)$$

O tensor gradiente de velocidade é definido por

$$\mathbf{L} \equiv \text{grad } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}} \quad (2.21)$$

O tensor  $\mathbf{L}$  também pode ser interpretado como um tensor de velocidade relativa, por englobar as componentes de todos os movimentos possíveis de um corpo. Entre estes movimentos estão: translação, deformação e rotação de corpo rígido [Schlichting, 1968]. Sendo um tensor de segunda ordem, o gradiente de velocidade pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico [Gurtin, 1981]:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} [\mathbf{L} + \mathbf{L}^T] + \frac{1}{2} [\mathbf{L} - \mathbf{L}^T] \quad (2.22)$$

A parte simétrica de  $\mathbf{L}$  é o tensor **taxa de deformação**,  $\mathbf{D}$ , e a parte anti-simétrica é o **tensor taxa de rotação**,  $\mathbf{W}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} [\mathbf{L} + \mathbf{L}^T] \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2} [\mathbf{L} - \mathbf{L}^T] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Fisicamente, o tensor  $\mathbf{D}$  representa os movimentos de distorção e dilatação, e o tensor  $\mathbf{W}$  os movimentos de rotação de corpo rígido.

Da Eq. (2.19) tem-se que:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}; \quad \mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D} \quad (2.24)$$

### 2.1.2 Transformações sob uma mudança de referencial

Um pré-requisito para que a transformação da Eq. (2.5) seja verdadeira é que a descrição do movimento  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ , em função de suas partículas materiais possa ser expressa a partir de um referencial a este relacionado através de uma deformação rígida, i.e., uma rotação seguida por uma translação, ou vice-versa; na forma:

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{Q}(t)[\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{o}] \quad (2.25)$$

para todo ponto material  $\mathbf{X}$  e tempo  $t$ , onde  $\mathbf{r}(t)$  é uma posição no espaço,  $\mathbf{Q}(t)$  uma rotação e  $\mathbf{o}$  um ponto de origem. A mudança de observador para descrever o movimento na forma de  $\mathbf{f}^*(\mathbf{X}, t)$  é descrita, então, através da aplicação da **deformação rígida**,

$$\hat{\mathbf{f}}(\cdot, t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{Q}(t)[\cdot - \mathbf{o}] \quad (2.26)$$

ao movimento  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ , na forma

$$\mathbf{f}^*(\cdot, t) = \hat{\mathbf{f}}(\cdot, t) \circ \mathbf{f}(\cdot, t) \quad (2.27)$$

resultando na Eq. (2.25). Estas asserções determinam a forma como as várias quantidades cinemáticas devem ser transformadas sob uma mudança de referencial [Gurtin, 1981].

Seja  $\mathbf{F}$  o gradiente de deformação de  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$  e  $\mathbf{F}^*$  o gradiente de deformação de  $\mathbf{f}^*(\mathbf{X}, t)$ :

$$\mathbf{F} = \text{grad } \mathbf{f}, \quad \mathbf{F}^* = \text{grad } \mathbf{f}^* \quad (2.28)$$

obtém-se esta respectiva transformação diferenciando-se a Eq. (2.25) com respeito a  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (2.29)$$

Quanto à transformação do vetor posição,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}^*$  estão relacionados através da Eq. (2.25), o que deixa claro que  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}^*$  representam a posição do mesmo ponto material sob os dois referenciais e pode-se escrever:

$$\mathbf{x}^* = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.30)$$

A transformação para o campo velocidade é obtido diferenciando-se a Eq. (2.25) com respeito ao tempo, nas formas material e espacial:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{f}}^*(\mathbf{X}, t) &= \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{o}] \\ \dot{\mathbf{v}}^*(\mathbf{x}^*, t) &= \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{x} - \mathbf{o}]\end{aligned}\quad (2.31)$$

com a Eq. (2.31) representando a lei de transformação para o vetor velocidade.

Para o tensor gradiente de velocidade, requer-se que

$$\mathbf{L}^* = \text{grad } \mathbf{v}^* \quad (2.32)$$

A lei de transformação para o tensor gradiente de velocidade é obtida diferenciando-se a Eq. (2.31)<sub>2</sub> com respeito a  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t)}{\partial \mathbf{x}^*} \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{Q}(t) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{Q}}(t) \\ \mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*, t) \text{grad } \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{Q}}(t) \\ \mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*, t)\mathbf{Q}(t) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\end{aligned}\quad (2.33)$$

Assim, da Eq. (2.33), a lei de transformação para o tensor gradiente de velocidade fica:

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \quad (2.34)$$

Pode-se formular a lei para transformação do tensor  $\mathbf{L}$  através da sua decomposição em  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{W}$ , a fim de se obter uma lei de transformação para estes últimos:

$$\mathbf{D}^* + \mathbf{W}^* = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \quad (2.35)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^* &= \frac{1}{2}[\mathbf{L}^* + \mathbf{L}^{*T}] \\ \mathbf{W}^* &= \frac{1}{2}[\mathbf{L}^* - \mathbf{L}^{*T}]\end{aligned}\quad (2.36)$$

Como  $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$  forma um tensor anti-simétrico,  $\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$  [Gurtin, 1981], da Eq. (2.35) pode-se deduzir as seguintes leis de transformação:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^* &= \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{W}^* &= \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\end{aligned}\quad (2.37)$$

### 2.1.3 Indiferença ao referencial

Segundo Slattery, 1999, uma quantidade a valor escalar, vetorial ou tensorial é **indiferente ao referencial** se esta permanece a mesma ou é invariante sob todas as mudanças de referencial. As definições para um escalar, um vetor e um tensor de segunda ordem indiferentes ao referencial são colocadas a seguir, onde o asterisco refere-se à variável descrita por um diferente referencial:

i) Um escalar  $\psi$  é indiferente ao referencial se

$$\psi^* = \psi \quad (2.38)$$

ii) Um vetor  $\mathbf{j}$  é indiferente ao referencial se

$$\mathbf{j}^* = \mathbf{Q}\mathbf{j} \quad (2.39)$$

iii) Um tensor de segunda ordem  $\mathbf{J}$  é indiferente ao referencial, ou **objetivo**, se

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^T \quad (2.40)$$

Assim, pelas transformações dos tensores taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ , e taxa de rotação,  $\mathbf{W}$ , dadas nas Eqs.(2.37), pode-se afirmar que  $\mathbf{D}$  é um tensor objetivo; entretanto  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{L}$  não são invariantes ao referencial. Astarita e Marrucci, 1974, mostram que os tensores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{C}$  também são objetivos.

### 2.1.4 Derivadas objetivas

O estudo da derivada temporal de tensores objetivos é importante no estudo de materiais com características de memória. Entre estes tensores, a dependência com o tempo gera uma sub-classificação em indiferentes ou não indiferentes, o que é abordado em detalhe por Astarita e Marrucci, 1974. Esta classificação diz respeito às regras de transformação serem dadas em função de tensores ortogonais  $\mathbf{Q}$ , as quais tanto podem ser uma função de todo o tempo anterior ao instante de observação ou simplesmente do instante atual de observação. São indiferentes os tensores cuja regra de transformação é dada somente em função de  $\mathbf{Q}$  no instante de observação.

Para a obtenção de derivadas temporais objetivas que sejam também indiferentes, são criadas as derivadas associadas. De forma simples, são aqui colocadas estas derivadas. Inicialmente, deseja-se verificar como a derivada temporal de um tensor objetivo é obtida derivando-se a Eq. (2.40) em relação ao tempo:

$$\dot{\mathbf{J}}^* = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{J}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{J}\dot{\mathbf{Q}}^T \quad (2.41)$$

que torna  $\dot{\mathbf{J}}^*$  um tensor não-objetivo. Em seguida, tomando o produto interno entre o tensor vorticidade  $\mathbf{W}^*$  (transformado conforme a Eq. (2.37)<sub>2</sub>) e  $\mathbf{Q}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^*\mathbf{Q} &= \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{W}^*\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{W} \\ \dot{\mathbf{Q}}^T &= -\mathbf{Q}^T\mathbf{W}^* + \mathbf{W}\mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (2.42)$$

que, combinados à Eq. (2.41) resultam em:

$$\dot{\mathbf{J}}^* - \mathbf{W}^*\mathbf{J}^* + \mathbf{J}^*\mathbf{W}^* = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{J}} - \mathbf{W}\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{W})\mathbf{Q}^T \quad (2.43)$$

ou

$$\dot{\mathbf{J}}^* = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{Q}^T \quad (2.44)$$

onde

$$\dot{\mathbf{J}} = \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{W}\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{W} \quad (2.45)$$

que é chamada a derivada corotacional de Jaumann [Astarita e Marrucci, 1974]. Esta pode ser interpretada como a derivada material vista por um observador em um referencial ligado a uma partícula fluida e girando com uma velocidade angular igual ao valor instantâneo da velocidade angular da partícula. A deriva de Jaumann se transforma objetivamente, assim como a adição de qualquer combinação linear de  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{D}$  a esta. A adição ou subtração do termo objetivo  $\mathbf{D}\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{D}$  à derivada de Jaumann define as derivadas convectadas inferior,  $\overset{\Delta}{\mathbf{J}}$ , e superior,  $\overset{\nabla}{\mathbf{J}}$ , respectivamente [Astarita e Marrucci, 1974]:

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{\mathbf{J}} &= \dot{\mathbf{J}} + \mathbf{D}\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{D} = \dot{\mathbf{J}} + [\text{grad } \mathbf{v}]\mathbf{J} + \mathbf{J}[\text{grad } \mathbf{v}]^T \\ \overset{\nabla}{\mathbf{J}} &= \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{D}\mathbf{J} - \mathbf{J}\mathbf{D} = \dot{\mathbf{J}} - [\text{grad } \mathbf{v}]\mathbf{J} - \mathbf{J}[\text{grad } \mathbf{v}]^T \end{aligned} \quad (2.46)$$

As derivadas corotacional, convectada inferior e convectada superior de um tensor simétrico são simétricas [Astarita e Marrucci, 1974].

## 2.2 CLASSIFICAÇÃO CINEMÁTICA DE ESCOAMENTOS

O comportamento dos materiais, ou seja, , como as propriedades dos materiais vêm a influenciar as relações entre as diversas grandezas e variáveis nos escoamentos, pode ser caracterizado por funções reológicas determinadas em experimentos onde são assumidas algumas condições específicas, como cisalhamento puro ou extensão pura. As funções materiais medidas nestes experimentos representam a resposta do material sob as condições cinemáticas em que são realizados. A caracterização de um material através de um modelo constitutivo que utiliza uma função material específica só faz sentido quando este modelo é utilizado nas condições para as quais a função material é desenvolvida. Assim, um critério geral de classificação de escoamentos baseado na cinemática dos tais é útil quando da escolha da apropriação dos modelos constitutivos e funções materiais aos escoamentos.

Astarita, 1979, propôs que um critério geral para classificação de escoamentos deveria combinar alguns pressupostos. O critério deve ser:

- Local: capaz de indicar o tipo de escoamento em cada ponto do escoamento;
- Objetivo: indiferente ao referencial;
- Geral: aplicável a qualquer escoamento.

Entre as duas alternativas propostas por Astarita, 1979, a que foi empregada neste trabalho é um critério de classificação de escoamentos puramente cinemático, que visa atender os três critérios acima.

A classificação de escoamentos está diretamente relacionada ao conceito de persistência de deformação linear, ou *persistence of straining* [Astarita, 1979; Schunk e Scriven, 1990, Thompson e Souza Mendes, 2005]. Este fenômeno pode ser entendido da seguinte forma: um filamento material alinhado com a direção principal do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$  tende a ser continuamente estirado. Esta direção principal é dada pela direção do autovetor associado ao maior autovalor de  $\mathbf{D}$ . No entanto, o filamento pode girar no sentido da direção de menor estiramento, evitando a deformação. A rotação do escoamento em relação à rotação das direções principais de  $\mathbf{D}$  causa então um alívio de tensão. Nos escoamentos extensionais, a ausência de rotação permite que os filamentos sejam continuamente estirados; nos escoamentos puramente cisalhantes, a rotação em relação aos autovetores de  $\mathbf{D}$  é máxima de modo a evitar a persistência de deformação linear; e nos movimentos de corpo rígido o material ou não experimenta deformação ou evita o estiramento ao máximo devido a uma alta taxa de rotação em relação aos autovetores de  $\mathbf{D}$ . A medida local da rotação do movimentos em relação às direções dos autovetores de  $\mathbf{D}$  pode dar, então, uma boa idéia de quanto o escoamento está localmente

semelhante aos escoamentos em que são medidos as funções materiais utilizadas para caracterizar os fluidos, i.e., escoamentos puramente cisalhantes e escoamentos puramente extensionais.

Astarita, 1979, propôs um critério para classificação de escoamentos objetivo e geral, introduzindo um tensor que mede a taxa de rotação do material em relação à rotação das direções principais da taxa de deformação. Este tensor, denotado por  $\bar{\mathbf{W}}$ , chamado tensor taxa de rotação relativa, é dado por

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \mathbf{W}_D \quad (2.47)$$

onde  $\mathbf{W}_D$  é o tensor da taxa de rotação dos autovetores de  $\mathbf{D}$ :

$$\dot{\mathbf{d}}_i = \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial t} + [\text{grad } \mathbf{d}_i] \mathbf{v} = \mathbf{W}_D \cdot \mathbf{d}_i, \quad i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (2.48)$$

onde  $\mathbf{d}_i$  é qualquer um dos autovetores de  $\mathbf{D}$ . Em casos onde dois autovalores não são linearmente independentes, mas linearmente independentes de um terceiro, Astarita adota a convenção

$$W_{D_{ij}} = W_{ij} \quad (2.49)$$

i.e., na direção normal ao plano formado pelos autovetores linearmente dependentes, a taxa de rotação de  $\mathbf{D}$  é idêntica à taxa de rotação do escoamento em si, ou seja, à vorticidade. Astarita, 1979, prova a objetividade do tensor  $\bar{\mathbf{W}}$ .

Sendo assim, Astarita, 1979, propôs o seguinte parâmetro classificador de escoamentos:

$$R_A = - \frac{\text{tr } \bar{\mathbf{W}}^2}{\text{tr } \mathbf{D}^2} \quad (2.50)$$

associando um valor numérico de  $R_A$  a cada tipo de escoamento, na forma:

$$\begin{aligned} R_A = 0 & \text{ puramente extensional;} \\ R_A = 1 & \text{ puramente cisalhante;} \\ R_A \rightarrow \infty & \text{ movimento de corpo rígido.} \end{aligned} \quad (2.51)$$

com a vantagem que  $R_A$  pode ser calculado em qualquer ponto do escoamento, conhecendo-se seu campo de velocidade. Os valores intermediários dão uma idéia de se o escoamento é predominantemente cisalhante ou extensional.

No entanto, Huilgol, 1980, logo apontou algumas deficiências neste critério de classificação que viriam a dificultar ou até impedir a sua utilização em certos casos. As falhas apontadas por Huilgol, 1980, no critério de classificação de Astarita são os seguintes:

- O parâmetro  $R_A$  não é bi-unívoco, i.e., para todo escoamento viscométrico,  $R_A=1$ , porém a recíproca não é verdadeira;
- $R_A$  não é uma função contínua do tipo de escoamento;

Quando dois autovetores são linearmente dependentes, mas linearmente independentes de um terceiro, não existiria nenhuma razão a priori para a escolha de Astarita. No entanto, Astarita reforça esta escolha em um segundo artigo em réplica a Huilgol [Astarita, 1980], argumentando que, no plano formado pelos autovetores múltiplos, a deformação é isotrópica e a rotação neste plano não afeta a persistência de deformação linear.

Em um artigo recente, Thompson e Souza Mendes, 2005, analisaram o critério de Astarita para a classificação de escoamentos e concluíram:

- Como já havia sido observado por Huilgol, 1980: a taxa de deformação de um filamento material alinhado com a direção da vorticidade não é afetada pela rotação do material;
- A medida de persistência de deformação linear proposta por Astarita, 1979, negligencia o fato de que a intensidade da persistência de deformação linear experimentada por um filamento material quando ele gira de uma direção de máxima deformação para uma direção de mínima deformação é também sensível à diferença entre os dois autovalores correspondente no plano de rotação.

A partir destas idéias, Thompson e Souza Mendes, 2005, desenvolveram um novo critério de classificação de escoamentos medindo a intensidade de deformação dos filamentos e introduzindo um tensor de persistência de deformação linear, denotado por  $\mathbf{P}$  e dado por:

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{D}\bar{\mathbf{W}} - \bar{\mathbf{W}}\mathbf{D} \quad (2.52)$$

A intensidade deste tensor é uma medida local de quão longe se está da persistência de deformação linear total em um dado escoamento, e é calculada como:

$$|\mathbf{P}|_2 = \left( \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{P}^2 \right)^{1/2} \quad (2.53)$$

A classificação de escoamentos é então dada pelo parâmetro  $R_R$ , expresso por:

$$R_R = \frac{|\mathbf{P}|_2}{\text{tr} \mathbf{D}^2} \quad (2.54)$$

Este parâmetro não apresenta as desvantagens apontadas no critério de Astarita, e pode ser aplicado a qualquer escoamento. Outros parâmetros que completam a classificação também são propostos por estes autores, de modo a garantir a consistência do critério, os quais não serão discutidos neste trabalho. No entanto, ressalta-se que, para escoamentos isocóricos planos, os parâmetros  $R_R$  e  $R_A$  são equivalentes, sendo que

$$R_R = (R_A)^{1/2} \quad (2.55)$$

## 2.3 AS LEIS DE BALANÇO

### 2.3.1 Conservação da massa

O princípio de conservação da massa afirma que *a massa de um corpo independe do tempo*. Matematicamente:

$$\dot{\mathfrak{M}} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_i} \rho dV = 0 \quad (2.56)$$

onde  $\rho$  é o campo de densidade de massa em uma dada configuração deformada  $\mathcal{P}_i$ ; e  $V$  representa a região do espaço ocupada pelo corpo em sua configuração deformada.

Empregando-se o teorema do transporte de Reynolds [Truesdell e Toupin, 1960; Billington e Tate, 1981] ao princípio da conservação da massa (Eq. (2.56)), obtém-se:

$$\int_{\mathcal{P}_i} \left( \frac{d_{(m)}\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad (2.57)$$

Através de um argumento de localização [Gurtin, 1981], é obtida a forma diferencial da **equação da continuidade**, que estabelece um balanço de massa para todos os pontos do material contínuo:

$$\frac{d_{(m)}\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.58)$$

Quando a massa específica  $\rho$ , seguindo uma partícula material  $\mathbf{p}$ , não varia com o tempo, o movimento é dito isocórico, ou seja, sem variação de volume, e a equação da continuidade reduz-se a

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.59)$$

Materiais incompressíveis são aqueles cuja massa específica é considerada constante por uma hipótese constitutiva. Uma condição suficiente, porém não necessária, para um movimento isocórico, é que o fluido seja incompressível.

### 2.3.2 Balanço de quantidade de movimento

As equações do movimento de um corpo mecânico são obtidas através do princípio de balanço de quantidade de movimento, o qual descreve a reação do corpo às forças internas e externas nele atuantes. Na mecânica dos meios contínuos, são classicamente considerados dois tipos de forças:

**Forças de corpo:** Originam-se no exterior do corpo e agem sobre suas partículas materiais. Seja  $\mathbf{b}_m$  uma força externa por unidade de massa que a vizinhança exerce sobre  $\mathcal{B}$ . A força total exercida em  $\mathcal{P}$  será

$$\int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b}_m(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.60)$$

**Forças de contato:** São as forças exercidas pelo meio externo sobre a superfície de um corpo material. A força de superfície agindo sobre a fronteira  $\partial\mathcal{P}$  é dada por:

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \quad (2.61)$$

Em um volume diferencial arbitrário, as forças de contato representam as forças que agem entre diferentes partes do mesmo corpo, decorrentes das tensões internas ao corpo. A forma destas forças é dada pela **hipótese de Cauchy** [Billington e Tate, 1981]: assume-se a existência de um campo de forças de superfície, o campo de tensão  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t)$ , definido para todo vetor unitário  $\mathbf{n}$  no ponto  $\mathbf{x}$ . Este campo tem a seguinte propriedade: para uma superfície arbitrária  $\Gamma$ ,  $\mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t)$  é a força por unidade de área exercida através de  $\Gamma$  sobre o material no lado

negativo do  $\Gamma$  pelo material no lado positivo de  $\Gamma$ , força esta dependente da orientação da superfície  $\Gamma$  dada pelo vetor normal  $\mathbf{n}$ .

Os axiomas de balanço de quantidade de movimento [Truesdell e Toupin, 1960] são a base para o estabelecimento do **Teorema de Cauchy** e do **Princípio das Potências Virtuais**. Estes princípios são equivalentes às leis de balanço de quantidade de movimento em sua forma diferencial [Gurtin, 1981], porém apresentam a vantagem de descrever o escoamento de um corpo material  $\mathcal{B}$  através da tripla velocidade, densidade de massa e tensor de tensão,  $(\mathbf{v}, \rho, \mathbf{T})$  e o sistema de forças associado  $(\mathbf{t}(\mathbf{n}), \mathbf{b})$ .

**Teorema de Cauchy:** Estabelece a existência da tensão  $\mathbf{T}$ , um campo tensorial espacial, como condição necessária e suficiente para que sejam satisfeitos os balanços de quantidade de movimento linear e angular, na seguinte forma:

i) Para todo  $\mathbf{n}$ ,

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (2.62)$$

ii)  $\mathbf{T}$  é simétrico.

iii)  $\mathbf{T}$  satisfaz a *Equação do Movimento*:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (2.63)$$

**Princípio das Potências Virtuais (PPV):** é uma consequência do balanço de quantidade de movimento [Gurtin, 1981]. Asserta que, para toda parte  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{B}$ , sendo  $H^1(\mathcal{B}_t)^{nsd}$  o espaço de velocidades virtuais,  $\mathbf{v}$ , associado à configuração  $\mathcal{B}_t$ :

i) a potência despendida em  $\mathcal{P}$  pelas forças externas de corpo,  $\mathbf{b}$ , e de superfície,  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ , é igual à potência das tensões internas mais a taxa de variação de energia cinética [Gurtin, 1981]:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dV + \int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dV \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\mathcal{B}_t)^{nsd} \quad (2.64)$$

para  $\mathbf{T}$  um tensor simétrico e  $\mathbf{D}$  denotando o tensor taxa de deformação. O primeiro termo no lado direito da Eq. (2.64) representa a potência das tensões internas, i.e., despendida pelas forças de contato no interior de  $\mathcal{P}$ .

ii) Para todo movimento de corpo rígido  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{W}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t)$ , com  $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$ , segue que.

$$\int_{P_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dV = 0 \quad (2.65)$$

O tensor  $\mathbf{T}$  representa a tensão, visto que o teorema de Cauchy (Eq. (2.63)) pode ser derivado do PPV como segue:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{P_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial P_t} \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dA - \int_{P_t} \mathbf{T} \cdot \text{grad } \mathbf{v} dV - \int_{P_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dV \\ &= \int_{P_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{P_t} \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) dV - \int_{P_t} \text{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) dV - \int_{P_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dV \\ &= \int_{P_t} (\rho \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b} - \text{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} dV \end{aligned} \quad (2.66)$$

que resulta na Eq. (2.63), pelo teorema de localização [Gurtin, 1981].

A forma variacional com que o PPV enuncia os axiomas de conservação da mecânica do contínuo tem a vantagem de possibilitar uma introdução natural aos métodos variacionais na dinâmica dos fluidos, em particular o Método de Elementos Finitos, utilizado neste trabalho e explorado no Capítulo 4.

### 2.3.3 Conservação da energia e princípio de aumento de entropia

A Primeira Lei da Termodinâmica assera que, para um referencial inercial, a taxa de variação de energia interna ( $U$ ) e cinética de um corpo é igual à taxa na qual trabalho é realizado sobre o corpo pelo sistema de forças externas e de contato, mais a taxa de transmissão de energia ao corpo. Matematicamente, este princípio pode ser escrito como [Slattery, 1999]:

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho \left( U + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{\partial P_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n} dA + \int_{P_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} dV - \int_{\partial P_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.67)$$

onde  $v^2$  é o quadrado da norma da velocidade,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{b}$  é o vetor de forças de corpo por unidade de volume e  $\mathbf{q}$  o vetor fluxo de energia. A forma diferencial deste princípio de conservação é dada por:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d_{(m)}}{dt} \left( U + \frac{1}{2} v^2 \right) &= -\text{div } \mathbf{q} + \text{div}(\mathbf{T} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \\ &= -\text{div } \mathbf{q} - \text{grad}(p \mathbf{v}) + \text{div}(\boldsymbol{\tau}' \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde  $\boldsymbol{\tau}'$  é o tensor deviatórico  $\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{T} + p \mathbf{I}$ , dado pelo modelo constitutivo do material.

Por outro lado, tomando o produto interno da equação do movimento (Eq. (2.62)) com a velocidade, obtém-se:

$$\rho \frac{d_{(m)}}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = -\mathbf{v} \cdot \text{grad } p + \mathbf{v} \cdot \text{div } \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \quad (2.69)$$

Subtraindo a Eq. (2.69) da Eq. (2.68), tem-se que:

$$\rho \frac{d_{(m)}U}{dt} = -\text{div } \mathbf{q} + \text{tr}(\boldsymbol{\tau}' \cdot \text{grad } \mathbf{v}) \quad (2.70)$$

Segundo Astarita e Marrucci, 1974, a Eq. (2.70) mostra que o termo  $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}' \cdot \text{grad } \mathbf{v})$  representa a conversão de energia interna pelo trabalho realizado pelas tensões deviatóricas. Na Mecânica dos Fluidos clássica, assume-se que fluidos incompressíveis só podem aumentar a sua energia interna através de um aumento de entropia, segundo a relação de Maxwell:

$$\frac{d_{(m)}U}{dt} = -p \frac{d_{(m)}(1/\rho)}{dt} + T \frac{d_{(m)}S}{dt} \quad (2.71)$$

onde  $T$  é a temperatura. Substituindo a Eq. (2.71) na Eq. (2.70), e fazendo  $\rho$  constante, tem-se que

$$\frac{d_{(m)}S}{dt} + \frac{\text{div } \mathbf{q}}{\rho T} = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\tau}' \cdot \text{grad } \mathbf{v})}{\rho T} \quad (2.72)$$

O lado esquerdo da Eq. (2.72) representa o aumento total da entropia do sistema e da vizinhança, i.e., a taxa de dissipação de energia ou a taxa de conversão irreversível de energia interna. Portanto, da Eq. (2.72), o Princípio de Aumento de Entropia (Segunda Lei da Termodinâmica) impõe uma restrição termodinâmica à forma de  $\boldsymbol{\tau}'$ :

$$\text{tr}(\boldsymbol{\tau}' \cdot \text{grad } \mathbf{u}) \geq 0 \quad (2.73)$$

A Eq. (2.73) é válida para materiais inelásticos, i.e., em que todo o trabalho de escoamento é dissipado na forma de calor, e representa uma consideração importante na teoria constitutiva destes materiais. No entanto, alguns materiais são capazes de acumular energia na forma elástica,  $U_{el}$ . Neste caso, para  $\rho$  constante, a Eq. (2.71) seria dada na forma:

$$\frac{d_{(m)}U}{dt} = T \frac{d_{(m)}S}{dt} + \frac{d_{(m)}U_{el}}{dt} \quad (2.74)$$

Assim,  $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}' \text{grad } \mathbf{v})$  representa a soma da dissipação e do acúmulo de energia elástica:

$$\text{tr}(\boldsymbol{\tau}' \text{grad } \mathbf{v}) = \left( \rho T \frac{d_{(m)} S}{dt} + \text{div } \mathbf{q} \right) + \rho \frac{d_{(m)} U_{el}}{dt} \quad (2.75)$$

A dependência de  $U_{el}$  com as variáveis cinemáticas é dada pela equação de estado do material, independente da equação constitutiva, o que depende de consideração termodinâmicas e foge do escopo deste trabalho.

### 3. COMPORTAMENTO MATERIAL

A Equação do Movimento (Eq. (2.63)) representa o balanço de quantidade de movimento em um meio contínuo arbitrário. No entanto, o comportamento dos corpos materiais depende do modo como as tensões nele se distribuem, i.e., como as forças de contato no interior do corpo se relacionam com seus movimentos e deformações.

No caso de um material fluido, o escoamento é dependente de seu comportamento reológico, manifestado através das funções materiais como viscosidade, coeficientes de diferenças de tensões normais e funções relacionadas à viscoelasticidade. O estudo desses efeitos e a sua relação com a cinemática dos escoamentos representa um importante campo de pesquisa, tanto para o entendimento da dinâmica dos escoamentos, quanto para o desenvolvimento e utilização de materiais em aplicações de engenharia.

Matematicamente, o comportamento reológico dos materiais é descrito por equações que descrevem forças de contato no interior do corpo, na forma de uma equação constitutiva para o tensor de tensão,  $\mathbf{T}$ , relacionando-as com as deformações experimentadas pelo corpo. Sua formulação matemática deve atender ao pressuposto de que o comportamento dos materiais não pode depender de convenções artificiais utilizadas para descrevê-los matematicamente; i.e., o mesmo comportamento deve ser previsto qualquer que seja a convenção adotada. Isto implica que a equação constitutiva deve ser invariante a uma mudança da convenção considerada [Astarita e Marrucci, 1974].

Sendo assim, uma equação constitutiva deve ser **invariante a mudanças de sistemas de coordenadas**. Quando uma equação constitutiva é escrita na forma tensorial, esta é sempre invariante a mudanças de sistema de coordenadas, pois este último é uma convenção utilizada para descrever os componentes de vetores e tensores: uma mudança no sistema de coordenadas não muda os operadores tensoriais, apenas altera suas componentes.

Em seguida, tem-se a imposição de que as equações constitutivas sejam **indiferentes a mudanças de referencial (Princípio da objetividade material**, Truesdell e Noll, 1965; ou Princípio da indiferença do referencial material, Slattery, 1999). Astarita e Marrucci, 1974, apontam que é importante observar que a indiferença ao referencial não é uma condição válida para todas as leis físicas; por exemplo, a equação de balanço de quantidade de movimento (Eq. (2.63)) não é indiferente ao referencial, assim como . De fato, no modo como está escrita, a Eq. (2.63) só é válida em relação a referenciais inerciais, assim como a equação de conservação da

energia, Eq. (2.67). Em contraste, em algumas leis físicas, a indiferença ao referencial é intrínseca, como é o caso da conservação da massa.

Logo, o papel do movimento nas tensões desenvolvidas no material poderia estar representado pelo tensor velocidade relativa ( $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{u}$ ). Entretanto, do Capítulo 2, tem-se que  $\mathbf{L}$  não é um tensor indiferente ao referencial, ou seja, uma equação constitutiva para  $\mathbf{T}$  em função de  $\mathbf{L}$  desrespeitaria o princípio da objetividade material. Assim, em vista da decomposição de  $\mathbf{L}$  em um indiferente,  $\mathbf{D}$ , e um tensor não indiferente,  $\mathbf{W}$ , dá origem à equação mais simples para descrever o comportamento material dos fluidos, a equação de Reiner-Rivlin:

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{D}) \quad (3.1)$$

sendo  $\mathbf{G}$  uma função a valor tensorial genérica, de modo que

$$\mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{D})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T) \quad (3.2)$$

ou seja,  $\mathbf{G}$  é indiferente ao referencial. Esta equação pode ser vista como a formulação rigorosa da Hipótese de Stokes, 1845, para fluidos incompressíveis, em que este inferiu que a tensão é determinada pela taxa de deformação, Astarita e Marrucci, 1974.

Um terceiro requerimento é a **invariância dimensional** das equações constitutivas, i.e., essas devem possuir um determinado número de parâmetros dimensionais que mantenham as dimensões propostas para os parâmetros que descrevem.

Deve-se ainda levar em conta o **princípio do determinismo** e o **princípio da ação local**. O primeiro afirma que a tensão em um corpo é determinada pela história do movimento do corpo, ou seja, seus movimentos futuros não influenciam o campo de tensão no presente [Slattery, 1999]. Já o princípio da ação local asserta que o movimento do material exterior a uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto material,  $\mathbf{p}$ , pode ser ignorado quando da determinação da tensão neste ponto; ou seja, o movimento em uma parte de um corpo não necessariamente afetará o estado de tensão em outras partes do corpo. A idéia física das forças de contato sugere que as condições na vizinhança imediata de um ponto material o determinam inteiramente [Slattery, 1999].

O conceito de **memória efêmera** (*fading memory*) também é um princípio a ser estabelecido para as equações constitutivas de fluidos com memória. Segundo este princípio, a influência das deformações passadas nas tensões do presente é menor para o passado distante do que para o passado recente [Astarita e Marrucci, 1974].

Finalmente, deve-se observar que a Segunda Lei da Termodinâmica não seja violada [Astarita e Marrucci, 1974; Slattery, 1999], o que impõe certas restrições à forma das equações

constitutivas. A importância da Segunda Lei da Termodinâmica para o estabelecimento de equações constitutivas para fluidos é assunto discutido e aplicado para a formulação de equações constitutivas em Coleman e Mizel, 1968, Astarita e Marrucci, 1974, Mattos, 1998, e Slattery, 1999.

Os princípios acima descritos são empregados na construção de equações constitutivas particulares para o tensor tensão. A seguir, apresenta-se um estudo das equações constitutivas clássicas para fluidos, as quais estão divididas em dois grandes grupos: modelos puramente viscosos e modelos viscoelásticos. Logo após, apresenta-se uma revisão de uma nova proposta no estabelecimento de equações constitutivas: os modelos sensíveis ao tipo de escoamento. Estes modelos baseiam-se na idéia de que o comportamento do material é altamente influenciado pela cinemática à qual este é submetido.

### 3.1 FLUIDOS PURAMENTE VISCOSOS

Os modelos constitutivos puramente viscosos, também conhecidos por modelos Newtonianos generalizados, são os modelos mais simples para o tensor tensão, os quais o relacionam à taxa de deformação. Os modelos não Newtonianos puramente viscosos são bastante utilizados em problemas de engenharia, encontrando uma gama de aplicações. Isso se deve ao fato de que esses modelos, apesar de suas limitações, são capazes de representar importantes variações na viscosidade durante processos de escoamentos em dutos e geometrias onde a deformação se dá maioritariamente por cisalhamento.

Os modelos puramente viscosos são derivados da forma mais geral que a Eq. (3.1), a Equação de Reiner, 1945, e Prager, 1945, pode assumir:

$$\mathbf{T} = \kappa_0 \mathbf{I} + \kappa_1 \mathbf{D} + \kappa_2 \mathbf{D}^2 \quad (3.3)$$

onde  $\kappa_k = \kappa_k(I_{\mathbf{D}}, II_{\mathbf{D}}, III_{\mathbf{D}})$  sendo que  $I_{\mathbf{D}}$ ,  $II_{\mathbf{D}}$ ,  $III_{\mathbf{D}}$  denotam o primeiro, segundo e terceiro invariantes, respectivamente, do tensor taxa de deformação:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{D}} &= \text{tr } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{u} \\ II_{\mathbf{D}} &= \frac{1}{2} [I_{\mathbf{D}}^2 - \text{tr}(\mathbf{D}^2)] \\ III_{\mathbf{D}} &= \det \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.4)$$

e

$$II_{\mathbf{D}} = \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}) \quad (3.5)$$

Quando se assume a hipótese de um material incompressível, não se pode definir uma pressão termodinâmica do material [Astarita e Marrucci, 1974]. Nesse caso, cria-se o conceito de pressão hidrodinâmica, a partir da pressão hidrostática desenvolvida quando o fluido encontra-se em repouso ou em movimento de corpo rígido, i.e.,  $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ . O campo de tensão é dado, então, por:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} \quad (3.6)$$

Assim, quando o fluido escoar, a tensão pode ser vista como a soma da pressão hidrodinâmica com uma componente viscosa:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}' \quad (3.7)$$

onde  $\boldsymbol{\tau}'$  é o tensor de tensão deviatórico, no sentido de que

$$\text{tr } \boldsymbol{\tau}' = 0 \quad (3.8)$$

e a pressão média fica definida como

$$p \equiv -\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T} \quad (3.9)$$

Aplicando as considerações acima à Eq. (3.3), considerando apenas seus termos lineares e desprezando-se, ainda, a dependência de  $\mathbf{T}$  em  $III_D$ , obtém-se o chamado o modelo de **Líquido Newtoniano Generalizado (GNL)**:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\eta(II_D)\mathbf{D} \quad (3.10)$$

onde  $\eta$  é a chamada função viscosidade. No caso desta função ser constante, costuma-se notar  $\eta=\mu$ , e obtém-se o chamado modelo de **Fluido Newtoniano**.

*OBSERVAÇÃO:* As equações constitutivas para fluidos incompressíveis podem ser escritas na forma de um tensor isotrópico arbitrário, na qual o tensor  $\mathbf{T}$  pode ser decomposto em:

$$\mathbf{T} = -\alpha\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.11)$$

onde  $\boldsymbol{\tau}$  não representa necessariamente um tensor deviatórico, sendo chamado de tensor extra de tensão. Assim, para  $\text{tr } \boldsymbol{\tau} \neq 0$ ,

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\tau})\mathbf{I} \quad (3.12)$$

As equações constitutivas que empregam um tensor não deviatórico podem ocorrer no estudo de fluidos não Newtonianos sujeitos a efeitos mais complexos que os efeitos viscosos. Nos demais casos, tem-se que

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' \quad (3.13)$$

Do ponto de vista fenomenológico, o conceito de fluido Newtoniano generalizado foi desenvolvido para descrever efeitos de viscosidade variável observados em escoamentos viscométricos, tais como os fenômenos de pseudoplasticidade (*shear-thinning*), dilatância (*shear-thickening*) e viscoplasticidade (*yield limit*). Estes fenômenos são descritos pela forma como a viscosidade do fluido varia com a taxa de deformação devido por cisalhamento. Assim, sendo, a Eq. (3.10) é escrita na forma:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D} \quad (3.14)$$

onde o escalar  $\dot{\gamma}$  é definido como a magnitude da taxa de deformação [Slattery, 1999], dada pela norma de Frobenius desse tensor, e representa a taxa de cisalhamento em escoamentos viscométricos:

$$\dot{\gamma} = (2\text{II}_{\mathbf{D}})^{1/2} = (2 \text{tr } \mathbf{D}^2)^{1/2} \quad (3.15)$$

A magnitude do tensor extra de tensão é dada semelhantemente por

$$|\boldsymbol{\tau}| = (1/2 \text{tr } \boldsymbol{\tau}^2)^{1/2} \quad (3.16)$$

Portanto, escrevendo a Eq. (3.14) em função do tensor extra de tensão, tem-se que

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D} \quad (3.17)$$

Alguns modelos são bastante utilizados para modelar as funções viscosidade da Eq. (3.14), como o **modelo Ostwald-de-Waele**, ou, simplesmente, modelo *power-law*. Neste modelo, a função viscosidade é dada por uma lei de potência:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 \dot{\gamma}^{n-1} \quad (3.18)$$

onde os parâmetros  $\eta_0$  (índice de consistência) e  $n$  (expoente *power-law*) são determinados empiricamente. Quando  $n=1$  e  $\eta_0=\mu$ , a Eq. (3.18) reduz-se ao modelo Newtoniano para fluido

incompressível. Se  $n < 1$ , a função tem comportamento pseudoplástico, e se  $n > 1$ , comportamento dilatante. Para muitos dos materiais empregados em problemas de engenharia, tais como alimentos, tintas e polímeros, comportamento pseudoplástico ( $n < 1$  na Eq. (3.18)), o que acarreta valores ilimitados para a viscosidade em pontos onde a taxa de cisalhamento é nula, ou seja, quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ,  $\eta(\dot{\gamma}) \rightarrow \infty$ . O mesmo acontece no caso de  $n > 1$  quando  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$  [Slattery, 1999].

Outros modelos são capazes de corrigir esta deficiência através da predição de viscosidades limites  $\eta_0$  e  $\eta_\infty$ , como o **modelo Carreau-Yasuda** [Bird et al., 1987]. Trata-se de um modelo para a viscosidade a cinco parâmetros com flexibilidade suficiente para ajustar uma grande variedade de curvas de escoamento, e tem se mostrado particularmente útil na solução numérica de escoamentos de fluidos pseudoplásticos. O modelo Carreau-Yasuda é dado pela seguinte expressão:

$$\frac{\eta(\dot{\gamma}) - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[ 1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{(n-1)/a} \quad (3.19)$$

onde  $\eta_0$  e  $\eta_\infty$  são as viscosidades dos platôs de baixas e altas taxas de deformação, respectivamente;  $n$  é o expoente *power-law* e  $a$  é um parâmetro adimensional. Na maioria dos fluidos de interesse, tais como fluidos alimentícios e soluções de polímeros, são obtidas boas correlações para  $a = 2$  e  $\eta_\infty = 0$ . Nestes casos, somente precisam ser determinados experimentalmente os parâmetros  $\eta_0$ ,  $\lambda$  e  $n$ . A Eq. (3.19) com  $a = 2$  representa o chamado modelo de Carreau, desenvolvido por P. J. Carreau, 1968. A possibilidade de variação deste parâmetro foi somente acrescentada em 1981 por K. Yasuda [Yasuda et al., 1981].

O fenômeno da viscoplasticidade é caracterizado pela presença de uma tensão inicial de escoamento (*yield stress*), denotada neste trabalho por  $\tau_0$ . A definição usual de um fluido viscoplástico é de um material que possui uma tensão limite de escoamento abaixo da qual o material não escoar, comportando-se como um sólido, e acima da qual ele escoar como um fluido viscoso [Papanastasiou, 1987]. Na realidade, a tensão inicial é um modelo para o comportamento de certos líquidos estruturados, os quais apresentam uma mudança drástica segundo Barnes, 1999, e referências. Segundo Souza Mendes e Dutra, 2004, uma definição mais realista para este tipo de material seria a de um material que, quando submetido a baixas tensões de cisalhamento (valores abaixo de  $\tau_0$ ), se comportaria como um fluido extremamente viscoso; para um valor chamado de tensão limite de escoamento, experimentaria uma queda brusca na viscosidade e passa a se comportar como um fluido puramente viscoso.

Para descrever o fenômeno da viscoplasticidade, são bastante empregadas equações constitutivas descontínuas, as quais prevêm um comportamento material do tipo sólido-líquido. Dentre elas, destacam-se o modelo plástico de Bingham:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \left( \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu \right) \mathbf{D} & \text{para } |\boldsymbol{\tau}| > \tau_0 \\ \mathbf{D} &= \mathbf{0} & \text{para } |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

o modelo Herschel-Buckley, que prevê, para  $\tau > \tau_0$ , um comportamento *power-law*:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \left( \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + 2\eta_0 \dot{\gamma}^{n-1} \right) \mathbf{D} & \text{para } |\boldsymbol{\tau}| > \tau_0 \\ \mathbf{D} &= \mathbf{0} & \text{para } |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

e, finalmente, tem-se o modelo de Casson [Casson, 1959], qual ajusta o comportamento viscoplástico de alguns fluidos através da seguinte função viscosidade:

$$\begin{aligned} \eta^{1/2} &= (\eta_0)^{1/2} + \left( \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} \right)^{1/2} & \text{para } |\boldsymbol{\tau}| > \tau_0 \\ \mathbf{D} &= \mathbf{0} & \text{para } |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $\tau_0$  é a tensão inicial de escoamento e  $\eta_0$  a viscosidade plástica do material.

A dificuldade de lidar com o critério de von Mises na aproximação numérica de problemas de escoamentos de fluidos viscoplásticos pode ser superada com a utilização de regularizações contínuas das equações constitutivas, como a proposta por Papanastasiou, 1987. Recentemente, alguns autores, baseados em medidas reológicas de tensão à baixíssimas taxas de deformação, vêm propondo novas equações constitutivas contínuas nas quais o conceito de tensão inicial de escoamento dá lugar a um platô de alta viscosidade a baixas tensões [Barnes, 1999; Souza Mendes e Dutra, 2004]. Maiores detalhes envolvendo modelos de fluidos Newtonianos generalizados e equações constitutivas ver Slattery, 1999, Astarita e Marrucci, 1974, Bird et al., 1987.

### 3.2 FLUIDOS VISCOELÁSTICOS

Os modelos constitutivos puramente viscosos descrevem os aspectos inelásticos do comportamento não Newtoniano. No entanto, outros efeitos não previstos pelo modelo

Newtoniano são observados com frequência em escoamentos de interesse, os quais não podem ser matematicamente previstos por estes modelos. Basicamente, estes efeitos pertencem a duas classes distintas: diferenças de tensões normais e memória. As equações constitutivas construídas de forma a prever efeitos elásticos em materiais fluidos caracterizam os chamados **fluidos viscoelásticos**.

Os efeitos de memória constituem na recuperação parcial do trabalho realizado durante a deformação de um corpo. Nos fluidos puramente viscosos, todo o trabalho realizado na deformação é transformado em calor pela dissipação viscosa, enquanto que os fluidos viscoelásticos recuperam parte do trabalho despendido através do efeito de memória, isto é, estes materiais possuem uma memória limitada das configurações anteriores e esta influi no estado de tensões a cada instante de tempo.

A previsão de efeitos elásticos em escoamentos não é uma tarefa simples: estes fenômenos são altamente dependentes das características locais do escoamento. Além disso, as equações construídas para descrever os fenômenos abordados são matematicamente muito mais complexas do que as equações para fluidos puramente viscosos. Classicamente, as equações para fluidos viscoelásticos estão divididas em três tipos básicos: expansões de Rivlin-Ericksen, modelos de diferenciais e modelos integrais. Ainda, os modelos diferenciais podem ser classificados em modelos lineares e não-lineares.

A escolha do tipo de modelo adequado é uma questão controversa. Ela está relacionada tanto aos fenômenos observados em amostras do material através da medição de funções materiais quanto ao tipo de análise de escoamento realizada e também a experiência e cultura do pesquisador. A seguir, apresenta-se um breve estudo sobre os modelos clássicos de expansão de Rivlin-Ericksen e diferenciais. Aborda-se apenas brevemente os modelos integrais, pois sua estrutura não apresenta aplicação imediata com os métodos numéricos aqui propostos.

### *3.2.1 Expansões de Rivlin-Ericksen*

As expansões de Rivlin-Ericksen são expansões sobre modelo Newtoniano visando captar a influência do histórico das deformações sofridas pelo material. Estes modelos são teóricos e foram criados com base na mecânica dos meios contínuos para materiais sujeitos a pequenas deformações. De modo a modelar o histórico das deformações sofridas pelo material, são utilizadas as derivadas do tensor de Cauchy (ver Cap. 2), através de uma expansão em série de Taylor, a qual só é válida no caso deste histórico ser suficientemente suave.

No entanto, esses modelos são capazes de representar os efeitos de diferenças de tensões normais, responsáveis por alguns fenômenos observados experimentalmente como o

desenvolvimento de escoamentos secundários e deformação de superfície livre. Exemplos destes fenômenos, incluindo ilustrações, podem ser encontrados em Bird et al., 1987. Grandes ou rápidas deformações não são captadas pelo modelo.

A forma geral para um modelo diferencial é dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{A}_i, i=1, n$ , são os tensores de Rivlin-Ericksen (Eq. (2.18)), a função tensorial  $\mathbf{G}$  é isotrópica e  $\boldsymbol{\tau}$  o tensor extra de tensão, não necessariamente um tensor deviatórico. Para  $n = 2$ , uma função isotrópica para  $\boldsymbol{\tau}$  é dada na forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & -\alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_1^2 + \alpha_4 \mathbf{A}_2^2 + \\ & \alpha_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \alpha_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) + \\ & \alpha_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1) + \alpha_8 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1^2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde os coeficientes  $\alpha_i, i=1,8$ , são funções dos invariantes de  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ .

Entre estes modelos, os mais encontrados na literatura são aqueles derivados da expansão de movimento retardado (*retarded-motion expansion*), em que o conceito de escoamento lento e suave e *fading memory* são utilizados para se obterem expressões gerais para o tensor extra de tensão,  $\boldsymbol{\tau}$ . O **fluido de segunda ordem**, obtido por uma expansão deste tipo, gera uma expressão na forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \beta_1 \mathbf{A}_1 + \beta_{11} \mathbf{A}_1^2 + \beta_2 \mathbf{A}_2 \quad (3.25)$$

onde os coeficientes  $\beta_i, i=1,2$ , são funções dos invariantes de  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ .

O fluido de segunda ordem é a primeira aproximação para a influência da memória no comportamento dos fluidos reais, através do termo  $\beta_2 \mathbf{A}_2$ . No entanto, o fluido de segunda ordem não descreve os comportamentos de pseudoplasticidade ou dilatância, nem tampouco a dependência das funções materiais de diferenças de tensões normais com a taxa de deformação. Em um escoamento viscométrico, as funções materiais viscosidade,  $\eta$ , e coeficientes de diferenças de tensões normais,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ , são constantes, sendo que

$$\begin{aligned} \eta &= \beta_1 \\ \Psi_1 &= -2\beta_2 \\ \Psi_2 &= \beta_{11} + 2\beta_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

As equações para fluidos de terceira e quarta ordem, em que a expansão é truncada nos termos de terceira e quarta ordem, respectivamente, também apresentam utilização na literatura (ver Bird et al., 1987, e referências).

A Equação constitutiva de Criminale-Ericksen-Filbey, conhecida como **CEF**, supera a limitação das funções materiais constantes, sendo expressa na forma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \eta_0(\dot{\gamma})\mathbf{A}_1 - \frac{1}{2}\Psi_1(\dot{\gamma})\mathbf{A}_2 + (\Psi_1(\dot{\gamma}) + \Psi_2(\dot{\gamma}))\mathbf{A}_1^2 \\ &= 2\eta_0(\dot{\gamma})\mathbf{D} - \frac{1}{2}\Psi_1(\dot{\gamma})\mathbf{A}_2 + 4(\Psi_1(\dot{\gamma}) + \Psi_2(\dot{\gamma}))\mathbf{D}^2\end{aligned}\quad (3.27)$$

onde as funções materiais são ajustadas através de dados reológicos de escoamentos viscométricos.

Segundo Bird et al., 1987, pode-se tomar a restrição das expansões para escoamentos com baixos gradientes de velocidade, i.e., suaves, como uma restrição a baixos números de Deborah. Para a definição do número de Deborah, no entanto, é necessário determinar um tempo característico para o fluido. Na forma adimensional da equação constitutiva de segunda ordem, o número de Deborah aparece como uma medida da importância dos termos não-lineares no escoamento. Esta forma é dada por

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{A}_1^* + \text{De}(\mathbf{B}_{11}(\mathbf{A}_1^*)^2 + \mathbf{A}_2^*) \quad (3.28)$$

onde

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}^* &= \frac{\boldsymbol{\tau}}{\lambda\dot{\gamma}_c}; \quad \mathbf{A}_1^* = \frac{\mathbf{A}_1}{\lambda\dot{\gamma}_c}; \quad \mathbf{A}_2^* = \frac{\mathbf{A}_2}{(\lambda\dot{\gamma}_c)^2}; \\ \text{De} &= \lambda\dot{\gamma}_c; \quad \mathbf{B}_{11} = \frac{\beta_{11}}{\beta_2}; \quad \lambda = \frac{\beta_2}{\beta_1}; \quad \dot{\gamma}_c = \frac{u_0}{L}\end{aligned}\quad (3.29)$$

### 3.2.2 Modelos diferenciais

Os modelos diferenciais são aqueles apresentados sob a forma de uma equação diferencial do tensor extra de tensão. Estes modelos são largamente utilizados na solução numérica de escoamentos de fluidos viscoelásticos, por apresentar maior generalidade e aplicabilidade do que as expansões de Rivlin-Ericksen.

### 3.2.2.1 Modelos lineares

Uma primeira tentativa de modificação das equações constitutivas de fluidos puramente viscosos a fim de considerar os efeitos elásticos foi superpor à equação de fluido Newtoniano ideal uma equação de sólido Hookeano, adicionando um termo de derivada temporal da tensão ( $\partial/\partial t$ ). Este último termo dá à equação a capacidade de representar o fenômeno de relaxação da tensão, característico de fluidos com memória. Na superposição dos efeitos elásticos e viscosos, a aproximação de Maxwell utiliza um modelo de mola (com constante de mola  $G$ ) e amortecedor (ideal, descrito pela viscosidade do fluido,  $\mu$ ) em série, como na Fig. 3.1 [Ferguson e Kemblowski, 1991].

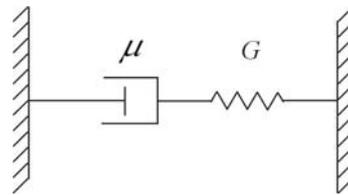


Figura 3.1: O modelo de Maxwell

Na forma tensorial, a equação obtida é o **modelo de Maxwell** [Astarita e Marrucci, 1974; Bird et al., 1987]:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = 2\mu \mathbf{D} \quad (3.30)$$

onde  $\lambda$  é o tempo de relaxação do fluido, parâmetro que controla a velocidade de relaxação da tensão. No modelo mola-amortecedor da Fig. (3.1),  $\lambda$  representa a viscosidade do fluido,  $\mu$ , dividida pela constante da mola  $G$ , i.e.,  $\lambda = \mu/G$ .

O modelo de Maxwell pode ser generalizado, de forma que o tensor total de tensão,  $\boldsymbol{\tau}$ , seja composto pela superposição de tensões parciais,  $\boldsymbol{\tau}_k$ . O **modelo de Maxwell generalizado** é expresso por:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{\tau}_k; \quad \boldsymbol{\tau}_k + \lambda_k \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_k}{\partial t} = 2\mu_k \mathbf{D} \quad (3.31)$$

com  $k=1, n$ , onde as constantes  $\lambda_k$  e  $\mu_k$  correspondem ao espectro de tempos de relaxação e viscosidades. Este modelo generalizado pode ser visto como a adição de vários sistemas mola/amortecedor como o da Fig. 3.1 em paralelo [Ferguson e Kemblowski, 1991].

O **modelo de Jeffreys** baseia-se no sistema esquemático da Fig. 3.2, no qual é permitido o movimento dissipativo de um extremo a outro, sem ação da mola.

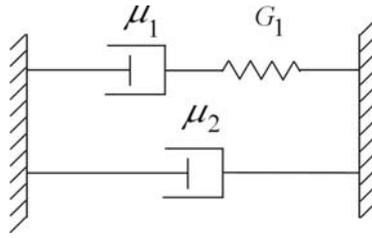


Figura 3.2: O modelo de Jeffreys

Neste modelo, um tempo de retardo de deformações,  $\lambda_2$ , também aparece na equação constitutiva, como segue:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = 2\mu \left( \mathbf{D} + \lambda_2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (3.32)$$

Os modelos de Maxwell e Jeffreys encontram bastante aplicações estendidos a versões não-lineares, como será discutido na próxima seção.

Os modelos lineares são importantes no levantamento de propriedades viscoelásticas, visto que os experimentos mais comuns para a medição de propriedades reológicas viscoelásticas são projetados com base nas equações constitutivas do tipo linear.

Como a teoria constitutiva para sólidos Hookeanos é construída sobre a hipótese de gradientes de deformação infinitamente pequenos [Bird et al., 1987], as equações diferenciais lineares tem o seu espectro de aplicação reduzido. Os fenômenos de pseudoplasticidade e dilatância, assim como diferenças de tensões normais, não são descritos por estes modelos. Mas o maior inconveniente dos modelos diferenciais lineares é que eles não respeitam o princípio da objetividade material, pois a derivada temporal do tensor extra de tensão não é indiferente ao referencial. A fim de superar este problema, foram propostos os modelos diferenciais não-lineares utilizando-se das derivadas objetivas descritas no Capítulo 2. Estes são discutidos em seqüência.

### 3.2.2.2 Modelos não-lineares

Os modelos não-lineares são construídos de modo a gerar equações constitutivas com menores limitações de aplicabilidade do que os modelos lineares e serem capazes de descrever o máximo possível as funções materiais medidas em ensaios reológicos permanentes e transientes.

As derivadas associadas objetivas (ver Capítulo 2) são empregadas na construção de modelos constitutivos indiferentes ao referencial, de forma a preservar a simetria do tensor extra de tensão. A combinação mais geral das derivadas associadas, a qual que preserva a simetria de um tensor genérico  $\mathbf{J}$ , é descrita pelo funcional  $F_{abc}$  como [Astarita e Marrucci, 1974]:

$$F_{abc}(\mathbf{J}) = \mathbf{J} + a(\mathbf{J}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{J}) + b(\mathbf{J} \cdot \mathbf{D})\mathbf{I} + c\mathbf{D} \operatorname{tr} \mathbf{J} \quad (3.33)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números arbitrários. Para  $b = c = 0$  e  $a = 0, 1, -1$ , são obtidas as derivadas corotacional (Eq. (2.45)), convectada inferior e convectada superior (Eqs. (2.46)), respectivamente.

Uma generalização da equação constitutiva de Maxwell (Eq. (3.30)), assumindo  $b=c=0$  na Eq. (3.33), é dada por:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \dot{\boldsymbol{\tau}} + \lambda a(\boldsymbol{\tau}\mathbf{D} + \mathbf{D}\boldsymbol{\tau}) = 2\mu\mathbf{D} \quad (3.34)$$

As funções materiais em escoamento viscométrico para este modelo geral são dadas por:

$$\begin{aligned} \eta(\dot{\gamma}) &= \frac{\mu}{1 + \dot{\gamma}^2 \lambda^2 (1 - a^2)} \\ \Psi_1(\dot{\gamma}) &= \frac{2\mu\lambda}{1 + \dot{\gamma}^2 \lambda^2 (1 - a^2)} \\ \Psi_2(\dot{\gamma}) &= \frac{2\mu(1 + a)}{1 + \dot{\gamma}^2 \lambda^2 (1 - a^2)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

assumindo que os parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes (independentes de  $\dot{\gamma}$ ), nota-se que a viscosidade assume o valor de  $\mu$  quando  $\dot{\gamma}$  tende a zero. Para que a viscosidade assuma um valor estritamente positivo, é necessário que o parâmetro  $a$  esteja entre  $-1$  e  $1$ . A viscosidade é então uma função decrescente em  $\dot{\gamma}$ , prevendo comportamento pseudoplástico. Em geral, a primeira e segunda diferença de tensões normais são diferentes de zero e função de  $\dot{\gamma}$ . Agora, analisando os valores particulares de  $a$  na Eq. (3.35):  $0, 1, -1$ , tem-se que:

- Para  $a = 0$ , i.e., considerando-se a derivada corotacional, os coeficientes de diferenças de tensões normais são iguais com sinal contrário.
- Para  $a = 1$ , i.e., considerando-se a derivada convectada inferior, o coeficiente de primeira diferença de tensões normais é igual a zero.
- Para  $a = -1$ , i.e., considerando-se a derivada convectada superior, as funções materiais são dadas por:

$$\begin{aligned} \eta(\dot{\gamma}) &= \mu \\ \Psi_1(\dot{\gamma}) &= 2\mu\lambda \\ \Psi_2(\dot{\gamma}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Os modelos baseados nas funções materiais introduzidos na Eq. (3.36) são os que descrevem mais adequadamente o comportamento dos fluidos reais. Assim sendo, o modelo mais utilizado é o chamado **modelo de Maxwell convectado superior**, ou **Maxwell-B**, dado por:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \mathbf{D} \quad (3.37)$$

A forma não-linear das equações de Maxwell também pode ser generalizada na forma de um somatório de tensões parciais, a exemplo da generalização da forma linear, a fim de incluir os diversos tempos de relaxação e viscosidades, como é descrito em Astarita e Marrucci, 1974.

A equação constitutiva de Jeffreys (Eq. (3.32)) também pode ser modificada de forma a gerar equações indiferentes ao referencial. É o caso das equações de **Oldroyd-A**,

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \left( \mathbf{D} + \lambda_2 \overset{\Delta}{\mathbf{D}} \right) \quad (3.38)$$

e **Oldroyd-B**:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \left( \mathbf{D} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}} \right) \quad (3.39)$$

A exemplo dos modelos de Maxwell, o modelo convectado superior (Oldroyd-B, Eq. (3.39)) é o que apresenta maior aplicação, pois gera as funções materiais que mais se assemelham ao comportamento observado em fluidos reais. Em um escoamento viscométrico, as funções materiais para o fluido Oldroyd-B são dadas por:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 \\ \Psi_1 &= 2\eta_0(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \Psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

É importante lembrar que as generalizações do modelo de Jeffreys (Eq. (3.32)), ou seja, as equações de Oldroyd convectada superior e inferior (Eqs (3.38)-(3.39)), apresentam um limite viscoelástico linear e, portanto, as mesmas funções materiais deste modelo em experimentos de medições de propriedades viscoelásticas lineares.

Com o fim de facilitar a implementação computacional do modelo de Oldroyd, Crochet e Keunings, 1982, sugeriram a decomposição do tensor extra de tensão,  $\boldsymbol{\tau}$ , no modelo Oldroyd-B, Eq. (3.39), na forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \quad (3.41)$$

onde os tensores parciais  $\boldsymbol{\tau}_1$  e  $\boldsymbol{\tau}_2$  são definidos por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_1 + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_1 &= 2\mu_1 \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\tau}_2 &= 2\mu_2 \mathbf{D}\end{aligned}\quad (3.42)$$

A decomposição definida nas Eqs. (3.41) a (3.42) para o tensor  $\boldsymbol{\tau}$  pode ser interpretada como a soma de um tensor parcial  $\boldsymbol{\tau}_1$ , devido a um componente polimérico dissolvido em um solvente Newtoniano responsável pela tensão parcial  $\boldsymbol{\tau}_2$ . sendo que  $\boldsymbol{\tau}_1$  devido a um componente polimérico dissolvido em um solvente Newtoniano responsável por  $\boldsymbol{\tau}_2$ .

*OBSERVAÇÃO:* Esta decomposição pode ser obtida da própria equação do fluido Oldroyd-B, Eq. (3.39), para  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} &= 2\mu \left( \mathbf{D} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}} \right) \\ \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_1 + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_2 &= 2\mu_1 \mathbf{D} + 2\mu_2 \mathbf{D} + 2\mu \lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}\end{aligned}\quad (3.43)$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_1 + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_1 &= 2\mu_1 \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\tau}_2 &= 2\mu_2 \mathbf{D} \\ \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_2 &= 2\mu \lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}\end{aligned}\quad (3.44)$$

Introduzindo os coeficientes  $\mu_1$  e  $\mu_2$  como:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \\ \mu_2 &= \mu \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\end{aligned}\quad (3.45)$$

recupera-se a Eq. (3.39).

A forma de apresentar o modelo Oldroyd-B das Eqs. (3.41) e (3.42) é muito vantajosa do ponto de vista de implementação numérica, visto que não se faz necessária a computação do termo de derivada convectada de  $\mathbf{D}$ . Além disso, a expressão de  $\boldsymbol{\tau}_2$  reforça a elipicidade da equação do movimento para valores suficientemente altos da viscosidade do solvente,  $\mu_2$ , através da adição de um termo viscoso de segunda ordem.

Outras metodologias são empregadas na construção de equações constitutivas para descrever o comportamento observado nos fluidos viscoelásticos. Uma delas é a inclusão de termos constitutivos em função de invariantes tensoriais, a fim de melhor representar as funções materiais. O **modelo de White-Metzner** [Bird et al., 1987] é um exemplo da tentativa de se incluir, em um modelo diferencial, a viscosidade não-Newtoniana de fluidos pseudoplásticos e dilatantes:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda (II_D) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta (II_D) \mathbf{D} \quad (3.46)$$

Alguns modelos ainda podem incluir invariantes do tensor  $\boldsymbol{\tau}$ , como os modelos Phan-Thien-Tanner e FENE-P [Bird et al., 1987].

Outras metodologias são baseadas na inclusão de termos quadráticos do tensor gradiente de velocidade, gerando equações como a de Oldroyd a 8 constantes, e a inclusão de termos não-lineares do tensor extra de tensão, gerando equações como a de Giesekus [Bird et al., 1987]. Esta última é dada, já na forma descomposta sugerida por Crochet e Keunings, 1982, para a equação de Oldroyd, como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1 + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_1 - \frac{\alpha \lambda_1}{\mu_1} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) &= 2\mu_1 \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\tau}_2 &= 2\mu_2 \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde  $\alpha$  representa o fator de mobilidade. O modelo Giesekus tem a vantagem de reproduzir o comportamento pseudoplástico em escoamentos puramente cisalhantes e dilatante em escoamentos puramente extensionais, para  $\alpha$  variando entre 0 e 0.5.

Equações baseadas em teorias termodinâmicas e teorias moleculares também geram modelos semelhantes aos apresentados nessa seção. Para uma discussão mais aprofundada, sugere-se Bird et al., 1987, e referências.

As equações constitutivas para o tensor extra de tensão são ditas de **primeira ordem** quando contém apenas derivadas de primeira ordem de  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = f(\boldsymbol{\tau}, \text{tensores cinemáticos}) \quad (3.48)$$

onde  $\boldsymbol{\tau}$  e os tensores cinemáticos são calculados no instante de tempo  $t$ . Logo, as equações de primeira ordem permitem que se calcule  $\boldsymbol{\tau}$  para qualquer instante de tempo, dada uma condição inicial em  $t=t_0$  e o histórico das deformações entre  $t_0$  e  $t$ . Assim, os modelos diferenciais

apresentam a vantagem de, quando do cálculo das tensões, não haver a necessidade de que se conheça todo o histórico de deformações de um corpo, como acontece quando se utiliza o conceito de fluido simples [Astarita e Marrucci, 1974].

Apesar de os modelos diferenciais não-lineares apresentarem certo êxito na solução de escoamentos de fluidos viscoelásticos, sem terem implicações tão restritas quanto os modelos de expansão de Reiner-Rivlin e diferenciais lineares, seu emprego ainda requer alguns cuidados. Segundo Bird et al., 1987, a utilidade de um modelo em um escoamento específico depende de quais funções materiais estão mais estreitamente relacionadas ao escoamento e o quão bem este modelo descreve estas propriedades. Sendo assim, a eficiência de um dado modelo é altamente problema-dependente. Por exemplo, em escoamentos fortemente extensionais, os modelos de Oldroyd não apresentam uma boa escolha, pois geralmente geram viscosidade elongacional infinita.

Além disso, os modelos diferenciais em geral apresentam uma inabilidade de representar corretamente os efeitos viscoelásticos lineares, o que se deve ao fato destes serem construídos com apenas um tempo de relaxação, não correspondendo à realidade do comportamento mecânico e estrutural das moléculas que formam o fluido. A superposição de modelos diferenciais não-lineares é uma forma de se superar esta dificuldade, e tem se mostrado eficiente para vários modelos (ver referências em Bird et al., 1987). No entanto, o aumento do custo computacional envolvido com a utilização destes modelos ainda os torna não atrativos do ponto de vista da solução computacional.

### *3.2.3 Modelos integrais*

Nas equações constitutivas integrais, o tensor extra de tensão é dado na forma de integrais da história das deformações sofridas pelo corpo. A construção de modelos integrais baseia-se em argumentos diversos. Rivlin e Sawyers, em 1971, associaram estes modelos com o requerimento de que os efeitos sobre a tensão em um instante  $t$ , resultante das deformações em um elemento fluido em tempos diferentes, são independentes umas das outras [Crochet et al., 1984]. Já Bernstein, Kearsley e Zapas, em 1963, [Crochet et al., 1984], oferecem argumentos termodinâmicos para o desenvolvimento do modelo KBZ, que é uma forma específica da equação desenvolvida por Rivlin e Sawyers. Segundo Bird et al., 1987, a Equação de Rivlin-Sawyers representa a forma mais geral de uma equação constitutiva para fluidos isotrópicos com memória. Esta equação é dada como segue [Bird et al., 1987]:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \int_{-\infty}^t [\psi_1(t-t', I_1, I_2) \mathbf{C} + \psi_2(t-t', I_1, I_2) \mathbf{C}^{-1}] dt' \quad (3.49)$$

onde  $\psi_i$  são funções escalares dos invariantes do tensor de Cauchy,  $\mathbf{C}$ , e de sua inversa. Para maiores detalhes sobre modelos constitutivos integrais, ver Bird et al., 1987, e Astarita e Marrucci, 1974.

### 3.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS SENSÍVEIS AO TIPO DE ESCOAMENTO

A dificuldade em aproximar numericamente as equações constitutivas clássicas para fluidos viscoelásticos, as quais, do ponto de vista da implementação de métodos numéricos usuais, geram sistemas altamente não-lineares, têm encorajado os pesquisadores na busca de equações constitutivas mais simples, as quais possam representar o comportamento dos fluidos em aplicações específicas. Os critérios de classificação de escoamentos discutidos na seção 2.2, desde o proposto por Astarita, 1967, representaram motivações iniciais na identificação destas aplicações específicas. Um maior entendimento da cinemática e dinâmica dos escoamentos, com base no desenvolvimento da mecânica do contínuo, possibilitou o entendimento dos diferentes efeitos não Newtonianos sobre as características macroscópicas de escoamentos de interesse, isolando-se estes efeitos e analisando-os separadamente em situações diversas [White et al., 1987; Boger, 1987; Debbaut e Crochet, 1988; Debbaut, 1990a e 1999b; Binding, 1991; Boger, 1992].

Além destas, outra grande motivação na busca de equações constitutivas alternativas têm sido os resultados insatisfatórios das soluções das equações clássicas, as quais podem falhar na generalidade, na representação de efeitos importantes em alguns escoamentos, ou na reprodução qualitativa ou quantitativa de resultados experimentais conhecidos. Assim, as chamadas **equações constitutivas sensíveis ao tipo de escoamento** vêm ganhando, especialmente no que diz respeito à problemas de escoamentos com aplicação industrial [Schunk e Scriven, 1990; Thompson et al., 1999; Ryssel e Brunn, 1999a; Romero et al., 2004]. Entre as equações sensíveis ao tipo de escoamento, merecem destaque as denominadas equações **quasi-Newtonianas**, dadas na forma

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D} \quad (3.50)$$

nas quais a viscosidade  $\eta$  depende de parâmetros cinemáticos relacionados ao tipo de escoamento. Estas equações têm a vantagem de possibilitar, simultaneamente, tanto a

modelagem do comportamento pseudoplástico em regime de cisalhamento puro (*shear-thinning*) como o comportamento dilatante em extensão pura (*extensional-thickening*), muito observado em soluções de polímeros. Outras equações diversas da quasi-Newtoniana e capazes de prever outros fenômenos reológicos de interesse, também serão abordadas nessa seção.

Debbaut e Crochet, 1988, propuseram funções de viscosidade dependentes do segundo e terceiro invariantes do tensor taxa de deformação,  $II_D$  e  $III_D$ , respectivamente, aplicando estas funções em equações constitutivas de fluido Newtoniano generalizado e fluido viscoelástico linear. Os autores concluíram sobre a importância dos efeitos extensionais no aumento do tamanho do vórtice no problema de escoamento em contração abrupta, assim como analisaram a influência destes efeitos sobre a primeira diferença de tensões normais. Apesar da limitação do modelo, o qual não pode ser aplicado a escoamentos bidimensionais planares (pois  $III_D=0$ ), este trabalho motivou uma maior investigação destes efeitos em escoamentos em geral.

Schunk e Scriven, 1990, foram os primeiros a utilizar, diretamente na equação constitutiva, um parâmetro de classificação do escoamento,  $R_A$ . Este parâmetro é o proposto por Astarita, 1979, descrito na seção 2.2. Motivados pelas aplicações na área de injeção de polímeros em escoamentos altamente extensionais, estes autores propuseram uma equação constitutiva do tipo quasi-Newtoniano, cuja função viscosidade é expressa por:

$$\eta = \eta_s(\dot{\gamma}) R_A + \eta_{ex}(\dot{\gamma})(1 - R_A) \quad (3.51)$$

onde  $\eta_s$  e  $\eta_{ex}$  são as viscosidades medidas em escoamento puramente cisalhante e puramente extensional, respectivamente, modelados pelas equações de Carreau, na forma:

$$\begin{aligned} \eta_{sh} &= \eta_{s\infty} - (\eta_{s\infty} - \eta_0)(1 + \lambda_s^2 \dot{\gamma}^2)^{-(n_s-1)/2} \\ \eta_{ex} &= \eta_{ex\infty} - (\eta_{ex\infty} - \eta_0)(1 + \lambda_{ex}^2 \dot{\gamma}^2)^{-(n_{ex}-1)/2} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Song e Xia, 1994, combinaram algumas idéias, entre elas os modelos de Debbaut e Crochet, 1988, e de Schunk e Scriven, 1990, (Eq.(3.51)) para propor uma equação constitutiva para a viscosidade dependente do terceiro invariante do tensor taxa de deformação,  $III_D$ , semelhante à equação de Schunk e Scriven, 1990, Eq.(3.51), na qual o papel de classificador de escoamento é desempenhado por  $III_D$ . Apesar dos resultados em concordância com resultados experimentais, esta equação apresenta também a limitação do uso do terceiro invariante, que é zero para escoamentos planares.

Em 1995, Souza Mendes et al. propuseram uma modificação para o modelo de Schunk e Scriven, 1990, (Eq.(3.51)), ponderando as viscosidades cisalhante,  $\eta_s$ , e extensional,  $\eta_u$ , por uma média geométrica, a fim de controlar a importância relativa entre  $\eta_s$  e  $\eta_u$ , na forma:

$$\eta = [\eta_s(\Pi_D)]^{R_A} [\eta_u(\Pi_D)]^{(1-R_A)} \quad (3.53)$$

já atentando para o fato de que a formulação em termos do segundo invariante do tensor taxa de deformação,  $\Pi_D$ , seria mais generalista, e alterando o sub-índice “ex” para “u”, a fim de denotar extensão uniaxial. Neste caso as viscosidades são modeladas por funções do tipo Carreau modificadas:

$$\begin{aligned} \eta_s &= \eta_0(1 + (\lambda_s^2(2\Pi_D))^{(n_s-1)/2}) \\ \eta_u &= \eta_0(1 + (\lambda_u^2(2\Pi_D))^{(n_u-1)/2}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Além disso, quando  $R_A > 1$  (Eq. 2.50), ou seja, o escoamento se aproxima de movimento de corpo rígido, a função viscosidade tende a de zero, de acordo com a cinemática deste tipo de movimento.

Ainda sobre o trabalho de Souza Mendes et al., 1995, tem-se que estes autores não partem diretamente da idéia de uma equação constitutiva quasi-Newtoniana, e sim da idéia de que o tensor extra de tensão é uma função isotrópica dos tensores taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ , e do quadrado da taxa de rotação relativa,  $\bar{\mathbf{W}}$  (Eq. 2.47), dado por  $\mathbf{R}$ , onde  $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{W}}^2$ , propondo uma equação constitutiva isotrópica para o tensor extra de tensão, possibilitando, assim, a modelagem de diferenças de tensões normais. A equação geral é dada na forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{D} + \alpha_2 \mathbf{R} + \alpha_3 \mathbf{D}^2 + \alpha_4 \mathbf{R}^2 + \\ & \alpha_5 (\mathbf{DR} + \mathbf{RD}) + \alpha_6 (\mathbf{D}^2 \mathbf{R} + \mathbf{RD}^2) + \\ & \alpha_7 (\mathbf{DR}^2 + \mathbf{R}^2 \mathbf{D}) + \alpha_8 (\mathbf{D}^2 \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^2 \mathbf{D}^2) \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde os coeficientes  $\alpha_i$ ,  $i=1,8$ , são funções dos invariantes de  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{R}$ . Os autores estudaram limitações para os valores desses coeficientes em função do comportamento da Eq. (3.55) em escoamento cisalhante e extensional, a fim de respeitar a restrição do princípio do aumento de entropia (ver seção 2.3.3) e representar os comportamentos esperados nestes escoamentos simples.

Brunn e Ryssel, 1997a e 1997b, também exploram a idéia de uma equação constitutiva para  $\boldsymbol{\tau}$  em função de  $\mathbf{D}$  e do vetor  $\boldsymbol{\omega}$ , ou vorticidade relativa, a representação vetorial do tensor  $\bar{\mathbf{W}}$ , criando o chamado Fluido  $\boldsymbol{\omega} - \mathbf{D}$ . Este modelo é capaz de representar efeitos de diferenças de tensões normais, além dos efeitos *shear-thinning* e *extensional-thickening* em escoamentos em regime permanente. Em um de seus trabalhos mais interessantes, Ryssel e Brunn, 1999b, estes autores comparam a performance de um modelo quasi-Newtoniano cujas viscosidades são modeladas identicamente às viscosidades em regimes de cisalhamento e extensão puros para o

fluido de Giesekus, com o modelo completo de Giesekus, no problema da contração plana, onde os resultados são animadores principalmente em relação à resposta qualitativa do modelo quasi-Newtoniano.

Thompson et al., 1999, dando continuidade ao trabalho de Souza Mendes et al., 1995, propõem uma equação constitutiva sensível ao tipo de escoamento semelhante à Eq. (3.55), porém dependente de  $\mathbf{D}$  e  $\bar{\mathbf{W}}$ , permitindo assim valores não nulos para a primeira diferença de tensões normais. A equação constitutiva tem basicamente a forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{D} + \alpha_2 \bar{\mathbf{W}}^2 + \alpha_3 \mathbf{D}^2 + \alpha_4 (\mathbf{D}\bar{\mathbf{W}} - \bar{\mathbf{W}}\mathbf{D}) + \\ & \alpha_5 (\bar{\mathbf{W}}\mathbf{D}\bar{\mathbf{W}}) + \alpha_6 (\mathbf{D}^2 \bar{\mathbf{W}} - \bar{\mathbf{W}}\mathbf{D}^2) + \alpha_7 (\bar{\mathbf{W}}\mathbf{D}\bar{\mathbf{W}}^2 - \bar{\mathbf{W}}^2 \mathbf{D}\bar{\mathbf{W}}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde os coeficientes  $\alpha_i$ ,  $i=1,7$ , são funções dos invariantes escalares de  $\text{tr}\mathbf{D}$ ,  $\text{tr}\mathbf{D}^2$ ,  $\text{tr}\mathbf{D}^3$ ,  $\text{tr}\bar{\mathbf{W}}^2$ ,  $\text{tr}(\mathbf{D}\bar{\mathbf{W}}^2)$ ,  $\text{tr}(\mathbf{D}^2 \bar{\mathbf{W}}^2)$ ,  $\text{tr}(\mathbf{D}^2 \bar{\mathbf{W}}^2 \mathbf{D} \bar{\mathbf{W}})$ .

Estes autores analisam a forma das funções para os coeficientes  $\alpha_i$  para escoamentos puramente cisalhantes e puramente extensionais e propõem formulações sensíveis ao escoamento para estes coeficientes, isto é, dependentes do parâmetro classificador de escoamentos,  $R_A$  (Eq. (2.50)), capazes de modelar os fenômenos de *shear-thinning*, *extensional-thickening* e diferenças de tensões normais. Estes coeficientes são dados pela forma:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -p \\ \alpha_1 &= 2\eta_s^{R_A} \eta_u^{(1-R_A)} \\ \alpha_2 &= -2a_2^{(1-R_A)} [\Psi_1(\dot{\gamma}) + 2\Psi_2(\dot{\gamma})] \\ \alpha_4 &= a_4^{(1-R_A)} \Psi_1(\dot{\gamma}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde  $\alpha_2$  e  $\alpha_4$  são parâmetros adimensionais. As funções materiais de viscosidade e coeficientes de tensões normais na Eq. (3.57) são dadas por:

$$\begin{aligned} \eta_s &= \eta_0 (1 + (\lambda_s \dot{\gamma})^2)^{(n_s-1)/2} \\ \eta_u &= \eta_0 (1 + (\lambda_u \dot{\gamma})^2)^{(n_u-1)/2} \\ \Psi_2 &= -0.1\Psi_1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

As funções dos coeficientes  $\alpha_i$  são, então, acopladas a uma equação geral do tipo

$$\mathbf{T} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{D} + \alpha_2 \bar{\mathbf{W}}^2 + \alpha_4 (\mathbf{D}\bar{\mathbf{W}} - \bar{\mathbf{W}}\mathbf{D}) \quad (3.59)$$

Através de simulações numéricas, Thompson et al., 1999, são capazes de captar características importantes do escoamento através de uma contração abrupta planar utilizando as Eqs. (3.57) a (3.59).

As equações sensíveis ao tipo de escoamento apresentam-se como uma alternativa interessante às equações constitutivas clássicas dados que:

- Tanto os critérios de classificação de escoamentos quanto a forma das equações constitutivas baseiam-se na teoria da mecânica do contínuo, respeitando, assim, os requerimentos que garantem sua validade e significado físico;
- A forma como diversos autores [Thompson et al., 1999; Ryssel e Brunn, 1999b], empregando equações sensíveis ao tipo de escoamento, reproduzem fenômenos não Newtonianos utilizando modelos matemáticos relativamente mais simples, encorajam o desenvolvimento e análise destes modelos;
- Os resultados também permitem estudar, de forma isolada, a influência de diversas funções materiais no comportamento dos fluidos em diferentes escoamentos, permitindo selecionar, para situações específicas, equações constitutivas ainda mais simples.

#### 4. O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos é um método de aproximação numérica de equações integro-diferenciais, considerado uma generalização dos métodos variacionais e de resíduos ponderados, o qual baseia-se na idéia de que a aproximação de uma equação variacional pode ser representada como uma combinação linear de graus de liberdade incógnitos,  $d_A$ , e funções de base propriamente selecionadas ao longo do domínio do problema. Estas funções são construídas de modo a satisfazer as condições de contorno do problema diferencial estudado [Reddy e Gartling, 1994].

Quando da solução de um problema pelo método de elementos finitos, o problema é formulado em sua forma fraca ou variacional, ou seja, na forma de integrais das leis de conservação multiplicadas por funções peso. O domínio é discretizado em um conjunto de subdomínios finitos não superpostos, chamados de elementos finitos, que permitem a formulação de funções de aproximação, ou funções de forma (*shape functions*), de forma simples, através da teoria de interpolação. As funções de aproximação são substituídas na forma variacional das leis de conservação, juntamente com as funções peso, e as equações a serem resolvidas são desenvolvidas requerendo-se que a solução aproximada satisfaça a forma fraca ou minimize o funcional quadrático da equação determinando-se o valor dos parâmetros  $d_A$  nos pontos nodais da malha de discretização através de um conjunto de equações algébricas [Ferziger e Peric, 1999].

Os problemas aqui abordados são definidos em um domínio aberto limitado  $\Omega \subset \mathcal{R}^{nsd}$ , sendo  $nsd$  o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com fronteira  $\Gamma$  poligonal,

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h, \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g \neq \emptyset \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\Gamma_g$  é a parte da fronteira  $\Gamma$  na qual são impostas condições de contorno de Dirichlet (essenciais) e  $\Gamma_h$  a região na qual são prescritas as condições de contorno de Neumann (naturais). Sobre o fecho domínio,  $\overline{\Omega}$ , realiza-se uma partição  $C_h$  de elementos finitos, de domínio  $K$ , na forma:

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \bigcup_{K_i \in C_h} K_i \\ K_i \cap K_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j; K_i, K_j \in C_h \end{cases} \quad (4.2)$$

A aproximação de elementos finitos  $U^h$  de uma variável genérica  $U$  do problema estudado é representada pela expansão:

$$U^h = \sum_A N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (4.3)$$

onde  $N_A$  é a função de base associada ao nó global  $A$  da discretização  $C_h$ , no qual o coeficiente  $d_A$  é calculado.

A notação utilizada no presente capítulo para os espaços funcionais, normas e espaços polinomiais é resumida em sequência.

Para os espaços polinomiais, adota-se a notação:

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{se } K \text{ um triângulo ou tetraedro,} \\ Q_m(K), & \text{se } K \text{ um quadrilátero ou hexaedro.} \end{cases} \quad (4.4)$$

onde  $m \geq 0$ , sendo  $m$  o grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos  $P_m$  e  $Q_m$  [Ciarlet, 1978].

Sobre os espaços de funções, tem-se, conforme Ciarlet, 1978:

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{q \mid \int_{\Omega} q^2 d\Omega < \infty\} \\ L_0^2(\Omega) &= \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0\} \\ H^1(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) \mid \partial v / \partial x_i \in L^2(\Omega), \quad i = 1, nsd\} \\ H_0^1(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) \mid \partial v / \partial x_i \in L^2(\Omega) \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_g, \quad i = 1, nsd\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por fim,  $(\cdot, \cdot)$  e  $\|\cdot\|$  representam o produto interno e a norma das funções de  $L^2$  em  $\Omega$  e  $(\cdot, \cdot)_K$  e  $\|\cdot\|_{0,K}$  denotam o produto interno e a norma de  $L^2$  no domínio de cada elemento  $K$ , respectivamente.

## 4.1 O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A PROBLEMAS DE ESCOAMENTO SEM INÉRCIA

### 4.1.1 Formulação forte

A modelagem mecânica dos escoamentos lentos é obtida através das equações de conservação de massa (Eq. (2.59)) e equação do movimento (Eq. (2.63)), na qual são negligenciados os termos de inércia, ou seja, de transporte advectivo de quantidade de movimento. Fisicamente, esta simplificação baseia-se nas hipóteses de escoamento em regime permanente a número de Reynolds muito baixo. Para fluidos Newtonianos, esta simplificação dá origem ao chamado problema de Stokes. A formulação diferencial, ou dita forte, do problema é dada por:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{T} - \mathbf{b} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\
 \mathbf{T} \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde  $\mathbf{T}$  é o tensor tensão,  $\mathbf{b}$  o vetor força de corpo,  $\mathbf{u}$  o campo de velocidade,  $\mathbf{u}_g$  o vetor velocidade prescrita no contorno  $\Gamma_g$  e  $\mathbf{t}_h$  o vetor de força prescrita no contorno  $\Gamma_h$ .

### 4.1.2 Formulação fraca

Para construir uma formulação fraca para a Eq. (4.6), é necessário definir dois tipos de funções, as chamadas funções teste (*trial functions*) e as funções peso (*weighting functions*). As funções teste são as funções candidatas à solução do problema, enquanto as funções peso ou variações são funções com a mesma regularidade das funções teste porém se anulando sobre o contorno  $\Gamma_g$ .

Para o problema definido pelas Eqs. (4.6), os espaços das funções teste e funções peso para a velocidade são denotados por  $V_g$  e  $V$ , respectivamente, enquanto para a pressão define-se apenas o espaço  $P$ , visto que o problema não impõe condições de contorno essenciais para a pressão:

$$\begin{aligned}
 V_g &= \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{u}(\Gamma_g) = \mathbf{u}_g \} \\
 V &= \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^{nsd} \} \\
 P &= \{ p \in L^2(\Omega) \}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

A forma fraca das Eqs. (4.6) pode ser obtida integrando o produto interno das Eq. (4.6)<sub>1</sub> com uma variação do campo de velocidade,  $\mathbf{v} \in V$ , e da Eq. (4.6)<sub>2</sub> com uma variação de pressão,  $p \in P$ , tal que [Reddy e Gartling, 1994]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\operatorname{div} \mathbf{T} - \mathbf{b}) d\Omega &= 0 \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times P \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} d\Omega &= 0 \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times P \end{aligned} \quad (4.8)$$

Em seguida, as Eqs. (4.8) são integradas por partes visando diminuir sua ordem de diferenciação. Através desta integração, as condições de contorno naturais passam a ser implícitas na formulação do problema, fazendo parte das equações variacionais de sua forma fraca. Para o modelo de fluido Newtoniano, fazendo  $\eta = \mu$  na Eq. (3.14), a integração da Eq. (4.8) resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} d\Omega \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times P \\ &= \int_{\Gamma} (\mathbf{T}^T \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (-p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} d\Omega \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times P \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} -p \mathbf{I} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} d\Omega \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times P \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times P \\ &= (\mathbf{T} \mathbf{n}, \mathbf{v})_{\Gamma} + (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) - 2\mu (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times P \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sendo assim, a forma fraca das Eqs. (4.6) pode ser formulada como: dados  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}_g$  e  $\mathbf{t}_h$ , encontrar  $\mathbf{u} \in V_g$ ,  $p \in P$ , tal que,  $\forall (\mathbf{v}, q) \in V \times P$ ,

$$B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}, q) \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= (2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) \\ F(\mathbf{v}, q) &= (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + (\mathbf{t}_h, \mathbf{v})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (4.11)$$

#### 4.1.3 Formulação de Galerkin

Nessa seção será introduzida a aproximação de Galerkin do problema dado pela Eq. (4.10). O primeiro passo é a construção dos espaços de dimensão finita  $V_g^h$ ,  $V^h$  e  $P^h$ ; para os campos de velocidade,  $\mathbf{u}$ , e pressão,  $p$ . A partir da discretização  $C_h$  do domínio  $\Omega$ , tem-se::

$$\begin{aligned}
V_g^h &\subset V_g \text{ (i.e., se } \mathbf{v}^h \in V_g^h, \text{ então } \mathbf{v}^h \in V_g) \\
V^h &\subset V \text{ (i.e., se } \mathbf{v}^h \in V^h, \text{ então } \mathbf{v}^h \in V) \\
P^h &\subset P \text{ (i.e., se } p^h \in P^h, \text{ então } p^h \in P)
\end{aligned}
\tag{4.12}$$

O método de Galerkin, também conhecido como Bubnov-Galerkin, caracteriza-se pela escolha das funções teste e peso pertencentes ao mesmo sub-espacos de elementos finitos. Para toda aproximação de variável  $\mathbf{u}^h \in V^h$ , constrói-se uma aproximação da função teste,  $\mathbf{w}^h \in V_g^h$ , na forma:

$$\mathbf{w}^h = \mathbf{u}^h + \mathbf{g}^h \tag{4.13}$$

onde  $\mathbf{g}^h$  é uma função conhecida, a qual satisfaz a condição de contorno essencial do problema da Eq. (4.6):

$$\mathbf{g}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_g, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_g \tag{4.14}$$

com  $V_g^h$  e  $V^h$  compostos pela mesma classe de funções à exceção da contribuição da função  $\mathbf{g}^h$  sobre a fronteira  $\Gamma_g$ . Assim,  $\mathbf{u}^h$  representa a parte desconhecida de  $\mathbf{w}^h$ .

Baseado nas Eqs. (4.12)-(4.14), a aproximação de Galerkin para o problema definido pela Eq. (4.10) pode ser escrito como:

Dados  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}_g$  e  $\mathbf{t}_h$ , achar a dupla  $(\mathbf{u}^h, p^h) \in V_g^h \times P^h$  tal que:

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}^h, q^h) = F(\mathbf{v}^h, q^h), \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in V^h \times P^h \tag{4.15}$$

onde

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= (2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (p, \text{div } \mathbf{v}) - (\text{div } \mathbf{u}, q) \\
F(\mathbf{v}, q) &= (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + (\mathbf{t}_h, \mathbf{v})_{\Gamma_h} - (2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_g), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + (\text{div } \mathbf{u}_g, q)
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

e a aproximação de elementos finitos da velocidade  $\mathbf{w}^h$  é dada pela Eq. (4.13).

A formulação em pressão-velocidade, Eq. (4.15), é chamada de formulação mista para o problema da Eq. (4.6). O termo misto é utilizado pois as variáveis de velocidade são misturadas às variáveis de força (isto é, pressão), e ambas são expressas em uma única formulação. A formulação mista é uma formulação de multiplicador de Lagrange, onde uma restrição é incluída através do método do multiplicador de Lagrange. Isto ocorre pois a função peso da pressão multiplica a condição de incompressibilidade, isto é, a equação da continuidade. Assim, a

incompressibilidade é forçada através do multiplicador de Lagrange que vem a ser o valor negativo da pressão,  $-p$  [Reddy e Gartling, 1994].

#### 4.1.4 Funções de aproximação

O próximo passo para a solução do problema é formular as funções de aproximação como combinações lineares de coeficientes  $d_A$  e das funções de forma do método de elementos finitos. Assim, a velocidade e a pressão são aproximadas pelas expansões:

$$\begin{aligned} u_j^h(\mathbf{x}) &= \sum_{A \in C_h} N_A(\mathbf{x}) u_j^A \\ p^h(\mathbf{x}) &= \sum_{\tilde{A} \in C_h} \tilde{N}_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) p_{\tilde{A}} \\ v_i^h(\mathbf{x}) &= \sum_{A \in C_h} N_A(\mathbf{x}) v_i^A \\ q^h(\mathbf{x}) &= \sum_{\tilde{A} \in C_h} \tilde{N}_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) q_{\tilde{A}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde os somatórios são realizados nos pontos nodais da partição  $C_h$ ,  $A$ , com o sobrescrito  $\sim$  denotando pontos nodais associados às funções de base do campo de pressão. Os sub-índices  $A$  e  $\tilde{A}$  referem-se, respectivamente, ao nós globais nos quais são calculados os graus de liberdade de velocidade e pressão. Substituindo as Eqs. (4.17) na formulação da Eq. (4.16), obtém-se o seguinte problema matricial:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}][\mathbf{u}] - [\mathbf{G}][\mathbf{p}] &= [\mathbf{H}] \\ [\mathbf{G}^T][\mathbf{u}] &= [\mathbf{0}] \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde  $[\mathbf{G}]$  é a matriz associada ao termo de pressão da Eq. (4.15),  $[\mathbf{G}^T]$  é a matriz associada ao termo divergente,  $[\mathbf{K}]$  a matriz associada aos termos difusivos, sendo  $[\mathbf{K}]$  uma matriz simétrica e positivo-definida, e  $[\mathbf{H}]$  é o vetor associado ao termo das forças de corpo e às condições de contorno essenciais.

*OBSERVAÇÃO 1:* As integrações da Eq. (4.15) são realizadas sobre o domínio de cada elemento, e os somatórios são então definidos sobre o respectivos nós de velocidade e pressão. São assim formadas matrizes elementares, as quais, através de um algoritmo de localização, são alocadas nas matrizes globais.

#### 4.1.5 A dificuldade do método de Galerkin

A formulação de Galerkin para o problema de Stokes (Eq. (4.15)) apresenta dificuldades devido ao caráter misto da formulação. Os sub-espços de velocidade e pressão devem ser compatibilizados, sob pena de gerar oscilações espúrias e o trancamento (*locking*) do campo de velocidade. Portanto, combinações arbitrárias desses sub-espços – algumas desejáveis do ponto de vista de implementação computacional – não são permitidas na aproximação da Eq. (4.15). Uma teoria matemática para a estabilidade de métodos de elementos finitos mistos foi estabelecida a partir da introdução da **condição de Babuška-Brezzi**, ou **condição LBB** [Oden e Carey, 1983; Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Esta condição, uma vez satisfeita, estabelece se uma dada combinação dos sub-espços de velocidade e pressão irá gerar aproximações estáveis para os campos de velocidade e pressão.

Como alternativas para superar as dificuldades acima descritas, surgem metodologias as quais não necessitam satisfazer a condição LBB, sendo, a princípio, estáveis para qualquer combinação de sub-espços de velocidade e pressão. São os chamados métodos estabilizados. Estes métodos procuram manter a estrutura da formulação clássica de Galerkin e adicionar termos que os confirmam a desejada estabilidade à formulação resultante, sem, contudo, ser inconsistente.

Hughes et al., 1986, estenderam a idéia dos métodos Petrov-Galerkin ao problema de Stokes, provando a sua convergência para elementos com interpolações de igual ordem para velocidade e pressão. Hughes e Franca, 1987, ampliaram a formulação introduzida em Hughes et al., 1986, construindo uma formulação simétrica para o problema de Stokes convergente para qualquer combinação de sub-espços. Este trabalho é considerado como a formulação original **Galerkin mínimos-quadrados**, ou **Galerkin least-squares (GLS)** para o problema de Stokes. Franca e Hughes, 1988, propuseram então duas classes de formulações para os problemas mistos, sendo que uma delas acomoda elementos que não satisfazem a condição LBB, seguindo a metodologia do trabalho anterior destes autores. Douglas e Wang, 1989, apresentaram uma formulação à qual chamaram absolutamente estabilizada, que pode ser considerada uma modificação da formulação de Hughes e Franca, 1987, com propriedades de convergência e estabilidade para combinações elementos de qualquer ordem. Franca et al., 1992, acabaram provando as melhores características do método de Douglas e Wang, 1989, sobre o método GLS original. Estes trabalhos foram essenciais para o estabelecimento do potencial de métodos que não precisariam satisfazer a condição LBB, tornando-se bastante atraentes do ponto de vista de implementação e abrindo possibilidades para um estudo mais amplo envolvendo as equações do movimento com os termos de inércia.

#### 4.1.6 Uma formulação estabilizada para problemas de escoamentos sem inércia

Neste item, são apresentados alguns testes realizados para o problema de escoamentos sem inércia, Eqs. (4.6), comparando a tentativa de obtenção de resultados utilizando o método de Galerkin clássico (Eq. (4.15)) com resultados obtidos através de um método estabilizado. São empregados os sub-espacos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^h &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^{nsd}, K \in C_h \} \\ \mathcal{V}_g^h &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^{nsd}, K \in C_h, \mathbf{v}(\Gamma_g) = \mathbf{u}_g \} \\ P^h &= \{ p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in R_l(K), K \in C_h \} \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde  $R_k$ ,  $R_l$  denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau  $k$  e  $l$ .

Sendo assim, método estabilizado GLS, é dado, para o problema homogêneo, conforme Hughes e Franca, 1987, por:

Dados  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{t}_h$ , achar a dupla  $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathcal{V}_g^h \times P^h$  tal que:

$$B_{GLS}(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}^h, q^h) = F_{GLS}(\mathbf{v}^h, q^h), \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathcal{V}^h \times P^h \quad (4.20)$$

onde

$$\begin{aligned} B_{GLS}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= (2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) \\ &\quad - \tau \sum_{K \in C_h} h_K^2 (-2\mu \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad} p, -2\mu \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \operatorname{grad} q) \\ &\quad + \delta_2 (\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ F_{GLS}(\mathbf{v}, q) &= (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + (\mathbf{t}_h, \mathbf{v})_{\Gamma_h} - \tau \sum_{K \in C_h} h_K^2 (\mathbf{b}, -2\mu \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \operatorname{grad} q) \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde  $\tau$  é o parâmetro que controla a estabilidade do multiplicador de Lagrange,  $p$ , e  $\delta_2$  é o parâmetro que controla a estabilidade da variável primal,  $\mathbf{u}$  (ver Franca e Hughes, 1988).

#### 4.1.7 Considerações sobre estabilidade

A estabilidade da formulação da Eq. (4.20) é estudada em Franca e Stenberg, 1991, e Franca et al., 1992. Apresenta-se uma breve discussão. Para tanto, recorda-se a estimativa inversa de elementos finitos [Ciarlet, 1978]:

$$C_k \sum_{K \in C_h} h_K^2 \|\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_{0,K}^2 \leq \|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_0^2 \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}^h \quad (4.22)$$

onde  $C_k$  é uma constante independente de  $C_h$ . Seja a notação:

$$S(K) = \begin{cases} P_{nsd}(K), & \text{se } K \text{ um triângulo ou tetraedro,} \\ Q_2(K), & \text{se } K \text{ um quadrilátero ou hexaedro.} \end{cases} \quad (4.23)$$

e o espaço  $\mathcal{S}^h$ ,

$$\mathcal{S}^h = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{v}|_K \in S(K)^{nsd}, K \in C_h \} \quad (4.24)$$

pode-se estimar a convergência do método estabilizado (Eq. (4.20)) através do seguinte teorema [Franca e Stenberg, 1991]:

TEOREMA 4.1: Suponha que a solução para o problema forte (Eq. (4.6)) satisfaça  $\mathbf{u} \in H^{k+1}(\Omega)^{nsd}$  e  $p \in H^{l+1}(\Omega)$ , e que uma das condições seja satisfeita:

i)  $\mathcal{S}^h \in \mathcal{V}^h$ ,

ii)  $P^h \in C^0(\Omega)$ .

Então para  $0 < \tau < C_k$  a formulação estabilizada (Eq. (4.20)) tem uma única solução que satisfaz

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \|_1 + \| p - p^h \|_0 \leq C(h^k |\mathbf{u}|_{k+1} + h^{l+1} |p|_{l+1}) \quad (4.25)$$

com a constante  $C$  independente de  $\mu$ , e pela regularidade do problema de Stokes em um polígono convexo  $\Omega$  [Franca et al., 1992],

$$\| \mathbf{u} \|_2 + \| p \|_1 \leq C \| \mathbf{f} \|_0 \quad (4.26)$$

tem-se:

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \|_0 \leq C(h^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1} + h^{l+2} |p|_{l+1}) \quad (4.27)$$

□

O Teorema 4.1 estabelece que o método estabilizado da Eq. (4.20), ou seja, o método GLS para o problema de Stokes, converge para velocidade e pressão se

i) a interpolação da velocidade for de ordem de ordem suficientemente alta ( $k \geq nsd$ ), independente do grau de interpolação da pressão,  $l \geq 0$ , ou de sua regularidade;

ii) a pressão é interpolada de forma contínua, independente do grau de interpolação da velocidade,  $k \geq 1$ .

Sendo assim, este método converge para quase qualquer combinação de interpolações para pressão e velocidade, ou seja, mesmo para combinações que não satisfazem a condição LBB e para as quais o método de Galerkin não é convergente.

O lema de estabilidade do método GLS da Eq. (4.20) é dado, segundo Franca e Stenberg, 1991, por:

$$\begin{aligned}
 B_{GLS}(\mathbf{u}, p; \mathbf{u}, -p) &= 2\mu \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_0^2 + \tau \sum_{K \in C_h} h_K^2 \|(\text{grad } p)\|_{0,K}^2 - \tau \sum_{K \in C_h} h_K^2 \|2\mu \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{u})\|_{0,K}^2 \\
 &\geq (1 - \tau C_k^{-1}) 2\mu \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_0^2 + \tau \sum_{K \in C_h} h_K^2 \|(\text{grad } p)\|_{0,K}^2 \\
 &\geq C_1 2\mu \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_0^2 + \tau \sum_{K \in C_h} h_K^2 \|(\text{grad } p)\|_{0,K}^2
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

para  $0 \leq \tau \leq 2\mu C_k$ .

*OBSERVAÇÃO 2:* Para o método de Douglas-Wang, introduzido em Douglas e Wang, 1989, que de maneira simplificada tem a mesma forma da Eq. (4.20), porém com o sinal trocado no termo difusivo da parte estabilizada, a constante  $\tau$  não está restringida a um valor máximo igual a  $2\mu C_k$ , mas no entanto as estimativas de convergência das Eqs. (4.25) e (4.27) são idênticas para este método.

#### 4.1.8 Exemplos numéricos

A seguir são apresentados alguns exemplos de testes numéricos realizados com as formulações de Galerkin (Eq. (4.15)) e com o método GLS da Eq. (4.20). Estes são resultados do código FEM, desenvolvido pelo grupo LAMAC-UFRGS em linguagem FORTRAN 90, estruturado para a solução numérica de aproximações lineares de elementos finitos utilizando o método de eliminação Gaussiana [Hughes, 1987] para a solução do sistema. O problema investigado é o escoamento forçado em cavidade quadrada, dado como no esquema da Fig. 4.1. São impostas condições de não deslizamento nas paredes e uma velocidade  $u_0=1\text{m/s}$  na direção de  $x_1$  é prescrita na fronteira superior da cavidade ( $x_2/L=1$ ). O comprimento característico do problema é  $L=1\text{m}$ . Utiliza-se um valor para  $\mu=0.5\text{ Pa.s}$ . O problema da cavidade é um *benchmark* conhecido e bastante utilizado para validação de códigos de dinâmica de fluidos. A sua solução é um desafio pelo modo como as regiões de recirculação que se criam no interior do domínio causam mudanças rápidas na solução, e também pelas singularidades da pressão nos cantos superiores do domínio.

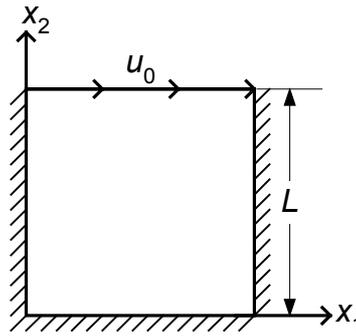


Figura 4.1: Esquema do problema de escoamento forçado em cavidade.

No primeiro teste, utilizou-se um tipo de elemento finito que satisfaz a condição LBB, o elemento  $Q_2/Q_1$ , i.e., quadriláteros bi-quadráticos para a velocidade e bi-lineares para a pressão. A malha utilizada foi composta por  $15 \times 15$  elementos deste tipo. O resultado obtido é o esperado para um elemento conforme: há a formação de uma região de recirculação no centro da cavidade, formam-se zonas de picos de alta e baixa pressão nos cantos superiores. Os resultados concordam com aqueles apresentados por Hughes et al., 1986, e são mostrados abaixo na Fig. 4.2: vetores de velocidade, isobáricas e elevação da pressão.

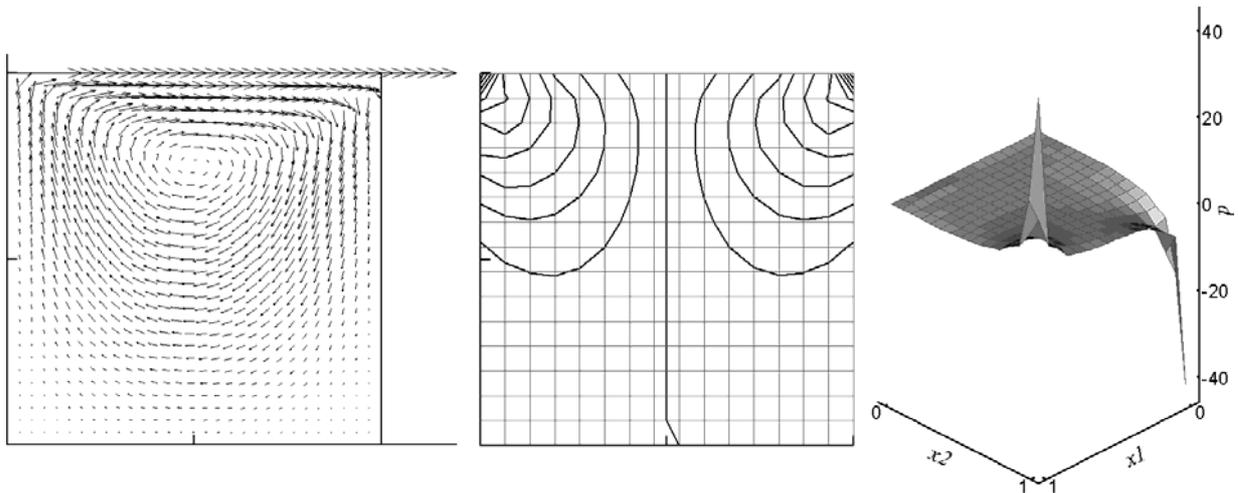


Figura 4.2: Resultados do método de Galerkin para escoamento sem inércia em cavidade (elemento  $Q_2/Q_1$ ): vetores de velocidade, isobáricas e elevação da pressão.

Em seguida, implementou-se a aproximação de Galerkin (Eq. (4.15)) para o mesmo problema, no entanto empregando elementos não conformes do tipo  $Q_1/Q_1$ . Foi utilizada uma malha de  $20 \times 20$  elementos. O campo de velocidade permanece aparentemente estável, mas o campo de pressão aparece totalmente instável. Estas características são ilustradas na A Fig. 4.3, onde são ilustrados os vetores de velocidade e a elevação da pressão:

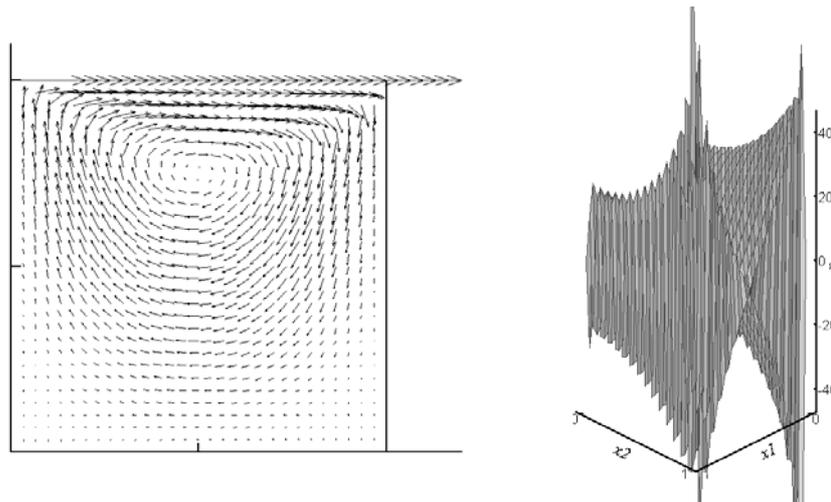


Figura 4.3: Resultados do método de Galerkin para escoamento sem inércia em cavidade (elemento  $Q_1/Q_1$ ): vetores de velocidade e elevação da pressão.

Por fim implementou-se a aproximação de GLS da Eq. (4.20), empregando-se elementos do tipo  $Q_1/Q_1$ . Utilizou-se os seguintes valores para os termos de estabilidade:  $\tau=1.0E-03$ ,  $\delta_2=1.0E-04$ . Os resultados obtidos podem ser visualizados na Fig. 4.4.

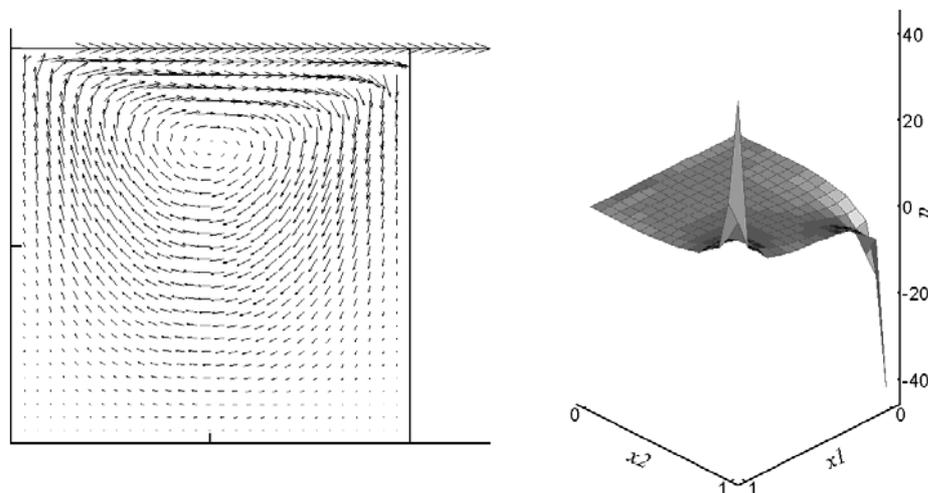


Figura 4.4: Resultados do método GLS para escoamento sem inércia em cavidade (elemento  $Q_1/Q_1$ ): vetores de velocidade e elevação da pressão.

Observa-se que o resultado utilizando o método GLS é estável mesmo para um elemento não conforme.

## 4.2 O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A PROBLEMAS DE ESCOAMENTOS COM INÉRCIA

### 4.2.1 Formulação forte

Neste item são tratados os problemas de escoamento em regime permanente em que são considerados os efeitos de inércia. Estes problemas são governados pelas equações de balanço de quantidade de movimento e conservação de massa, em que apenas os termos de variação no tempo são negligenciados. É apresentado o tratamento para as equações de escoamento numa forma que pode ser generalizada a fim de acomodar modelos puramente viscosos, ou Newtonianos generalizados. A formulação forte do problema é dada por: achar os campos  $\mathbf{u}$  e  $p$  para

$$\begin{aligned} [\text{grad } \mathbf{u}] \mathbf{u} + \text{grad } p - 2 \text{Re}^{-1} \text{div}(\eta^*(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u})) &= \text{Fr}^{-2} \mathbf{b} && \text{em } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\ \mathbf{T} \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde todas as variáveis são adimensionais e são utilizados os números adimensionais de Reynolds e Froude, como segue

$$\text{Re} = \frac{\rho u_0 L}{\eta_c}; \quad \text{Fr} = \frac{u_0}{(bL)^{1/2}}; \quad \eta^*(\dot{\gamma}) = \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta_c} \quad (4.30)$$

sendo  $\rho$  a massa específica do fluido,  $b$  uma força de corpo característica,  $L$  um comprimento característico,  $u_0$  uma velocidade característica e  $\eta_c$  a viscosidade de referência (dependente do modelo). Vale lembrar que para fluido Newtoniano a viscosidade de referência é  $\eta_c = \mu$ , e sendo assim,  $\eta^* = 1$ .

### 4.2.2 Formulação de Galerkin

A seguir é apresentada a formulação de Galerkin para problemas mistos (velocidade-pressão) de escoamentos, dados pela Eq. (4.29). A metodologia de formulação do problema variacional, definição de funções teste e funções peso, definição de sub-espacos das variáveis e integração por partes do termo difusivo, é a mesma apresentada para o problema de Stokes.

Quando são também considerados os termos de transporte advectivo de quantidade de movimento, a formulação de Galerkin para o problema é dada por:

Dados  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}_g$  e  $\mathbf{t}_h$ , achar a dupla  $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathcal{V}_g^h \times P^h$  tal que:

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}^h, q^h) = F(\mathbf{v}^h, q^h), \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathcal{V}^h \times P^h \quad (4.31)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= ([\text{grad } \mathbf{u}] \mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2 \text{Re}^{-1} (\eta^* (\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (p, \text{div } \mathbf{v}) - (\text{div } \mathbf{u}, q) \\ F(\mathbf{v}, q) &= \text{Fr}^{-2} (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + (\mathbf{t}_h, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

#### 4.2.3 As dificuldades do método de Galerkin

Para o problemas de escoamentos desse tipo, as dificuldades enfrentadas pelo método de Galerkin são duas. A primeira foi comentada no contexto do problema de Stokes, e consiste na compatibilização dos espaços das variáveis em problemas mistos. A segunda aparece devido à natureza assimétrica e não-linear do termo advectivo. A seguir é apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre estas dificuldades e como elas vêm sendo superadas.

Os métodos de elementos finitos foram em grande parte desenvolvidos baseados no método de Galerkin que, do ponto de vista matemático, produz as melhores aproximações para modelos generalizados, principalmente aqueles na área de mecânica estrutural. No entanto, quando da extensão do método para problemas de fenômenos de transporte, algumas patologias indesejáveis foram sendo descobertas em várias situações de interesse prático. Oscilações espúrias que se espalham globalmente sobre o domínio foram aparecendo quando da aplicação do método de Galerkin a problemas envolvendo operadores não simétricos, fazendo divergir os resultados especialmente quando se tratando de problemas advectivo-dominados, isto é, problemas caracterizados pela dominância dos termos advectivos (acentuados gradientes) sobre os termos difusivos (operador de Laplace). O refinamento da malha aparece como uma primeira solução na tentativa de eliminar estes problemas. No entanto, o aumento do custo computacional muitas vezes torna qualquer tentativa neste sentido inviável. A fim de se evitar essas dificuldades, a construção de diferentes elementos, a aplicação de regras de integração não convencionais e outras tentativas de solução surgiram, muitas delas sendo matematicamente substanciadas. Segundo Franca, 1987, a simplicidade sempre foi a força motora atrás destas soluções. Muitos pesquisadores seguiram uma linha na qual foram desenvolvidas técnicas com o desejo de se manterem as funções de interpolação usuais, o que permite facilmente a

generalização para modelos não lineares mais complexos. Alguns autores questionaram esta linha, sugerindo, ao invés, obediência estrita o método de Galerkin, através da utilização de funções de interpolação mais elaboradas. Foram publicados inúmeros trabalhos ao longo do desenvolvimento do método de elementos finitos em fluidos relacionados à solução de problemas advectivo-dominados. Ainda hoje, as instabilidades numéricas e o desenvolvimento de técnicas para contorná-las são um foco de estudo nas diferentes linhas de pesquisa existentes.

Baseando-se em técnicas utilizadas para a estabilização de soluções de problemas através do método de diferenças finitas, a primeira proposta para a estabilização do problema de elementos finitos foi a modificação da formulação variacional classicamente empregada, através de um adequado método de resíduos ponderados, de forma a incorporar às equações discretas as qualidades de estabilização dos métodos *upwind*, ponderando mais fortemente as informações a montante [Leonard, 1979; Brooks e Hughes, 1982]. No contexto das formulações variacionais e de resíduos ponderados, a primeira tentativa neste sentido foi feita por Christie et al., 1976, que apresentaram um método de elementos finitos unidimensional do tipo *upwind* Petrov-Galerkin. Os primeiros elementos finitos *upwind* bidimensionais foram desenvolvidos por Heinrich et al., 1977.

Outras idéias seguindo os métodos *upwind* também foram sendo apresentadas. Porém, já nas primeiras aplicações a problemas bidimensionais, puderam ser notadas falhas com respeito à excessiva difusão artificial na direção ortogonal ao escoamento, principalmente em casos transientes e com termos fonte, o que foi discutido por Leonard, 1979, Brooks e Hughes, 1982, e Donea, 1984.

Um grande passo no desenvolvimento de métodos estabilizados pode ser visto como a contribuição dada pelos trabalhos de Brooks e Hughes, 1982, e Hughes e Brooks, 1982, nos quais foi desenvolvido o método *streamline-upwind/Petrov-Galerkin*, ou SUPG. Este método consiste numa formulação Petrov-Galerkin com funções peso descontínuas, construídas através da adição de uma perturbação (*streamline upwind*), que atua somente na direção das linhas de corrente, às funções clássicas do método de Galerkin. Estas funções peso modificadas atuam sobre todos os termos da equação, fazendo com que a condição de ortogonalidade do resíduo com relação a estas funções seja satisfeita, constituindo-se, portanto, em uma formulação consistente de resíduos ponderados. O método SUPG apresenta elevada precisão, estabilidade e estimativas de erro ótimas ou quase-ótimas [Johnson et al., 1984] quando a solução exata é regular. Apenas para soluções exatas não regulares, nas vizinhanças de descontinuidades, no contorno ou em camadas internas ao domínio é que o método apresenta oscilações localizadas (*overshoot* ou *undershoot*), porém sem comprometer a solução a alguma distância da

descontinuidade. Isto ocorre porque nem sempre a direção do escoamento é a melhor direção para a adição dos termos de estabilização [Mizukami e Hughes, 1985]. Alguns autores [do Carmo e Galeão, 1986; Galeão e do Carmo, 1988] sugeriram métodos mais eficientes para contornar o problema das oscilações localizadas, sendo bastante eficiente o método CAU (*consistent approximate upwind*) desenvolvido por Galeão e do Carmo, 1988. Cabe ressaltar que algumas técnicas envolvendo malhas auto-adaptativas também foram muito eficientes na redução das oscilações locais, inclusive na total eliminação destas, como no trabalho de Almeida et al., 2000. Os autores Sampaio e Coutinho, 2001, apresentam resultados em que as oscilações locais são eliminadas através de uma técnica envolvendo a derivação de um operador de captação de descontinuidade [Hughes e Mallet, 1986]. Os autores Harari et al., 2001, também analisam o efeito da orientação da malha em relação ao fluxo e propõe parâmetros de estabilização que incorporam a direção do fluxo de modo a eliminar as oscilações.

Evoluções em torno do método SUPG surgiram através de algumas estratégias simples para estabilização do problema. Estas estratégias constituem principalmente na adição de termos dependentes da malha ao método clássico de Galerkin. Estes termos de perturbação, analogamente ao método SUPG, são projetados sem comprometimento com a consistência e podem ser estendidos a diversas situações, com grande flexibilidade, sendo construídos de forma a aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem prejudicar sua consistência, já que a solução exata do problema satisfaz aos resíduos de Euler-Lagrange [Hughes et al., 1986; Franca et al., 1992].

Os métodos desenvolvidos através destes princípios são referidos como **métodos estabilizados**. Dentre estes, o método **Galerkin mínimos quadrados**, ou **GLS**, introduzido por Hughes et al., 1989, para o contexto de equações tipo advecção-difusão, merece algum destaque. A sua denominação está ligada ao fato de que os termos estabilizadores resultam de uma minimização pelo método dos mínimos quadrados de uma formulação utilizando funções de forma do método de Galerkin. Além das características de estabilidade, a possibilidade da obtenção de soluções mais precisas através de métodos GLS vem sendo foco de alguns estudos. Os principais resultados vêm sendo obtidos com a adição de perturbações malha-dependentes, onde os parâmetros de estabilização são formulados criteriosamente. O método GLS é considerado uma evolução do método SUPG que combina o método de Galerkin com métodos de mínimos quadrados [Franca, 1998], ou uma generalização do método SUPG pela adição da forma de mínimos quadrados dos resíduos à formulação de Galerkin [Hannani et al., 1995].

A análise de erro e convergência estabeleceu um entendimento maior destes métodos para problemas de fluidos, sendo destacáveis alguns trabalhos nos quais analisa-se

matematicamente a convergência e a estabilidade das formulações, assim como contribuições a nível de resultados: Johnson e Nävert, 1981, Johnson et al., 1984, Johnson e Saranen, 1986, Szepessy, 1989, Hughes et al., 1986, Hughes e Shakib, 1988, Franca e do Carmo, 1989, Franca e Hughes, 1988, Gresho, 1991, Franca e Frey, 1992, Franca et al., 1992, Franca e Hughes, 1993, Harari e Hughes, 1994.

Neste trabalho, a estabilização das soluções de problemas advectivo-dominados foi feita a partir da utilização do método GLS. Este método estabiliza inclusive aproximações que utilizam elementos que não satisfazem a condição de Babuška-Brezzi – como elementos de igual-ordem nos sub-espacos de velocidade e pressão [Brooks e Hughes, 1982; Franca e Frey, 1992].

#### 4.2.4 Uma formulação estabilizada para problemas de escoamento com inércia

Neste item, são apresentados alguns resultados numéricos para problemas dados pela formulação da Eq. (4.29), i.e., escoamentos de fluidos puramente viscosos. Para isto, apresenta-se a formulação estabilizada utilizada neste trabalho e discutem-se algumas de suas características. Os sub-espacos empregados são:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^h &= \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^{nsd}, K \in C_h \} \\ P^h &= \{ p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in R_l(K), K \in C_h \} \\ \mathbf{V}_h^g &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^{nsd}, K \in C_h, \mathbf{v}(\Gamma_g) = \mathbf{u}_g \} \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde o sub-espaco  $\mathbf{V}_h^g$  é empregado em problemas não-homogêneos, i.e., com  $\mathbf{u}_g$  diferente de zero.

A aproximação de elementos finitos à qual neste trabalho é referida por GLS é baseada nas aproximações de Hughes et al., 1989, e Franca e Frey, 1992.

Achar o par  $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_g^h \times P^h$  tal que:

$$B_{GLS}(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}^h, q^h) = F_{GLS}(\mathbf{v}^h, q^h), \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}^h \times P^h \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} B_{GLS}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= ([\text{grad } \mathbf{u}] \mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2 \text{Re}^{-1} (\eta^*(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (p, \text{div } \mathbf{v}) - (\text{div } \mathbf{u}, q) + \\ &\sum_{K \in C_h} \left( [\text{grad } \mathbf{u}] \mathbf{u} + \text{grad } p - 2 \text{Re}^{-1} \text{div}(\eta^*(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u})), \tau(\text{Re}_K) ([\text{grad } \mathbf{v}] \mathbf{u} - 2 \text{Re}^{-1} \text{div}(\eta^*(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{v})) - \text{grad } q) \right) \\ F_{GLS}(\mathbf{v}, q) &= \text{Fr}^{-2}(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + (\mathbf{t}, \mathbf{v})_\Gamma + \sum_{K \in C_h} \left( \text{Fr}^{-2} \mathbf{b}, \tau(\text{Re}_K) ([\text{grad } \mathbf{v}] \mathbf{u} - 2 \text{Re}^{-1} \text{div}(\eta^*(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{v})) - \text{grad } q) \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

O parâmetro de estabilização é dado como em Franca e Frey, 1992:

$$\tau(\text{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_\alpha} \xi(\text{Re}_K); \quad (4.36)$$

onde

$$\xi(\text{Re}_K) = \begin{cases} \text{Re}_K, & 0 \leq \text{Re}_K < 1 \\ 1, & \text{Re}_K \geq 1 \end{cases}, \quad (4.37)$$

$$\text{Re}_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_\alpha h_K}{4\eta / \rho},$$

$$m_k = \min \{1/3, 2C_k\}.$$

A norma  $\alpha$  é definida como:

$$|\mathbf{u}|_\alpha = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^{nsd} |u_i|^\alpha \right)^{1/\alpha}, & 1 \leq \alpha < \infty \\ \max_{i=1, nsd} |u_i|, & \alpha = \infty. \end{cases} \quad (4.38)$$

e as constantes  $C_k$  derivam da estimativa inversa [Ciarlet, 1978]. Como colocado por Franca et al., 1992, seus valores correspondem a  $C_k=\infty$  para um elemento bilinear e  $C_k=1/24$  para um elemento biquadrático. Tezduyar et al., 1992, utilizaram, além do parâmetro de estabilização baseado nos parâmetros definidos acima, definições baseadas em Hughes e Shakib, 1988, para escoamentos compressíveis, obtendo resultados estáveis. Novas formulações para os parâmetros de estabilidade são encontrados em Tezduyar e Osawa, 2000, e Harari et al., 2001. Tezduyar e Osawa, 2000, descrevem a computação dos parâmetros de estabilização baseados em matrizes e vetores a nível de elemento, tanto para os problemas de advecção-difusão quanto para as equações transientes de Navier-Stokes. Harari et al., 2001, analisam a influência da direção do escoamento e sugerem novas definições para o parâmetro de estabilidade incorporando esta direção, obtendo uma boa performance do método.

#### 4.2.5 Considerações sobre estabilidade

Neste item, são exploradas algumas características de estabilidade do método GLS da Eq. (4.33). Para isto, considera-se o problema de Oseen homogêneo [Landau e Lifshitz, 1971], que é uma versão linearizada do problema da Eq. (4.29). Um campo advectivo prescrito ao longo do domínio é denotado por  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ .

A aproximação GLS para este modelo é dada por:

Achar o par  $(\mathbf{u}^h, p^h) \in V_g^h \times P^h$  tal que:

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}, q), \quad (\mathbf{v}, q) \in V^h \times P^h \quad (4.39)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= ([\text{grad } \mathbf{u}] \mathbf{w}, \mathbf{v}) + 2 \text{Re}^{-1} (\eta^* \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (p, \text{div } \mathbf{v}) - (\text{div } \mathbf{u}, q) + \\ &\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left( [\text{grad } \mathbf{u}] \mathbf{w} + \text{grad } p - 2 \text{Re}^{-1} \text{div} (\eta^* \mathbf{D}(\mathbf{u})), \tau(\text{Re}_K) ([\text{grad } \mathbf{v}] \mathbf{w} - 2 \text{Re}^{-1} \text{div} (\eta^* \mathbf{D}(\mathbf{v})) - \text{grad } q) \right) \quad (4.40) \\ F(\mathbf{v}, q) &= \text{Fr}^{-2} (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + (\mathbf{t}, \mathbf{v})_\Gamma + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left( \text{Fr}^{-2} \mathbf{b}, \tau(\text{Re}_K) ([\text{grad } \mathbf{v}] \mathbf{w} - 2 \text{Re}^{-1} \text{div} (\eta^* \mathbf{D}(\mathbf{v})) - \text{grad } q) \right) \end{aligned}$$

Pela definição do parâmetro de estabilidade  $\tau$  na Eq. (4.36), temos que

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x}, \text{Re}_K(\mathbf{x})) &= \frac{h_K}{2 |\mathbf{w}(\mathbf{x})|_\alpha}, \quad \text{Re}_K(\mathbf{x}) \geq 1 \\ \tau(\mathbf{x}, \text{Re}_K(\mathbf{x})) &= \frac{m_K h_K^2}{8\eta / \rho}, \quad 0 \leq \text{Re}_K(\mathbf{x}) \leq 1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

sendo assim, para  $\text{Re}_K \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x}, \text{Re}_K(\mathbf{x})) &= \frac{h_K}{2 |\mathbf{w}(\mathbf{x})|_\alpha} \frac{1}{\text{Re}_K(\mathbf{x})} \frac{m_K |\mathbf{w}(\mathbf{x})|_\alpha h_K}{4\eta / \rho} \\ &\leq \frac{m_K h_K^2}{8\eta / \rho} \end{aligned} \quad (4.42)$$

o que é verdade para todo  $\text{Re}_K$  em vista da Eq.(4.41)<sub>2</sub>.

Segundo Franca e Frey, 1992, apresenta-se o lema de estabilidade para o método GLS da Eq.(4.39):

Supondo que, dados  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  e  $\beta$  uma constante positiva com

$$\begin{aligned} \eta^* &= \text{constante} \\ \text{div } \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

então, para todo  $(\mathbf{u}^h, p^h) \in V^h \times P^h$ ,

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{u}^h, -p^h) \geq \frac{1}{2} (2 \operatorname{Re}^{-1} \eta^* \|\mathbf{D}(\mathbf{u}^h)\|_0^2 + \|\tau^{1/2} ([\operatorname{grad} \mathbf{u}^h] \mathbf{w} + \operatorname{grad} p^h)\|_0^2) \quad (4.44)$$

*Prova:* Pela Eq. (4.43) e por se tratar de um problema homogêneo, temos que

$$([\operatorname{grad} \mathbf{u}^h] \mathbf{w}, \mathbf{u}^h) = 0, \quad \mathbf{u}^h \in V^h \quad (4.45)$$

já que  $\mathbf{u}^h = 0$  em  $\Gamma$  para  $\mathbf{u}^h \in V^h$ . Tomando então  $\beta > 1$ . Pela Eq. (4.39):

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p; \mathbf{u}, -p) &= 2 \operatorname{Re}^{-1} \eta^* \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_0^2 + \|\tau^{1/2} ([\operatorname{grad} \mathbf{u}] \mathbf{w} + \operatorname{grad} p)\|_0^2 + \sum_{K \in C_h} \|\tau^{1/2} 2 \operatorname{Re}^{-1} \eta^* \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u})\|_{0,K}^2 + \\ &\quad - 2 \sum_{K \in C_h} \int_{\Omega_K} (2 \operatorname{Re}^{-1} \eta^* \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot (\tau ([\operatorname{grad} \mathbf{u}] \mathbf{w} + \operatorname{grad} p)) d\Omega_K \\ &\geq 2 \operatorname{Re}^{-1} \eta^* \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_0^2 + (1 - \beta^{-1}) \|\tau^{1/2} ([\operatorname{grad} \mathbf{u}] \mathbf{w} + \operatorname{grad} p)\|_0^2 + \\ &\quad + (1 - \beta) \sum_{K \in C_h} \|\tau^{1/2} 2 \operatorname{Re}^{-1} \eta^* \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u})\|_{0,K}^2 \\ &\geq (1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)) 2 \operatorname{Re}^{-1} \eta^* \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_0^2 + (1 - \beta^{-1}) \|\tau^{1/2} ([\operatorname{grad} \mathbf{u}] \mathbf{w} + \operatorname{grad} p)\|_0^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para  $\beta=2$ , obtém-se a estimativa da Eq. (4.44).

#### 4.2.6. Sistema matricial

Quando as funções de forma para  $\mathbf{u}^h$  e  $p^h$  são substituídas na formulação GLS da Eq. (4.34), gera-se um sistema algébrico do tipo:

$$\mathbf{R}(\mathcal{U}) = \mathbf{0} \quad (4.47)$$

onde  $\mathcal{U}$  é o vetor dos graus de liberdade de  $\mathbf{u}^h$  e  $p^h$ ,

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

e  $\mathbf{R}(\mathcal{U})$  é dado pelo conjunto de matrizes

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathcal{U}) = & [\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\tau(\eta^*, \mathbf{u})]\mathbf{u} + [\mathbf{K}(\eta^*) + \mathbf{K}_\tau(\eta^*, \mathbf{u})]\mathbf{u} \\ & + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\tau(\eta^*, \mathbf{u})]\mathbf{p} + [\mathbf{G}^T]\mathbf{u} - [\mathbf{H} + \mathbf{H}_\tau(\eta^*, \mathbf{u})] \end{aligned} \quad (4.49)$$

As matrizes  $[\mathbf{K}]$  e  $[\mathbf{G}]$  são originadas pelos termos difusivos e de pressão, respectivamente. A matriz  $[\mathbf{N}(\mathbf{u})]$  é originada pelos termos advectivos. A matriz  $[\mathbf{G}^T]$  é aquela dos termos de incompressibilidade, e  $[\mathbf{H}]$  é a matriz das forças de corpo. As demais matrizes são provenientes dos termos estabilizados governados pelo parâmetro  $\tau$ . As dependências de algumas matrizes em  $\mathbf{u}$  é a não-linearidade que aparece devida aos termos advectivos de transporte de quantidade de movimento, enquanto que a dependência em  $\eta^*$  caracteriza a não-linearidade material, isto é, a dependência da viscosidade no campo de velocidade.

#### 4.2.7 Método de Newton

Para o cálculo da solução do sistema, utiliza-se um método baseado no método de Newton para sistemas, modificado em alguns aspectos que comentaremos a seguir.

O método de Newton para sistemas consiste, basicamente, em calcular a solução para um sistema do tipo da Eq. (4.47) através de um algoritmo incremental do tipo [Dahlquist e Bjorck, 1969]:

$$\mathcal{U}^{k+1} = \mathcal{U}^k - \mathbf{J}_k^{-1}(\mathcal{U}^k)\mathbf{R}(\mathcal{U}^k) \quad (4.50)$$

onde a matriz Jacobiana é dada por

$$\mathbf{J}(\mathcal{U}^k) = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathcal{U}} \right|_{\mathcal{U}^k} \quad (4.51)$$

e o critério de convergência é dado pelo valor absoluto ou relativo da norma do resíduo  $\mathbf{R}(\mathcal{U})$ .

O método de Newton para sistemas é de segunda ordem, i.e., existe uma constante  $C=C(\beta)$  tal que para todo  $\mathcal{U}^k$ ,  $\|\mathcal{U}^k - \alpha\| \leq \beta$ , tem-se que [Dahlquist e Bjorck, 1969]:

$$\|\mathcal{U}^{k+1} - \alpha\| \leq C \|\mathcal{U}^k - \alpha\|^2 \quad (4.52)$$

Portanto o método converge desde que  $\mathcal{U}^0$  seja suficientemente próximo de  $\alpha$ .

A cada iteração, o método requer a solução de um sistema linear de equações para o cálculo do termo incremental, do tipo

$$\mathbf{J}(\mathcal{U}^k)\mathcal{A}^{k+1} = \mathbf{R}(\mathcal{U}^k) \quad (4.53)$$

e faz-se

$$\mathcal{U}^{k+1} = \mathcal{U}^k + \mathcal{A}^{k+1} \quad (4.54)$$

A fim de diminuir a demanda computacional, é conveniente que se gere e fatore a matriz Jacobiana da Eq. (4.53) apenas ocasionalmente durante o processo iterativo, num método que está entre os chamados quasi-Newton. Sendo assim, para o caso dos problemas de aproximação de escoamentos utilizando o método GLS e gerando um sistema matricial como nas Eqs. (4.47) e (4.49), utiliza-se o Algoritmo 1 (Fig. 4.5), para o qual são dados de entrada a estimativa inicial de solução  $\mathcal{U}^0$ ,  $m$ , o número de iterações para a atualização da matriz Jacobiana e  $err$ , o erro máximo admissível. A função “int” retorna a parte inteira de seu argumento. A matriz Jacobiana é calculada na forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathcal{U}) = & \mathbf{N}(\mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} + \mathbf{N}_\tau(\eta^*, \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{N}_\tau(\eta^*, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} + \mathbf{K}(\eta^*) + \mathbf{K}_\tau(\eta^*, \mathbf{u}) \\ & + \frac{\partial \mathbf{K}_\tau(\eta^*, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} + \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{G}_\tau(\eta^*, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{p} + \mathbf{G}_\tau(\eta^*, \mathbf{u}) + \mathbf{G}^T - \frac{\partial \mathbf{H}_\tau(\eta^*, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Um esquema para o Algoritmo 1 é dado pela Figura 4.5.

*OBSERVAÇÃO 3:* Todas as não-linearidades da Eq. (4.49) não são contabilizadas explicitamente nas derivadas que definem a matriz Jacobiana. Por exemplo, as matrizes dependentes da viscosidade, em tese, seriam derivadas com respeito à velocidade. A complexidade de se tratar todas as propriedades materiais de uma maneira tão rigorosa seria proibitiva e em geral injustificada. Estas não-linearidades são geralmente brandas o suficiente para não afetar a convergência do algoritmo de Newton quando tratado de forma como no Algoritmo 1. Por conseguinte, uma formulação estrita para a matriz Jacobiana somente é aplicada aos termos advectivos, altamente não-lineares [Reddy e Gartling, 1994].

*OBSERVAÇÃO 4:* Como estimativa inicial para a solução dos escoamentos que foram aproximados neste trabalho, utilizou-se a solução de um problema linear de Stokes para as mesmas geometrias e condições de contorno. A fim de garantir a convergência do algoritmo, pela Eq. (4.52), empregou-se um método de continuação [Dahlquist e Bjorck, 1969] nos termos advectivos. Multiplica-se todos os termos advectivos por um parâmetro de ordem pequena, e

conforme o algoritmo converge, este parâmetro é incrementado até chegar ao valor 1, representando a formulação completa.

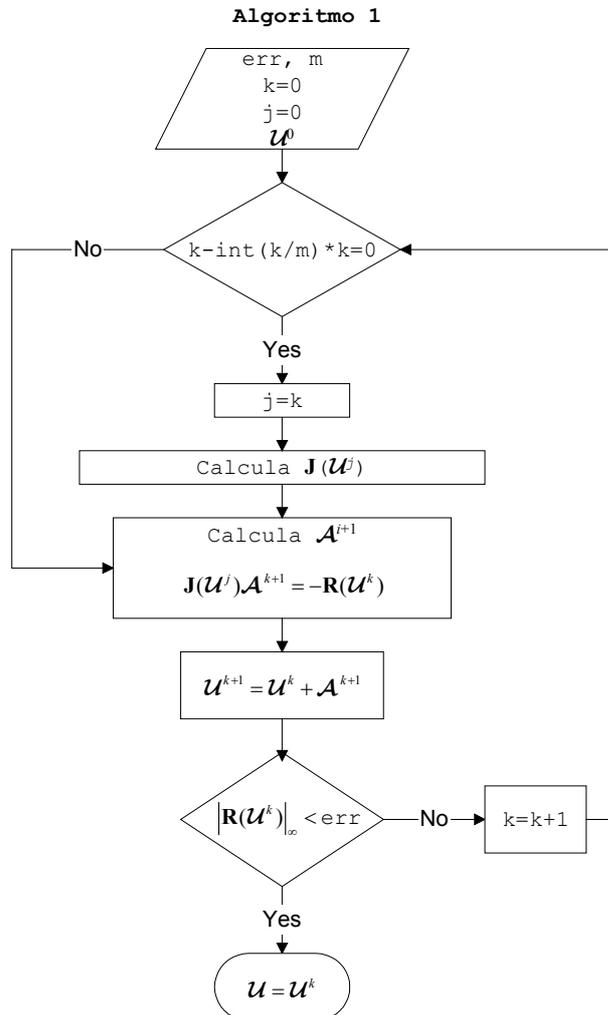


Figura 4.5: Algoritmo 1

#### 4.2.8 Exemplos numéricos - validação

As formulações de elementos finitos utilizadas neste trabalho foram implementadas no código computacional GNLFEM, desenvolvido pelo grupo de pesquisa do LAMAC – Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional. A validação do código utilizando a formulação estabilizada da Eq. (4.39) e o Algoritmo 1 é estudada utilizando o problema de cavidade forçada, construído da maneira usual [Franca e Frey, 1992], ver Fig. 4.1. As condições de contorno impostas são as condições de impermeabilidade e não-deslizamento nas paredes e uma velocidade horizontal conhecida na fronteira superior,  $u_0$ . O Número de Reynolds é dado por:

$$\text{Re} = \frac{\rho u_0 L}{\mu} \quad (4.56)$$

Foram investigados valores para Re de 100 a 5000. As aproximações numéricas para os campos de velocidade e pressão tiveram boa concordância com Hannani et al., 1995, e referências. Este trabalho compila e compara a eficiência de vários métodos de elementos finitos para este problema-teste, baseado nos resultados de Ghia et al., 1982. No trabalho de Hannani et al., 1995, os testes foram feitos para malhas regulares de 30x30, 32x32, 45x45 e 80x80 elementos  $Q_1/Q_1$ . No presente trabalho, foram comparados os resultados utilizando algumas malhas: três malhas de elementos  $Q_1/Q_1$ : 20x20, 50x50, 80x80 e 120x120; uma malha de 20x20 elementos  $Q_2/Q_1$  e uma malha de 16x16 elementos  $Q_{2s}/Q_1$ . Em todos os casos foram geradas aproximações estáveis para os campos de velocidade e pressão. As Figs. 4.6 e 4.7 apresentam as linhas de corrente e o campo de pressão para este escoamento, onde captamos as principais regiões de recirculação formadas. A Fig. 4.6 mostra as linhas de corrente obtidas para Reynolds 400 e 5000, empregando a malha de 50x50 elementos  $Q_1/Q_1$ . A Fig. 4.7 mostra um gráfico de elevação de pressão para os mesmos Reynolds e malha.

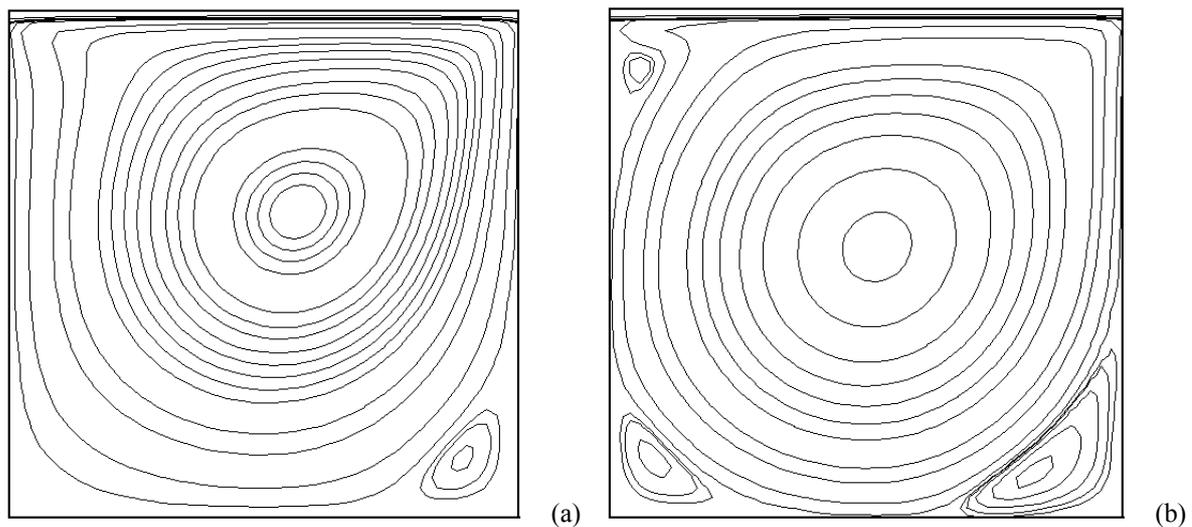


Figura 4.6: Linhas de corrente na cavidade, formulação GLS, 50x50 elementos  $Q_1/Q_1$ . (a) Re=400, (b) Re=5000.

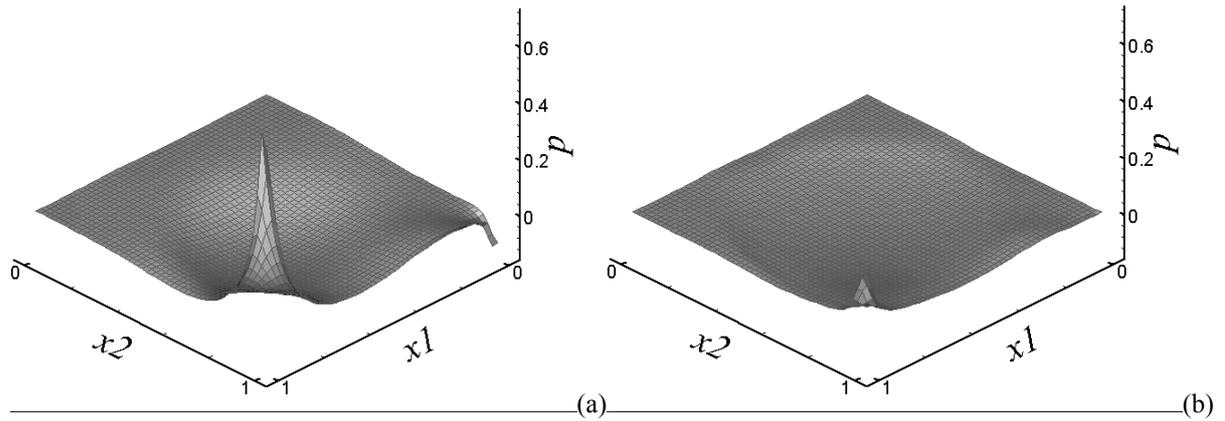


Figura 4.7: Elevação da pressão, formulação GLS, 50x50 elementos  $Q_1/Q_1$ . (a)  $Re=400$ , (b)  $Re=5000$ .

Os perfis de velocidade nas linhas médias, para  $Re=400$ , foram comparados com os obtidos por Ghia et al. [1982], como mostra a Fig. 4.8, na qual foi utilizada a malha de  $120 \times 120$  elementos (esses autores empregaram uma malha de  $129 \times 129$  elementos). O excesso de difusividade eventualmente apontado [Hannani et al., 1995] como característica dos métodos GLS, provocam uma leve discrepância entre os resultados. No entanto, esta investigação revelou que o excesso de difusividade pode ser superado através do refinamento da malha [ver Zinani e Frey, 2006].

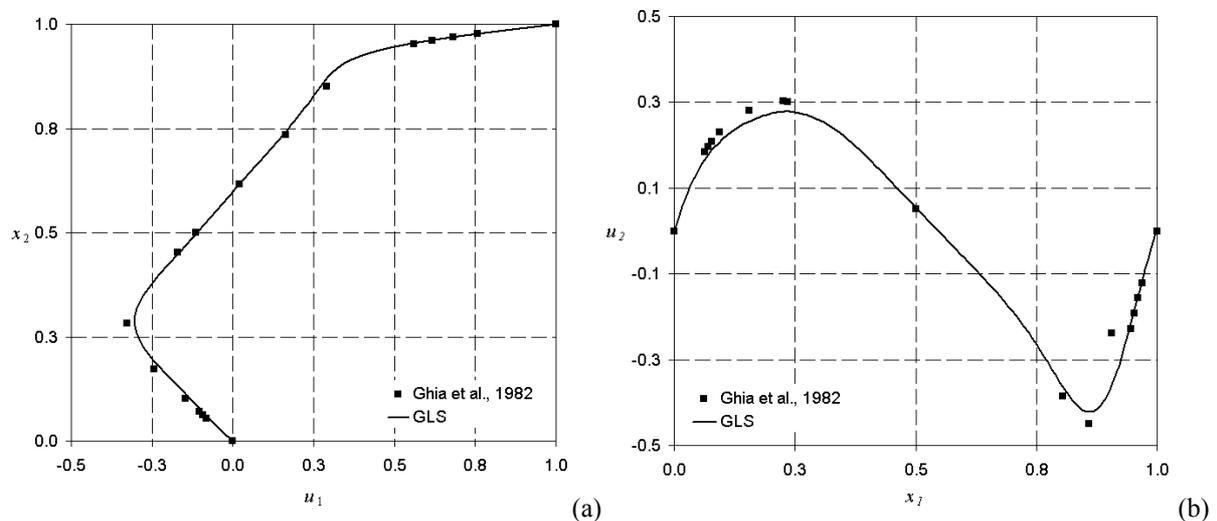


Figura 4.8: Formulação GLS,  $120 \times 120$  elementos  $Q_1/Q_1$ . Perfis de (a) velocidade horizontal, (b) velocidade vertical,  $Re=400$ .

As habilidades em lidar com não-linearidades materiais podem ser verificadas no artigo de Zinani e Frey, 2006, onde são apresentados resultados para escoamentos de fluidos de Bingham e Casson.

### 4.3 O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A FORMULAÇÕES MULTI-CAMPOS PARA PROBLEMAS DE ESCOAMENTOS

As formulações de problemas de escoamentos de fluidos não Newtonianos, em especial de fluidos viscoelásticos, podem gerar a necessidade de computar, como variáveis primais, as derivadas de campos tensoriais como o tensor extra de tensão,  $\boldsymbol{\tau}$ , ou do tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ . Isso se deve a essas grandezas não serem explícitas nos modelos reológicos usuais. A inclusão dessas variáveis acarreta na necessidade de compatibilização dos sub-espacos a que elas pertencem com os sub-espacos das demais variáveis do problema.

No caso de modelos constitutivos sensíveis ao tipo de escoamento, onde é empregado algum parâmetro classificador como o de Astarita, 1979, é necessária a computação das derivadas do tensor taxa de deformação. Uma alternativa para o cálculo destas é a utilização de uma formulação multi-campos, que permite manter a coerência com a interpolação de elementos finitos utilizada para o cálculo das variáveis primais.

Nesta seção, serão abordadas algumas das formulações multi-campos existentes. Na análise de tais formulações, negligenciam-se os termos de inércia, a fim de se estudar o problema linear e posteriormente estender a formulação à aproximação de um problema mais complexo, como o escoamento de um fluido de modelo constitutivo diferencial.

#### 4.3.1 Formulação em três campos ( $\boldsymbol{\tau}$ - $p$ - $\mathbf{u}$ ) – formulação forte

Apresenta-se uma forma linearizada da formulação forte do problema de Stokes em três campos: achar os campos  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $p$  e  $\mathbf{u}$  para

$$\begin{aligned}
 \text{grad } p - \text{div } \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{b} && \text{em } \Omega \\
 \boldsymbol{\tau} - 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \\
 \text{div } \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\
 (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Considera-se o problema homogêneo para o qual

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma \tag{4.58}$$

### 4.3.2 Formulação de Galerkin

A seguir apresenta-se a formulação de Galerkin para o problema misto (tensão-pressão-velocidade,  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $p$  e  $\mathbf{u}$ ) de escoamento dado pela Eq. (4.57). Os sub-espaços das funções de pressão e velocidade são definidos como no problema em dois campos. Para o campo de tensão, introduz-se o espaço de elementos finitos:

$$\mathbf{Y}^h = \{\mathbf{S} \in \mathbf{Y} \mid \mathbf{S}|_K \in R_k(K)^{nsd \times nsd}, K \in \mathcal{C}^h\} \quad (4.59)$$

com

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{S} \in C^0(\Omega)^{nsd \times nsd} \cap L_2(\Omega)^{nsd \times nsd} \mid \mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}_{ji}, i = 1, \dots, nsd\} \quad (4.60)$$

A formulação de Galerkin para o problema homogêneo é dada por:

Dada  $\mathbf{b}$ , achar a tripla  $(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \mathbf{Y}^h \times P^h \times \mathbf{V}^h$  tal que:

$$B(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h), \quad (\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \in \mathbf{Y}^h \times P^h \times \mathbf{V}^h \quad (4.61)$$

onde

$$B(\boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) = \frac{1}{2\mu} (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{S}) - (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{S}) + (p, \text{div } \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}(\mathbf{v})) + (\text{div } \mathbf{u}, q) \quad (4.62)$$

$$F(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{v})$$

### 4.3.3 As dificuldades do método de Galerkin

Considera-se um breve histórico dos avanços obtidos nos últimos anos na aproximação numérica dos problemas de escoamento formulados em três campos.

O problema de Stokes em três campos e sua aproximação por métodos mistos de elementos finitos consiste numa classe de problemas em que são encontradas sérias dificuldades. As incompatibilidades aí presentes não ocorrem somente entre os espaços de velocidade e pressão, mas também, e principalmente, entre os espaços de tensão e velocidade. Além disso, o requerimento de continuidade para o tensor extra de tensão, desejável do ponto de vista da física do problema, compromete severamente a sua estabilidade [Franca e Stenberg, 1991].

Em 1986, Marchal e Crochet propuseram elementos finitos utilizando polinômios de Hermite, provando que tais elementos satisfazem uma condição de suficiência [Marchal e

Crochet, 1986; Marchal e Crochet, 1987] para que a solução do problema misto em três campos seja equivalente à da formulação em dois campos. No entanto, esta formulação se restringiu a elementos retangulares, cuja extensão para elementos quadriláteros arbitrários não é imediata nem trivial. Porém, estendendo a formulação a problemas viscoelásticos, foram obtidos resultados estáveis utilizando o modelo Oldroyd-B para número de Deborah até 6. Em 1987, os mesmos autores [Marchal e Crochet, 1987] obtiveram aproximações estáveis para o problema de Stokes utilizando aproximações contínuas para as três variáveis,  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $p$  e  $\mathbf{u}$ , via aproximação de Galerkin com elementos quadriláteros genéricos. Eles propuseram elementos de diferentes ordens e concluíram que o elemento  $Q_2/Q_1$  para velocidade e pressão, com  $3 \times 3$  e  $4 \times 4$  sub-elementos quadriláteros bilineares para a tensão eram capazes de gerar resultados estáveis para todos os campos. Utilizando técnicas de *streamline-upwinding* [Hughes e Brooks, 1982] na discretização das equações constitutivas de Oldroyd-B e Maxwell-B e a técnica de sub-elementos para a tensão, eles obtiveram resultados numéricos para diversas situações de escoamento destes fluidos, sem encontrar um limite superior para o número de Deborah, além dos resultados estáveis que obtiveram para o problema de Stokes de fluido Newtoniano. Fortin e Pierre, 1989, conseguiram provar que o elemento proposto por Marchal e Crochet, 1987, satisfazia a condição de compatibilidade entre os campos de tensão e velocidade, além de desenvolver as estratégias para a análise de formulações do tipo. Os pesquisadores Ruas, Carneiro de Araújo e Silva Ramos propuseram novos elementos mistos e obtiveram importantes resultados na análise numérica do problema de Stokes. Entre seus trabalhos pode-se citar Ruas et al., 1993, e Ruas, 1994, no contexto da busca e análise de aproximações estáveis para o problema de Stokes em três campos e na extensão destes métodos para o escoamento de fluidos viscoelásticos. Além destes, alguns trabalhos foram publicados para a generalização e análise dos elementos propostos para formulações axissimétricas, como em Carneiro de Araújo e Ruas, 1998, e Ruas et al., 2003. Este último de grande importância para o fechamento das idéias dos outros artigos por apresentar inclusive resultados numéricos.

No escopo dos métodos estabilizados, Franca e Stenberg, 1991, propuseram uma formulação *Galerkin least-squares*, GLS, que permite a utilização de espaços de igual ordem para os três campos. Seus resultados foram somente teóricos neste trabalho, mas, logo depois, Behr et al., 1993, utilizaram a formulação GLS de Franca e Stenberg, 1991, com algumas modificações a fim de acomodar termos de inércia, gerando resultados numéricos estáveis utilizando elementos dos tipos  $Q_2/Q_2/Q_2$  e  $Q_1/Q_1/Q_1$ . Em Ruas, 1996 e Ruas, 1997, são apresentadas análises detalhadas sobre as formulações em três campos para métodos utilizando elementos tipo bolha e métodos estabilizados do tipo GLS, no contexto do problema

tridimensional. Zhou e Zhou, 1997, também apresentam formulações estabilizadas para o problema em três campos onde incluem o termo de inércia, e analisam a estabilidade e estimativas de erro para o modelo não-linearizado, propondo a aplicabilidade das formulações para quaisquer combinações de elementos. Fan et al., 1999, apresentam um método GLS utilizando apenas o resíduo da equação de conservação de massa e estabilizando o termo da equação constitutiva utilizando uma estratégia SUPG. Para elementos da mesma ordem em velocidade e tensão, e uma ordem a menos para a pressão, mas utilizando polinômios de alta ordem, esses autores conseguiram bons resultados para escoamentos de fluidos de Maxwell e Oldroyd, comparando com resultados utilizando uma metodologia baseada em *Elastic Viscous Split Stress* (EVSS). No entanto, Fan et al., 1999, comentam que uma técnica de estabilização do tipo GLS baseada no resíduo das equações de movimento não converge, o que não é verificado por Bonvin et al., 2001, que utilizaram a formulação completa GLS para o problema de Stokes em três campos. Esses autores consideraram o tensor extra de tensão como a soma de uma contribuição viscosa e uma viscoelástica (com  $\lambda=0$ , no caso linear analisado), propuseram e analisaram uma formulação GLS completa e uma formulação reduzida, além de proporem uma formulação em quatro campos (EVSS) baseada na estabilização do tipo GLS. Utilizando elementos triangulares de igual ordem para todas as variáveis, os autores conseguiram obter resultados numéricos satisfatórios para todas as formulações, dependentes dos parâmetros de estabilização empregados mas convergentes para qualquer valor de viscosidade.

#### 4.3.4 Uma formulação estabilizada para o problema de Stokes em três campos

A seguir é apresentada uma formulação estabilizada para o problema de Stokes em três campos,  $\boldsymbol{\tau}$ - $p$ - $\mathbf{u}$ , a formulação GLS proposta por Franca e Stenberg, 1991. Dada  $\mathbf{b}$ , achar a tripla  $(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \mathbf{Y}^h \times P^h \times \mathbf{V}^h$  tal que:

$$B(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h), \quad (\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \in \mathbf{Y}^h \times P^h \times \mathbf{V}^h \quad (4.63)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2\mu} (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{S}) - (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\tau}) + (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{S}) + (q, \operatorname{div} \mathbf{u}) + \\ &\quad -\alpha (\boldsymbol{\tau} - 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{S} - 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \beta \sum_{K \in C_h} h_K^2 (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \operatorname{grad} p, \operatorname{div} \mathbf{S} - \operatorname{grad} q)_K \quad (4.64) \\ F(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= -(\mathbf{b}, \mathbf{v}) - \beta \sum_{K \in C_h} h_K^2 (\mathbf{b}, \operatorname{div} \mathbf{S} - \operatorname{grad} q)_K \end{aligned}$$

### 4.3.5 Considerações sobre estabilidade

Para o método da Eq. (4.63), com  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta > 1$ , Franca e Stenberg, 1991, obtiveram a estimativa de convergência e as características da estabilidade. Para tanto, utilizam a estimativa inversa de elementos finitos [Ciarlet, 1978]:

$$C_k \sum_{K \in C_h} h_K^2 \|\operatorname{div} \mathbf{S}\|_{0,K}^2 \leq \|\mathbf{S}\|_0^2 \quad \mathbf{S} \in \mathbf{W}^h \quad (4.65)$$

onde  $C_k$  é uma constante independente de  $C_h$ .

Pose-se estimar a convergência do método estabilizado (Eq.(4.63)) através do seguinte teorema [Franca e Stenberg, 1991]:

TEOREMA 4.2: Suponha que a solução para o problema forte (Eq. (4.57)) satisfaça  $\boldsymbol{\tau} \in H^{m+1}(\Omega)^{nsd \times nsd}$ ,  $\mathbf{u} \in H^{k+1}(\Omega)^{nsd}$  e  $p \in H^{l+1}(\Omega)$ , e que uma das condições seja satisfeita:

- i)  $\mathbf{S}^h \in \mathbf{V}^h$ ,
- ii)  $P^h \in C^0(\Omega)$ .

Então a formulação estabilizada (Eq.(4.63)) tem uma única solução que satisfaz

$$\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^h\|_0 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_1 + \|p - p^h\|_0 \leq C(h^{m+1} |\boldsymbol{\tau}|_{m+1} + h^k |\mathbf{u}|_{k+1} + h^{l+1} |p|_{l+1}) \quad (4.66)$$

e pela regularidade do problema de Stokes em um polígono convexo  $\Omega$  [Franca e Stenberg, 1991; Franca et al., 1992],

$$\|\mathbf{u}\|_2 + \|\boldsymbol{\tau}\|_1 \leq C \|\mathbf{b}\|_0 \quad (4.67)$$

tem-se:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_0 \leq C(h^{m+2} |\boldsymbol{\tau}|_{m+1} + h^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1} + h^{l+2} |p|_{l+1}) \quad (4.68)$$

□

O lema de estabilidade do método GLS da Eq. ((4.63)) é dado como em Franca e Stenberg, 1991, por:

$$\begin{aligned}
B_{GLS}(\boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u}; \boldsymbol{\tau}, p, -\mathbf{u}) &= (1 - \alpha) \|\boldsymbol{\tau}\|_0^2 + \alpha \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_0^2 + \beta \sum_{K \in \mathcal{C}_h} h_K^2 \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \operatorname{grad} p\|_{0,K}^2 \\
&\geq (1 - \alpha C_k^{-1}) 2\mu \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_0^2 + \alpha \sum_{K \in \mathcal{C}_h} h_K^2 \|(\operatorname{grad} p)\|_{0,K}^2 \\
&\geq C_1 2\mu \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_0^2 + \alpha \sum_{K \in \mathcal{C}_h} h_K^2 \|(\operatorname{grad} p)\|_{0,K}^2
\end{aligned} \tag{4.69}$$

para  $0 \leq \alpha \leq 2\mu C_k$ .

#### 4.3.6 Formulações multi-campos para problema linearizado de escoamento de fluido Oldroyd-B.

No caso da aproximação de modelos reológicos diferenciais, um fato do qual muitos pesquisadores em métodos numéricos tiraram proveito foi da decomposição da equação constitutiva de Oldroyd-B na forma [Crochet e Keunings, 1982]:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \tag{4.70}$$

onde o tensor extra de tensão é dividido em suas porções definidas por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_1 + \lambda_1 \nabla \boldsymbol{\tau}_1 &= 2\mu_1 \mathbf{D} \\
\boldsymbol{\tau}_2 &= 2\mu_2 \mathbf{D}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Neste caso aparece um termo viscoso (onde  $\mu_2$  é chamada de viscosidade do solvente), que ajuda a dar estabilidade à formulação dada por:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} p - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_1 - 2\mu_2 \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) &= \mathbf{b} && \text{em } \Omega \\
\boldsymbol{\tau}_1 - 2\mu_1 \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\tau}_1) &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \\
\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Fortin e Pierre, 1987, mostraram que, na ausência de uma contribuição puramente viscosa ( $\mu_2=0$ , fluido de Maxwell), quando se utilizando uma interpolação Lagrangeana regular, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- i) A interpolação pressão-velocidade deve satisfazer a condição de Babuška-Brezzi usual.
- ii) Se uma interpolação descontínua da tensão,  $\boldsymbol{\tau}$ , é empregada, os espaço do tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ , obtido após diferenciação do campo de velocidade,  $\mathbf{u}$ , deve estar contido no espaço de interpolação de  $\boldsymbol{\tau}$ .

iii) Se uma interpolação contínua da tensão,  $\boldsymbol{\tau}$ , é empregada, o número de nós internos deve ser maior que o número de nós no lado de um elemento empregado para interpolação da velocidade.

Este resultado enfatiza a importância da contribuição do termo viscoso na forma fraca da equação de movimento. Um modo de atingir artificialmente este objetivo é a aplicação de uma mudança de variáveis, conhecida como formulação Elastic Viscous Split Stress (EVSS). Essa formulação foi primeiramente introduzida no contexto de fluidos viscoelásticos por Beris et al., 1984, numa forma restrita, propondo uma mudança de variável do tipo:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\tau} - 2\mu_1 \mathbf{D} \quad (4.73)$$

gerando uma forma fraca em que é se necessita calcular a taxa de deformação como uma variável primal. No caso, a variável taxa de deformação,  $\mathbf{d}$ , é considerada uma projeção da taxa de deformação calculada através do gradiente do campo de velocidade, gerando-se uma expressão do tipo:

$$(\mathbf{d} - \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{E}) = 0 \quad (4.74)$$

Sun et al., 1996, propuseram um método EVSS adaptativo onde a mudança de variáveis da Eq. (4.73) é adaptada de forma a manter uma elipticidade suficiente na equação do movimento:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\tau} - 2\mu_a \mathbf{D}, \quad \mu_a = \mu_a(h, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) \quad (4.75)$$

Também se pode utilizar uma projeção do gradiente de velocidade, e o método é então chamado EVSS-G [Brown et al., 1993; Szady et al., 1995; Baaijens, 1998]. Uma importante modificação do método EVSS, conhecida como EVSS discreto ou DEVSS, foi proposta por Guénette e Fortin, 1995. Neste método, um operador elíptico estabilizador é introduzido na versão discreta da equação de movimento, evitando a derivada objetiva da taxa de deformação e não mais restringindo o método a uma classe particular de equações constitutivas. Para o modelo genérico como o Upper Convected Maxwell (UCM), esta formulação é dada por: dada  $\mathbf{b}$ , achar  $(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u})$  tal que para todas as funções peso admissíveis  $\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{v}$  e  $q$ :

$$B(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u}; \mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) = F(\mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) \quad (4.76)$$

onde

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u}; \mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= (2\delta(\mathbf{d} - \mathbf{D}(\mathbf{u})) + \boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) + \\
&\quad (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\tau}) - 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{S}) + (\mathbf{d} - \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{E}) \\
F(\mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= -(\mathbf{b}, \mathbf{v})
\end{aligned} \tag{4.77}$$

E para o modelo Oldroyd-B modificado (Eq. (4.70)), tem-se: dada  $\mathbf{b}$ , achar  $(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u})$  tal que para todas as funções peso admissíveis  $\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{v}$  e  $q$ :

$$B(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) = F(\mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) \tag{4.78}$$

onde

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}; \mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= (2\delta(\mathbf{d} - \mathbf{D}(\mathbf{u})) - 2\mu_2\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + \\
&\quad -(\operatorname{div} \mathbf{u}, q) + (\boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{G}(\boldsymbol{\tau}_1) - 2\mu_1\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{S}) + (\mathbf{d} - \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{E}) \\
F(\mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= -(\mathbf{b}, \mathbf{v})
\end{aligned} \tag{4.79}$$

A vantagem de métodos do tipo EVSS é evitar a necessidade de compatibilização dos espaços de tensão e velocidade, através da adição de um termo difusivo à equação de movimento. Fortin et al., 1997, provaram a estabilidade desta formulação, mostrando que nenhuma necessidade adicional de compatibilização de espaços é necessária além daquela entre velocidade e pressão.

Bonvin et al., 2001, apresentam, além de duas formulações GLS para o problema de Stokes em três campos, uma formulação GLS para um problema do tipo EVSS, adicionando termos estabilizadores que evitam a necessidade de qualquer tipo de compatibilização de espaços. A seguir são abordadas as formulações propostas por estes autores.

#### 4.3.7 Formulações GLS multi-campos para um problema linearizado de escoamento de fluido Oldroyd-B

O problema de escoamento em três campos pode ser dado como na Eq. (4.57), ou pode ser dado de uma forma mais geral, para o modelo constitutivo de Oldroyd-B modificado como na Eq. (4.70) e fazendo  $\lambda=0$  e  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\tau})=\mathbf{0}$ . A forma forte fica:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} p - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_1 - 2\mu_2 \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) &= \mathbf{b} && \text{em } \Omega \\
\boldsymbol{\tau}_1 - 2\mu_1 \mathbf{D}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \\
\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega
\end{aligned} \tag{4.80}$$

A forma variacional para este problema é dado por achar  $(\boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}) \in \mathbf{Y} \times P \times V$  tal que

$$B(\boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) = F(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) \quad \forall (\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) \in \mathbf{Y} \times P \times V \quad (4.81)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= 2\mu_2(\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + (\boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) + \\ &\quad - \frac{1}{2\mu_1} (\boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{S}) + (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{S}) \\ F(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= -(\boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (4.82)$$

Bonvin et al., 2001, provam a existência e unicidade da solução para o problema contínuo da Eq. (4.81), assim como estabelecem o lema de estabilidade para essa formulação, que depende de duas condições de compatibilidade, entre os espaços de tensão e velocidade, e entre os espaços de velocidade e pressão. Essa última nada mais é do que a condição clássica de Babuška-Brezzi para o problema de Stokes em pressão e velocidade. Do ponto de vista numérico, a compatibilidade entre os espaços deve ser satisfeita entre os sub-espaços de elementos finitos, o que pode ser atingido aumentando-se a ordem dos sub-espaços de velocidade e tensão. Os métodos GLS apresentados por Bonvin et al., 2001, são construídos de forma a evitar as condições de compatibilidade adicionando termos às formas  $B$  e  $F$  que correspondem às formas de mínimos quadrados da equação residual, dentro de cada elemento da malha. Estes autores apresentam as formulações utilizando os sub-espaços de funções  $\mathbf{Y}_B^h$ ,  $P_B^h$ ,  $\mathbf{V}_B^h$  como apresentados anteriormente, mas com a diferença que apenas são considerados elementos do tipo  $P_k$ , i.e., elementos triangulares:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_B^h &= \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{v}|_K \in P_k(K)^{nsd}, K \in C_h \} \\ P_B^h &= \{ p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in P_l(K), K \in C_h \} \\ \mathbf{V}_{Bh}^g &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{v}|_K \in P_k(K)^{nsd}, K \in C_h, \mathbf{v}(\Gamma_g) = \mathbf{u}_g \} \\ \mathbf{Y}_B^h &= \{ \mathbf{S} \in C^0(\Omega)^{nsd \times nsd} \cap L_2(\Omega)^{nsd \times nsd} \mid \mathbf{S}|_K \in P_k(K)^{nsd \times nsd}, K \in C^h, \mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}_{ji}, i = 1, \dots, nsd \} \end{aligned} \quad (4.83)$$

A primeira formulação GLS para o problema da Eq. (4.82) é dada por Bonvin et al., 2001, como: achar  $(\boldsymbol{\tau}_1^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \mathbf{Y}_B^h \times P_B^h \times \mathbf{V}_{Bh}^g$  tal que

$$B_{GLS1}(\boldsymbol{\tau}_1^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F_{GLS1}(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \quad \forall (\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \in \mathbf{Y}_B^h \times P_B^h \times \mathbf{V}_B^h \quad (4.84)$$

onde

$$\begin{aligned}
B_{GLS1}(\boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= B(\boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) - \sum_{K \in \mathcal{C}^h} \frac{\alpha h_K^2}{2\mu_1} (-2\mu_2 \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad} p - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_1, \\
&\quad -2\mu_2 \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \operatorname{grad} q - \operatorname{div} \mathbf{S})_K + \\
&\quad + 2\mu_1 \beta \left( \frac{1}{2\mu_1} \boldsymbol{\tau}_1 - \mathbf{D}(\mathbf{u}), \frac{1}{2\mu_1} \mathbf{S} - \mathbf{D}(\mathbf{v}) \right)
\end{aligned} \tag{4.85}$$

$$F_{GLS1}(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) = F(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) - \sum_{K \in \mathcal{C}^h} \frac{\alpha h_K^2}{2\mu_1} (\mathbf{b}, -2\mu_2 \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \operatorname{grad} q - \operatorname{div} \mathbf{S})_K$$

e onde  $\alpha > 0$  e  $0 < \beta < 1$ .

Os autores Bonvin et al., 2001, provam a estabilidade e convergência deste método, através de uma análise detalhada da qual se conclui o que segue. Quando  $\alpha > 0$  e  $0 < \beta < 1$ , a velocidade é controlada pela viscosidade do solvente,  $\mu_2$ , mesmo quando  $\mu_2 = 0$ . Entretanto, quando  $\mu_2$  e  $\beta$  tendem a zero simultaneamente, o método falha. Similarmente, quando  $\alpha$  tende a zero, ou quando  $\beta$  tende a um, o método também falha.

Esses autores também propõem uma formulação à qual denominam GLS reduzida, em que alguns termos da Eq. (4.85) não são considerados. Esta formulação é dada por: achar  $(\boldsymbol{\tau}_1^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \mathbf{Y}_B^h \times P_B^h \times \mathbf{V}_{Bg}^h$  tal que

$$B_{GLS2}(\boldsymbol{\tau}_1^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F_{GLS2}(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \quad \forall (\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \in \mathbf{Y}_B^h \times P_B^h \times \mathbf{V}_B^h \tag{4.86}$$

onde

$$\begin{aligned}
B_{GLS2}(\boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= B(\boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) - \sum_{K \in \mathcal{C}^h} \frac{\alpha h_K^2}{2\mu_1} (-2\mu_2 \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad} p - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_1, \operatorname{grad} q)_K + \\
&\quad + 2\mu_1 \beta \left( \frac{1}{2\mu_1} \boldsymbol{\tau}_1 - \mathbf{D}(\mathbf{u}), -\mathbf{D}(\mathbf{v}) \right) \\
F_{GLS2}(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= F(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) - \sum_{K \in \mathcal{C}^h} \frac{\alpha h_K^2}{2\mu_1} (\mathbf{b}, \operatorname{grad} q)_K
\end{aligned} \tag{4.87}$$

e onde  $\alpha > 0$  e  $0 < \beta < 2$ .

A estabilidade e convergência desta formulação é provada para  $0 < \alpha < C_k$  e  $0 < \beta < 2$ , onde  $C_k$  é dado pela maior constante positiva que satisfaz a desigualdade da Eq. (4.65). Assim, como sobre o método GLS1, a interpretação da análise numérica é dada como segue. Quando  $\alpha > 0$  e  $0 < \beta < 2$ , a velocidade é controlada pela viscosidade do solvente,  $\mu_2$ , mesmo quando  $\mu_2 = 0$ . O

máximo controle da velocidade ocorre quando  $\beta=1$  e o controle máximo da pressão quando  $\alpha=C_k$ . Quando  $\beta$  tende a dois ou quando  $\alpha$  tende a  $2C_k$ , o método falha.

No mesmo trabalho, Bonvin et al., 2001, apresentam uma formulação EVSS baseada no método GLS reduzido da Eq. (4.86), e fazem uma ligação entre a natureza das formulações. A forma forte utilizada é dada por:

$$\begin{aligned}
-2(\delta + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) + 2\delta \operatorname{div} \mathbf{d} + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_1 - \operatorname{grad} p + \mathbf{b} &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \\
\boldsymbol{\sigma} - 2\mu_2 \mathbf{D}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \\
\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
\mathbf{d} - \mathbf{D}(\mathbf{u}) &= 0 && \text{em } \Omega
\end{aligned} \tag{4.88}$$

A forma fraca fica: Dada  $\mathbf{b}$ , achar  $(\mathbf{d}^h, \boldsymbol{\tau}_1^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \mathbf{Y}_B^h \times \mathbf{Y}_B^h \times P_B^h \times V_{Bg}^h$  tal que:

$$B_{EVSS}(\mathbf{d}^h, \boldsymbol{\tau}_1^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{E}^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F_{EVSS}(\mathbf{E}^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \forall (\mathbf{E}^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \in \mathbf{Y}_B^h \times \mathbf{Y}_B^h \times P_B^h \times V_B^h \tag{4.89}$$

onde

$$\begin{aligned}
B_{EVSS}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}; \mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= (2\delta(\mathbf{d} - \mathbf{D}(\mathbf{u})) - 2\mu_2 \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + \\
&\quad - (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) + (\boldsymbol{\tau}_1 - 2\mu_1 \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{S}) + (\mathbf{d} - \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{E}) \\
F_{EVSS}(\mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= -(\mathbf{b}, \mathbf{v})
\end{aligned} \tag{4.90}$$

A forma estabilizada proposta por Bonvin et al. é dada por: achar  $(\mathbf{d}^h, \boldsymbol{\sigma}^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \mathbf{Y}_B^h \times \mathbf{Y}_B^h \times P_B^h \times V_{Bg}^h$  tal que

$$B_{EVSSs}(\mathbf{d}^h, \boldsymbol{\tau}_1^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{E}^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F_{EVSSs}(\mathbf{E}^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \forall (\mathbf{E}^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \in \mathbf{Y}_B^h \times \mathbf{Y}_B^h \times P_B^h \times V_B^h \tag{4.91}$$

onde

$$\begin{aligned}
B_{EVSSs}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}_1, p, \mathbf{u}; \mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= (2(\mu_2 + \delta) \mathbf{D}(\mathbf{u}) - 2\delta \mathbf{d} + \boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \\
&\quad - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) + \\
&\quad - \sum_{K \in \mathcal{C}^h} \frac{\alpha h_K^2}{2\mu_1} (-2\mu_2 \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad} p - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_1, \operatorname{grad} q)_K - \\
&\quad - \frac{1}{\mu_1} (\boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{S}) + (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{S}) + 2\delta(\mathbf{d}, \mathbf{E}) - 2\delta(\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{E}) \\
F_{EVSSs}(\mathbf{E}, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= (\mathbf{b}, \mathbf{v}) - \sum_{K \in \mathcal{C}^h} \frac{\alpha h_K^2}{2\mu_1} (\mathbf{b}, \operatorname{grad} q)_K
\end{aligned} \tag{4.92}$$

e onde  $\alpha > 0$ . Esta formulação do tipo EVSS modificada (EVSS estabilizada) é equivalente à formulação GLS reduzida para  $\delta = \mu_1 \beta$ . Os termos estabilizadores são adicionados de forma a evitar a necessidade de compatibilização dos espaços de pressão e velocidade, como se requer no método EVSS de Guénette e Fortin, 1995. Também se pode observar que os termos estabilizadores não são adicionados de forma consistente, pois os termos  $2\delta \operatorname{div} \mathbf{d}$  não aparecem dentro do somatório.

#### 4.3.8 Formulação em três campos para problemas de escoamento com advecção

Uma abordagem para o uso de métodos estabilizados em problemas de escoamentos em três campos – tensão-velocidade-pressão – onde se inclui o termo de advecção de quantidade de movimento é dada por Behr et al., 1993. Estes autores consideram um fluido Newtoniano e uma formulação forte semelhante àquela da Eq. (4.57), porém adicionando o termo advectivo de quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} [\operatorname{grad} \mathbf{u}] \mathbf{u} + \operatorname{grad} p - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{b} && \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{\tau} - 2\nu \mathbf{D}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (4.93)$$

Behr et al., 1993, propuseram uma formulação estabilizada para o problema variacional e apresentaram uma análise de estabilidade e convergência para a formulação estabilizada do problema homogêneo linearizado. A análise engloba os casos bi e tri-dimensionais, incluindo os mesmos espaços finitos utilizados na análise de Franca e Stenberg, 1991, para o problema de Stokes. Depois, os autores generalizam a formulação estabilizada para o problema não-linear utilizando a equação de Navier-Stokes em três campos, com o qual realizam testes numéricos e obtêm bons resultados. A formulação estabilizada para o problema é dada por: dada  $\mathbf{b}$ , achar a tripla  $(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \mathbf{Y}^h \times P^h \times V_g^h$  tal que:

$$B(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h), \quad (\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \in \mathbf{Y}^h \times P^h \times V^h \quad (4.94)$$

onde

$$\begin{aligned}
B(\boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2\nu} (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{S}) - (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{S}) + (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}(\mathbf{v})) + (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) - ([\operatorname{grad} \mathbf{u}] \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \\
&\quad - (\operatorname{div} \mathbf{u}, \delta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}) - \sigma 2\nu \left( \frac{1}{2\nu} \boldsymbol{\tau} - \mathbf{D}(\mathbf{u}), \frac{1}{2\nu} \mathbf{S} - \mathbf{D}(\mathbf{v}) \right) + \\
&\quad + \sum_{K \in C_h} \tau(\operatorname{Re}_K) ([\operatorname{grad} \mathbf{u}] \mathbf{u} + \operatorname{grad} p - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, -[\operatorname{grad} \mathbf{v}] \mathbf{u} + \operatorname{grad} q - \operatorname{div} \mathbf{S})_K \\
F(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= -(\mathbf{b}, \mathbf{v}) - \sum_{K \in C_h} \tau(\operatorname{Re}_K) (\mathbf{b}, -[\operatorname{grad} \mathbf{v}] \mathbf{u} + \operatorname{grad} q - \operatorname{div} \mathbf{S})_K
\end{aligned} \tag{4.95}$$

onde  $0 < \sigma < 0.5$  e os parâmetros de estabilidade são dados por:

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \beta |\mathbf{u}|_\alpha h_K \xi(\operatorname{Re}_K), \\
\tau(\operatorname{Re}_K) &= \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_\alpha} \xi(\operatorname{Re}_K), \\
\xi(\operatorname{Re}_K) &= \begin{cases} \operatorname{Re}_K, & 0 \leq \operatorname{Re}_K < 1 \\ 1, & \operatorname{Re}_K \geq 1 \end{cases}, \\
\operatorname{Re}_K &= \frac{m_k |\mathbf{u}|_\alpha h_K}{4\nu}, \\
m_k &= \min \{1/3, 2C_k\}.
\end{aligned} \tag{4.96}$$

para  $\beta$  um parâmetro positivo.

Os testes numéricos apresentados no trabalho de Behr et al., 1993, revelam as boas propriedades de estabilidade e convergência desta formulação, para vários números de Reynolds empregados, utilizando elementos de baixa ordem  $Q_1/Q_1/Q_1$ . Posteriormente, os pesquisadores Behr et al., 2004, propuseram uma formulação GLS, baseada nesta formulação, para aproximar escoamentos viscoelásticos em que o tensor gradiente de velocidade é calculado de forma desacoplada das equações de conservação e constitutivas, de forma que os termos estabilizadores, compostos de derivadas de alta ordem da velocidade, sejam representados de forma consistente. Estes autores obtiveram resultados estáveis e satisfatórios para o escoamentos de fluidos de Oldroyd-B.

## 5. METODOLOGIA E RESULTADOS NUMÉRICOS

### 5.1 METODOLOGIA

Nesta sessão, apresenta-se a metodologia utilizada na aproximação numérica dos escoamentos investigados em seguida. Esta metodologia fundamenta-se no conhecimento teórico apresentado nos capítulos anteriores, e objetiva a aproximação numérica via formulação multi-campos de escoamentos de fluidos não Newtonianos.

#### 5.1.1 Equação constitutiva e funções para a viscosidade

A equação constitutiva para o tensor extra de tensão,  $\boldsymbol{\tau}$ , utilizada neste trabalho, é a equação de um fluido puramente viscoso, dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(R_R, II_D)\mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (5.1)$$

onde a viscosidade  $\eta$  pode ser uma função do classificador de escoamentos de Thompson e Souza Mendes, 2005,  $R_R$ , e do segundo invariante do tensor taxa de deformação,  $II_D$  (ver Cap. 2). As funções empregadas nas simulações numéricas apresentadas neste trabalho são:

- Fluido Newtoniano: neste caso, a viscosidade é uma constante:

$$\eta = \mu = \text{constante} \quad (5.2)$$

- Fluido pseudoplástico: a viscosidade é dada pela função de Carreau [Bird et al., 1987]:

$$\eta(II_D) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \left[ 1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (5.3)$$

$$\dot{\gamma} = (2 \text{tr} \mathbf{D}^2)^{1/2}$$

Neste modelo, a viscosidade apresenta dois patamares:  $\eta_0$ , a taxas de deformação muito baixas, e  $\eta_\infty$ , à taxas de deformação muito altas. Considera-se  $\eta_0$  como a viscosidade característica do modelo, i.e.,  $\eta_c = \eta_0$ . O parâmetro  $\lambda$  controla o início do decaimento da viscosidade com a taxa de deformação, enquanto  $n$  ( $n < 1$ ) é o expoente que controla a inclinação da curva de decaimento, como pode-se observar no gráfico da Fig. 5.1, uma curva  $\log(\eta)$  versus  $\log(II_D)$  (onde  $II_D = \text{tr} \mathbf{D}^2$ ),

para um fluido padrão ( $\eta_0=1$ ,  $\eta_\infty=0.1$ ,  $\lambda=10$ ,  $n=0.5$ ) e suas variações: fluido 1 ( $\eta_0=1$ ,  $\eta_\infty=0.1$ ,  $\lambda=0.5$ ,  $n=0.5$ ) e fluido 2 ( $\eta_0=1$ ,  $\eta_\infty=0.1$ ,  $\lambda=10$ ,  $n=0.05$ ).

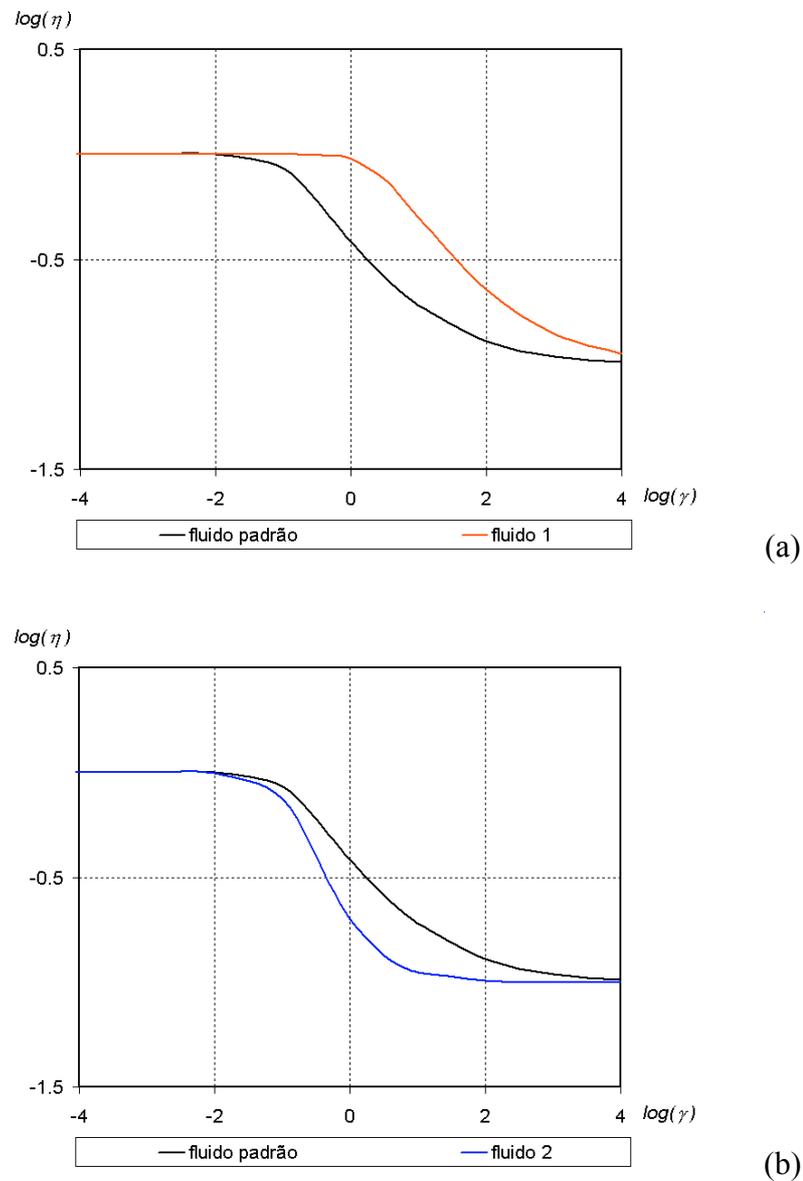


Figura 5.1: Função viscosidade de Carreau. Padrão ( $\lambda=10$ ,  $n=0.5$ ), fluido 1 ( $\lambda=0.5$ ,  $n=0.5$ ) e fluido 2 ( $\lambda=10$ ,  $n=0.05$ ).

Para contabilizar o efeito do parâmetro  $\lambda$  de forma adimensional, Kim et al., 1983, definem o número de Carreau, o qual é dado por:

$$Cu = \lambda \dot{\gamma}_c \quad (5.4)$$

onde  $\dot{\gamma}_c$  é a taxa de deformação característica do escoamento.

- Fluido quasi-Newtoniano sensível ao tipo de escoamento: a viscosidade é dada por uma média geométrica entre a viscosidade em cisalhamento,  $\eta_s$ , e a viscosidade em extensão,  $\eta_{ex}$ .

Estas são funções dadas de forma independente, seguindo o modelo de Carreau [Souza Mendes et al., 1995]:

$$\begin{aligned}\eta &= [\eta_s (II_D)]^{f(R_R)} [\eta_{ex} (II_D)]^{(1-f(R_R))} \\ \eta_s &= \eta_0 (1 + (\lambda_s \dot{\gamma})^2)^{(n_s-1)/2} \\ \eta_{ex} &= \eta_0 (1 + (\lambda_{ex} \dot{\gamma})^2)^{(n_{ex}-1)/2}\end{aligned}\tag{5.5}$$

onde o aumento ou diminuição da viscosidade é dado pelos índices  $n_s$  ( $n_s < 1$ ) e  $n_{ex}$  ( $n_{ex} > 1$ ). Quanto menor  $n_s$ , maior a inclinação da curva de viscosidade e maior a redução da viscosidade em cisalhamento para uma mesma variação de taxa de deformação. Quanto maior  $n_{ex}$ , maior a inclinação da curva de viscosidade em extensão e maior o aumento da viscosidade para uma mesma variação de taxa de extensão. O aumento dos parâmetros  $\lambda$  deslocam os pontos de início de inclinação das curvas. Assim, para estes parâmetros com valores muito baixos em relação às taxas de deformação, o fluido se comporta como um fluido Newtoniano de viscosidade igual a  $\eta_0$ . A medida adimensional deste comportamento é dado pelo número de Deborah para este modelo, definido na forma [Ryssel e Brunn, 1999b]:

$$De_i = \lambda_i \dot{\gamma}_c \tag{5.6}$$

onde  $i$  denota o subscrito  $s$ , para cisalhamento, ou  $ex$ , para extensão. Este número adimensional não representa uma medida dos efeitos elásticos visto que se trata de um modelo puramente viscoso, mas representa uma medida da importância dos efeitos não Newtonianos de pseudoplasticidade e aumento da viscosidade extensional. Na Fig. 5.2, mostra-se um gráfico das duas funções de viscosidade para  $\eta_0=1$ ,  $\eta_\infty=0$ ,  $\lambda_s=\lambda_{ex}=0.75$ ,  $n_{ex}=1.5$ ,  $n_s=0.5$ .

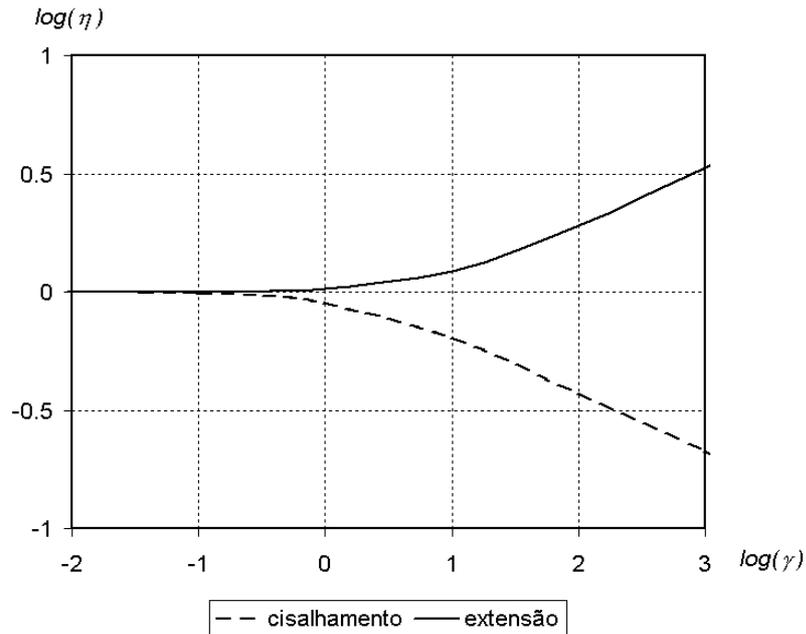


Figura 5.2: Funções de viscosidade de Carreau em cisalhamento e extensão.

Quando  $R_R > 1$ , ou seja, o escoamento se aproxima de movimento de corpo rígido, a função viscosidade se aproxima de zero, como se requer para este tipo de movimento [Souza Mendes et al., 1995].

Ryssel e Brunn, 1999a, sugerem um parâmetro de classificação de escoamentos semelhante ao de Astarita, 1979, mas que evita os valores muito altos para movimentos com baixa taxa de deformação, o que evita que se tenha de lidar com  $R_A \rightarrow \infty$  quando o escoamento tende ao movimento de corpo rígido. Neste caso, seu valor fica limitado entre 0 e 2, e entre 0 e 1 assume valores muito semelhantes a  $R_A$ . A fim de facilitar a implementação numérica, no presente trabalho utiliza-se uma forma semelhante, porém com o classificador de escoamentos de Thompson e Souza Mendes, 2005,  $R_r$ :

$$R_r = \frac{2R_R}{1 + R_R} \quad (5.7)$$

Para a função  $f(R_r)$  utiliza-se a função proposta por Ryssel e Brunn, 1999a:

$$f(R_r) = \frac{3 \operatorname{sen}^4(R_r \pi/2)}{1 + 2 \operatorname{sen}^4(R_r \pi/2)} \quad (5.8)$$

que suaviza o peso de  $R_r$  na média das equações constitutivas. A Fig. 5.3 ilustra o comportamento da função  $f(R_r)$  no intervalo em questão, i.e.,  $0 \leq R_r \leq 2$ .

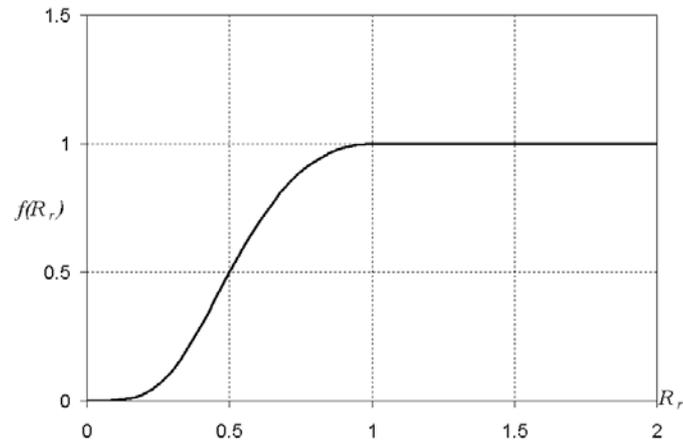


Figura 5.3:  $f(R_r)$  versus  $R_r$

Desta forma, a viscosidade pode ser vista em um gráfico tri-dimensional, sobre um plano formado por  $R_r$  e  $\dot{\gamma}$ , como ilustra a Fig. 5.4:

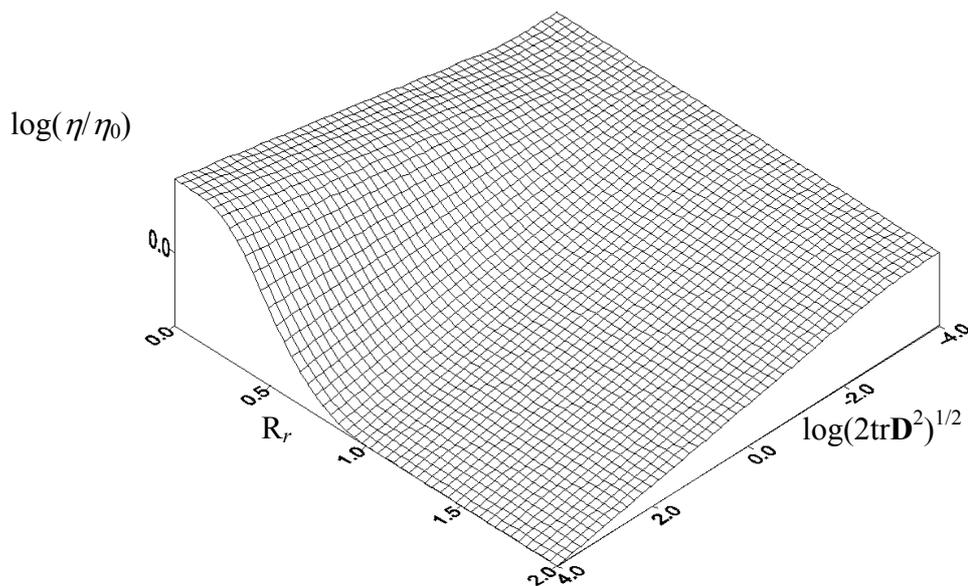


Figura 5.4: Função viscosidade versus  $R_r$  e  $\dot{\gamma}$

A Fig. 5.4 permite que se observe o comportamento da viscosidade com o parâmetro  $R_r$ : para escoamentos mais extensionais a equação constitutiva prevê o aumento da viscosidade com o aumento da taxa de deformação,  $\dot{\gamma}$ . Para  $R_r$  mais próximo a escoamento puramente cisalhante, ocorre a redução da viscosidade. Para  $1 < R_r < 2$ , conforme  $R_r$  aumenta, a equação também prevê o decréscimo da viscosidade como sugerido por Astarita, 1991.

### 5.1.2 Modelo mecânico: duas formulações multi-campos

O modelo mecânico para os escoamentos não Newtonianos abordados no presente trabalho é baseado nas equações de conservação de massa, na equação do movimento (Cap. 2), que representa o balanço de quantidade de movimento, e em uma equação constitutiva para o tensor extra de tensão,  $\boldsymbol{\tau}$ . Esta última foi abordada no item anterior. Duas formulações em três campos são utilizadas para descrever este modelo mecânico, as quais são apresentadas a seguir.

- Formulação em três campos ( $\boldsymbol{\tau}$ - $p$ - $\mathbf{u}$ )– formulação forte:

Esta formulação é dada por: achar os campos  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $p$  e  $\mathbf{u}$  para

$$\begin{aligned}
 [\text{grad } \mathbf{u}]\mathbf{u} + \text{grad } p - \text{div } \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{b} && \text{em } \Omega \\
 \boldsymbol{\tau} - 2\eta\mathbf{D}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \\
 \text{div } \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\
 (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

- Formulação em três campos ( $\mathbf{d}$ - $p$ - $\mathbf{u}$ )– formulação forte:

Esta formulação é dada por: achar os campos  $\mathbf{d}$ ,  $p$  e  $\mathbf{u}$  para

$$\begin{aligned}
 [\text{grad } \mathbf{u}]\mathbf{u} + \text{grad } p - \text{div}(2\eta\mathbf{d}) &= \mathbf{b} && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{d} - \mathbf{D}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \\
 \text{div } \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\
 (-p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{d})\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

### 5.1.3 Formulações estabilizadas de elementos finitos

Nas formulações de elementos finitos para os problemas das Eqs. (5.9) e (5.10), são utilizados os sub-espços:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}^h &= \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^{nsd}, K \in C_h\} \\
 \mathcal{V}_g^h &= \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^{nsd}, K \in C_h, \mathbf{v}(\Gamma_g) = \mathbf{u}_g\} \\
 \mathcal{P}^h &= \{p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in R_l(K), K \in C_h\} \\
 \mathcal{Y}^h &= \{\mathbf{S} \in C^0(\Omega)^{nsd \times nsd} \cap L_2(\Omega)^{nsd \times nsd} \mid \mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}_{ji}, i = 1, \dots, nsd \mid \mathbf{S}|_K \in R_k(K)^{nsd \times nsd}, K \in C_h\}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

E uma formulação estabilizada que pode ser aplicada aos problemas as formulações das Eqs. (5.9) ( $\Phi=\tau$ ) e (5.10) ( $\Phi=\mathbf{d}$ ) onde

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2\eta} \quad \text{se } \Phi=\tau \\ \beta &= 1 \quad \text{se } \Phi=\mathbf{d} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Esta formulação é uma formulação Galerkin mínimos-quadrados baseada na formulação proposta por Behr et al., 1993: Dada  $\mathbf{b}$  e as condições de contorno pertinentes, achar a tripla  $(\Phi^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \mathbf{Y}^h \times P^h \times V_g^h$  tal que:

$$B(\Phi^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h), \quad (\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) \in \mathbf{Y}^h \times P^h \times V^h \quad (5.13)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\Phi, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= (\beta\Phi, \mathbf{S}) - (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{S}) - (p, \text{div } \mathbf{v}) + (\Phi, \mathbf{D}(\mathbf{v})) + (\text{div } \mathbf{u}, q) + \rho([\text{grad } \mathbf{u}]\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &+ (\text{div } \mathbf{u}, \delta_2 \text{div } \mathbf{v}) + \sum_{K \in C_h} \sigma 2\eta (\beta\Phi - \mathbf{D}(\mathbf{u}), \beta\mathbf{S} - \mathbf{D}(\mathbf{v}))_K + \\ &+ \sum_{K \in C_h} \tau(\text{Re}_K) (\rho[\text{grad } \mathbf{u}]\mathbf{u} + \text{grad } p - \text{div}(2\beta\eta\Phi), \rho[\text{grad } \mathbf{v}]\mathbf{u} + \text{grad } q - \text{div}(2\beta\eta\mathbf{S}))_K \quad (5.14) \\ F(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= -(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \sum_{K \in C_h} \tau(\text{Re}_K) (\mathbf{b}, \rho[\text{grad } \mathbf{v}]\mathbf{u} + \text{grad } q - \text{div}(2\beta\eta\mathbf{S}))_K \end{aligned}$$

onde  $0 < \sigma < 0.5$  e os parâmetros de estabilidade são dados por:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= |\mathbf{u}|_\alpha h_K \xi(\text{Re}_K), \\ \tau(\text{Re}_K) &= \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_\alpha} \xi(\text{Re}_K), \\ \xi(\text{Re}_K) &= \begin{cases} \text{Re}_K, & 0 \leq \text{Re}_K < 1 \\ 1, & \text{Re}_K \geq 1 \end{cases}, \\ \text{Re}_K &= \frac{m_k |\mathbf{u}|_\alpha h_K}{4\eta/\rho}, \\ m_k &= \min\{1/3, 2C_k\}, \\ C_k \sum_{K \in C_h} h_K^2 \|\text{div } \mathbf{S}\|_{0,K}^2 &\leq \|\mathbf{S}\|_0^2 \quad \mathbf{S} \in \mathbf{Y}^h. \end{aligned} \quad (5.15)$$

para  $C_k$  uma constante independente de  $C_h$ .

### 5.1.4 Sistema de equações algébricas e algoritmo de solução

As funções de forma para  $\Phi^h$ ,  $\mathbf{u}^h$ ,  $p^h$ ,  $\mathbf{S}^h$ ,  $\mathbf{v}^h$  e  $q^h$  são dadas pelas expansões:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{ij}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{\hat{A} \in C_h} \hat{N}_{\hat{A}}(\mathbf{x}) \Phi_{ij}^{\hat{A}} \\
 u_j^h(\mathbf{x}) &= \sum_{A \in C_h} N_A(\mathbf{x}) u_j^A \\
 p^h(\mathbf{x}) &= \sum_{\tilde{A} \in C_h} \tilde{N}_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) p_{\tilde{A}} \\
 S_{ij}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{\hat{A} \in C_h} \hat{N}_{\hat{A}}(\mathbf{x}) S_{ij}^{\hat{A}} \\
 v_i^h(\mathbf{x}) &= \sum_{A \in C_h} N_A(\mathbf{x}) v_i^A \\
 q^h(\mathbf{x}) &= \sum_{\tilde{A} \in C_h} \tilde{N}_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) q_{\tilde{A}}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

e são substituídas na formulação GLS da Eq. (5.13). As integrações são aproximadas numericamente por quadratura Gaussiana [Hughes, 1987]. O sistema algébrico resultante pode ser visto com o sistema matricial:

$$\mathbf{R}(\mathcal{U}) = \mathbf{0} \tag{5.17}$$

onde  $\mathcal{U}$  é o vetor dos graus de liberdade de  $\Phi^h$ ,  $\mathbf{u}^h$  e  $p^h$ . No caso bi-dimensional planar:

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{11} \\ \Phi_{22} \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

e  $\mathbf{R}(\mathcal{U})$  é dado pelo conjunto de matrizes

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(\mathcal{U}) &= [\mathbf{E} + \mathbf{E}_\tau(\mathbf{u}, \eta) + \mathbf{J}] \Phi + \\
 &\quad + [\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\tau(\mathbf{u}, \eta) + \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{u}, \eta) + \mathbf{J}^T - \mathbf{G}^T] \mathbf{u} + \\
 &\quad - [\mathbf{H} + \mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}, \eta)] + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\tau(\mathbf{u}, \eta)] \mathbf{p}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

onde  $[\mathbf{J}]$  e  $[\mathbf{J}^T]$  são as matrizes da equação constitutiva (acoplamento entre  $\Phi$  e  $\mathbf{u}$ ),  $[\mathbf{E}]$  são as matrizes dos termos de  $\Phi$  na equação constitutiva,  $[\mathbf{N}(\mathbf{u})]$  são matrizes originadas nos termos

advectivos,  $[\mathbf{K}]$  são as matrizes dos termos difusivos de  $\mathbf{u}$ ,  $[\mathbf{H}]$  são as matrizes dos termos de forças de corpo na equação do movimento,  $[\mathbf{G}]$  e  $[\mathbf{G}^T]$  são as matrizes dos termos de pressão e continuidade.

Para o cálculo da solução do sistema, utiliza-se um método baseado no método de Newton para sistemas (Cap. 3 e Dahlquist e Bjorck, 1969). A cada iteração, o método requer a solução de um sistema linear de equações para o cálculo do termo incremental, do tipo

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}^k)\mathcal{A}^{k+1} = \mathbf{R}(\mathbf{u}^k) \quad (5.20)$$

e faz-se então

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \mathcal{A}^{k+1} \quad (5.21)$$

A matriz Jacobiana é dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}^k) = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^k} \quad (5.22)$$

O critério de convergência é dado pelo valor absoluto ou relativo da norma do resíduo  $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ .

No caso dos problemas de aproximação de escoamentos utilizando o método GLS e gerando um sistema matricial como nas Eqs. (4.47) e (4.49), utiliza-se o Algoritmo 2 (Fig. 5.5), para o qual são dados de entrada a estimativa inicial de solução  $\mathbf{u}^0$ ,  $ern$ , o erro máximo admissível para o método de Newton, e  $err$ , o erro máximo admissível entre os valores convergidos das variáveis para cada vez que o campo de viscosidade é atualizado. Um esquema para o Algoritmo 2 é dado pela Fig. 5.5.

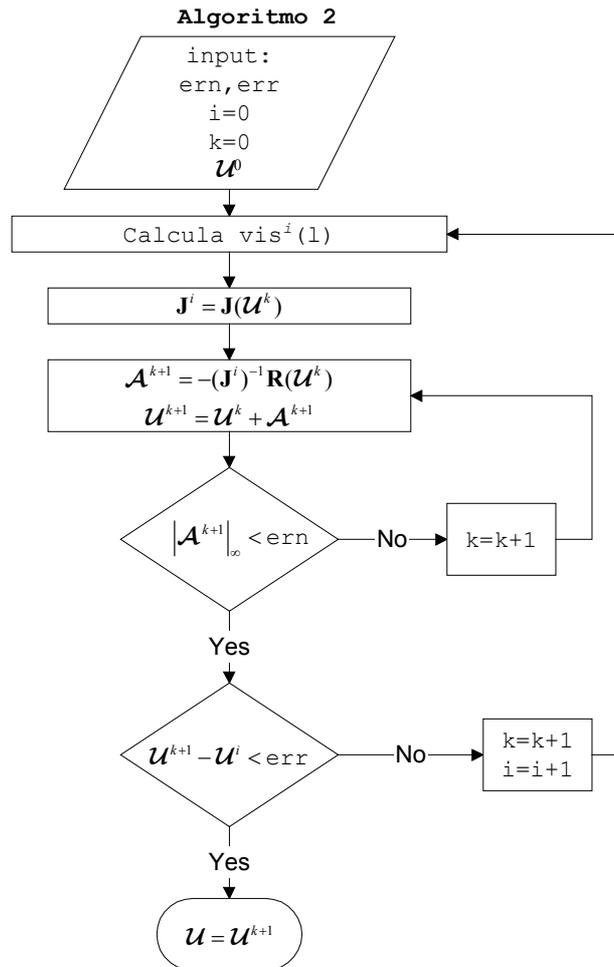


Figura 5.5: Algoritmo 2

## 5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste item, são apresentados e discutidos os resultados numéricos gerados utilizando-se o código computacional GNLFFEM, desenvolvido em linguagem FORTRAN 90 no LAMAC – Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional – do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Os resultados são divididos em seções, como segue:

- Escoamentos Newtonianos em cavidade forçada. Neste item apresenta-se a validação do código computacional para escoamentos laminares de fluidos Newtonianos sujeitos a vários números de Reynolds. São utilizadas ambas as formulações  $\boldsymbol{\tau}$ - $p$ - $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{d}$ - $p$ - $\mathbf{u}$  para diferentes combinações de elementos.
- Escoamentos não Newtonianos em cavidade forçada. Neste item apresenta-se a validação do código computacional para escoamentos laminares de fluidos não Newtonianos com efeitos

de redução ou aumento da viscosidade com a taxa de deformação. Utiliza-se a formulação  $\tau-p-u$  para elementos de igual ordem  $Q_1/Q_1/Q_1$ .

- Escoamentos de fluidos pseudoplásticos em contração planar. Neste item apresentam-se os resultados obtidos para um fluido pseudoplástico com viscosidade modelada pela função de Carreau. São investigados as características da solução como o campo de pressão, os perfis de velocidade, o campo de viscosidade e o papel da variação da viscosidade na dinâmica dos escoamentos. Utiliza-se a formulação  $\tau-p-u$  para elementos de igual ordem  $Q_1/Q_1/Q_1$ .
- Escoamentos de fluidos pseudoplásticos em contração axissimétrica. Neste item apresentam-se os resultados obtidos através da implementação da formulação estabilizada da Eq. (5.13) em coordenadas cilíndricas, considerando-se a simetria na direção azimutal, e empregando elementos de igual ordem  $Q_1/Q_1/Q_1$  para a formulação  $\tau-p-u$ . É utilizada uma função viscosidade pseudoplástica (modelo Carreau). São investigados as características da solução como o campo de pressão, os perfis de velocidade, o campo de viscosidade e o papel da variação da viscosidade na dinâmica dos escoamentos.
- Escoamento puramente cisalhante de Poiseuille. Investiga-se a implementação da formulação da Eq. (5.13) utilizando o modelo de fluido quasi-Newtoniano sensível ao tipo de escoamento. Investiga-se a implementação do classificador de escoamentos  $R_r$  e os efeitos da redução de viscosidade nos campos de velocidade, taxa de deformação e viscosidade.
- Escoamentos quasi-Newtonianos através de uma contração abrupta com quina arredondada. Utiliza-se a formulação  $d-p-u$ , com elementos  $Q_2/Q_1/Q_2$ . Investiga-se a dinâmica de escoamentos de fluidos sensíveis à cinemática em um escoamento misto, no qual, longe a jusante e a montante da contração, tem-se escoamento puramente cisalhante, e, junto à contração, escoamento elongacional planar. São estudados os efeitos da redução e aumento da viscosidade nas diferentes regiões de um mesmo escoamento. A quina da contração é arredondada de forma a suavizar os gradientes. Apenas são estudados números de Deborah baixos (da ordem de 0.6 devido à dificuldade de convergência inerente ao modelo quasi-Newtoniano).
- Escoamentos quasi-Newtonianos através de uma contração abrupta. Utiliza-se a formulação  $d-p-u$ , com elementos  $Q_2/Q_1/Q_2$ . Investiga-se a dinâmica de escoamentos de fluidos sensíveis à cinemática em um escoamento misto, com regiões de cisalhamento e extensão. São estudados os efeitos da redução e aumento da viscosidade. Nesse caso, os números de Deborah atingidos são também baixos, principalmente para o caso de fluido misto, com pseudoplasticidade em cisalhamento e dilatação extensional (da ordem de 0.4).

### 5.2.1 Escoamentos Newtonianos em cavidade forçada

O problema do escoamento em cavidade quadrada foi construído da maneira usual [Ghia et al., 1982], como na Fig 5.6. As condições de contorno impostas são as condições de impermeabilidade e não-deslizamento nas paredes (linhas hachuradas na Fig. 5.6) e uma velocidade horizontal conhecida na fronteira superior,  $u_0$ . O Número de Reynolds é dado por:

$$\text{Re} = \frac{\rho u_0 L}{\mu} \quad (5.23)$$

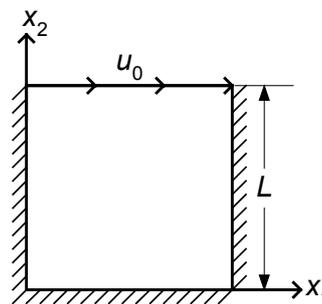


Figura 5.6: Esquema do problema de escoamento em cavidade

A aproximação da Eq. (5.13) é utilizada com os seguinte elementos e variáveis:

- Aproximação por elementos do tipo  $Q_1/Q_1/Q_1$  para a formulação em três campos  $\tau-p-u$ .
- Aproximação por elementos do tipo  $Q_1/Q_1/Q_1$  para a formulação em três campos  $d-p-u$ .
- Aproximação por elementos do tipo  $Q_2/Q_1/Q_2$  para a formulação em três campos  $d-p-u$ .

Foram investigados valores para Re de 1 a 400, e os resultados comparados com Ghia et al., 1982, Sreiber e Keller, 1983, Ku e Hatzivramidis, 1985, Sivaloganathan e Shaw, 1988, Jurjevic, 1999, e resultados obtidos no mesmo código GNLFEM porém utilizando a formulação clássica de Galerkin para o problema em dois campos ( $u-p$ ) em uma malha de  $40 \times 40$  elementos  $Q_2/Q_1$ . Foram comparados o perfil de velocidade horizontal e de pressão na linha  $x_1=0.5L$ , e também a posição do olho do vórtice principal. Os resultados denotados por M1 representam resultados utilizando malhas com  $40 \times 40$  elementos para os casos a e b, e  $20 \times 20$  elementos para o caso c. Os resultados denotados por M2 representam resultados utilizando malhas com  $80 \times 80$  elementos para os casos a e b, e  $40 \times 40$  elementos para o caso c.

Em todos os resultados foram observados campos de tensão ou taxa de deformação, velocidade e pressão estáveis e fisicamente realistas, de acordo com os esperados para este problema: a formação do vórtice principal e de dois vórtices secundários nos cantos inferiores da cavidade, assim como os picos de pressão na tampa da cavidade e a depressão da pressão no seu

centro. Os campos de tensão ou taxa de deformação obtidos apresentaram concordância com campos obtidos via pós-processamento de resultados do método de Galerkin, e também com resultados da literatura [Behr et al., 1993]. A Fig. 5.7 mostra a estabilidade do campo de pressão através do gráfico de sua topografia ao longo do domínio da cavidade, para  $Re=400$ . O resultado para o caso b é idêntico ao do caso a e por isso não é mostrado.

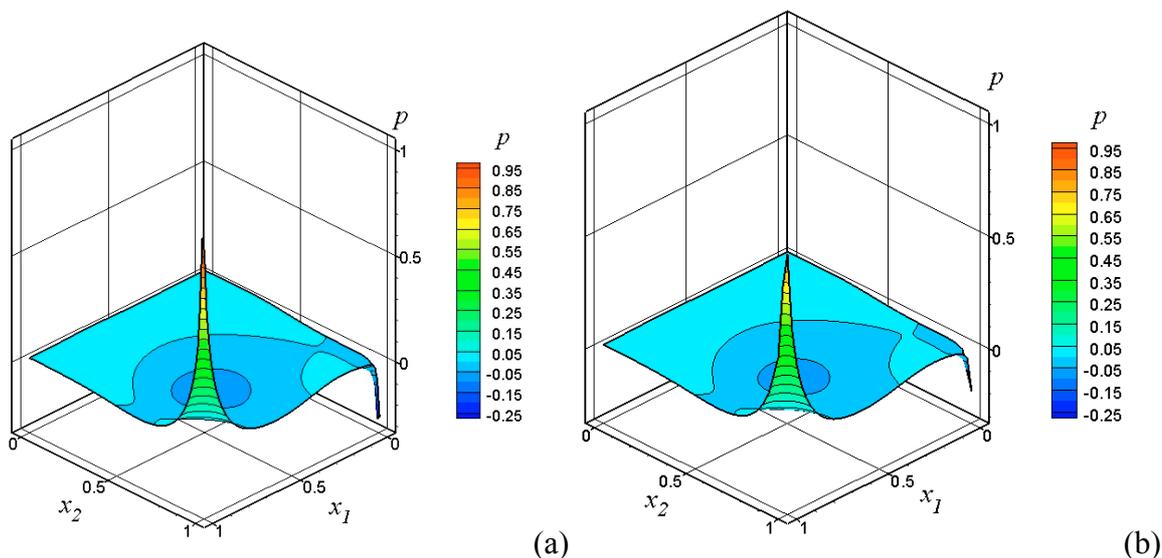
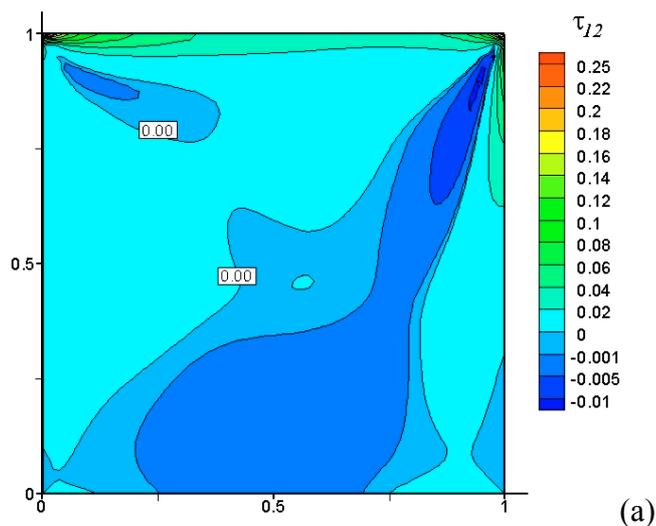


Figura 5.7: Elevação da pressão para os casos a e c.

Nota-se uma leve discrepância entre os resultados devida ao número de pontos nodais da malha ser diferente para os dois casos, mas preserva-se a estabilidade em ambos.

A Fig. 5.8 ilustra os campos de  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{11}$  e  $\tau_{22}$  para o caso a, sendo que os resultados para os casos b e c foram visualmente idênticos e por isso não são mostrados.



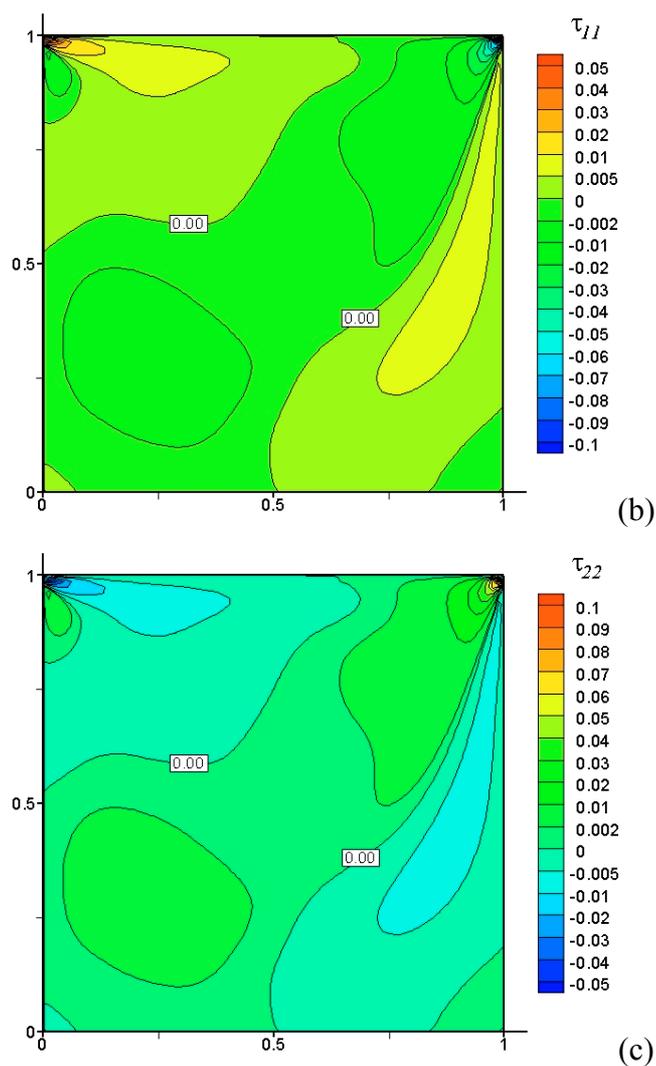


Figura 5.8: Campos de  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{11}$  e  $\tau_{22}$  para o caso a

A Fig. 5.9 apresenta as linhas de corrente obtidas através do pós-processamento do campo de velocidade para  $Re=1$  e  $400$ . Observou-se a concordância qualitativa e quantitativa com os resultados obtidos via método de Galerkin, formulação  $\mathbf{u}-p$ , o que pôde ainda ser verificado na comparação com outros autores como se discute a seguir.

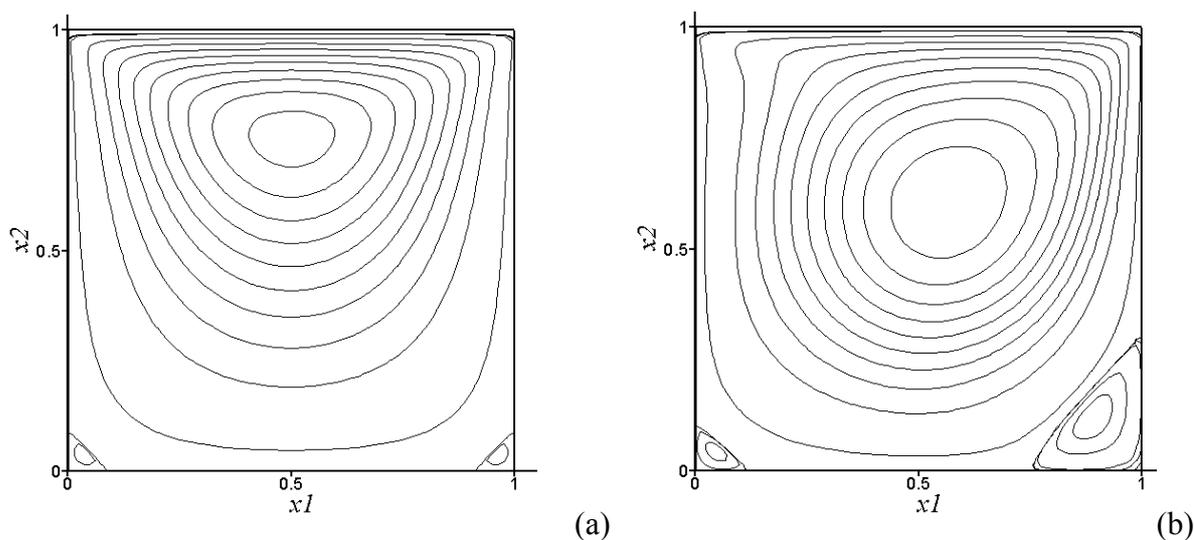
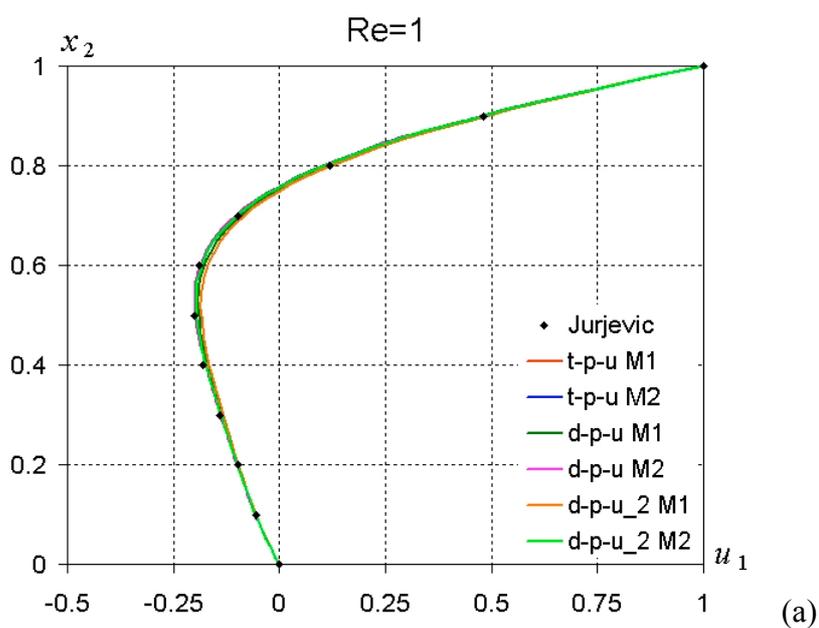


Figura 5.9: Linhas de corrente para (a)  $Re=1$  e (b)  $Re=400$

A Fig. 5.10 mostra gráficos da velocidade horizontal  $u_1$  versus a posição vertical para  $x_1$  constante,  $x_1=0.5L$ , para  $Re=1, 100$  e  $400$ . Os resultados das formulações multi-campos são comparados aos da literatura.



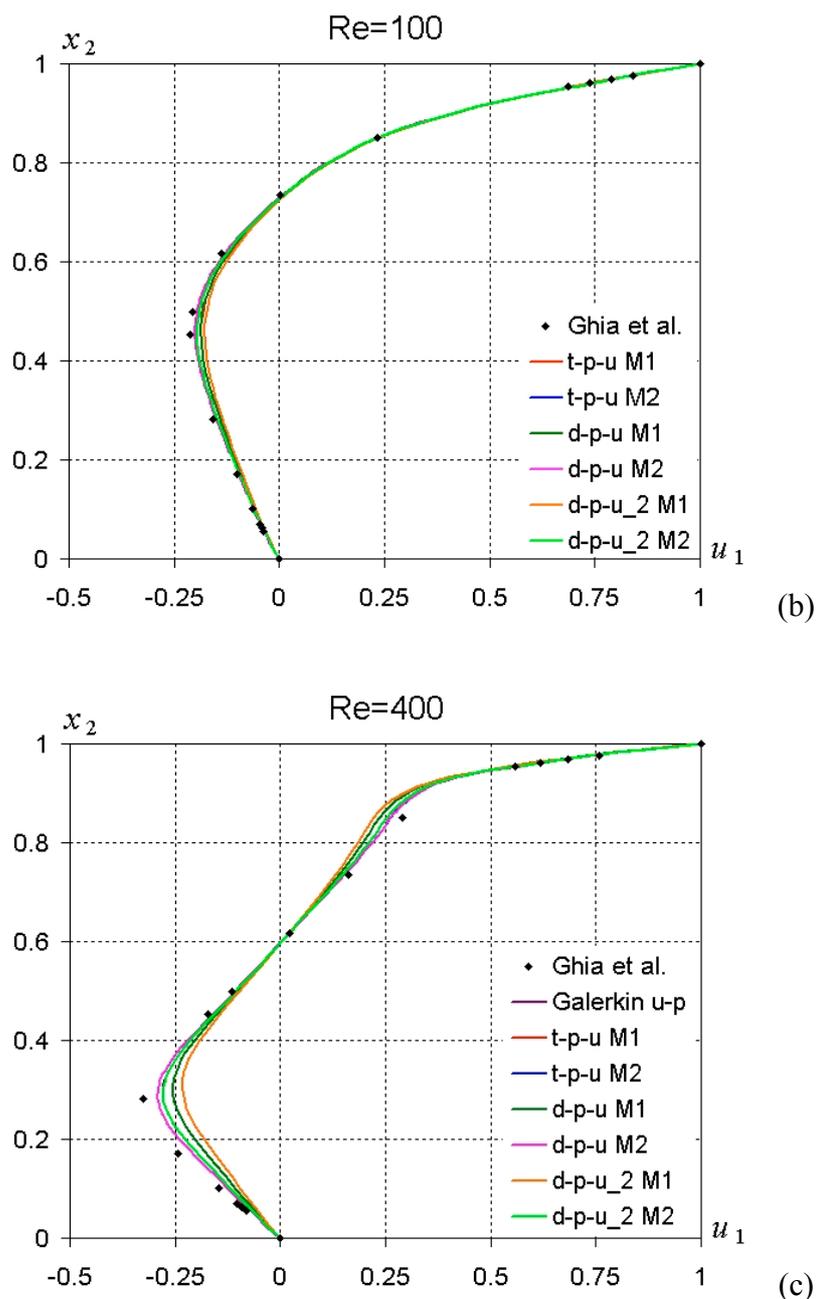


Figura 5.10: Velocidade horizontal versus posição em  $x_2$ . (a)  $Re=1$ , (b)  $Re=100$ , (c)  $Re=400$ .

Observa-se a concordância dos perfis com a literatura. A diferença entre os resultados deve-se a alguns fatores. O primeiro é o refinamento da malha, que causa as diferenças entre os resultados das malhas M1 e M2. O segundo é a diferença da interpolação, que faz com que os casos a e b apresentem os mesmos resultados para a mesma malha, enquanto que o caso c é diferenciado, pois para um mesmo número de nós de velocidade e taxa de deformação, o número de nós para a pressão é bem menor neste caso. O resultado obtido via método de Galerkin em dois campos é praticamente o mesmo do caso c, M2, sendo que para ambos as malhas de velocidade e pressão são idênticas ( $40 \times 40$  elementos  $Q_2/Q_1$ ).

A Fig. 5.11 mostra os perfis de pressão na linha central ( $x_1=0.5L$ ) para  $Re=400$ .

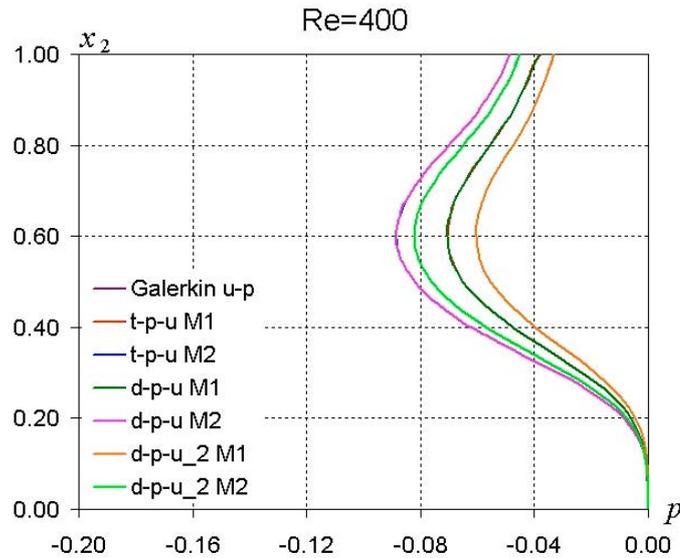


Figura 5.11: Perfis de pressão na linha média horizontal.

Observa-se que, para as formulações a e b, os resultados são idênticos, enquanto que a formulação c apresenta um perfil que sobrepõe aquele do resultado da formulação do Galerkin. Na literatura [Hannani et al., 1995], foram encontrados resultados semelhantes, mas nenhuma conclusão quanto aos valores exatos que a pressão deve assumir. Os resultados deste trabalho são da mesma ordem de grandeza daqueles apresentados por Hannani et al., 1995, sendo assim considerados aceitáveis.

Na Tab. 5.1, são listadas as posições do olho do vórtice para  $Re=100$  e  $Re=400$  obtidas com as formulações acima descritas e também valores da literatura.

Tabela 5.1: Posição do olho do vórtice no problema da cavidade.

Re	Referência	$x_1$	$x_2$
100	Screiber e Keller, 1983	0.61667	0.74167
	Ku e Hatzivramidis, 1985	0.62109	0.73752
	Sivaloganathan e Shaw, 1988	0.61	0.73
	GNLFEM Galerkin $\mathbf{u-p}$	0.619	0.735
	GNLFEM $\boldsymbol{\tau-p-u}$ GLS M1	<b>0.619</b>	<b>0.733</b>
	GNLFEM $\boldsymbol{\tau-p-u}$ GLS M2	<b>0.618</b>	<b>0.736</b>
	GNLFEM $\mathbf{d-p-u}$ GLS M1	<b>0.619</b>	<b>0.733</b>
	GNLFEM $\mathbf{d-p-u}$ GLS M2	<b>0.618</b>	<b>0.736</b>
	GNLFEM $\mathbf{d-p-u}$ (2) GLS M1	<b>0.620</b>	<b>0.732</b>
	GNLFEM $\mathbf{d-p-u}$ (2) GLS M2	<b>0.618</b>	<b>0.736</b>
400	Ku e Hatzivramidis, 1985	0.55463	0.60415
	Sivaloganathan e Shaw, 1988	0.56	0.61
	GNLFEM Galerkin $\mathbf{u-p}$	0.564	0.606
	Jurjevic, 1999	0.564	0.6055

GNLFEM $\tau$ - $p$ - $u$ GLS M1	<b>0.570</b>	<b>0.605</b>
GNLFEM $\tau$ - $p$ - $u$ GLS M2	<b>0.561</b>	<b>0.605</b>
GNLFEM $d$ - $p$ - $u$ GLS M1	<b>0.570</b>	<b>0.605</b>
GNLFEM $d$ - $p$ - $u$ GLS M2	<b>0.561</b>	<b>0.605</b>
GNLFEM $d$ - $p$ - $u$ (2) GLS M1	<b>0.577</b>	<b>0.606</b>
GNLFEM $d$ - $p$ - $u$ (2) GLS M2	<b>0.564</b>	<b>0.605</b>

Nesta análise, também é observada uma boa concordância com os dados da literatura, cujos resultados diferem entre si na ordem de 1%.

### 5.2.2 Escoamentos não Newtonianos em cavidade forçada

Neste item, são estudados escoamentos puramente viscosos, não Newtonianos, em uma cavidade como no item anterior (Fig 5.6). Para a função viscosidade, utiliza-se o modelo *power-law* [Bird *et al.*, 1987], dado por:

$$\eta = \eta_0 \dot{\gamma}^{(n-1)} \quad (5.24)$$

Com esta função, é possível modelar os comportamentos dilatante, utilizando  $n > 1$ , e pseudoplástico, com  $n < 1$ . O Número de Reynolds é dado por:

$$\text{Re} = \frac{\rho L^n}{\eta_0 u_0^{n-2}} \quad (5.25)$$

Foi utilizada a aproximação por elementos do tipo  $Q_1/Q_1/Q_1$  para a formulação em três campos  $\tau$ - $p$ - $u$ . Foram investigados valores para Re de 50 a 500,  $n$  de 0.25 a 1.5, e os resultados comparados com Bell e Surana, 1994, e Neofytou, 2005. Foram observados campos de tensão, velocidade e pressão numericamente estáveis e fisicamente realistas. Foram analisados o perfil de velocidade horizontal na linha  $x_1=0.5L$ , e o perfil de velocidade vertical na linha  $x_2=0.5L$ . Foram também estudados os efeitos da viscoplasticidade e da dilatância na forma das linhas de corrente dos escoamentos.

A Fig. 5.12 mostra a estabilidade do campo de pressão através do gráfico de sua topografia ao longo do domínio da cavidade, para (a) Re=50,  $n=1.5$ ; e (b) Re=500,  $n=0.5$ .

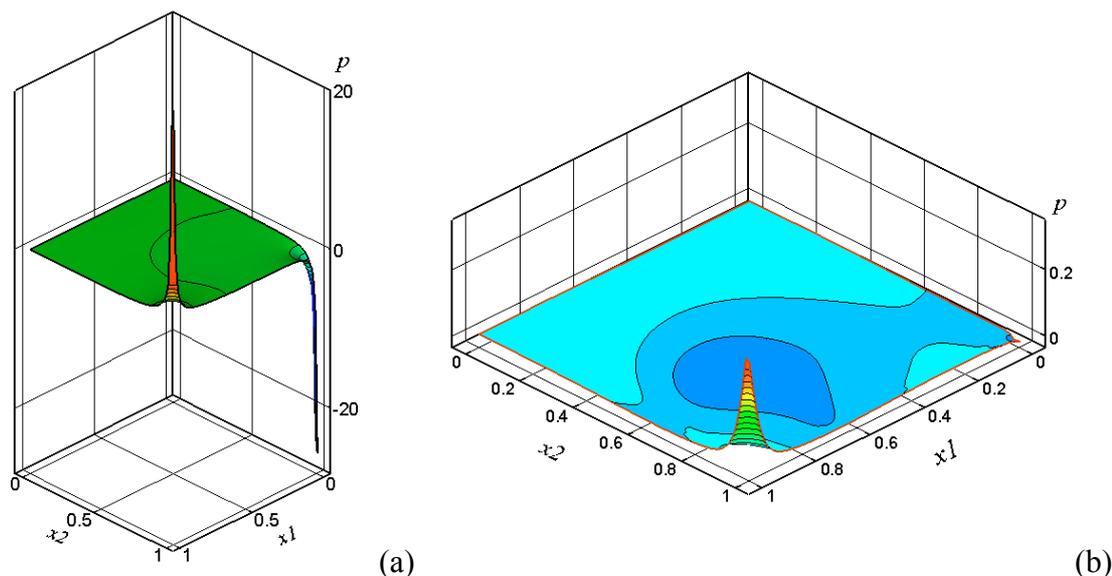
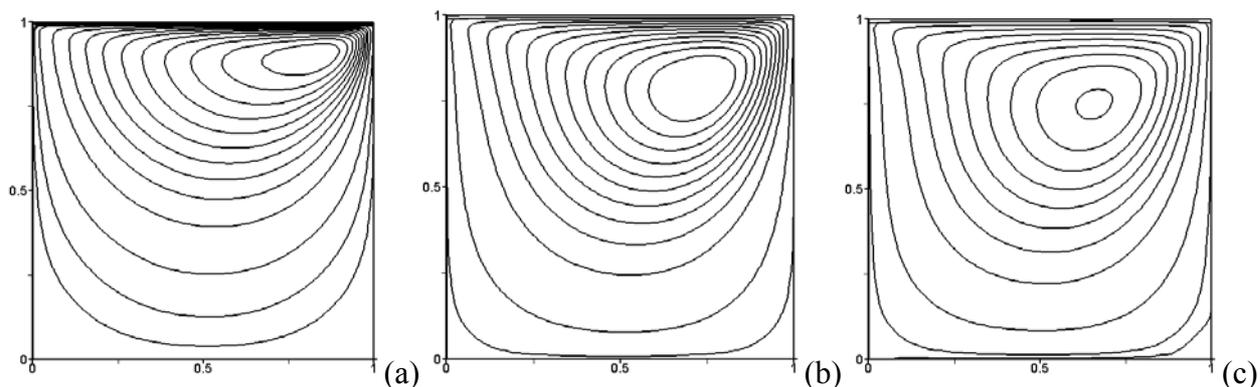


Figura 5.12: Elevação da pressão (a)  $Re=50$ ,  $n=1.5$ ; e (b)  $Re=500$ ,  $n=0.5$ .

A Fig. 5.13 apresenta as linhas de corrente obtidas através do pós-processamento do campo de velocidade para  $Re=100$  e diversos  $n$ . As figuras seguintes apresentam as linhas de corrente para  $n$  constante, variando  $Re$  entre 50 e 500: Fig. 5.14 para  $n=0.5$ , e Fig. 5.15 para  $n=1.5$ . Na Fig. 5.13, observa-se que, para um  $Re$  fixo, o efeito da pseudoplasticidade é deslocar o centro do vórtice para a região superior à direita na cavidade, como nos itens (a), (b) e (c), em comparação com o caso Newtoniano (d). Observa-se também que para estes casos pseudoplásticos não ocorre a formação do vórtice nos cantos inferiores, mas sim uma zona de estagnação. O efeito da dilatância, ao contrário, é levar o centro do vórtice a uma posição mais central na cavidade, mais à esquerda, como no item (e). Em compensação, neste escoamento o fluido dilatante permite a formação de maiores vórtices nos cantos inferiores.



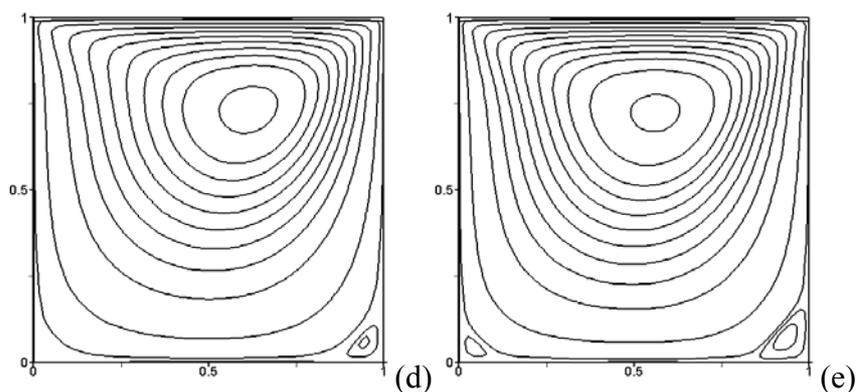


Figura 5.13: Linhas de corrente para  $Re=100$ . (a)  $n=0.25$ , (b)  $n=0.5$ , (c)  $n=0.75$ , (d)  $n=1$ , (e)  $n=1.5$ .

Na Fig. 5.14, observa-se que o fluido pseudoplástico com  $n=0.5$  causa o deslocamento do olho do vórtice para o canto superior direito para todos os números de Reynolds, quando o padrão de linhas de corrente é comparado ao padrão Newtoniano a mesmo  $Re$ . No entanto, não se pode dizer que o vórtice é deslocado conforme o número de Reynolds diminui, pois há uma inversão deste padrão para  $Re$  menor que 100.

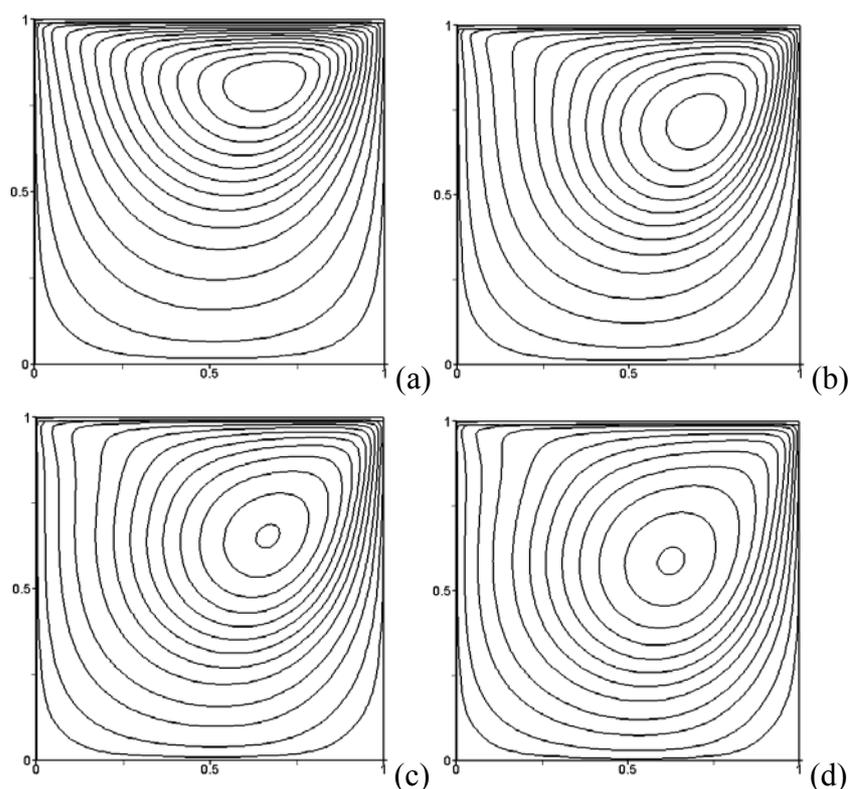


Figura 5.14: Linhas de corrente para  $n=0.5$ . (a)  $Re=50$ , (b)  $Re=200$ , (c)  $Re=300$ , (d)  $Re=500$ .

Na Fig. 5.15, observa-se que o fluido dilatante com  $n=1.5$  causa o deslocamento do olho do vórtice para a esquerda e para baixo, quando compara-se com escoamentos de fluidos Newtonianos a mesmo  $Re$ . O aumento do número de Reynolds causa o deslocamento do olho do

vórtice para longe do topo da cavidade; e para a esquerda quando  $Re$  é menor que 200 e para a direita quando  $Re$  é maior que 200.

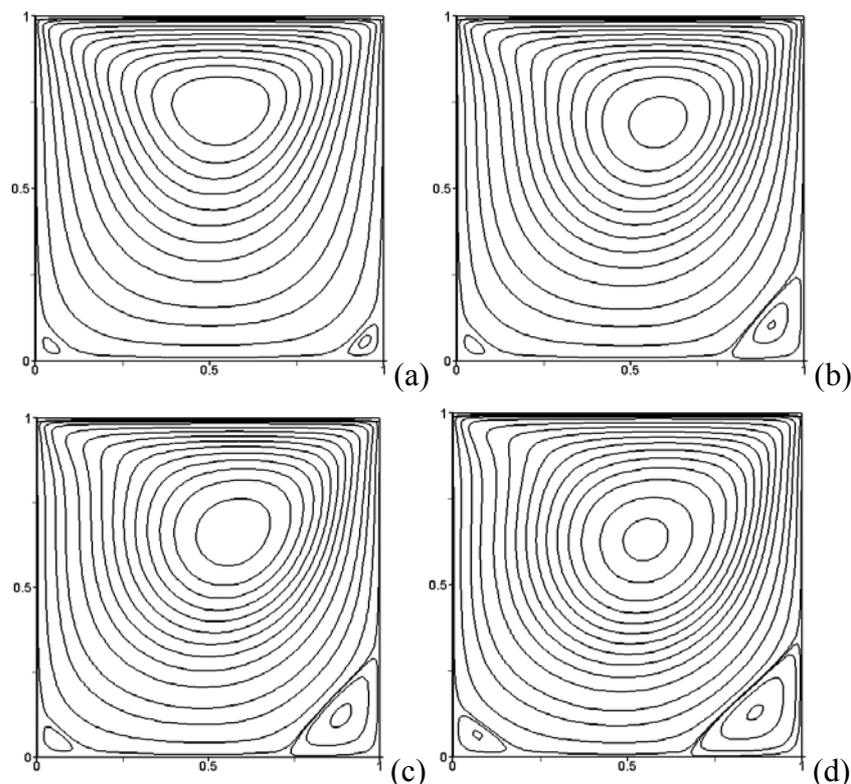


Figura 5.15: Linhas de corrente para  $n=1.5$ . (a)  $Re=50$ , (b)  $Re=200$ , (c)  $Re=300$ , (d)  $Re=500$ .

A posição do olho do vórtice nos padrões de linhas de corrente mostrados acima são melhor interpretados utilizando-se os gráficos da Fig. 5.16. No item (a), a posição do olho do vórtice para cada  $n$  e  $Re$  é ilustrada em detalhe nas coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  a cavidade, enquanto no item (b) se dá uma idéia mais geral destas posições na geometria do problema. Observa-se que, para qualquer  $n$ , o decréscimo de  $Re$  desloca o olho do vórtice para uma posição superior na cavidade. Para  $Re$  mais altos, esta posição é ainda deslocada para a direita, enquanto para  $Re$  mais baixos, ela é deslocada para a esquerda. Comparando a posição do olho do vórtice entre os fluidos dilatante, Newtoniano e pseudoplástico, pode-se afirmar, conforme Neofytou, 2005, que para um mesmo  $Re$ , quanto mais pseudoplástico o fluido, mais próxima a posição do olho do vórtice ao canto superior direito, apenas para baixos números de Reynolds ( $Re < 100$ ).

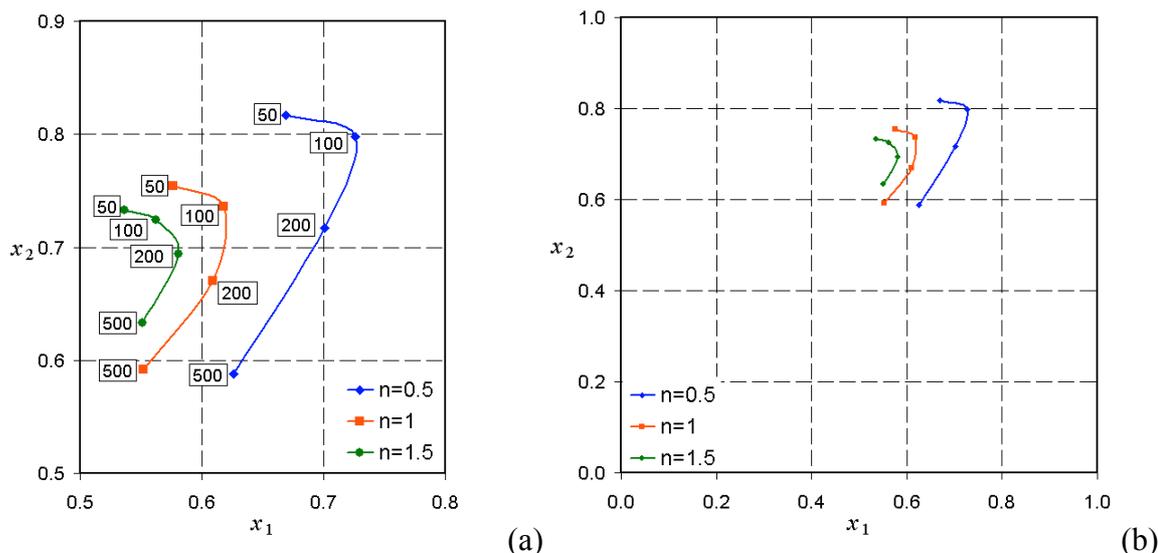
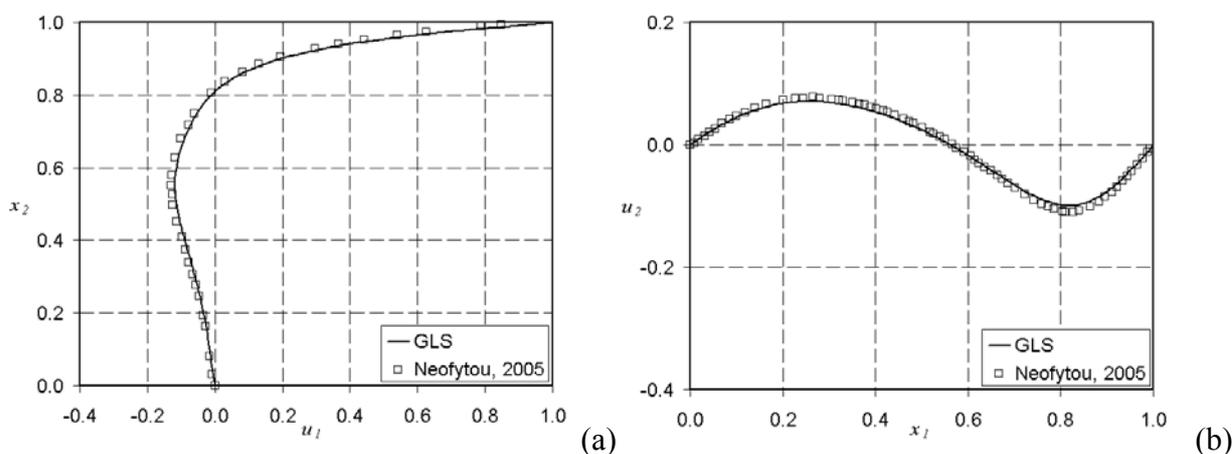


Figura 5.16: Posição do olho do vórtice. (a) detalhe com as etiquetas para Re, (b) posição das curvas na cavidade.

Na Fig. 5.17, são comparados os resultados utilizando o método GLS deste trabalho com os resultados publicados por Neofytou, 2005. São avaliados os perfis de velocidade horizontal  $u_1$  versus a posição vertical para  $x_1$  constante,  $x_1=0.5L$  e de velocidade vertical  $u_2$  versus a posição vertical para  $x_2$  constante,  $x_2=0.5L$ , para  $n=0.5$  e  $n=1.5$ ; com  $Re=50$  e  $Re=100$ , respectivamente. Observa-se uma boa concordância dos resultados.



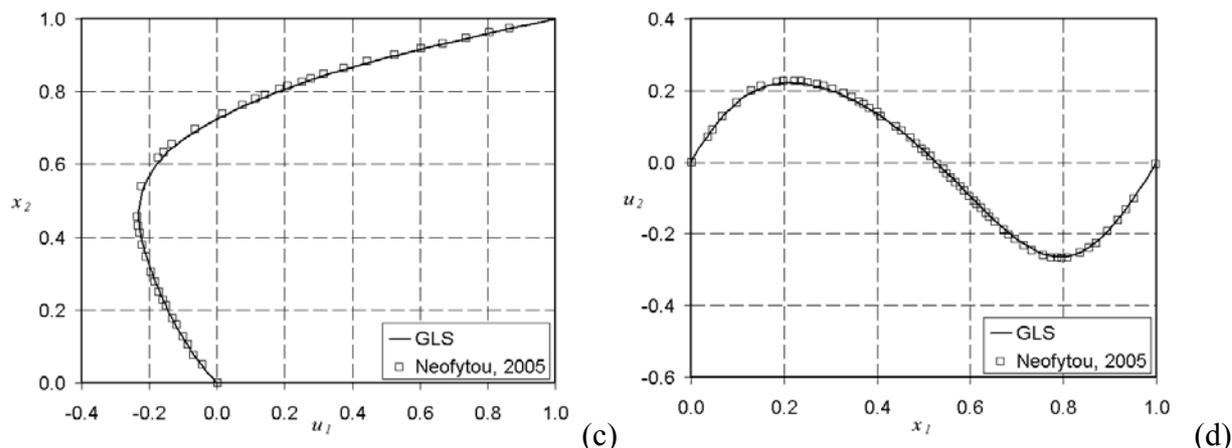


Figura 5.17: (a) Velocidade horizontal versus  $x_2$ ,  $Re=50$ ,  $n=0.5$ , (b) velocidade vertical versus  $x_1$ ,  $Re=50$ ,  $n=0.5$ , (c) velocidade horizontal versus  $x_2$ ,  $Re=100$ ,  $n=1.5$ , (d) velocidade vertical versus  $x_1$ ,  $Re=100$ ,  $n=1.5$ .

A Fig. 5.18 mostra gráficos da velocidade horizontal  $u_1$  versus a posição vertical para  $x_1$  constante,  $x_1=0.5L$ , em (a), e velocidade vertical  $u_2$  versus a posição vertical para  $x_2$  constante,  $x_2=0.5L$ , em (b), para  $Re=100$ . Observa-se que, quanto maior o  $n$ , maiores os valores das velocidades máximas e mínimas. Isto ocorre porque, conforme se observa no padrão de linhas de corrente das Figs. 5.8, para menores  $n$ 's, a recirculação ocorre muito próxima ao topo da cavidade e o escoamento no restante do domínio é muito lento. Pode-se perceber no item (a) da Fig. 5.18 que, próximo ao topo, os fluidos de menor  $n$  apresentam valores absolutos maiores para a velocidade.

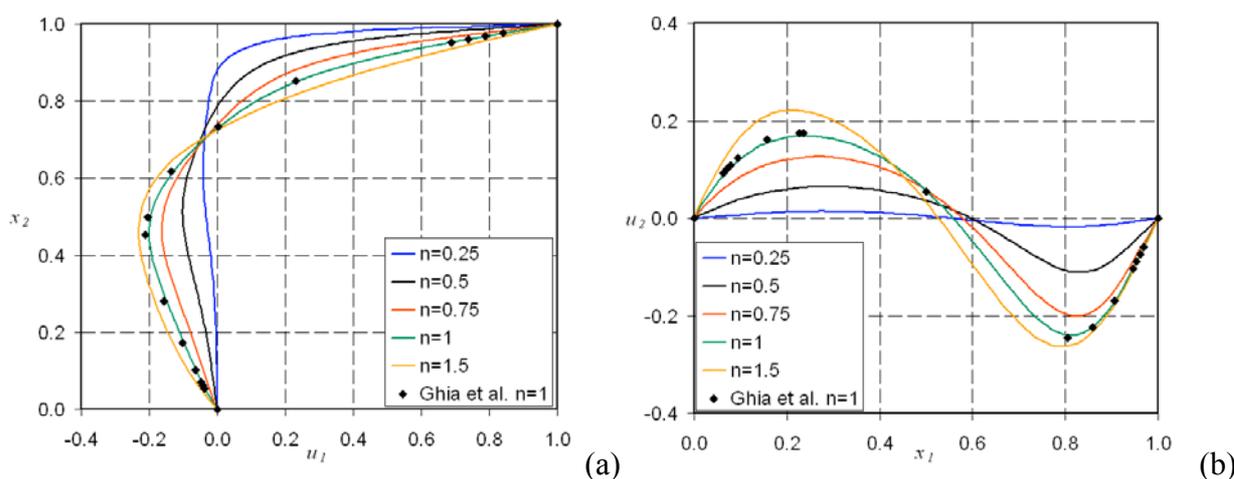


Figura 5.18: (a) Velocidade horizontal versus  $x_2$ , (b) velocidade vertical versus  $x_1$ ,  $Re=100$ .

Nas Figs. 5.19 e 5.20, observa-se que o aumento de  $Re$  aumenta os gradientes de  $u_1$  e  $u_2$ , também aumentando os seus valores de pico. Isto ocorre devido aos efeitos viscosos de difusão da quantidade de movimento quando o número de Reynolds é baixo. Nos casos de maiores  $Re$ , há a redução dos efeitos viscosos e são possíveis gradientes mais acentuados.

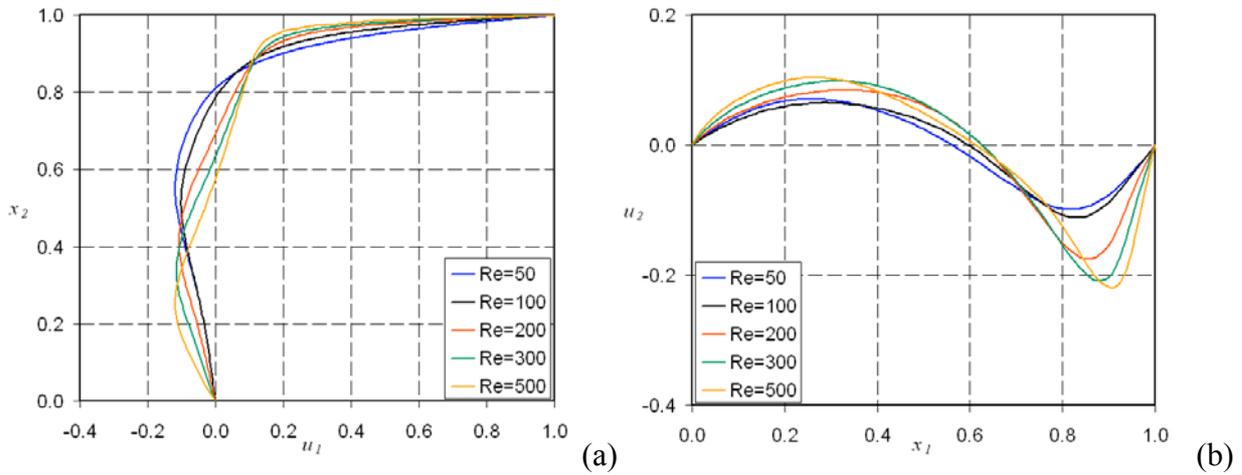


Figura 5.19: (a) Velocidade horizontal versus  $x_2$ , (b) velocidade vertical versus  $x_1$ ,  $n=0.5$ .

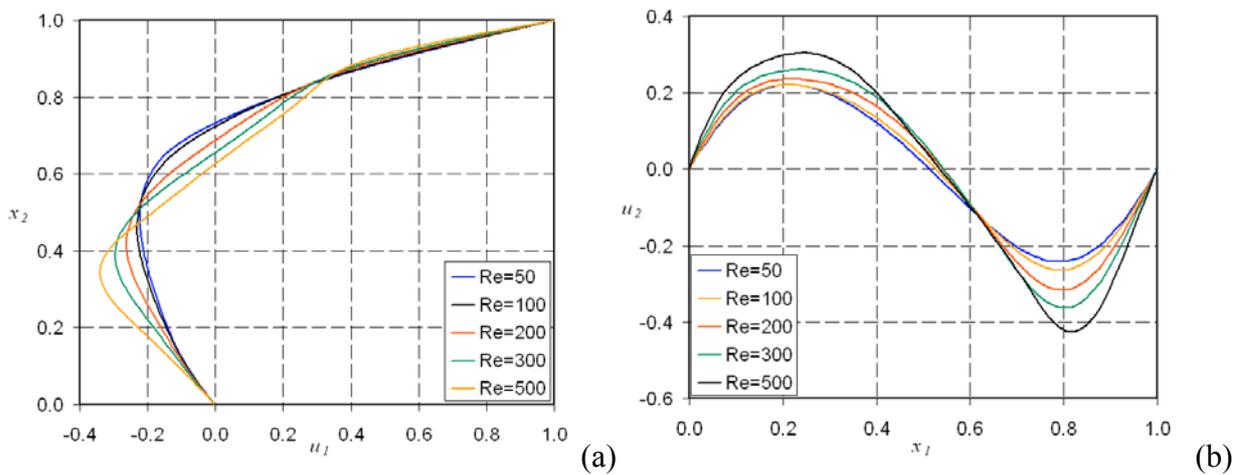


Figura 5.20: (a) Velocidade horizontal versus  $x_2$ , (b) velocidade vertical versus  $x_1$ ,  $n=1.5$ .

Na Tab. 5.2 são comparados com os resultados de Neofytou, 2005, o valor mínimo para  $u_1$  na linha  $x_1=0.5L$  e os valores máximo e mínimo para  $u_2$  na linha  $x_1=0.5L$ , para  $Re=100$  e  $n=1.5$ . Observa-se uma boa concordância dos resultados, apesar daqueles obtidos com a formulação GLS apresentarem-se mais difusivos, i.e., com menores picos.

Tabela 5.2: Valores mínimos e máximos das componentes da velocidade nas linhas médias da cavidade

	$u_1$ min	$u_2$ max	$u_2$ min
Neofytou, 2005	-0.2393	0.2278	-0.2683
GLS	-0.2308	0.2213	-0.2632
Erro (% de $u_0$ )	0.85	0.66	0.51

### 5.2.3 Escoamentos de fluidos pseudoplásticos em contração planar

Neste item, estuda-se escoamentos de fluidos pseudoplásticos cuja viscosidade é dada pela função de Carreau (Eq. (5.3)), através de uma contração 4:1. É utilizada a formulação em três campos  $\tau$ - $p$ - $u$ . Este problema é dado como na Fig. 5.21, com comprimento característico  $L$  e velocidade  $u_0$ . Os comprimentos de entrada e saída são grandes o suficiente para assegurar o desenvolvimento do escoamento tanto a montante quanto a jusante da contração ( $16L$  a montante e  $9L$  a jusante). Levou-se em conta a simetria do problema, e a geometria foi construída com somente metade do domínio do problema. Os números de Reynolds e Carreau são calculados com estas grandezas e os parâmetros  $\lambda$  e  $\eta_0$  do modelo de Carreau.

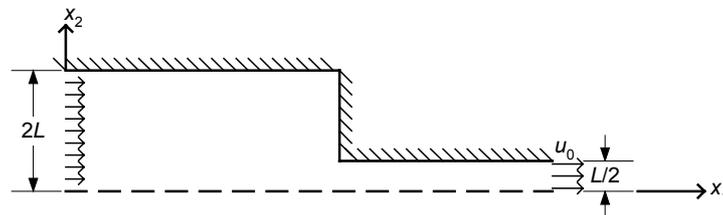


Figura 5.21: Colocação do problema de escoamento pseudoplástico em contração planar.

A análise é realizada sobre dois valores de números de Reynolds para fluidos Newtonianos,  $Re=1$  e  $Re=100$ , e dois valores de números de Carreau (Eq. (5.4)),  $Cu=0.5$  e  $Cu=50$ , com  $n=0.1$  e  $n=0.5$  para fluidos pseudoplásticos escoando a  $Re=1$ . Testes para a verificação da independência de malha foram realizados para 3 malhas de elementos do tipo  $Q_1/Q_1/Q_1$ : 3120 (M1), 5362 (M2) e 7154 (M3) elementos. Os resultados foram considerados independentes da malha para a malha M2.

A formulação GLS produziu resultados numéricos estáveis em todos os casos. A Fig. 5.22 mostra a superfície de pressão para um fluidos Newtonianos com  $Re=1$  e  $Re=100$ .

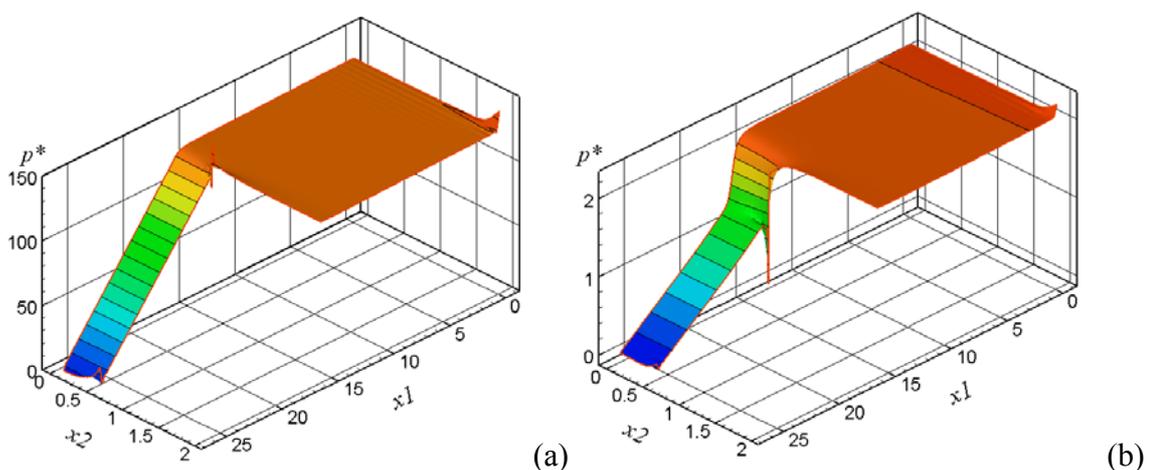


Figura 5.22: Elevação da pressão para (a)  $Re=1$  e (b)  $Re=100$ .

A Fig. 5.23 mostra um detalhe junto à contração dos campos de viscosidade adimensional,  $\eta^* = \eta/\eta_0$ , obtidos para os seguintes casos, onde foram variados os números de Carreau (através do parâmetro  $\lambda$ ) e o parâmetro  $n$ , para fluidos a  $Re=1$ : (a)  $Cu=0.5$ ,  $n=0.5$ , (b)  $Cu=0.5$ ,  $n=0.1$ , (c)  $Cu=50$ ,  $n=0.5$  e (d)  $Cu=50$ ,  $n=0.2$ . Estes campos mostraram-se com as características esperadas de mais baixos valores de viscosidades em regiões de altas taxas de deformação, próximas às paredes do duto mais estreito. Observa-se também quais são os casos em que a pseudoplasticidade é mais pronunciada, i.e., quanto maior o número de Carreau e quanto menor o  $n$ .

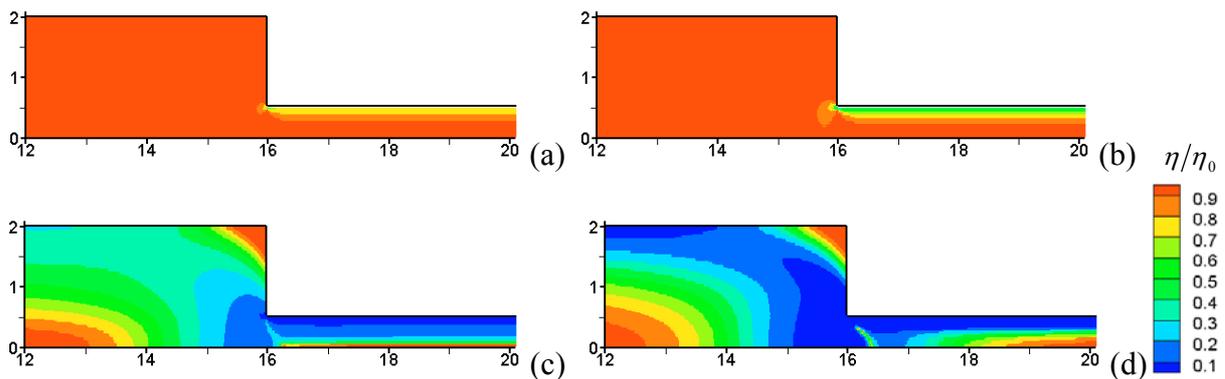


Figura 5.23: Campos de viscosidade: (a)  $Cu=0.5$ ,  $n=0.5$ , (b)  $Cu=0.5$ ,  $n=0.1$ , (c)  $Cu=50$ ,  $n=0.5$  and (d)  $Cu=50$ ,  $n=0.1$ .

As Figs. 5.24 e 5.25 mostram os campos das componentes  $\tau_{12}$  e  $\tau_{11}$  (adimensionalizadas na forma  $\tau_{ij}^* = (\tau_{ij}L)/(\eta_0 u_0)$ ) do tensor extra de tensão obtidos como variáveis do problema. A Fig. 5.26 mostra o campo de  $u_2^*$ , onde  $u_2^* = u_2/u_0$ . Pode-se perceber que os valores mais baixos de  $\tau_{12}$  e  $\tau_{11}$  e o valor mais alto de  $u_2$  na contração são obtidos para os fluidos mais pseudoplásticos, i.e. com menor  $n$  e maior  $\lambda$ , o que deve-se à baixa viscosidade que estes fluidos apresentam para quanto maior  $\lambda$  e quanto menor  $n$ , para as mesmas taxas de deformação, reduzindo consideravelmente a resistência ao escoamento. Altas taxas de deformação na contração promovem uma grande redução da viscosidade próximo à sua quina, e altos gradientes de viscosidade no mesmo local, o que também pode comprometer a estabilidade numérica do método, conforme pode ser observado na parte (d). No entanto, esta instabilidade ocorre apenas localmente, não comprometendo totalmente o resultado.

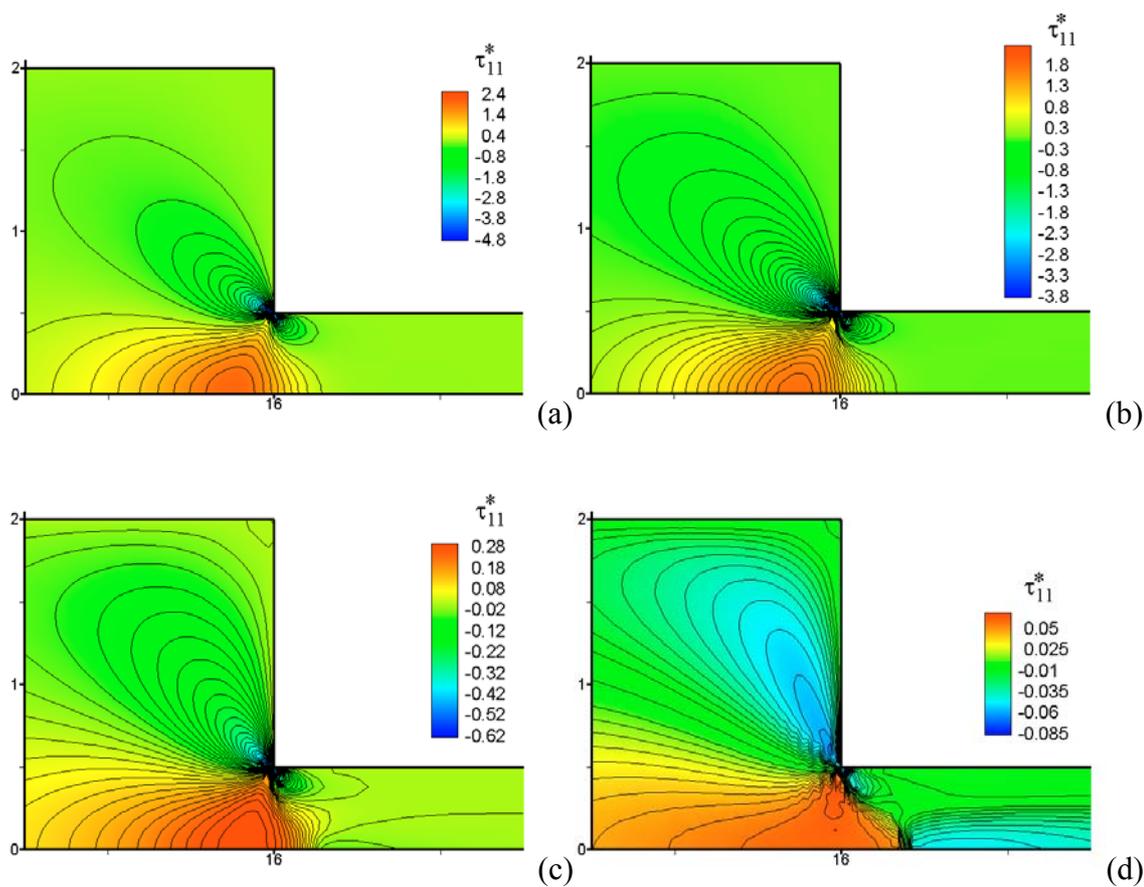


Figura 5.24: Campos de  $\tau_{11}^*$ : (a)  $\text{Cu}=0.5, n=0.5$ , (b)  $\text{Cu}=0.5, n=0.1$ , (c)  $\text{Cu}=50, n=0.5$ , (d)  $\text{Cu}=50, n=0.1$ .

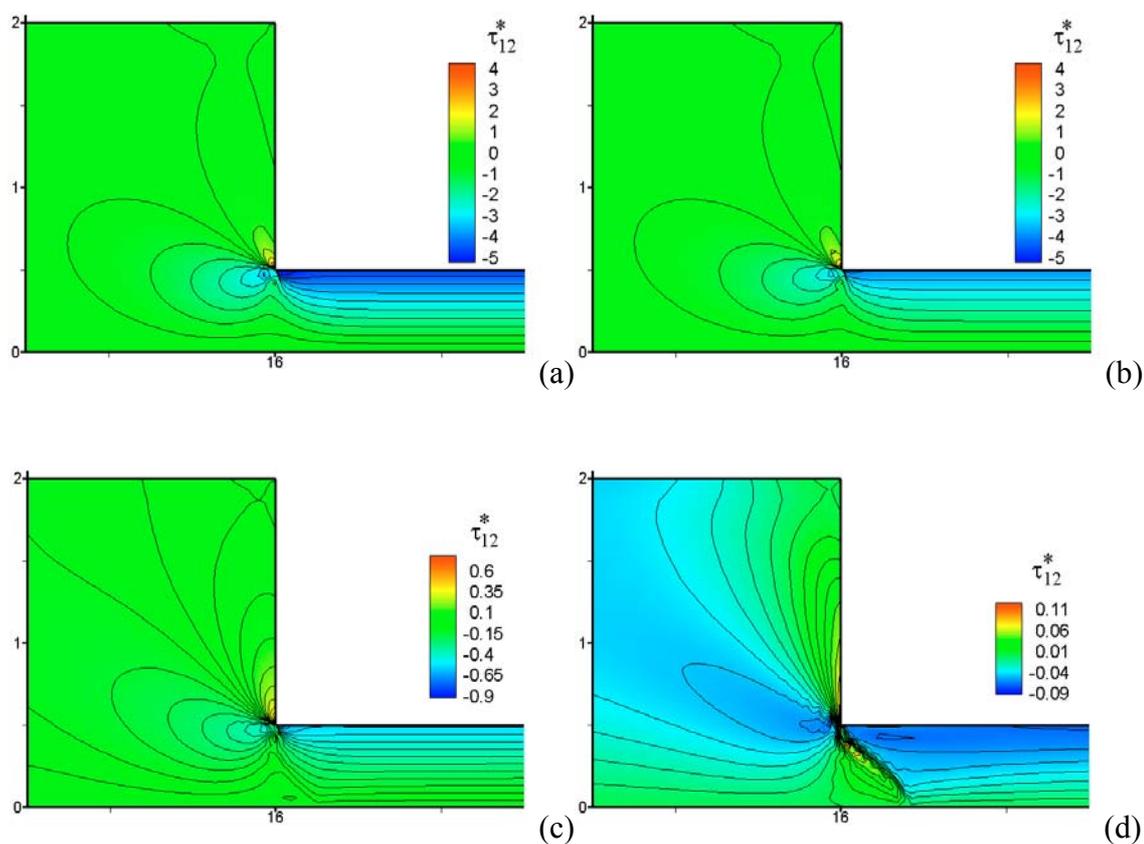


Figura 5.25: Campos de  $\tau_{12}^*$ : (a)  $\text{Cu}=0.5, n=0.5$ , (b)  $\text{Cu}=0.5, n=0.1$ , (c)  $\text{Cu}=50, n=0.5$ , (d)  $\text{Cu}=50, n=0.1$ .

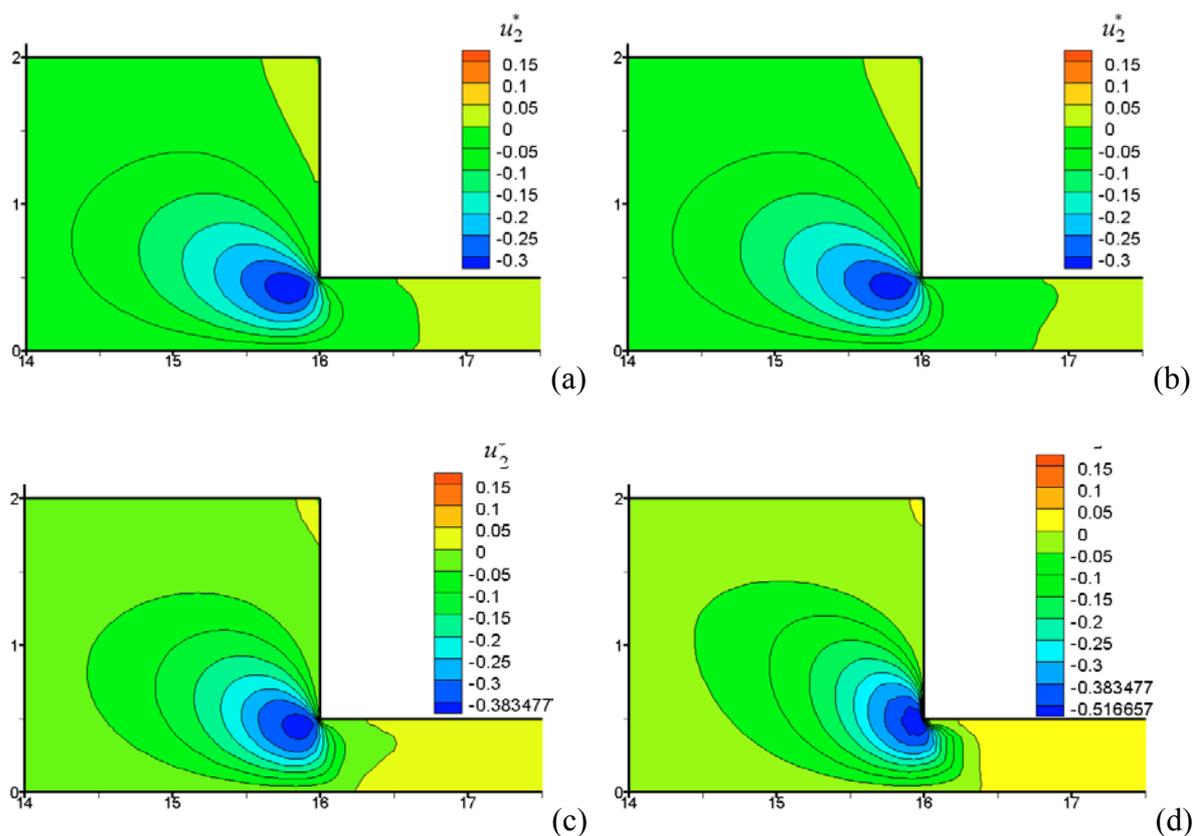


Figura 5.26: Campos de  $u_2^*$ : (a)  $Cu=0.5$ ,  $n=0.5$ , (b)  $Cu=0.5$ ,  $n=0.1$ , (c)  $Cu=50$ ,  $n=0.5$ , (d)  $Cu=50$ ,  $n=0.1$ .

A Fig. 5.27 mostra os perfis de velocidade  $u^*$  versus  $y$ ,  $y=x_2/L$ , para os casos estudados. Para  $Re=1$ : (a) a montante da contração, representando um perfil de escoamento plenamente desenvolvido, (b) a uma distância de  $L$  a montante do plano da contração, (c) no plano da contração. Nestes gráficos, as dimensões foram adimensionalizadas na forma  $y=x_2/L$  e  $u^*=u_1/u_0$ . No caso do perfil plenamente desenvolvido (a), o perfil achatado típico dos fluidos pseudoplásticos é observado para os fluido com mais altos números de Carreau ( $Cu=50$ ). Os fluidos com mais baixos números de Carreau ( $Cu=0.5$ ) apresentam perfis de velocidade muito próximos ao Newtoniano, o que significa que as taxas de deformação se mantiveram dentro do patamar de viscosidade constante característico do modelo de Carreau. O mesmo ocorre com os perfis logo a montante da contração (b): os fluidos com baixo  $Cu$  apresentam perfis semelhantes ao do fluido Newtoniano, e os fluidos de alto  $Cu$  apresentam um perfil mais achatado, mas com a aceleração advectiva já sendo perceptível na linha de simetria do escoamento. No plano da contração (c), os fluidos experimentam altas taxas de deformação, e mesmo o fluido de baixo  $Cu$  tem um perfil de velocidade diferenciado do perfil Newtoniano.

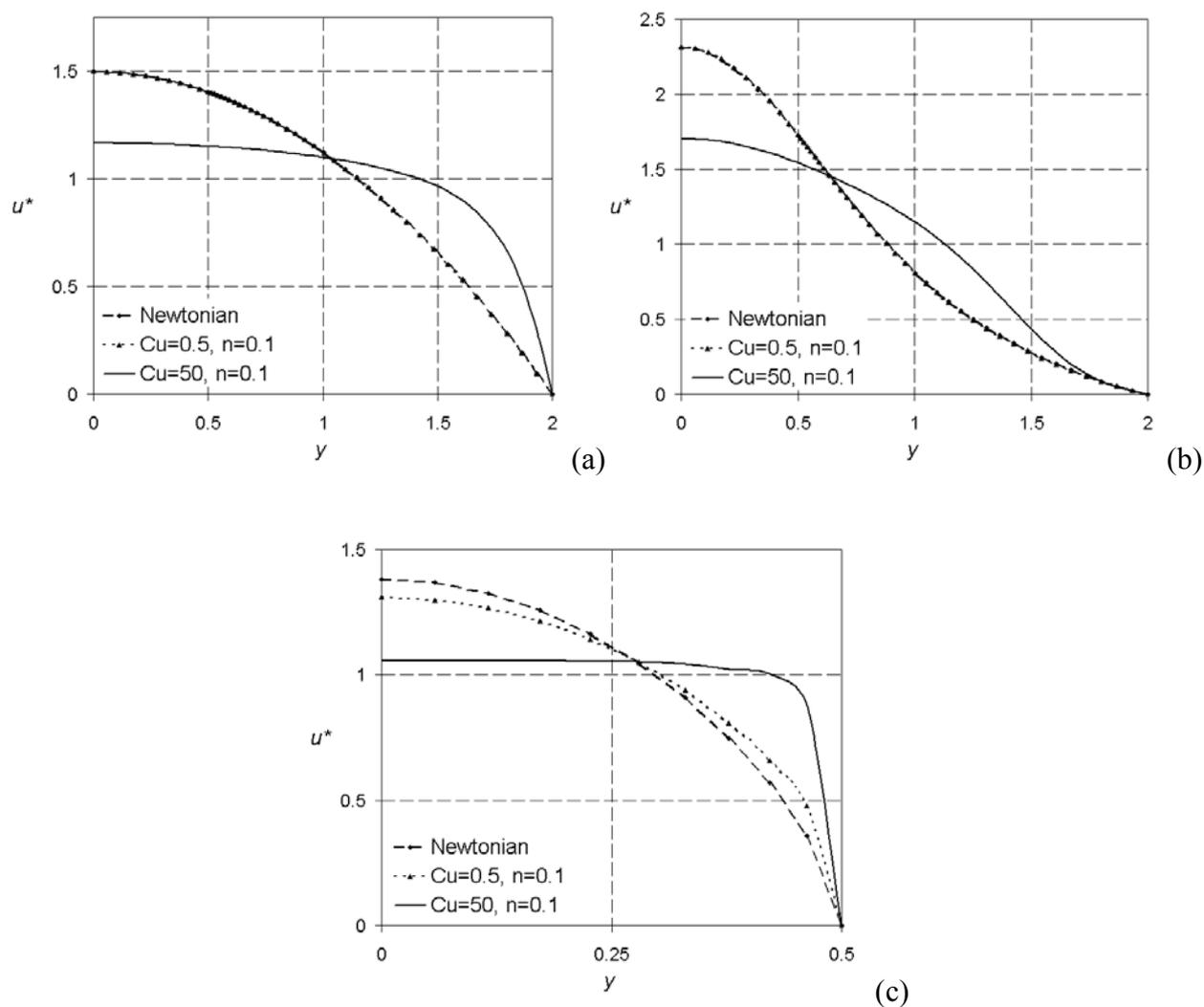


Figura 5.27: Perfil de  $u^*$ . (a) Perfil totalmente desenvolvido a montante da contração, (b) a uma distância  $L$  a montante da contração, (c) no plano da contração.

A Fig. 5.28 mostra os gráficos da queda de pressão ao longo do plano de simetria para o fluido Newtoniano com  $Re=1$  e  $Re=100$ , e os fluidos de Carreau com  $Re=1$  e vários parâmetros números de Carreau. A contração está localizada na posição  $x_1=16$ , e a pressão é adimensionalizada na forma:  $p^*=(pL)/(\rho u_0^2)$ . Na parte (a), compara-se a queda de pressão para um fluido Newtoniano a  $Re=1$  e para os fluidos pseudoplásticos com baixo  $Cu$ . Observa-se que os níveis de pressão são da mesma ordem de grandeza, apesar da pseudoplasticidade reduzir um pouco a queda de pressão. Na parte (b), as quedas de pressão para os fluidos de alto  $Cu$  são mostradas. Observa-se que estas são da mesma ordem de magnitude das de um fluido Newtoniano escoando a  $Re=100$ , i.e., muito menores do que a queda de pressão para um fluido Newtoniano escoando ao mesmo número de Reynolds. Este fenômeno é uma consequência da pseudoplasticidade, que faz com que a viscosidade diminua nas regiões de altas taxas de deformação, o que pode diminuir a resistência ao escoamento em ordens de grandeza, como neste exemplo. Outra característica interessante é que a inclinação das curvas dos fluidos

pseudoplásticos diferem mais das dos fluidos Newtonianos na região a jusante da contração, onde as taxas de deformação por cisalhamento são maiores devido ao menor diâmetro hidráulico e maior atrito com as paredes, causando um efeito de redução da viscosidade mais pronunciado.

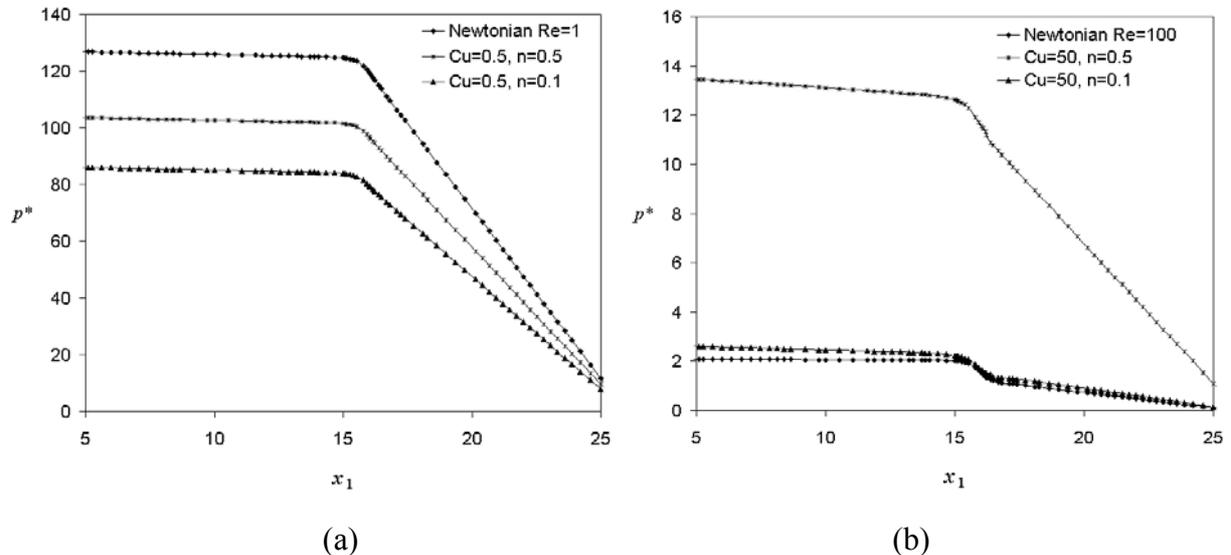


Figura 5.28: Queda de pressão ao longo do plano de simetria: (a) Fluido Newtoniano a  $Re=1$  e fluidos a baixo  $Cu$  e  $Re=1$ , (b) fluido Newtoniano a  $Re=100$  e fluidos a altos  $Cu$  e  $Re=1$ .

#### 5.2.4 Escoamentos de fluidos pseudoplásticos em contração axissimétrica

Neste item, investigam-se escoamentos de fluidos pseudoplásticos cuja viscosidade é dada pela função de Carreau (Eq. (5.3)), através de uma contração 4:1 de um duto de seção circular, sendo utilizado, portanto, um domínio axissimétrico para a aproximação do problema. É utilizada a formulação em três campos  $\tau$ - $p$ - $\mathbf{u}$ . Este problema é dado como na Fig. 5.29, onde o comprimento característico  $L$  é dado pelo diâmetro do tubo mais estreito,  $D_0$ , e a velocidade característica é  $u_0$ . Os números de Reynolds e Carreau são calculados com essas grandezas e os parâmetros  $\lambda$  e  $\eta_0$  do modelo de Carreau.

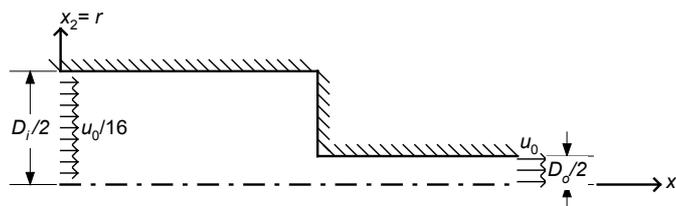


Figura 5.29: Colocação do problema de escoamento pseudoplástico em contração axissimétrica.

O estudo é baseado no artigo de Kim et al., 1983. Neste artigo, são investigados os escoamentos de fluidos de Carreau para números de Reynolds bem baixos, de  $Re=0$  até  $Re=2$ .

Neste estudo, esta faixa é estendida de  $Re=0$  até  $Re=10$ , para números de Carreau  $Cu=0.01$ ,  $Cu=1$  e  $Cu=100$ . Os parâmetros  $n$  nesta investigação foram  $n=1$  (fluido Newtoniano),  $n=0.4$  e  $n=0.2$ . Um teste de independência de malha foi realizado para quatro malhas, compreendendo de 1934 a 6266 elementos do tipo  $Q_1/Q_1/Q_1$ . Os resultados foram considerados independentes da malha para uma contendo 4368 elementos, e estes resultados são apresentados a seguir.

A Fig. 5.30 mostra os campos de viscosidade adimensional,  $\eta^* = \eta/\eta_0$ , obtidos para os casos, (a)  $Cu=10$ ,  $n=0.2$ , (b)  $Cu=100$ ,  $n=0.2$ , ambos a  $Re=2$ . Estes campos mostraram-se com as características esperadas de mais baixos valores de viscosidades em regiões de altas taxas de deformação, próximas às paredes do duto mais estreito. Observa-se também o efeito da pseudoplasticidade mais pronunciado para o escoamento a mais alto  $Cu$ .

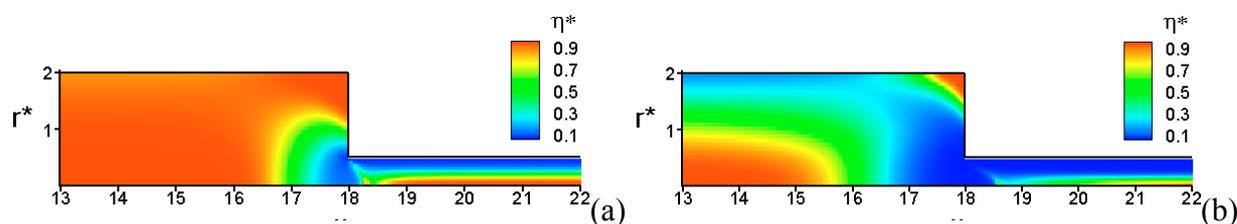


Figura 5.30: Campos de viscosidade: (a)  $Cu=10$ ,  $n=0.2$ , (b)  $Cu=100$ ,  $n=0.2$ .

A Fig. 5.31 também trata dos fluidos de Carreau  $Cu=10$ ,  $n=0.2$  e  $Cu=100$ ,  $n=0.2$ , com  $Re=2$ . São mostradas as iso-regiões de  $u^*$ , onde  $u^* = u_1/u_0$ , sobrepostas pelas linhas de corrente dos respectivos escoamentos. As diferenças entre os campos de velocidade axial são facilmente perceptíveis: para  $Cu$  mais baixo, este campo é semelhante ao de um fluido Newtoniano, no qual o valor da velocidade axial aumenta quadraticamente com a distância à parede, e tem uma aceleração suave na contração. Para o fluido a  $Cu$  mais alto, os gradientes de velocidade são altos próximos às paredes, e praticamente nulos na linha de simetria, caracterizando o perfil de velocidade achatado pseudoplástico típico. Na contração, a aceleração advectiva ocorre mais bruscamente, pois as altas taxas de deformação reduzem a viscosidade nesta região e permitem a rápida aceleração do fluido. As linhas de corrente mostram que, para o caso de baixo  $Cu$ , ocorre uma leve recirculação no canto da contração, como ocorre em escoamentos Newtonianos para baixos  $Re$ . Já no caso do fluido de alto  $Cu$ , esta recirculação não ocorre, o comportamento se assemelha ao de um fluido Newtoniano escoando a um número de Reynolds mais elevado.

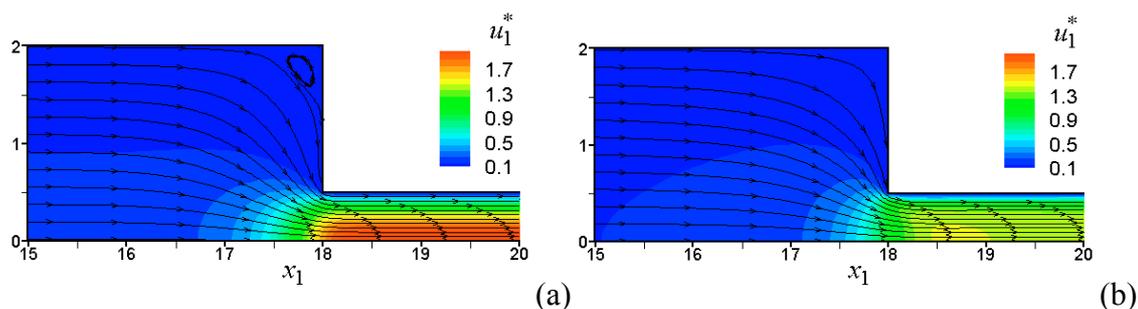


Figura 5.31: Iso-regiões de  $u_1^*$  e linhas de corrente para  $Re=2$  e  $n=0.2$ . (a)  $Cu=10$ , (b)  $Cu=100$ .

As Figs. 5.32 e 5.33 mostram os campos das componentes  $\tau_{12}$  e  $\tau_{11}$  (adimensionalizadas na forma  $\tau_{ij}^* = (\tau_{ij}L)/(\eta_0 u_0)$ ) do tensor extra de tensão, obtidos como variáveis do problema. A Fig. 5.34 mostra o campo de  $u_2^*$ , onde  $u_2^* = u_2/u_0$ . Pode-se perceber que os valores mais baixos de  $\tau_{12}$  e  $\tau_{11}$  e o valor mais alto de  $u_2$  na contração são obtidos para os fluidos mais pseudoplásticos, o que deve-se à baixa viscosidade que estes fluidos apresentam em regiões de altas taxas de deformação, reduzindo consideravelmente a resistência ao escoamento. Altas taxas de deformação na contração promovem uma grande redução da viscosidade próximo à sua quina, e altos gradientes de viscosidade no mesmo local, o que também pode comprometer a estabilidade numérica do método, conforme pode ser observado na parte (c). No entanto, esta instabilidade ocorre apenas localmente e não compromete o resultado global.

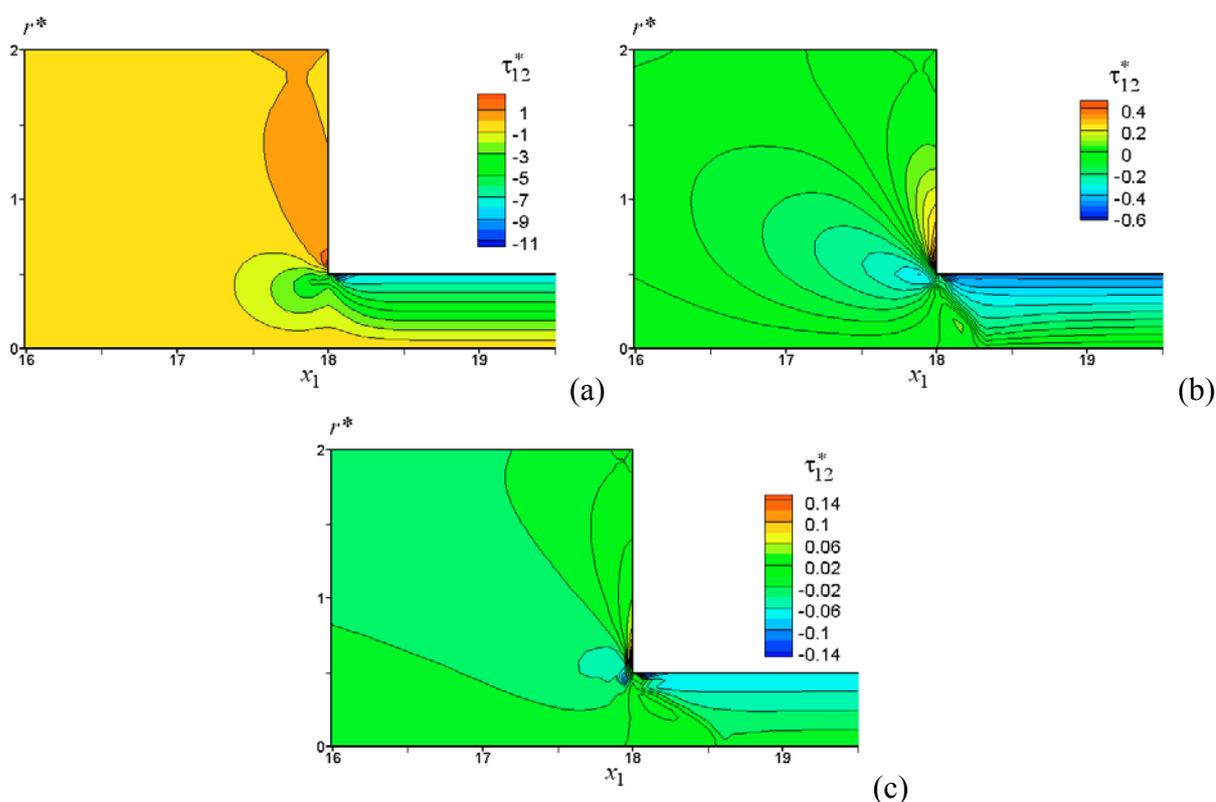


Figura 5.32: Iso-regiões de  $\tau_{12}^*$  para  $Re=2$  e  $n=0.2$ . (a) Fluido Newtoniano (b)  $Cu=10$ , (c)  $Cu=100$ .

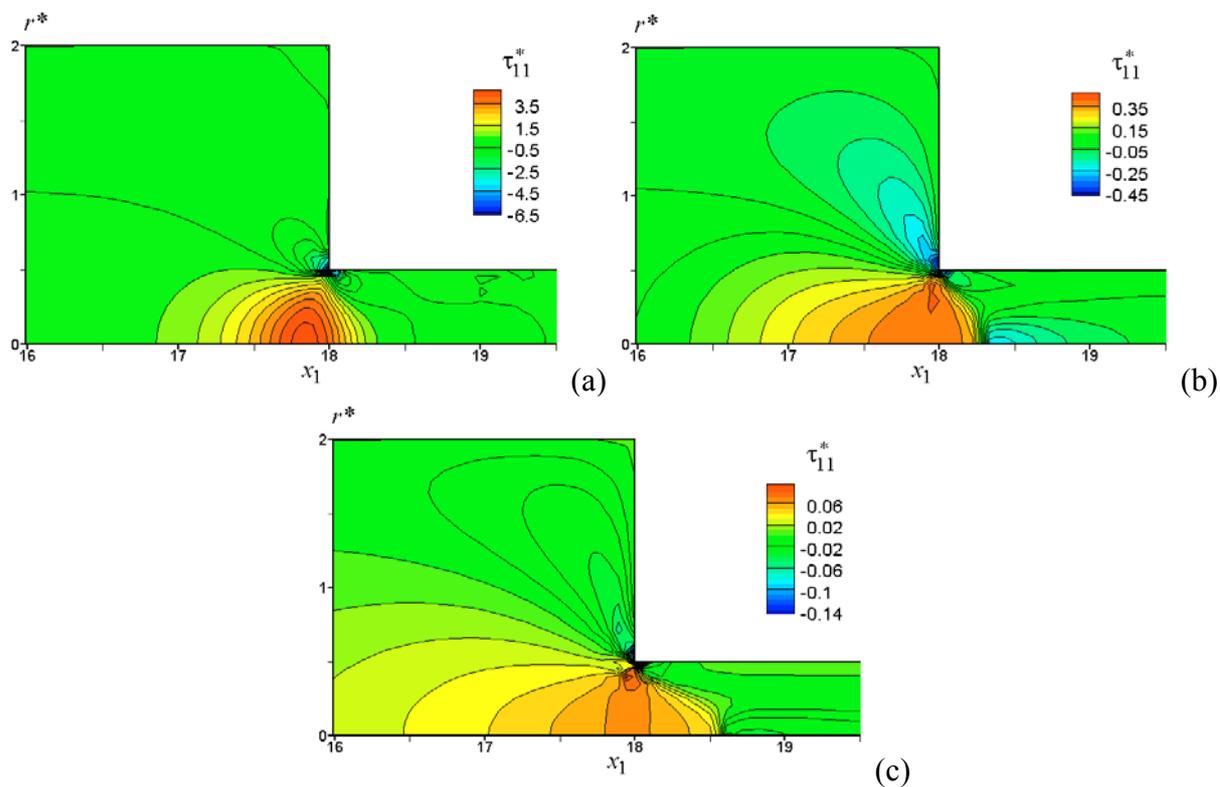


Figura 5.33: Iso-regiões de  $\tau_{11}^*$  para  $Re=2$  e  $n=0.2$ . (a) Fluido Newtoniano (b)  $Cu=10$ , (c)  $Cu=100$ .

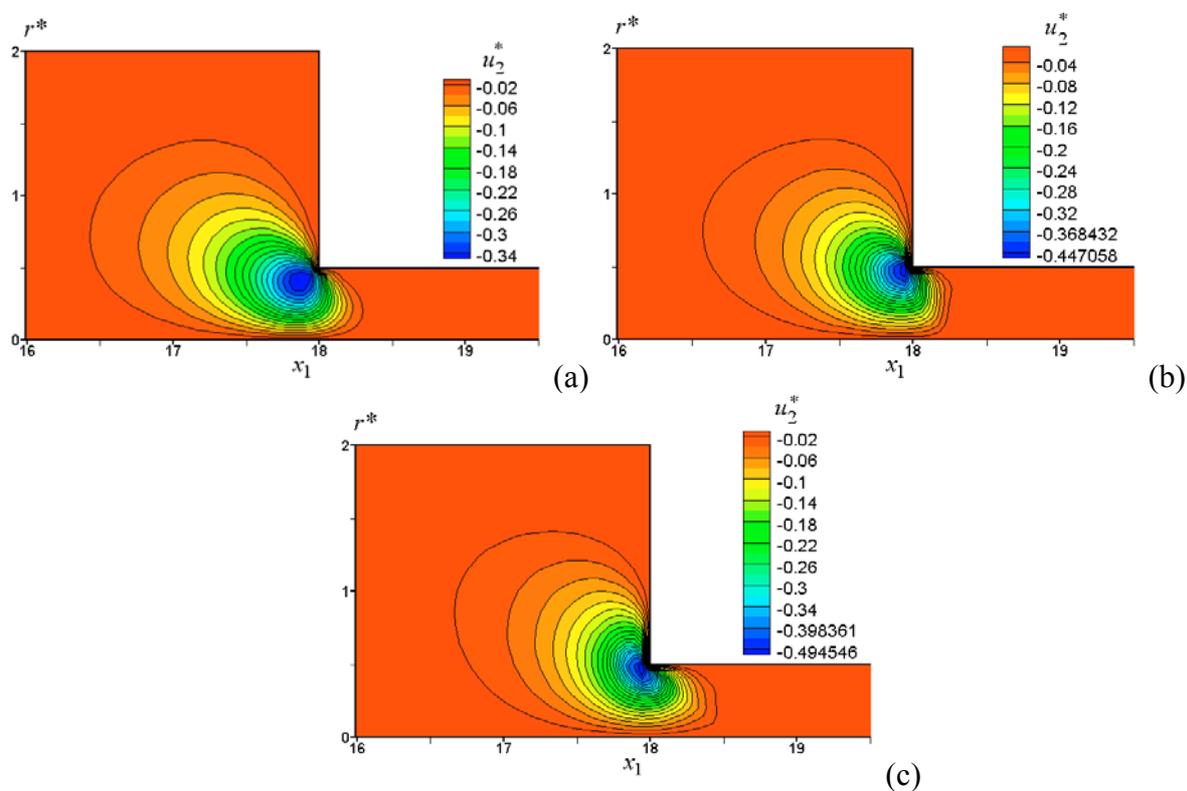


Figura 5.34: Iso-regiões de  $u_2^*$  para  $Re=2$  e  $n=0.2$ . (a) Fluido Newtoniano (b)  $Cu=10$ , (c)  $Cu=100$ .

Nos gráficos que seguem, investiga-se os efeitos da inércia, através do número de Reynolds, e das características do fluido, através do número de Carreau, na dinâmica do

escoamento através da contração. Na Fig. 5.35, são dados gráficos da velocidade axial versus a coordenada radial no plano da contração. No item (a), compara-se o efeito de  $Cu$  para fluidos a mesmo  $Re$  e  $n$ . No item (b), estuda-se o efeito do parâmetro  $n$  para os mesmos  $Cu$  e  $Re$ . Em (c), observa-se o efeito de variar o  $Re$  para um fluido bastante pseudoplástico. Nos itens (a) e (b), observa-se que a redução da viscosidade do fluido devido aos efeitos de pseudoplasticidade, assim como nas regiões de escoamento plenamente desenvolvido, tende a achatar os perfis de velocidade no plano da contração. Assim, para mesmos  $Re$  e  $n$ , o fluido com maior  $Cu$  apresenta o perfil mais achatado, e para mesmos  $Re$  e  $Cu$ , o fluido com menor  $n$  apresenta esta característica. No item (c), vê-se que o aumento do  $Re$  para fluidos a  $Cu$  e  $n$  constantes possui o mesmo efeito de achatar o perfil de velocidade como observa-se em escoamentos Newtonianos. Em conjunto, estes resultados permitem concluir que a redução da resistência ao escoamento próximo às paredes dos dutos da contração permitem que os gradientes de velocidade sejam maiores nestas regiões, formando perfis de velocidade tanto mais achatados quanto maior for a redução da viscosidade do material.

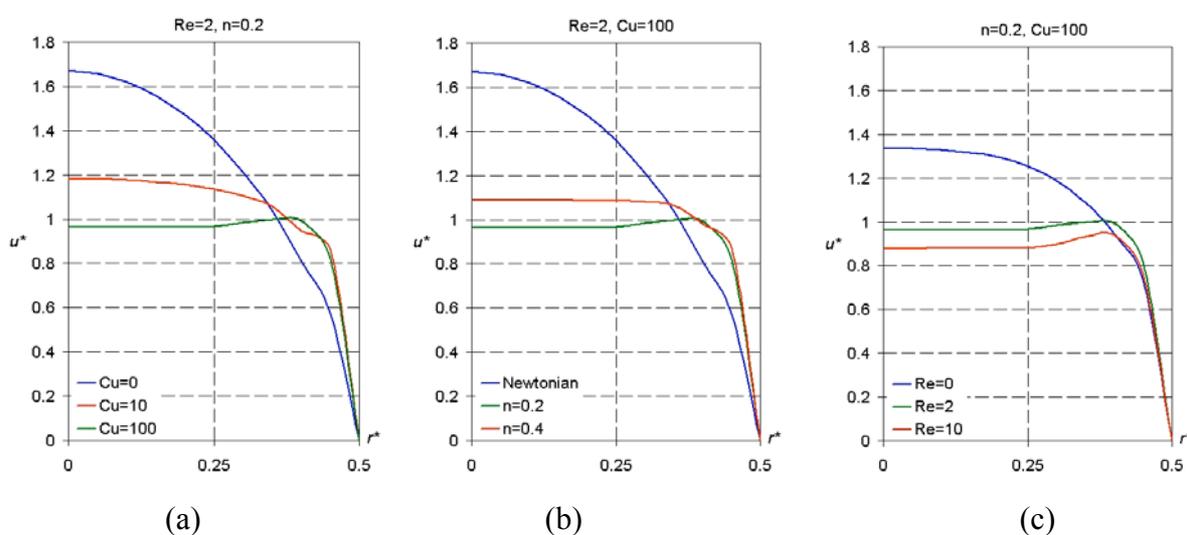


Figura 5.35. Perfis da velocidade axial no plano de contração, (a)  $Re=2, n=0.2$ , vários  $Cu$ , (b)  $Re=2, Cu=100$ , vários  $n$ , (c)  $n=0.2, Cu=100$ , vários  $Re$ .

Na Fig. 5.36, investiga-se o perfil de velocidade axial na linha de simetria ao longo do domínio, para os casos (a)  $n=0.2$  e  $Re=2$ , vários  $Cu$ , (b)  $Cu=100$  e  $Re=2$ , vários  $n$ , (c)  $Cu=100$  e  $n=0.2$ , vários  $Re$ . Para o fluido Newtoniano não é observado um pico no valor da velocidade, como ocorre para os fluidos pseudoplásticos. Além disso, o valor da velocidade quando o escoamento encontra-se plenamente desenvolvido é maior para o fluido Newtoniano e menor para o caso de mais alto  $Cu$  para o mesmo  $n$ , e de menor  $n$  para o mesmo  $Cu$ , devido ao perfil de velocidade mais achatado que se forma. No caso item (c), observa-se que o aumento do  $Re$  tende

a diminuir os efeitos elípticos na contração, causando um aumento mais brusco da velocidade, como esperado e semelhante ao comportamento Newtoniano, porém mais pronunciadamente.

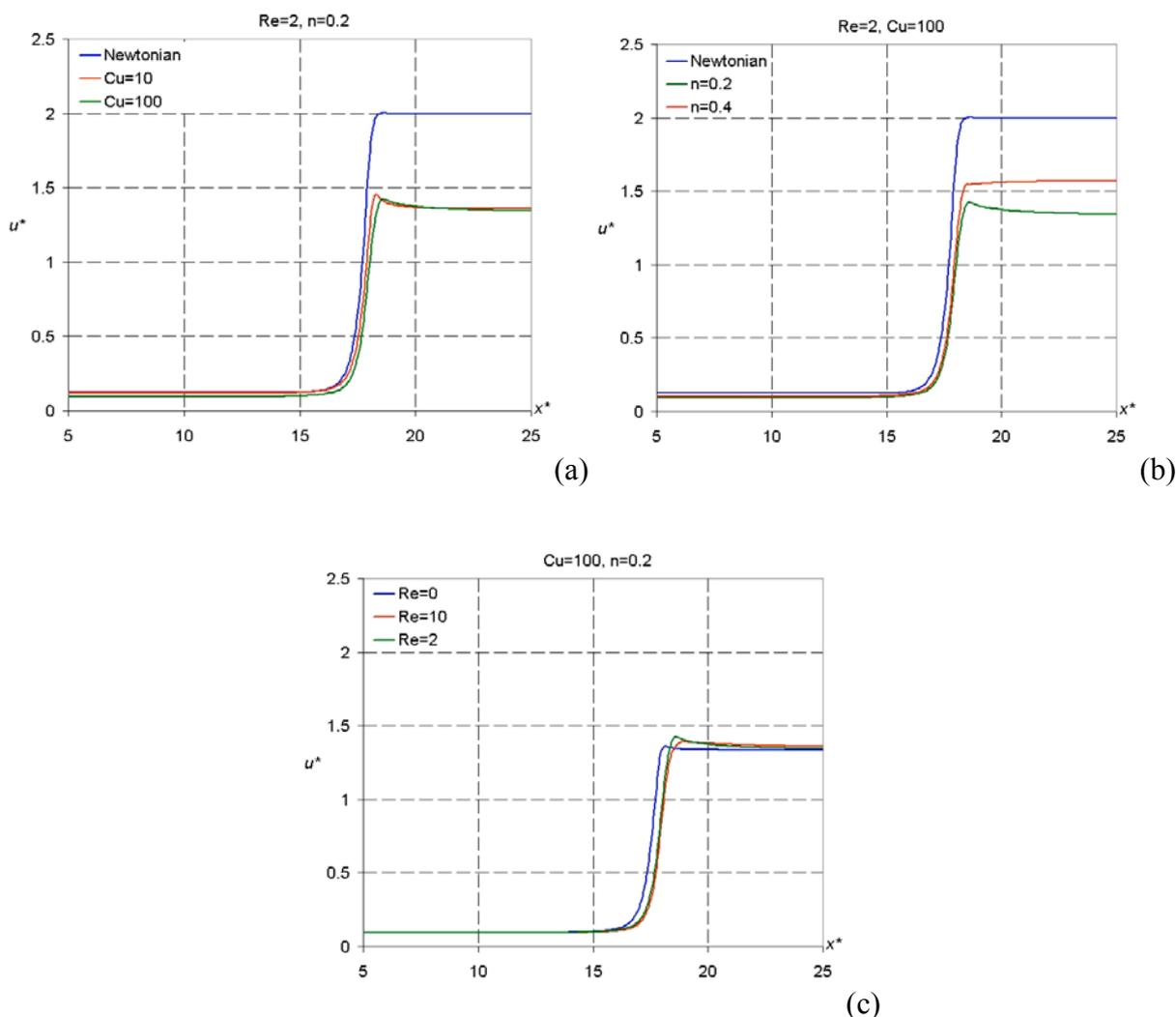


Figura 5.36. Perfis da velocidade axial ao longo da linha de simetria, (a)  $Re=2, n=0.2$ , vários  $Cu$ , (b)  $Re=2, Cu=100$ , vários  $n$ , (c)  $n=0.2, Cu=100$ , vários  $Re$ .

Na Fig. 5.37, investiga-se a queda de pressão ao longo do eixo de simetria para os três casos: (a)  $n=0.2$  e  $Re=2$ , vários  $Cu$ , (b)  $Cu=100$  e  $Re=2$ , vários  $n$ , (c)  $Cu=100$  e  $n=0.2$ , vários  $Re$ . Observa-se nos itens (a) e (b) que a pseudoplasticidade diminui a queda de pressão total do escoamento, como era de se esperar, pois a redução viscosidade diminui a dissipação viscosa, requerendo um menor gradiente de pressão para manter o escoamento. No caso de um mesmo fluido, o aumento do número de Reynolds também reduz a queda de pressão como esperado. Quando compara-se os fluidos pseudoplásticos ao fluido Newtoniano (item (a)), observa-se que a diferença entre a inclinação das curva é bastante mais evidente na região a jusante da contração, onde ocorrem as maiores taxas de deformação e, portanto, os efeitos da pseudoplasticidade são mais pronunciados.

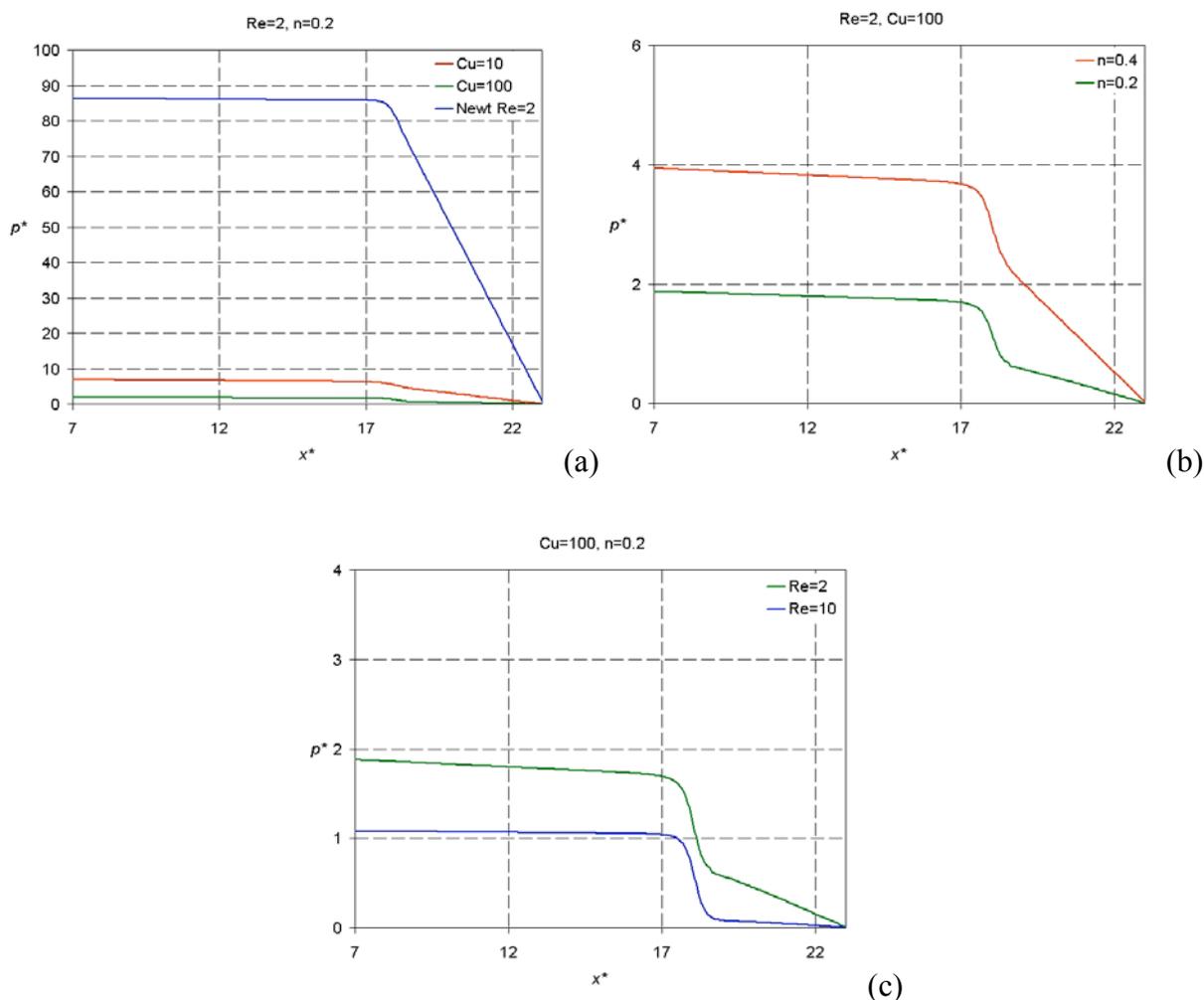


Figura 5.37. Queda de pressão ao longo da linha de simetria.

### 5.2.5 Escoamentos puramente cisalhantes

A fim de estudar o comportamento hidrodinâmico de um fluido quasi-Newtoniano sensível ao tipo de escoamento em condições de escoamento puramente cisalhante, e também de comparar seu comportamento material aos comportamentos Newtoniano e pseudoplástico, foram investigados escoamentos destes fluidos na geometria formada pelo espaço entre duas placas planas. A condição de simetria foi explorada analisando-se somente meio domínio, como mostra a Fig. 5.38, onde a linha tracejada representa o plano de simetria.

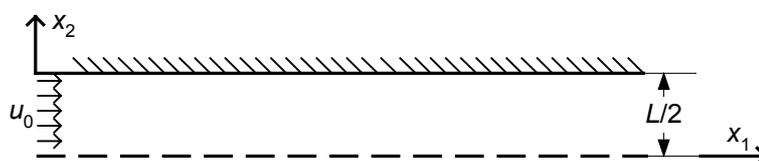


Figura 5.38: Domínio do problema de escoamento entre duas placas planas.

A metodologia para a aproximação numérica utilizada foi a da Eq. (5.13) com elementos do tipo  $Q_2/Q_1/Q_2$  para a formulação em três campos  $\mathbf{d-p-u}$ . Foram impostas as condições de contorno de não-deslizamento na parede superior, simetria no plano ( $x_2=0$ ), perfil de velocidades parabólico com velocidade média  $u_0$  em  $x_1=0$ . O comprimento total do domínio utilizado nas aproximações numéricas foi de  $16L$ , a fim de garantir que, na posição média de  $x_2$ , pudessem ser analisados os resultados independentes das condições de entrada e saída, correspondendo à hidrodinâmica de escoamento totalmente desenvolvido.

Foram utilizados os modelos de fluido Newtoniano (Eq. (5.2)), Newtoniano generalizado com função viscosidade dado pela função de Carreau (Eq. (5.3)), e quasi-Newtoniano (Eq. (5.5)).

O Número de Reynolds, dado por:

$$\text{Re} = \frac{\rho u_0 L}{\eta_0} \quad (5.26)$$

foi utilizado como 1 em todos os casos testados. Foi utilizada a definição de número de Deborah da Eq. (5.6) para avaliar os efeitos do comportamento material na hidrodinâmica dos escoamentos. Os valores de  $n_s$  e  $n_{ex}$ , utilizados no modelo quasi-Newtoniano foram 0.5 e 1.5, respectivamente, enquanto no modelo Newtoniano generalizado Carreau foi utilizado  $n=0.5$ . A taxa de deformação característica é assumida como:

$$\dot{\gamma}_c = \frac{u_0}{L/2} \quad (5.27)$$

Foram utilizadas 3 malhas para o teste de independência, as quais consistiram de 288, 416 e 1568 elementos. Foram comparados os perfis de velocidade axial ( $u_1$ ) e componente transversal da taxa de deformação ( $D_{12}$ ) na posição  $x_1=8L$  para fluido Newtoniano e quasi-Newtoniano ( $De=0.5$ ). As diferenças observadas entre os resultados mostraram-se insignificantes, como pode ser observado nos gráficos da Fig. 5.39, que ilustra o perfil de velocidade ( $u^* = u_1/u_0$ ) versus  $y$  ( $y=x_2/(L/2)$ ), com  $De=0.5$ , e o perfil de  $D_{12}^*$  ( $D_{12}^* = D_{12} / \dot{\gamma}_c$ ), com  $De=1$ , para as malhas analisadas.

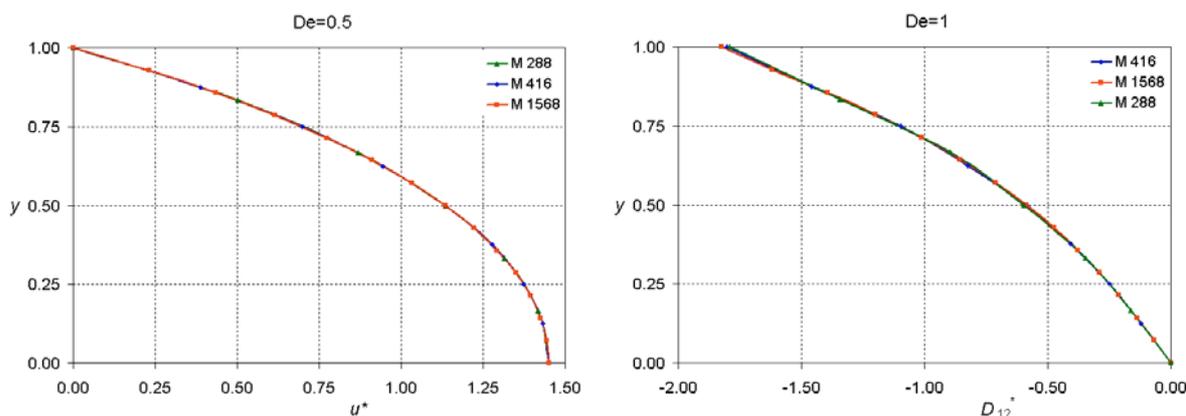


Figura 5.39: Perfis de (a) velocidade axial  $u_1$  e (b)  $D_{12}$

Os resultados mostrados a seguir correspondem aos obtidos com a malha de 416 elementos. A Fig. 5.40 ilustra o perfil de velocidade  $u^*$  versus  $y$  em  $x_1=8L$  para os diversos fluidos analisados.

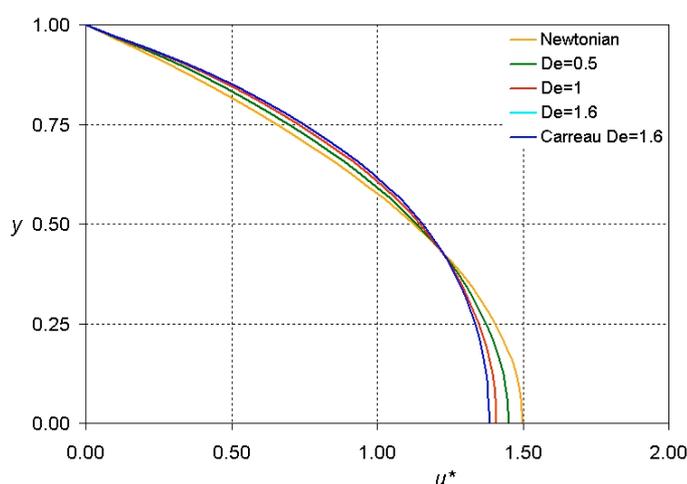


Figura 5.40: Perfis de velocidade para os diversos fluidos

São observadas algumas características:

- O perfil de velocidade sofre um achatamento conforme se aumenta o número de Deborah, o que ocorre devido ao aumento dos efeitos da pseudoplasticidade, que faz com que a viscosidade seja menor na região mais próxima à parede (maiores taxas de deformação).
- Os perfis para fluido quasi-Newtoniano e Newtoniano generalizado (Carreau), para o mesmo número de Deborah, são idênticos e aparecem sobrepostos no gráfico. Isso ocorre por que na região de escoamento plenamente desenvolvido não estão presentes efeitos extensionais, somente efeitos de deformação por cisalhamento. Assim, o valor do classificador de escoamentos  $R_r$  é muito próximo a 1 em toda essa região, e a função viscosidade é idêntica para ambos os modelos, com  $n_s=n$ .

A Fig. 5.41 ilustra o perfil de  $D_{12}^*$ , onde  $D_{12}^* = D_{12} / \dot{\gamma}_c$  versus  $y$  ( $y=x_2/(L/2)$ ) em  $x_1=8L$ .

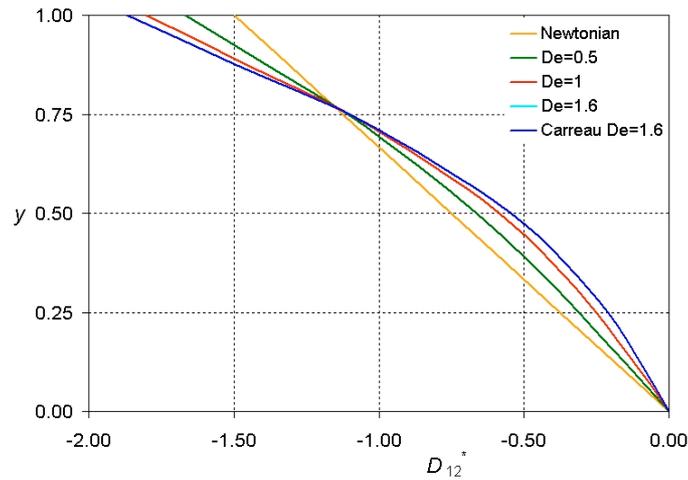


Figura 5.41: Perfis de  $D_{12}$  para os diversos fluidos

As seguintes características podem ser observadas:

- No plano de simetria ( $y=0$ ), a taxa de deformação é nula para todos os casos, pois isso foi imposto como uma condição de contorno e é condição para que seja assumida a simetria do domínio.
- No caso do fluido Newtoniano, a taxa de deformação aumenta em módulo linearmente até a parede, como se espera de um perfil de velocidade quadrático (parabólico). Já nos casos não Newtonianos, a taxa de deformação não varia linearmente até a parede. Quanto mais alto o  $De$ , menor a taxa de deformação próximo ao plano de simetria, e maior é esta próximo à parede, o que está de acordo com o perfil de velocidade axial mostrado anteriormente na Fig. 5.40, observando-se como  $u^*$  varia em  $y$ . Como o escoamento nesta região é plenamente desenvolvido,  $D_{12}$  é diretamente proporcional à derivada de  $u_1$  na direção de  $x_2$ .

O perfil do campo de viscosidade ( $\eta^* = \eta / \eta_c$ ) na linha  $x_1=8L$  é ilustrado na Fig. 5.42 para os diversos  $De$  testados, mostrando como, para  $De$  mais altos, a diminuição das viscosidades é mais efetiva, principalmente na região próxima à parede.

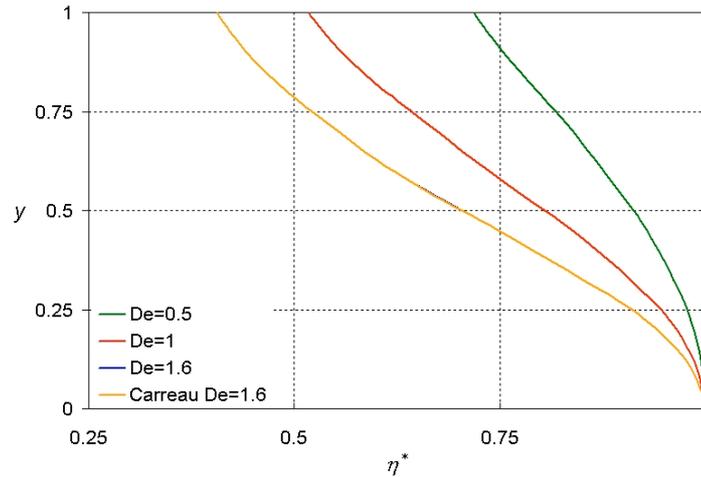


Figura 5.42: Perfis de viscosidade para os diversos fluidos.

Também nesse gráfico observa-se que os perfis de viscosidade para os fluido quasi-Newtoniano e Carreau estão sobrepostos, o que era esperado pois os resultados para estes dois modelos apresentaram-se equivalentes. Em  $y=0$ , a derivada da viscosidade é igual a zero, conforme é requer a condição de simetria axial.

O comportamento da pressão nas aproximações numéricas foi analisado. O campo de pressão mostrou-se numericamente estável em todos os resultados. Os valores de queda de pressão ao longo dos escoamentos foram comparados, utilizando-se o conceito de fator de atrito de Darcy,  $\lambda_f$  [Fox e McDonald, 2001], sendo

$$\lambda_f = \frac{\Delta p}{l} \frac{2D_h}{\rho u_0^2} \quad (5.28)$$

onde  $l$  é a distância axial entre dois pontos entre os quais se mede a queda de pressão, e  $D_h$  é o diâmetro hidráulico [Fox e McDonald, 2001]. No presente estudo, a queda de pressão é medida entre dois pontos onde o escoamento já se mostra desenvolvido, sendo esta linear. Verifica-se que o valor da pressão não varia na direção transversal ( $x_2$ ) ao longo do comprimento analisado.

A Tab. 5.3 dá os valores do fator de atrito de Darcy obtidos na aproximação numérica para os diversos fluidos.

Tabela 5.3: Fator de atrito no escoamento entre duas placas planas para os fluidos estudados.

<b>Fluido</b>	$\lambda_f$
Newtoniano	95.97
Quasi-Newtoniano, De=0.5	77.51
Quasi-Newtoniano, De=1	60.58
Quasi-Newtoniano, De=1.25	50.80

Quasi-Newtoniano, $De=1.6$	49.33
Carreau, $De=1.6$	49.33

Observa-se que, quanto mais pseudoplástico o fluido, menor o fator de atrito, pois a redução da viscosidade diminui a resistência ao escoamento e a dissipação de energia por atrito.

### 5.2.6 Escoamentos quasi-Newtonianos através de uma contração abrupta com quina arredondada

Neste item, aproximam-se escoamentos de fluidos quasi-Newtonianos sensíveis ao tipo de escoamento, empregando elementos do tipo  $Q_2/Q_1/Q_2$  para a formulação em três campos  $\mathbf{d}-p-\mathbf{u}$ . A geometria do problema consiste em uma contração 4:1 planar, cuja quina é arredondada com raio de curvatura igual a  $3/4L$ , como na Fig. 5.43.

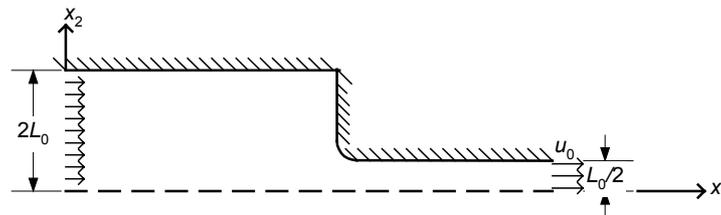


Figura 5.43: Colocação do problema de escoamento através de contração abrupta com quina arredondada.

A escolha desta geometria deve-se ao interesse em estudar o comportamento de fluidos sensíveis ao tipo de escoamento em uma geometria onde existam ambos os regimes de cisalhamento e extensão. A usual contração abrupta, como é investigado no item seguinte, é um problema solução de mais difícil por causa da descontinuidade gerada por sua quina em ângulo reto.

A taxa de deformação característica é assumida como sendo a divisão da velocidade média no duto de saída,  $u_0$ , pela distância  $L$  da parede ao plano de simetria. Sendo assim, os números de Deborah para caracterizar os escoamentos ficam:

$$De_i = \frac{\lambda_i u_0}{L/2} \quad (5.29)$$

onde o índice  $i$  do parâmetro  $\lambda$  está relacionado às funções de viscosidade extensional ou de cisalhamento (Eq. (5.5)). No presente trabalho, porém, foram estudados fluidos com o mesmo  $\lambda$  para cisalhamento e extensão. Sendo assim, utilizou-se  $De=0.6$ . O número de Reynolds foi mantido constante e igual a 1, em todos os casos apresentados. Uma malha composta por 2670

elementos (11219 nós) foi empregada nas simulações, escolhida entre outras malhas após a realização de um teste de independência dos resultados.

São apresentados resultados compreendendo três casos:

- (a)  $n_s=0.1$  e  $n_{ex}=1.0$ , sendo um fluido que apresenta comportamento pseudoplástico dependente da taxa de deformação e da cinemática do escoamento. Sua viscosidade diminui com o aumento da taxa de deformação mas somente nas zonas de cisalhamento.
- (b)  $n_s=0.5$  e  $n_{ex}=1.5$ , sendo um fluido que apresenta comportamento dependente da taxa de deformação e da cinemática do escoamento, com redução da viscosidade nas zonas de cisalhamento e aumento da mesma nas zonas de extensão.
- (c)  $n_s=1.0$  e  $n_{ex}=2.5$ , sendo um fluido que apresenta comportamento de aumento de viscosidade nas regiões extensionais em função da taxa de extensão.

A Fig. 5.44 mostra, para o caso Newtoniano, como se apresenta o campo do classificador de escoamentos  $R_r$ . Observa-se que na maior parte do domínio,  $R_r=1$ , i.e., o escoamento pode ser classificado como dominado pelo cisalhamento. No entanto, na região junto à entrada da contração, observa-se uma zona extensional, devido ao afunilamento do escoamento. Algumas zonas de escoamento de corpo rígido existem junto ao canto onde o escoamento apresenta um pequeno vórtice neste caso de número de Reynolds baixo, que pode ser visto na Fig. 5.45, que ilustra a forma das linhas de corrente para este mesmo caso.

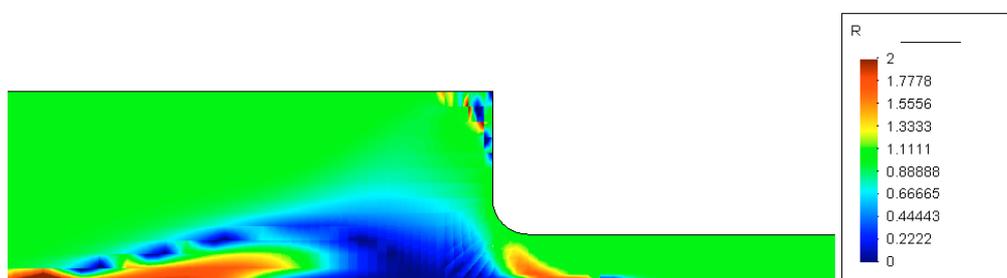


Figura 5.44: Campo de  $R_r$  no escoamento Newtoniano através da contração.

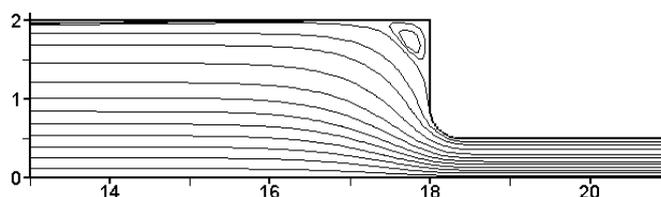


Figura 5.45: Linhas de corrente para o escoamento Newtoniano através da contração suave.

A Fig. 5.46 mostra os campos de viscosidade adimensional ( $\eta^* = \eta/\eta_0$ ) obtidos para os três casos analisados.

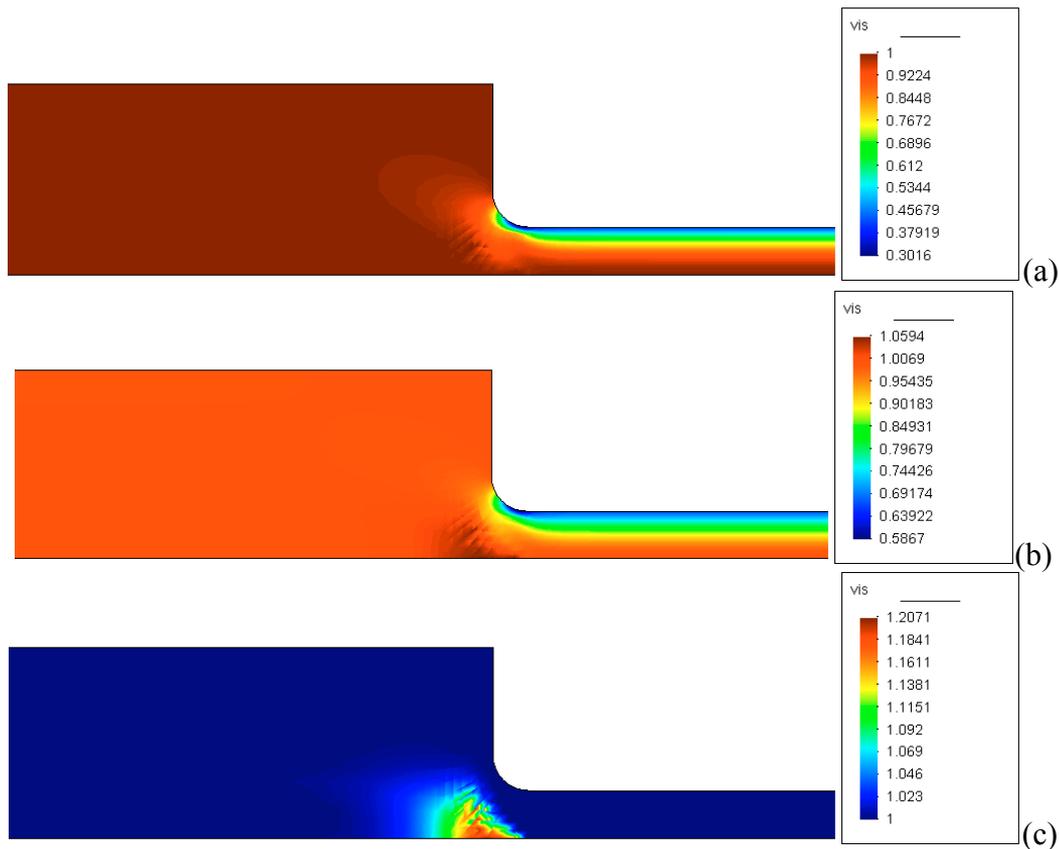


Figura 5.46: Função viscosidade para (a)  $n_s=0.1$  e  $n_{ex}=1.0$ , (b)  $n_s=0.5$  e  $n_{ex}=1.5$  e (c)  $n_s=1.0$  e  $n_{ex}=2.5$ .

No caso (a), observa-se a redução da viscosidade nas regiões de altas taxas de cisalhamento, junto às paredes, de forma mais pronunciada no canal mais estreito. Na região da entrada na contração, como o escoamento é mais extensional, mesmo com as altas taxas de deformação a viscosidade não diminui, visto que nesta região o parâmetro  $R_r$  tem valor próximo a zero. No caso (b), observa-se o aumento da viscosidade na região de cinemática extensional, próximo à entrada da contração, e a redução da viscosidade nas zonas de cisalhamento, próximas às paredes. No caso (c), observa-se o aumento da viscosidade na única zona de cinemática extensional do escoamento, junto à entrada da contração. Nas demais zonas a viscosidade se mantém constante. Nos três casos, a variação da viscosidade não acarretou uma mudança muito significativa no campo de  $R_r$ .

Na Fig. 5.47 são mostrados os perfis de velocidade  $u^*=u_1/u_0$  obtidos a quatro diferentes distâncias da contração. O item (a) representa os perfis de escoamento desenvolvido a montante da contração. Os itens (b) e (c) correspondem ao perfil logo a montante da contração, este último mostrando um detalhe próximo à linha de simetria. O item (d) corresponde aos perfis no primeiro ponto da contração onde a espessura do canal tem a espessura do canal estreito, e o item (e) corresponde aos perfis de escoamento desenvolvido no canal estreito.

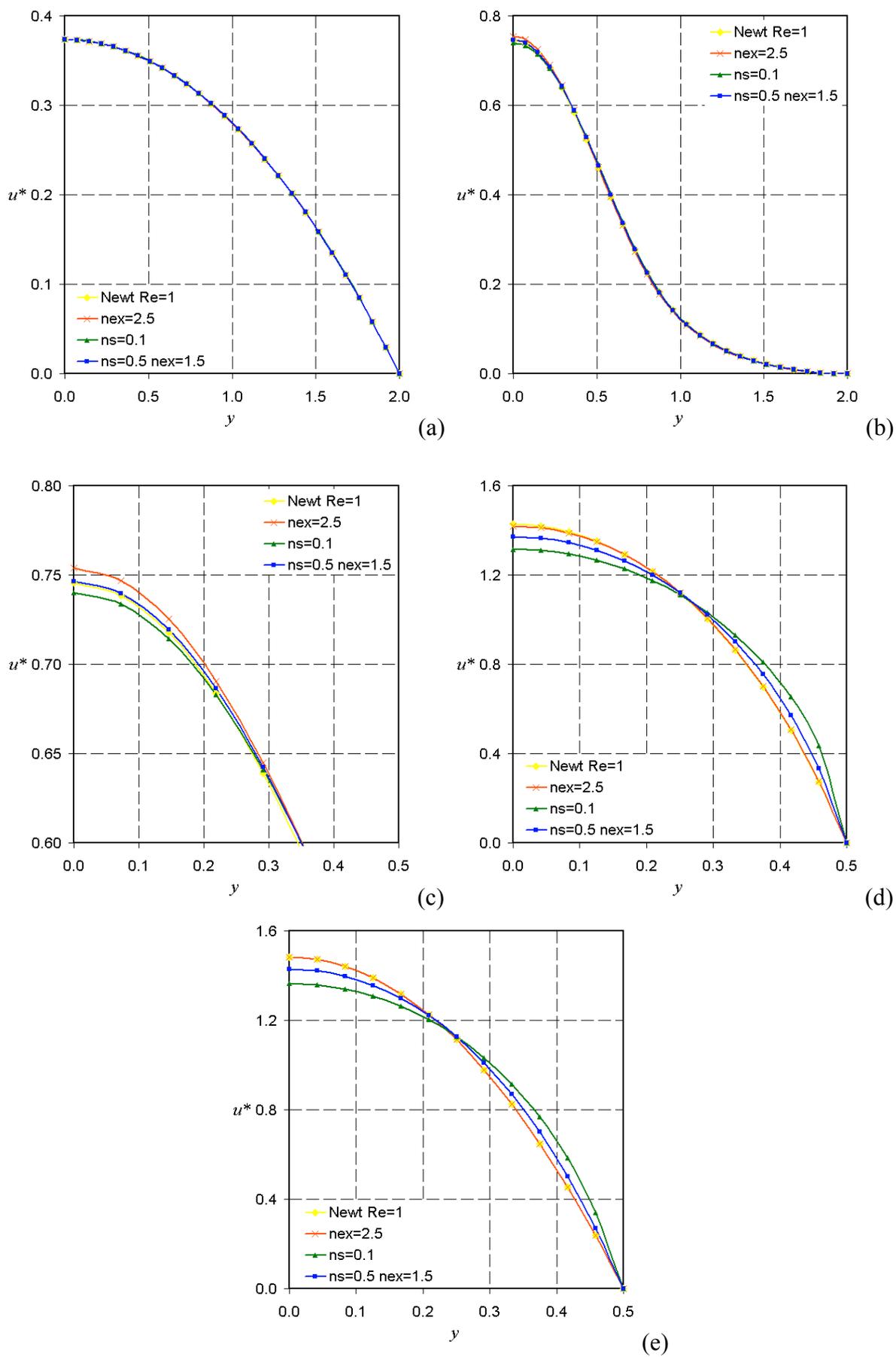


Figura 5.47: Perfis de velocidade a diferentes distâncias da contração: (a)  $-11L$ , (b)  $-0.5L$ , (c)  $-0.5L$  (detalhe), (d)  $0.375L$  e (e)  $2.5L$ .

No caso (a), observa-se que todos os fluidos apresentam o mesmo perfil de velocidade a uma distância a montante da contração, onde o escoamento ainda não é perturbado pelos efeitos elípticos gerados pela contração. Nesta região, o escoamento é predominantemente cisalhante, mas as taxas de deformação não são altas o suficiente para que a pseudoplasticidade tenha algum efeito significativo na dinâmica dos escoamentos para um número de Deborah da ordem de 0.6. No caso (b), pouco a montante da contração, observa-se que os perfis de velocidade são bastante semelhantes. No entanto, o item (c) apresenta um detalhe desses perfis, na linha de simetria, mostrando que:

- O fluido pseudoplástico ( $n_s=0.1$  e  $n_{ex}=1.0$ ) apresenta o perfil mais achatado, com a menor velocidade máxima.
- O fluido com efeitos de *shear-thinning* e *extensional-thickening* ( $n_s=0.5$  e  $n_{ex}=1.5$ ) apresenta um perfil de velocidades mais alongado, com a velocidade máxima um pouco maior do que a do perfil Newtoniano.
- O fluido que somente possui efeito de *extensional-thickening* ( $n_s=1.0$  e  $n_{ex}=2.5$ ) apresenta a maior velocidade máxima na linha de simetria.

Como a região da contração é a região onde  $R_r$  chega a valores mais próximos de zero, ou seja, é uma região de cinemática extensional, conclui-se que o aumento da viscosidade na região da linha de simetria é responsável por aumentar o valor da velocidade máxima, enquanto que a redução da viscosidade torna o perfil mais achatado.

Os itens (d) e (e) mostram o achatamento do perfil de velocidades para o fluido pseudoplástico nas regiões onde a viscosidade decresce devido ao cisalhamento.

A Fig. 5.48 mostra os perfis das componentes  $\tau_{11}$  e  $\tau_{22}$  (adimensionalizadas na forma  $\tau_{ij}^* = (\tau_{ij}L)/(\eta_0 u_0)$ ) na linha de simetria do escoamento, mostrando que, para o fluido que possui somente efeitos de aumento da viscosidade extensional ( $n_{ex}=2.5$ ), ocorre um aumento das tensões normais devido à necessidade de vencer a resistência ao escoamento criada pelo aumento da viscosidade na região de entrada da contração, de cinemática extensional. No caso do fluido que apresenta somente pseudoplasticidade em cisalhamento ( $n_s=0.1$ ), as tensões normais são mais baixas do que no caso Newtoniano, pois, mesmo sem o efeito de pseudoplasticidade na linha de simetria, onde o escoamento é mais extensional, a redução da viscosidade próximo à contração acarreta uma distribuição de mais baixas tensões, influenciando inclusive a linha de simetria. No caso do fluido com  $n_s=0.5$  e  $n_{ex}=1.5$ , as baixas viscosidades na região de cisalhamento e as altas viscosidades na região de extensão acarretam um comportamento intermediário, com tensões levemente mais baixas do que no caso Newtoniano.

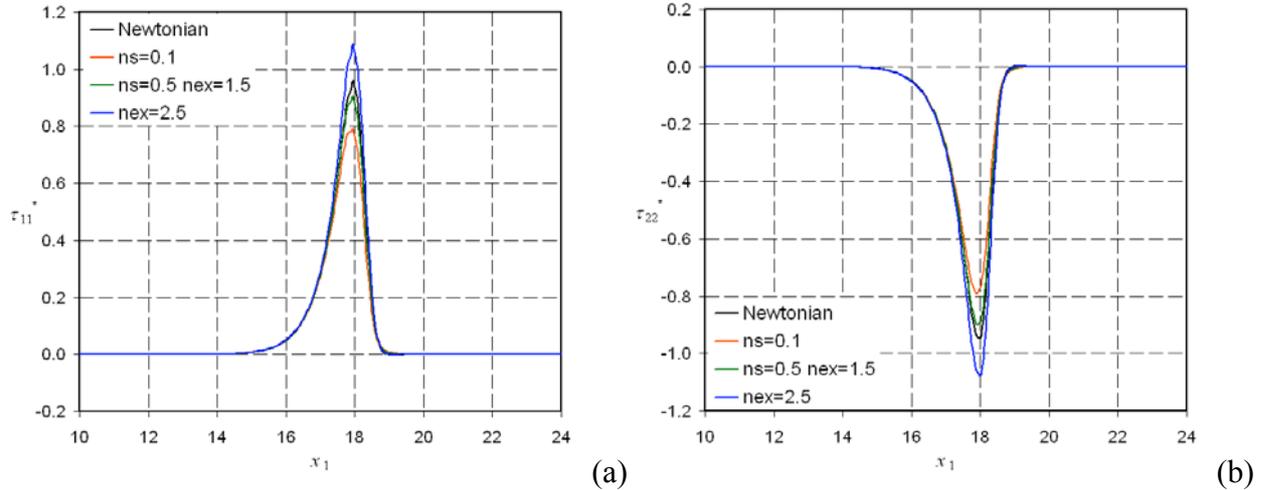


Figura 5.48: Perfis de  $\tau_{11}^*$  e  $\tau_{22}^*$  ao longo da linha de simetria do escoamento.

### 5.2.7 Escoamentos quasi-Newtonianos através de uma contração abrupta com quina viva

Neste item, são estudados escoamentos de fluidos quasi-Newtonianos sensíveis ao tipo de escoamento, empregando elementos do tipo  $Q_2/Q_1/Q_2$  para a formulação em três campos  $\mathbf{d}-p-\mathbf{u}$ . A geometria do problema consiste em uma contração abrupta 4:1, planar, conforme ilustra a Fig. 5.49.

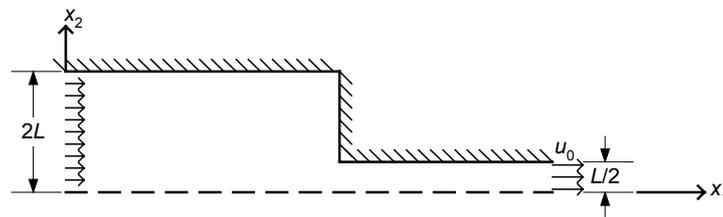


Figura 5.49: Colocação do problema de escoamento através de contração abrupta.

Foram utilizados os mesmos parâmetros do exemplo anterior, com os números de Deborah para caracterizar os escoamentos na forma:

$$De_i = \frac{\lambda_i u_0}{L/2} \quad (5.30)$$

Foram estudados fluidos com o mesmo  $\lambda$  para cisalhamento e extensão, com  $De=0.6$  e  $De=0.4$ . O número de Reynolds foi mantido constante e igual a 1. Uma malha composta por 4368 elementos (18041 nós) foi empregada nas simulações, escolhida entre outras malhas após a realização de um teste de independência dos resultados.

Esta geometria apresenta um ponto de descontinuidade bastante pronunciada na quina da contração, o que dificulta bastante a obtenção das soluções numéricas para os escoamentos dos fluidos sensíveis ao tipo de escoamento, pois esta descontinuidade das tensões influencia fortemente o cálculo do classificador de escoamentos  $R_r$ , impedindo a convergência dos resultados.

Abaixo são apresentados resultados compreendendo três casos:

- (a)  $De=0.4$ ,  $n_s=0.2$  e  $n_{ex}=1.0$ , um fluido pseudoplástico dependente da taxa de deformação e da cinemática do escoamento. Sua viscosidade diminui com o aumento da taxa de deformação, mas somente nas zonas de cisalhamento. Foi utilizado um número de Deborah menor nesse caso, por causa da grande dificuldade de convergência encontrada quando se tentou utilizar  $De=0.6$ . Sendo assim, foi utilizado um  $De$  mais baixo para que se pudesse ter uma noção do comportamento de um fluido com ambos *shear-thinning* e *extensional-thickening*, mesmo que de forma bastante suave.
- (b)  $De=0.6$ ,  $n_s=0.5$  e  $n_{ex}=1.5$ , um fluido dependente da taxa de deformação e da cinemática do escoamento, com redução da viscosidade nas zonas de cisalhamento e aumento da mesma nas zonas de extensão.
- (c)  $De=0.6$ ,  $n_s=1.0$  e  $n_{ex}=1.5$ , um fluido com aumento de viscosidade nas regiões extensionais em função da taxa de extensão.

A Fig. 5.50 mostra, para o caso Newtoniano, o campo do classificador de escoamentos  $R_r$ . Observa-se que, na maior parte do domínio, o escoamento pode ser classificado como dominado pelo cisalhamento. No entanto, na região junto à entrada da contração, observa-se uma zona extensional, devido ao afunilamento do escoamento. Algumas zonas de escoamento de corpo rígido existem junto ao canto onde o escoamento apresenta um pequeno vórtice neste caso de número de Reynolds baixo, que pode ser visto na Fig. 5.51, que ilustra a forma das linhas de corrente para este mesmo caso.

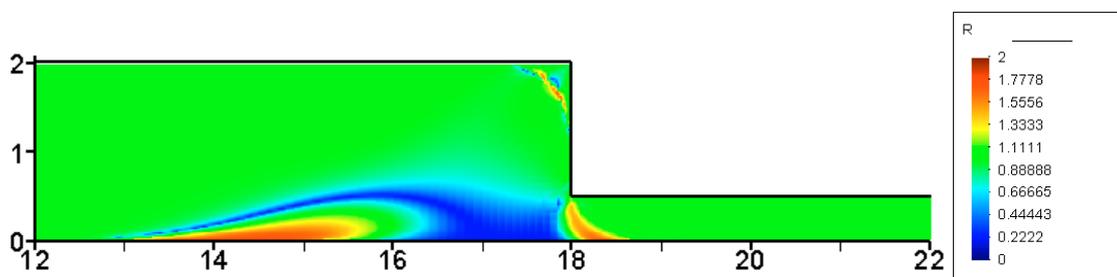


Figura 5.50: Campo de  $R_r$  no escoamento Newtoniano através da contração abrupta.

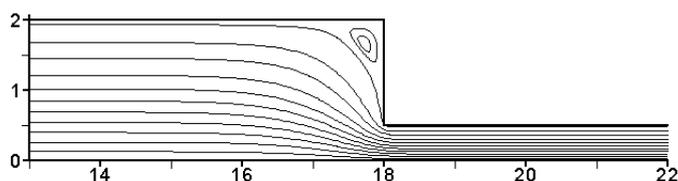


Figura 5.51: Linhas de corrente para o escoamento Newtoniano através da contração abrupta.

A Fig. 5.52 mostra os campos de viscosidade adimensional ( $\eta^* = \eta/\eta_c$ ) obtidos para os três casos analisados.

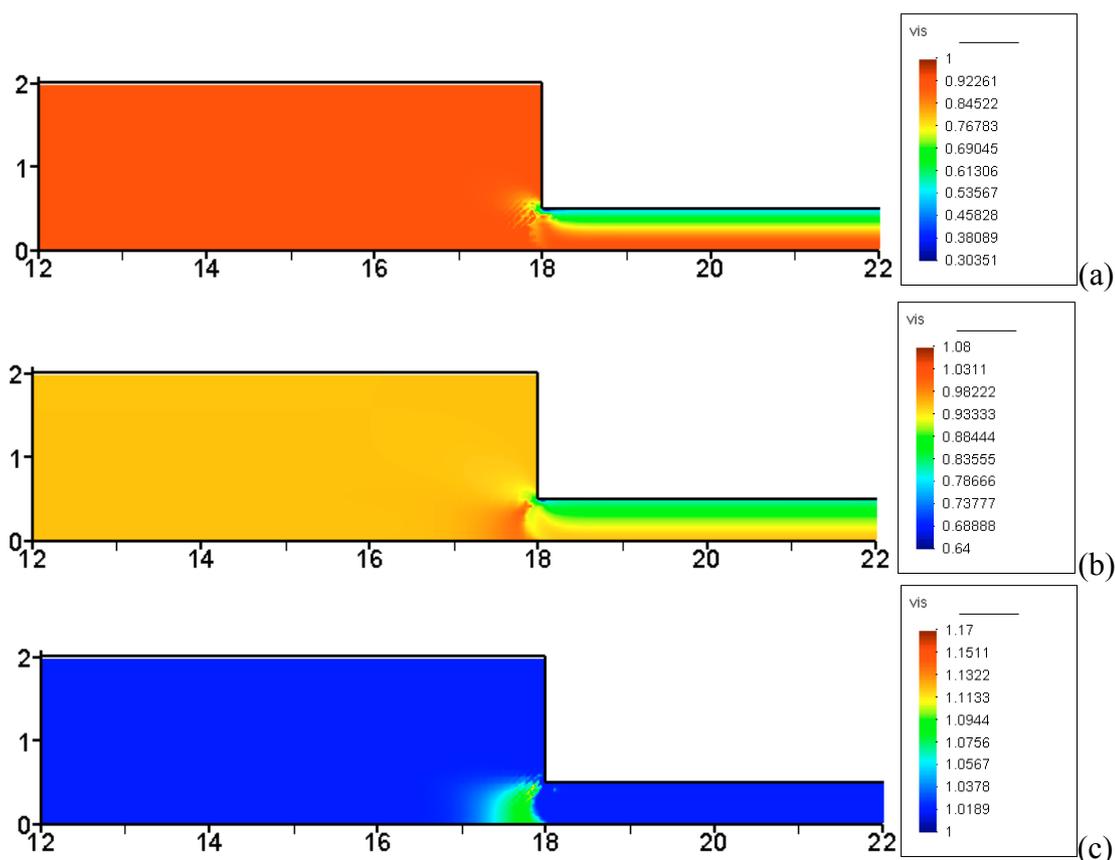
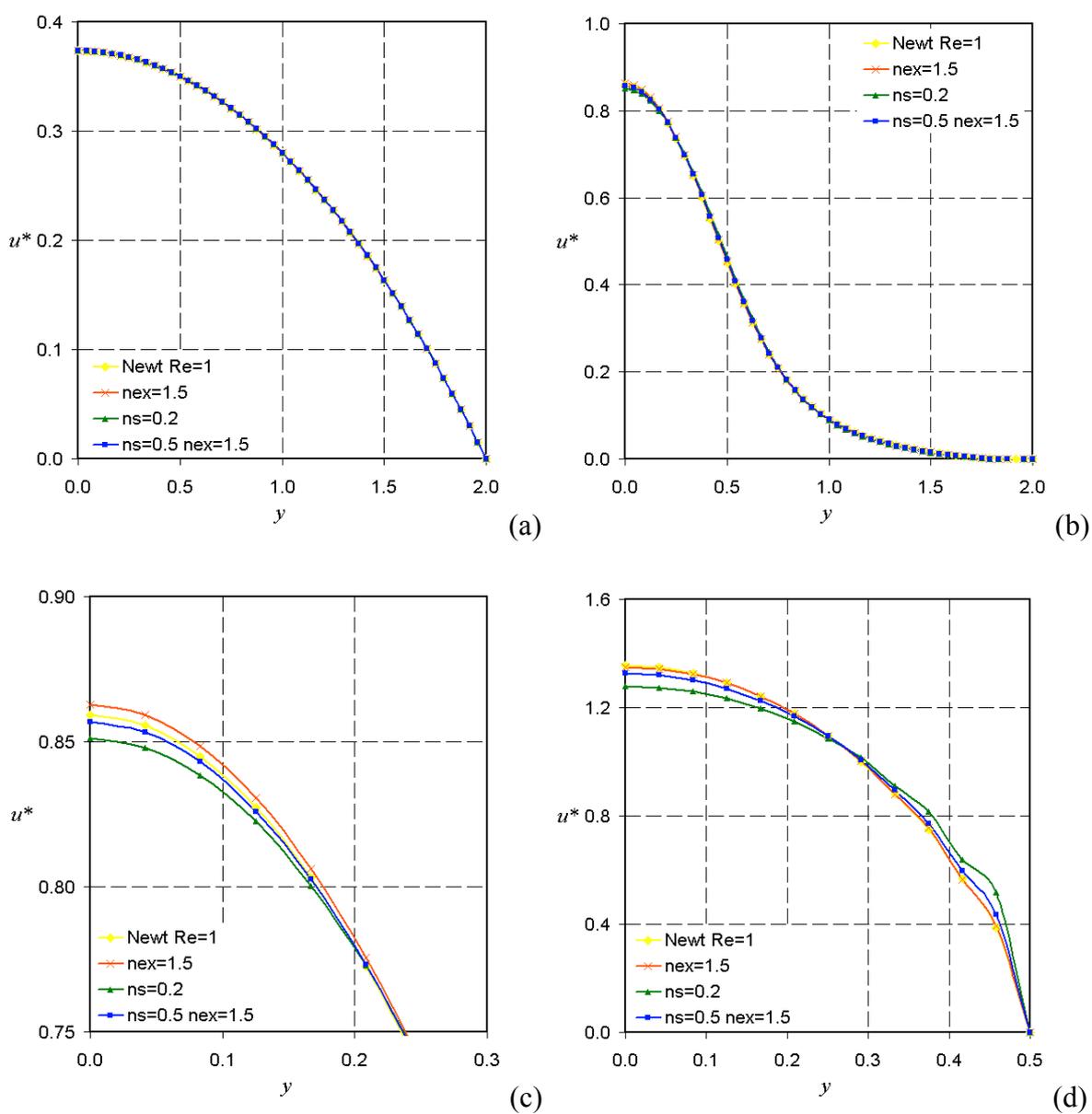


Figura 5.52: Função viscosidade para (a)  $n_s=0.1$  e  $n_{ex}=1.0$ , (b)  $n_s=0.5$  e  $n_{ex}=1.5$  e (c)  $n_s=1.0$  e  $n_{ex}=2.5$ .

No caso (a), observa-se a redução da viscosidade nas regiões de altas taxas de cisalhamento, de forma mais pronunciada no canal mais estreito, onde o cisalhamento é maior. Na região da entrada na contração, como o escoamento é mais extensional, a viscosidade não diminui, visto que nesta região o parâmetro  $R_r$  tem valor próximo a zero. No caso (b), observa-se o aumento da viscosidade na região de cinemática extensional, próximo à entrada da contração, e a redução da viscosidade nas zonas de cisalhamento, próximas às paredes. Nesse caso o campo de viscosidade aparece mais suave por conta do menor número de Deborah. No caso (c), observa-se o aumento da viscosidade na zona de cinemática extensional do escoamento, junto à entrada da contração, com algumas perturbações devido à função viscosidade ser muito sensível

aos campos de velocidade e taxa de deformação. Estes campos de variáveis primais, no entanto, são contínuos no domínio. Nas demais zonas a viscosidade se mantém constante. Nos três casos, a variação da viscosidade não acarretou mudança notável no campo de  $R_r$ .

Na Fig. 5.53 são mostrados os perfis de velocidade  $u^* = u_1/u_0$  obtidos a diferentes distâncias da contração. O item (a) representa os perfis de escoamento desenvolvido a montante da contração. Os itens (b) e (c) correspondem ao perfil logo a montante da contração, este último mostrando um detalhe próximo à linha de simetria. O item (d) corresponde aos perfis exatamente na contração, e o item (e) corresponde aos perfis de escoamento desenvolvido no canal estreito.



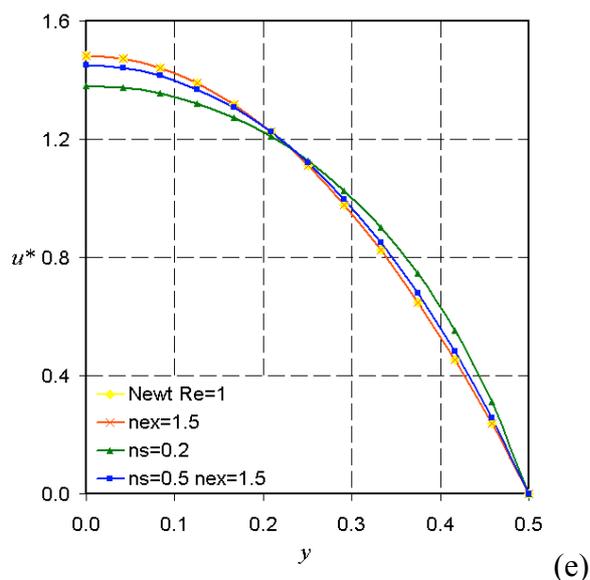


Figura 5.53: Perfis de velocidade a diferentes distâncias da contração: (a)  $-11L$ , (b)  $-0.5L$ , (c)  $-0.5L$  (detalhe), (d)  $0L$  e (e)  $2.5L$ .

No caso (a), observa-se que todos os fluidos apresentam o mesmo perfil de velocidade a uma distância a montante da contração, onde o escoamento ainda não é perturbado pelos efeitos elípticos gerados pela contração. Nesta região, o escoamento é predominantemente cisalhante, mas as taxas de deformação não são altas o suficiente para que a pseudoplasticidade tenha algum efeito significativo na dinâmica dos escoamentos para um número de Deborah da ordem de 0.6 ou 0.4. No caso (b), pouco a montante da contração, observa-se que os perfis de velocidade são bastante semelhantes. No entanto, o item (c) apresenta um detalhe destes perfis, na linha de simetria, mostrando que:

- O fluido pseudoplástico ( $n_s=0.2$  e  $n_{ex}=1.0$ ) apresenta o perfil mais achatado, com a menor velocidade máxima, como no caso da contração com quina arredondada.
- O fluido com efeitos de *shear-thinning* e *extensional-thickening* ( $n_s=0.5$  e  $n_{ex}=1.5$ ) apresenta um perfil de velocidades mais alongado, com a velocidade máxima um pouco menor do que a do perfil Newtoniano, diferente do caso da contração com quina suave, em que o fluido com efeitos mistos apresentou um perfil de velocidade mais alongado do que o fluido Newtoniano. Esta diferença pode ser devido ao campo do classificador  $R_r$  possuir diferentes padrões para os dois casos. No caso da contração com quina suave, a zona predominantemente extensional ocorre a uma distância mais longe a montante da contração do que no caso da contração abrupta, o que pode ter influenciado para que ocorresse esta diferença.
- O fluido que somente possui efeito de *extensional-thickening* ( $n_s=1.0$  e  $n_{ex}=1.5$ ) apresenta a maior velocidade máxima na linha de simetria, i.e., um perfil de velocidade mais alongado.

Como a região da contração é a região onde  $R_r$  chega a valores mais próximos de zero, ou seja, é uma região de cinemática extensional, conclui-se que o aumento da viscosidade na região da linha de simetria é responsável por aumentar o valor da velocidade máxima, enquanto que a redução da viscosidade torna o perfil mais achatado.

Os itens (d) e (e) mostram o achatamento do perfil de velocidades para o fluido pseudoplástico nas regiões onde a viscosidade decresce devido ao cisalhamento.

A Fig. 5.54 mostra os perfis das componentes  $\tau_{11}$  e  $\tau_{22}$  (adimensionalizadas na forma  $\tau_{ij}^* = (\tau_{ij}L)/(\eta_0 u_0)$ ) na linha de simetria do escoamento, mostrando que, para o fluido que possui somente efeitos de aumento da viscosidade extensional ( $n_{ex}=1.5$ ), ocorre um aumento das tensões normais devido à necessidade de vencer a resistência ao escoamento criada pelo aumento da viscosidade na região de entrada da contração, de cinemática extensional. No caso do fluido que apresenta somente pseudoplasticidade em cisalhamento ( $n_s=0.1$ ), as tensões normais são mais baixas do que no caso Newtoniano, pois, mesmo sem o efeito de pseudoplasticidade na linha de simetria, onde o escoamento é mais extensional, a redução da viscosidade próximo à contração acarreta uma distribuição de mais baixas tensões, influenciando inclusive a linha de simetria. No caso do fluido com  $n_s=0.5$  e  $n_{ex}=1.5$ , as baixas viscosidades na região de cisalhamento e as altas viscosidades na região de extensão acarretam um comportamento intermediário, com tensões levemente mais baixas do que no caso Newtoniano. Por causa do número de Deborah baixo, este último caso aparece nos gráficos praticamente sobreposto à curva do fluido Newtoniano.

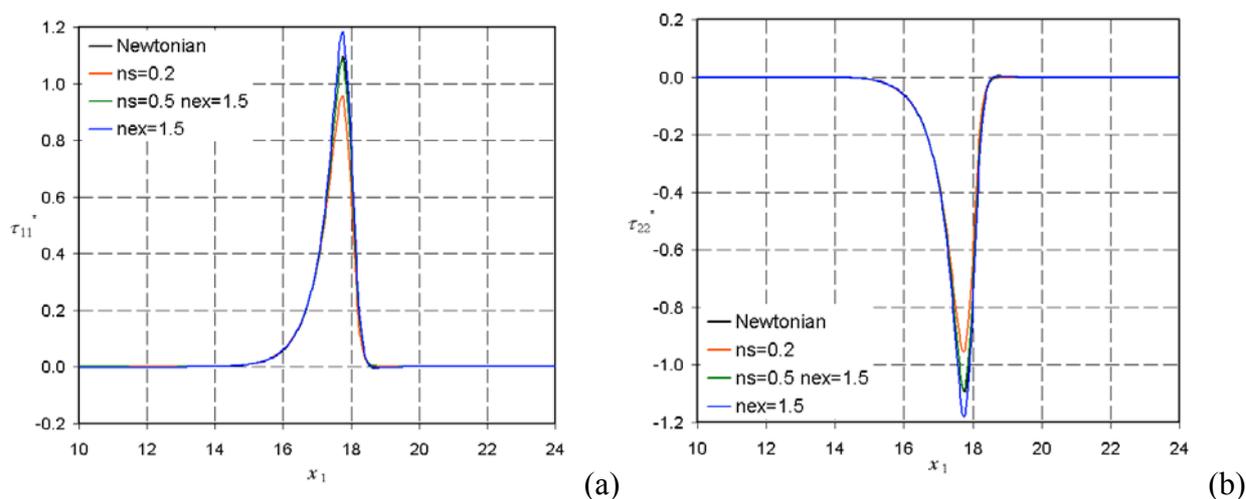


Figura 5.54: Perfis de  $\tau_{11}^*$  e  $\tau_{22}^*$  ao longo da linha de simetria do escoamento.

## 6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

### 6.1. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram apresentados estudos compreendendo três tópicos principais: Mecânica do Contínuo, comportamento material de fluidos e Elementos Finitos em fluidos.

No tópico Mecânica do Contínuo, os assuntos enfatizados foram a descrição cinemática dos movimentos e as leis de balanço que regem os escoamentos. Dentro do item comportamento material dos fluidos, foi enfatizada a modelagem dos comportamentos reológicos mais comuns utilizando a nomenclatura e as leis da Mecânica do Contínuo. Foram estudados, além dos modelos clássicos, modelos reológicos sensíveis ao tipo de escoamento, que prevêm o comportamento diferenciados dos fluidos em diferentes condições cinemáticas. Para o Método de Elementos Finitos foram apresentados as suas vantagens e deficiências na aproximação de escoamentos. Algumas das dificuldades encontradas na aproximação de problemas mistos em velocidade e pressão também aparecem na aproximação de formulações multi-campos, formulações desejáveis do ponto de vista da modelagem mecânica de escoamentos não Newtonianos. Além destes, o requerimento de compatibilização dos sub-espacos de tensão (ou taxa de deformação) e velocidade aparece como uma dificuldade extra. No entanto, a mesma metodologia de estabilização utilizada em formulações  $\mathbf{u}-p$ , o método de Galerkin mínimos-quadrados (GLS), pode ser aplicado a formulações multi-campos gerando aproximações estáveis.

Foi apresentada uma formulação GLS multi-campos que possibilita o uso de uma variável primal, o tensor extra de tensão,  $\boldsymbol{\tau}$ , ou o tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ , além das variáveis velocidade e pressão. Esta formulação também permite o uso de modelo compostos por duas viscosidades ( $\eta_s$ , viscosidade do solvente Newtoniano, e  $\eta_p$ , viscosidade polimérica), e, principalmente, a utilização de uma viscosidade variável, que pode ser função do segundo invariante do tensor taxa de deformação e de um classificador cinemático de escoamentos escalar.

Esta formulação foi implementada em um código de elementos finitos desenvolvido no LAMAC/UFRGS, o GNLFEM, construído com base no método de Newton para a solução de sistemas.

O código foi validado através da comparação com resultados da literatura. Utilizando a formulação GLS multi-campos para ambos tensão e taxa de deformação, utilizando diversas

combinações de elementos, foram aproximados escoamentos em cavidades, variando-se o número de Reynolds e as propriedades dos fluidos. Foram investigadas as características mais relevantes aos problemas a serem resolvidos, como os efeitos de inércia e os efeitos de aumento ou redução de viscosidade dependente da taxa de deformação. Os resultados se apresentaram coerentes com as referências. Isso permitiu concluir que a formulação multi-campos GLS e a metodologia de solução utilizada são eficientes para aproximar escoamentos a moderados números de Reynolds (até 500) e com viscosidade variável.

Em seguida, foram apresentadas aproximações numéricas de escoamentos de fluidos pseudoplásticos (função viscosidade de Carreau), em contrações, utilizando a formulação  $\boldsymbol{\tau}-p-\mathbf{u}$  com elementos  $Q_1/Q_1/Q_1$ . Foram estudados um domínio planar e um domínio axissimétrico. Em ambos os casos, foram gerados campos estáveis para todas as variáveis. Observou-se que os fluidos mais pseudoplásticos geram perfis de velocidade mais achatados na contração, diminuem o tamanho do vórtice no canto a montante da contração e reduzem drasticamente as quedas de pressão ao longo do escoamento.

Um caso puramente cisalhante, o escoamento entre duas placas planas, foi aproximado utilizando a formulação  $\mathbf{d}-p-\mathbf{u}$  e elementos  $Q_2/Q_1/Q_2$ . Foram empregadas as funções de viscosidade de Carreau e a de um fluido quasi-Newtoniano sensível ao tipo de escoamento, com a viscosidade  $\eta_s$  modelada também por uma função de Carreau. Os resultados para ambos os modelos foram idênticos, visto que o parâmetro classificador de escoamentos,  $R_r$ , tem o valor igual a 1 em todo o domínio, caracterizando um escoamento puramente cisalhante.

Finalmente, foram estudados escoamentos de fluidos quasi-Newtonianos sensíveis ao tipo de escoamento em contrações 4:1, uma contração com a quina arredondada e uma contração abrupta com canto vivo. Foi utilizada a formulação GLS  $\mathbf{d}-p-\mathbf{u}$  com elementos  $Q_2/Q_1/Q_2$ . Os problemas se mostraram de lenta e difícil convergência, e somente foram atingidas soluções convergidas para baixos números de Deborah ( $De=0.6$  ou  $De=0.4$ ), especialmente no caso da contração abrupta. Acredita-se que esta dificuldade se deve ao parâmetro  $R_r$  ser muito sensível a todas as variáveis locais: componentes da velocidade, taxa de deformação e suas derivadas. A evolução dos campos  $\mathbf{d}-p-\mathbf{u}$  não gera campos de viscosidade convergentes. Assim mesmo, foram estudadas as características dos escoamentos quasi-Newtonianos nas contrações, utilizando baixos números de Deborah para quatro tipos de fluidos: um com somente características de pseudoplasticidade em cisalhamento, outro com pseudoplasticidade em cisalhamento e dilatância em escoamento extensional, e outro ainda com somente dilatância extensional, mas todos sensíveis ao tipo de escoamento. O quarto sendo um fluido Newtoniano. Foram calculado os campo de  $R_r$  e todos se mostraram bastante semelhantes, com uma região

extensional junto à contração e escoamento puramente cisalhante longe da contração. O aumento da viscosidade junto à contração e a redução da mesma junto às paredes nas regiões cisalhantes são responsáveis pelas diferentes características da dinâmica dos escoamentos dos diferentes fluidos. Foi observado que os fluidos com mais efeitos de dilatância extensional geram perfis de velocidade mais alongados na entrada da contração, com maior velocidade máxima na linha de simetria. Os fluidos mais pseudoplásticos geram perfis de velocidade na entrada mais achatados. Nas regiões longe da contração, principalmente à sua jusante, os perfis pseudoplásticos são notavelmente mais achatados. Longe e a montante da contração, todos os perfis de velocidade aparecem sobrepostos pois nesta região ocorrem somente baixas taxas de deformação, não afetando a viscosidade para fluidos com baixos números de Deborah. Os perfis de tensões normais ao longo da linha de simetria também foram analisados. Nas regiões longe da contração o escoamento é desenvolvido então estas tensões têm valor zero. Junto à contração, ocorre um salto no valor das tensões normais junto à linha de simetria (com valores positivos de  $\tau_{11}$  e negativos de  $\tau_{22}$ ). Neste local, os picos gerados pelos fluidos com efeito de dilatância extensional é maior, pois estes fluidos experimentam o aumento da viscosidade junto à contração, região extensional.

## 6.2. PERSPECTIVAS FUTURAS

O trabalho realizado para a confecção desta tese abre espaço para a continuidade da pesquisa em Dinâmica dos Fluidos não Newtonianos Computacional seguindo a linha de métodos estabilizados do tipo Galerkin mínimos-quadrados, e também na área de Reologia, com respeito ao estudo de equações constitutivas para a modelagem dos diversos efeitos não Newtonianos conhecidos.

O grupo de pesquisa do LAMAC deve dar continuidade a este trabalho enfatizando os itens listados abaixo:

- Análise das estimativas de erro e estabilidade da formulação GLS multi-campos apresentada.
- Extensão do código utilizado a uma versão tri-dimensional, o que o tornará mais versátil na aproximação de problemas de interesse prático.
- Modificação do algoritmo de solução do sistema linear no método de Newton. Atualmente, o código está estruturado para realizar as operações da solução por eliminação Gaussiana, que cria uma alta demanda computacional por memória e tempo de processamento. Acredita-se que a implementação de um método iterativo deve ser mais eficiente computacionalmente, reduzindo a demanda de memória e o tempo de processamento, permitindo assim o uso de

malhas muito refinadas, geometrias tri-dimensionais e aumentando a limitação de graus de liberdade. Entre os métodos possíveis está o Método de Gradientes Conjugados.

- Implementação, na formulação apresentada neste trabalho, de equações constitutivas com efeitos viscoelásticos, como os modelos Maxwell-B, Oldroyd-B, White-Metzner e PTT [Bird et al., 1987]. A estabilização do termo advectivos da equação constitutiva pode ser feita também utilizando uma metodologia do tipo GLS [Behr et al., 2004]. Os sub-espacos utilizados são os mesmos da formulação GLS da Eq. (5.13). Assim, o problema consiste em, dada  $\mathbf{b}$  e as condições de contorno pertinentes, achar a tripla  $(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \mathbf{Y}^h \times P^h \times \mathbf{V}^h$  tal que:

$$B(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) = F(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}), \quad (\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) \in \mathbf{Y}^h \times P^h \times \mathbf{V}^h \quad (5.31)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u}; \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2\eta}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{S}) - (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{S}) + \frac{\lambda}{2\eta}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{S}) + \\ &+ \rho([\text{grad } \mathbf{u}]\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \text{div } \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}(\mathbf{v})) + (\text{div } \mathbf{u}, q) + \\ &+ \sigma 2\eta \left( \frac{1}{2\eta} \boldsymbol{\tau} + \frac{\lambda}{2\eta} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{D}(\mathbf{u}), \frac{1}{2\eta} \mathbf{S} + \frac{\lambda}{2\eta} \overset{\nabla}{\mathbf{S}} - \mathbf{D}(\mathbf{v}) \right) + \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \tau(\text{Re}_K)(\rho[\text{grad } \mathbf{u}]\mathbf{u} + \text{grad } p - \text{div } \boldsymbol{\tau}, \rho[\text{grad } \mathbf{v}]\mathbf{u} + \text{grad } q - \text{div } \mathbf{S})_K + \\ &+ (\text{div } \mathbf{u}, \delta_2 \text{div } \mathbf{v}) \\ F(\mathbf{S}, q, \mathbf{v}) &= (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \tau(\text{Re}_K)(\mathbf{b}, \rho[\text{grad } \mathbf{v}]\mathbf{u} + \text{grad } q - \text{div } \mathbf{S})_K \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde  $\sigma$  é um parâmetro de estabilização que pode ser calculado considerando o número de Deborah local.

Os parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  são os parâmetros do modelo de Maxwell.

Este trabalho promoveu o estudo de diversos tópicos de interesse para a pesquisa e a ciência:

- Mecânica do Contínuo: foram enfocados a cinemática dos corpos, os tensores métricos, as leis de conservação, e as leis constitutivas para os corpos contínuos.
- Reologia: estudou-se o comportamento dos materiais fluidos e sua descrição através de diversos tipos de modelos constitutivos.

- Classificação de escoamentos: foi dada especial atenção a este tópico, o qual é bastante pertinente para a escolha das equações constitutivas e o entendimento do que é previsto por tais equações nos diversos regimes de escoamento.
- Método dos elementos finitos: foram estudados os princípios para a construção do método clássico de Galerkin e as dificuldades deste no caso da aproximação de escoamentos de fluidos incompressíveis. Foram estudadas metodologias de estabilização e testadas diferentes possíveis formulações. Estas formulações foram implementadas em um código computacional próprio, o qual foi utilizado para a geração dos resultados numéricos apresentados.
- Dinâmica dos escoamentos: a dinâmica de diversos escoamentos foi estudada a partir dos resultados gerados, proporcionando a interpretação física dos mesmos.

Sendo assim, conclui-se o presente trabalho com a certeza de que foram criadas possibilidades para a investigação em várias linhas de pesquisa no futuro.

## 7. REFERÊNCIAS

- Almeida, R. C., Feijó, R. A., Galeão, A. C., Padra, C., Silva, R. S., 2000. “Adaptive finite element computational fluid dynamics using an anisotropic error estimator”. **Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 182, pp. 379-400.
- Astarita, G., 1967. “Dimensionless groups relevant in the analysis of steady flows of viscoelastic materials”, **I & E C Fundamentals**, vol. 6, pp. 257-262.
- Astarita, G., 1979. “Objective and generally applicable criteria for flow classification”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 6, pp. 69–76.
- Astarita, G., 1980. “Reply to R.R. Huilgol”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 7, pp. 97–99.
- Astarita, G., 1991. “Quasi-Newtonian constitutive equations exhibiting flow-type sensitivity”, **J. Rheology**, vol. 35, pp. 687-689.
- Astarita, G., Marrucci, G., 1974. “**Principles of non-Newtonian fluid mechanics**”. McGraw-Hill, Great Britain.
- Baaijens, F. P. T., 1998. “Mixed finite element analysis for viscoelastic flow analysis: a review”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 79, pp. 361-385.
- Babuska I., 1973. “**The finite element method with lagrangean multipliers**”. vol. 20, pp.179-192.
- Baranger, J., Sandri, D., 1992. “A formulation of Stokes’s problem and the linear elasticity equations suggested by the Oldroyd model for viscoelastic flow”, **M<sup>2</sup>AM Anal. Numér.**, vol. 26, pp. 331-345.
- Barnes, H.A., 1999. “The yield stress – a review or ‘παντα ρει’ – everything flows?”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 81, pp. 133-178.
- Barnes, H.A., Roberts, G.P, 1992. “A simple empirical model describing the steady-state shear and extensional viscosities of polymer melts”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 44, pp. 113-126.
- Behr, M., Franca, L.P., Tezduyar, T.E., 1993. “Stabilized finite element methods for the velocity-pressure-stress formulation of incompressible flows”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 104, pp. 31-48.
- Behr, M., Arora, D., Coronado-Matutti, O., Pasquali, M., 2004. “Stabilized finite element methods of the GLS type for Oldroyd-B viscoelastic fluid”, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.

- Bell, B. C., Surana, K. S., 1994, “ $p$ -version least squares finite element formulation for two-dimensional, incompressible, non-Newtonian isothermal and non-isothermal fluid flow”, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 18, pp. 127-162.
- Beris, A.N., Armstrong, R.C., Brown, R.A., 1984. “Finite element calculation of viscoelastic flow in a journal bearing. I. Small eccentricities”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 10 pp. 141-172.
- Billington, E. W., Tate, A., 1981. “**The physics of deformation and flow**”. McGraw-Hill Inc, U.S.A.
- Binding, D.M., 1991. “Further considerations of axisymmetric contraction flows”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 41, pp. 27-42.
- Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O., 1987. “**Dynamics of polymeric liquids**”. vol. 1, John Wiley & Sons, U.S.A.
- Boger, D.V., 1987. “Viscoelastic flows through contractions”, **Ann. Ver. Fluid Mech.**, vol. 19, pp. 157-82.
- Boger, D.V., 1992. “On viscoelastic flows through abrupt contractions”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 44, pp. 267-279.
- Bonvin, J., Picasso, M., Stenberg, R., 2001. “GLS and EVSS methods for a three-field Stokes problem arising from viscoelastic flows”, **Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.**, vol. 190, pp. 3893-3914.
- Brezzi F., 1974. “On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers”, **RAIRO Anal. Numér.**, vol. 8, pp. 129-151.
- Brooks, A. N. , Hughes, T.J.R., 1982. “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, **Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 32, p. 199-259.
- Brown, R.A., Szady, M.I., Northey, P.J., Armstrong, R.C., 1993. “On the numerical stability of mixed finite element method for viscoelastic flows governed by differential constitutive equations”, **Theor. Comput. Fluid Dyn.**, vol. 5, pp. 77-106.
- Brunn, P.O., Ryssel, E., 1997a. “The Giesekus fluid in  $\omega$ -D form for steady two-dimensional flows”, **Rheol. Acta**, vol. 38, pp. 415–422.
- Brunn, P.O., Ryssel, E., 1997b. “The  $\omega$ -D fluid: general theory with special emphasis on stationary two-dimensional flows”, **Continuum Mech. Thermodyn.**, vol. 9, pp. 73–82.
- Carneiro de Araújo, J. H., Ruas, V., 1998. “A stable finite element method for the axisymmetric three-field Stokes system”, **Comput. Methods in Applied Mech. Eng.** vol. 164, pp. 267-286.

- Carreau, P. J., 1968. Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, Madison.
- Casson, N.A., 1959. “**Rheology of disperse systems**”, in: Mills, C.C. (Ed.), Pergamon, New York, Ch. 5.
- Christie I., Griffiths D. F., Mitchell A. R. et al., 1976. “Finite-element methods for 2nd order differential equations with significant 1st derivatives”, **Int. J. Numer. Meth. Eng.** no. 10, vol. 6, pp. 1389-1396.
- Ciarlet, P. G., 1978. “**The finite element method for elliptic problems**”. North Holland, Amsterdam.
- Claeysen, J. R., Asenjo, E. B., Rubio, O., 2006, “Rotating incompressible flow with a pressure Neumann condition”, **Int. J. for Numerical Methods in Fluids**, vol. 50, pp. 1.26.
- Clough, R. W., 1960. “The finite element in plane stress analysis”, Anais da 2ª ASCE – Conf. on Eletronic Computation”.
- Coleman, B. D., Mizel, W. J., 1968. Arch. Ratl. Mech. Anal., 27, 255.
- Crochet, M. J., Davies, A. R., Walters, K., 1984. “**Numerical simulation of non-Newtonian flow**”, Rheology Series, vol. 1. Elsevier, Netherlands.
- Crochet, M.J., Keunings, R., 1982. “Finite element analysis of die swell of a highly elastic fluid”. **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 10, pp. 339-356.
- Crouzeix, M. e Raviart, P.A., 1973. “Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations”. **RAIRO**, pp.33-76
- Dahlquist, G, Bjorck, A., 1969. “**Numerical Methods**”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Debbaut, B., 1990a. “On the corner vortex in abrupt contractions”, **J. Non-Newt. Fluid Mech.**, vol. 36, pp. 265-275.
- Debbaut, B., 1990b. “On the inertial and extensional effects on the corner and lip vortices in a circular 4:1 abrupt contraction”, **J. Non-Newt. Fluid Mech.**, vol. 37, pp. 281-296.
- Debbaut, B., Crochet, M. J., 1988. “Extensional effects in complex flows”, **J. Non-Newt. Fluid Mech.**, vol. 30, pp. 169-184.
- do Carmo, E. G, Galeão, A. C., 1986. “A consistent formulation of the finite element to solve convective-diffusive transport problems”, **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**. vol. 4, pp. 309-340.
- Donea J., 1984. “Recent advances in computational methods for steady and transient transport problems”. **Nucl. Eng. Des.** 80, vol.2, pp.141-162
- Douglas, J. Jr., Wang, J., 1989. “An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem”, **Math. Comp.**, vol. 52, pp. 495-508.

- Fan, Y., Tanner, R.I., Phan-Thien, N., 1999. "Galerkin/least-squares finite-element methods for steady viscoelastic flows", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 84, pp. 233-256.
- Ferguson, J., Kemplowski, Z., 1991. "**Applied Fluid Rheology**", University Press, Cambridge.
- Ferziger, J. H.; Peric, M., 1999. "**Computational methods for fluid dynamics**". 2 ed., Berlin, Alemanha.
- Fortin, M. Pierre, R., 1989. "On the convergence of the mixed method of Crochet and Marchal for viscoelastic flows", **Comput. Meth. Appl. Mech.** vol. 73, pp. 341-350.
- Fortin, M., Guénette, R., Pierre, R, 1987. "Numerical analysis of the modified EVSS method", **Comput Method Appl**, vol. 143, pp. 79-95.
- Fox, R. W., McDonald, A. T., 2001. "**Introdução à Mecânica dos Fluidos**", 5ed., LTC, Rio de Janeiro.
- Franca L. P., Hughes T. J. R., 1993. "Convergence analyses of Galerkin least-squares methods for symmetrical advective diffusive forms of the Stokes and incompressible Navier-Stokes equations". **Comput Method Appl**, vol. 2 pp. 285-298.
- Franca, L. P., 1998. "Preface". In: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. Vol. 166, pp. 1-2.
- Franca, L. P., Frey, S., 1992. "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**,. vol. 99, pp. 209-233.
- Franca, L. P., Frey, S., Hughes, T. J. R., 1992. "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**., vol. 95, pp. 253-276.
- Franca, L. P., Hughes, T. J. R., 1988. "Two classes of mixed finite element methods". **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**. vol. 69, pp. 89-129.
- Franca, L. P., Stenberg, R., 1991. "Error analysis of some Galerkin least squares methods for the elasticity equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(6), pp. 1680-1697.
- Franca, L. P., 1987. **New Mixed Finite Element Methods**. Tese PhD. Stanford University, Stanford.
- Franca, L.P., do Carmo, E.G.D., 1989. "The Galerkin gradient least-squares method". **Compu. Methods Applied Mech. Engrg**. vol. 73, pp. 41 - 54.
- Frey, S., 1991. **Uma nova formulação de elementos finitos**. Tese de Doutorado. PUC-RJ, Rio de Janeiro, Brasil.

- Galeão A. C., do Carmo E. G. D., 1988. "A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems", **Comput. Method Appl. Mech. Engrg.**, vol. 68, pp.83-95.
- Gatica, G.N., González, M., Meddahi, S., 2004. "A low-order mixed finite element method for a class of quasi-Newtonian Stokes flows. Part I: a priori error analysis", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 193, pp. 881-892.
- Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T., 1982. "Hi-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and the multigrid method". **J. Comput Physics**. vol. 48, pp. 387-411.
- Gresho, P. M., 1991. "Some current CFD issues relevant to the incompressible Navier-Stokes equations". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 87 (2-3), pp. 201-252.
- Guénette, R., Fortin, M, 1995, "A new mixed finite element method for computing viscoelastic flows", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 60, pp. 27-52.
- Gurtin, M. E., 1981. "**An introduction to continuum mechanics**". Academic Press, New York, U.S.A.
- Hannani, S. K., Stanislas, M., Dupont, P., 1995. "Incompressible Navier-Stokes computations with SUPG and GLS formulations – a comparison study". **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 124, pp. 153-170.
- Harari I., Hughes T.J.R., 1994. "Stabilized finite-element methods for steady advection-diffusion with production". **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 115, pp. 165-191.
- Harari, I., Franca, L. P., Oliveira, S., 2001. "Streamline design of stability parameter for advective-diffusion problems". **Journal of Computational Physics**, vol. 171, pp. 115-131.
- Heinrich, J. C., Huyakorn, P. S., Zienkiewicz, O. C., et al, 1997. "Upwind finite element scheme for 2 dimensional convective transport-equation". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 11 (1), pp. 131-143.
- Hughes , T. J. R., Franca, L.P., Balestra, M., 1986. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations". **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, vol. 59, pp. 85-99.
- Hughes , T.J.R., 1987. "**The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A.
- Hughes T. J. R., Mallet M., 1986. "A New Finite-Element Formulation For Computational Fluid-Dynamics .4. A discontinuity capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems". **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol 58, pp. 329-336.

- Hughes, T. J. R., Brooks, A., 1982. "A theoretical framework for Petrov-Galerkin Methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure". **Finite Elements in Fluids**, vol. 4.
- Hughes, T. J. R., Franca, L. P., Hulbert, G. M., 1989. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/Least squares method for advective equations." **Comp. Meth. App. Mech. Eng.**, vol. 73, pp. 173-189.
- Hughes, T. J. R., Liu, W. K., Brooks, A., 1979. "Finite element analysis of incompressible viscous flows by the Penalty Function Formulation", **J. Comp. Physics**. vol. 30, pp.1-60.
- Hughes, T.J.R., Franca, L.P., 1987. "A new finite-element formulation for computational fluid-dynamics .VII: the Stokes problem with various well-posed boundary-conditions - symmetrical formulations that converge for all velocity pressure spaces", **Comput. Method Appl. Mech. Engrg.**, vol. 65, pp. 85-96.
- Hughes. T. J. R., Shakib, F., 1988. "Computational aerodynamics and the finite element method" in Proc. AIAA 26<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting. Reno, Nevada, U.S.A..
- Huilgol, R.R., 1980. "Comments on objective and generally applicable criteria for flow classification, by G. Astarita", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 7, pp. 91–95.
- Johnson, C., Nävert, U., 1981. "An analysis of some finite element methods for advection-diffusion problems". In: Axelson, O., Frank, L. S., Van der Sluis, A., eds., **Analytical and numerical approaches to asymptotic problem in analysis**, North-Holland, Amsterdam.
- Johnson, C., Nävert, U., Pitkäranta J., 1984. "Finite element method for the linear hyperbolic problems", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 45, pp. 285-312.
- Johnson, C., Saranen, J., 1986. "Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes Equations", **Mathematics of Computation**, vol. 47, pp. 1-18.
- Jurjevic, R., 1999, "Modelling of two-dimensional laminar flow using finite element method", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 31, pp. 601-626.
- Kessler, M. P., Awruch, A. M., 2004. "Analysis of hypersonic flows using finite elements with Taylor Galerkin scheme". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 44, n. 12, pp. 1355-1376.
- Kim, M. E., Brown, R. A., Armstrong, R. C., 1983, "The roles of inertia and shear-thinning in flow of an inelastic liquid through an asisymmetric contraction". **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 13, pp.341-363.
- Ku, H. C., Hatzivramidis, 1985. "Solutions of the two dimensional Navier-Stokes equations by Chebyshev expansion methods". **Computer & Fluids**, vol. 13, pp. 99-113.
- Landau, L., Lifchitz, E., 1971. "**Mécanique des fluides**". Edições Mir, Moscou.

- Leonard, B. P., 1979. "A survey of finite differences of opinion on numerical muddling of the incomprehensible defective convection equation, finite element methods for convection dominated flows". AMD. vol. 34, ASME, NY, USA.
- Maliska, C., 2004. "Transferência de calor e mecânica dos fluido computacional", LTC, 2 ed., Brasil.
- Malkus, D. S., Hughes, T. J. R., 1978. "Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts" **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 15, pp. 63-81.
- Manica, R., Bortoli, Á. L., 2004. "Simulation of sudden expansion flows for power law fluid". **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 121, n. 1, pp. 35-40.
- Marchal, J. M., Crochet, M. J., 1986. "Hermitian finite elements for calculating viscoelastic flow", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 20, pp. 187-207.
- Marchal, J. M., Crochet, M. J., 1987. "A new mixed finite element for calculating viscoelastic flow", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 26, pp. 77-114.
- Mattos, H.S.C., 1998, "A thermodynamically consistent constitutive theory for fluids", **International Journal of Non-Linear Mechanics**, vol. 33, pp. 97-110.
- Mizukami A., Hughes T. J. R., 1985. "A Petrov-Galerkin finite-element method for convection-dominated flows - An accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle". **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 2, pp. 181-193.
- Neofytou, P., 2005, "A 3rd order upwind finite volume method for generalised Newtonian fluid flows", **Advances in Engineering Software**, vol. 36, pp. 664-680.
- Oden, J. T., Carey, G. F., 1983. "**Finite elements: mathematical aspects**". vol. IV, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.
- Papanastasiou, T.C., 1987. "Flows of materials with yield", **Journal of Rheology**, vol 31, pp. 385-404.
- Patankar. S. V., 1980. "**Numerical heat transfer and fluid flow**". McGraw-Hill.
- Petry A. P., Awruch, A. M., 2006. "Large eddy simulation of three-dimensional turbulent flows by the finite element method". **J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.**, vol. 28, no.2, pp. 224-232.
- Pironneau, O., 1989. "**Finite element methods for fluids**", John Wiley.
- Prager, W., 1945. "Strain hardening under combined stresses". **J. App. Physics**. vol. 16, pp. 837-843.
- Reddy, J. N., Gartling, D. K., 1994. "**The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**". CRC Press, Inc., U.S.A.
- Reiner, R., 1945. "A mathematical theory of dilatancy". **A. J. Math**, vol. 67, pp. 350-362.

- Rektorys, K., 1975. “**Variational methods in mathematics, science and engineering**”, D Reidel Publishing Co.
- Romero, O.J., Suszynski, W.J., Scriven, L.E., Carvalho, M.S., 2004. “Low-flow limit in slot coating of dilute solutions of high molecular weight polymer”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 118, pp. 137-156.
- Ruas, V., 1994. “An optimal three-field finite element approximation of the Stokes system with continuous extra-stresses”, **Japan J. Indust. Appl. Math.**, vol. 11(1), pp. 113-130.
- Ruas, V., 1996. “Finite element methods for the three-fields Stokes system in  $\mathbb{R}^3$ ”, **M<sup>2</sup>AM Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, 30(4), pp. 489-525.
- Ruas, V., 1997. “Galerkin-least-squares finite element methods for the three-field Stokes system in  $\mathbb{R}^3$ ”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 142, pp. 235-256.
- Ruas, V., Carneiro de Araújo, J. H., Silva Ramos, M. A. M., 2004. “Multi-field finite element methods with discontinuous pressures for axisymmetric incompressible flow”, **J. Comput. Appl. Math.**, vol. 168, pp. 393-402.
- Ruas, V., Carneiro de Araújo, J.H., Silva Ramos, M. A. M., 1993. “Approximation of the three-field Stokes system via optimized quadrilateral finite elements”, **M<sup>2</sup>AM Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, vol. 27, pp. 107-127.
- Ryssel, E., Brunn, P.O., 1997. “The Giesekus fluid in  $\omega$ -D form for steady two-dimensional flows”, **Rheol. Acta**, vol. 38, pp. 423–436.
- Ryssel, E., Brunn, P.O., 1999a. “Flow of a quasi-Newtonian fluid through a planar contraction”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 85, pp. 11-27.
- Ryssel, E., Brunn, P.O., 1999b. “Comparison of a quasi-Newtonian fluid with a viscoelastic fluid in a planar contraction”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 86, pp. 309–335.
- Sampaio, P. A. B., Coutinho, A. L. G. A., 2001. “A natural derivation of discontinuity capturing operator for convection-diffusion problems” **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, pp. 6291-6308.
- Schlichting, H., 1968. “**Boundary-layer theory**”. McGraw-Hill, New York.
- Schreiber, R., Keller, H.B., 1983. “Driven cavity flows by efficient numerical techniques”. **Journal of Computational Physics**. vol. 49, pp. 310-333.
- Schunk, P. R., Scriven, L. E., 1990. “Constitutive equation for modeling mixed extension and shear in polymer solution processing”, **J. Rheology**, vol. 34 (7), pp. 1085-1119.
- Sivaloganathan, S., Shaw, G. J., 1988. “A Multigrid method for recirculating flows”, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**. vol 8, pp. 417-440.

- Slattery, J. C., 1999. “**Advanced transport phenomena**”. Cambridge University Press, U.S.A.
- Song, W.N., Xia, Z.M., 1994. “A phenomenological viscosity model for polymeric fluid”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 53, pp. 151-163.
- Souza Mendes, P. R., Padmanabhan, M., Scriven, L. E., Macosko, C.W., 1995. “Inelastic constitutive equations for complex flows”, **Rheologica Acta**, vol. 34, pp. 209-214.
- Souza Mendes, P. R., Dutra, E. S. S., 2004. “Viscosity function for yield-stress liquids”, **Applied Rheology**, vol. 14, pp. 296-302.
- Steffe, J. F., 1992. “**Rheological methods in food process engineering**”. Freeman, Michigan.
- Stokes, G. G., 1845. “On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solid”.
- Sun, J., Smith, M.D., Armstrong, R.C., Brown, R.A., 1999. “Finite element method for viscoelastic flows based on the discrete adaptive viscoelastic stress splitting and the discontinuous Galerkin method: DAVSS-G/DG”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 86, pp. 281-307.
- Szady, M.I., Salomon, T.R., Liu, A.W., Bornside, D.E., Armstrong, R.C., Brown, R.A., 1995. “A new mixed finite element method for viscoelastic flows governed by differential constitutive equations”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 59 pp. 215-243.
- Szepessy, A., 1989. “**Convergence of the streamline diffusion finite element methods for hyperbolic conservation laws**”. Tese de PhD. Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Suécia.
- Tanner, R.I., 1988. “**Engineering Rheology**”, Oxford: Clarendon Press, 451p.
- Tezduyar, T. E., Mittal, S., Ray, S. E., Shih, R., 1992. “Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements”. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**. vol. 95, pp. 221-242.
- Tezduyar, T.E., Osawa, Y., 2000. “Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors”, **Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.**, vol. 190, pp. 411-430.
- Thompson, R. L., Souza Mendes, P. R., 2005. “Persistence of straining and flow classification”, **International Journal of Engineering Science**, pp. 79-105.
- Thompson, R.L., Souza Mendes, P.R., Naccache, M.F., 1999. “A new constitutive equation and its performance in contraction flows”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol.86, pp. 375–388.
- Truesdell, C., Noll, W., 1965. “The non-linear field theories of mechanics”, In: **S. Flugge, Handbuch Der Physic**. vol. 3/3, Springer-Verlag, Berlin.
- Truesdell, C., Toupin, R. A., 1960. “The classical field theories”, In: **S. Flugge, Handbuch Der Physic**, vol. 3/1, Springer-Verlag, Berlin.

- Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., Topp, L. J., 1956. “Stiffness and deflection analysis of complex structures”. **Aero Science**. vol. 23, pp. 805-823.
- Vielmo, H. A.; Prata, A. T., “Simulação numérica de transferência de calor e massa na solidificação direcional”, 1994. In: V Encontro Nacional de Ciências Térmicas, 1994, São Paulo, SP. Anais, pp. 505-508.
- Weissenberg, K., 1947. “**Nature**”, vol.159, pp. 310-311.
- White, F. M., 1974. “Viscous Fluid Flow”. Mc Graw-Hill, New York.
- White, S.A., Gotsis, A.D., Baird, D.G., 1987. “Review of the entry flow problem: experimental and numerical”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 24, pp. 121-160.
- Yasuda, K., Armstrong, R. C., Cohen R. E., 1981. **Rheol. Acta**. vol. 20, pp.163-178.
- Zhou, L., Zhou, T.X., 1997, “Stabilized finite element methods for the velocity-pressure-stress formulation of incompressible flows: nonlinear model”, **J. Comput. Appl. Math.**, vol. 81, pp. 19-28.
- Zinani, F. S. F., Frey, S., 2006, “Galerkin Least-Squares Finite Element Approximations for Isochoric Flows of Viscoplastic Liquids”, **Journal of Fluids Engineering – Transactions of the ASME**, vol. 128, Issue 4, pp. 856-863.
- Zienkiewicz, O. C., 1975. “Why finite elements?”. In: Gallgher et al., eds., Finite Elements in Fluids, vol. 2, pp. 1-23, Wilry, London.