

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Propriedades Ergódicas do Algoritmo da Raiz Quadrada

Marcelo Sobottka

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação

em Matemática como requisito parcial

para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Dr. Artur Oscar Lopes

Orientador

Porto Alegre, 7 de fevereiro de 2002

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer em primeiro lugar a minha família e, em especial aos meus pais, Wilhelm e Beloni, por todo apoio que me deram durante tantos anos.

Dentre tantas pessoas que me incentivaram e me inspiraram a seguir este caminho destaco o Prof. Luiz Paulo Luna de Oliveira, meu orientador durante a graduação e amigo. Sua idéia de analisar a distribuição dos dígitos da raiz quadrada de um número originou esse trabalho. Também lhe sou grato pelas várias horas dedicadas a avaliar e discutir os resultados aqui obtidos.

Quero expressar minha gratidão também ao meu orientador de mestrado, Prof. Artur Oscar Lopes, bem como a todos os demais professores do programa de Pós-Graduação em Matemática que tive a oportunidade de conhecer, Prof. Jaime Bruck Ripoll, Prof. Ivan Edgardo Pan Perez , Prof. Alveri Alves Sant'Ana, Prof. Luís Gustavo Doninelli Mendes e Prof. Elizabeth Ferreira da Costa Gomes.

Por último, mas não menos importante, agradeço à secretária do programa de Pós-Graduação em Matemática, Rosane P. Reginatto dos Santos, cuja a atitude acolhedora e solícita tem ajudado tantos alunos a resolver seus problemas não matemáticos.

ABSTRACT

In this work, we will show that the algorithm, which determines digit by digit the square root of a positive real number, corresponds to a dynamical system in the plane with complex dynamical behaviour. A relation of equivalence can be obtained and through it we determine a new dynamical system in the quotient space. Such dynamical system will be study from two points of view: Topological Dynamics and Ergodic Theory. We will show that such dynamical system is topologically conjugated to a shift map in the Bernoulli's space on 10 symbols. Furthermore we will show that there exists a natural invariant measure which is ergodic for this dynamical system.

RESUMO

Neste trabalho, mostraremos que o algoritmo que determina dígito a dígito a raiz quadrada de um número real positivo, corresponde a um sistema dinâmico no plano com um comportamento dinâmico complexo. Uma relação de equivalência pode ser obtida e através dela determinamos um novo sistema dinâmico definido no espaço quociente. Tal sistema dinâmico será estudado a partir de dois pontos de vista: Dinâmica Topológica e Teoria Ergódica. Mostraremos que tal sistema dinâmico é topologicamente conjugado ao shift map no espaço de Bernoulli sobre 10 símbolos. Além disso, mostraremos que existe uma medida invariante natural a qual ergódica para este sistema dinâmico.

ÍNDICE

1. Introdução	4
2. O Algoritmo de Extração da Raiz Quadrada	5
3. Definições e Resultados Gerais	8
4. Dinâmica Simbólica	22
5. A Aplicação Raiz Quadrada	34
6. Conclusão	50
Referências	52

1. INTRODUÇÃO

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar alguns resultados sobre o algoritmo da extração dígito a dígito da raiz quadrada de um número real positivo (ver seção 2).

Mostraremos que o algoritmo em questão corresponde a um sistema dinâmico \mathcal{H} definido no quadrante positivo do plano. Na seção 5 veremos que \mathcal{H} é uma aplicação não bijetiva. Mostraremos também que a região do plano $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x - 10y < 100\}$ atrai todas as trajetórias do sistema dinâmico \mathcal{H} e que, nesta região, \mathcal{H} leva semi retas em semi retas. Finalmente, mostraremos que a transformação \mathbb{H} obtida fazendo o quociente (sobre as semi retas em \mathcal{R}) é conjugada no sentido de Teoria Ergódica à transformação shift map no espaço das seqüências infinitas sobre dez símbolos, agindo sobre uma medida ν (ver seção 4). Destes resultados concluiremos que o sistema quociente é caótico (ver definição 14) e ainda que, pelo fato do sistema ser ergódico (ver definição 26) para uma certa medida natural, podemos usar o teorema de Birkhoff para obter resultados estatísticos a partir das órbitas do sistema dinâmico.

2. O ALGORITMO DE EXTRAÇÃO DA RAIZ QUADRADA

Convencionaremos neste trabalho escrever um número real positivo S como $\overline{s_1, s_2 s_3 s_4 \dots}$, onde s_1 é um número inteiro não negativo qualquer, e, para todo $i > 1$, s_i é um número inteiro de 0 a 9. Além disso, exigiremos que exista um número infinito de índices j , tais que $s_j \neq 9$, afim de evitar ambigüidade na representação de certos números. Assim, por exemplo, o número $1,00\dots$ será representado nesta forma e não na forma $0,99\dots$. Um número inteiro será denotado por $\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n}$, onde para todo $i > 1$, s_i é um número inteiro de 0 a 9.

Seja x_0 um número real positivo tal que $\sqrt{x_0} = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots s_j \dots}$. O algoritmo de obtenção dos dígitos s_i da raiz quadrada de x_0 que utilizaremos consiste em encontrarmos sucessivas aproximações dessa raiz da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1^2 \leq x_0 \\ (10\overline{s_1} + s_2)^2 \leq 100x_0 \\ (10\overline{s_1 s_2} + s_3)^2 \leq 100^2 x_0 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ (10\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n} + s_{n+1})^2 \leq 100^n x_0, \\ \quad \quad \quad \vdots \end{array} \right.$$

onde determinamos s_i como os maiores números inteiros não negativos para os quais as desigualdades se verificam.

Podemos verificar que os números s_i , assim obtidos, satisfazem a convenção anterior, pois se s_1 é o maior inteiro tal que $s_1^2 \leq x_0$, então $(s_1 + 1)^2 > x_0$ e $(10s_1 + 10)^2 = 100(s_1 + 1)^2 > 100x_0$. Daí, $(10s_1 + s_2)^2 \leq 100x_0 < (10s_1 + 10)$, de onde concluímos que $s_2 \leq 9$. Por indução, verifica-se que $s_i \leq 9$ para todo $i > 1$.

Podemos rescrever a inequação que nos permite determinar s_{n+1} de maneira recursiva como:

$$s_{n+1}^2 + y_n s_{n+1} \leq x_n,$$

$$\text{onde } y_n = 20\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n} \text{ e } x_n = 100^n x_0 - 100\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n}^2.$$

Para determinarmos o maior inteiro positivo que satisfaz a última inequação, basta calcular:

$$s_{n+1} = \text{int} \left(\frac{-y_n + \sqrt{y_n^2 + 4x_n}}{2} \right),$$

onde $\text{int} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ é a função que leva um número real na sua parte inteira. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 100^{n+1}x_0 - 100\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n s_{n+1}}^2 = 100(100^n x_0 - (10\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n} + \\ &\overline{s_{n+1}})^2) = 100(100^n x_0 - (100\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n}^2 + 20\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n} \overline{s_{n+1}} + \overline{s_{n+1}}^2)) = \\ &100(x_n - y_n s_{n+1} - s_{n+1}^2) \end{aligned}$$

e

$$y_{n+1} = 20\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n s_{n+1}} = 20(10\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n} + \overline{s_{n+1}}) = 10(20\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_n} + 2\overline{s_{n+1}}) = 10(y_n + 2s_{n+1}),$$

Assim, podemos associar ao algoritmo acima descrito a aplicação raiz quadrada \mathcal{H} (definição 31), que é um sistema dinâmico definido em

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0\},$$

e tal que dado (x_0, y_0) a órbita $(x_n, y_n) = \mathcal{H}^n(x_0, y_0)$ satisfaz:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 100 \left(x_n - \text{int}^2 \left(\frac{-y_n + \sqrt{y_n^2 + 4x_n}}{2} \right) - y_n \text{int} \left(\frac{-y_n + \sqrt{y_n^2 + 4x_n}}{2} \right) \right) \\ y_{n+1} = 10 \left(y_n + 2 \text{int} \left(\frac{-y_n + \sqrt{y_n^2 + 4x_n}}{2} \right) \right) \end{cases}$$

Dada a condição inicial $(x_0, 0)$, o sistema acima equivale a resolver as inequações do algoritmo da raiz quadrada e encontrar a expansão decimal de $\sqrt{x_0}$, obtida através de $s_{n+1} = \text{int} \left(\frac{-y_n + \sqrt{y_n^2 + 4x_n}}{2} \right)$. Mais adiante, na proposição 13, enunciaremos um resultado mais geral dessa afirmação para uma família de equações quadráticas.

3. DEFINIÇÕES E RESULTADOS GERAIS

Referimos o leitor à [4] para referências gerais e demonstrações de resultados que mencionaremos a seguir envolvendo Espaços Métricos.

Definição 1. Seja V um conjunto. Uma relação, \sim , é chamada *relação de equivalência* em V se satisfaz para todo $x, y, z \in V$

- $x \sim x$;
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;
- $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Definição 2. Sejam V um conjunto, $x \in V$ e \sim uma relação de equivalência em V . O conjunto $[x] = \{y \in V | y \sim x\}$ é chamado *classe de equivalência* de x . O conjunto $V/\sim = \{[x] | x \in V\}$ é chamado *espaço quociente de V por \sim* .

Definição 3. Um *espaço métrico* é um conjunto V munido de uma aplicação $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in V$ um número real positivo, chamado *distância entre x e y* , e tal que, para todo $x, y, z \in V$, satisfaz

- $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ (comutativo);
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

Usamos a notação (V, d) para nos referirmos a um conjunto V munido de uma métrica d .

Observação 1. Se retirarmos a condição de que $d(x, y) = 0$ implica em $x = y$, a aplicação d é chamada *pseudo métrica* em V .

Observação 2. Se $V = \mathbb{R}$, consideraremos a métrica $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$.

Definição 4. Seja (V, d) um espaço métrico. Uma *bola aberta* de raio $\epsilon > 0$ e centro em $x \in V$ é o conjunto $B_{(x, \epsilon)} = \{y \in V \mid d(x, y) < \epsilon\}$.

Definição 5. Seja (V, d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subseteq V$ é *aberto* em V se, e somente se, para todo $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{(x, \epsilon)} \subseteq A$.

Definição 6. Sejam (V_1, d_1) e (V_2, d_2) espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $f : V_1 \rightarrow V_2$ é *contínua* se, e somente se, para todo $x \in V_1$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(B_{(x, \delta)}) \subseteq B_{(f(x), \epsilon)}$.

Definição 7. Dizemos que uma aplicação $f : V_1 \rightarrow V_2$, contínua, bijetora, com inversa contínua, é um *homeomorfismo*.

Observação 3. Se $f : V_1 \rightarrow V_2$, aplicação entre espaços métricos, é bijetiva e é uma isometria, isto é, para todo $x, y \in V_1$, $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$, então f é um homeomorfismo.

Referimos o leitor à [1] e [6] para referências gerais e demonstrações de resultados que mencionaremos a seguir envolvendo Sistemas Dinâmicos.

Definição 8. Seja a aplicação $T : V \rightarrow V$. Denotamos a n -ésima iterada de T sobre o ponto $x \in V$ por $T^n(x)$. De forma análoga, sendo $T^{-1}(x)$ a pré-imagem de x por T , notamos $T^{-n}(x) = \{y \in V | T^n(y) = x\}$.

Definição 9. Dizemos que $x \in V$ é *ponto fixo* de uma aplicação $T : V \rightarrow V$ se, e somente se, $T(x) = x$. Dizemos que $x \in V$ é *ponto periódico* de T se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $T^n(x) = x$. Neste caso dizemos que x tem *período* n . Se n é o menor número natural para o qual se verifica a igualdade dizemos que x tem *período primo* n .

Definição 10. Sejam $T : V \rightarrow V$ e $A \subseteq V$. Dizemos que A é invariante por T se, e somente se, $T^{-1}(A) = A$.

Definição 11. Sejam (V, d) um espaço métrico e uma aplicação $T : V \rightarrow V$. Dizemos que T tem *dependência sensível às condições iniciais* se, e somente se, existe $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in V$ e uma vizinhança U de x , existe $y \in U$ e $n > 0$ tais que, $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$.

Definição 12. Seja a aplicação $T : V \rightarrow V$. Dizemos que T é *topologicamente transitiva* se, e somente se, para todos $A, B \subset V$ abertos não vazios, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Definição 13. Dizemos que $U \subset V$ é denso em V se, e somente se, qualquer ponto de V pode ser aproximado por ponto de U .

Definição 14. Dizemos que uma aplicação $T : V \rightarrow V$ é *caótica* sobre V se, e somente se,

- (1) T tem dependência sensível às condições iniciais;
- (2) T é topologicamente transitiva;
- (3) o conjunto dos pontos periódicos de T é denso em V .

Definição 15. Sejam $F : A \rightarrow A$ e $G : B \rightarrow B$ duas aplicações. Dizemos que F e G são *conjugadas* se existe uma bijeção $h : A \rightarrow B$, tal que, $h \circ F = G \circ h$. Se, além disso, h for um homeomorfismo, dizemos que F e G são *topologicamente conjugadas*. Respectivamente h é dita uma *conjugação* ou uma *conjugação topológica* de F e G .

Se h não é bijeção e $h \circ F = G \circ h$, dizemos que F e G são *semi conjugadas*. Se h não é bijeção, mas h é contínua, então F e G são *topologicamente semi-conjugadas*.

Observação 4. A conjugação estabelece uma relação de equivalência no espaço das funções. Com isto, podemos entender a dinâmica de um sistema através de outro sistema que seja conjugado a ele. Assim, se $F : A \rightarrow A$ e $G : B \rightarrow B$ são conjugadas por h , então

- se $X \subseteq A$ é conjunto invariante por F , então $h(X) = Y \subseteq B$ é conjunto invariante por G ;
- se $x \in A$ é um ponto periódico de F com período n , então $y = h(x)$ é ponto periódico de G com período n ;
- se h é conjugação topológica e o conjunto das órbitas periódicas de F é denso em A , então o conjunto das órbitas periódicas de G é denso em B ;
- se h é conjugação topológica e F é topologicamente transitiva, então G também é topologicamente transitiva.

Referimos o leitor à [2] e [6] para referências gerais e demonstrações de resultados que apresentaremos a seguir envolvendo Teoria da Medida

Observação 5. Seja $\{A_i | i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ uma família enumerável de conjuntos, notaremos a união da família por $\bigcup_{i \in I} A_i$. Se a família for disjunta, isto é, para todo $i, j \in I, i \neq j$, tivermos $A_i \cap A_j = \emptyset$, usaremos a notação $\sum_{i \in I} A_i$, no lugar de $\bigcup_{i \in I} A_i$, para indicar a união da família.

Definição 16. Dado um conjunto V , chamamos $\mathcal{P}(V) = \{A | A \subseteq V\}$ de conjunto das *partes* de V . Uma coleção $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{P}(V)$ é dita uma *semi-álgebra* se

- $V \in \mathcal{A}^*$;
- $A, B \in \mathcal{A}^* \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}^*$;
- $\forall A \in \mathcal{A}^* \Rightarrow A^c = V - A = \sum_{i=1}^n C_i$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e alguns $C_i \in \mathcal{A}^*$.

Definição 17. Uma coleção $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{P}(V)$ é dita uma *álgebra* se, e somente se, $\bar{\mathcal{A}}$ é fechada em relação a uniões finitas e complementação.

Definição 18. Uma coleção $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(V)$ é dita uma *sigma-álgebra* se, e somente se, \mathcal{A} é fechada em relação a uniões enumeráveis e complementação.

Observação 6. Decorre das definições acima, que \emptyset e V estão em \mathcal{A}^* , $\bar{\mathcal{A}}$ e \mathcal{A} .

Definição 19. Sejam V um conjunto e $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(V)$ uma classe não vazia. A semi-álgebra (respectivamente álgebra e sigma-álgebra) gerada por \mathcal{W} é a menor semi-álgebra (respectivamente álgebra e sigma-álgebra) que contém \mathcal{W} e é denotada por $\mathcal{A}^*_{\mathcal{W}}$ (respectivamente $\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{W}}$ e $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$).

Definição 20. Seja $V = \mathbb{R}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(V)$, tal que $\mathcal{B} = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R}, a < b\}$. A sigma-álgebra $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ é chamada sigma-álgebra de Borel.

Podemos definir, da mesma forma, a sigma-álgebra de Borel em um intervalo real $V = [c, d]$.

Observação 7. A sigma-álgebra de Borel também pode ser gerada por intervalos dos tipos $[a, b]$, $[a, b)$ ou $(a, b]$.

Proposição 1. *Seja $V = \mathbb{R}^+$ e $\mathcal{B}' = \{[a, b) \subseteq \mathbb{R}^+\}$, onde $a < b$ e $a = \frac{p}{10^m}$ e $b = \frac{q}{10^n}$, $p, q, m, n \in \mathbb{N}$. Então a sigma-álgebra $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$ coincide com a sigma-álgebra de Borel.*

Prova:

Seja $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ a sigma-álgebra de Borel e vejamos que $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \supseteq \mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$.

Dado $[a, b) \in \mathcal{B}'$, pela observação 7, concluímos que $[a, b)$ pertence a $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ e, portanto, $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \supset \mathcal{B}'$. Como $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$ é a menor sigma-álgebra que contém \mathcal{B}' , temos que $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \supseteq \mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$.

Vejamos agora que $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$.

Seja (c, d) um intervalo real, com $c, d \in \mathbb{R}$. Podemos construir uma seqüência (a_i) e uma seqüência (b_i) ,

$$a_i = \frac{\text{int}(c \cdot 10^i) + 2}{10^i}$$

e

$$b_i = \frac{\text{int}(d \cdot 10^i) - 2}{10^i}$$

Dessa forma para todo i , temos que $a_i > c$ e $b_i < d$. Como $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = c$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = d$, podemos verificar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $i \geq n_0$, então $[a_i, b_i) \subset (c, d)$. Daí, obtemos

$$\bigcup_{i=n_0}^{\infty} [a_i, b_i) = (c, d),$$

o que nos dá $(c, d) \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$. Como $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ é a menor sigma-álgebra que contém os intervalos (c, d) , temos que $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$.

Com isso, concluímos que $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$.

□

Observação 8. Na proposição 17 mostraremos que \mathcal{B}' é uma semi-álgebra.

Definição 21. Se $f : V \rightarrow V'$ é uma função e \mathcal{W} uma classe de subconjuntos de V , então $f(\mathcal{W}) = \{f(A) | A \in \mathcal{W}\}$. Definimos $f^{-1}(\mathcal{W}')$ de forma análoga, se \mathcal{W}' é uma classe de subconjuntos de V' . Dizemos que $f : (V, \mathcal{W}) \rightarrow (V', \mathcal{W}')$ é mensurável se $f^{-1}(\mathcal{W}') \subset \mathcal{W}$.

Proposição 2. Se $f : V \rightarrow V'$ é uma função e $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(V')$ é uma sigma-álgebra, então $f^{-1}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{P}(V)$ é uma sigma-álgebra.

Proposição 3. Seja $f : V \rightarrow V'$ uma função e $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{P}(V')$ uma classe qualquer. Então $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{W}'}) = \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{W}')}.$

Definição 22. Sejam V conjunto e $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(V)$ uma classe tal que $\emptyset \in \mathcal{W}$. Uma função $\mu : \mathcal{W} \rightarrow [0, +\infty]$ é dita uma *medida* se

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- para todo $A \in \mathcal{W}$, tal que $A = \sum_{i \in I} A_i$, $A_i \in \mathcal{W}$, vale

$$\mu \left(\sum_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Definição 23. Dizemos que uma medida $\mu : \mathcal{W} \rightarrow [0, +\infty]$, onde $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(V)$, é uma *medida finita* se, e somente se, para todo $A \in \mathcal{W}$ vale que $\mu(A) < \infty$. Em particular, se $\mu(V) = 1$, dizemos que μ é uma *probabilidade*.

Observação 9. Estaremos interessados especialmente em medidas definidas sobre semi-álgebras, álgebras e sigma-álgebras.

Teorema 1. *(da extensão) Dada uma medida finita μ^* sobre uma semi-álgebra \mathcal{A}^* , existe uma sigma-álgebra $\Lambda \supseteq \mathcal{A}^*$ (e portanto $\Lambda \supseteq \mathcal{A}_{\mathcal{A}^*}$) e uma medida μ sobre Λ que é uma extensão de μ^* , isto é, para todo $A \in \mathcal{A}^*$, $\mu(A) = \mu^*(A)$. Além disso esta extensão é única.*

Proposição 4. *Seja $V \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto e \mathcal{A} uma sigma-álgebra em V . Seja $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa, Riemann integrável. Então, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\mu(A) = \int_A \varphi(x)dx$ é uma medida. Tal medida é chamada medida de Lebesgue-Stieltjes.*

As demonstrações da observação 7, das proposições 2, 3, 4 e do teorema 1 são dadas em [2].

Definição 24. Uma terna (V, \mathcal{A}, μ) , onde V é um conjunto, \mathcal{A} é uma sigma-álgebra contida nas partes de V e μ é uma medida sobre \mathcal{A} , é chamada um *espaço de medidas*. Se μ for uma probabilidade, dizemos que é um *espaço de probabilidades*.

Definição 25. Sejam $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(V)$ e uma aplicação $f : (V, \mathcal{W}) \rightarrow (V, \mathcal{W})$ mensurável. Dizemos uma medida $\mu : \mathcal{W} \rightarrow [0, +\infty]$ é invariante por f se, e somente se, para todo $A \in \mathcal{W}$ temos que $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Proposição 5. *Sejam a aplicação $f : V \rightarrow V$ e uma medida μ^* , finita, invariante por f , definida sobre uma semi-álgebra $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{P}(V)$. Então sua extensão μ sobre a sigma-álgebra $\Lambda \supseteq \mathcal{A}_{\mathcal{A}^*}$ também é invariante por f .*

Prova:

Seja μ^* uma medida sobre a semi-álgebra $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{P}(V)$, invariante por f , isto é, para todo $A \in \mathcal{A}^*$, $\mu^*(f^{-1}(A)) = \mu^*(A)$. Consideramos o espaço de medidas (V, Λ, μ) , onde μ é a extensão de μ^* . Definimos agora a medida $\zeta : \Lambda \rightarrow [0, +\infty]$ por $\zeta(A) = \mu(f^{-1}(A))$.

Para todo $B \in \mathcal{A}^*$, temos $\zeta(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu^*(f^{-1}(B)) = \mu^*(B)$. Daí, pela unicidade estabelecida pelo teorema 1, temos que para todo $A \in \Lambda$, $\mu(A) = \zeta(A) = \mu(f^{-1}(A))$.

□

Definição 26. Sejam um espaço de probabilidade (V, \mathcal{A}, μ) e uma aplicação $f : V \rightarrow V$. Dizemos que μ é medida *ergódica* para f se, e somente se, μ é

invariante por f e para todo $A \in \mathcal{A}$ invariante por f temos $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Teorema 2. (de Birkhoff) *Sejam $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, μ probabilidade ergódica para $T : V \rightarrow V$ e suponha que $\int \varphi(y)d\mu(y) < \infty$, então, existem $c \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq V$ com $\mu(A) = 1$, tais que para todo $x \in A$ vale*

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(T^{i-1}(x)) = \int \varphi(y)d\mu(y)$$

A demonstração deste teorema é apresentada em [6].

Proposição 6. *Sejam $(\Omega_1, \mathcal{A}, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{B}, \mu_2)$, espaços de probabilidades, onde \mathcal{B} é gerada pela semi-álgebra \mathcal{B}^* . Supomos que exista uma aplicação $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, tal que para todo $B^* \in \mathcal{B}^*$, $h^{-1}(B^*) \in \mathcal{A}$ e $\mu_2(B^*) = \mu_1(h^{-1}(B^*))$. Então,*

- (1) h é mensurável;
- (2) para todo $B \in \mathcal{B}$, $\mu_2(B) = \mu_1(h^{-1}(B))$;
- (3) se h conjuga as aplicações mensuráveis $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$ e $G : \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ e μ_1 é ergódica para F , então μ_2 é ergódica para G .

Prova:

- (1) Queremos mostrar que h é mensurável, ou seja, para todo $B \in \mathcal{B}$, $h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Por hipótese temos que para todo $B \in \mathcal{B}^*$, $h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, então $h^{-1}(\mathcal{B}^*) \subseteq \mathcal{A}$. Seja \mathcal{A}' a sigma-álgebra gerada por $h^{-1}(\mathcal{B}^*)$, então $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ e, pela proposição 3, $\mathcal{A}' = h^{-1}(\mathcal{B})$ isto é, para todo $B \in \mathcal{B}$, $h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

(2) Dado $B^* \in \mathcal{B}^*$, por hipótese temos que $\mu_2(B^*) = \mu_1(h^{-1}(B^*))$. Definimos a medida ζ , em \mathcal{B} , dada por $\zeta(B) = \mu_1(h^{-1}(B))$. Temos, para todo $B^* \in \mathcal{B}^*$ que

$$\mu_2(B^*) = \mu_1(h^{-1}(B^*)) = \zeta(B^*).$$

Logo, pelo teorema 1, temos que para todo $B \in \mathcal{B}$ vale

$$\mu_2(B) = \zeta(B) = \mu_1(h^{-1}(B)).$$

(3) Sejam h uma bijeção e $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$, $G : \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$, tais que $h \circ F = G \circ h$.

Definimos $f := h^{-1}$ e temos $F \circ f = f \circ G$.

Supomos μ_1 ergódica para F . Queremos mostrar que μ_2 é ergódica para G .

Vejamos primeiramente que μ_2 é invariante por G , isto é, $\mu_2(B) = \mu_2(G^{-1}(B))$. De fato, como μ_1 é invariante por F , dado $B \in \mathcal{B}$ temos que

$$\begin{aligned} \mu_2(B) &= \mu_1(h^{-1}(B)) = \mu_1(f(B)) = \mu_1(F^{-1}(f(B))) \\ &= \mu_1(f(G^{-1}(B))) = \mu_1(h^{-1}(G^{-1}(B))) = \mu_2(G^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Provaremos agora que se $B \in \mathcal{B}$ é tal que $G^{-1}(B) = B$, então $\mu_2(B) = 0$ ou $\mu_2(B) = 1$. Para isso, tomamos $A = f(B)$ e, pela conjugação, temos que $F^{-1}(A) = A$. Como μ_1 é ergódica para F , temos que $\mu_1(A) = 0$ ou $\mu_1(A) = 1$. Daí pelo ítem (2) temos

$$\mu_2(B) = \mu_1(h^{-1}(B)) = \mu_1(f(B)) = \mu_1(A),$$

logo $\mu_2(B) = 0$ ou $\mu_2(B) = 1$.

□

4. DINÂMICA SIMBÓLICA

Definição 27. Seja $X = \{n \in \mathbb{N} | 0 \leq n \leq 9\}$. Chamamos de *espaço de Bernoulli* das seqüências sobre dez símbolos o conjunto

$$X^{\mathbb{N}} = \{\mathcal{S} = (s_1 s_2 s_3 \dots) | s_i \in X\}$$

Proposição 7. *Sejam $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in X^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{S} = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ e $\mathcal{T} = (t_1 t_2 t_3 \dots)$. Então temos uma pseudo métrica, $d_{X^{\mathbb{N}}} : X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} \right|$$

Prova:

Dados \mathcal{S} e \mathcal{T} , temos

$$d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{10^{i-1}} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^{i-1}} \right| = 10,$$

logo a série converge absolutamente e pela unicidade do limite temos que a função está bem definida.

(1) $d_{X^{\mathbb{N}}}$ é não negativo e $\mathcal{S} = \mathcal{T} \Rightarrow d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = 0$.

Decorre naturalmente que $d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} \right| \geq 0$, para todo $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in X^{\mathbb{N}}$.

Supomos $\mathcal{S} = (s_1 s_2 \dots)$ e $\mathcal{T} = (t_1 t_2 \dots)$, $\mathcal{S} = \mathcal{T}$, ou seja, para todo $i \in \mathbb{N}$, $s_i = t_i$. Daí temos

$$d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0}{10^{i-1}} \right| = 0.$$

Vamos a seguir caracterizar quando \mathcal{S} e \mathcal{T} são tais que $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$ e $d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = 0$. Supomos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} = 0$$

Sejam $Z, P, N \subset \mathbb{N}$, tais que $\forall i \in Z, s_i - t_i = 0$, $\forall i \in P, s_i - t_i > 0$ e $\forall i \in N, t_i - s_i > 0$. Podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} = \sum_{i \in Z} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} + \sum_{i \in P} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} - \sum_{i \in N} \frac{t_i - s_i}{10^{i-1}}$$

Como $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$, temos que $Z \neq \mathbb{N}$ e $P, N \neq \emptyset$. Sejam $p = \min P$ e $n = \min N$. Sem perda de generalidade podemos supor $p < n$.

Daí temos

$$\sum_{i \in N} \frac{t_i - s_i}{10^{i-1}} \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{9}{10^{i-1}} = \frac{9}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{n-2}}$$

Por outro lado temos $p \leq j$, o que nos dá

$$\sum_{i \in P} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} - \sum_{i \in N} \frac{t_i - s_i}{10^{i-1}} \geq \sum_{i \in P} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} - \frac{1}{10^{n-2}} \geq$$

$$\sum_{i \in P} \frac{1}{10^{i-1}} - \frac{1}{10^{n-2}} \geq \frac{1}{10^{p-1}} - \frac{1}{10^{n-2}} \geq 0$$

A igualdade acima só se verificará se

$$\sum_{i \in P} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} = \sum_{i \in N} \frac{t_i - s_i}{10^{i-1}} = \frac{1}{10^{j-1}},$$

o que implica $P = \{j\}$, $N = \{i \in \mathbb{N} | i > j\}$, $Z = \{i \in \mathbb{N} | i < j\}$ e que $s_j - t_j = 1$ e $\forall i \in N, t_i - s_i = 9$. Refazendo a prova supondo $n < p$, chegamos a um resultado análogo.

Com isto, concluímos que dados $\mathcal{S} = (s_1 s_2 \dots)$ e $\mathcal{T} = (t_1 t_2 \dots)$, $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$, temos $d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = 0$ se, e somente se, existe $j \in \mathbb{N}$, tal que

- $s_i = t_i$, se $i < j$;
- $s_j - t_j = 1$;
- $s_i - t_i = -9$, se $i > j$.

(2) $d_{X^{\mathbb{N}}}$ é comutativo.

De fato,

$$\begin{aligned} d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} -\frac{t_i - s_i}{10^{i-1}} \right| \\ &= \left| -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i - s_i}{10^{i-1}} \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i - s_i}{10^{i-1}} \right| = d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{T}, \mathcal{S}). \end{aligned}$$

(3) Desigualdade triangular.

Dados $\mathcal{S} = (s_1 s_2 \dots)$, $\mathcal{T} = (t_1 t_2 \dots)$, $\mathcal{Z} = (z_1 z_2 \dots)$, temos que

$$\begin{aligned} d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{Z}) &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - z_i}{10^{i-1}} \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i + t_i - z_i}{10^{i-1}} \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} \right| + \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i - z_i}{10^{i-1}} \right| = d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) + d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{T}, \mathcal{Z}). \end{aligned}$$

Portanto mostramos que $d_{X^{\mathbb{N}}}$ é uma pseudo métrica.

□

Definição 28. Seja $\Sigma_{10} = \{(s_1 s_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists j > n, s_j \neq 9\}$.

Definimos em Σ_{10} a métrica

$$d_{\Sigma_{10}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = d_{X^{\mathbb{N}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$$

Proposição 8. Se $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \Sigma_{10}$, $\mathcal{S} = (s_1 s_2 \dots)$ e $\mathcal{T} = (t_1 t_2 \dots)$, são tais que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $s_i = t_i$ para todo $i \leq n$, então $d_{\Sigma_{10}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \leq \frac{1}{10^{n-1}}$.

Prova:

Supomos que \mathcal{S} e \mathcal{T} atendem as condições da proposição, então

$$d_{\Sigma_{10}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} \right| =$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} \right| =$$

$$\left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} \right| \leq \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^{i-1}} \right| = \frac{1}{10^{n-1}}$$

□

Proposição 9. *Seja $S \in [0, 10)$, $S = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots}$. A aplicação $k : [0, 10) \rightarrow \Sigma_{10}$, definida por $k(S) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ é um homeomorfismo de $([0, 10), d_{\mathbb{R}})$ em $(\Sigma_{10}, d_{\Sigma_{10}})$.*

Prova:

É fácil ver que k está bem definida.

Para verificar que k é sobrejetiva, basta observar que dado $\mathcal{S} \in \Sigma_{10}$, $\mathcal{S} = (s_1 s_2 s_3 \dots)$, podemos tomar $S \in [0, 10)$, $S = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots}$ e temos $k(S) = \mathcal{S}$.

Vejamos que k é injetiva. De fato, $\mathcal{S} \in \Sigma_{10}$ é escrito de forma única, $\mathcal{S} = (s_1 s_2 s_3 \dots)$. Daí, se $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \Sigma_{10}$, $\mathcal{S} = (s_1 s_2 \dots)$ e $\mathcal{T} = (t_1 t_2 \dots)$, são tais que $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$, então existe j tal que $s_j \neq t_j$. Sejam $S = \overline{s_1, s_2 \dots}$ e $T = \overline{t_1, t_2 \dots}$. Como os elementos de $[0, 10)$ também são escritos de forma única e existe j tal que $s_j \neq t_j$, concluímos que $S \neq T$. Logo a aplicação é injetiva.

Queremos mostrar que k é um homeomorfismo. Para isso, vejamos que k é uma isometria, isto é, para todo $S, T \in [0, 10)$, vale

$$d_{\mathbb{R}}(S, T) = d_{\Sigma_{10}}(k(S), k(T)).$$

Sejam $S = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots}$, $T = \overline{t_1, t_2 t_3 \dots}$, $\mathcal{S} = k(S) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ e $\mathcal{T} = k(T) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$. Podemos escrever

$$S = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{10^{i-1}}$$

e

$$T = \overline{t_1, t_2 t_3 \dots} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{10^{i-1}}.$$

Com isso, vemos que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(S, T) &= |S - T| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{10^{i-1}} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{10^{i-1}} \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{10^{i-1}} \right| = d_{\Sigma_{10}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = d_{\Sigma_{10}}(k(S), k(T)). \end{aligned}$$

Como k é uma isometria bijetiva, concluímos que é um homeomorfismo (observação 3).

□

Definição 29. Seja a aplicação $\sigma : \Sigma_{10} \rightarrow \Sigma_{10}$ dada por $\sigma((s_1 s_2 s_3 \dots)) = (s_2 s_3 s_4 \dots)$, denominada *shift map*.

Afirmamos que o shift map com a métrica $d_{\Sigma_{10}}$ é uma aplicação contínua a menos de um número finito de pontos. Mais adiante, na proposição 15, veremos que $\sigma = \kappa \circ \mathbb{H} \circ \kappa^{-1}$, onde κ é um homeomorfismo e facilmente verifica-se que \mathbb{H} é contínua a menos de um número finito de pontos.

Proposição 10. *A aplicação σ é caótica sobre Σ_{10} .*

Prova:

(1) Dependência sensível às condições iniciais.

Mostraremos que $\delta = 4$ atende à definição de dependência sensível às condições iniciais, ou seja, para todo $\mathcal{S} \in \Sigma_{10}$ e uma vizinhança U de \mathcal{S} , existe $\mathcal{T} \in U$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $d_{\Sigma_{10}}(\sigma^n(\mathcal{S}), \sigma^n(\mathcal{T})) \geq 4$.

Dados $\mathcal{S} \in \Sigma_{10}$, $\mathcal{S} = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ e U uma vizinhança de \mathcal{S} , podemos tomar $j \in \mathbb{N}$, tal que $B_{(\mathcal{S}, 1/10^j)} \subseteq U$. De fato, se tomarmos $\mathcal{T} = (t_1 t_2 \dots)$, onde $t_i = s_i$ para todo $i \leq j + 2$ e $|s_{j+3} - t_{j+3}| = 5$, então

$$d_{\Sigma_{10}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \leq \frac{1}{10^{j+1}} < \frac{1}{10^j},$$

ou seja, $\mathcal{T} \in B_{(\mathcal{S}, 1/10^j)}$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $s_{j+3} - t_{j+3} = 5$ e tomando $n = j + 2$ temos que

$$d_{\Sigma_{10}}(\sigma^n(\mathcal{S}), \sigma^n(\mathcal{T})) = d_{\Sigma_{10}}((s_{j+3}s_{j+4}\dots), (t_{j+3}t_{j+4}\dots)) =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_{i+j+2} - t_{i+j+2}}{10^{i-1}} \right| \geq$$

$$\left| (s_{j+3} - t_{j+3}) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{-9}{10^{i-1}} \right| = |5 - 1| = 4$$

(2) Transitividade topológica.

Sejam $A, B \subseteq \Sigma_{10}$, abertos não vazios. Dados $\mathcal{S} \in A$ e $\mathcal{T} \in B$, existem $k, l \in \mathbb{N}$, tais que, $B_{(\mathcal{S}, 1/10^k)} \subseteq A$ e $B_{(\mathcal{T}, 1/10^l)} \subseteq B$. Se $m = \max\{k, l\}$ e $\mathcal{Z} = (z_1 z_2 z_3 \dots)$ é tal que $z_i = s_i$ e $z_{i+m+2} = t_i$ para todo $i \leq m + 2$, então

$$d_{\Sigma_{10}}(\mathcal{S}, \mathcal{Z}) \leq \frac{1}{10^{m+1}} < \frac{1}{10^m} \leq \frac{1}{10^k},$$

logo $\mathcal{Z} \in A$. Seja $n = m + 2$, então

$$d_{\Sigma_{10}}(\mathcal{T}, \sigma^n(\mathcal{Z})) = d_{\Sigma_{10}}((t_1 t_2 \dots), (z_{m+3} z_{m+4} \dots)) \leq$$

$$\frac{1}{10^{m+1}} < \frac{1}{10^m} \leq \frac{1}{10^l},$$

logo $\sigma^n(\mathcal{Z}) \in B$ e, portanto, $\sigma^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

(3) Os pontos periódicos de σ são densos em Σ_{10} .

Queremos verificar que Σ_{10} é o fecho do conjunto dos pontos periódicos de σ . Para isso, vejamos que para todo $\mathcal{S} = (s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_{10}$, existe uma sucessão $(\mathcal{T}_n) \in \Sigma_{10}$ de pontos periódicos, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n = \mathcal{S}$$

Definimos $\mathcal{T}_n = (s_1 s_2 \dots s_n 0 s_1 s_2 \dots s_n 0 \dots)$, ou seja, a repetição das n primeiras entradas da seqüência \mathcal{S} seguidas de um 0 (para evitar $\mathcal{T}_n = (999 \dots)$ para algum n). Dado $\epsilon > 0$ tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{10^{n_0-1}} \leq \epsilon$ e temos que para todo $n \geq n_0$

$$d_{\Sigma_{10}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}_n) \leq \frac{1}{10^{n-1}} \leq \frac{1}{10^{n_0-1}} \leq \epsilon,$$

de onde concluímos que (\mathcal{T}_n) converge para \mathcal{S} .

□

Definição 30. Seja $[s_1 s_2 \dots s_n]$ o conjunto das seqüências $(t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_{10}$, tais que $t_i = s_i$, se $i \leq n$. Tal conjunto é dito um *cilindro* de Σ_{10} .

Proposição 11. *Seja $\mathcal{C} := \tilde{\mathcal{C}} \cup \{\emptyset, \Sigma_{10}\}$, onde $\tilde{\mathcal{C}}$ é a classe dos cilindros de Σ_{10} . Então \mathcal{C} é semi-álgebra.*

Prova:

Por definição temos que $\emptyset, \Sigma_{10} \in \mathcal{C}$. Para verificarmos que \mathcal{C} é fechado por intersecção, consideramos $A, B \in \mathcal{C}$. Se $A \cap B = \emptyset$, então está provado. Caso contrário, podemos supor que $A = [a_1 \dots a_m]$ e $B = [b_1 \dots b_n]$ e sem perda de generalidade que $n \geq m$. Daí, para todo $(t_1 t_2 \dots) \in A \cap B$ temos $t_i = a_i$ se $i \leq m$ e $t_i = b_i$ se $i \leq n$, logo $a_i = b_i$ se $i \leq m$, o que nos dá que $B \subseteq A$ e $A \cap B = B$.

Quanto a complementação, podemos observar que existem 10^n cilindros $A_i = [a_1^i a_2^i \dots a_n^i]$ diferentes e que $\sum_{i=1}^{10^n} A_i = \Sigma_{10}$. Assim, o complementar de \emptyset está em \mathcal{C} e dado $A_1 = [a_1^1 \dots a_n^1]$, temos $A_1^c = (\Sigma_{10} - A_1) = \sum_{i=2}^{10^n} A_i$, uma soma finita de elementos de \mathcal{C} .

□

Proposição 12. Para todo $i \in \mathbb{N}$, $i \leq 9$, sejam fixados $p_i \in \mathbb{R}$, $p_i > 0$, tais que $\sum_{i=0}^9 p_i = 1$. Dado $C \in \mathcal{C}$, $C = [s_1 \dots s_m]$, definimos $\#i = \sum_{j=1}^m I_i(s_j)$, onde I_i é a função

indicadora de i , isto é, $I_i(s_j) = \begin{cases} 0, & \text{se } s_j \neq i \\ 1, & \text{se } s_j = i \end{cases}$. Então, $\nu^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\nu^*(C) = \begin{cases} 0, & \text{se } C = \emptyset \\ p_0^{\#0} \cdot p_1^{\#1} \cdot p_2^{\#2} \cdot p_3^{\#3} \cdot p_4^{\#4} \cdot p_5^{\#5} \cdot p_6^{\#6} \cdot p_7^{\#7} \cdot p_8^{\#8} \cdot p_9^{\#9}, & \text{se } C \neq \emptyset, \end{cases}$$

é uma probabilidade e sua extensão ν sobre \mathcal{A}_C , sigma-álgebra gerada por \mathcal{C} , é invariante por σ .

Observação 10. Dado $C \in \mathcal{C}$, $C = [s_1 \dots s_m]$, $\#i$ indica a quantidade de entradas s_j que definem o cilindro C , tais que $s_j = i$.

Prova:

A prova de que ν^* é medida (e conseqüentemente que ν é medida) é apresentada em [6].

Vejam os que ν é probabilidade. Para isso basta observar que podemos escrever $\Sigma_{10} = \sum_{i=0}^9 [i]$ e que $\nu([i]) = p_i$, e teremos

$$\nu(\Sigma_{10}) = \nu\left(\sum_{i=0}^9 [i]\right) = \sum_{i=0}^9 \nu([i]) = \sum_{i=0}^9 p_i = 1$$

Para verificar que $\nu : \mathcal{A}_C \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante por σ , provaremos que para os geradores de \mathcal{A}_C e usaremos a proposição 5.

Seja $C \in \mathcal{C}$, $C = [s_1 s_2 \dots s_m]$. Então $\sigma^{-1}(C) = \{\mathcal{T} \in \Sigma_{10} | \sigma(\mathcal{T}) \in C\} = \sum_{k=0}^9 C_k$, onde $C_k = [k s_1 s_2 \dots s_m]$. Notamos $\nu(C) = (p_0^{\#0_C} \dots p_9^{\#9_C})$ e $\nu(C_k) = (p_0^{\#0_{C_k}} \dots p_9^{\#9_{C_k}})$, onde podemos observar que $\#i_{C_k} = \#i_C$ se $i \neq k$, e $\#k_{C_k} = \#k_C + 1$.

Daí

$$\nu(\sigma^{-1}(C)) = \nu\left(\sum_{k=0}^9 C_k\right) = \sum_{k=0}^9 \nu(C_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(p_0^{\#0_C+1} \cdot p_1^{\#1_C} \cdot \dots \cdot p_9^{\#9_C} \right) + \dots + \left(p_0^{\#0_C} \cdot p_1^{\#1_C} \cdot \dots \cdot p_9^{\#9_C+1} \right) \\
&= \left(p_0^{\#0_C} \cdot p_1^{\#1_C} \cdot \dots \cdot p_9^{\#9_C} \right) (p_0 + p_1 \dots + p_9).
\end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^9 p_i = 1$, então

$$\left(p_0^{\#0_C} \cdot p_1^{\#1_C} \cdot \dots \cdot p_9^{\#9_C} \right) \sum_{i=1}^9 p_i = \left(p_0^{\#0_C} \cdot p_1^{\#1_C} \cdot \dots \cdot p_9^{\#9_C} \right) = \nu(C)$$

Como ν é probabilidade (medida finita), podemos usar a proposição 5 de onde concluimos que ν é invariante sobre uma sigma-álgebra Λ a qual contém a sigma-álgebra \mathcal{A}_C .

□

Observação 11. Consideraremos a partir de agora a medida ν acima, definida com $p_i = \frac{1}{10}$, para todo i . Assim, dado um cilindro $C = [s_1 s_2 \dots s_n]$, teremos $\nu(C) = \frac{1}{10^n}$.

Teorema 3. *A medida ν é ergódica para a aplicação σ .*

A demonstração deste teorema requer a utilização do *teorema da aproximação* e é apresentada também em [6].

5. A APLICAÇÃO RAIZ QUADRADA

Definição 31. Chamamos de *aplicação raiz quadrada* a aplicação $\mathcal{H} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, dada por

$$\mathcal{H}(x, y) = (100(x - \text{int}^2(\Delta) - y \text{int}(\Delta)), 10(y + 2\text{int}(\Delta))),$$

onde $\Delta = \frac{-y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2}$.

Observação 12. Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ condição inicial, lembre que por notação $(x_n, y_n) = \mathcal{H}^n(x_0, y_0)$, para $n \geq 0$.

Proposição 13. Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$, sejam a equação de segundo grau $S^2 + y_0 S = x_0$ e \dot{S} a raiz positiva dessa equação. Então $\dot{T} = 10(\dot{S} - \text{int}(\dot{S}))$ é a raiz positiva da equação de segundo grau $T^2 + y_1 T = x_1$, onde $(x_1, y_1) = \mathcal{H}(x_0, y_0)$. Sendo assim se $\dot{S} = \overline{s_1, s_2 s_3 s_4 \dots}$, então teremos $\dot{T} = 10(\dot{S} - \text{int}(\dot{S})) = \overline{s_2, s_3 s_4 \dots}$.

Prova:

Observamos que dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$, a equação de segundo grau, $S^2 + y_0 S = x_0$, possui exatamente uma raiz positiva, dada por $\dot{S} = \frac{-y_0 + \sqrt{y_0^2 + 4x_0}}{2}$.

Para demonstrar a proposição basta usar as expressões que determinam x_1, y_1 e \dot{T} e verificar que $\dot{T}^2 + y_1 \dot{T} = x_1$. De fato, temos

$$\begin{cases} x_1 = 100 (x_0 - \text{int}^2 (\Delta) - y_0 \text{int} (\Delta)) \\ y_1 = 10 (y_0 + 2\text{int} (\Delta)) \end{cases},$$

onde $\Delta = \frac{-y_0 + \sqrt{y_0^2 + 4x_0}}{2} = \dot{S}$. Daí

$$\dot{T}^2 + y_1 \dot{T} = 100 \left(\dot{S} - \text{int}(\dot{S}) \right)^2 + 100 \left(y_0 + 2\text{int}(\dot{S}) \right) \cdot \left(\dot{S} - \text{int}(\dot{S}) \right) =$$

$$100 \left(\dot{S}^2 + y_0 \dot{S} - y_0 \text{int}(\dot{S}) - \text{int}^2(\dot{S}) \right),$$

onde

$$\dot{S}^2 = \left(\frac{-y_0 + \sqrt{y_0^2 + 4x_0}}{2} \right)^2 =$$

$$-y_0 \frac{-y_0 + \sqrt{y_0^2 + 4x_0}}{2} + x_0 = -y_0 \dot{S} + x_0.$$

Com isso, segue que

$$100 \left(\dot{S}^2 + y_0 \dot{S} - y_0 \text{int}(\dot{S}) - \text{int}^2(\dot{S}) \right) =$$

$$100 \left(-y_0 \dot{S} + x_0 + y_0 \dot{S} - y_0 \text{int}(\dot{S}) - \text{int}^2(\dot{S}) \right) =$$

$$100 \left(x_0 - \text{int}^2 (\Delta) - y_0 \text{int} (\Delta) \right) = x_1.$$

□

Observação 13. Note que $\dot{S} = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots}$ na proposição acima é um número real não negativo qualquer. No entanto, $\dot{T} = 10 \left(\dot{S} - \text{int}(\dot{S}) \right) = \overline{s_2, s_3 s_4 \dots}$ é um número menor que 10.

Corolário 4. Dada uma equação de segundo grau na forma $S^2 + y_0 S = x_0$, onde $x_0 \geq 0$ e $y_0 \geq 0$, a sua raiz positiva, $\dot{S} = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots}$, é obtida iterando \mathcal{H} na condição inicial (x_0, y_0) . Mais exatamente, $s_{n+1} = \text{int} \left(\frac{-y_n + \sqrt{y_n^2 + 4x_n}}{2} \right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ onde $(x_n, y_n) = \mathcal{H}^n(x_0, y_0)$.

Prova:

Este corolário generaliza o algoritmo da raiz quadrada, apresentando-o como um método numérico de resolver toda uma família de equações quadráticas. Sua demonstração segue diretamente da proposição anterior:

Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$, seja $\dot{S}_0 = \overline{s_1, s_2 s_3 s_4 \dots} = \frac{-y_0 + \sqrt{y_0^2 + 4x_0}}{2}$ a raiz positiva da equação de segundo grau $S^2 + y_0 S = x_0$. Então pela proposição 13, $\dot{S}_1 = \overline{s_2, s_3 s_4 s_5 \dots} = \frac{-y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4x_1}}{2}$ é a raiz positiva da equação $S^2 + y_1 S = x_1$.

Por indução, obtemos $\dot{S}_n = \overline{s_{n+1}, s_{n+2} s_{n+3} \dots} = \frac{-y_n + \sqrt{y_n^2 + 4x_n}}{2}$, para todo n . Logo, $s_{n+1} = \text{int} \left(\dot{S}_n \right) = \text{int} \left(\frac{-y_n + \sqrt{y_n^2 + 4x_n}}{2} \right)$.

□

Observação 14. Dada uma condição inicial (x_0, y_0) , pela observação 13, temos que s_1 assume qualquer valor inteiro positivo, mas para todo $n \geq 1$, s_{n+1} assume somente valores de 0 a 9. Isto significa que toda órbita é rapidamente atraída para um subconjunto de $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}_+^2$, na qual temos $0 \leq s_{n+1} \leq 9$.

Note que,

$$\forall (x, y) \in \mathcal{R}, 0 \leq \text{int} \left(\frac{-y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2} \right) \leq 9$$

\Updownarrow

$$\forall (x, y) \in \mathcal{R}, 0 \leq \frac{-y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2} < 10$$

\Updownarrow

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x - 10y < 100\}$$

Proposição 14. *A aplicação raiz quadrada definida em \mathcal{R} e o shift map são topologicamente semi conjugados, via a aplicação $K : \mathcal{R} \rightarrow \Sigma_{10}$, definida por $K = k \circ S$, onde $S(x, y) = \frac{-y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2}$ e $k : [0, 10) \rightarrow \Sigma_{10}$ leva o número real $\overline{s_1 s_2 s_3 \dots}$ na seqüência $(s_1 s_2 s_3 \dots)$.*

Prova:

Vejamos primeiramente que K é sobrejetiva, mas não é injetiva. Dado $\mathcal{S} \in \Sigma_{10}$, $\mathcal{S} = (s_1 s_2 s_3 \dots)$, tomamos $N \in \mathbb{R}$, $N = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots}$. Queremos encontrar $(x, y) \in \mathcal{R}$, tal que

$$\frac{-y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2} = N$$

Como estamos trabalhando apenas no primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 , concluimos que

$$x - Ny = N^2$$

De fato, $0 \leq N < 10$ e $N^2 < 100$, o que nos dá

$$x - 10y < x - Ny = N^2 < 100,$$

ou seja, os pontos (x, y) do primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 que atendem a equação da reta acima pertencem a \mathcal{R} e têm itinerário \mathcal{S} . De onde concluimos que K é sobrejetiva, mas não é injetiva.

Para verificar que K é contínua, basta ver que é uma composição de funções contínuas.

Para finalizar a demonstração, seja $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$, com $S(x_0, y_0) = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots}$, verificamos que

$$(K \circ \mathcal{H})(x_0, y_0) = K(\mathcal{H}(x_0, y_0)) = k(S(\mathcal{H}(x_0, y_0))) = k(S(x_1, y_1)) =$$

$$k(\overline{s_2, s_3 s_4 \dots}) = (s_2 s_3 s_4 \dots) = \sigma(s_1 s_2 s_3 \dots) =$$

$$\sigma(k(\overline{s_1, s_2 s_3 \dots})) = \sigma(k(S(x_0, y_0))) = (\sigma \circ K)(x_0, y_0).$$

□

Definição 32. Dado $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$, chamamos de itinerário de (x_0, y_0) por \mathcal{H} à seqüência $K(x_0, y_0) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$.

Observação 15. Se (x_0, y_0) e (x'_0, y'_0) são tais que $K(x_0, y_0) = K(x'_0, y'_0) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$, então as equações de segundo grau $S^2 + y_0 S = x_0$ e $S^2 + y'_0 S = x'_0$ têm a mesma raiz positiva $\dot{S} = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots}$.

Observação 16. Podemos definir uma relação \sim_K em \mathcal{R} , dada por

$$(x, y) \sim_K (x', y') \Leftrightarrow K(x, y) = K(x', y'),$$

a qual facilmente podemos ver que é uma relação de equivalência.

Com isso, definimos $[(u, v)] = \{(x, y) \in \mathcal{R} \mid (x, y) \sim (u, v)\}$ e $\mathcal{R}/\sim_K = \{[(u, v)] \mid (u, v) \in \mathcal{R}\}$.

De fato $[(u, v)]$ é uma semi reta em \mathcal{R} , pois dado $(u, v) \in \mathcal{R}$, temos que

$$(x, y) \sim_K (u, v) \Leftrightarrow K(x, y) = K(u, v) = \mathcal{S} = (s_1 s_2 s_3 \dots),$$

e como vimos na demonstração da proposição anterior

$$K(x, y) = \mathcal{S} = (s_1 s_2 s_3 \dots) \Leftrightarrow \frac{-y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2} = S = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots}$$

$$\Leftrightarrow x - Sy = S^2.$$

A equação acima é a de uma reta dependendo de um parâmetro S .

Sendo assim, se $(x, y) \sim_K (x', y')$ então (x, y) e (x', y') estão sobre a mesma semi-reta determinada pelo parâmetro S acima (ver figura 1).

Observamos que existe um único ponto $(u', 0) \in [(u, v)]$, tal que $0 \leq u' < 100$. Logo, podemos identificar $[(u, v)]$ com o número real u' e desse modo, identificar \mathcal{R}/\sim_K com $[0, 100)$.

Com isto, podemos a partir da aplicação \mathcal{H} definir a aplicação $\mathbb{H} : [0, 100) \rightarrow [0, 100)$, dada por

$$\mathbb{H}(u') = v' \Leftrightarrow (v', 0) \sim_K \mathcal{H}(u', 0).$$

A expressão analítica de \mathbb{H} é

$$\mathbb{H}(x) = 100 (\sqrt{x} - \text{int}(\sqrt{x}))^2$$

Facilmente verifica-se que \mathbb{H} é contínua a menos do conjunto $\{n^2 | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 9\}$.

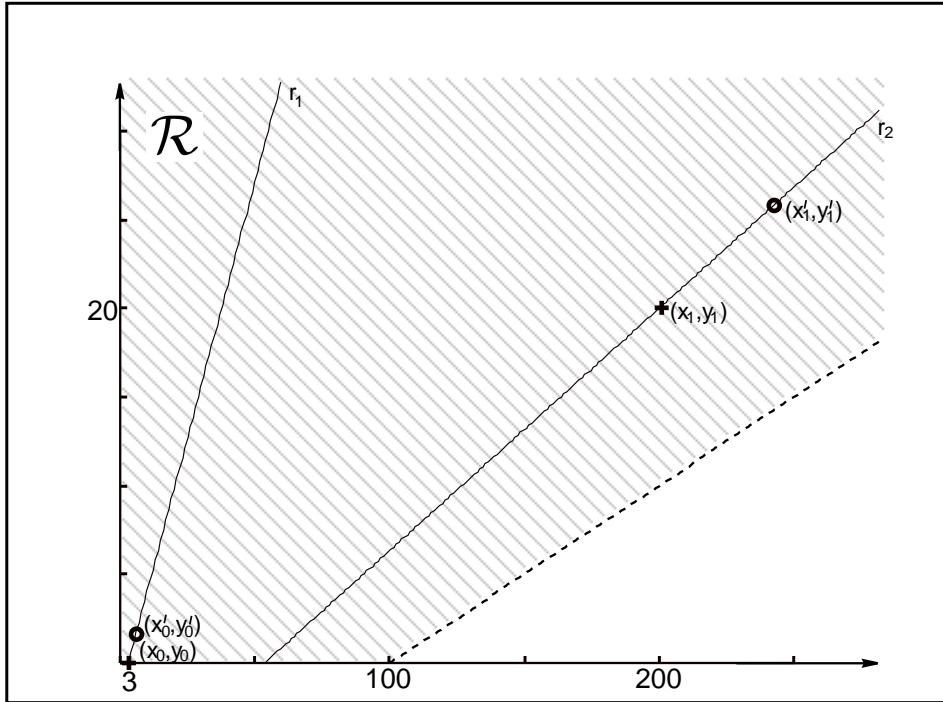


FIGURA 1. A região \mathcal{R} (hachurada) é delimitada pelos eixos coordenados e pela reta tracejada. Uma condição inicial (x_0, y_0) pertence a uma semi reta r_1 . Se $(x'_0, y'_0) \sim_K (x_0, y_0)$, então (x'_0, y'_0) também pertence a r_1 . A aplicação \mathcal{H} leva r_1 em r_2 .

Definição 33. Seja $r : [0, 100) \rightarrow [0, 10)$ definida por $r(x) = \sqrt{x}$.

Observação 17. É fácil ver que r é um homeomorfismo.

Proposição 15. A aplicação $\mathbb{H} : [0, 100) \rightarrow [0, 100)$ é topologicamente conjugada a $\sigma : \Sigma_{10} \rightarrow \Sigma_{10}$, via a aplicação $\kappa : [0, 100) \rightarrow \Sigma_{10}$, definida por $\kappa := k \circ r$ que leva o número real x na seqüência $\mathcal{S} = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ formada pelos dígitos da raiz quadrada

de x .

Prova:

Pela proposição 9 e observação 17 as aplicações k e r são homeomorfismos. Então, $\kappa = k \circ r$ é uma composição de homeomorfismos e, portanto, um homeomorfismo. Daí, para verificar a proposição basta mostrar que $\kappa \circ \mathbb{H} = \sigma \circ \kappa$.

Seja $x \in [0, 100)$ e $r(x) = \sqrt{x} = S = \overline{s_1, s_2 s_3 \dots}$. Daí

$$(\kappa \circ \mathbb{H})(x) = \kappa(\mathbb{H}(x)) = \kappa\left(100(\sqrt{x} - \text{int}(\sqrt{x}))^2\right)$$

$$= \kappa\left(100(S - \text{int}(S))^2\right) = k\left(r\left(100(S - \text{int}(S))^2\right)\right)$$

$$= k\left(\sqrt{100(S - \text{int}(S))^2}\right) = k(10(S - \text{int}(S)))$$

$$= k(\overline{s_2, s_3 \dots}) = (s_2 s_3 \dots) = \sigma((s_1 s_2 s_3 \dots)) = \sigma(k(\overline{s_1, s_2 s_3 \dots}))$$

$$= \sigma(k(S)) = \sigma(k(r(x))) = \sigma(\kappa(x)) = (\sigma \circ \kappa)(x).$$

□

Proposição 16. *A aplicação \mathbb{H} é caótica sobre $[0, 100)$.*

Prova:

Como \mathbb{H} é topologicamente conjugada a σ , temos, pela proposição 10 e pela observação 4, que os pontos periódicos de \mathbb{H} são densos em $[0, 100)$ e que \mathbb{H} é topologicamente transitiva.

Vejamos que \mathbb{H} possui dependência sensível às condições iniciais. Seja $x \in [0, 100)$ e U_x uma vizinhança de x . Tomamos $\mathcal{S} = \kappa(x)$ e $U_{\mathcal{S}} = \kappa(U_x)$. Pela proposição 10 a aplicação σ possui dependência sensível às condições iniciais. Logo, existe $\mathcal{T} \in U_{\mathcal{S}}$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $d_{\Sigma_{10}}(\sigma^n(\mathcal{S}), \sigma^n(\mathcal{T})) \geq 4$. Mostraremos que $y \in U_x$, $y = \kappa^{-1}(\mathcal{T})$, é tal que $d_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^n(x), \mathbb{H}^n(y)) \geq 16$.

Sejam $S_n, T_n \in [0, 10)$, dados por $S_n = k^{-1}(\sigma^n(\mathcal{S}))$ e $T_n = k^{-1}(\sigma^n(\mathcal{T}))$. Como k^{-1} é uma isometria (proposição 9) entre $[0, 10)$ e Σ_{10} , temos que $d_{\mathbb{R}}(S_n, T_n) = d_{\Sigma_{10}}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \geq 4$, ou seja, $|S_n - T_n| \geq 4$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $0 \leq T_n \leq S_n < 10$ e temos $S_n - T_n \geq 4$.

Sejam agora $x_n, y_n \in [0, 100)$, $x_n = S_n^2$ e $y_n = T_n^2$. Podemos observar que $S_n \geq 4 + T_n$, logo

$$d_{\mathbb{R}}(x_n, y_n) = x_n - y_n = S_n^2 - T_n^2 \geq (4 + T_n)^2 - T_n^2 = 16 + 8T_n \geq 16.$$

Note que

$$\kappa(x_n) = k(r(x_n)) = k(\sqrt{S_n^2}) = k(S_n)$$

$$= \sigma^n(\mathcal{S}) = \sigma^n(\kappa(x)) = \kappa(\mathbb{H}^n(x)),$$

então, $x_n = \mathbb{H}^n(x)$. Da mesma forma obtemos que $y_n = \mathbb{H}^n(y)$, o que conclui a prova.

□

Proposição 17. *A classe $\mathcal{B}' = \{\emptyset, [a, b)\} \subset \mathcal{P}([0, 10))$, onde $a, b \in [0, 10)$ são tais que $a = \frac{p}{10^{m-1}}$ e $b = \frac{q}{10^{n-1}}$, com $p, q, m, n \in \mathbb{N}$, é uma semi-álgebra.*

Observação 18. Sejam $p, q, m, n \in \mathbb{N}$. Então $a = \frac{p}{10^{m-1}}$ é um número racional e pertence a $[0, 10)$ se, e somente se, $0 \leq p < 10^m$. Assim, podemos sempre representar $a = \overline{s_1, s_2 \dots s_m}$. Da mesma forma, podemos representar $b = \overline{t_1, t_2 \dots t_n}$.

Prova:

Verifica-se diretamente que $[0, 10) \in \mathcal{B}'$. Logo, precisamos mostrar que

(1) \mathcal{B}' é fechado por intersecção.

Sejam $A, B \in \mathcal{B}'$, $A = [a_1, a_2)$ e $B = [b_1, b_2)$. Se A e B são disjuntos, então $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{B}'$. Caso contrário, podemos supor sem perda de generalidade que $a_1 \leq b_1$ e por consequência temos $b_1 < a_2$, pois do contrário A e B seriam disjuntos. Com isto temos duas possibilidades

$$(i) \ a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2 \Rightarrow [a_1, a_2) \cap [b_1, b_2) = [b_1, b_2) \in \mathcal{B};$$

$$(ii) \ a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 \Rightarrow [a_1, a_2) \cap [b_1, b_2) = [b_1, a_2) \in \mathcal{B}.$$

(2) para todo $A \in \mathcal{B}'$, $A^c = \sum_{i=1}^k A_i$, onde $A_i \in \mathcal{B}, \forall i$.

Se $A = \emptyset$, então $A^c = [0, 10)$. Se $A = [a_1, a_2)$, então $A^c = [0, 10) - [a_1, a_2) = [0, a_1) \cup [a_2, 10)$.

□

Observação 19. Notamos por $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$ a sigma-álgebra gerada por \mathcal{B}' . Pela proposição 1, $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$ coincide com a sigma-álgebra de Borel em $[0, 10)$.

Definição 34. Seja $g : [0, 10) \rightarrow [0, 100)$, definida por $g(x) = x^2$. Definimos $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = g(\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}) = \{g(A) | A \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}'}\}$, uma sigma-álgebra em $[0, 100)$.

Observação 20. Podemos observar que

- $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ é de fato uma sigma-álgebra, pois g é invertível e se $r = g^{-1}$, então aplicamos a proposição 2 e temos que $g(\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}) = r^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}'})$ que é uma sigma-álgebra;
- $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ coincide com a sigma-álgebra de Borel em $[0, 100)$;
- pela proposição 3 temos que $\mathcal{B} = g(\mathcal{B}') = \{g(A) | A \in \mathcal{B}'\}$ é uma semi-álgebra que gera $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Note que $\mathcal{B} = \{\emptyset, [a, b) \subseteq [0, 100)\}$, onde $a, b \in [0, 100)$ são tais que $a = \frac{p^2}{10^{2(m-1)}}$ e $b = \frac{q^2}{10^{2(n-1)}}$, com $p, q, m, n \in \mathbb{N}$.

Proposição 18. $\lambda^* : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\lambda^*([a, b)) = \int_a^b \frac{1}{20\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{10}$ é uma probabilidade sobre \mathcal{B} .

Prova:

De fato λ^* é uma medida de Lebesgue-Stieltjes (proposição 4). Vejamos que λ^* é probabilidade:

$$\lambda^*([0, 100)) = \frac{\sqrt{100} - \sqrt{0}}{10} = 1$$

□

Definição 35. Seja $\lambda : \mathcal{A}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ a probabilidade sobre a sigma-álgebra $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$, obtida pela extensão de λ^* (teorema 1).

Proposição 19. λ é ergódica para a aplicação \mathbb{H} .

Prova:

Sejam os espaços de probabilidade $([0, 100), \mathcal{A}_{\mathcal{B}}, \lambda)$ e $(\Sigma_{10}, \mathcal{A}_{\mathcal{C}}, \nu)$. Para verificarmos esta proposição, basta mostrar que para todo $A \in \mathcal{B}$ temos $\kappa(A) \in \mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ e que $\lambda(A) = \nu(\kappa(A))$. Daí, $h := \kappa^{-1}$, $\mu_1 := \nu$ (ver proposição 12 e observação 11) e $\mu_2 := \lambda$ atendem a proposição 6, de onde concluimos que a medida λ é ergódica para \mathbb{H} .

Faremos a demonstração em duas etapas. Seja $A \in \mathcal{B}$, $A = [a, b)$, então

(1) se $a = \frac{p^2}{10^{2(n-1)}}$ e $b = \frac{(p+1)^2}{10^{2(n-1)}}$, temos que

$$\kappa(A) = (k \circ r)(A) = k(r(A))$$

De fato, $r(A) = [\sqrt{a}, \sqrt{b})$, onde $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in [0, 10)$ e $\sqrt{a} = \frac{p}{10^{n-1}} = \overline{s_1, s_2 \dots s_n 000 \dots}$ e $\sqrt{b} = \frac{p+1}{10^{n-1}} = \overline{s_1, s_2 \dots (s_n + 1) 000 \dots}$. Daí, se $x \in [\sqrt{a}, \sqrt{b})$, então x pode ser escrito como $x = \overline{t_1, t_2 \dots}$ onde $t_j = s_j$ se $j \leq n$ e t_j assume qualquer valor inteiro de 0 a 9 se $j > n$. Logo

$\kappa(A) = k(r(A)) = k([\sqrt{a}, \sqrt{b}]) = [s_1 s_2 \dots s_n]$, um cilindro de \mathcal{A}_C .

Nesse caso, temos

$$\lambda(A) = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{10} = \frac{\frac{p+1}{10^{n-1}} - \frac{p}{10^{n-1}}}{10} = \frac{1}{10^n} = \nu([s_1 s_2 \dots s_n]) = \nu(\kappa(A)).$$

(2) se $a = \frac{p^2}{10^{2(m-1)}}$ e $b = \frac{q^2}{10^{2(n-1)}}$, com $p, q, m, n \in \mathbb{N}$, temos $r(A) = [\sqrt{a}, \sqrt{b}]$,

onde $\sqrt{a} = \frac{p}{10^{m-1}}$ e $\sqrt{b} = \frac{q}{10^{n-1}}$.

Supomos, sem perda de generalidade $m \leq n$, e reescrevemos $\sqrt{a} = \frac{p10^{n-m}}{10^{n-1}}$.

Seja $j = q - p10^{n-m}$, então

$$[\sqrt{a}, \sqrt{b}] = \sum_{i=1}^j [c_{i-1}, c_i],$$

onde

$$c_i = \frac{p10^{n-m} + i}{10^{n-1}}.$$

Note que fixado i , o intervalo $[c_{i-1}, c_i]$ é da forma do item (1). Logo,

$k([c_{i-1}, c_i]) \in \mathcal{A}_C$ e $\nu(k([c_{i-1}, c_i])) = \frac{1}{10^n}$. Daí

$$\kappa(A) = (k \circ r)(A) = k([\sqrt{a}, \sqrt{b}])$$

$$= k\left(\sum_{i=1}^j [c_{i-1}, c_i]\right) = \sum_{i=1}^j k([c_{i-1}, c_i]) \in \mathcal{A}_C.$$

e

$$\nu(\kappa(A)) = \nu\left(\sum_{i=1}^j k([c_{i-1}, c_i])\right) = \sum_{i=1}^j \nu(k([c_{i-1}, c_i]))$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^j \frac{1}{10^n} = j \frac{1}{10^n} = (q - p10^{n-m}) \frac{1}{10^n} \\ &= \frac{\frac{q}{10^{n-1}} - \frac{p}{10^{m-1}}}{10} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{10} = \lambda(A). \end{aligned}$$

Com isso, podemos aplicar a proposição 6 e temos que λ é ergódica para a aplicação

III.

□

6. CONCLUSÃO

Estudamos neste trabalho o algoritmo de obtenção da raiz quadrada dígito a dígito, definido pelo sistema $\mathcal{H} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$. Analisamos este sistema dinâmico de dois pontos de vista: da dinâmica topológica e das propriedades ergódicas.

Ao estudarmos a dinâmica topológica do sistema \mathcal{H} , verificamos que existe uma região $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}_+^2$ que atrai as órbitas de \mathcal{H} . Provamos que em \mathcal{R} o algoritmo em questão apresenta uma grande complexidade, sendo topologicamente semi conjugado ao shift map em Σ_{10} .

Ainda, mostramos que \mathcal{H} em \mathcal{R} leva semi retas em semi retas e, com isso, estabelecemos uma relação de equivalência em \mathcal{R} . Passando ao quociente essa relação de equivalência (sobre semi retas), obtemos um sistema \mathbb{H} , definido no intervalo $[0, 100)$, topologicamente conjugado ao shift map e, portanto, caótico.

Do ponto de vista de teoria ergódica, mostramos que existe uma probabilidade λ , ergódica para \mathbb{H} . Com isso, podemos tratar o sistema de uma forma estatística. Melhor dizendo, podemos aplicar o teorema de Birkhoff e, entre outras coisas, concluir sobre com que probabilidade a órbita associada a uma condição inicial genérica pode ser encontrada em determinadas regiões do espaço de fase. Podemos também concluir que a distribuição dos dígitos da raiz quadrada de um número real é quase certamente normal, isto é, fixado $n \in \mathbb{N}$ todos os grupos de n dígitos aparecem com a

mesma frequência na expansão decimal da raiz quadrada de quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.

É interessante notar que algoritmos semelhantes a este podem ser utilizados para extrair a raiz p -ésima de um número real positivo. Neste caso as inequações seriam da forma geral $(10\overline{s_1s_2s_3\dots s_n} + s_{n+1})^p \leq 10^{pn}x_0$.

Por fim, ressaltamos que o mesmo tratamento pode ser dado para o algoritmo usual da divisão de um número real positivo x_0 por um número real positivo α . Neste caso, o sistema é definido em $[0, 10\alpha)$ por $x_{n+1} = 10(x_n - \alpha \text{ int}(\frac{x_n}{\alpha}))$. Os dígitos da razão de $\frac{x_0}{\alpha}$ são dados por $s_{n+1} = \text{int}(\frac{x_n}{\alpha})$. Este algoritmo é topologicamente conjugado ao shift map em Σ_{10} e a probabilidade $\mu([a, b]) = \frac{b-a}{10\alpha}$ é ergódica para ele.

REFERÊNCIAS

- [1] Devaney, R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company (1989).
- [2] Fernandez, P.J., *Medida e Integração*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides (1976)
- [3] Hoffmann, G.A., Sobottka, M. e Oliveira, L.P.L. de, *Dinâmica Caótica: uma introdução*, Scientia, V. 10, N^o 2, Jul/Dez (1999), 147-176.
- [4] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides (1977)
- [5] Sobottka, M. e Oliveira, L.P.L. de, *Previsibilidade Computacional em Sistemas Caóticos*, Scientia, V. 11, N^o 2, Jul/Dez (2000), 109-126.
- [6] Walters, P., *An Introduction to Ergodic Theory*, New York, Springer-Verlag (1982).