

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÕES EXATAS PARA A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ BIDIMENSIONAL EM
REGIME TRANSIENTE

por

Daniel Beck

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, julho de 2005

SOLUÇÕES EXATAS PARA A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ BIDIMENSIONAL EM
REGIME TRANSIENTE

por

Daniel Beck
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Jorge R. S. Zabadal.

Comissão de Avaliação:

Prof^a. Dra. Adriane P. Petry

Prof. Dr. Argimiro R. Secchi

Prof. Dr. Jorge A. V. Ale

Prof. Dr. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 29 de julho de 2005

RESUMO

Este trabalho apresenta novas soluções exatas para a equação de Helmholtz bidimensional transiente, as quais são obtidas através de Split, simetrias de Lie e transformações de Bäcklund. O objetivo do trabalho proposto é obter um procedimento sistemático que permita gerar soluções que descrevam escoamentos tridimensionais, usando grupos de Lie já disponíveis na literatura especializada para o sistema contendo as equações de Navier-Stokes tridimensionais e a equação da continuidade para escoamentos incompressíveis em geometria cartesiana. A principal dificuldade em obter soluções tridimensionais usando grupos de Lie reside na necessidade de se conhecer previamente ao menos uma solução bidimensional transiente que satisfaça as condições de não-deslizamento e não-penetração na interface sólida, bem como a prescrição de escoamento potencial distante do corpo submerso. As soluções para as equações de Navier-Stokes bidimensionais são obtidas resolvendo a equação de Helmholtz para a função corrente. Algumas das soluções foram empregadas para simular escoamentos viscosos em torno de cilindros, reproduzindo características qualitativas do escoamento transversal, e gerando resultados com razoável concordância em relação aos dados experimentais.

ABSTRACT

This work presents new exact solutions to the unsteady two-dimensional Helmholtz equation, which were obtained by split, Lie Symmetries and Bäcklund transformations. The aim of the proposed work is to obtain a systematic procedure that allows to generate exact solutions which describe three-dimensional flows, using a Lie symmetry group yet available in specialized literature for the system containing the three-dimensional Navier-Stokes equations and the continuity equation for incompressible flows in cartesian geometry. The major difficulty in obtaining the three-dimensional solutions using the Lie group relies on the need of knowing beforehand at least one two-dimensional unsteady solution which satisfies the no slip and no penetration conditions at the solid interface, as well as the prescriptions of potential flows far from the immersed body. The two-dimensional solutions for the Navier-Stokes equations are obtained by solving the Helmholtz equation for the stream function. Some of the solutions were employed to simulate viscous flows around cylinders, reproducing qualitative features of the crossflow, and generating results which are in reasonable agreement with experimental data.

ÍNDICE

RESUMO	III
ABSTRACT	IV
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
ÍNDICE DE FIGURAS	VIII
ÍNDICE DE TABELAS	IX
1. INTRODUÇÃO	10
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	12
2.1. O CONCEITO DE SIMETRIA DE LIE	12
2.2. MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO DIRETA	13
2.3. MÉTODOS BASEADOS EM SPLIT	15
3. DESCRIÇÃO DO MÉTODO	19
3.1. MAPEAMENTO EM EQUAÇÃO ORDINÁRIA.	19
3.2. SOLUÇÃO FORMAL	23
3.2.1. CONDIÇÃO INICIAL	25
3.3. OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES EXATAS PARA O CASO NO QUAL w É UMA FUNÇÃO ARBITRÁRIA DE y .	31
3.4. ESTIMATIVA DO RAIO MÉDIO DOS VÓRTICES EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS	37
4. EXTENSÃO PARA OUTRAS GEOMETRIAS	39
5. RESULTADOS E CONCLUSÕES	42
5.1. COMPONENTES DO CAMPO DE VELOCIDADES	49
5.2. COMPONENTES DO GRADIENTE DE PRESSÃO	51
5.3. TENSÕES NORMAIS E TANGENCIAIS	54
5.4. COEFICIENTES DE ARRASTO E SUSTENTAÇÃO	56

5.5. VALOR MÉDIO DA COMPONENTE DE VELOCIDADE	57
6. <u>SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</u>	59
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	61
<u>APÊNDICES</u>	63
APÊNDICE A	63
APÊNDICE B	65
APÊNDICE C	66
APÊNDICE D	68
APÊNDICE E	69
APÊNDICE F	71
APÊNDICE G	76
APÊNDICE H	77
APÊNDICE I	79

LISTA DE SÍMBOLOS

D	diâmetro do cilindro.	$[m]$
C_D	Coefficiente de arrasto.	$[]$
C_L	Coefficiente de sustentação.	$[]$
f	Frequência.	$[H_z]$
F_D	Força de arrasto	$[]$
F_L	Força de sustentação	$[]$
p	Pressão	$[]$
u	Velocidade longitudinal.	$[]$
v	Velocidade transversal.	$[]$
y	Função Corrente.	$[]$
y_0	Função Corrente referente à condição inicial.	$[]$
w	Vorticidade.	$[]$
w_0	Vorticidade referente à condição inicial.	$[]$
ρ	Massa Específica.	$[kg/m^3]$
μ	Viscosidade.	$[kg/m.s]$
ν	Viscosidade cinemática.	$[m^2/s]$
L	Comprimento característico.	$[m]$
u_0	Velocidade inicial.	$[m/s]$
Re	Número de Reynolds. $[\rho u_0 L / \mu]$	$[]$

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA	TÍTULO	Pag.
Figura 5.1:	Função corrente em perspectiva.	47
Figura 5.2:	Função corrente do escoamento.....	48
Figura 5.3:	Função corrente de todo escoamento.....	48
Figura 5.4:	Perfil da componente u ao longo da superfície do cilindro.	49
Figura 5.5:	Perfil da componente v ao longo da superfície do cilindro.	50
Figura 5.6:	Perfil da componente u ao longo de y	51
Figura 5.7:	Gradiente de pressão na direção x	52
Figura 5.8:	Gradiente de pressão na direção y	52
Figura 5.9:	Coeficiente de Pressão ($Re=6,7.10^5$).....	53
Figura 5.10:	Coeficiente de Arrasto.	56
Figura A 1:	Transformação conforme aplicada ao plano z gera a curva do plano w	71
Figura A 2:	Ajuste das paramétricas.	74

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.1: Parâmetros da função corrente.	44
Tabela 5.2: Valor de tensões normais e cisalhante ($Re = 1 \times 10^6$).....	55
Tabela 5.3: Valor médio da componente u de velocidade.	57

1. INTRODUÇÃO

Os métodos analíticos e híbridos vêm sendo utilizados com frequência na resolução de equações diferenciais parciais. Com o surgimento de novos sistemas de processamento simbólico, o emprego desses métodos tem se mostrado uma ferramenta bastante útil na elaboração de sistemas de simulação. Em particular, os métodos baseados em simetrias de Lie [Olver, 2000; Bluman e Kumei, 1989] sofreram uma retomada a partir da década de 90, em função dos recursos computacionais atualmente disponíveis para o processamento simbólico, que reduziram drasticamente o tempo de processamento para diversas aplicações em Física e Engenharia [Zabadal et alli, 2001].

As simetrias de Lie consistem em mudanças de variável utilizadas para transformar soluções exatas de equações diferenciais em novas soluções exatas que possuem maior número de elementos arbitrários em sua composição. A presença desses elementos arbitrários faz com que a solução obtida seja capaz de satisfazer a uma classe mais ampla de condições de contorno ou, de forma alternativa, seja capaz de satisfazer a um determinado conjunto de condições de contorno em regiões relativamente extensas do domínio considerado. Assim, dependendo do número de elementos arbitrários, bem como de sua natureza (constantes ou funções arbitrárias), as simetrias de Lie podem ser utilizadas para resolver problemas de contorno em malha grossa, contendo elementos que constituem, em geral, mais de 10% da extensão do domínio em estudo, ou mesmo dispensar a discretização do domínio, produzindo soluções analíticas válidas em toda a sua extensão.

A principal dificuldade em relação à aplicação prática de simetrias de Lie na resolução de equações diferenciais parciais reside no fato de ser necessário o conhecimento prévio de ao menos uma solução exata, embora particular, da equação em estudo, para dar início ao processo de obtenção de novas soluções que venham a satisfazer às condições de contorno pertinentes aos cenários físicos. Para aplicações em Mecânica de Fluidos, essa dificuldade se torna maior, uma vez que as simetrias já disponíveis na literatura para as equações de Navier-Stokes, obtidas por Pukhnachev e Buchnev [Ibragimov, 1995], só permitem a obtenção de soluções tridimensionais em regime transiente caso se disponha de ao menos uma solução exata bidimensional também em regime transiente. Por essa razão as simetrias de Lie vêm sendo utilizadas em Mecânica de Fluidos exclusivamente como ferramenta de análise.

O trabalho proposto tem como objetivo principal a obtenção de soluções exatas para o sistema composto pelas equações de Navier-Stokes e continuidade, bidimensionais em regime

transiente para escoamentos incompressíveis, a fim de tornar viável o emprego das simetrias de Lie na construção de soluções exatas para o respectivo sistema em três dimensões (ver apêndice G).

A fim de obter soluções exatas para o sistema em duas dimensões, é resolvida a equação de Helmholtz bidimensional em regime transiente para a função corrente, função a partir da qual podem ser obtidas as componentes do vetor velocidade. A obtenção de soluções exatas para a equação de Helmholtz em duas dimensões inicia com o emprego de uma transformação de Bäcklund [Zwillinger,1992], que a converte em uma equação diferencial ordinária, cuja solução exata é obtida através de uma redução de ordem. A partir dessa solução são construídas novas soluções exatas para a mesma equação, na tentativa de reproduzir aspectos qualitativos do comportamento hidrodinâmico do sistema.

A proposta específica deste trabalho consiste em obter uma solução exata que possa ser aplicada a escoamentos viscosos incompressíveis bidimensionais em torno de corpos submersos para altos números de Reynolds. O modelo proposto é baseado na equação de Helmholtz, a qual é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{w}, \quad (1.1)$$

onde \mathbf{w} representa a vorticidade. A equação (1.1) é obtida através da aplicação do operador rotacional no sistema Navier-Stokes (ver apêndice C). A vantagem em se utilizar esta equação ao invés das equações de Navier-Stokes reside na possibilidade de obtenção de termos flutuantes referentes ao escoamento turbulento [Zabada et alli, 2004]. As soluções obtidas com a equação de Helmholtz são capazes de produzir componentes flutuantes em diversas escalas e são válidas para escoamentos em torno de corpos com geometria arbitrária. Outra característica a ser salientada é que o termo referente ao gradiente de pressão é eliminado quando o operador rotacional é aplicado nas equações de Navier-Stokes. Isto ocorre porque o gradiente de pressão em Navier-Stokes está contido no espaço nulo do operador rotacional. A implementação do método consiste na aplicação indireta de Simetrias de Lie sobre a equação de Helmholtz, a fim de gerar uma solução que seja válida para uma determinada geometria. Uma vez obtida esta solução, é possível gerar novas soluções que descrevam escoamentos em torno de corpos submersos com diferentes formatos. O intuito deste trabalho é estabelecer um processo sistemático que visa obter uma solução bidimensional para, futuramente, poder usá-la como ponto de partida para a obtenção de uma solução válida para escoamentos tridimensionais via

simetrias de Lie. Esta possibilidade está embasada no fato de já existirem grupos de simetrias capazes de transformar uma solução bidimensional em uma solução tridimensional [Ibragimov, 1995]; porém, ainda não existe uma solução bidimensional que satisfaça às condições de contorno impostas para que possa ser utilizada como ponto de partida para a aplicação dos grupos de simetria.

O desenvolvimento do trabalho consiste nas seguintes etapas: O capítulo 2 faz uma introdução às simetrias de Lie, apresentando os métodos utilizados neste trabalho. No capítulo 3, apresenta-se a descrição do método para a obtenção de uma solução para a equação de Helmholtz que satisfaça as condições de não deslizamento e não penetração na interface corpo-fluido. No capítulo 4, é realizada a extensão da solução para diferentes geometrias. O capítulo 5 apresenta os resultados e as conclusões obtidas. O capítulo 6 fornece recomendações para trabalhos futuros.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

As equações diferenciais que regem os escoamentos viscosos apresentam considerável dificuldade de obtenção de soluções exatas que reproduzam os efeitos da turbulência. Por este motivo, a ferramenta mais utilizada para este fim foi a abordagem numérica. Porém, existem métodos analíticos que podem ser empregados para a obtenção de soluções exatas que reproduzam os efeitos de escoamentos viscosos. No decorrer deste capítulo, são apresentados os métodos analíticos baseados em simetrias de Lie utilizados neste trabalho.

2.1. O CONCEITO DE SIMETRIA DE LIE

A equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{a} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

admite como solução exata a função

$$T_1 = c_2 (x^2 + 2\mathbf{a} t) + c_1 x + c_0. \quad (2.2)$$

Esta solução obedece a um conjunto relativamente restrito de condições de contorno. Entretanto, a partir dessa expressão é possível construir novas soluções exatas contendo maior número de constantes arbitrárias. A solução

$$T_2 = c_3 (x^3 + 6xat) + c_2 (x^2 + 2at) + c_1 x + c_0, \quad (2.3)$$

obtida a partir de T_1 através da aplicação de um operador integro-diferencial, contém maior número de constantes arbitrárias, e se reduz a T_1 para $c_3=0$ podendo, portanto, satisfazer a um conjunto mais amplo de restrições. Todas as mudanças de variáveis que transformam soluções exatas de uma determinada equação diferencial em novas soluções são denominadas *simetrias de Lie admitidas pela equação*, ou simplesmente simetrias. Estas simetrias podem ser geradas a partir de técnicas como Substituição Direta, regras para manipulação de exponenciais de operadores e grupos de Lie. Nas seções subseqüentes é realizada uma sucinta revisão a respeito dos métodos empregados neste trabalho, com o intuito de transmitir suas idéias principais e suas formas de aplicação.

2.2. MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO DIRETA

O método da substituição direta consiste no mapeamento da equação diferencial através da introdução de novas variáveis via aplicação da regra da cadeia. O mapeamento é realizado de tal forma que não altere a formato da equação original. Como exemplo, a equação

$$\frac{df}{dx} = f \quad (2.4)$$

pode ser mapeada em outra equação através da mudança de variável $x \rightarrow a(x)$, resultando em

$$\frac{df}{da} \frac{da}{dx} = f \rightarrow \frac{df}{da} a_x = f. \quad (2.5)$$

Caso o coeficiente a_x seja igual a 1, a equação se torna invariante frente à mudança de variável. Esta restrição é conhecida como *Crítério de Invariância* [Olver, 2000; Bluman e Kumei, 1989].

Essa condição pode ser alcançada fazendo 'a' igual a $x+c$, onde c é uma constante arbitrária. Assim, a mudança de variável $x \rightarrow x+c$ não altera a equação original e consiste em simetria de Lie admitida pela equação $\frac{df}{dx} = f$, denominada simetria translacional. A aplicação deste método consiste em transformar uma determinada solução exata da equação em outra solução exata, pois se $f(x)$ é solução da equação, $f(a)$ também será solução da mesma equação. Exemplificando, a expressão

$$f = e^x \quad (2.6)$$

é solução exata para a equação diferencial

$$\frac{df}{dx} = f. \quad (2.7)$$

Do mesmo modo, a expressão

$$f = e^{a(x)} \quad (2.8)$$

é solução exata da equação

$$\frac{df}{da} = f; \quad (2.9)$$

logo, a solução (2.8) também satisfaz a equação (2.7), visto que, introduzindo a solução (2.8) na equação (2.7), devido a aplicação da regra da cadeia, recai-se na equação (2.9).

Esta abordagem permite partir de soluções particulares de fácil obtenção, encontradas por simplificações ou até mesmo por simples inspeção, para posteriormente encontrar soluções mais gerais, capazes de satisfazer um conjunto mais amplo de condições restritivas. Um exemplo concreto de aplicação deste método está descrito no capítulo 4, onde uma substituição direta é aplicada sobre a equação de Hemholtz.

2.3. MÉTODOS BASEADOS EM SPLIT

Os métodos baseados em Split consistem em desmembrar a equação diferencial em duas partes, gerando um sistema de duas equações diferenciais. Para equações diferenciais expressas na forma $Lf = 0$, onde L é um operador linear que pode ser escrito como uma soma de parcelas do tipo $L = A - B \rightarrow Af - Bf = 0$, na qual B representa um operador facilmente inversível, para o qual o espaço nulo seja conhecido, diversas soluções exatas podem ser obtidas através do seguinte esquema iterativo:

$$\begin{cases} A f_{k+1} = f_k \\ B f_{k+1} = f_k \end{cases}, \quad (2.10)$$

onde $f_0 = 0$. Neste sistema, as funções f_k representam soluções exatas da equação original. Para que este esquema iterativo possa ser aplicado, é necessário que os operadores A e B comutem, isto é $AB = BA$ (ver apêndice E). Um exemplo deste método pode ser dado partindo-se da equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (2.11)$$

a qual é expressa em termos dos operadores A e B da seguinte forma:

$$\begin{cases} A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ B = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}. \quad (2.12)$$

Por inspeção, conclui-se que os operadores comutam, ou seja, $AB = BA$. Com isso, parte-se para o método iterativo descrito em (2.10), começando com uma fonte nula, ou seja,

$$\begin{cases} Af = Q \\ Bf = Q \end{cases}, \quad (2.13)$$

onde $Q=0$. Como o operador B é facilmente inversível e seu espaço nulo é conhecido, é possível encontrar uma solução para a equação referente ao operador B integrando a mesma com relação ao tempo e somando o espaço nulo correspondente. Assim,

$$f_1 = g_1(x, y). \quad (2.14)$$

Para completar a primeira iteração, joga-se a solução (2.14) na equação referente ao operador A do sistema (2.12), resultando em

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g_1(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_1(x, y) = 0. \quad (2.15)$$

A fim de solucionar a equação (2.15), aplica-se novamente o Split na mesma, o que resulta no sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_1(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_1(x, y) = 0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

Integrando a primeira equação do sistema (2.16) duas vezes, chega-se a uma expressão para g_1 com o formato

$$g_1 = a(y)x + b(y). \quad (2.17)$$

onde $a(y)$ e $b(y)$ são funções arbitrárias de y . Substituindo esta expressão na segunda equação do sistema (2.16), resulta em

$$a''(y)x + b''(y) = 0. \quad (2.18)$$

A única maneira de satisfazer esta equação é fazendo $a''(y) = 0$ e $b''(y) = 0$. Dessa forma, estas funções resultam lineares em y :

$$a(y) = c_3y + c_1, \quad b(y) = c_2y + c_4, \quad (2.19)$$

gerando uma solução com o formato

$$f_1 = g_1 = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4. \quad (2.20)$$

Encontrada esta solução, aplica-se o mesmo processo novamente, agora introduzindo a solução (2.20) como nova fonte. Assim, $Q = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4$, e a nova solução toma a forma

$$f_2 = k \int (c_1x + c_2y + c_3xy + c_4) dt + g_2(x, y) = k(c_1xt + c_2yt + c_3xyt + c_4t) + g_2(x, y). \quad (2.21)$$

Substituindo esta expressão na primeira equação do sistema (2.13), resulta em

$$\nabla^2 f_2 = \nabla^2 (k(c_1xt + c_2yt + c_3xyt + c_4t) + g_2(x, y)) = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4, \quad (2.22)$$

o que gera a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g_2(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_2(x, y) = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4. \quad (2.23)$$

A fim de resolver a equação (2.23), aplica-se um novo Split, o que resulta no sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_2(x, y) = \frac{1}{2}(c_1x + c_2y + c_3xy + c_4) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_2(x, y) = \frac{1}{2}(c_1x + c_2y + c_3xy + c_4) \end{cases}. \quad (2.24)$$

Integrando a primeira equação deste sistema duas vezes com relação a x , resulta em

$$g_2(x, y) = \frac{c_1}{12}x^3 + \frac{c_2}{12}y^3 + \frac{c_3}{12}(x^3y) + \frac{c_4}{4}(x^2) + a_2(y)x + b_2(y). \quad (2.25)$$

Substituindo esta expressão na segunda equação do sistema (2.24) resulta em

$$a_2''(y)x + b_2''(y) = \frac{1}{2}(c_1x + c_3xy + c_4). \quad (2.26)$$

Esta equação é resolvida fazendo $a_2''(y) = c_1 + c_3y$ e $b_2''(y) = c_4$. Assim,

$$a_2 = \frac{c_1}{2}y^2 + \frac{c_3}{6}y^3 + c_5y + c_6, \quad b_2 = \frac{c_4}{2}y^2 + c_7y + c_8, \quad (2.27)$$

e a solução para g_2 vem na forma

$$g_2(x, y) = \frac{c_1}{12}(x^3 + 6xy^2) + \frac{c_2}{12}y^3 + \frac{c_3}{12}(x^3y + 2xy^3) + \frac{c_4}{4}(x^2 + 2y^2) + (c_5xy + c_6x) + c_7y + c_8. \quad (2.28)$$

Substituindo esta expressão em (2.21), resulta

$$f_2 = c_1 \left(\frac{x^3}{12} + \frac{1}{2}xy^2 + kxt \right) + c_2 \left(\frac{y^3}{12} + kyt \right) + c_3 \left(\frac{x^3y}{12} + \frac{1}{6}xy^3 + kxyt \right) + c_4 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}y^2 + kt \right) + (c_5xy + c_6x) + c_7y + c_8 \quad (2.29)$$

Pode-se observar que a solução obtida possui várias constantes arbitrárias. Essas constantes facilitam a aplicação das condições de contorno, visto que podem ser ajustadas de forma conveniente a satisfazer às restrições impostas. Os métodos descritos neste capítulo serão posteriormente utilizados como ferramentas no processo de obtenção de soluções para a equação de Helmholtz.

3. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Neste capítulo, é detalhada a metodologia para a obtenção de soluções exatas para a equação de Helmholtz bidimensional em regime transiente. O primeiro conjunto de soluções encontrado é proveniente do mapeamento da equação de Helmholtz em uma equação diferencial ordinária. Este procedimento é realizado através da introdução de uma função $h(x,y,t)$ na equação original via regra da cadeia. Como será visto no decorrer do trabalho, os resultados encontrados ao longo do processo de obtenção deste primeiro conjunto de soluções levam à idéia da aplicação de um Split na equação de Helmholtz. Dessa forma, a equação original é desdobrada em um sistema de duas equações diferenciais, separando a parte linear da parte não-linear da equação.

3.1. MAPEAMENTO EM EQUAÇÃO ORDINÁRIA.

O primeiro conjunto de soluções é obtido através do mapeamento da equação original em uma equação ordinária. Para tal, primeiramente se expressa a equação de Helmholtz em termos da função corrente aplicando-se as seguintes identidades:

$$u = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}. \quad (3.1)$$

Dessa forma, considerando que $\mathbf{w} = -\nabla^2 \mathbf{y}$, a equação (1.1) resulta em

$$\frac{\partial(\nabla^2 \mathbf{y})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \frac{\partial(\nabla^2 \mathbf{y})}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2 \mathbf{y})}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^4 \mathbf{y}. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) doravante será utilizada no lugar da equação de Helmholtz original, a qual era expressa em termos da vorticidade. O primeiro conjunto de soluções pode ser encontrado com a introdução do argumento

$$h = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 t, \quad (3.3)$$

o qual é aplicado na equação (3.2) via regra da cadeia. Os operadores diferenciais correspondentes a essa mudança de variável são descritos por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{d}{dh} = c_1 \frac{d}{dh} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = c_1 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{d^2}{dh^2} = c_1^2 \frac{d^2}{dh^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial y} \frac{d}{dh} = c_2 \frac{d}{dh} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = c_2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{d^2}{dh^2} = c_2^2 \frac{d^2}{dh^2} . \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial h}{\partial t} \frac{d}{dh} = c_3 \frac{d}{dh} \quad , \quad \nabla^2 = (c_1^2 + c_2^2) \frac{d^2}{dh^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Assim, o biarmônico da equação (3.2) toma a forma

$$\nabla^4 \mathbf{y} = (c_1^2 + c_2^2) \frac{d^2}{dh^2} \left[(c_1^2 + c_2^2) \frac{d^2}{dh^2} \right] = (c_1^2 + c_2^2)^2 \frac{d^4}{dh^4} . \quad (3.5)$$

Substituindo os operadores descritos em (3.4) e (3.5) na equação (3.2), resulta em

$$c_3 (c_1^2 + c_2^2) \frac{d^3 \mathbf{y}}{dh^3} + \underbrace{c_2 \frac{d\mathbf{y}}{dh} c_1 (c_1^2 + c_2^2) \frac{d^3 \mathbf{y}}{dh^3} - c_1 \frac{d\mathbf{y}}{dh} c_2 (c_1^2 + c_2^2) \frac{d^3 \mathbf{y}}{dh^3}}_{=0} = \frac{1}{Re} (c_1^2 + c_2^2)^2 \frac{d^4 \mathbf{y}}{dh^4} \quad (3.6)$$

Uma vez que os termos não lineares se anulam, chega-se a

$$c_3 \frac{d^3 \mathbf{y}}{dh^3} = \frac{1}{Re} (c_1^2 + c_2^2) \frac{d^4 \mathbf{y}}{dh^4} . \quad (3.7)$$

A equação (3.7) pode ser resolvida via redução de ordem. Dessa forma, fazendo

$$f = \frac{d^3 \mathbf{y}}{dh^3} \quad (3.8)$$

e substituindo na equação (3.7), resulta em

$$f = \frac{(c_1^2 + c_2^2)}{c_3 Re} \frac{df}{dh}, \quad (3.9)$$

cuja solução é imediata:

$$f = k_0 e^{k_1 h} \quad , \text{onde} \quad k_1 = \frac{(c_1^2 + c_2^2)}{c_3 Re}. \quad (3.10)$$

Como f é a derivada terceira da função corrente, é necessário integrar a expressão (3.10) até obter a expressão para a função corrente. A primeira integração gera

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dh^2} = \int k_0 e^{k_1 h} dh = \frac{k_0}{k_1} e^{k_1 h} + k_2. \quad (3.11)$$

Integrando o resultado acima mais uma vez com relação a h resulta em

$$\frac{d\mathbf{y}}{dh} = \int \left(\frac{k_0}{k_1} e^{k_1 h} + k_2 \right) dh = \frac{k_0}{k_1^2} e^{k_1 h} + k_2 h + k_3. \quad (3.12)$$

Por fim, a solução para a função corrente vem com uma terceira integração, o que gera

$$\mathbf{y} = \int \left(\frac{k_0}{k_1^2} e^{k_1 h} + k_2 h + k_3 \right) dh = \frac{k_0}{k_1^3} e^{k_1 h} + \frac{k_2}{2} h^2 + k_3 h + k_4. \quad (3.13)$$

A expressão (3.13) é solução exata para a equação de Helmholtz bidimensional. O processo de obtenção desta solução é conhecido como transformação de Bäcklund [Zwillinger, 1992], onde a equação original é transformada em uma outra equação – para o caso estudado, a equação ordinária (3.7). Um caso particular de transformação de Bäcklund consiste nos métodos de solução por similaridade [Bejan, 1984], onde a equação diferencial original é mapeada através de uma mudança de variável via introdução de um adimensional.

O fato de haver ocorrido a anulação automática da parcela não-linear da equação (3.6) leva à suposição de que possam existir outras funções que anulem a parte advectiva, analogamente ao caso anterior. Assim, surge a idéia de se aplicar um Split na equação de

Helmholtz, separando a parte não-linear da parte difusiva e transiente. Este procedimento resulta no seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{w} = 0 \\ u \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

A idéia central desta abordagem baseia-se na suposição de que existem soluções mais gerais para a equação (3.14) que igualmente satisfaçam à equação (3.15). De fato, substituindo a vorticidade na expressão (3.15) por uma função da função corrente, ou seja, $\mathbf{w} = f(\mathbf{y})$, aplicando a regra da cadeia e colocando $\frac{df}{d\mathbf{y}}$ em evidência, resulta em

$$\frac{df}{d\mathbf{y}} \left(u \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.16)$$

A estrutura da equação (3.16) nos mostra que a sua solução geral é uma função arbitrária da função corrente, uma vez que o termo entre parênteses é identicamente nulo para qualquer $f(\mathbf{y})$. Dessa forma, a função corrente pode ser expressa como uma função arbitrária da vorticidade: se $\mathbf{w} = f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} = f^{-1}(\mathbf{w}) = g(\mathbf{w})$, sendo \mathbf{w} qualquer solução da equação (3.14).

Utilizando este resultado, uma possível expressão para a função corrente que descreve o escoamento pode ser dada por

$$\mathbf{y} = g(r(x, y, t) + \mathbf{y}_0) \quad (3.17)$$

onde g é uma função arbitrária e $r(x, y, t)$ é qualquer solução da equação

$$\frac{\partial}{\partial t} r(x, y, t) = \frac{1}{Re} \nabla^2 r(x, y, t). \quad (3.18)$$

A parcela \mathbf{y}_0 corresponde à função corrente relativa ao escoamento potencial em torno do corpo submerso. Embora a expressão obtida não constitua a solução geral da equação de Helmholtz, a função arbitrária nela contida pode satisfazer identicamente às condições de não-deslizamento e não-penetração na interface do corpo submerso. Impondo as condições $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} = 0$ resulta $g'(r + \mathbf{y}_0) = 0$ na fronteira, bastando, portanto, que o argumento $r + \mathbf{y}_0$ possa descrever o contorno do corpo submerso.

Com os resultados obtidos até este ponto, é possível direcionar o foco da metodologia para a obtenção de soluções para a equação (3.14). Embora seja possível encontrar soluções que simulem escoamentos viscosos em várias faixas de Reynolds, a atenção dispensada neste trabalho está voltada para a obtenção de soluções exatas para altos números de Reynolds. É importante salientar que os métodos numéricos têm obtido êxito na simulação de escoamentos cuja presença de pequenos vórtices não represente um fator crítico de erro devido necessidade de refinamento da malha. Como exemplo, pode-se citar principalmente a Simulação de Grandes Vórtices (Large-Eddy Simulation) [Freire et alli, 1998].

3.2. SOLUÇÃO FORMAL

Uma possível forma de solucionar a equação (3.14) consiste em reescrevê-la na forma

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = A\mathbf{w}, \quad (3.19)$$

onde $A = \frac{1}{Re} \nabla^2$. A solução formal para a equação (3.19) é dada por

$$\mathbf{w} = \left[e^{tA} \right] \mathbf{w}_0(x, y, 0), \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{w}_0(x, y, 0)$ representa a distribuição inicial de vorticidade (ver apêndice D). A exponencial do operador tA descrita na solução formal é calculada utilizando a respectiva Série de Taylor:

$$\mathbf{w} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right] \mathbf{w}_0(x, y, 0). \quad (3.21)$$

A aplicabilidade da solução (3.21) está condicionada à obtenção das potências do operador A , as quais são aplicadas sobre a função $\mathbf{w}_0(x, y)$; ou seja, é necessário que se tenha de antemão as expressões referentes aos termos $A^k \mathbf{w}_0(x, y)$ da expansão. Dependendo do operador utilizado e da condição inicial do problema, esta tarefa pode ser tornar extremamente onerosa, principalmente se um grande número de termos da série for necessário para que se obtenham resultados satisfatórios. A fim de contornar esta dificuldade, introduz-se uma função auxiliar, cuja finalidade é obter indiretamente uma função corrente que descreva adequadamente o estado inicial do escoamento, bem como permitir converter a solução (3.20) em uma expressão cuja implementação computacional seja viável, além de requerer baixo tempo de processamento.

Tomando como função corrente inicial uma autofunção do operador laplaciano, ou seja

$$(\nabla^2 - II)\mathbf{y}(x, y) = 0, \quad (3.22)$$

a aplicação das sucessivas potências do operador A sobre o campo inicial de vorticidade se torna uma tarefa bastante simples. A aplicação de A^k sobre a condição inicial relativa a $\mathbf{w}_0(x, y)$ resulta em

$$\begin{aligned} A[\mathbf{w}_0] &= \frac{I}{Re} \nabla^2 [-\nabla^2 [\mathbf{y}_0(x, y)]] = \frac{I}{Re} \nabla^2 [-I\mathbf{y}_0(x, y)] = -\frac{I}{Re} I^2 \mathbf{y}_0(x, y) \\ A^2[\mathbf{w}_0] &= A[A[\mathbf{w}_0]] = A\left[-\frac{I}{Re} I^2 \mathbf{y}_0(x, y)\right] = -\left(\frac{I}{Re}\right)^2 I^3 \mathbf{y}_0(x, y) \\ &\vdots \\ A^k[\mathbf{w}_0] &= -\left(\frac{I}{Re}\right)^k I^{k+1} \mathbf{y}_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.23)$$

As expressões contidas em (3.23) mostram que a aplicação das potências do operador A , considerando a função corrente inicial como uma autofunção do laplaciano, gera uma expansão para a vorticidade que dispensa o cálculo das potências do operador A . Assim,

$$\mathbf{w}(x, y, t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(-\left(\frac{I}{Re}\right)^k I^{k+1} \mathbf{y}_0(x, y) \right) \right] = -I e^{\frac{I t}{Re}} \mathbf{y}_0(x, y); \quad (3.24)$$

ou, em termos da função corrente,

$$\mathbf{y}(x, y, t) = e^{\frac{It}{Re}} \mathbf{y}_0(x, y), \quad (3.25)$$

onde $\mathbf{y}_0(x, y)$ corresponde à função corrente inicial, a qual foi escolhida como sendo uma autofunção do laplaciano. Pode-se mostrar também que a equação (3.15) é identicamente satisfeita. Para tal, basta introduzir a função auxiliar (3.22) na parte não-linear do Split, resultando em

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \frac{\partial (-\nabla^2 \mathbf{y})}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \frac{\partial (-\nabla^2 \mathbf{y})}{\partial y} \right) &= \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \frac{\partial (-I \mathbf{y})}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \frac{\partial (-I \mathbf{y})}{\partial y} \right) = \\ -I \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.2.1. CONDIÇÃO INICIAL

A fim de aplicar a solução (3.25), é necessário determinar uma expressão para a função corrente inicial $\mathbf{y}_0(x, y)$. Esta função inicial é obtida através da resolução da equação (3.22) com o emprego indireto de simetrias de Lie. Uma forma bastante prática de se obter simetrias consiste na aplicação de um operador linear de primeira ordem na forma

$$B = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y) I \quad (3.27)$$

sobre qualquer solução exata previamente conhecida da equação (3.22). Assim, as simetrias são geradas partindo-se de uma solução que satisfaça $Cf = 0$, onde C corresponde ao operador $C = \nabla^2 - II$. Uma vez encontrada uma solução particular para $Cf = 0$, as simetrias podem ser obtidas aplicando-se o operador B da seguinte forma:

$$CBf = Cg = 0, \quad (3.28)$$

esta condição garante que g seja uma nova solução exata. Dessa forma, basta impor $Cf = 0$ e $CBf = 0$ e com isso obter os parâmetros. A aplicação do operador CB sobre uma dada função $f(x, y)$ gera a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} a(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} a(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) + a(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, y) \right) \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \right) \\
& + b(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x, y) \right) f(x, y) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} c(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) \\
& + c(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} a(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \right) \\
& + a(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} b(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} b(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right) + b(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c(x, y) \right) f(x, y) \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} c(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) + c(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right) - \lambda a(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) \\
& - \lambda b(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) - \lambda c(x, y) f(x, y) = 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Os coeficientes a , b e c também devem satisfazer $C(f(x, y)) = 0$, resultando na introdução da relação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = I f - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{3.30}$$

na equação (3.29). Assim, a equação a ser resolvida toma a forma

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} a(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} a(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \right) + b(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x, y) \right) f(x, y) \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} c(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} a(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} b(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} b(x, y) \right) \lambda f(x, y) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} b(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) \\
& + b(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda f(x, y) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) \right) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c(x, y) \right) f(x, y) \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} c(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) - \lambda b(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

A fim de satisfazer esta equação, colocam-se em evidência os termos que multiplicam $f(x, y)$ e suas derivadas, e impõe-se a anulação de cada uma das expressões resultantes. Esta imposição leva a uma solução particular para equação anterior, porém, esta solução permite que a função $f(x, y)$ permaneça somente com a restrição de ser uma autofunção do laplaciano, permitindo com que ela possa ser determinada posteriormente. Este processo gera um sistema de equações, dado por

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} a(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} c(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} a(x, y) \right) = 0 \tag{3.32}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} b(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} c(x, y) \right) = 0 \tag{3.33}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} a(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} b(x, y) \right) = 0 \tag{3.34}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \right) = 0 \tag{3.35}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} b(x, y) \right) \lambda = 0 \tag{3.36}$$

A fim de resolver este sistema, primeiramente derivam-se as equações (3.34) e (3.35) com respeito a x e y , respectivamente, resultando em

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} a(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} b(x, y) = 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} b(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} a(x, y) = 0; \quad (3.38)$$

somando estas duas equações, obtêm-se

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} a(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} a(x, y) = 0. \quad (3.39)$$

Da mesma forma, derivando as equações (3.34) e (3.35), porém agora com respeito a y e x , respectivamente, resulta em

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} a(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(x, y) = 0, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} a(x, y) = 0; \quad (3.41)$$

subtraindo estas equações, chega-se a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(x, y) = 0 \quad (3.42)$$

As equações (3.39) e (3.42) mostram que $\nabla^2 a = \nabla^2 b = 0$, dessa forma, o sistema descrito pelas equações (3.32) - (3.36) pode ser reescrito por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (3.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} a(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} b(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad (3.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad (3.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} b(x, y) \right) \lambda = 0. \end{array} \right. \quad (3.47)$$

As equações (3.43) e (3.44) mostram que $c = cte$. Dessa forma, $\nabla^2 c(x, y) = 0$. Substituindo este resultado na equação (3.47), resulta em $b = f(x)$; porém, conforme a equação (3.45), isto implica em $a = g(y)$. Substituindo a e b nas equações (3.39) e (3.42), obtêm-se

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = 0 \quad (3.48)$$

Estas expressões mostram que a função a deve ser linear em y , bem como b deve ser linear em x . Assim, as funções a , b e c resultam

$$\begin{cases} a = a_1 + a_2 y \\ b = b_1 + b_2 x \\ c = cte \end{cases} \quad (3.49)$$

Por fim, substituindo a e b na equação (3.46), implica em $b_2 = -a_2$. Dessa forma, o operador B resulta em

$$B = (a_1 + a_2 y) \frac{\partial}{\partial x} + (b_1 - a_2 x) \frac{\partial}{\partial y} + cI. \quad (3.50)$$

Este operador é capaz de gerar uma simetria de Lie quando aplicado sobre uma autofunção do laplaciano, ou seja, o operador B aplicado em f gera uma função g que também é uma autofunção do laplaciano.

Uma vez obtido o operador B no formato de (3.50), é possível aplicá-lo sucessivamente sobre uma autofunção do laplaciano até que a solução encontrada contenha elementos arbitrários em número suficiente para satisfazer às condições de contorno impostas. Embora este processo iterativo seja computacionalmente viável, é interessante obter a respectiva solução invariante; em outras palavras, procura-se a solução que não muda após um certo número de iterações, ou seja, a função que não se altera ao longo do processo iterativo definido pela equação $f_{k+1} = Bf_k$. Esta solução pode ser obtida sem a necessidade de iterações, unicamente impondo a condição

$$Bf - f = 0 \quad (3.51)$$

Para o operador B definido por (3.50), a solução geral da equação de ponto fixo (3.51) é dada por

$$f = f_1 \left(-b_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2 + a_1 y + \frac{1}{2} a_2 y^2 \right) e^{\left(\frac{\arctan \left(\frac{\sqrt{a_2^2 (b_1 - a_2 x)}}{a_2 \sqrt{(a_1 + a_2 y)^2}} \right)}{\sqrt{a_2^2}} \right) (c-1)}, \quad (3.52)$$

onde f_1 denota uma função arbitrária. Esta solução foi obtida através do programa de manipulação simbólica Maple, utilizando regras para manipulação de exponenciais de operadores [Dattoli et alli, 1998]. A solução obtida satisfaz as condições de contorno de não-penetração e não-deslizamento na interface do corpo submerso.

O comportamento dessa solução é qualitativamente consistente com a geometria das esteiras de vórtice produzidas em escoamentos viscosos em torno de corpos submersos. Note-se que a exponencial que multiplica a função arbitrária provoca uma amplificação progressiva na amplitude da função corrente junto ao centro da esteira, além de delimitar uma envoltória através do amortecimento da função à medida que se tomam pontos progressivamente mais afastados do corpo submerso. Embora a solução (3.52) não tenha sido utilizada em sua forma original para a geração dos resultados numéricos, essa função foi utilizada para estimar o ponto de descolamento da camada limite para o estado inicial do escoamento, isto é, para a função corrente em $t=0$.

A fim de que a solução encontrada satisfaça às condições.

$$\left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (3.53)$$

onde Γ representa o contorno do corpo submerso, basta fazer com que o argumento da função arbitrária f_1 seja constante no contorno. Esta constatação é proveniente da própria aplicação das restrições (3.53) em (3.52), o que gera

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df_1}{d\mathbf{a}} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \mathbf{b}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{b}(x, y) f_1(\mathbf{a}), \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df_1}{d\mathbf{a}} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} \mathbf{b}(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{b}(x, y) f_1(\mathbf{a}). \quad (3.55)$$

Nestas equações, $\mathbf{a}(x, y)$ representa o argumento de f_1 e $\mathbf{b}(x, y)$ representa o termo referente à exponencial da função arcotangente. Se $\mathbf{a}(x, y) = cte$, a função f_1 pode ser escolhida de forma a anular a derivada de f_1 , bem como anular a própria função no ponto $\mathbf{a}(x, y) = k$, onde k é uma constante, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{d f_1}{d \mathbf{a}(x, y)} \right|_{\mathbf{a}(x, y)=k} = 0 \\ f_1(\mathbf{a}(x, y) = k) = 0 \end{array} \right. . \quad (3.56)$$

Uma vez estabelecida a função f_1 que satisfaça o sistema acima, os termos à direita das equações (3.54) e (3.55) tornam-se nulos e as restrições de não-deslizamento e não-penetração são satisfeitas no contorno gerado pela equação

$$\mathbf{a}(x, y) = \frac{1}{2} a_2 y^2 + \frac{1}{2} a_2 x^2 - b_1 x + a_1 y = k. \quad (3.57)$$

A equação acima determina a geometria para a qual a solução (3.52) satisfaz às condições de contorno dadas por (3.53). Porém, é possível estender a solução obtida para corpos de diferentes formatos. Como será visto no capítulo subsequente, com a aplicação indireta de simetrias de Lie é possível gerar novas soluções a partir de (3.52) que contemplem diferentes geometrias, incluindo soluções que prevejam a rugosidade do corpo submerso.

3.3. OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES EXATAS PARA O CASO NO QUAL \mathbf{w} É UMA FUNÇÃO ARBITRÁRIA DE \mathbf{y} .

Embora as soluções obtidas até aqui gerem bons resultados na simulação de escoamentos em torno de corpos submersos com altos números de Reynolds, ainda existe uma forma de produzir

soluções com um formato mais geral. Uma solução para a equação (3.14) também pode ser obtida com a introdução da função

$$\nabla^2 \mathbf{y} - f(\mathbf{y}) = 0. \quad (3.58)$$

Esta nova função auxiliar possui um formato mais geral do que a função auxiliar utilizada anteriormente. De fato, introduzindo uma função arbitrária onde antes havia uma constante (expressão (3.22)), resulta em um conjunto mais amplo de soluções. Isto pode ser melhor visualizado tratando a equação (3.22) como um caso particular da equação (3.58), onde a função f é uma reta.

A fim de obter a solução, primeiramente se expressa a equação (3.14) em termos da função corrente, o que resulta em

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \mathbf{y}) - \frac{I}{Re} \nabla^2 (\nabla^2 \mathbf{y}) = 0. \quad (3.59)$$

Introduzindo a equação (3.58), temos

$$\frac{I}{Re} \nabla^2 (f(\mathbf{y})) - \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{y})) = 0. \quad (3.60)$$

A equação acima poder ser vista também como a equação de difusão bidimensional transiente, em termos de $f(\mathbf{y})$. Uma vez que $\mathbf{w} = f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} = f^{-1}(\mathbf{w}) = g(\mathbf{w})$, sendo g uma função arbitrária. Assim, \mathbf{y} é uma função arbitrária de qualquer solução da equação

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{I}{Re} \nabla^2 \mathbf{w} \quad (3.61)$$

Soluções para a equação (3.60), além de serem obtidas através da aplicação de um Split, também podem ser obtidas através da metodologia utilizada na seção (3.2.1), referente à aplicação do operador B . Para tanto, basta introduzir novamente a autofunção do operador laplaciano. Assim, substituindo

$$\nabla^2 f(\mathbf{y}) = I f(\mathbf{y}) \quad (3.62)$$

na equação (3.60) resulta em

$$I f(\mathbf{y}) - \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{y}) = 0. \quad (3.63)$$

A solução formal para a equação acima tem o seguinte formato:

$$f(\mathbf{y}) = e^{I t} f_0(x, y) \quad (3.64)$$

onde $f_0(x, y)$ é qualquer autofunção do laplaciano. A solução mais geral que pode ser encontrada com este método tem o formato

$$f(\mathbf{y}) = e^{(I t)} f_1 \left(-b_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2 + a_1 y + \frac{1}{2} a_2 y^2 \right) e^{\left(\frac{\arctan \left(\frac{\sqrt{a_2^2 (b_1 - a_2 x)}}{a_2 \sqrt{(a_1 + a_2 y)^2}} \right)}{\sqrt{a_2^2}} \right)^{(c-1)}}, \quad (3.65)$$

onde f_1 é uma função arbitrária. Dessa forma, a expressão para a função corrente resulta

$$\mathbf{y} = g \left(e^{(I t)} f_1 \left(-b_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2 + a_1 y + \frac{1}{2} a_2 y^2 \right) e^{\left(\frac{\arctan \left(\frac{\sqrt{a_2^2 (b_1 - a_2 x)}}{a_2 \sqrt{(a_1 + a_2 y)^2}} \right)}{\sqrt{a_2^2}} \right)^{(c-1)}} \right) \quad (3.66)$$

onde g denota uma função arbitrária. Ainda é possível generalizar um pouco mais a solução acima, visto que o argumento de g pode ser qualquer combinação linear com o formato $e^{I t} f_0(x, y)$. Isto decorre da linearidade da equação (3.60), uma vez que I pode assumir qualquer valor, tanto real quanto complexo. A solução resulta em

$$\mathbf{y} = g \left(\int e^{(I_1 t)} f_1 \left(-b_1(I)x + \frac{1}{2} a_2(I)x^2 + a_1(I)y + \frac{1}{2} a_2(I)y^2 \right) e^{\left(\frac{\arctan \left(\frac{\sqrt{(a_2(I))^2 (b_1(I) - a_2(I)x)}}{a_2(I) \sqrt{(a_1(I) + a_2(I)y)^2}} \right) (c(I) - 1)}{\sqrt{(a_2(I))^2}} \right)} dI \right) \quad (3.67)$$

A fim de satisfazer às condições de contorno descritas em (3.53), primeiramente expressa-se a solução encontrada como uma combinação linear de dois termos, resultando em

$$\mathbf{y} = g \left(e^{(I_1 t)} f_1(\mathbf{a}_1(x, y)) \mathbf{b}_1(x, y) + e^{(I_2 t)} f_2(\mathbf{a}_2(x, y)) \mathbf{b}_2(x, y) + U_{\infty} y \right) \quad (3.68)$$

onde

$$\left(\begin{array}{l} f_i(\mathbf{a}_i(x, y)) = f_i \left(-b_i x + \frac{1}{2} a_{2i} x^2 + a_{1i} y + \frac{1}{2} a_{2i} y^2 \right) \\ \mathbf{b}_i(x, y) = e^{(I_i t)} e^{\left(\frac{\arctan \left(\frac{\sqrt{a_{2i}^2 (b_i - a_{2i} x)}}{a_{2i} \sqrt{(a_{1i} + a_{2i} y)^2}} \right) (c_i - 1)}{\sqrt{a_{2i}^2}} \right)} \end{array} \right) \quad (3.69)$$

e $U_{\infty} y$ representa a parcela referente ao escoamento potencial. A expressão (3.68) pode ser representada na forma $\mathbf{y} = g(\mathbf{f})$, onde $\mathbf{f} = e^{(I_1 t)} f(\mathbf{a}_1(x, y)) \mathbf{b}_1(x, y) + e^{(I_2 t)} f(\mathbf{a}_2(x, y)) \mathbf{b}_2(x, y) + U_{\infty} y$. Dessa forma, a derivada da função corrente com relação a x resulta em

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = g'(\mathbf{f}) \left(\begin{array}{l} e^{(I_1 t)} (f'_1(\mathbf{a}_1(x, y)) \mathbf{b}_1(x, y) \mathbf{a}_{1x}(x, y) + f(\mathbf{a}_1(x, y)) \mathbf{b}_{1x}(x, y)) + \\ e^{(I_2 t)} (f'_2(\mathbf{a}_2(x, y)) \mathbf{b}_2(x, y) \mathbf{a}_{2x}(x, y) + f(\mathbf{a}_2(x, y)) \mathbf{b}_{2x}(x, y)) \end{array} \right). \quad (3.70)$$

Aplicando a condição $\left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right|_{y=0} = 0$ nesta expressão, resulta em

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \Big|_{y=0} = g'(\mathbf{f}) \left(e^{(I_1 t)} (f'_1(\mathbf{a}_1(x,0)) \mathbf{b}_1(x,0) \mathbf{a}_{1x}(x,0) + f_1(\mathbf{a}_1(x,0)) \mathbf{b}_{1x}(x,0)) + e^{(I_2 t)} (f'_2(\mathbf{a}_2(x,0)) \mathbf{b}_2(x,0) \mathbf{a}_{2x}(x,0) + f_2(\mathbf{a}_2(x,0)) \mathbf{b}_{2x}(x,0)) \right) = 0 \quad (3.71)$$

A forma mais conveniente de satisfazer à condição de contorno consiste em impor a seguinte restrição:

$$g'(\mathbf{f}) = 0 \quad , \text{ para } \quad \mathbf{f} \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.72)$$

Dessa forma, a condição de contorno é satisfeita com a obtenção de uma função g , cuja derivada se anule na fronteira e cujo argumento deve ser nulo para $y=0$. Nestas condições, o argumento \mathbf{f} deve satisfazer a equação

$$e^{(I_1 - I_2)t} f_1(\mathbf{a}_1(x,0)) \mathbf{b}_1(x,0) + f_2(\mathbf{a}_2(x,0)) \mathbf{b}_2(x,0) = 0. \quad (3.73)$$

Isolando uma das funções da equação acima, chega-se a uma expressão explícita capaz de satisfazer a condição $\mathbf{f} \Big|_{y=0} = 0$:

$$f_2(\mathbf{a}_2(x,0)) = -\frac{\mathbf{b}_1(x,0)}{\mathbf{b}_2(x,0)} f_1(\mathbf{a}_1(x,0)) e^{(I_1 - I_2)t} \quad (3.74)$$

Note-se que esta abordagem satisfaz concomitantemente as condições impostas em (3.53), tanto para a condição de não penetração quanto para a condição de não deslizamento do fluido na interface do corpo submerso, visto que o termo responsável pela anulação da expressão (3.71) é proveniente da derivada da função arbitrária g , ou seja, provém de $g'(\mathbf{f}) = 0$.

Uma forma de determinar as funções e os parâmetros arbitrários em (3.74) é impor $c = I$ na expressão (3.67), o que resulta em $\mathbf{b}_1(x,0) = \mathbf{b}_2(x,0) = 1$. Após isto, considerando $I_1 = I_2$, chega-se a

$$f_2(\mathbf{a}_2(x,0)) = -f_1(\mathbf{a}_1(x,0)). \quad (3.75)$$

Uma vez obtida esta expressão, parte-se para a determinação dos parâmetros arbitrários. Assim, reescrevendo a equação anterior na forma

$$f_2\left(-b_{12}x + \frac{1}{2}a_{22}x^2\right) = -f_1\left(-b_{11}x + \frac{1}{2}a_{21}x^2\right), \quad (3.76)$$

obtêm-se $f_1 = -f_2$, $b_{11} = b_{12}$, $a_{21} = a_{22}$. Note-se que as constantes a_{11} e a_{12} permaneceram arbitrárias. Estas constantes serão determinadas na aplicação da condição inicial do problema.

A abordagem na análise das condições de contorno descritas até aqui está baseada numa solução correspondente a uma combinação linear de dois termos com o formato de (3.67). Entretanto, devido à linearidade da equação (3.61), é possível estender soluções deste tipo para número arbitrário de termos.

A equação (3.60) também pode ser resolvida com a aplicação do Split. Com isso, obtêm-se uma solução para a função corrente cujo formato é uma função arbitrária de um argumento polinomial, ou seja,

$$f = g(\mathbf{a}(x, y, t)), \quad (3.77)$$

onde $\mathbf{a}(x, y, t)$ é uma solução polinomial da equação (3.60). Conforme visto, as condições de contorno do problema são satisfeitas fazendo

$$\frac{dg}{d\mathbf{a}} = 0, \text{ para } \mathbf{a}|_{y=0} = 0. \quad (3.78)$$

Uma possível função g que preenche o pré-requisito tem o formato

$$g = \mathbf{a}(x, y, t) - \mathbf{a}(x, y, t) e^{(-a(\mathbf{a}(x, y, t))^2)}, \quad (3.79)$$

onde a é uma constante.

A fim de garantir uma condição inicial condizente com o cenário físico simulado, é interessante que se tenha de antemão uma estimativa média para o raio dos vórtices. Esta estimativa pode ser utilizada posteriormente como auxílio na determinação dos parâmetros arbitrários contidos na solução (3.67). A metodologia utilizada para a obtenção desta estimativa está descrita na seção subsequente.

3.4. ESTIMATIVA DO RAIÓ MÉDIO DOS VÓRTICES EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS

O tamanho inicial médio dos vórtices pode ser estimado a partir de correlações entre o número de Strouhal e o número de Reynolds, disponíveis na literatura [Achenbach e Heineken, 1981; Schlichting, 1968]. Entretanto, a elevada dispersão dos dados experimentais Re vs. Sr para números de Reynolds superiores a 10^5 tende a impedir a identificação da tendência central da correlação. A fim de obter valores típicos para o raio dos vórtices em função do número de Reynolds, e assim prescrever uma condição inicial qualitativamente consistente com cenários físicos realistas, foi utilizada uma solução particular para a equação

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.80)$$

a fim de estimar o valor médio do raio do vórtice. A solução utilizada, dada por

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{4\mathbf{p}t/Re}} e^{-\frac{Re(x^2+y^2)}{4\mathbf{p}}} \quad (3.81)$$

é também solução exata da equação, mas válida para aplicações em meio infinito [Reichl, 1980]. Esta expressão foi escolhida devido sua maior facilidade de manipulação. A região da esteira onde o raio médio dos vórtices é calculado corresponde aproximadamente à distância de um comprimento característico após o descolamento da camada limite. Dessa forma, para uma vorticidade fixa \mathbf{w}_0 , o termo correspondente ao tempo resulta em $t_0 = L/U_\infty$, onde L corresponde ao comprimento característico. Na solução (3.81), o termo $(x^2 + y^2)$ presente no argumento da exponencial corresponde ao quadrado do raio do vórtice, correspondendo à isolinha de vorticidade $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0$. Assim, para uma condição de vorticidade inicial \mathbf{w}_0 , a expressão resultante toma a forma

$$\mathbf{w}_0 = \sqrt{\frac{Re}{4\mathbf{p}t_0}} e^{-\frac{Re\bar{r}_0^2}{4\mathbf{p}}} \quad (3.82)$$

Lembrando que w corresponde à metade da velocidade angular de rotação do vórtice,

$$w_0 = \frac{2\mathbf{p}}{2} \cdot \frac{U_\infty}{2\mathbf{p}r_0} = \frac{U_\infty}{2r_0} \left[\frac{rad}{s} \right]. \quad (3.83)$$

Assim, a expressão (3.82) resulta em

$$\sqrt{\frac{\mathbf{p}t_0 U_\infty^2}{Re r_0^2}} = e^{\frac{-Re r_0^2}{4\mathbf{p}}}. \quad (3.84)$$

Uma vez que $Re = \frac{U_\infty L}{\mathbf{n}}$ e $t_0 = \frac{L}{U_\infty}$, chega-se a

$$r_0^2 = \frac{2\mathbf{p}\mathbf{n}}{U_\infty D} \left[\ln(r_0^2) - \ln(\mathbf{p}\mathbf{n}) \right]. \quad (3.85)$$

Esta expressão pode ser reescrita na forma recursiva por

$$f_{k+1} = \frac{2\mathbf{p}\mathbf{n}}{U_\infty D} \left[\ln(f_k) - \ln(\mathbf{p}\mathbf{n}) \right]. \quad (3.86)$$

Uma análise preliminar da ordem de grandeza dos termos resultantes revela que $O(-\ln(\mathbf{p}\mathbf{n})) \gg O(\ln(f_k))$, ou seja, a maior contribuição para o valor do raio médio provém do termo referente à viscosidade cinemática, o que resulta em uma expressão para r_0 com o formato

$$f_{k+1} \approx \frac{k}{Re}, \quad r_0 \approx \frac{c}{\sqrt{Re}}. \quad (3.87)$$

Esta constatação é qualitativamente consistente com a observação física, uma vez que o tamanho médio dos vórtices deve diminuir com o aumento do número de Reynolds. O resultado obtido em (3.87) será utilizado como parâmetro para a determinação das constantes arbitrárias nas soluções exatas obtidas para a equação de Helmholtz, auxiliando na aplicação da condição inicial do problema.

4. EXTENSÃO PARA OUTRAS GEOMETRIAS

É possível estender as soluções obtidas até agora de forma a obter novas soluções que satisfaçam diferentes geometrias. Para tanto, é aplicado o método da substituição direta sobre a equação de Helmholtz, realizando-se as seguintes mudanças de variável:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \mathbf{a}(x, y) \\ y &\rightarrow \mathbf{b}(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Efetuada as mudanças dadas por (4.1), obtém-se a seguinte equação auxiliar nas novas variáveis:

$$\begin{aligned} &\left(u\mathbf{a}_x + v\mathbf{a}_y - \frac{I}{Re} \nabla^2 \mathbf{a} \right) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{a}} + \left(u\mathbf{b}_x + v\mathbf{b}_y - \frac{I}{Re} \nabla^2 \mathbf{b} \right) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{b}} + \\ & - \frac{I}{Re} \left[(\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{a}^2} + (\mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{b}^2} + 2(\mathbf{a}_x \mathbf{b}_x + \mathbf{a}_y \mathbf{b}_y) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para que as mudanças dadas por (4.1) constituam simetrias admitidas pela equação de Helmholtz, o critério de invariância deve ser respeitado, isto é, a equação deve permanecer invariante em relação a essa troca de variáveis. Para tanto, a equação (4.2) deve assumir a forma

$$U \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{a}} + V \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{b}} - \frac{I}{Re} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{a}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{b}^2} \right] = 0, \quad (4.3)$$

onde as componentes do vetor velocidade nas novas variáveis são definidas como

$$U = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{b}} \quad e \quad V = -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{a}} \quad (4.4)$$

Essa definição é análoga à das componentes de velocidade presentes na equação em sua forma original:

$$u = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}. \quad (4.5)$$

Assim, é aplicado o critério de invariância, que consiste na preservação da forma da equação original, exceto pela troca de variáveis, e constitui uma condição suficiente para que a mudança transforme uma determinada solução da equação em uma nova solução exata. Isso ocorre porque, se $f(x,y)$ é solução da equação original, $f(\mathbf{a}(x,y), \mathbf{b}(x,y))$ será automaticamente solução da equação mapeada.

Uma forma prática de estabelecer a invariância da equação consiste em dividir todos os termos da equação (4.2) por $(\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2)$, e em seguida impor restrições aos termos de forma a transformar a equação (4.2) na equação (4.3). Este processo resulta em um sistema de equações diferenciais, dado por

$$\begin{cases} \mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2 = \mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2 \\ \mathbf{a}_x \mathbf{b}_x + \mathbf{a}_y \mathbf{b}_y = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} u \mathbf{a}_x + v \mathbf{a}_y - \frac{I}{Re} \nabla^2 \mathbf{a} = (\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{b}} \\ u \mathbf{b}_x + v \mathbf{b}_y - \frac{I}{Re} \nabla^2 \mathbf{b} = -(\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{a}} \end{cases} \quad (4.7)$$

Impondo as primeiras duas restrições, dadas por (4.6), obtém-se

$$\mathbf{b}_x = \pm \mathbf{a}_y \quad e \quad \mathbf{b}_y = \mp \mathbf{a}_x, \quad (4.8)$$

o que implica em

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla^2 \mathbf{b} = 0. \quad (4.9)$$

Assim, a equação (4.2) resulta

$$\left(\frac{u \mathbf{a}_x + v \mathbf{a}_y}{\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2} \right) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{a}} + \left(\frac{u \mathbf{b}_x + v \mathbf{b}_y}{\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2} \right) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{b}} - \frac{I}{Re} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{a}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{b}^2} \right) = 0. \quad (4.10)$$

Impondo agora as restrições dadas por (4.7), obtém-se

$$\left(\frac{u\mathbf{a}_x + v\mathbf{a}_y}{\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2} \right) = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{b}} \quad e \quad \frac{\pm u\mathbf{a}_y \mp v\mathbf{a}_x}{(\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2)} = -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{a}}. \quad (4.11)$$

Reescrevendo u e v em termos da função corrente, e utilizando a regra da cadeia, resulta

$$u = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} = \mathbf{a}_y \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{a}} + \mathbf{b}_y \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{b}}, \quad v = -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = -\mathbf{a}_x \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{a}} - \mathbf{b}_x \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{b}}. \quad (4.12)$$

Substituindo as definições de u e v em (4.11), resulta

$$(\mp \mathbf{a}_x^2 \mp \mathbf{a}_y^2) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{b}} = (\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{b}} \quad (4.13)$$

e

$$(\pm \mathbf{a}_y^2 \pm \mathbf{a}_x^2) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{b}} = -(\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{b}} \quad (4.14)$$

Ambas as equações se reduzem a identidades ao especificar os sinais nas relações presentes em (4.7). Desse modo, para

$$\mathbf{b}_y = \mathbf{a}_x \quad (4.15)$$

e

$$\mathbf{b}_x = -\mathbf{a}_y \quad (4.16)$$

as equações (4.15) e (4.16) são identicamente satisfeitas. Entretanto, essas restrições constituem as condições de Cauchy-Riemann relativas a uma transformação conforme cujas partes real e imaginária correspondem, respectivamente, às funções β e a . Portanto, *qualquer transformação conforme é uma simetria de Lie admitida pela equação de Helmholtz* (ver apêndice F).

5. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Durante a realização deste trabalho, o foco sempre esteve mantido na obtenção de uma solução exata que satisfizesse às condições de contorno impostas. Como já mencionado em seções anteriores, a obtenção de uma solução para o caso bidimensional é o ponto de partida para a obtenção de uma solução válida para escoamentos tridimensionais via simetrias de Lie. Dessa forma, não existe a pretensão de apresentar neste capítulo resultados numéricos comparativos com dados experimentais, senão somente uma análise qualitativa a respeito das características gerais dos escoamentos simulados, como por exemplo a formação de termos flutuantes, o descolamento da camada limite e as conseqüentes flutuações do gradiente de pressão. Embora as soluções encontradas para a equação de Helmholtz conttenham termos flutuantes capazes de gerar uma esteira de vórtices com características gerais semelhantes às do escoamento turbulento, este estudo preliminar não visa a formulação de modelos de turbulência a partir de soluções da equação de Helmholtz em duas dimensões, visto que a turbulência é um fenômeno caracteristicamente tridimensional.

Nessa análise preliminar, foram utilizadas algumas referências clássicas em Mecânica de Fluidos [Achenbach e Heineken, 1981; Borthwick, 1986; Karniadakis, 1988; Fromm e Harlow, 1963] como base para a estimação da função corrente correspondente ao estado inicial do sistema, sendo a seguir verificada sua evolução temporal do ponto de vista estritamente qualitativo. Não havendo sido verificado, por meio de simples inspeção visual, qualquer indício de comportamento anômalo no que diz respeito à evolução temporal da função corrente, tais como singularidades e amplificação da esteira de vórtices à longa distância ou deformações abruptas em sua envoltória, foram produzidos alguns resultados numéricos para verificação de ordem de grandeza frente às mesmas referências.

No decorrer deste capítulo, são apresentados alguns resultados obtidos com a simulação de um escoamento em torno de um cilindro com raio unitário para $Re = 1 \times 10^6$. Dentre as soluções obtidas no capítulo 3, a que melhor se adaptou à aplicação das condições iniciais foi a solução referente à expressão (3.70). A solução utilizada na simulação corresponde a uma combinação linear de sete termos, incluindo o termo referente ao escoamento potencial. Assim, a expressão para a função corrente tem o formato

$$\mathbf{y} = g \left(\mathbf{g}_{pot} + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_4 + \mathbf{g}_5 + \mathbf{g}_6 \right) \quad (5.1)$$

onde

$$\mathbf{g}_i = e^{(I_i t)} \left(\sin(\mathbf{a}_{1i}(x, y)) e^{(-\mathbf{a}_{1i}(x, y))} - \sin(\mathbf{a}_{2i}(x, y)) e^{(-\mathbf{a}_{2i}(x, y))} \right), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{a}_{1i}(x, y) = -a_i x + b_i y + \frac{1}{2} c_i x^2 + \frac{1}{2} c_i y^2, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{a}_{2i}(x, y) = -a_i x + d_i y + \frac{1}{2} c_i x^2 + \frac{1}{2} c_i y^2$$

$$\mathbf{g}_{pot} = y. \quad (5.4)$$

onde \mathbf{g}_{pot} corresponde ao escoamento potencial referente a uma velocidade unitária à montante do obstáculo, ou seja, $U_\infty = 1$. O número de termos do argumento da expressão (5.1) foi adotado por questões de praticidade; entretanto, quanto maior for o número de termos, mais realista será a simulação, visto que cada termo contribui com uma banda específica de frequências de vórtices. A função g utilizada é descrita por

$$g(\mathbf{h}) = \mathbf{h} - \mathbf{h} e^{-a(\mathbf{h})^2} \quad (5.5)$$

onde $\mathbf{h} = \mathbf{g}_{pot} + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_4 + \mathbf{g}_5$; os parâmetros são dados por

Tabela 5.1: Parâmetros da função corrente.

h_1	h_2	h_3
$a_1 = 1.3 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $b_1 = 1.7 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $c_1 = 4 \times 10^{-6} \text{Re}$ $d_1 = -1.5 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $I_1 = 1.1i$ $j = 0$	$a_2 = 1.1 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $b_2 = 1.3 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $c_2 = 2 \times 10^{-6} \text{Re}$ $d_2 = -1.6 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $I_2 = 1.3i$ $j = 0.3$	$a_3 = 1.2 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $b_3 = 1.6 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $c_3 = 1 \times 10^{-6} \text{Re}$ $d_3 = -1.5 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $I_3 = 2.5i$ $j = 0.5$
h_4	h_5	h_5
$a_4 = 1 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $b_4 = 1.4 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $c_4 = 1 \times 10^{-6} \text{Re}$ $d_4 = -1.6 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $I_4 = 3.6i$ $j = 1.4$	$a_5 = 1.1 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $b_5 = 1.3 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $c_5 = 1 \times 10^{-6} \text{Re}$ $d_5 = -1.5 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $I_5 = 4.7i$ $j = 1.9$	$a_6 = 1.1 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $b_6 = 1.3 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $c_6 = 4 \times 10^{-6} \text{Re}$ $d_6 = -1.5 \times 10^{-3} \sqrt{\text{Re}}$ $I_6 = 4.7i$ $j = 2.3$

Nesta tabela, os valores de I são imaginários puros; os valores para j correspondem à diferença de fase contida no argumento da função cosseno, função esta que é proveniente da imposição de valores imaginários para I ; os valores a_n, b_n, c_n, d_n são funções do número de Reynolds e foram determinadas com base na estimativa do raio médio dos vórtices, bem como na análise dimensional da solução (3.67) (ver apêndice I).

O escoamento a ser simulado corresponde ao escoamento em torno de um cilindro com raio unitário. Para este caso, a transformação conforme que mapeia uma placa plana em um cilindro corresponde a $f(z) = z + \frac{1}{z}$, onde $z = x + iy$. Para que se obtenham as novas variáveis no plano transformado, basta extrair as partes reais e imaginárias de $f(z)$ (ver apêndice F). Assim,

$$z = \Im(f(z)) = y - \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (5.6)$$

$$\Phi = \Re(f(z)) = x - \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (5.7)$$

Dessa forma, basta fazer aplicar a mudança de variável $y \rightarrow z, x \rightarrow \Phi$ na solução para que se obtenha a nova geometria no domínio transformado. Assim, a função corrente responsável pelo escoamento simulado tem o formato

$$\begin{aligned}
\psi := & y - \frac{y}{x^2 + y^2} + 0.006 \cos(0.11 \cdot 10^{-5} t) \left(\right. \\
& \left. e^{\left(0.65x + \frac{0.65x}{x^2 + y^2} - 1.170 - 2.0 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 1.8 \right)^2 - 0.85y + \frac{0.85y}{x^2 + y^2} - 2.0 \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right)} \sin \left(\right. \\
& 26.0x + \frac{26.0x}{x^2 + y^2} - 46.80 - 80. \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 1.8 \right)^2 - 34.0y + \frac{34.0y}{x^2 + y^2} - 80. \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \left. \right) \\
& - e^{\left(0.65x + \frac{0.65x}{x^2 + y^2} - 1.170 - 2.0 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 1.8 \right)^2 + 0.75y - \frac{0.75y}{x^2 + y^2} - 2.0 \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right)} \sin \left(\right. \\
& 26.0x + \frac{26.0x}{x^2 + y^2} - 46.80 - 80. \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 1.8 \right)^2 + 30.0y - \frac{30.0y}{x^2 + y^2} - 80. \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \left. \right) \\
& \left. \right) + 0.006 \cos(0.13 \cdot 10^{-5} t - 0.39 \cdot 10^{-6}) \left(\right. \\
& \left. e^{\left(0.385x + \frac{0.385x}{x^2 + y^2} - 1.0780 - 0.70 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 2.8 \right)^2 - 0.455y + \frac{0.455y}{x^2 + y^2} - 0.70 \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right)} \sin \left(\right. \\
& 27.5x + \frac{27.5x}{x^2 + y^2} - 77.00 - 50. \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 2.8 \right)^2 - 32.5y + \frac{32.5y}{x^2 + y^2} - 50. \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \left. \right) \\
& - e^{\left(0.385x + \frac{0.385x}{x^2 + y^2} - 1.0780 - 0.70 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 2.8 \right)^2 + 0.560y - \frac{0.560y}{x^2 + y^2} - 0.70 \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right)} \sin \left(\right. \\
& 27.5x + \frac{27.5x}{x^2 + y^2} - 77.00 - 50. \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 2.8 \right)^2 + 40.0y - \frac{40.0y}{x^2 + y^2} - 50. \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \left. \right) \\
& \left. \right) - \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} + 0.006 \cos(0.11 \cdot 10^{-5} t) \left(\right. \right. \\
& \left. \left. e^{\left(0.65x + \frac{0.65x}{x^2 + y^2} - 1.170 - 2.0 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 1.8 \right)^2 - 0.85y + \frac{0.85y}{x^2 + y^2} - 2.0 \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right)} \sin \left(\right. \right. \\
& 26.0x + \frac{26.0x}{x^2 + y^2} - 46.80 - 80. \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 1.8 \right)^2 - 34.0y + \frac{34.0y}{x^2 + y^2} - 80. \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \left. \right) \\
& - e^{\left(0.65x + \frac{0.65x}{x^2 + y^2} - 1.170 - 2.0 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 1.8 \right)^2 + 0.75y - \frac{0.75y}{x^2 + y^2} - 2.0 \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right)} \sin \left(\right. \\
& 26.0x + \frac{26.0x}{x^2 + y^2} - 46.80 - 80. \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 1.8 \right)^2 + 30.0y - \frac{30.0y}{x^2 + y^2} - 80. \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \left. \right) \\
& \left. \right) + 0.006 \cos(0.13 \cdot 10^{-5} t - 0.39 \cdot 10^{-6}) \left(\right. \\
& \left. e^{\left(0.385x + \frac{0.385x}{x^2 + y^2} - 1.0780 - 0.70 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 2.8 \right)^2 - 0.455y + \frac{0.455y}{x^2 + y^2} - 0.70 \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right)} \sin \left(\right. \right. \\
& 27.5x + \frac{27.5x}{x^2 + y^2} - 77.00 - 50. \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - 2.8 \right)^2 - 32.5y + \frac{32.5y}{x^2 + y^2} - 50. \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \left. \right) \\
& \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^{\left(0.385x + \frac{0.385x}{x^2+y^2} - 1.0780 - 0.70\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 2.8\right)^2 + 0.560y - \frac{0.560y}{x^2+y^2} - 0.70\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right)} \sin\left(\right. \\
& \left. 27.5x + \frac{27.5x}{x^2+y^2} - 77.00 - 50.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 2.8\right)^2 + 40.0y - \frac{40.0y}{x^2+y^2} - 50.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 \right) \\
& \left. \right) e^{\left(-1000.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 + 0.006 \cos(0.11 \cdot 10^{-5} t)\right)} \left(e^{\left(0.65x + \frac{0.65x}{x^2+y^2} - 1.170 - 2.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 1.8\right)^2 - 0.85y + \frac{0.85y}{x^2+y^2} - 2.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right)} \right. \\
& \left. \sin\left(26.0x + \frac{26.0x}{x^2+y^2} - 46.80 - 80.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 1.8\right)^2 - 34.0y + \frac{34.0y}{x^2+y^2} - 80.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right) \right. \\
& \left. e^{\left(0.65x + \frac{0.65x}{x^2+y^2} - 1.170 - 2.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 1.8\right)^2 + 0.75y - \frac{0.75y}{x^2+y^2} - 2.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right)} \right. \\
& \left. \sin\left(26.0x + \frac{26.0x}{x^2+y^2} - 46.80 - 80.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 1.8\right)^2 + 30.0y - \frac{30.0y}{x^2+y^2} - 80.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right) \right) + 0.006 \cos(0.13 \cdot 10^{-5} t - 0.39 \cdot 10^{-6}) \\
& \left(e^{\left(0.385x + \frac{0.385x}{x^2+y^2} - 1.0780 - 0.70\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 2.8\right)^2 - 0.455y + \frac{0.455y}{x^2+y^2} - 0.70\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right)} \right. \\
& \left. \sin\left(27.5x + \frac{27.5x}{x^2+y^2} - 77.00 - 50.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 2.8\right)^2 - 32.5y + \frac{32.5y}{x^2+y^2} - 50.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right) \right. \\
& \left. e^{\left(0.385x + \frac{0.385x}{x^2+y^2} - 1.0780 - 0.70\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 2.8\right)^2 + 0.560y - \frac{0.560y}{x^2+y^2} - 0.70\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right)} \right. \\
& \left. \sin\left(27.5x + \frac{27.5x}{x^2+y^2} - 77.00 - 50.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 2.8\right)^2 + 40.0y - \frac{40.0y}{x^2+y^2} - 50.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right) \right) \right) + 0.006 \\
& \cos(0.25 \cdot 10^{-5} t - 0.125 \cdot 10^{-5}) \\
& e^{\left(0.36x + \frac{0.36x}{x^2+y^2} - 1.32 - 0.3\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 5\right)^2 - 0.48y + \frac{0.48y}{x^2+y^2} - 0.3\left(y - \frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)^2\right)} \sin\left(30.0x + \frac{30.0x}{x^2+y^2} \right. \\
& \left. - 110.0 - 25.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 5\right)^2 - 40.0y + \frac{40.0y}{x^2+y^2} - 25.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)^2\right) + 0.006 \\
& \cos(0.25 \cdot 10^{-5} t - 0.125 \cdot 10^{-5}) \\
& e^{\left(0.2x + \frac{0.2x}{x^2+y^2} - 1.32 - 0.2\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 8\right)^2 - 0.28y + \frac{0.28y}{x^2+y^2} - 0.2\left(y - \frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)^2\right)} \sin\left(25.0x + \frac{25.0x}{x^2+y^2} \right. \\
& \left. - 165.0 - 25.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 8\right)^2 - 35.0y + \frac{35.0y}{x^2+y^2} - 25.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)^2\right) + 0.006 \\
& \cos(0.25 \cdot 10^{-5} t - 0.125 \cdot 10^{-5}) \\
& e^{\left(0.22x + \frac{0.22x}{x^2+y^2} - 2.210 - 0.2\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 11.5\right)^2 - 0.32y + \frac{0.32y}{x^2+y^2} - 0.2\left(y - \frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)^2\right)} \sin\left(38.5x + \frac{38.5x}{x^2+y^2} \right. \\
& \left. - 386.75 - 35.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 11.5\right)^2 - 56.0y + \frac{56.0y}{x^2+y^2} - 35.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)^2\right) + 0.002 \\
& \cos(0.25 \cdot 10^{-5} t - 0.125 \cdot 10^{-5}) \\
& e^{\left(0.84x + \frac{0.84x}{x^2+y^2} - 11.060 - 0.7\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 14.5\right)^2 - 1.12y + \frac{1.12y}{x^2+y^2} - 0.7\left(y - \frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)^2\right)} \sin\left(54.0x + \frac{54.0x}{x^2+y^2} \right. \\
& \left. - 711.00 - 45.0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - 14.5\right)^2 - 72.0y + \frac{72.0y}{x^2+y^2} - 45.0\left(y - \frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)^2\right) \quad . (5.8)
\end{aligned}$$

Esta expressão corresponde à função corrente resultante para um escoamento bidimensional em torno de um cilindro de raio unitário para $Re = 1 \times 10^6$.

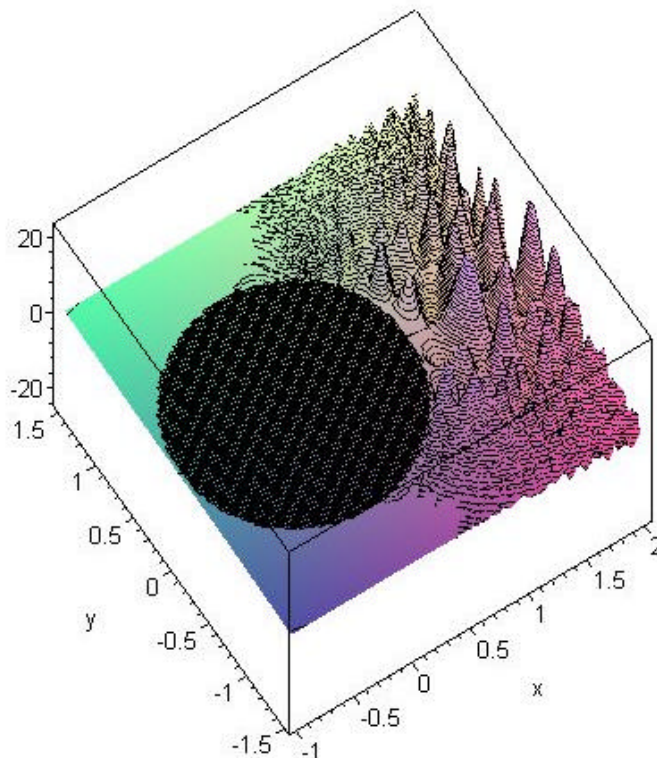


Figura 5.1: Função corrente em perspectiva.

Nesta figura, pode-se ver em perspectiva a vorticidade à jusante do centro do cilindro. Aqui, pode-se notar a formação de micro-vórtices junto a parede, bem como nas regiões periféricas. Nas regiões centrais, percebe-se a formação de vórtices com diâmetros maiores, indicando um descolamento efetivo da camada limite.

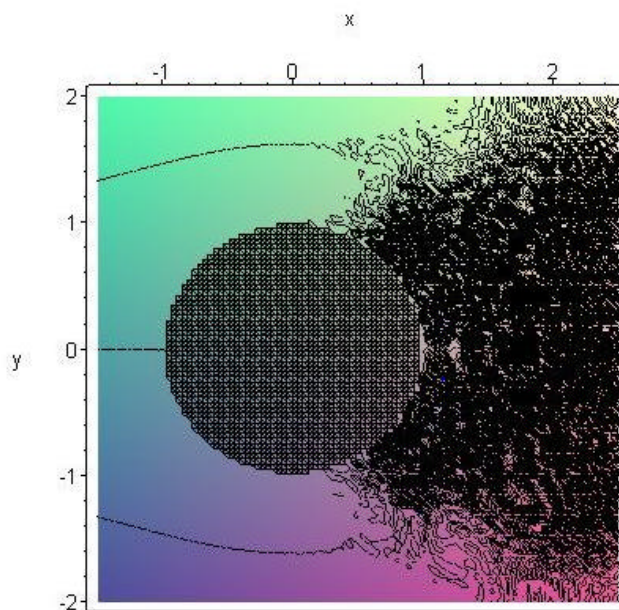


Figura 5.2: Função corrente do escoamento.

Nesta figura, nota-se o descolamento da camada limite ocorrendo aproximadamente a 115° .

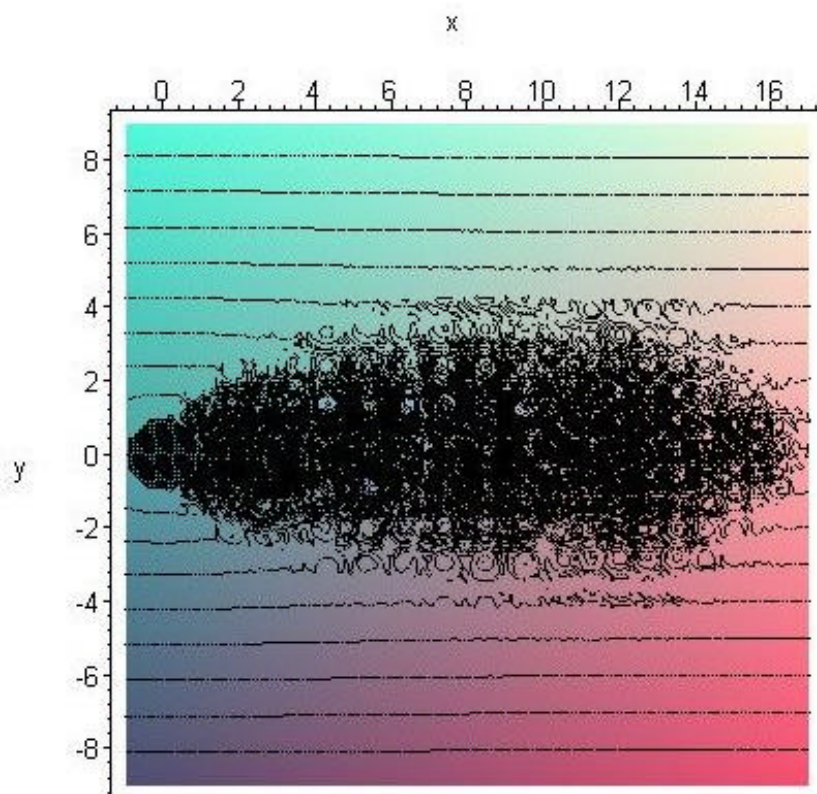


Figura 5.3. Função corrente de todo escoamento.

A Figura 5.3 mostra a esteira de vórtices completa. Aqui, nota-se o aumento progressivo da área de ação da esteira de vórtices na direção transversal ao escoamento à medida que se tomam pontos mais afastados do corpo submerso na direção longitudinal, com posterior dissipação à, aproximadamente, dezesseis vezes o raio do cilindro.

5.1. COMPONENTES DO CAMPO DE VELOCIDADES

As componentes do campo de velocidades são obtidas através da aplicação das identidades

$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Todos os resultados aqui apresentados foram calculados a uma distância de

1% do raio do cilindro. O gráfico seguinte mostra o perfil da componente u ao longo do cilindro.

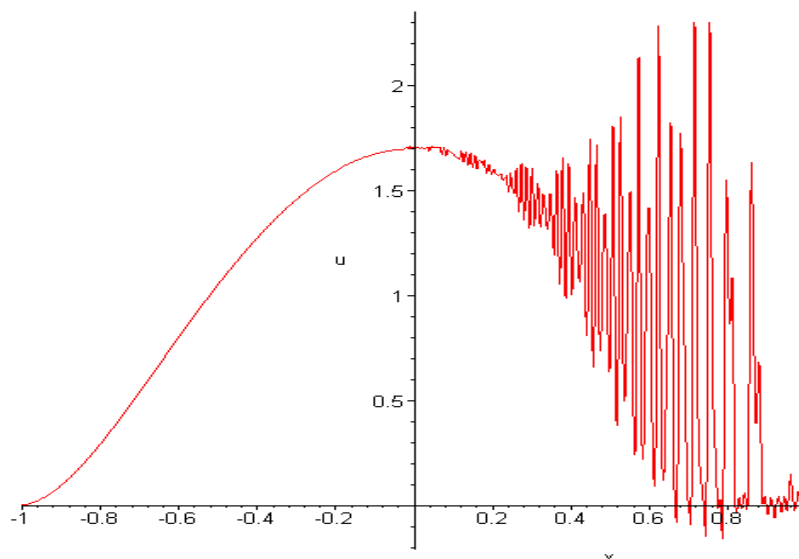


Figura 5.4: Perfil da componente u ao longo da superfície do cilindro.

Aqui, está plotado o comportamento do perfil de velocidade na direção longitudinal ao escoamento principal, ao longo da superfície do cilindro. A partir de $x=0$, pode ser visto o início das flutuações, resultantes da formação dos vórtices. Aproximadamente em $x=0.3$ as flutuações começam a aumentar, evidenciando o descolamento efetivo da camada limite. A amplitude máxima das flutuações se encontra em torno de 2 vezes o valor da velocidade de entrada.

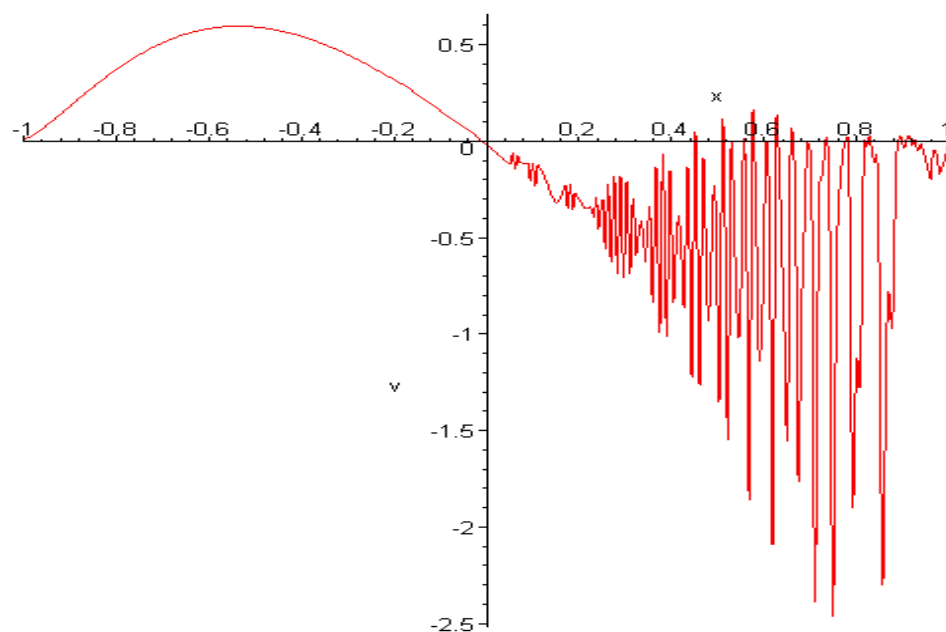


Figura 5.5: Perfil da componente v ao longo da superfície do cilindro.

A Figura 5.5 mostra o perfil de velocidade transversal à direção do escoamento principal. Igualmente ao perfil de velocidade longitudinal, pode-se notar um comportamento semelhante ao escoamento potencial na primeira metade do cilindro, porém com uma amplitude máxima inferior. A partir de $x = 0$ começa a formação de pequenas flutuações de velocidade. Também em torno de $x = 0,3$, as flutuações passam a ser maiores, com amplitude máxima em torno de 2 vezes o valor da velocidade de entrada, mostrando coerência com as flutuações obtidas com o perfil de velocidade longitudinal.

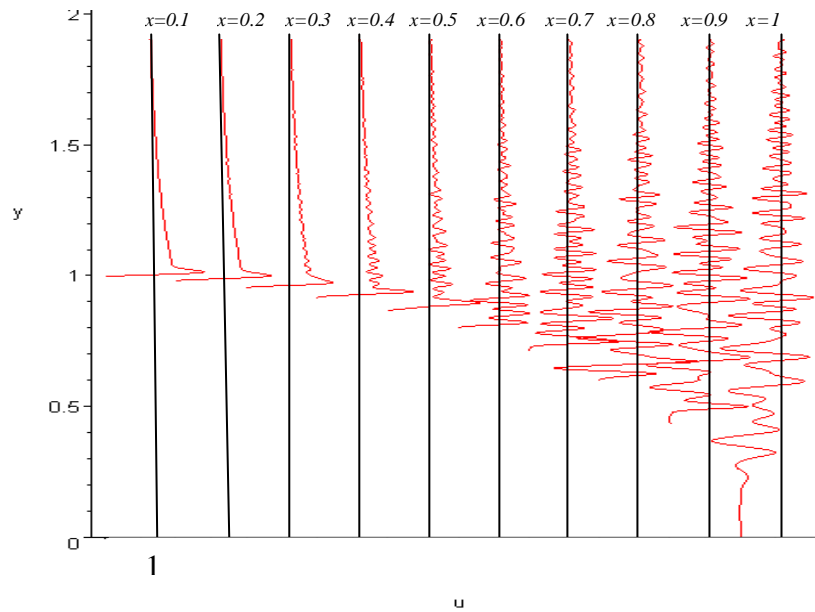


Figura 5.6: Perfil da componente u ao longo de y .

Nesta figura, está plotado o perfil de velocidades longitudinal para diversos valores de x . Para ponto em x , a escala da abscissa varia em torno da velocidade $u=1$. Aqui, pode-se perceber o aumento das flutuações conforme se avança na direção x , acarretando num aumento progressivo da camada limite, a partir de $x=0.2$. Pode-se notar também que, para regiões distantes do corpo, a componente de velocidade longitudinal tende para o escoamento potencial.

5.2. COMPONENTES DO GRADIENTE DE PRESSÃO

Uma vez obtida as componentes do campo de velocidades, é possível extrair as componentes do campo de pressão a partir das equações de Navier-Stokes. Dessa forma, substituindo as componentes u e v nas equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (5.10)$$

é possível obter expressões explícitas para as componentes do gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$.

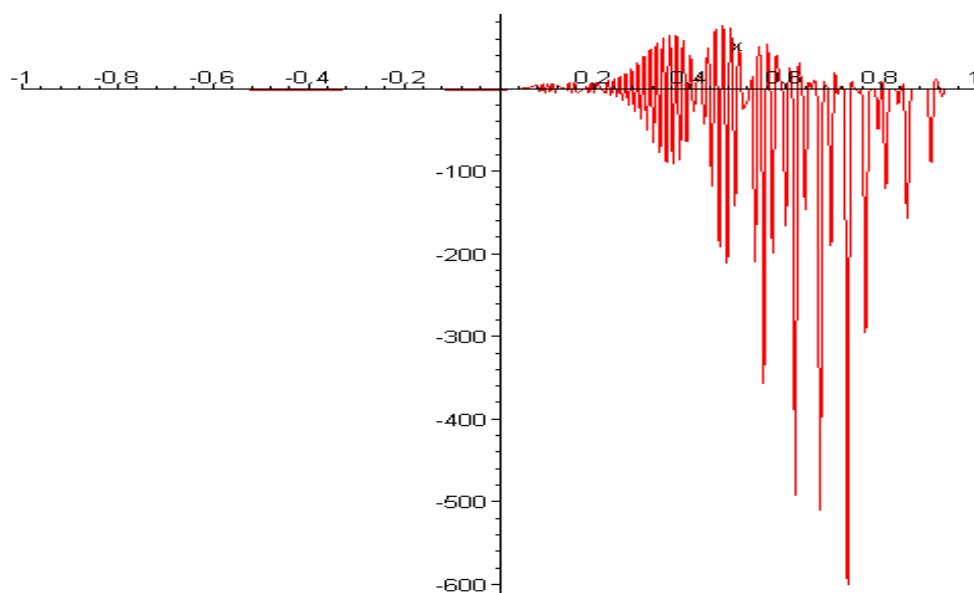


Figura 5.7: Gradiente de pressão na direção x .

Na Figura 5.7, está plotado o gráfico de $\frac{\partial p}{\partial x}$. Aqui, pode-se notar a tendência negativa das flutuações a partir da segunda metade do cilindro. Para $0.2 \leq x \leq 0.4$ percebe-se uma flutuação de alta frequência do campo de pressões, cujo valor médio é aproximadamente nulo; após este ponto nota-se uma tendência negativa das flutuações. Cabe lembrar que as componentes de pressão estão adimensionalizadas com relação à pressão dinâmica relativa ao escoamento potencial, ou seja, $p = P/rU_\infty^2$, onde P é a pressão termodinâmica.

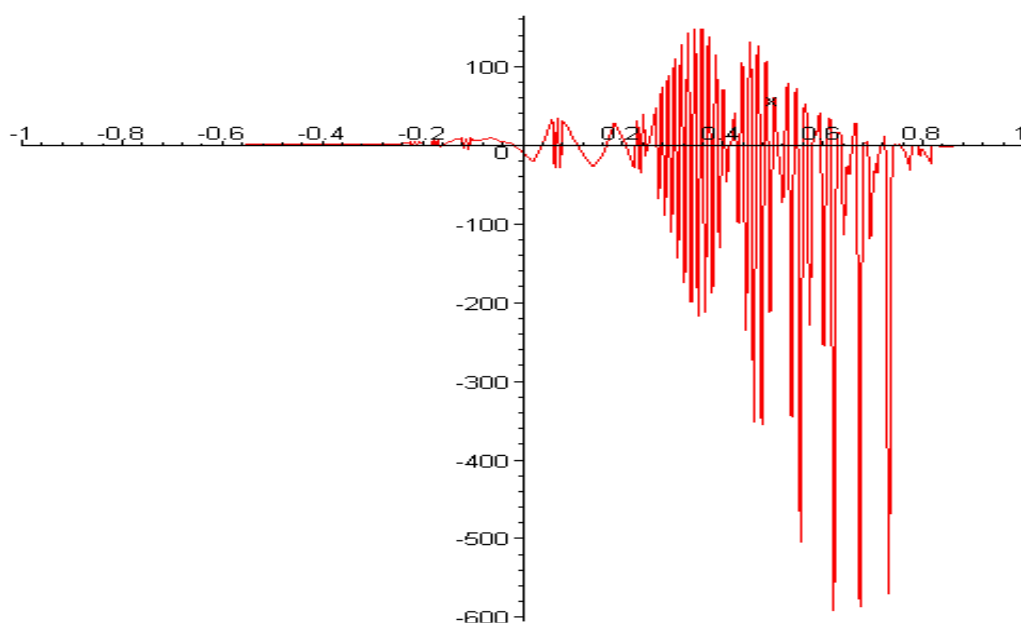


Figura 5.8: Gradiente de pressão na direção y .

Nesta figura observa-se o gradiente da pressão com relação y . Igualmente pode-se notar uma tendência de flutuações de alta frequência com média aproximadamente nula até $x = 0.4$. Após este ponto, as flutuações resultam em uma média notoriamente negativa. Em ambas as figuras, pode-se observar picos nas derivadas com amplitudes relativamente altas. Isto se deve ao caráter analítico desta abordagem, uma vez que mesmo os pequenos vórtices são modelados. Como os pequenos vórtices geram flutuações de velocidades em intervalos pequenos, é natural que ocorram flutuações de pressão com frequências altas, uma vez que a mesma é gerada a partir de derivadas do campo de velocidades.

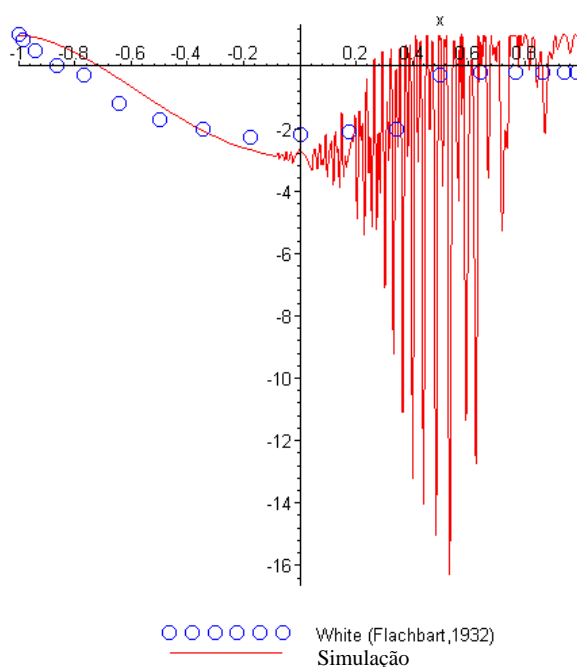


Figura 5.9: Coeficiente de Pressão ($Re = 6,7 \cdot 10^5$)

Na Figura 5.9 está plotado o coeficiente de pressão referente à simulação para $Re = 6,7 \cdot 10^5$. Pode-se observar que a simulação acompanha a tendência central dos dados experimentais coletados por Flachbart. Os valores obtidos para as flutuações de pressão serão posteriormente utilizados para a determinação dos coeficientes de arrasto e sustentação, bem como para as componentes das tensões normais e tangenciais.

O surgimento de componentes flutuantes de alta frequência produzido ao longo do campo de pressões sugere que as soluções exatas da equação de Helmholtz contenham termos que estão ausentes nas soluções das equações de Navier-Stokes, ao menos no que diz respeito ao modelamento de escoamentos laminares. De fato, uma vez que a equação de Helmholtz é obtida através da aplicação do operador rotacional sobre as equações de Navier-Stokes, é natural que suas soluções exatas contenham funções pertencentes ao espaço nulo desse operador. Esse fato sugere que um novo modelo de turbulência possa ser formulado para as equações de Navier-

Stokes, que consistiria na inclusão de termos pertencentes ao espaço nulo do operador rotacional sobre as equações em sua forma original, a fim de produzir as componentes flutuantes do campo de velocidades. Ao aplicar o operador rotacional sobre as equações de Navier-Stokes, esses termos seriam automaticamente anulados, de modo que não surgiriam novos termos na equação de Helmholtz decorrentes da implementação desse modelo de turbulência. Em outras palavras, a inclusão desses termos flutuantes sobre as equações de Navier-Stokes não violariam a equação de Helmholtz. A formulação de modelos de turbulência baseados na inclusão de termos pertencentes ao espaço nulo do operador rotacional será objeto de estudo em trabalhos futuros.

5.3. TENSÕES NORMAIS E TANGENCIAIS

Segundo Schlichting (1960), os componentes do campo de tensões podem ser obtidas a partir das seguintes expressões:

$$\mathbf{s}_x = -p_x - \frac{2}{3} \mathbf{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mathbf{m} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{s}_y = -p_y - \frac{2}{3} \mathbf{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mathbf{m} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{t}_{xy} = \mathbf{m} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (5.13)$$

Nestas equações, p_x, p_y correspondem às pressões termodinâmicas nas direções x e y , respectivamente. Estes valores são obtidos a partir da integração das expressões referentes aos gradientes de pressão em x e y .

Tabela 5.2: Valor de tensões normais e cisalhante ($Re = 1 \times 10^6$).

x	s_x	s_y	t_{xy}
0.05	0.02108883908	0.1659469845	0.2147182651
0.10	-0.01397299136	0.1471427192	0.2206851297
0.15	0.05369907181	2.836795882	0.2092742225
0.20	0.04383432493	2.958981924	0.2242883794
0.25	0.1077756247	6.071673375	0.2042619758
0.30	0.1892124241	1.432912807	0.2272464486
0.35	0.5316612615	5.588578019	0.2386327526
0.40	0.4751844350	0.5907809058	0.1227498655
0.45	1.534177289	0.2578483210	0.2631477794
0.50	0.7752306308	1.469698288	0.2037237289
0.55	3.206445337	-0.2991037124	-0.3206916201
0.60	4.332063252	0.5780171795	0.09795138294
0.65	4.555523990	0.1507599158	0.1509498913
0.70	4.227177846	-0.000746524203	0.1206442280
0.75	2.636021270	0.00108029289	-0.06684362932
0.80	1.140696160	-0.001482771863	-0.08241808530
0.85	1.337071683	0.00002112900404	-0.2633039952
0.90	0.5701452634	-0.000039159006	-0.2254517212
0.95	-0.000092551373	-0.0001357270308	-0.00002773984869

Nesta tabela, estão especificados alguns valores referentes às tensões normais e tangencial, referentes ao primeiro quadrante do cilindro ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$). Aqui os valores estão referenciados com respeito ao eixo x , porém é possível obter a coordenada y correspondente fazendo $y = \sqrt{1-x^2}$. Analisando os números da tabela, pode-se observar flutuações nas tensões decorrentes da presença de pequenos vórtices junto à parede. Porém, observa-se uma tendência coerente dos valores para as tensões: as tensões s_x possuem um valor pequeno em regiões do cilindro referentes ao ponto ($x=0, y=1$), bem como a tensão s_y possui valores altos em torno deste ponto. Por sua vez, as tensões cisalhantes possuem valores altos nos pontos onde o escoamento passa mais tangencialmente ao corpo submerso, diminuindo à medida que se caminha para o ponto ($x=1, y=0$); da mesma forma que a tensão normal em x aumenta e a tensão normal em y diminui. Outro ponto a ser destacado é que todas as tensões caem para um

valor pequeno para pontos na vizinhança de $x=0, y=0$. Isto decorre do fato de que neste ponto existe uma relativa diminuição dos valores das componentes da velocidade, conseqüentemente, as tensões são igualmente baixas. Vale lembrar que as tensões foram obtidas através do campo de velocidades e de pressão adimensionais.

5.4. COEFICIENTES DE ARRASTO E SUSTENTAÇÃO

Os coeficientes de arrasto e sustentação podem ser calculados com base nas expressões

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho U_\infty^2 A}, \quad (5.14)$$

$$C_L = \frac{2F_L}{\rho U_\infty^2 A}. \quad (5.15)$$

Nestas equações, F_D e F_L representam a força de arrasto e sustentação, respectivamente. A força de arrasto é calculada com a utilização da expressão para o gradiente de pressão na direção x , uma vez que a força na direção longitudinal é o resultado da integração da pressão com relação ao elemento de área referente à superfície do corpo submerso. Da mesma forma, o coeficiente de sustentação é calculado integrando-se o gradiente de pressão na direção y .

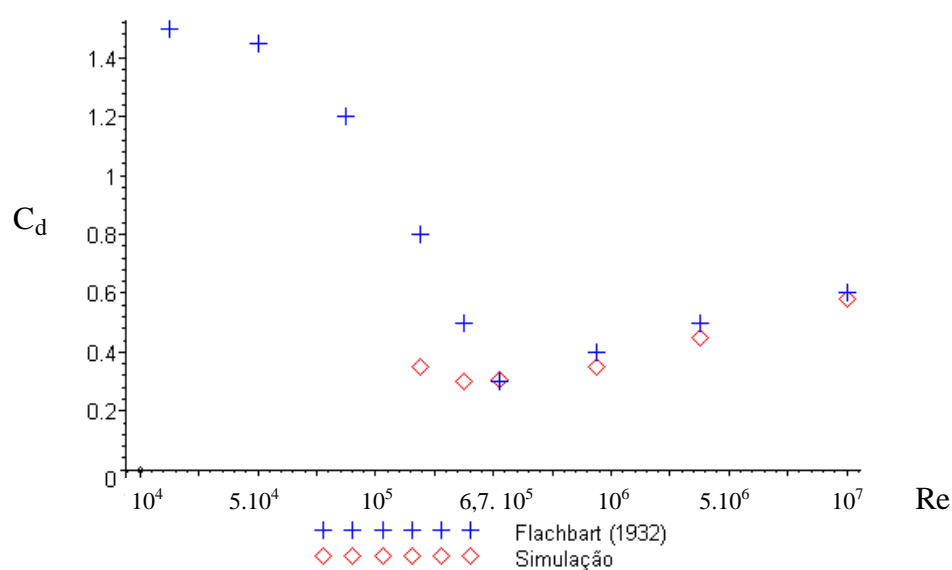


Figura 5.10: Coeficiente de Arrasto.

Na Figura 5.10, está representada a comparação entre a simulação realizada para o coeficiente de arrasto em um cilindro liso infinito e os dados experimentais coletados por Flachbart [White,1974] para diferentes números de Reynolds. Os coeficientes de arrasto calculados apresentam bons resultados para faixas acima do número de Reynolds crítico ($Re \geq 6,7 \cdot 10^5$), onde a camada limite do escoamento é turbulenta. Para faixas de Reynolds abaixo do valor crítico, observa-se uma discrepância dos valores experimentais. Este fato deve-se à condição inicial utilizada para a simulação, a qual foi aplicada com o intuito de simular escoamentos para altos números de Reynolds. Porém, é possível obter valores coerentes para o coeficiente de arrasto mesmo para regiões abaixo do Reynolds crítico, bastando para isso que se aplique uma nova condição inicial ao sistema, agora objetivando simular escoamentos em regime laminar ou escoamentos em transição.

5.5. VALOR MÉDIO DA COMPONENTE DE VELOCIDADE

Os valores médios das componentes flutuantes do campo de velocidades foram coletados ao longo da parede do cilindro, a uma distância de 1% do raio, com $Re = 6,7 \cdot 10^5$.

Tabela 5.3: Valor médio da componente u de velocidade.

x	\bar{u}	\bar{u}'
0.	1.986220504	0.6531159705
0.1	1.948435848	0.6169717495
0.2	1.901092782	0.5760864060
0.3	1.753942948	0.6232644415
0.4	1.514085276	1.052873826
0.5	1.640062432	1.141510054
0.6	1.206258766	0.6739088140
0.7	1.190285673	1.228632878
0.8	0.8037262325	0.7313471000
0.9	0.3944434165	1.026513062
1.0	0.05973710050	1.284120557

Nesta tabela, pode-se observar que nos pontos onde existe uma diminuição da velocidade média, como por exemplo, em $x=0.4$ ou em $x=0.9$ e 1.0 , a flutuação média correspondente aumenta,

evidenciando uma maior incidência de vórtices nestes locais, e conseqüentemente uma maior dissipação de energia. Os valores médios contidos na Tabela 5.3 foram calculados conforme as seguintes expressões:

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t^*} \sum_{k=0}^{10} u_k \quad (5.16)$$

$$\bar{u}' = \frac{1}{\Delta t^*} \sum_{k=0}^{10} (u_k - \bar{u}) \quad (5.17)$$

onde $\Delta t^* = \Delta t \cdot \frac{L}{U_\infty} \approx 1$ e $\Delta t \approx 1$.

O intuito com a realização deste trabalho esteve focado na metodologia analítica para a solução das equações que regem o escoamento de fluidos viscosos para altos números de Reynolds. Apesar de ter-se obtido resultados animadores resolvendo-se a equação de Helmholtz bidimensional, cabe lembrar que a turbulência é um fenômeno caracteristicamente tridimensional; dessa forma, para que se obtenha uma simulação realista do processo turbulento, a abordagem tridimensional da equação de Helmholtz é inevitável. A proposta inicial, relativa à simulação bidimensional de escoamentos flutuantes, sempre esteve embasada na necessidade de uma abordagem metodológica intermediária, capaz de ser extensível para casos tridimensionais. Embora os resultados obtidos estejam dentro das ordens de grandeza observadas experimentalmente, a maior contribuição deste trabalho diz respeito ao estabelecimento de uma linha metodológica, analítica, capaz de gerar soluções que simulem escoamentos viscosos, com garantia de extensão para abordagens tridimensionais, como mencionado em seções anteriores. A extensão do método para escoamentos tridimensionais está embasada no conceito de simetrias: a idéia central é utilizar as soluções geradas para casos bidimensionais como ponto de partida para a obtenção de simetrias que englobem soluções de casos tridimensionais.

6. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros, as seguintes atividades podem ser executadas, tomando como ponto de partida a solução exata bidimensional e os grupos de Lie disponíveis na literatura:

- 1) Aplicação das soluções obtidas para diferentes geometrias.
- 2) Aplicação das soluções para escoamentos multicorpo.
- 3) Extensão do método para o caso tridimensional, utilizando as simetrias de Lie disponíveis na literatura.
- 4) Formulação de modelos de turbulência para as equações de Navier-Stokes que não violem a equação de Helmholtz em três dimensões ou, como alternativa, investigação de fenômenos em microescala que eventualmente possam justificar essa violação.

A simulação de escoamentos em torno de corpos com diferentes geometrias objetiva estender a aplicação das soluções para casos de escoamentos em torno perfis aerodinâmicos e irregulares. Como visto na descrição do método, é possível obter soluções que simulem escoamentos em torno de corpos submersos com geometria arbitrária através do ajuste das paramétricas que descrevem o contorno do corpo. A obtenção de soluções para escoamentos multicorpo é igualmente um importante assunto a ser explorado, principalmente no que diz respeito a escoamentos em banco de tubos, com aplicação direta nas áreas de projeto e dimensionamento de trocadores de calor, bem como no dimensionamento termo-hidráulico de reatores nucleares.

A extensão da metodologia para a obtenção de soluções que simulem escoamentos tridimensionais é um importante tema a ser estudado e um campo quase inexplorado com relação à abordagem analítica para a obtenção de soluções exatas. Através da aplicação de métodos analíticos baseados em simetrias, é possível estender os resultados obtidos neste trabalho para o caso tridimensional através da aplicação dos grupos de simetria referentes à transformação de soluções bidimensionais em soluções tridimensionais [Ibragimov, 1995].

A formulação de modelos de turbulência que não violem a equação de Helmholtz em três dimensões ou a investigação de fenômenos que possam justificar essa violação decorre do surgimento de componentes flutuantes de alta frequência agregados ao campo de pressões. A presença dessas flutuações de alta frequência sugere que um novo modelo de turbulência

possa ser formulado para as equações de Navier-Stokes. Esse modelo implicaria na inclusão de termos pertencentes ao espaço nulo do operador rotacional sobre as equações de Navier-Stokes, para representar as componentes flutuantes do campo de velocidades. Ao aplicar o operador rotacional sobre as equações de Navier-Stokes, esses termos seriam automaticamente anulados, de modo que não surgiriam novos termos na equação de Helmholtz tridimensional decorrentes da inclusão do modelo de turbulência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Achenbach, E; Heinecke, E; 1981. **On vortex shedding from smooth and rough cylinders in the range of Reynolds numbers 6×10^3 to 5×10^6 .** J. Fluid Mechanics, vol. 109, pp. 239-251.

Bejan A., 1984, Convection Heat Transfer, John Wiley.

Bluman, G.; Kumei, S, 1989.- **Symmetries and differential equations.**- Springer Verlag, N. York.

Borthwick, A; 1986. **Comparison between two finite-diference schemes for computing the flow around a cylinder.** International journal for numerical methods in fluids. Vol. 6, 275-290.

Churchill, Ruel V., 1975. **Variáveis complexas e suas aplicações.** McGraw-Hill do Brasil.

Dettman, John W, 1965. **Applied Complex Variables.** MacMillan.

Dattoli, G., Gianessi, M., Quattromini, M., Torre, A, 1998. – **Exponential operators, operational rules and evolutional problems** – Il Nuovo Cimento, V.113B, N.6, pp 699-710 .

Figueiredo, Djairo Guedes, 1963. **Teoria Clássica do Potencial.** Editora Universidade de Brasília.

Freire, A.; Mennut, P.; Su, J; 1998. **Turbulência: Anais da I Escola de Primavera em Transição e Turbulência.** Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, ABCM.

Fromm, J; Harlow, F; 1963. **Numerical solution of the problem of vortex street development.** The physics of fluids. Vol. 6, Nº 7.

Ibragimov, N, 1995. - **Lie Group Analysis of partial differential equations.**- CRC Press, Boca Raton .

Karniadakis, G; 1988. **Numerical simulation of forced convection heat transfer from a cylinder in crossflow**. International journal for heat mass transfer. Vol 31, N° 1, 107-118.

Nehari, Zeev, 1952. **Conformal Mapping**, Frist edition. McGraw-Hill, New York.

Olver, P, 2000.- **Applications of Lie Groups to differential equations**. Springer Verlag, N. York

Reichl, L., 1980. **A modern course in statistical physics**. Editora Edward Arnold Publishers.

Schlichting, Hermann, 1968. **Boundary-layer Theory**, sixth edition. McGraw-Hill, New York.

White, Frank M, 1974. **Viscous fluid Flow**, Second edition. McGraw-Hill, New York.

Zabadal, J., Vilhena, M., Segatto, C, 2001. - **The total photon cross-section formulation for a wide range of energy** – Il Nuovo Cimento, V. 116B, N. 2, pp 183-190 .

Zabadal, J; Beck, D; Santiago, G; 2004. **Soluções Exatas para a Equação de Helmholtz em duas Dimensões** - IV Escola de Primavera em Transição e Turbulência.

Zwillinger, D, 1992.- **Handbook of Differential equations**.- Academic Press, Boston.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Invariância da Equação de Laplace frente a uma transformação conforme.

Tomando o Laplaciano

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Para a mudança de variável, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = u_x \frac{\partial f}{\partial u} + v_x \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (u_x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u_{xx} \frac{\partial f}{\partial u} + (v_x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + v_{xx} \frac{\partial f}{\partial v} + 2u_x v_x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e o termo com relação a y fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = u_y \frac{\partial f}{\partial u} + v_y \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (u_y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u_{yy} \frac{\partial f}{\partial u} + (v_y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + v_{yy} \frac{\partial f}{\partial v} + 2u_y v_y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a equação (A.2) e (A.3) na equação de Laplace temos:

$$\begin{aligned} u_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u_{xx} \frac{\partial f}{\partial u} + v_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + v_{xx} \frac{\partial f}{\partial v} + u_y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u_{yy} \frac{\partial f}{\partial u} + v_y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + v_{yy} \frac{\partial f}{\partial v} + \\ 2u_x v_x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2u_y v_y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (u_x^2 + u_y^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{\partial f}{\partial v} (v_{xx} + v_{yy}) + \frac{\partial f}{\partial u} (u_{yy} + u_{xx}) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (u_x v_x + u_y v_y) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Derivando as condições de Cauchy-Riemann, nas variáveis x e y , resultam nas seguintes expressões para u e v :

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\v_{xx} + v_{yy} &= 0\end{aligned}\tag{A.5}$$

Substituindo na equação (A.4), obtêm-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_x^2 + u_y^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_x^2 + v_y^2) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u_x v_x + u_y v_y) = 0$$

que pode ser escrita como

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(u_x^2 + u_y^2) = 0\tag{A.6}$$

Considerando $f(z) = u + iv$, a equação (A.6) toma a forma

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(f'(z))^2 = 0\tag{A.7}$$

A forma da equação (A.6) explica o fato de Transformação Conforme exigir que $f'(z) \neq 0$, pois caso contrário, a invariância da equação de Laplace não estaria garantida

APÊNDICE B

Ortogonalidade entre as isolinhas de uma função de variável complexa

Sendo

$$f(z) = \mathbf{f}(x, y) + i\mathbf{y}(x, y)$$

e tomando $\mathbf{f} = c_1$ e $\mathbf{y} = c_2$ como sendo as respectivas curvas das parcelas real e imaginária, e tendo o vetor normal a curva c_2 como sendo $\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y}\right)$, a ortogonalidade pode ser mostrada fazendo:

$$\nabla \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \quad (\text{B.1})$$

Aplicando as condições de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} &= -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \end{aligned}$$

A equação (B.1) fica

$$\nabla \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.2})$$

A equação (B.2) mostra que os vetores normais às curvas c_1 e c_2 são também mutuamente ortogonais.

APÊNDICE C

Obtenção da equação de Helmholtz.

A equação de Helmholtz é obtida através da aplicação do operador rotacional no sistema Navier-Stokes. Para o caso de regime transiente, bidimensional e incompressível, as equações de Navier-Stokes têm o seguinte formato:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (C.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right], \quad (C.2)$$

onde ρ corresponde à massa específica do fluido e Re corresponde ao Número de Reynolds do escoamento.

Aplicando o operador rotacional nas equações (C.1) e (C.2), obtêm-se

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \vec{k} - \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right] \vec{k} - \left[\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \vec{k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \vec{k} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] \vec{k} \quad (C.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \vec{k} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \vec{k} - \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \vec{k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \vec{k} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right] \vec{k}, \quad (C.4)$$

onde \vec{k} representa a componente do vetor na direção z .

Somando as equações (C.3) e (C.4), e reagrupando os termos, resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] + u \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right] + \frac{\partial v}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \\ & + v \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (C.5)$$

Considerando a vorticidade como sendo

$$\nabla \times V = \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \vec{k} = \mathbf{w}_z \quad (C.6)$$

onde $V = u\vec{i} + v\vec{j}$, aplica-se a mesma na equação (C.5), obtendo-se

$$\frac{\partial w_z}{\partial t} + u \frac{\partial w_z}{\partial x} + v \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \frac{1}{Re} \nabla^2 w_z. \quad (C.7)$$

O termo entre colchetes na equação (C.7) é nulo, pois corresponde à equação da continuidade, Com isso, a equação (C.7) toma a forma

$$\frac{\partial w_z}{\partial t} + u \frac{\partial w_z}{\partial x} + v \frac{\partial w_z}{\partial y} = \mathbf{n} \nabla^2 w_z \quad (C.8)$$

e corresponde à equação de Helmholtz bidimensional em regime transiente para escoamento incompressível.

APÊNDICE D

Obtenção da solução Formal.

Para equações na forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af, \quad (\text{D.1})$$

onde A é um operador linear, é possível obter uma solução para f tratando A como um parâmetro. Assim, a solução pode ser obtida via variáveis separáveis, resultando em

$$f = e^{tA} [f_0]. \quad (\text{D.2})$$

onde f_0 corresponde à condição inicial do sistema físico. A dificuldade de utilização desta solução diz respeito à exponencial do operador A , a qual é aplicada sobre a função inicial f_0 , pois nem sempre é possível se obter uma solução explícita para a função f . Uma forma de gerar soluções a partir de (D.2) é expandindo a função em série de Taylor, o que resulta em

$$f = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right] f_0, \quad (\text{D.3})$$

onde A^k representa as potências do operador A , isto é, o número k de vezes em que o operador será aplicado sobre a função f_0 .

Atualmente, a pesquisa na área de soluções formais está voltada para a obtenção de alternativas que viabilizem sua utilização (Datolli et al, 1998). Uma alternativa à expansão da solução (D.2) em série de Taylor é a introdução de funções auxiliares que possibilitem simplificar a aplicação das potências do operador A sobre a condição inicial. Uma destas alternativas é objeto do método utilizado neste trabalho, onde a introdução da autofunção do laplaciano como função auxiliar possibilita a obtenção de uma solução explícita via solução formal.

APÊNDICE E

Comutatividade dos operadores A e B .

Para que o processo iterativo possa ser aplicado nas equações geradas pelo Split, é necessário que $[A, B] = 0$, ou seja, os operadores A e B devem comutar. Como exemplo, a equação

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (\text{E.1})$$

pode ser resolvida com a aplicação do Split, resultando no sistema

$$\begin{cases} Af = Q \\ Bf = Q \end{cases}, \quad (\text{E.2})$$

onde $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ e $B = \frac{\partial}{\partial t}$. A comutatividade do sistema (E.2) pode ser verificada aplicando

$$AB = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial t} \right] = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial t}, \quad (\text{E.3})$$

$$BA = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2}$$

O que implica em $[A, B] = 0$.

A condição de comutatividade pode ser demonstrada da seguinte maneira: tomando o sistema

$$\begin{cases} Af = Q, & (\text{E.4}) \\ Bf = Q; & (\text{E.5}) \end{cases}$$

aplica-se o operador B em (E.4) e o operador A em (E.5), o que resulta em

$$\begin{cases} BAf = BQ \\ ABf = AQ \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

Subtraindo as equações do sistema (E.6), obtêm-se

$$BAf - ABf = BQ - AQ. \quad (\text{E.7})$$

Invertendo o sinal da equação (E.7) resulta em

$$AQ - BQ = ABf - BAf = [A, B]f \quad (\text{E.8})$$

Assim, $[A, B]f = 0$ implica em $AQ - BQ = 0$. Este resultado possibilita alimentar a fonte Q com a própria solução do sistema gerado pelo split, o que resulta no processo iterativo

$$\begin{cases} A f_{k+1} = f_k \\ B f_{k+1} = f_k \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

APÊNDICE F

TRANSFORMAÇÕES CONFORMES

A aplicação das transformações conformes consiste em um mapeamento de pontos entre dois domínios distintos. Seu objetivo é transformar a geometria do domínio original em uma outra geometria. Esta transformação é conseguida através da aplicação de uma função analítica na variável complexa (DETTMAN, 1965; NEHARI, 1952; FIGUEIREDO, 1963).

Para exemplificar o método, vejamos o caso da função $f(z) = z^2$. Esta função pode ser expressa em termos das coordenadas cartesianas (x, y) fazendo $z = x + iy$, e, substituindo na equação original, resulta em $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy) = u(x, y) + iv(x, y)$, sendo expressa também em termos das variáveis u e v .

Define-se então um ponto arbitrário no plano w como sendo $w = u(x, y) + iv(x, y)$ e tomando-se uma reta horizontal no plano z , ou seja, $y = cte$ (fig. 4.1.a) e aplicando a transformação acima descrita, obtêm-se uma nova geometria no plano w (fig. 4.1.b):

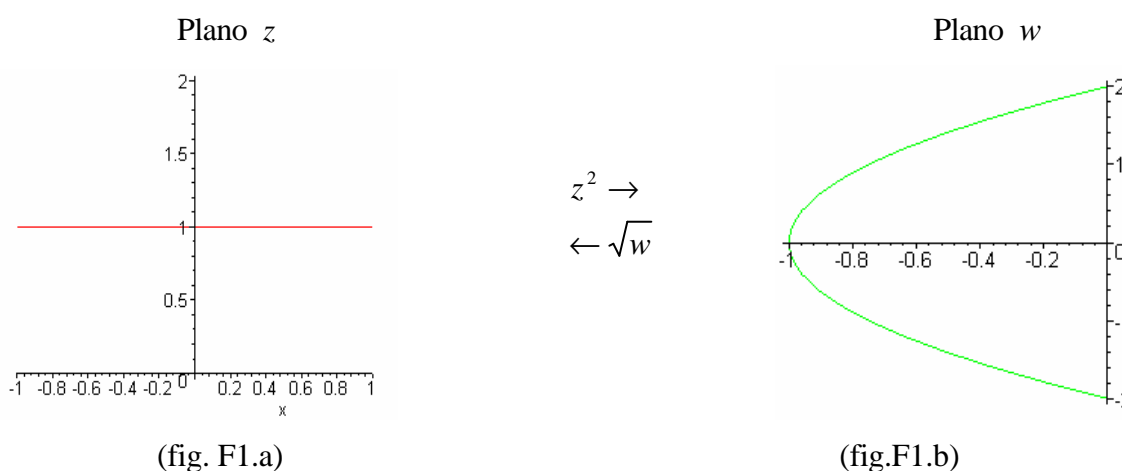


Figura A 1: Transformação conforme aplicada ao plano z gera a curva do plano w .

Neste caso, foi aplicado uma transformação através da função $f(z) = z^2$ no plano z , de forma que ocorresse uma mudança entre os pontos correspondentes do plano z para o plano w .

Segundo Dettman (1965), para que uma transformação possa ser conforme, existem dois requisitos que precisam ser satisfeitos:

- 1º - A função $f(z)$ aplicada no plano z precisa ser analítica no domínio.
- 2º - A derivada da função $f(z)$ não pode ser nula, i.e., $f'(z) \neq 0$

Qualquer transformação de variável complexa que satisfaça estes dois requisitos é dita conforme, tendo como característica o fato de preservar a estrutura da equação de Laplace frente à mudança de variável (ver apêndice A).

CONDIÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Outra característica de uma transformação conforme é o fato de ela preservar os ângulos de um elemento de área frente a uma transformação. Isto significa que a malha de um determinado domínio preserva seus ângulos quando mapeada em outro domínio. Segundo Dettman (1965), esta propriedade decorre diretamente das condições de Cauchy-Riemann: tomando $z = x + iy$, qualquer função desta variável complexa pode ser expressa como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. A derivada desta função pode ser representada por

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - (u(x, y) + iv(x, y))}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Para que $f(z)$ seja analítica, este limite deve existir independentemente de como Δz tenda para zero, seja pela aproximação por x ou pela aproximação por y . Assim, fazendo Δy tender a zero antes de Δx , resulta em

$$f_1'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Por outro lado, fazendo Δx tender a zero antes de Δy , obtêm-se

$$f_2'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y) + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Para que $f(z)$ seja analítica, $f'(z)$ deve ser única, assim $f_1'(z) = f_2'(z)$. Isto implica em

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Estas equações são conhecidas como condições de Cauchy-Riemann e necessariamente precisam ser respeitadas em qualquer função de variável complexa. Estas condições também garantem a ortogonalidade entre as isolinhas de uma função de variável complexa (ver apêndice B).

PARAMÉTRICAS QUE MAPEIAM O DOMÍNIO.

A descrição das transformações conformes apresentada até este momento se refere aos casos onde a função $f(z)$ aplicada na transformação é conhecida, ou seja, aplica-se a função no domínio original de forma a obter o domínio transformado. Porém, para problemas práticos em engenharia, muitas vezes é necessário estabelecer uma forma de determinar qual a função $f(z)$ responsável pelo mapeamento entre dois domínios já conhecidos, ou seja, transformar o domínio original em algum outro domínio (conhecido) que facilite a solução. Para que este tipo de abordagem possa ser realizado, é necessária a aplicação das funções paramétricas, as quais são responsáveis pelo mapeamento entre os domínios dos planos. As paramétricas que mapeiam o domínio podem ser vistas como a função pela qual se dará a transformação conforme. Esta etapa do processo pode exigir tratamento numérico, consistindo no ajuste de curva dos pontos do domínio original. A transformação conforme realizada neste trabalho consiste em transformar o domínio original de um determinado problema em um semi-plano w positivo. Isto significa que independentemente do formato do domínio original, este sempre será transformado em uma reta horizontal no plano w .

As paramétricas podem ser determinadas percorrendo-se o contorno do domínio original e relacionando-os com os pontos desejados no domínio transformado.

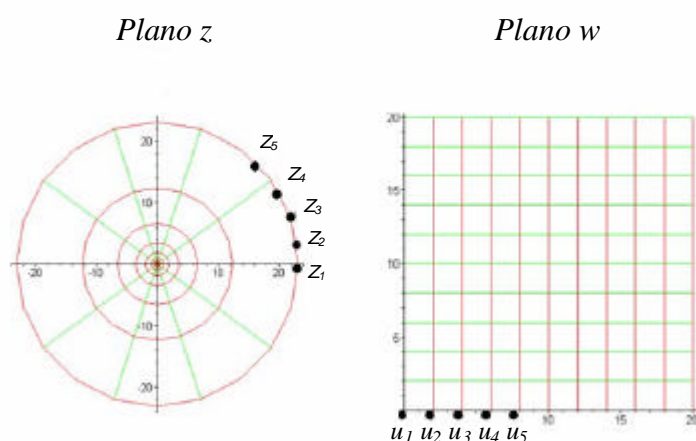


Figura A 2: Ajuste das paramétricas.

Para que o levantamento das paramétricas seja efetuado, é necessário um mapeamento entre os pontos do contorno nos plano z e plano w . Para isso utiliza-se o parâmetro u , a fim de determinar a função que correlaciona os pontos de um contorno no outro.

Pelo ajuste de curva surge então duas funções dependentes da variável u ,

$$\begin{cases} X = X(u) \\ Y = Y(u) \end{cases}$$

Para a determinação das paramétricas no interior do domínio, basta fazer a substituição da variável u por $u + iv$, a fim de garantir que as funções ajustadas respeitem as condições de Cauchy-Riemann. Assim,

$$\begin{cases} X = X(u + iv) \\ Y = Y(u + iv) \end{cases}$$

Uma vez obtida as funções paramétricas, aplica-se as mesmas aos pontos do plano z , onde $z = X(u + iv) + iY(u + iv)$. Assim, os pontos (x, y) são determinados extraindo-se a parte real e imaginária, respectivamente, isto é,

$$\begin{cases} x = \Re(z) \\ y = \Im(z) \end{cases} .$$

A transformação conforme via paramétricas pode ser utilizada para introduzir a rugosidade do corpo submerso. Uma vez obtida a solução que mapeie o formato original do corpo submerso em um outro formato qualquer, é possível aplicar-se uma segunda transformação, agora utilizando as paramétricas, a fim de descrever a rugosidade no contorno do corpo, onde as paramétricas são determinadas conforme a rugosidade desejada.

APÊNDICE G

INTRODUÇÃO À APLICAÇÃO DOS GRUPOS DE LIE

O grupo de Lie responsável pela transformação de uma solução bidimensional em uma solução tridimensional para o sistema Navier-Stokes é dado por

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
 V_2 &= a_1(t) \frac{\partial}{\partial p} \\
 V_3 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v} \\
 V_4 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} + w \frac{\partial}{\partial v} - v \frac{\partial}{\partial w} \\
 V_5 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} + w \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial w} \\
 V_6 &= a_2(t) \frac{\partial}{\partial x} + a_2'(t) \frac{\partial}{\partial u} - x a_2''(t) \frac{\partial}{\partial p} \\
 V_7 &= a_3(t) \frac{\partial}{\partial y} + a_3'(t) \frac{\partial}{\partial v} - y a_3''(t) \frac{\partial}{\partial p} \\
 V_8 &= a_4(t) \frac{\partial}{\partial z} + a_4'(t) \frac{\partial}{\partial w} - z a_4''(t) \frac{\partial}{\partial p} \\
 V_9 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} - u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v} - w \frac{\partial}{\partial w} - 2p \frac{\partial}{\partial p}
 \end{aligned}$$

onde $a_n(t)$ são funções arbitrárias, a_n' e a_n'' são as respectivas derivadas primeira e segunda.

Os operadores V_1 a V_9 , que formam o grupo de Lie, são utilizados na obtenção de novas soluções exatas para as equações de Navier-Stokes através do processo descrito no apêndice H.

APÊNDICE H

PROCESSO DE APLICAÇÃO DO GRUPO DE LIE

A fim de empregar soluções exatas de uma dada equação diferencial para construir novas soluções exatas, podem ser utilizados os chamados Grupos de Lie (Olver, 2000). Do ponto de vista operacional, grupos de Lie são conjuntos de operadores diferenciais de primeira ordem, denotados por v_i , e chamados *geradores infinitesimais do grupo de simetria admitido pela equação diferencial*, que possuem a seguinte propriedade:

$$e^{v_i} f(x, y, \dots) = g(x, y, \dots) \quad (\text{H.1})$$

Essa propriedade pode ser traduzida em termos operacionais da seguinte forma: a aplicação da exponencial de um gerador sobre uma solução exata f produz uma nova solução exata, dada por g . Para aplicar esses operadores sobre uma solução, pode-se expandir a exponencial em série de Taylor, produzindo potências desses operadores, que então são aplicadas sobre f gerando uma solução em série para a função g . Entretanto, esse processo pode se tornar computacionalmente inviável, caso a série obtida venha a convergir lentamente. A fim de contornar essa dificuldade, foram formuladas regras para a aplicação de exponenciais de operadores de primeira ordem (Dattoli, 1998), cuja descrição sumária é apresentada a seguir.

A principal propriedade dos operadores exponenciais, da qual se origina toda a Álgebra de Lie, consiste em uma lei de deslocamento:

$$\left[e^{a \frac{d}{dx}} \right] f(x) = f(x+a) \quad (\text{H.2})$$

onde a é uma constante. Essa propriedade é verificada utilizando a expansão em série de Taylor para o operador exponencial presente no membro esquerdo de (H.2):

$$\left[e^{a \frac{d}{dx}} \right] f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_x = f(x+a) \quad (\text{H.3})$$

Dessa expansão também decorre indiretamente a seguinte propriedade

$$\left[e^{ag \frac{d}{dx}} \right] f(x) = f \left[h^{-1} (a + h(x)) \right] \quad (\text{H.4})$$

onde g representa uma função arbitrária de x , e h é definida como

$$h(x) = \int \frac{dx}{g(x)} \quad (\text{H.5})$$

Essas propriedades são válidas também para funções de mais de uma variável. Como exemplo,

$$\left[e^{a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}} \right] f(x, y) = f(x+a, y+b) \quad (\text{H.6})$$

onde a e b são constantes. Assim, a partir de uma determinada solução exata de uma equação diferencial e a partir de um operador diferencial de primeira ordem na forma

$$v_i = g_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + g_2(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + g_3(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z} + \dots \quad (\text{H.7})$$

é obtida uma nova solução exata, com o auxílio das regras deduzidas por Dattoli .

APÊNDICE I

ANÁLISE DIMENSIONAL REFERENTE À SOLUÇÃO (3.67)

As constantes arbitrárias contidas na solução (3.67) são determinadas com o auxílio da análise dimensional do argumento da função arbitrária f_1 . A fim de garantir que este argumento seja adimensional, é necessário que a unidade das constantes a_1 e b_1 seja $[1/m]$, assim como é necessário que a unidade de a_2 seja $[1/m^2]$. Considerando f_1 como sendo uma função oscilante, conclui-se que as constantes a_1 e b_1 correspondem ao número de onda da função, bem como a_2 corresponde ao quadrado do mesmo. Dessa forma, é possível aplicar a condição inicial determinando-se o tamanho dos vórtices a partir do número de onda da função e utilizar a estimativa do raio médio dos vórtices descrita no capítulo 3.4 a fim de relacionar o número de onda com o número de Reynolds.