UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

Ricardo Rodrigues Chilela

O JOGO DE PÔQUER:
uma situação real para dar sentido aos conceitos de Combinatória

Porto Alegre
2013

Ricardo Rodrigues Chilela

O JOGO DE PÔQUER:

uma situação real para dar sentido aos conceitos de Combinatória

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Porto Alegre

2013

Ricardo Rodrigues Chilela

O JOGO DE PÔQUER:

uma situação real para dar sentido aos conceitos de Combinatória

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Aprovada em

Prof. Dr. Vilmar Trevisan – Orientador

Dedico este trabalho, com todo carinho, aos meus pais Carolino e Emília, *In Memoriam*, à minha esposa Cláudia e minha filha Mariana, que foram principais fontes de inspiração para a realização deste. Também à minha colega Fátima.

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus que iluminou meu caminho nessa jornada; Aos meus pais Carolino e Emília, *In Memoriam,* que me deram toda força e perseverança sem esquecer o dom da vida e o ensinamento necessário para assumir responsabilidades e trajetórias por mim escolhidas. À minha esposa Cláudia e à minha filha Mariana, que muitas vezes sofreram com minha ausência, quando da elaboração desta dissertação e dos diversos trabalhos durante os mais de dois anos do curso.

Aos Professores, especialmente ao Vilmar, meu orientador, que com tanta presteza colaborou nesta dissertação, à professora Vera Clotilde, com a qual muito pude aprender e obter elementos para este trabalho. À professora Helena Dória pela motivação e incentivo.

Aos colegas de classe, ao amigo Klaus Richard Blümel colega de graduação e motivador do trabalho, aos meus alunos, com os quais pude aprimorar meus conhecimentos.

Aos meus familiares, minhas avós Vicentina e Maria Alvina, meus tios, ao meu primo Alex, todos eles colaboraram com debates e conversas sobre a vida acadêmica e a realidade das escolas e do ensino de Matemática referente à época que estudaram.

Às minhas irmãs: Marcia e Susie, incentivadoras do meu trabalho, minha sobrinha Carolina, meu amigo Sidnei Costa, que me incentivou a fazer o curso, a todos que, de alguma forma, me ajudaram nesta pesquisa.

RESUMO

A presente pesquisa foi desenvolvida para entender como ocorre o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória, no caso particular dos problemas de contagem de agrupamentos de objetos, considerado difícil por professores e alunos; e para elaborar e experimentar uma proposta didática, com potencial para trazer algo novo ao processo. Com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, delineou-se os esquemas de um grupo de alunos do ensino médio: resolvem problemas de contagem direta, mas não resolvem os que exigem multiplicação e divisão. Com a análise de outros trabalhos correlatos, pode-se concluir que o ensino tem melhores chances de iniciar com a resolução de problemas, e não a partir de formulários e definições. Consequência deste estudo, foi organizada e posta em prática uma sequência didática que parte da vivência do "jogo de pôquer". Entende-se o baralho (sem coringas) como um conjunto de 52 objetos, a partir do qual devemos formar agrupamentos de 5 objetos ("mãos"). Os problemas propostos gerados pelo jogo podem ser resolvidos com as quatro operações aritméticas. Ao final, constatou-se evolução nos esquemas dos alunos, que passaram a utilizar a multiplicação com significado e a utilizar uma organização gráfica adequada para as soluções. Mas ainda apareceram erros no uso da divisão, que foram analisados para poder-se oferecer ao professor/leitor, compreensão das dificuldades.

Palavras chave: **combinatória**; **resolução de problemas**; **jogo de pôquer**.

CHILELA, Ricardo Rodrigues. **O Jogo de Pôquer**: uma situação real para dar sentido aos conceitos de Combinatória. Porto Alegre, 2013. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

ABSTRACT

This research was conducted to understand how the teaching and learning of Combinatorics is, in the particular case of counting issues and groupings of objects, which is considered difficult by teachers and students. Also aims to develop and experience a didactic proposal, with the potential to bring something new to the process. Based on Vergnaud's theory of Conceptual Fields, it was outlined schemes of a group of high school students: they solve problems of direct counting, but do not solve problems that require multiplication and division. With the analysis of other related work, we can conclude that a better way of teaching would be starting with problem solving, and not from formulas and definitions. As a result of this study a teaching sequence that takes advantage of the experience of the poker game, was organized and implemented. It is understood the deck (without wildcards) of 52 cards, from which we form groups of 5 objects ("hands"). The proposed problems generated by the game can be solved with the four arithmetic operations. At the end of our experience, we discover changes in the schemes of the students, who start using multiplication meaning and an organization suitable for finding solutions. We notice that still errors appeared in the use of division, which were analyzed in order to offer the teacher / reader the understanding of the difficulties of the students.

Keywords: combinatorics; counting; count problem solving; poker game.

CHILELA, Ricardo Rodrigues. **O Jogo de Pôquer**: uma situação real para dar sentido aos conceitos de Combinatória. Porto Alegre, 2013. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação é uma pesquisa qualitativa que encontra inspiração na engenharia didática, um referencial para investigações que partem da análise do ensino usual de determinados conceitos ou habilidades matemáticas para propor e experimentar uma prática que contribua para o processo de aprendizagem.

Considerando a Combinatória, parte-se das **questões geradoras** do Quadro 1.

QUESTÕES GERADORAS DA PESQUISA
Considerando a Combinatória, como ocorre o processo de ensino e aprendizagem usualmente? O que se pode fazer para contribuir com esse processo?

Quadro 1 – Questões Geradoras da Pesquisa

A ideia é questionar o que é Combinatória e investigar o processo de ensino aprendizagem, a partir de estudo da bibliografia adequada e de análises de problemas para, ao final, elaborar e experimentar uma proposta didática. O estudo se desenvolve com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

1.1 JUSTIFICATIVA

O processo de ensino e aprendizagem de Combinatória é crítico principalmente devido ao conflito entre resolução de problemas e uso de um formulário. Em geral, os professores e livros didáticos definem arranjo, combinação e permutação, dão as fórmulas e propõem aos alunos problemas que se adaptem a elas. No entanto, existem muitos outros problemas, evitados na escola, que não podem ser resolvidos com fórmulas mas, sim, exigem esquemas que envolvem os princípios aditivo e multiplicativo e decisões a respeito da necessidade e da aplicação adequada da operação de divisão. O raciocínio exigido por problemas de combinatória é fundamental para a aprendizagem na disciplina de Probabilidade e necessário no trabalho com outras ciências, o que justifica um projeto com esse foco.

1.2 METODOLOGIA DE PESQUISA E PRODUTO DIDÁTICO

Engenharia Didática é um termo com duplo sentido. Por um lado, é um **produto didático,** que envolve um plano de ensino, a criação de materiais didáticos, uma experimentação com uma validação e uma avaliação posterior. Mas também se refere a uma metodologia de investigação, com etapas bem definidas. É um referencial para a pesquisa do professor sobre a própria prática, com etapas bem definidas:

Etapa 1: Análises prévias, que envolve análise epistemológica dos conceitos e habilidades envolvidas na Combinatória; análise do ensino usual; análise das condutas dos alunos na resolução de problemas;

Etapa 2: Análises *a priori*, que envolve planejamento das ações didáticas, criação de objetivos e hipóteses, construção de material didático;

Etapa 3: Experimentação, que envolve prática docente, coleta de material durante as aulas.

Etapa 4: Análises *a posteriori*, que inclui a validação da engenharia, com análise do material coletado, confrontando a experiência com os objetivos e hipóteses anteriormente formulados.

1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos da pesquisa têm relação com as etapas da engenharia didática, conforme o Quadro 2.

OBJETIVOS DA PESQUISA

Objetivos da etapa Análises Prévias

1) Definir e caracterizar o objeto de estudo, a "Combinatória";
2) Descrever como se dá o ensino usual da Combinatória e estudar as propostas didáticas mais recentes;
3) Descrever as questões cognitivas, já esclarecidas em outros estudos, e os esquemas dos alunos que participam desta pesquisa, na resolução de problemas combinatórios prévios.

Objetivos da Etapa Análises a priori

4) Explicitar as conclusões do estudo anterior e as escolhas globais que orientarão a proposta didática;
5) Explicitar hipóteses a respeito desta intervenção;
6) Fazer o planejamento da proposta e da sequência didática, num formato que possibilite adaptá-la para uma publicação para professores.

Objetivo da Etapa Experimentação

7) Desenvolver a experimentação com coleta de dados;

Objetivos da etapa Validação

8) Analisar os dados obtidos nas resoluções dos problemas prévios e confrontá-

los com os dados obtidos durante a experiência e após a experiência, para verificar a evolução dos esquemas; 9) Analisar e validar a experiência, contrapondo os dados coletados com as hipóteses prévias. 10) Rever e fazer correções necessárias na engenharia 11) Oferecer aos professores de Matemática uma proposta de ensino possível de ser reproduzida.

Quadro 2 - Objetivos da Pesquisa

1.4 SUPORTE TEÓRICO

Qualquer investigação que tenha como objetivo a melhoria do ensino da Matemática necessariamente vai além do estudo de técnicas e de propostas metodológicas, para incluir o estudo dos processos cognitivos da aprendizagem. Questiona-se, então: O que é a Matemática? De que forma o sujeito aprende Matemática? Quais são as maneiras de favorecer a aprendizagem do sujeito? Como verificar se houve aprendizagem?

Nesta perspectiva, é preciso buscar fundamentação em uma teoria de aprendizagem adequada para Educação Matemática. No presente trabalho, a opção foi pela Teoria dos Campos Conceituais (TCC) proposta por Gérard Vergnaud[1], uma teoria cognitivista que explica o desenvolvimento e a aprendizagem de competências complexas, particularmente aquelas implicadas nas ciências.

Vergnaud tem uma vasta produção, iniciada na década de 60. Em particular, a TCC começou a ser enunciada na década de 80. Neste período de produção, parece natural que as ideias do autor tenham evoluído e alguns conceitos básicos tenham adotado outras ênfases.

No estudo da TCC, são encontradas respostas desejadas para as questões: O que é o conhecimento matemático? De que forma o sujeito aprende Matemática? Quais são as maneiras de favorecer a aprendizagem do sujeito? Como verificar se houve aprendizagem?

Na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), o conhecimento matemático está organizado em grandes campos conceituais, conjuntos de problemas, situações, conceitos, propriedades, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, relacionados entre si. Um campo conceitual pode ser pensado como um conjunto de situações que, para ser entendido, necessita a conexão de muitos e diferentes conceitos. Ao mesmo tempo, é uma coleção de conceitos, com diferentes propriedades, cujo significado é delineado nas diferentes situações.

A aprendizagem, em Matemática, é essencialmente conceitual, mas um conceito não se resume a uma definição. É um tripé de três conjuntos: o conjunto das situações que fazem o

[1] Discípulo de Jean Piaget, atualmente diretor do Centro Nacional de Pesquisa Científica da França.

conceito significativo[2]; o conjunto de invariantes (teoremas-em-ação) que caracterizam a variedade de competências do sujeito e que são propriedades dos conceitos; e o conjunto das representações simbólicas que são usadas para representar as propriedades e as situações (Vergnaud, 1996, p. 238). Em outra ocasião, Vergnaud (1998, p. 41) definiu o tripleto (S, R, I) onde, em termos psicológicos, S é a realidade e (I, R) a representação que pode ser considerada como dois aspectos interagentes do pensamento, o significado (I) e o significante (R).

Para Vergnaud (1990), o sentido de um conceito é "*uma relação entre o sujeito, as situações e os significantes*" (VERGNAUD, 1990, p.14). Mais precisamente, são os esquemas evocados por uma situação ou símbolo (numérico, algébrico, gráfico ou linguístico), que constituem o sentido.

Vergnaud (1990), destacando o sentido do conceito de adição, define sentido:

> *[...] é o conjunto de esquemas que um sujeito individual pode por em prática para tratar as situações que implicam a ideia de adição; é, também, o conjunto de esquemas que pode por em jogo para operar sobre os símbolos, numéricos, algébricos, gráficos e linguísticos que representam a adição.* (VERGNAUD, 1990, p. 14)

Daí a importância da definição de esquema: "*organização invariante da conduta (do sujeito) para uma classe de situações dada*" (VERGNAUD, 1990, p.2).

Moreira (2002) contribui para a compreensão dos esquemas. Esquemas geram ações, incluindo operações intelectuais. As ações são operatórias porque são orientadas pelos conhecimentos-em-ação, contidos nos esquemas do sujeito. Estes conhecimentos são invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento dos elementos pertinentes à situação.

Nessa ótica, a aprendizagem matemática consiste na criação de esquemas que dão conta da resolução e da compreensão de situações e problemas cada vez mais complexos; no desenvolvimento de diferentes maneiras de operar eficientemente nessas situações e nesses problemas utilizando, gradualmente, representações mais adequadas e mais econômicas; e na explicitação de conceitos e teoremas.

A aprendizagem ocorre ao longo do tempo, através de experiências com um grande número de situações. A aquisição do conhecimento é gradual, à medida que o sujeito adquire familiaridade com elas e resolve problemas mais complexos.

Favorecer a aprendizagem consiste em desestabilizar cognitivamente o sujeito. É preciso identificar sobre quais conhecimentos prévios o aluno pode se apoiar para aprender, mas é preciso

---

[2] Na obra original em inglês, Vergnaud usa o termo "meaningful" cuja tradução é "significativo".

produzir rupturas, ou seja, situações para as quais os alunos não têm onde se apoiar e devem buscar outras soluções.

Nessa tarefa, os professores são mediadores, cuja função é ajudar os alunos a desenvolver seu repertório de esquemas e representações, provendo situações frutíferas, diversificadas, escolhidas e ordenadas quanto ao grau de complexidade. .

A TCC é um bom referencial teórico para pesquisas que observam o aluno em ação, envolvido em tarefas e problemas. É uma boa ferramenta na construção de planejamentos didáticos, auxilia no desenho de situações de ensino, na seleção dos conceitos e dos teoremas chave e de suas relações, assim como na análise da evolução dos esquemas dos alunos, a partir da verificação dos conceitos e teoremas em ação utilizados.

A teoria de campos conceituais lida não apenas com conceitos já formalizados e consolidados pelo sujeito, mas também e, sobretudo, com conhecimentos em via de formalização. Esse aspecto garante que possamos identificar, em situações problema, os modos de compreensão dos estudantes em processo de formação.

No presente trabalho, são feitas investigações de coleções de problemas, exemplares de livros de Combinatória, considerando os esquemas de resolução de professores com maestria; de problemas resolvidos por alunos, que ainda não tiveram contato formal com o assunto; e de alunos durante e após a intervenção didática que foi planejada, buscando a evolução.

As três análises buscam descrever esquemas e identificar conceitos em ação e teoremas em ação. Quando o sujeito em situação é o professor com maestria (autor de livros didáticos ou de pesquisas no tema) supõe-se que os conceitos e teoremas encontrados são explícitos e científicos e que os esquemas são aqueles desejáveis no ensino. Quando o sujeito é o aluno, busca-se a comparação entre os esquemas e dos grupos pesquisados, antes, durante e após a intervenção didática. Procurando alguma evolução na direção dos esquemas desejáveis.

1.5 A EXPERIMENTAÇÃO DIDÁTICA

A experimentação da engenharia foi feita com oito alunos voluntários, da segunda série do ensino médio, do Colégio La Salle Santo Antônio, em Porto Alegre, em seis encontros de duas ou três horas, em atividade extraclasse.

A coleta de dados a respeito dos esquemas prévios para resolução de problemas foi feita no dia 05 de julho de 2012.

1.6 OBSERVAÇÕES SOBRE O PROCESSO DA PESQUISA E SOBRE UM NOVO OBJETIVO

Esta dissertação foi escrita em dois tempos.

No período de janeiro de 2012 a junho de 2012, foi feita uma ampla revisão bibliográfica, uma consulta em livros didáticos e uma consulta prévia, junto aos alunos, sujeitos da pesquisa (2º ano nível médio), para buscar seus esquemas para resolver problemas de Combinatória, antes de terem contato com o ensino usual desse tema. Os resultados obtidos fazem parte das análises prévias, deram origem a decisões globais a respeito do plano de ensino e a uma versão inicial do plano. Nesta fase, uma das hipóteses era que os alunos não haviam tido contato com a Combinatória.

No entanto, a experiência didática foi iniciada em 30 de agosto, num período em que estes alunos estavam tendo aulas de Combinatória, com o mesmo professor[3] (autor deste trabalho). O professor não estava aplicando, inicialmente, nenhuma das descobertas de seu estudo e pretendia utilizar uma estratégia de ensino desvinculada da pesquisa, para apresentar o assunto: iniciar com a parte algébrica da Combinatória, manipulando expressões com a presença do fatorial; partir para as definições e para o formulário básicos; e, logo após, para a resolução de problemas adequados ao formulário.

Foi decidido, então, que a experiência que estava sendo desenvolvida extraclasse não poderia ficar dissociada das ações desenvolvidas na aula regular.

Para abrir a porta de comunicação entre as duas ações didáticas, ficou decidido que:

1. Na experiência extraclasse, à medida que os alunos avançassem na resolução de problemas, seriam deduzidos e/ou explicados os conceitos e fórmulas de Arranjo, Permutação e Combinação pertinentes (neste caso, não surgiu a necessidade de apresentar os casos com repetição);

2. O mesmo seria feito na turma regular, em atividades de grupo em que o professor contaria com o auxílio dos alunos participantes da experiência extraclasse.

Outras mudanças ocorreram durante a pesquisa, nas análises prévias, buscando sugestões de abordagem didática para a Combinatória, foram encontradas muitas experiências com uso de jogos construídos pelo professor, com esta intenção. Nada foi encontrado sobre o jogo de pôquer, que está na origem histórica da Combinatória e que gera muitos problemas de contagem e de probabilidades (estes, sim, encontrados em livros didáticos). Após as análises prévias, surgiu a decisão de utilizar o

---

[3] Prof. Ricardo Rodrigues Chilela

"jogo de pôquer" como situação geradora de uma coleção de problemas que seria a base da sequência didática.

Desse modo, se estabeleceu um novo objetivo para a pesquisa que diz respeito ao potencial desse jogo como recurso didático para professores, conforme o Quadro 3.

MAIS UM OBJETIVO PARA ESTA PESQUISA
Investigar o potencial do jogo de pôquer como situação que dá sentido a conceitos da Combinatória.

Quadro 3 – Mais Um Objetivo para a Pesquisa

O plano de ensino tem como objetivo favorecer a aprendizagem dos conceitos, operações e representações da Combinatória, identificados na análise dos problemas gerados pelo pôquer. Por isso, os resultados dessas análises fazem parte de um capítulo específico, que antecede o capítulo da Análise *a priori*.

1.7 APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES

A presente dissertação se apresenta em capítulos.

No Capítulo I, fez-se a presente introdução. O Capítulo II traz o resumo e as conclusões da revisão bibliográfica que serviu de base para as análises prévias, que visa à compreensão da natureza da Combinatória e do processo de ensino e aprendizagem. O Capítulo III traz o estudo sobre o pôquer, um jogo que é visto como situação que gera problemas e dá sentido a conceitos de Combinatória. No Capítulo IV, faz-se a Análise *a priori* da engenharia didática, com as escolhas globais, o plano, os objetivos, as hipóteses, a sequência e o material didático. No Capítulo V consta o relato da experimentação prática com análise aula a aula e a validação da engenharia, a partir do confronto das hipóteses com os resultados. No Capítulo VI, são apresentadas considerações finais e as conclusões da pesquisa, revisando as questões norteadoras e os objetivos. Nos Apêndices, estão análises detalhadas de esquemas evocados por problemas de Combinatória, separados em problemas exemplares, resolvidos por mestres, e problemas prévios resolvidos por alunos de ensino médio.

Algumas soluções dos problemas, no Capítulo III, repetem-se no Capítulo V. O primeiro é um material preparado para o professor e o Capítulo V é um relato da experiência.

Podemos perguntar se descobrimos algo novo neste trabalho. Acho que sim: recortamos, no grande campo conceitual da Combinatória, o campo da contagem que envolve problemas de contagem; analisamos esquemas para resolver problemas exemplares num livro reconhecido por sua qualidade (SBM); os esquemas evocam os conceitos fundamentais que constituem o campo da contagem e adquirem significado combinatório (conjunto, conjunto universo, cardinal, subconjunto, união, interseção, agrupamento, contagem direta, multiplicação, divisão, adição, combinação, arranjo, permutação e outros); encontramos também várias formas diferentes de representação para resolver esses problemas; mostramos assim que os problemas de contagem não dizem respeito apenas a combinação, arranjo, permutação e ao formulário. Estudamos também as dificuldades dos alunos e analisamos esquemas de resolução de problemas dos alunos da pesquisa, mostrando um esquema anterior à experiência muito limitado. Estudamos formas de ensinar e optamos por uma experiência com o jogo de pôquer. Antes de elaborar o plano de ensino da experiência, fizemos um estudo dos problemas gerados pelo pôquer, mostrando seu potencial para o ensino, à medida que podem ser resolvidos de diferentes maneiras, em esquemas que evocam os principais conceitos desejáveis. Em particular, os esquemas do pôquer dão significado combinatório aos conceitos de multiplicação e de divisão. Realizamos a experiência e mostramos que houve uma ampliação nos esquemas de resolução, mas alguns equívocos permaneceram ligados ao sentido da divisão. Pensando nisso, é proposto um modo de explicar a divisão, relacionando-a com a ordem dos agrupamentos a serem contados.

2 ANÁLISES PRÉVIAS

As análises prévias têm objetivos de analisar o funcionamento do ensino habitual do conteúdo, para propor uma intervenção, mesmo que pequena e local, com potencial para melhorar a aprendizagem.

> *A tradição é vista como um estado de equilíbrio do funcionamento de um sistema dinâmico, que tem falhas. A reflexão sobre essas falhas torna-se o ponto de partida para determinar condições possíveis de um ponto de funcionamento mais satisfatório.* (GARCIA, 2005, p. 93).

A análise é feita em três níveis:

1) dimensão epistemológica, associada às características do saber em jogo;

2) dimensão didática, associada às características do funcionamento do sistema de ensino;

3) dimensão cognitiva, associada às características do público ao qual se dirige o ensino.

2.1 DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA, ASSOCIADA ÀS CARACTERÍSTICAS DO SABER EM JOGO

Esta etapa das análises foi desenvolvida com estudo de uma ampla bibliografia especializada.

O que é Combinatória?

A Análise Combinatória (ou apenas Combinatória) é parte da Matemática Discreta, área da Matemática que estuda os conceitos e situações que se referem aos números inteiros (ou a outros conjuntos discretos). Sequências e somatórios, grafos e matrizes, combinatória e probabilidades são conteúdos inter-relacionados.

Boga Neto (2005) criou um Mapa Conceitual para Combinatória, incluindo: Fatorial, Arranjos, Combinações, Permutações, Binômio de Newton, Triângulo de Pascal, Probabilidade. Esses conceitos e o formulário correspondente formam aquilo que ele considera como “o conteúdo” da Combinatória.

O presente estudo coloca-se na categoria das obras que têm seu foco nos problemas de contagem.

Para Morgado et al (2006), de maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Dentre os problemas da Combinatória, os autores definem os problemas de "*contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos".* (MORGADO et al, 2006, p.10).

Batanero et al (1997) citam Hart (1992) e também definem os problemas de contagem:

> *[...] problemas que envolvem um número finito de elementos (conjuntos discretos), com os quais podem-se operar de diferentes maneiras. 'Algumas destas operações somente modificam a estrutura do conjunto (permutações dos seus elementos) enquanto outras modificam a composição do conjunto (selecionar um subconjunto)'.* (BATANERO et al, 1997, p. 1)

Esteves (2001) traz um estudo histórico que mostra a necessidade de contar, desde os primórdios da civilização. Cita um livro chinês, escrito há mais de dois mil anos, que calcula arranjos com repetição de dois elementos tomados três a três. Relata cálculos de combinações, feitos para resolver problemas propostos por gregos, árabes e hindus, muito antes das publicações dos matemáticos mais conhecidos do Ocidente.

No século XVII, surgem os primeiros livros relacionando contagem com jogos de azar (cartas, fichas, roletas e dados). A teoria das probabilidades, visando os jogos, foi foco de estudos de Cardano (1501-1576), de Galileu Galilei (1564-1642) e do holandês Christian Huygens (1629-1695).

Vazquez e Noguti (2004, p.4) oferecem a definição de Combinatória dada por Leibniz, em 1666: "*o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos*". As autoras propõem outra definição: "*estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção" (*VAZQUEZ e NOGUTI, 2004, p.4).

Definem então "agrupamento" e "tipos de agrupamento":

> *Se considerarmos uma coleção ou um conjunto de elementos quaisquer e, tomarmos um, dois, três,... desses elementos, temos um agrupamento. Um agrupamento é simples quando o mesmo elemento não figura nele mais de uma vez; caso contrário, o agrupamento é denominado com repetição. Ao agrupamento em que o número de objetos de cada grupo é menor que o total, e um elemento figura uma só vez em cada grupo, e dois agrupamentos diferem pela natureza ou pela ordem dos elementos que neles figuram, chamamos arranjo simples e quando o agrupamento formado difere apenas pela natureza de pelo menos um elemento temos uma combinação simples. Já ao agrupamento formado por todos os elementos do conjunto, diferindo dois agrupamentos apenas pela ordem dos elementos, chamamos permutação*. (VAZQUEZ & NOGUTI, 2004, p.5)

Observa-se que Vazquez e Noguti (2004) relacionam Combinatória com Teoria dos Conjuntos e dão significado combinatório a conceitos desta Teoria, como coleção, agrupamento, cardinal (número de objetos de um conjunto), ordem e repetição. Conjunto universo (coleção ou um conjunto de elementos quaisquer em que tomamos um, dois, três,... elementos para formar agrupamento*s)*, subconjunto (agrupamento não ordenado) e n-upla (agrupamento ordenado).

Diferentes autores (Batanero et al,1997; Esteves, 2001; Pedrosa Filho, 2008; Almeida e Ferreira, 2009; Borba e Pessoa, 2009, 2010; Leite et al, 2009; Lopes, 2010; Marcos e Rezende, 2010; Souza, 2010; Mendonça, 2011) quando se referem a Combinatória, não utilizam o termo “conteúdo”, mas, sim, expressões como “raciocínio combinatório” ou “pensamento combinatório”, aquele que resolve problemas combinatórios.

Batanero et al (1997), num artigo cujo foco é o desenvolvimento do raciocínio combinatório necessário para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, afirmam que a Combinatória é muito mais do que simplesmente resolver problemas de permutação, arranjo e combinação, pois inclui muitos outros conceitos e outros tipos de problemas.

2.1.1 Como entender a combinatória com relação à Teoria dos Campos Conceituais?

Muitos autores fundamentam suas pesquisas, sobre ensino e aprendizagem de Combinatória, na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (Teixeira et al, 2011; Borba e Pessoa, 2009 Carvalho, 2009; Pedrosa Filho, 2008; Cemin, 2008; Silva, 2006; Esteves, 2001).

Greca e Moreira (2003) relembram que, na teoria de Vergnaud, o conhecimento se encontra organizado em campos conceituais, grandes conjuntos, informais e heterogêneos, de situações e problemas cuja análise e tratamento requer diversas classes de conceitos, procedimentos e representações simbólicas que se conectam umas com outras.

Nessa ótica, sugerem que o pesquisador pode descrever o campo conceitual em que pretende trabalhar:

> *Um campo conceitual resulta em uma unidade de estudo cujas componentes -- situações, conceitos, procedimentos, etc. -- podem ser tratados de forma independente em relação a outros conjuntos Isto não quer dizer que os diferentes campos conceituais sejam conjuntos disjuntos e que uns não podem ser importantes para a compreensão dos outros, senão que, na medida em que possam ser consistentemente descritos, podem ser considerados como diferentes*. (GRECA e MOREIRA, 2003, sem página).

O trabalho de Vergnaud é centrado no estudo dos campos conceituais das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas, no entanto, outros pesquisadores, em Educação Matemática, definem outros campos. Por exemplo, Lessa (2011) define o campo conceitual dos números fracionários e Oliveira (1997) define o campo conceitual das funções.

Este trabalho dedica-se ao estudo do campo conceitual da Combinatória, restringindo-se às situações-problemas de contagem e definindo-o como o conjunto das situações que requerem a formação e a contagem de agrupamentos obtidos a partir de uma coleção de objetos.

Pensando nos estudos sobre história da Combinatória e sua relação com outras áreas de conhecimento, pode-se dizer que este campo pertence à interseção dos campos multiplicativo M e aditivo A ($M \cap A$) e está relacionado com os campos conceituais da Teoria das Probabilidades (também, parcialmente, pertencente a $M \cap A$) e da Teoria dos Conjuntos.

Do ponto de vista de Vergnaud, raciocínio combinatório pode ser visto como uma coleção de esquemas ou competências para dar conta de qualquer problema de Combinatória.

Greca e Moreira (2003) sugerem que, no processo de apreensão desses campos conceituais, os estudantes vão adquirindo concepções e competências.

> *De fato, a maior parte de nossos conhecimentos são competências (ou seja, o saber fazer) [...] Em relação ao conhecimento científico, as competências parecem estar mais vinculadas à resolução de problemas e as concepções, às expressões verbais ou escritas dos sujeitos.* (GRECA e MOREIRA p. 3).

Ao enfatizar as competências, coloca-se a ênfase na resolução de problemas como a principal forma de medida do processo de aprendizagem. É preciso resolvê-los e expressar verbalmente o raciocínio que os levou até o resultado.

Neste estudo, raciocínio combinatório pode ser identificado com competências para resolver problemas de combinatória (no caso, problemas de contagem).

2.1.2 Classificação de problemas de contagem

Na ótica da TCC, o sentido da Combinatória, para um aluno do nível médio, é o conjunto de esquemas que ele pode utilizar para lidar com problemas de formação e contagem de agrupamentos, caracterizados na questão básica: “quantos?”.

Mariana tem 3 saias, 2 blusas e 4 sapatos. De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir, usando uma peça de cada conjunto?

De quantas maneiras pode-se selecionar uma equipe de 3 alunos, a partir de um grupo de 6 alunos?

De quantos modos podemos selecionar p elementos do conjunto {1,2,...n} sem selecionar dois números consecutivos.

Quantos números com 3 algarismos não repetidos pode-se formar?

Segundo Borba e Pessoa (2009, p.113), os problemas básicos trabalhados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio são:

1) *Produto cartesiano, produto de medidas ou combinatória.*

   Exemplo: Para a festa de São João da escola, há três meninos (Pedro, Gabriel e João) e quatro meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

2) *Permutação*

   Exemplo:Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.

3) *Arranjo*

   Exemplo: A semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

4) *Combinação.*

   Exemplo: Uma escola tem nove professores, dos quais cinco devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos de cinco professores podem-se formar?

O professor que já se defrontou com diferentes problemas sabe que eles não se resumem aos conceitos de permutação, arranjo e combinação. Cabe então identificar outros conceitos. Mas, segundo Vergnaud (1990), um conceito não se reduz a uma definição. É através das situações e dos problemas que um conceito adquire sentido e, para isto, é preciso analisar problemas e esquemas de resolução.

Com este objetivo, foi feita uma análise dos esquemas de resolução de problemas em um livro didático (Lima et al (2006) utilizado nos cursos de formação de professores. Foram selecionados problemas exemplares (resolvidos) que explicitam conceitos cientificamente aceitos.

Com relação aos esquemas, pode-se adaptar o que Vergnaud (1990, p.15) afirma sobre o sentido da adição, para os conceitos da Combinatória. São os esquemas evocados no sujeito, por uma situação/problema ou significante/representação, que constitui o sentido do problema e da representação para este sujeito. O sentido da Combinatória e dos conceitos envolvidos nos problemas de Combinatória, para um sujeito individual, é o conjunto de esquemas que pode pôr em prática para resolver problemas e é também o conjunto de esquemas que pode pôr em jogo para operar sobre os símbolos numéricos, algébricos, gráficos e linguísticos adequados.

A análise da coleção de problemas foi feita considerando as seguintes categorias e está no Apêndice A:

a) Descrever esquemas de resolução;
b) Destacar conceitos-em-ação, implícitos ou explícitos. Estes conceitos serão considerados como pertencentes ao Campo Conceitual da Combinatória.
c) Destacar teoremas-em-ação, proposições válidas a respeito dos conceitos.

Os esquemas de resolução dão sentido ao conceito de Combinatória, na perspectiva dos autores do livro. Após a análise, pode-se resumir aqui.

Os autores enfatizam o conceito de escolha, definindo o Princípio Multiplicativo que é fundamental para a contagem: *"se há x modos de tomar uma decisão D1 e, tomada a decisão D1, há y modos de tomar a decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é x·y".*

Este princípio também pode ser formulado na linguagem dos conjuntos: *Se o conjunto A tem cardinalidade x e o conjunto B tem cardinalidade y, então o produto cartesiano AxB tem cardinalidade x·y.*

Ou seja, problemas que exigem decisões sucessivas podem ser vistos como problemas de produto cartesiano. Uma escolha significa escolher um objeto num conjunto; o número de modos de tomar decisões ou fazer escolhas é o cardinal de um conjunto, cujos objetos podem ser escolhidos, obedecendo a certos critérios.

Foram encontrados, em Lima et al (2006), cinco esquemas de resolução:

1) Esquema verbal e numérico utilizando o conceito implícito de produto cartesiano de conjuntos distintos;
2) Esquema verbal, numérico e simbólico, nos problemas de permutação, utilizando o símbolo de fatorial;
3) Esquema verbal, numérico, simbólico e algébrico utilizando o conceito de seleção de agrupamentos a partir de conjunto dado;
4) Esquema verbal, numérico, algébrico e gráfico, para transformar o problema dado em outros mais simples, equivalentes, nos casos de problemas de divisão e partição;
5) Esquema verbal, simbólico (símbolos da Teoria dos Conjuntos e de fatorial), algébrico e esquema de listagem com contagem direta dos agrupamentos.

Estes esquemas sugerem uma classificação dos problemas de Combinatória.

2.1.3 Classificação dos problemas exemplares

Ao analisar os problemas exemplares de Lima et al (2006), pode-se classificá-los em diferentes modelos.

a) Modelo produto cartesiano, definido por Borba e Pessoa (2009, p. 113), como problema de multiplicação com duas ou mais grandezas, cujo produto corresponde a uma grandeza diferente.

Exemplos:

- *Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?*
- *Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 360? Quantos desses divisores são pares? Quantos são ímpares?*
- *Um bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se podem usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se podem colorir a bandeira?*

b) Modelo clássico de permutação com e sem repetição

O conceito de permutação é essencial nos problemas de contagem, pois se referem à questões de ordem e à necessidade de dividir.

Exemplos:

- *De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?*
- *Quantos são os anagramas da palavra BOTAFOGO?*

c) Modelo de seleção, definido em Batanero et al (1997), em que o ponto de partida é um conjunto de *m* objetos (conjunto universo) do qual é retirado um subconjunto de *n* elementos, segundo certos critérios.

As palavras-chave, nestes problemas são: escolha, selecione, retire, tome, etc.

Ao fazer a seleção pode-se repetir ou não os objetos e a ordem dos objetos, no subconjunto podem ou não ser importante. Ou seja, para resolver estes problemas podem-se utilizar os conceitos de arranjo e combinação, com ou sem repetição. Pode-se ter o caso de obter subconjuntos com o mesmo número de elementos do conjunto universo, apenas permutando os objetos.

Exemplos:

- *Quantos são os números pares de três dígitos distintos?*
- *De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?*

Estes problemas foram resolvidos por esquema verbal, numérico e algébrico.

Estes exemplos são clássicos, problemas de Arranjo e de Combinação, mas outros não se adaptam a essa classificação. Por outro lado, os problemas de partição podem dar significado aos conceitos de Permutação, Arranjo e Combinação.

Nesta pesquisa, os problemas de Seleção são especialmente importantes, pois todos os problemas gerados pelo jogo de pôquer implicam escolher/selecionar objetos (cartas) num conjunto universo (baralho) formando agrupamentos (“mãos” de 5 cartas) de acordo com certos critérios (jogos definidos como válidos no pôquer).

d) Modelo partição, em que um conjunto de n objetos é distribuído em m subconjuntos, formando uma partição do conjunto.

As palavras-chave nestes problemas são: dividir, distribuir, decompor, separar, etc.

Exemplo:

- *De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 objetos e um de 3 objetos?*

Este problema pode ser resolvido a partir de um esquema gráfico, como no Quadro 4, e da reformulação do enunciado, seguido por um esquema algébrico.

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{Grupo 1}} \;/\; \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{Grupo 2}}$$

Quadro 4 – Esquema Gráfico

As primeiras 5 vagas correspondem ao grupo de 5 objetos; as últimas vagas correspondem ao grupo de 3 objetos.

O problema pode ser transformado em outro mais simples:

De quantas maneiras podem ser preenchidas as vagas, com 8 objetos diferentes, sabendo que a ordem dos objetos, em cada grupo, não importa.

A resposta é: $\frac{(8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4)}{5!}\cdot\frac{(3\cdot2\cdot1)}{3!} = C_{8,5}$

Estes problemas foram resolvidos por esquema verbal, numérico, algébrico e gráfico.

Este exemplo pode ser classificado como um problema clássico de Combinação, mas outros não se adaptam a essa classificação. Por outro lado, os problemas de partição podem dar significado aos conceitos de Permutação, Arranjo e Combinação.

e) Modelo distribuição, em que um conjunto de *n* objetos é distribuído em *m* células.

As palavras-chave, nesses problemas são: colocar, introduzir, estabelecer correspondência. Os objetos distribuídos podem ou não ser idênticos, as células podem ou não ser idênticas, os objetos podem ou não ser ordenados, nas células; pode ou não haver células vazias;

Exemplo:

- *Quantos são os anagramas da palavra "Búlgaro" que não possuem duas vogais adjacentes?*

Este problema pode ser resolvido por um esquema gráfico e algébrico. Parte de uma representação gráfica que o transforma em outros dois, equivalentes:

Considere o esquema gráfico: __B__L__G__R__

a) De quantos modos pode-se colocar as vogais U, A, O nos 5 espaços da figura?

b) Para cada posição das letras UAO, de quantos modos pode-se permutar as letras BLGR?

Estes problemas foram resolvidos por esquema verbal, numérico, algébrico e gráfico.

Este exemplo não pode ser classificado como um problema clássico de Combinação, de Permutação ou de Arranjo, Permutação ou Combinação, pois mobiliza os três conceitos. O problema a) pode ser resolvido com cálculo de Combinação seguido por cálculo de Permutação $C_{5,3} \cdot P_3$; o problema b) é um problema de Permutação. Este é um bom exemplo das limitações da classificação clássica dos problemas.

Os esquemas encontrados, nessa análise, dão sentido combinatório aos seguintes conceitos:

1) Conjunto universo; subconjunto; agrupamento; cardinal; produto cartesiano; *n*-upla; cardinal do produto cartesiano de conjuntos; Princípio Fundamental da Contagem; multiplicação.

2) Contagem; escolha/decisão; decisões sucessivas; Princípio Fundamental da Contagem; multiplicação;

3) Casos independentes; conjuntos disjuntos; Princípio da Adição; adição;

4) Princípio da interseção de conjuntos; subtração;

5) Agrupamentos ordenados ou não ordenados; agrupamentos com ou sem repetição de objetos; contagem repetida de agrupamentos; divisão; arranjo (não aparece em Lima et al (2006), mas é conceito presente em todas as outras obras consultadas).

6) Ordem; *n*-upla; fatorial; permutação; permutação com repetição;

7) Agrupamento não ordenado; combinação;

8) Escolha; combinação;

9) Seleção; distribuição; partição.

Sentido da Combinatória neste trabalho.

Pode-se encontrar o sentido da Combinatória, adotado neste trabalho, nos esquemas analisados.

A Combinatória que está sendo estudada, neste trabalho, consiste nos problemas de contagem de agrupamentos formados, a partir de um conjunto de objetos dado, seguindo certos critérios. O conjunto original pode ser denominado conjunto universo, mas, num mesmo problema pode ser necessário definir diferentes conjuntos universo ou ele pode não estar explícito. A contagem é resultado da multiplicação do número de decisões sucessivas. Se, na formação dos agrupamentos, for necessário dividi-los em conjuntos disjuntos, casos com propriedades diferentes, a adição é a operação necessária para contar estes casos independentes. A subtração retira da contagem final o resultado de casos indesejáveis. A divisão é utilizada, na contagem de agrupamentos, quando o conjunto de todos os agrupamentos possíveis de formar, mostra que há repetição de agrupamentos. Se cada agrupamento deste conjunto se repete x vezes, o cardinal do conjunto é dividido por x, para obter a contagem final.

Os agrupamentos podem ser ordenados ou não ordenados. Agrupamentos formados apenas com mudança da estrutura do conjunto universo são denominados permutações. Uma permutação é um agrupamento ordenado. Se o cardinal do conjunto universo é n, a contagem do número de permutações dos n objetos é calculada por $n! = n \cdot (n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$. As combinações são agrupamentos não ordenados, com p elementos, selecionados num conjunto de $n>p$ elementos, formados com a mudança de composição do conjunto original. O problema de seleção de p entre n objetos é equivalente ao problema da partição dos n objetos em um grupo de p objetos, que são os selecionados, e um grupo de $n - p$ objetos, que são os não selecionados. Quando, na contagem, cada agrupamento se repete x vezes, então o número total de permutações obtido inicialmente deve ser dividido por x.

2.1.4 Porque o conceito de conjunto universo?

O conjunto universo é o conjunto de objetos que vão formar os agrupamentos desejados. Em algumas definições de Combinatória, não é dada ênfase a este conceito. Parece que o mais importante é o significado operacional: colocar, ordenar, escolher, misturar, combinar, enumerar.

Combinatória é o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos

Combinatória é a arte de enumerar todas as maneiras possíveis em que um dado número de objetos podem ser misturados e combinados de tal modo que nenhum seja esquecido.

Mas, para resolver problemas, é crucial identificar o conjunto de origem destes objetos.

Vazquez e Noguti (2004, p. 4) salientam a "coleção" inicial, ao definir combinatória como "*estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção" (*VAZQUEZ e NOGUTI, 2004, p. 4).

Batanero et al (1997) priorizam o conjunto universo, quando dizem que a Combinatória é o estudo dos conjuntos discretos e das configurações (agrupamentos) que se podem obter a partir de seus elementos mediante certas transformações que originam mudanças na sua estrutura (permutação) ou na sua composição (arranjo, combinação). Nos modelos de problemas definidos pelos autores, fica claro que o ponto de partida é o conjunto universo.

Os problemas exemplares analisados evocam esquemas que dão sentido a este conceito de Combinatória. Assim, também, dão significado ao conceito de conjunto universo, sobre o qual se opera, e que pode não ser único ou não estar explícito.

Exemplos:

Quantos são os números pares de três dígitos distintos?

Este problema pede para selecionar é contar um subconjunto do conjunto de algarismos {0,1,2,...9}.

Conjunto universo = {0,1,2,...9}

De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 objetos e um de 3 objetos?

Este problema pede para criar uma partição de um conjunto de 8 objetos, em dois subconjuntos, com 5 e 3 objetos. Conjunto universo = {a,b,c,d,e,f,g,h}

Quantos são os anagramas da palavra "Búlgaro" que não possuem duas vogais adjacentes?

Este é o caso de um problema cujo conjunto universo não é único e que não está explícito.

Este problema pode ser resolvido a partir de outros dois, equivalentes:

Considere o esquema gráfico: __B__L__G__R__

a) de quantos modos pode-se colocar as vogais U, A, O nos 5 espaços da figura?

Este problema pede para dividir um conjunto de 3 objetos, em 5 vagas. Isto significa escolher e ordenar 3 vagas entre as 5 dadas. Pode-se pensar que o conjunto universo é o conjunto das vagas.

b) *para cada posição das letras UAO, de quantos modos pode-se permutar as letras BLGR?*

Este problema pede para formar agrupamentos diferentes com as 4 letras. Não há mudança na composição deste conjunto, apenas na estrutura. O conjunto universo é o conjunto {*BLGR*}.

2.1.5 Qual o significado da multiplicação nos problemas de Combinatória?

Em Lima et al (2006, p. 85), o significado da multiplicação está no teorema-em-ação a respeito das escolhas sucessivas. *"se há x modos de tomar uma decisão D1 e, tomada a decisão D1, há y modos de tomar a decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é x.y".* Outros autores relacionam multiplicação com produto cartesiano de conjuntos.

Mas, ainda existe outro significado combinatório para a multiplicação. Esteves (2001) utiliza esquemas para resolver problemas que dão à multiplicação o sentido de "*correspondência um-para-muitos".* Ao resolver problemas de contagem, utilizam um esquema gráfico – o diagrama de árvore – associado a um esquema verbal: "*para cada objeto deste tipo existem n objetos do outro tipo*".

Essa expressão refere-se à "*correspondência um-para-muitos*", que é fundamental no conceito de multiplicação.

Por exemplo, pode-se aplicar esta ideia no problema de Lima et al (2006) de formar casais, com 5 homens e 5 mulheres: num diagrama de árvore, para cada homem existem 5 mulheres. Ou seja, ao se buscar o conjunto dos casais, tem-se que cada homem corresponde a 5 casais. Mas no conjunto dos homens, existem 5 elementos. Logo para 5 homens, pode-se formar 25 casais.

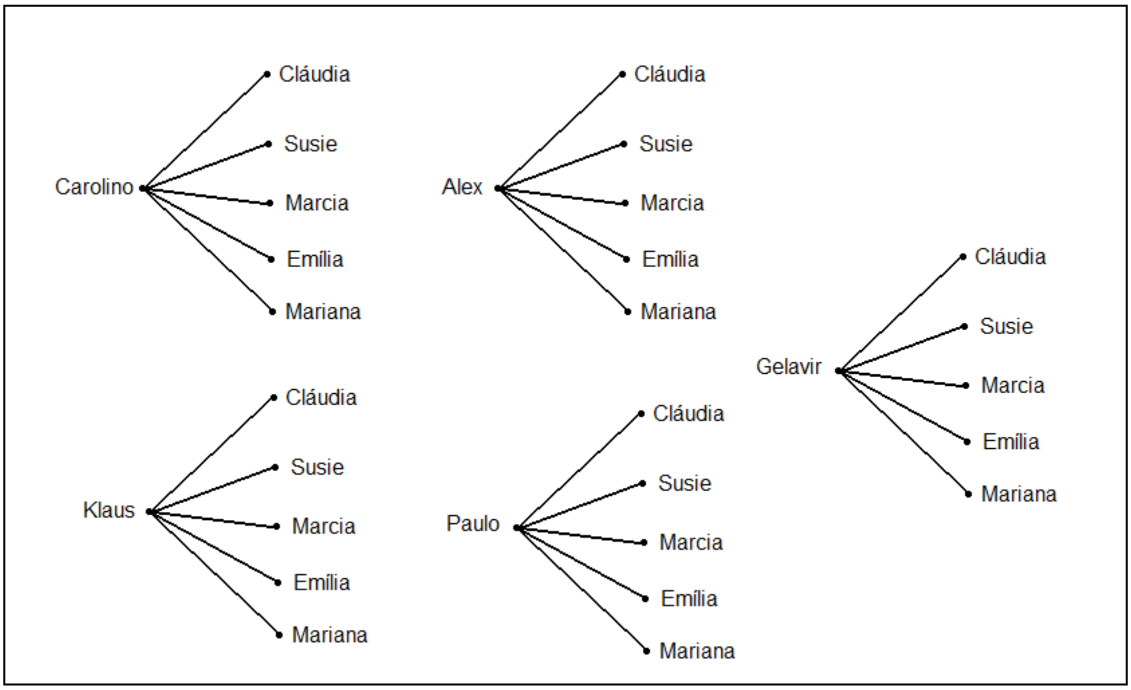


Figura 1 – Correspondências Um-para-muitos

Para Nunes e Bryant (1997), a situação de *correspondência-um-para-muitos* é uma das principais situações multiplicativas. Nessas situações, os números podem ter significados de proporção e de fator escalar. O conceito de proporção é representado por um par de números que permanece invariável em uma situação, até mesmo quando há mudança no tamanho do conjunto. A proporção é uma relação entre conjuntos e não entre números.

No caso "*para cada homem correspondem 5 casais*", o número 5 é o cardinal de um conjunto e é dado. A proporção entre o conjunto de homens e o conjunto de casais é (1:5). Mas se o conjunto dos homens tem cardinal 5, então o conjunto de casais tem cardinal 5x5 = 25. A proporção se mantém (5:25).

2.1.6 Qual o significado da divisão na Combinatória?

Nos problemas já vistos, o sentido da divisão está nos esquemas verbais: *resultados de diferentes contagens são divididos, para evitar a repetição de agrupamentos, no resultado final*.

Esta repetição de agrupamentos pode ocorrer porque o interesse é contar agrupamentos não ordenados e aqueles que diferem apenas pela ordem aparecem muitas vezes (por exemplo, as combinações); ou porque agrupamentos com objetos repetidos são contados várias vezes (por exemplo, as permutações com repetição); ou por outros motivos, como nas permutações circulares.

Cemin (2008) desenvolveu um trabalho neste tema, com enfoque no significado da divisão, na Combinatória. A autora estudou a teoria de Vergnaud, onde encontrou a noção de divisão por quotas, que pode ser base do sentido combinatório da divisão. Nos problemas de divisão por quotas, tem-se uma quantidade inicial que será dividida em quotas já estabelecidas (tamanho das partes). Por exemplo*: Se você tem 20 laranjas e as coloca em pacotes diferentes, cada um com 5 laranjas, quantos pacotes você vai utilizar?* A solução é o quociente que dá o número de quotas (pacotes) em que iremos acomodar as partes.

Segundo Cemin (2008), alguns problemas de combinatória podem ser resolvidos num esquema que inclui esta ideia de divisão por quotas. O esquema consiste em calcular todos os agrupamentos desejados possíveis, identificar agrupamentos equivalentes, encontrar e contar o número de agrupamentos equivalentes (pertencentes a uma mesma classe de equivalência) e dividir o número total de agrupamentos pelo número de elementos em cada classe (divisão por quotas).

O interesse no conceito de classe de equivalência de agrupamentos está nos problemas que envolvem classes de agrupamentos que não podem ser contados um a um, por outros motivos, que não sejam ordem, repetição de objetos ou objetos em círculo, como no exemplo seguinte, na Figura 2.

Exemplo 2.7:

- Quantos anagramas diferentes podem se formar, a partir da palavra BAIO, de tal modo que as vogais AIO permaneçam nesta ordem?
- Número de todas as permutações possíveis: 4! = 24
- A palavra BAIO entra na contagem, representa e gera uma classe de objetos que não entram. A classe é formada a partir das permutações das vogais A, I, O, mantendo B na primeira posição.
- Cada classe assim formada tem 3! = 6 elementos.
- Resultado: existem apenas 4 anagramas nas condições do problema.
- Pode-se mostrar com uma tabela.
- Na primeira linha estão os anagramas que podem ser contados, pois obedecem às condições do problema. Cada um deles encabeça uma coluna formada pelos objetos da classe que ele representa: objetos que não podem entrar na contagem.

CLASSE 1	*CLASSE 2*	*CLASSE 3*	*CLASSE 4*
BAIO	***ABIO***	***AIBO***	***AIOB***
BAOI	*ABOI*	*AOBI*	*AOIB*
BIAO	*IBOA*	*IOBA*	*IOAB*
BOIA	*OBIA*	*OIBA*	*OIAB*
BIOA	*IBOA*	*IOBA*	*IOAB*
BOAI	*OBAI*	*OABI*	*OAIB*

Figura 2 – Exemplo que Envolve Classes de Agrupamentos em Cemin (2008, p. 93)

Este esquema pode ser usado nos problemas clássicos de combinação e permutação (Cemin, 2008, p. 81-83).

As situações que envolvem agrupamentos não ordenados, agrupamentos com repetição de objetos, permutação circular, ou agrupamentos que pertencem a uma mesma classe de equivalência dão sentido à divisão. Podem evocar esquemas que atribuem à divisão, na Combinatória, o significado de divisão por quotas.

2.1.7 Qual é o significado combinatório das operações aritméticas?

A multiplicação, nas questões de Combinatória, faz parte do Princípio Fundamental da Contagem: *se há x modos de tomar uma decisão D1 e, tomada a decisão D1, há y modos de tomar a decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é* $x \cdot y$. Ou, na linguagem dos conjuntos: *se o conjunto A tem cardinalidade x e o conjunto B tem cardinalidade y, então o produto cartesiano AxB tem cardinalidade* $x \cdot y$. Ou seja, problemas que exigem decisões sucessivas podem ser vistos como problemas de produto cartesiano.

A adição é denominada Princípio Aditivo: *se A e B são conjuntos disjuntos, com cardinalidade p e q, respectivamente, então a cardinalidade de AUB é* $p+q$. Ou seja, a contagem, nos problemas que podem ser divididos em casos independentes, é resultado da soma das contagens de cada caso.

Nesta pesquisa, o interesse está no significado atribuído às quatro operações aritméticas por esquemas que são resumidos a seguir:

- Multiplicação: adquire significado quando o esquema de resolução do problema consiste em contar agrupamentos constituídos por partes dependentes entre si, de tal modo que, para cada objeto de uma parte, existem *n* na outra; o significado é verbalizado na relação “um-para-muitos” e é representado no diagrama de árvore;
- Divisão: adquire significado quando o esquema de resolução do problema consiste em contar agrupamentos que podem estar se repetindo; este esquema conta não os agrupamentos, mas, sim, as classes de equivalência de agrupamentos; as classes podem ser formadas por agrupamentos que diferem apenas pela ordem ou pela repetição de objetos, mas também há outras formas de equivalência; operação que tem o significado de “divisão por quotas”;
- Adição: adquire significado quando o esquema de resolução do problema consiste em contar os cardinais de conjuntos disjuntos de agrupamentos;

- Subtração: adquire significado quando o esquema de resolução do problema consiste em excluir, do resultado da contagem, o cardinal da interseção de dois conjuntos de agrupamentos ou os valores relativos a contagem de agrupamentos que não podem ser incluídos no problema.

  Com relação à subtração, tem-se a seguinte proposição. *Se A e B não são disjuntos o cardinal (card) resulta: card(AUB) = card A + card B – card (A∩B).*

2.1.8 Conclusões da análise epistemológica

Concluindo, esta etapa de estudo permitiu escolher caminhos para a pesquisa.

- Define-se Combinatória como Vazquez e Noguti (2004): o estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção.
- A coleção inicial de objetos é o conjunto universo.
- Um agrupamento é um subconjunto (se não for ordenado) ou uma *n*-upla (se for ordenado) de objetos formados a partir do conjunto universo.
- Em Combinatória, contagem dos agrupamentos consiste em atribuir um numeral cardinal ao conjunto formado por todos os agrupamentos possíveis de serem formados, a partir dos objetos do conjunto universo, segundo determinados critérios.
- A Combinatória a ser ensinada na escola pode ser vista não como um "conteúdo", mas, sim, como um conjunto de situações/problemas que exigem o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Do ponto de vista de Vergnaud, raciocínio combinatório pode ser visto como uma coleção de esquemas ou competências para dar conta de qualquer problema de Combinatória.
- A Combinatória é um Campo Conceitual, pertencente à interseção dos campos multiplicativo M e aditivo A (M∩A), e relacionado com os campos conceituais da Teoria das Probabilidades, também, parcialmente pertencente a M∩A, e da Teoria dos Conjuntos.
- A Combinatória pode ser vista como um campo conceitual, cujos conceitos são: conjunto universo; subconjunto; agrupamento; cardinal; contagem; escolha/decisão; multiplicação; divisão; adição; subtração; arranjo; combinação; permutação; repetição; ordem.
- Os problemas exemplares de Combinatória podem ser classificados em: produto cartesiano, seleção, divisão, partição.

- Os esquemas de resolução podem ser: verbais, numéricos, gráficos, algébricos, tabulares.

A relação entre situações/problemas, conceitos e esquemas, encontrados nas análises desta pesquisa, estão na Tabela 1:

Situações	Conceitos	Esquemas (e representações)
1. Produto cartesiano 2. Permutação 3. Seleção 4. Divisão 5. Partição 6. Problemas básicos de Arranjo e Combinação	1) Conjunto universo; subconjunto; agrupamento; cardinal; produto cartesiano; *n*-upla; cardinal do produto cartesiano de conjuntos; Princípio Fundamental da Contagem; multiplicação; 2) Contagem; escolha/decisão; decisões sucessivas; Princípio Fundamental da Contagem; multiplicação; 3) Casos independentes; conjuntos disjuntos; Princípio da Adição; adição; 4) Princípio da interseção de conjuntos; subtração; 5) Agrupamentos ordenados ou não ordenados; agrupamentos com ou sem repetição de objetos; contagem repetida de agrupamentos; divisão; 6) Ordem; *n*-upla; fatorial; permutação; permutação com repetição; 7) Agrupamento não ordenado; combinação; 8) Escolha; combinação; 9) Seleção; distribuição; partição.	Esquema verbal Esquema numérico (operações numéricas) Esquema simbólico (símbolos da Teoria dos Conjuntos, fatorial) Esquema algébrico (fórmulas) Esquema gráfico (representação gráfica para transformar o problema em outro, facilitando a compreensão) Esquema tabular (para identificar as classes de equivalência) Esquema da listagem dos agrupamentos com contagem direta

Tabela 1 – Situações, Conceitos e Esquemas Encontrados nos Problemas Exemplares

- O significado da multiplicação está no princípio das escolhas sucessivas; no produto cartesiano de conjuntos e na *correspondência um-para-muitos*; o significado da divisão está nos problemas que, na contagem de agrupamentos, envolvem agrupamentos repetidos; a repetição pode ocorrer porque a ordem dos objetos não importa, ou porque há objetos repetidos, ou porque se trata de permutação circular, ou porque é possível identificar agrupamentos que pertencem a uma mesma classe de equivalência.
- Na história da Matemática, os jogos mais tradicionais, de cartas, roleta ou dados, estão entrelaçados com o desenvolvimento da Combinatória e da Teoria das Probabilidades sendo, portanto, situações interessantes com potencial para gerarem problemas combinatórios de diferentes tipos.

  Decidiu-se adotar as seguintes definições e simbologias: *Combinação:* agrupamentos não ordenados de *p* objetos selecionados num conjunto de *n* objetos; símbolo $C_{n,p}$; *Permutação:* ordenações diferentes de *n* objetos, símbolo P_n*; Arranjo:* agrupamentos ordenados de *p* objetos selecionados num conjunto de *n* objetos; símbolo $A_{n,p}$

2.2 DIMENSÃO DIDÁTICA, ASSOCIADA ÀS CARACTERÍSTICAS DO FUNCIONAMENTO DO SISTEMA DE ENSINO

A análise didática a respeito da Combinatória já foi desenvolvida por vários autores, encontrados numa ampla revisão bibliográfica. Nas obras de Borba e Pessoa (2009), Almeida (2010), Sabo (2010) e Souza (2010) encontram-se críticas ao ensino usual da Combinatória, que se desenvolve a partir de fórmulas ou problemas padrão.

Como ocorre o ensino tradicional e quais são as propostas de mudança?

Souza (2010) resume o ensino tradicional de Combinatória e seus efeitos:

> *Em geral, numa aula tradicional, onde as fórmulas já foram apresentadas, os alunos procuram identificar, entre elas, aquela que acreditam ser mais conveniente para arranjo, ou permutação ou combinação, com o objetivo de poder resolver um problema. Isso ocorre por eles não terem participado da construção desses conceitos e apenas os usam para resolver o problema mecanicamente*. (SOUZA, 2010, p.74).

A autora sugere que o professor explore, com o aluno, os Princípios Multiplicativo e Aditivo (multiplicação e adição), de modo intuitivo, descrevendo e exemplificando os casos possíveis, formando agrupamentos e contando-os, utilizando diferentes técnicas de contagem e diferentes formas de representação, com ênfase ao diagrama de árvore ou a construção de tabelas de dupla entrada, para auxiliar na compreensão da multiplicação e da divisão. A sistematização dos conceitos de arranjo, permutação e combinação pode ficar para o fim do processo.

> *Os problemas iniciais devem ser elaborados com poucos elementos, através da solução intuitiva e da contagem direta, para destacar quantas e quais são as possibilidades nesse tipo de abordagem. Os alunos poderão observar que a contagem direta é impraticável na maioria dos casos e constatarão que é preciso perceber certas regularidades para desenvolverem técnicas de contagem apropriadas, que generalizem as soluções. Eles perceberão que, ao contar ou fazer os agrupamentos através das técnicas de contagem, estes se diferenciam pela ordem e/ou natureza dos elementos dados no problema*. (SOUZA, 2010, p. 75).

Nesta perspectiva, Borba e Pessoa (2009) alertam para conceitos e fórmulas que podem favorecer o erro do aluno e sugerem que uma boa estratégia de ensino seria não antecipá-los:

> *Na escola, os alunos, sobretudo os do Ensino Médio, nível em que a maior parte desses tipos de problemas é trabalhada formalmente, podem errar na resolução de problemas de raciocínio combinatório, por seguirem pistas semânticas. Eles podem, muitas vezes orientados por palavras-chave, buscar descobrir qual tipo de fórmula deve ser usada para resolver o problema: combinação, arranjo ou permutação. Alunos de anos escolares anteriores não têm conhecimento dessas fórmulas e, portanto, não poderão recorrer a elas para solucionar os problemas.* (BORBA & PESSOA, 2009, p. 117).

Sabo (2010) investigou os saberes sobre Combinatória dos professores de Matemática e concluiu que poucos valorizam o Princípio Multiplicativo, enquanto outros, que optam pelo uso de fórmulas, demonstram não saber justificá-las. Os professores parecem não ter contato com as orientações educacionais para Ensino Médio e com a produção acadêmica em Educação Matemática, documentos que enfatizam a necessidade de deixar as fórmulas surgirem como consequência do raciocínio.

Um quadro elaborado por Esteves (2001, p. 53) permite comparar o ensino usual com as tendências atuais, expressas na Proposta Curricular.

PROPOSTA CURRICULAR	LIVROS DIDÁTICOS
PROBLEMAS DE CONTAGEM PARA SEREM RESOLVIDOS INTUITIVAMENTE	FATORIAL
SISTEMATIZAÇÃO DA CONTAGEM, ATRAVÉS DE DIAGRAMAS, ÁRVORES E QUADROS PARA A DESCRIÇÃO DOS ACONTECIMENTOS	PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO
PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO	ARRANJO SIMPLES
ÁRVORE DE POSSIBILIDADES EM CASOS ONDE NÃO É APLICÁVEL O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO	COMBINAÇÃO SIMPLES
ARRANJOS COM REPETIÇÃO	ARRANJO COM REPETIÇÃO
ARRANJOS SIMPLES	PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO
FATORIAL	EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES
PERMUTAÇÃO SIMPLES	
COMBINAÇÃO SIMPLES	

Tabela 2.2: Comparação das seqüências adotadas pela proposta curricular e os livros didáticos.

Figura 3 – Quadro Elaborado por Esteves (2001, p. 53)

Quais as sugestões para o ensino da multiplicação e da divisão?

Esteves (2001) desenvolve uma engenharia didática com uma proposta de ensino adequada: iniciar com problemas e formalizar os conceitos de arranjo, permutação e combinação ao final. Com relação ao conceito de multiplicação, a autora relaciona-o com a noção de "um para muitos"; o sentido do conceito de divisão está em problemas de permutação com repetição (contam-se várias vezes agrupamentos iguais, porque há letras/objetos iguais) e de combinação (contam-se várias vezes agrupamentos iguais, porque a ordem dos objetos não importa).

Cemin (2008) enfoca os problemas que exigem divisão.

A autora fez uma análise em livros didáticos, buscando o sentido dado à operação de divisão. Percebeu que, em geral, o autor explica que: é necessário dividir quando a ordem dos elementos não é importante. Há um argumento padrão: a divisão é feita porque, quando a ordem não importa, agrupamentos iguais são contados K vezes, sendo K o número que resulta da permutação dos objetos de cada agrupamento.

Mas, existem problemas em que é necessário recorrer à ideia de classes de equivalência.

Exemplo 6 da página 30:

> *Quantas são as permutações dos números (1, 2, ..., 10) nas quais o 5 está situado à direita do2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?*

Solução dos autores:

> *Há 10! permutações, que se dividem em 3! = 6 classes, conforme a ordem em que se apresentam os algarismos 2, 3 e 5, uma das quais é a classe correspondente à ordem desejada, 253.* ***Como as classes são de igual tamanho, há, em cada uma delas, 1/6 do total de permutações.***
> *A resposta é 10! ÷ 6 = 604.800. (MORGADO et al, 2006, apud CEMIN, 2008, p. 202).*

Conforme Cemin (2008), este é um exemplo de problema que exige divisão e em que não cabe o argumento padrão. Não se pode dizer que a divisão é feita porque a ordem entre os objetos, em cada agrupamento, não importa; ao contrário, como destacam os autores, quando explicam que a divisão por 6 ocorre porque existem "*6 classes*" obtidas conforme a ordem em que os algarismos se apresentam.

> *A divisão por 6 ocorre porque existem '6 classes', conforme a ordem em que se apresentam os algarismos 2, 3 e 5, uma das quais é a classe correspondente à ordem desejada, 253. Como as classes são de igual tamanho, há, em cada uma delas, 1/6 do total de permutações. Isto é, em cada classe os elementos são distintos, mas apenas um deles pode ser computado no cálculo. (MORGADO et al, 2006, apud CEMIN, 2008, p. 23).*

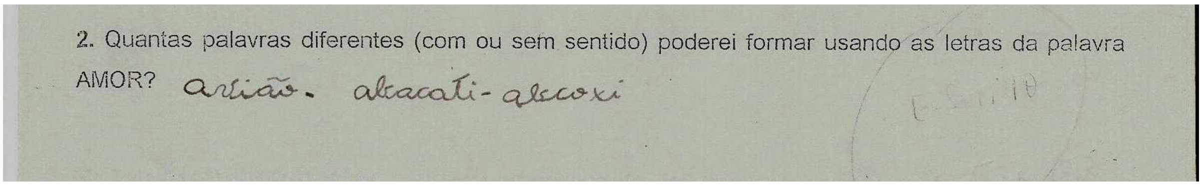
Pode-se ver que o autor indica que a divisão (por 6) corresponde ao raciocínio de divisão por quotas, já expresso na Análise Epistemológica anterior.

Quais são as representações usuais utilizadas na resolução de problemas?

Muitos autores enfatizam que existem diferentes formas de representação, na resolução de problemas de Combinatória, que deveriam ser incentivadas.

Borba e Pessoa (2009, p. 134) apresentam soluções dadas por crianças de 1ª a 4ª séries, na forma de listagem, quando o aluno desenha ou escreve as possibilidades de agrupamentos, muitas vezes sem o esgotamento de todas.

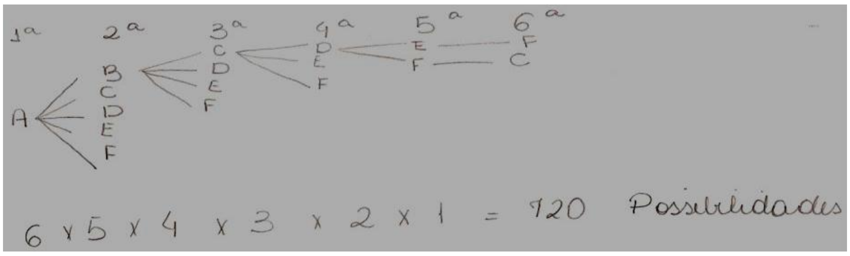
Exemplo 2.10:


2. Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra AMOR?

Almeida e Ferreira (2008, p. 15), entre outros, dão exemplos de problemas resolvidos com o diagrama de árvore.

Exemplo 2.11:

"De quantas formas diferentes 6 pessoas podem formar uma fila?"



Nesta resolução, apresentada por um grupo de estudantes, apenas parte da árvore de possibilidades foi construída. Os alunos verificaram que se o primeiro lugar for ocupado pela pessoa A, existem cinco opções de escolha para o segundo lugar, quatro para o terceiro e assim sucessivamente. Dessa forma, inferiram que o mesmo ocorre quando a primeira pessoa escolhida é B ou C ou D ou E ou F.

Vazquez e Noguti (2004, p. 8) propõem o problema seguinte.

Exemplo 2.12: "*Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?*".

E sugerem um esquema gráfico para auxiliar a multiplicação:

Representemos um número de três algarismos, arbitrário, pelos três quadros seguintes:

$$\boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$$

Ora, o primeiro número pode ser escolhido de 6 maneiras diferentes; em seguida, o segundo número pode ser escolhido de 5 maneiras diferentes e, por último, o terceiro número pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes. Assim temos:

$$\boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} = 120$$

Portanto, pelo princípio da multiplicação existem 6·5·4 = 120 possíveis

Esteves (2001, p. 86) propõe um problema e sugere três resoluções com diferentes representações.

Exemplo 2.13:

Existem dois modos de atingir a cidade Danone partindo da cidade Araguaia. Um deles é ir até a cidade intermediária Bananal e, de lá, atingir Danone e outro ir até a cidade Canavial e, de lá, chegar a Danone.

Existem 10 estradas ligando A a C; 12 ligando B a D; 5 ligando A a C; 8 ligando C a D; nenhuma entre B e C; e nenhuma entre A e D.

Partindo de A, quantos percursos diferentes podem ser feitos para chegar a D?

A autora sugere possíveis procedimentos de resolução (página 85)

A → C = 8 estradas; C → X = 5 estradas, logo temos 8 + 5 estradas para chegar a X.

A → B = 10 estradas; B → X = 12 estradas, logo temos 10 + 12 estradas para chegar a X.

Temos 13 possibilidades passando pela cidade C e mais 22 possibilidades passando pela cidade B, dando um total de 35 possibilidades. Esta resolução está errada.

Possíveis procedimentos de resolução

1ª) Para cada estrada que liga A e B, temos 12 possibilidades para chegar a cidade X.

Como são 10 estradas ligando A e B, então temos 10 x *12 possibilidades, saindo de A passando por B e chegando a X.*

Temos um raciocínio análogo para sair de A, passar por C e chegar a X. Então, temos 58 possibilidades. Somando os dois resultados, temos o número de percursos diferentes que podem ser feitos para atingir X pela primeira vez, partindo de A.

(10 x *12) + (5* x *8) = 120 + 40 = 160.*

2ª) Através do esquema

A		B		
10	X	12	=	120
A		C		
8	X	5	=	40

Portanto, 120 + 40 = 160

3ª) Usando a fórmula

$C_{10,1}$ x $C_{12,1}$ + $C_{5,1}$ x $C_{8,1}$ =

*[10! : (9!*x*1!)]*x*[12! : (11!*x*1!)] + [5! : (4!*x*1!)*x*[8! : (7!*x*1!) =*

*10*x*12 + 5*x*8 = 120 +40 = 160.*

Resposta: Podem ser feitos 160 percursos diferentes para atingir A.

Cemin (2008, p. 93) resolve problemas com auxílio de representação tabular para listar os agrupamentos desejados.

Pode-se, então, fazer um primeiro resumo das representações usuais na resolução de problemas de Combinatória: listagem dos agrupamentos, escrevendo, desenhando ou usando símbolos; listagem tabular; diagrama de árvore; esquemas gráficos variados; representação numérica utilizando as quatro operações; representação algébrica por fórmulas.

O que é dito sobre jogos no ensino?

A produção em Educação Matemática é unânime com relação à necessidade de buscar e implementar novas propostas de ensino baseados na resolução de problemas, muitos deles com origem em jogos.

Já, há vinte anos, Moura (1992) lembrava que, ao optar pelo jogo como estratégia de ensino, o professor o faz com uma intenção: propiciar a aprendizagem. E ao fazer isto, tem como propósito o ensino de um conteúdo ou de uma habilidade. Dessa forma, o jogo escolhido deverá permitir o cumprimento deste objetivo.

Também focalizando o uso de jogos no ensino, Fiorentini e Miorim (1990) alertam para as reflexões do professor, necessárias para planejar o uso de jogos:

> *O professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem dessa disciplina. (*FIORENTINI & MIORIM, 1990, p. 6*).*

Para os autores, o jogo deve ser escolhido pensando em ensinar e no direito do aluno a aprender de modo significativo, possibilitando atividades em que o aluno participe raciocinando, compreendendo. Nessa perspectiva, muitas vezes, o melhor recurso pode ser envolver o aluno na construção de um material, do que apresentá-lo já pronto, como construção do professor.

Silva e Kodama (2004) sugerem que o uso de jogos para o ensino representa, em sua essência, uma mudança de postura do professor em relação ao o que é ensinar matemática. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades, num convívio baseado na interação constante e no trabalho em grupo. Os autores advertem, porém, que o professor precisa estudar previamente cada jogo, o que só é possível jogando. Somente a partir de suas próprias jogadas e da reflexão sobre seus erros e acertos é que o professor terá condições de colocar questões que irão auxiliar seus alunos, tendo noção das dificuldades que irão encontrar.

Carvalho (2009) desenvolveu, no Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, um trabalho com este tema: jogos no ensino da Combinatória. Aplicou quatro jogos encontrados na literatura já existente, produzidos e já experimentados por outros professores, com uma turma de 8º ano do ensino fundamental do Colégio Militar de Porto Alegre. Ao término dessa pesquisa, concluiu que:

> *O conjunto das diversas situações dos jogos ampliou o leque de representações de contagem e que o ambiente de sala de aula se tornou mais sociável, à medida que os alunos se integravam para um objetivo comum.* (p. 8).

Carvalho (2009), Lopes (2007), Lopes e Rezende (2010), Silva e Kodama (2010), entre outros, propõem aos alunos atividades com jogos construídos intencionalmente para favorecer o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Os autores mostram, em seus trabalhos, a mesma organização para a sala de aula: ao início de cada encontro, faz-se a apresentação de um jogo e a discussão das regras, com suas peculiaridades, em grande grupo; após, os alunos em duplas ou grupos menores, são convidados a jogar; ao final, propõem um questionário, com questões sobre o jogo, que exigem o pensamento combinatório.

O jogo de Adivinhação de Senhas elaborado por João Vitor Teodoro, José Marcos Lopes (Campus de Ilha Solteira, Faculdade de Engenharia – Licenciatura em Matemática, BAAE I/UNESP) desenvolve conceitos básicos de combinatória.

O jogo[4] consiste na adivinhação da senha de um cofre, gerada aleatoriamente pelo computador. A senha deve conter somente os dígitos 1, 3, 5, 7 e 9 e deve ser jogado por um único jogador por vez, que pré-definirá informações como: quantos dígitos terá a senha (existe a opção de escolher entre dois e cinco dígitos) e se poderá ocorrer ou não repetições dos dígitos.

Após cada jogada o computador avisa se o jogador acertou o dígito em seu lugar correto (sinal verde), se acertou o dígito, porém em posição errada (sinal amarelo) ou se o dígito não está presente na senha (sinal vermelho). Dessa forma, o jogador poderá obter informações que o ajudarão nas próximas jogadas. O jogador terá um máximo de 5 jogadas para acertar a senha. Caso contrário, o computador vence.

O Jogo do Quadrado, elaborado por Josiane de Carvalho Rezende, Jose Marcos Lopes e João Vitor Teodoro (Depto. de Matemática, FEIS, UNESP, Ilha Solteira, SP) destina-se a desenvolver conceitos de raciocínio lógico e de cálculo de probabilidades.

---

[4] Este jogo encontra-se no site: http://prope.unesp.br/xxi_cic/27_35089297878.pdf

O Jogo do Quadrado utiliza o mesmo tabuleiro do Jogo da Velha. Os movimentos e as capturas de suas peças possuem algumas semelhanças com as peças Peão e Torre do jogo de xadrez. Descrevemos a seguir os materiais necessários, o objetivo e as regras do jogo.

Material: Tabuleiro 3x3 e duas peças distintas, uma para cada jogador.

Início do jogo: O jogo é disputado por dois jogadores, cada qual tem apenas uma peça. O Jogador 1 coloca a sua peça na extremidade esquerda inferior do tabuleiro e o Jogador 2 coloca a sua peça na extremidade direita superior do tabuleiro. O jogo é iniciado pelo Jogador 1, o qual é escolhido através de sorteio.

Objetivo: Eliminar a peça ou chegar ao ponto de partida de seu adversário.

Regras: Não pode voltar ao ponto de partida; é permitida a eliminação da peça do adversário somente na diagonal e as peças se movem apenas uma casa na vertical ou uma casa na horizontal. A eliminação da peça adversária, tal como a ocupação do ponto de partida do adversário, serão obrigatórias quando for a ocasião.

Número de movimentos: O número máximo de movimentos permitido para as peças é de 8 (oito). Quando ocorrerem 8 movimentos das peças e não finalizar o jogo, define-se um empate, mesmo que no nono movimento haja vencedor, somente vale o resultado do oitavo movimento.

Na revisão bibliográfica, não foram encontradas experiências didáticas com jogos de cartas tradicionais, já conhecidos dos alunos. No entanto, existem, problemas combinatórios clássicos do tipo Arranjo e Combinação, envolvendo cálculos simples de probabilidades, para o jogo de pôquer (Morgado et al, 2006; Rodrigues, 2004). Nos problemas propostos por Morgado et al (2006, p. 36-37) o baralho de pôquer tem 32 cartas.

Conclusões da Análise Didática.

Concluindo, o estudo permitiu escolher rumos para esta pesquisa:

a) Uma estratégia para favorecer o desenvolvimento do raciocínio combinatório é propor problemas que podem ser resolvidos de modo intuitivo, exemplificando os casos possíveis de agrupamento, formando agrupamentos e contando-os; utilizando diferentes representações; utilizando diferentes conceitos; dando ênfase para esquemas que atribuam significados à multiplicação e à divisão.
b) A sistematização dos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação pode ficar para o fim do processo.
c) Um jogo pode ser percebido como uma situação geradora de problemas;
d) Diferentemente do modo que outros pesquisadores fizeram, parece uma boa alternativa partir de um jogo tradicional, como o pôquer, não construído intencionalmente pelo professor, e dar espaço para que os alunos construam um jogo com uma lógica semelhante (um mini pôquer).

e) Segundo Vergnaud, uma situação complexa pode ser vista como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias. Neste caso, cabe analisar o potencial do pôquer para ensinar e aprender Combinatória: quais são os problemas gerados pelo pôquer? Quais os esquemas que podem ser úteis para resolvê-los? A quais conceitos estes problemas dão sentido? Isto será feito no Capítulo III.

2.3 DIMENSÃO COGNITIVA, ASSOCIADA ÀS CARACTERÍSTICAS DO PÚBLICO AO QUAL SE DIRIGE O ENSINO.

Diferentes autores (Esteves, 2001; Almeida, 2010) constatam, em suas pesquisas, a dificuldade de alunos (e de professores), em todos os níveis, para resolver problemas de Combinatória.

Quais são as dificuldades dos alunos, ao resolver problemas de Combinatória?

Um estudo realizado em Portugal, com alunos de uma turma do 9º ano, objetivou avaliar o potencial das estratégias intuitivas de resolução de problemas de combinatória. Foram propostos problemas dos tipos permutação simples, arranjo com repetição, arranjo simples e combinação simples. A menor porcentagem de respostas corretas deu-se nos problemas de combinações. Eles afirmam, ainda, que quando aumenta o número de elementos envolvidos na operação, ocorre uma diminuição do número de respostas corretas. Foram identificados quatro tipos de estratégias utilizadas para resolver os problemas: a enumeração, o diagrama de árvore, o uso de fórmulas e as operações aritméticas utilizadas de forma isolada ou concomitantemente. O maior índice de acertos nas respostas para os problemas ocorreu quando as estratégias adotadas foram o diagrama de árvores e as operações ou quando era possível fazer a enumeração e contagem direta.

Dornelas (2004) desenvolveu pesquisa para avaliar o desempenho na resolução de problemas de combinatória, com alunos do 2º ano do Ensino Médio, identificando e listando os erros.

Podem-se resumir as dificuldades de aprendizagem: falta de compreensão do que é solicitado no problema; falta de compreensão do tipo de agrupamento que deve ser formado e contado; tentativa de contagem direta, listando os agrupamentos, mas não esgotando as possibilidades; desconhecimento do uso da multiplicação para contar agrupamentos (desconhecimento do Princípio Multiplicativo também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem); utilização incorreta da multiplicação; não atentar para o fato de que a ordem ou a repetição dos elementos nos agrupamentos a serem formados poderá produzir agrupamentos equivalentes; não questionar se existem agrupamentos equivalentes; não questionar sobre a necessidade de utilizar a divisão; só utilizar a divisão quando aplica as fórmulas de Combinação ou de Permutação com repetição; usar sempre fórmulas, muitas vezes de forma incorreta, por desconhecimento do seu significado; se houver compreensão da necessidade de utilizar divisão, fazê-lo muitas vezes de forma incorreta.

Com relação a esta última falha, é preciso destacar que, em alguns problemas a divisão deve ser feita mais de uma vez, para evitar a contagem repetida de agrupamentos distintos.

Exemplo:

De quantas maneiras pode-se dividir quatro meninos em duas equipes de dois meninos.

Resposta: $\frac{\frac{4x3}{2}}{2} = 3$

É fácil ver, com a listagem dos agrupamentos e contagem direta:

Meninos: A, B, C, D

Equipes: AB/CD; AC/BD; BC/AD

O cálculo $\frac{4x3}{2} = C_{4,2} = 6$ corresponde ao número de equipes com dois meninos que se pode formar com quatro meninos. Ao fazer o produto 4x3, está-se calculando todos os agrupamentos de 2 meninos, sem considerar a ordem nos grupos. Assim há grupos que se equivalem, como AB e BA que são contados duas vezes, daí a divisão por 2. Está-se contando as equipes:

AB	AC	AD	BC	BD	CD

O cálculo $\frac{\frac{4x3}{2}}{2} = 3$ corresponde ao número de maneiras de dividir quatro meninos em duas equipes de dois meninos. Antes de dividir, havia 6 equipes de dois e, para cada uma, havia uma equipe restante:

AB	AC	AD	BC	BD	CD
CD	BD	BC	DE	AC	AB

Observa-se a repetição das distribuições, por isso a necessidade de dividir por 2, obtendo o resultado correto: 3 maneiras

AB	AC	AD
CD	BD	BC

Conclusões parciais da análise cognitiva.

A partir desta revisão bibliográfica, percebem-se quais seriam as características de uma proposta didática em Combinatória, que respeite as questões cognitivas.

a) A proposta deveria iniciar com problemas, elaborados numa linha crescente de complexidade.
b) Os primeiros problemas diriam respeito a um conjunto universo com pequeno número de objetos, de tal modo que possam ser resolvidos com listagem e contagem direta dos agrupamentos.
c) A seguir, com números maiores de agrupamentos, os problemas exigiriam a multiplicação, que seria introduzida com auxílio do diagrama de árvore.
d) Problemas com divisão seriam introduzidos com auxílio de tabelas e da noção de classe de equivalência.
e) Ao final, o número de objetos do conjunto universo e o número de agrupamentos aumentariam e os problemas exigiriam multiplicação e divisão, com soluções numéricas e com utilização de produtos e quocientes. Os esquemas com listagem, contagem direta, diagramas de árvore e tabelas seriam insuficientes, mas seria desejável incentivar esquemas gráficos, por seu potencial na tradução e facilitação dos problemas.
f) Após a resolução de problemas, ali seriam buscados sentidos para os conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação.
g) Estes conceitos seriam introduzidos, definidos e suas fórmulas deduzidas, numa conclusão do trabalho.

2.4 COLETA DE DADOS: PROBLEMAS PRÉVIOS

Os dados coletados previamente, para análise, consistem nas respostas dadas por alunos do 2º ano, do ensino médio, a uma coleção de problemas propostos antes de contatos formais com a Combinatória. A coleta foi feita com uma turma completa, 42 alunos, divididos em grupos, no dia 05 de julho de 2012.

Como analisar os dados coletados?

Entre os objetivos desta pesquisa estão: identificar e descrever os esquemas dos alunos que fazem parte da investigação, antes do contato formal com a Combinatória, na resolução de problemas prévios e analisar a ampliação e a evolução destes esquemas, durante e após a engenharia didática.

Para isto, foi preciso decidir como descrever esquemas e como investigar a evolução dos esquemas; em outras palavras, como analisar com objetividade os dados coletados quando o sujeito está em ação. Observe que é diferente das análises dos problemas exemplares, quando eram buscados conceitos científicos e proposições válidas.

Segundo Vergnaud (1990, p. 15), um esquema é a organização invariante da conduta para uma classe de situações/problemas. A maioria dos pesquisadores que utiliza a teoria de Vergnaud, dá especial ênfase ao reconhecimento dos conhecimentos-em-ação: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação.

Um conceito-em-ação é, muitas vezes, implícito, não é necessariamente verdadeiro ou falso. São estes conceitos que permitem construir os teoremas-em-ação, proposições que podem ser verdadeiras ou falsas, construídas pelo sujeito na ação de resolver um problema. Existe relação estreita entre os conceitos e teoremas criados em ação. Os teoremas e os conceitos são invariantes operatórios, que dão significado aos conceitos.

No momento das análises prévias, considerando as resoluções dadas para diferentes tipos de problemas, buscou-se:

a) Descrever o esquema utilizado (incluindo operações e representações);

b) Identificar conceitos-em-ação e teoremas-em-ação;

c) Identificar as limitações dos esquemas;

d) Identificar situações para as quais os alunos têm esquemas previamente desenvolvidos e classe dos problemas que causam desestabilização.

Nas análises posteriores, busca-se comparar os esquemas desta coleta prévia com aqueles que foram identificados durante e após a engenharia didática, buscando sinais de ampliação e evolução.

Para criar uma estratégia de análise, foram buscados exemplos de situações/problemas analisados por outros autores, reescrevendo as análises num esquema mais sintético.

Nesta coleta de dados, seguindo Batanero (1997), foram consideradas variáveis presentes nos problemas. Os autores definem três modelos de problemas de Combinatória – seleção, partição e divisão – como fontes de dificuldades diferentes. Mas também se referem a outras variáveis que afetam as respostas dos alunos: as operações combinatórias (que podem ser resumidas às necessidades de multiplicar e dividir); os parâmetros envolvidos (números maiores ou menores de objetos em jogo).

Nesta linha, os problemas propostos foram classificados previamente como:

A) Problemas de Produto Cartesiano (que exigem multiplicação):

1) Com poucos objetos:

Mariana tem 3 saias e 2 blusas. De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir, usando uma peça de cada conjunto?

2) Com número maior de objetos:

Carolina tem 3 blusas, 2 pares de sapatos e 2 casacos. De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir, usando uma peça de cada conjunto.

B) Problemas de seleção que exigem multiplicação e divisão:

1) Com poucos objetos:

De quantas maneiras distintas, 4 amigos podem se cumprimentar?

2) Com número maior de objetos:

De quantas maneiras distintas, 6 amigos podem se cumprimentar?

C) Problema de partição (que exige multiplicação e divisão):

De quantas maneiras 6 alunos podem ser repartidos em 2 equipes contendo 3 alunos cada uma?

Não foram propostos problemas com repetição de objetos.

Nesta coleta de dados prévios, foi cometido um equívoco. Os problemas que deveriam se apresentar com número maior de objetos não continham números suficientemente grandes para impedir a tentativa de listagem e contagem direta. Com isto, faltam dados sobre esta dificuldade. O que os alunos responderiam se o problema seguinte fosse proposto: ***De quantas maneiras diferentes 100 pessoas podem se cumprimentar?*** Tem-se apenas uma aproximação da resposta, considerando o que foi possível observar: poucos resolveriam este problema porque a listagem de todos os agrupamentos não pode ser feita e porque nenhum utilizou divisão nos problemas propostos.

Resultados da análise

Pode-se observar:

1) O esquema predominante (que não consta no livro Lima et al (2006), pois não é considerado científico) é a tentativa de listar e contar os agrupamentos, o que acarreta erros, quando o número de objetos em jogo é maior e quando os agrupamentos são não ordenados;

2) Os problemas que exigem multiplicação com número pequeno de objetos são resolvidos com facilidade com o esquema da listagem. Os alunos demonstraram compreensão a respeito do que lhes foi pedido, dando exemplos de agrupamentos, listando e contando-os. A maioria, ao listar, esgotou as possibilidades;

3) Alguns alunos fazem inferências, fixando um objeto e percebendo quais e quantos agrupamentos estão vinculados a ele; logo em seguida generalizando o raciocínio para os demais e fazendo a contagem utilizando o princípio aditivo ou o multiplicativo;

4) Nos problemas que exigem multiplicação e divisão, nenhum aluno utilizou a operação de divisão. Mas, com os conjuntos de pequeno número apresentados, na verdade, a divisão não é necessária;

5) As representações utilizadas envolveram predominantemente, listas com símbolos ou números e grafos. As operações numéricas foram pouco utilizadas;

6) Nas representações dos problemas dos apertos de mão, entre *n* pessoas, apareceram grafos. A contagem foi feita sobre os lados e as diagonais dos *n*-ágonos obtidos;

7) Diagramas de árvore não foram utilizados;

8) Não ocorreu o uso de fórmulas, como era esperado, pois os alunos ainda não haviam tido contato com a Combinatória.

2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, foram feitas as análises epistemológica, didática e cognitiva da Combinatória.

A partir de revisão bibliográfica e da análise de exemplos, encontrados em outras pesquisas e em livros didáticos, pode-se tomar decisões que influenciam a construção da engenharia, objetivo maior do trabalho.

Optou-se por uma definição de Combinatória:

> *estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. (*VAZQUEZ e NOGUTI, 2004, p. 4).

Foram identificados o campo conceitual da Combinatória e suas relações com outros campos. Foram classificados problemas, esquemas foram descritos, conceitos e representações foram identificados, no campo conceitual da Combinatória.

A partir da análise dos esquemas de resolução dos problemas exemplares e dos alunos, pode-se resumir e apresentar os conceitos de Combinatória que são fundamentais, nesta pesquisa: Conjunto Universo; Subconjunto; Agrupamento; Cardinal; Contagem; Seleção; Escolha/Decisão; Multiplicação; Divisão; Adição; Subtração; Arranjo; Combinação; Permutação; Repetição; Ordem.

Ao final, a classificação dos problemas, iniciada com a análise de problemas exemplares, foi ampliada para incluir os problemas que surgiram da análise dos esquemas dos alunos, de tal modo que foram incluídos: Problemas de contagem direta de agrupamentos que podem ser listados e enumerados; Problemas clássicos de arranjos, permutações e combinações; Problemas clássicos de produto cartesiano; Problemas de Seleção; Problemas de Divisão; Problemas de Partição.

Nas Tabelas 2 e 3 estão organizadas as situações/problemas, invariantes operatórios e representações que constituem e dão sentido combinatório aos conceitos de multiplicação e de divisão, considerados fundamentais para o ensino. É preciso lembrar que os esquemas, conceitos e invariantes operatórios encontrados nestas primeiras análises, ainda não são definitivos. Os alunos, durante a experiência didática, podem explicitar outros.

Na análise didática, ficou claro que o trabalho com Combinatória inicia com problemas e a formalização pode ser deixada para o final.

Na revisão bibliográfica a respeito das sugestões para o ensino, foram encontradas diferentes formas de representação desejáveis: listagem dos agrupamentos; escrevendo, desenhando ou por símbolos; listagem tabular em tabelas de dupla entrada; diagrama de árvores; esquemas gráficos variados para representar as multiplicações e divisões; representação numérica com as quatro operações; representação algébrica com o formulário. Na experiência com problemas prévios, alunos recorreram a grafos para representar problemas de produto cartesiano, o que não havia sido encontrado na revisão bibliográfica.

Na análise cognitiva, pode-se refletir sobre as dificuldades dos alunos, para tomar decisões a respeito do planejamento de uma engenharia didática.

No estudo da história da Combinatória, aparece sua vinculação com jogos de azar (jogos de carta) e com cálculo de probabilidades. Muitos autores destacam o uso de jogos em sala de aula, mas não utilizam o pôquer. Alguns livros didáticos sugerem problemas gerados pelo pôquer.

Com estes resultados, percebeu-se um rumo para a construção da engenharia.

No próximo capítulo, capítulo III, faz-se um estudo do pôquer como situação geradora de problemas, com potencial para ensinar e aprender Combinatória. Destacam-se esquemas desejáveis e diferentes representações.

No capítulo IV, são descritas as escolhas e as hipóteses que norteiam a construção de uma engenharia baseada no jogo de pôquer.

Conceito: Multiplicação
Situações de: • Invariantes Operatórios • Representações Simbólicas Contagem de agrupamentos que não podem ser listados e enumerados. Problemas de arranjos, permutações e combinações. Problemas de produto cartesiano

Problemas de Seleção

Problemas de Divisão

Problemas de Partição

Princípio multiplicativo ou Princípio fundamental da contagem: se há x modos de tomar uma decisão D1 e, tomada a decisão D1, há y nodos de tomar a decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é x.y.
Se o conjunto A tem cardinalidade x e o conjunto B tem cardinalidade y, então o produto cartesiano AxB tem cardinalidade x.y.

A multiplicação de dois inteiros p e q corresponde à expressão "para cada um destes p objetos existem q objetos correspondentes".

Um arranjo A de n objetos obtidos a partir de um conjunto U com n objetos é um subconjunto ordenado de A. O número de arranjos obtidos de U, com p elementos, é o produto n(n-1)...(n-p+1).

(não aparece nas análises mas sim na revisão bibliográfica)

O número de permutações com n objetos é o produto n(n-1)...3.2.1 = n!

Diagrama de árvore

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

$$P_n = n!$$

Tabela 2 – Conceito de Multiplicação

Conceito: Divisão

Situações de:

- Invariantes Operatórios
- Representações Simbólicas

Contagem de agrupamentos que não podem ser listados e enumerados.

Contagem de agrupamentos não ordenados.

Contagem de agrupamentos com objetos repetidos.

Contagem de combinações e de permutações com repetição

Contagem de classes de equivalência de agrupamentos.

Problemas de Seleção

Problemas de Divisão

Problemas de Partição

Resultados de diferentes contagens são divididos, para evitar a repetição de agrupamentos, no resultado final.
A repetição de agrupamentos pode ocorrer porque o interesse é contar agrupamentos não ordenados e aqueles que diferem apenas pela ordem aparecem muitas vezes (por exemplo, as combinações); ou porque agrupamentos com objetos repetidos são contados várias vezes (por exemplo, as permutações com repetição); ou por outros motivos, como nas permutações circulares.

Uma combinação é Uma permutação com repetição.

O número de combinações de n objetos tomados p a p é calculado por

O número de permutações com repetição é calculado

Divide-se para evitar a contagem de agrupamentos equivalentes.

A divisão de pode ter o sentido de divisão por quotas.

Agrupamentos são equivalentes quando a ordem não importa, quando há objetos repetidos e quando

cada agrupamento que pode ser contado “esconde” (representa) uma classe de agrupamentos que não são aceitos por não cumprirem os critérios de formação exigidos. Em qualquer problema de contagem, é preciso questionar se existem agrupamentos equivalentes para fazer a divisão. Quando há necessidade de divisão, é preciso calcular o número total de agrupamentos e o número de agrupamentos em cada classe. Nem sempre o número de agrupamentos em cada classe (o divisor) corresponde a uma permutação, como nos casos de Combinação ou permutação com repetição. Q = p/q Tabelas de dupla entrada $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n - p)!}$ $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_n!}$ $P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$

Tabela 3 – Conceito de Divisão

3 O PÔQUER E A COMBINATÓRIA

Este capítulo traz resultados da análise do jogo de pôquer, visto como uma situação que gera problemas e dá sentido a conceitos da Combinatória. A questão é investigar o potencial do pôquer para ensinar e aprender Combinatória.

A análise foi feita com o objetivo de responder às seguintes questões: Quais são os problemas gerados pelo pôquer? Que tipos de problemas são estes? Quais são as diferentes formas de resolução e de representação destes problemas? A quais conceitos eles dão sentido?

Origem do Pôquer[5]

Não se sabe ao certo quando o pôquer surgiu e nem o local, o que se sabe é que deve ter originado de algum outro tipo de jogo de cartas. Alguns pesquisadores dizem que o pôquer deriva do "AS Nas" um velho jogo que predominava na antiga Pérsia. Outros dizem que teve origem na dinastia Sung da China no século X.

Independente de onde tenha surgido, foi na América do Norte que ficou famoso e ganhou o mundo, chegou aos Estados Unidos cruzando o Atlântico com um grupo de franceses que colonizaram e eventualmente fundaram a cidade de New Orleans.

Regras do Pôquer[6]

Nos Estados Unidos utiliza-se um baralho comum de 52 cartas.

No Brasil as cartas de valor mais baixo são retiradas, de acordo com o número de participantes. Com quatro participantes utilizam-se as cartas do $\boxed{7}$ ao $\boxed{\mathbf{A}}$; com cinco jogadores, do $\boxed{6}$ ao $\boxed{\mathbf{A}}$. Embora os grupos possam ser constituídos de dois até oito jogadores, as mesas formadas de quatro a sete são consideradas ideais. Para cada jogador a mais no grupo, uma outra carta será acrescentada. Assim, se forem seis os participantes, o cinco é incluído. O $\boxed{\mathbf{A}}$ é a carta mais alta, mas também pode entrar nas sequências como a mais baixa. Exemplo: se o $\boxed{7}$ estiver no jogo, a sequência máxima será $\boxed{\mathbf{A}}\boxed{\mathbf{K}}\boxed{\mathbf{Q}}\boxed{\mathbf{J}}\boxed{10}$ e a mínima $\boxed{10}\boxed{9}\boxed{8}\boxed{7}\boxed{\mathbf{A}}$.

Distribuição das cartas

Antes de iniciar o jogo, os jogadores devem estabelecer o valor do cacife, ou seja, o montante em fichas necessário para as apostas que serão feitas no decorrer do jogo. O primeiro

[5] Texto encontrado em: <http://www.artilhariadigital.com/2010/05/origem-do-poker.html,>, acesso em 01 ago 2013.
[6] Texto encontrado em:<http://pt.wikipedia.org/wiki/P%C3%B4quer#P.C3.B4quer_fechado>, acesso em 01 ago 2013

carteador será aquele que tirar a carta mais alta, sorteada apenas para efeito de distribuição das cartas. A seguir, será substituído a cada rodada pelo jogador mais à esquerda.

Por se tratar de um jogo de apostas, o pôquer tem convenções rigorosas sobre o embaralhamento, corte e distribuição das cartas. Antes da distribuição, as cartas devem ser embaralhadas no mínimo três vezes. Qualquer jogador pode participar do embaralhamento, desde que peça ao carteador, que será, invariavelmente, o último a embaralhar. O baralho deve ser oferecido ao jogador da direita para o corte. Se este não quiser, qualquer outro jogador poderá cortar. O monte de cartas será cortado uma única vez, a menos que ocorra alguma irregularidade. Se alguma carta virar durante o corte, as cartas deverão ser novamente embaralhadas e dadas a cortar. Se nenhum jogador cortar, o carteador não poderá mais embaralhar e deverá proceder à distribuição. A distribuição é feita no sentido horário, uma por vez, fechadas, cinco para cada jogador. As cartas que sobrarem ficarão ao lado do carteador, para serem usadas posteriormente.

Ritmo do jogo

Primeira rodada de apostas

Antes de receber cartas, cada participante deposita uma ficha no centro da mesa. Estas fichas serão disputadas durante o jogo. O jogo corre com a distribuição de cartas no sentido horário. Assim, o jogador à esquerda do carteador será o primeiro a falar. As opções são as seguintes:

1ª - Pensa que não conseguirá formar um bom jogo e passa ou sai, pondo suas cartas fechadas sobre a mesa;

2ª - Diz “mesa” (ou alternativamente bate duas vezes na mesa), para verificar a situação dos demais, antes de apostar. Com isso, transfere o direito de falar em primeiro lugar ao jogador à sua esquerda, conservando o direito de falar posteriormente, se alguém abrir;

3ª - Gosta de seu jogo e faz uma aposta inicial.

Às vezes o limite das apostas não é estabelecido mas, em geral, as apostas são combinadas antes do início do jogo, fixando-se o limite mínimo e o máximo. Se o primeiro jogador passar ou disser mesa, o segundo terá as mesmas opções, e assim por diante, até chegar ao carteador. Se todos passarem, as cartas serão reunidas e o segundo jogador da mesa procederá a nova distribuição.

As fichas continuarão na mesa e serão apontadas pelos novos pingos. Se o primeiro jogador apostar, o segundo terá de decidir se acompanha, sai ou aumenta a aposta (repique). Se algum jogador repicar, qualquer outro poderá contra-repicar (aumentar novamente a aposta). Se alguém abrir e os outros apenas acompanharem, o abridor não poderá repicar a própria aposta inicial.

Se alguém repicar ou contra-repicar, os que já acompanharam terão de decidir se desejam completar suas apostas ou se desejam sair. Para participar, todos deverão ter apostado a mesma quantidade de fichas. Se algum jogador disse “mesa” inicialmente, após a abertura, terá de decidir, na sua vez de falar, se deseja acompanhar ou se prefere sair.

Troca de cartas

Quando as apostas terminarem os jogadores que continuarem no jogo poderão trocar cartas. Esta troca é feita uma única vez. É raro algum jogador desejar trocar quatro cartas, pois isto reduziria a possibilidade de melhorar a mão. Em alguns lugares só se permite a troca de quatro cartas ao primeiro jogador. Em geral os jogadores trocam uma, duas ou três cartas. Se alguém receber um jogo feito, não precisará trocar cartas.

O carteador distribuirá as novas cartas, utilizando as que haviam sobrado na distribuição inicial, mais as recolhidas dos que “saíram”, embaralhando-as novamente e dando-as a cortar, sempre em sentido horário, de acordo com o pedido de cada jogador. Na sua vez de pedir, cada jogador deverá anunciar quantas cartas deseja, destacando de sua mão igual número de cartas, jogando-as fechadas sobre a mesa, antes de receber as novas. Se as cartas não forem suficientes para as trocas, o carteador recolherá as cartas já descartadas, embaralhando-as, para distribuí-las aos que ainda não trocaram cartas.

Segunda rodada de apostas

Já com o novo jogo, o jogador que iniciou as primeiras apostas, isto é, quem abriu o jogo, deverá ser o primeiro a falar. Se houver repiques, o último repicador falará primeiro. Poderá dizer “mesa” ou apostar. O seguinte poderá dizer “mesa”, se o primeiro também o fez, ou sair, acompanhar a aposta ou aumentá-la. Se todos disserem “mesa”, quem tiver o melhor jogo recolherá as fichas.

Se houver apostas (simples, repicadas ou contra-repicadas), os que ficarem no jogo verificarão entre si quem tem a melhor mão. Se algum jogador apostar e nenhum dos outros pagar, recolherá as fichas sem mostrar seu jogo. A abertura mínima, na primeira distribuição, é um par de VALETES; se todos passarem, na segunda, par de DAMAS, e assim por diante, até chegar a dois pares. Em alguns círculos a abertura é livre.

O pôquer e os conceitos da Combinatória.

O baralho, no caso, é o conjunto universo e seus elementos são as 52 cartas; neste conjunto são selecionados agrupamentos de 5 cartas, que, no jogo, denominam-se as “mãos”.

O objetivo do jogo é obter agrupamentos de 5 cartas de modo a formar a melhor “mão” possível, segundo uma hierarquia estabelecida pelas regras. Na linguagem coloquial, o jogador refere-se a cada “mão” como “um jogo” e afirma, por exemplo, que *“este jogo vale mais*” ou “*este jogo é melhor”* que outro.

Listagem das "mãos" (ou jogos) em ordem de hierarquia decrescente (da mais valiosa para a menos valiosa)

1) *Royal Straight Flush*/Sequência Máxima de Cor (sequência real):

A	K	Q	J	10
♣	♣	♣	♣	♣

Esta é a combinação de cartas mais valiosa do pôquer e mais rara de se ver. É uma sequência do mesmo naipe das cinco cartas mais altas, a começar no 10 e a acabar no Ás.

2) *Straight Flush*/Sequência de Cor (de mesmo naipe):

7	8	9	10	J
♦	♦	♦	♦	♦

Embora não seja uma combinação tão valiosa quanto o *Royal Straight Flush* é também uma mão rara de se obter. É composta de 5 cartas em sequência do mesmo naipe como, por exemplo o nosso exemplo de sequência a começar no 7 de OUROS e a acabar no VALETE de OUROS.

3) Pôquer (quadra):

9	9	9	9	3
♥	♠	♣	♦	♦

O pôquer é composto por quatro cartas iguais, neste exemplo temos os 4 noves. Caso de empate ganha o jogador com a Quadra ou Pôquer mais alta.

4) *Full House* (fula):

6	6	6	3	3
♦	♠	♥	♣	♠

O *Full House* acontece quando encontramos nas nossas 5 cartas um par e um trio de cartas iguais. No nosso exemplo temos um trio de 6 e um par de 3. Se houver dois jogadores com *full house*, o desempate é primeiro validado em quem têm o maior trio e depois quem tem o maior par.

5) *Flush*/Cor:

2	7	J	A	4
♥	♥	♥	♥	♥

O *flush* é simplesmente quando temos 5 cartas do mesmo naipe que não estão em sequência.

6) *Straight*/Sequência:

3	4	5	6	7
♦	♣	♦	♠	♥

O *Straight* é uma sequência de cartas de vários naipes. No nosso exemplo começa no 3 de OUROS e acaba no 7 de COPAS. Ter em atenção que um Ás tanto pode servir de carta inicial a uma sequência baixa (Ás 2 3 4 5), como ser a carta final de uma sequência máxima (10, Valete, Dama, Rei e Ás)

7) Trio (ou trinca):

8♥ 8♠ 8♣ 2♣ 10♦

O trio consiste em três cartas iguais, no nosso exemplo temos que três das cinco cartas são 8.

8) Dois pares:

Q♦ Q♠ 5♥ 2♣ 5♠

São dois pares de cartas, caso empate ganha aquele com maior par maior, se empatar ganha o que possuir o maior par menor, caso empate ganha aquele que possuir a maior carta.

9) Um par:

K♣ K♦ 7♣ 2♠ J♥

São duas cartas iguais e três diferentes, caso empate ganha aquele que possuir o maior par, caso empate ganha aquele que possuir a maior carta.

10) Carta Alta (*High Card*)

Q♦ 7♠ 5♥ 3♣ 10♠

Ganha quem tiver a carta mais alta

Problemas combinatórios gerados pelo pôquer

O pôquer gera uma coleção de problemas combinatórios que consistem em questionar a hierarquia entre os jogos.

Exemplo

Porque uma trinca ganha de dois pares?

Este problema se resume a dois outros que pedem a contagem dos agrupamentos de cinco cartas que contêm trincas e dos agrupamentos que contêm dois pares, concluindo que o número de mãos com dois pares (cardinalidade do conjunto de agrupamentos com dois pares) é maior do que o número de mãos com trincas (cardinalidade do conjunto de agrupamentos com trincas); ou que a probabilidade de obter mãos com dois pares é maior do que a de obter mãos com trincas. No caso de questionar a probabilidade, é preciso contar todos os agrupamentos de cinco cartas possíveis de formar, a partir de um conjunto de 52 cartas.

Adotando a classificação de Batanero et al (1997), os problemas do pôquer são problemas de seleção, pois consistem em formar e contar agrupamentos obtidos pela seleção de objetos (cartas) de um conjunto maior (baralho).

Nesta linha, os problemas darão sentido aos conceitos de: conjunto universo, agrupamento, seleção, multiplicação, divisão, adição, subtração, arranjo, permutação e combinação. Os esquemas desejáveis são verbais, numéricos, algébricos e gráficos.

Pela natureza do jogo, os agrupamentos são não ordenados e não há reposição de objetos (cartas).

Exemplos

Com um baralho de 52 cartas, quantos grupos de cinco cartas podem ser formados?

Esquema de resolução verbal e algébrico

O conjunto universo é o baralho com 52 cartas. Os agrupamentos de cinco cartas são não ordenados. O problema pede o número de combinações dos 52 objetos, agrupados 5 a 5: $C_{52,5}$.

Com um baralho de 52 cartas, quantos grupos de cinco cartas, formando trincas, podem ser obtidos?

Esquema de resolução verbal, algébrico e gráfico

Graficamente, procura-se uma "mão" composta de cinco cartas de tal modo que três cartas sejam da mesma figura (de ÁS a REI) e duas cartas sejam de figuras diferentes: __ __ ___ / __ __ .

Trinca Cartas de figuras diferentes

A primeira carta pode ser escolhida entre as 52 do baralho. Para ter uma trinca, a segunda deve ser da mesma figura. Se a primeira é REI de OUROS, a segunda só poderá ser REI de PAUS, ESPADAS ou COPAS. Então há três escolhas para a segunda carta. Com o mesmo raciocínio há duas escolhas para a terceira carta. Mas a ordem das cartas que formam a trinca não importa na contagem. As trincas REI OUROS, COPAS, ESPADAS e REI COPAS, OUROS, ESPADAS são idênticas, pois quando as cartas aparecem, na mão do jogador, podem ser agrupadas do modo que ele queira. Assim, é preciso dividir o número de trincas por 3!, número de permutações da trinca: $\frac{52 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$ X,

Trinca Cartas de figuras diferentes

A quarta carta pode ser escolhida entre as 48 cartas restantes, depois de excluídas aquelas que pertencem ao grupo que participa da trinca. Se a trinca é de REIS, extraem-se todos os REIS do baralho. Restam 48 cartas. A última carta é escolhida entre as 44 cartas restantes, extraindo-se todas as figuras semelhantes à figura da quarta carta, para não formar um par. Mas a ordem das catas que formam estas duas cartas diferentes não importa na contagem. Os conjuntos de cartas VALETE OUROS / DAMA COPAS e DAMA COPAS / VALETE OUROS são idênticos, pois quando as cartas aparecem, na mão do jogador, podem ser agrupadas do modo que ele queira. Assim, é preciso dividir o número conjuntos de 2 cartas diferentes por 2 número de permutações: $\frac{52 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$ X $\frac{48 \cdot 44}{2!}$ = 54912

Trinca Cartas de figuras diferentes

Observa-se que os problemas do pôquer com 52 cartas não admitem a possibilidade de listar e contar os agrupamentos, o esquema predominante entre os alunos. O professor pode resolver os problemas do pôquer de diferentes modos mas, com o objetivo de utilizá-los numa proposta didática, deve analisar esquemas e sugerir aqueles que dêem sentido aos conceitos.

A sugestão é, antes de propor problemas com baralho de 52 cartas, propor jogos com baralhos reduzidos, com nove ou dezesseis cartas, com regras semelhantes ao pôquer, denominados, aqui, mini pôquer. Com baralhos pequenos, os alunos podem iniciar as atividades listando e contando as mãos. A hipótese é que este exercício de contagem direta vai dar sentido aos conceitos-chave: conjunto universo, agrupamento, contagem.

Problemas do mini pôquer com baralho de 9 cartas e com mãos de 3 cartas

J ♥	Q ♥	K ♥
J ♦	Q ♦	K ♦
J ♠	Q ♠	K ♠

Com estas cartas, quantos conjuntos com TRÊS cartas, pode-se formar, de modo que:

a) **Formem uma trinca?**

Exemplo: J♣ J♦ J♦

ESQUEMA 1: Listagem e contagem direta

TRINCA 1	TRINCA 2	TRINCA 3
J♥	Q♥	K♥
J♦	Q♦	K♦
J♠	Q♠	K♠

Portanto 3 trincas.

b) Formem a sequência VALETE-DAMA-REI?

ESQUEMA 2: Listagem e contagem direta

SEQUÊNCIA 1	J♥	Q♥	K♥
SEQUÊNCIA 2	J♦	Q♦	K♦
SEQUÊNCIA 3	J♠	Q♠	K♠

3x3x3, logo podemos formar 27 sequências.

c) Quantas sequências de **mesmo naipe** podemos formar?

Exemplo: K♣ Q♣ J♣.

Resposta: 3 sequências.

ESQUEMA 1

Esquema verbal, gráfico, numérico

Graficamente, procura-se uma “mão” composta de três cartas de tal modo que elas possam ser ordenadas em sequência (VALETE, DAMA, REI) e em naipes diferentes.

______ _______ ________

Carta 1 Carta 2 Carta 3

A Carta 1 pode ser escolhida em qualquer uma das nove cartas do baralho. Mas no momento de escolher a Carta 1 fica claro que será preciso dividir o problema em casos, porque a exigência da sequência VALETE-DAMA-REI impõe critérios restritos na formação dos agrupamentos.

Se a Carta 1 for VALETE, as demais só podem ser DAMA e REI. Se a Carta 1 é REI, as demais só podem ser DAMA e VALETE. E assim por diante. Pensando desta maneira, parece que se tem seis casos:

- Caso 1 - VALETE, DAMA, REI
- Caso 2 - VALETE, REI, DAMA
- Caso 3 - DAMA, VALETE, REI
- Caso 4 - DAMA, REI, VALETE
- Caso 5 - REI, DAMA, VALETE
- Caso 6 - REI, VALETE, DAMA

Mas, na verdade, os seis casos se resumem a um só, pois são as permutações das três cartas VALETE-DAMA-REI. As cartas podem ser reagrupadas, na mão do jogador, na ordem que ele achar mais conveniente. Ele pode escolher como melhor ordenação o Caso 1, VALETE-DAMA-REI.

Este problema dificilmente é solucionado pelo esquema da listagem e contagem direta, pois a resposta é 24 agrupamentos. O desejável é utilizar o diagrama de árvore, o princípio multiplicativo e o princípio aditivo.

Pode-se dividir em casos, considerando os naipes.

CASO 1 - SEQUÊNCIA COMEÇANDO COM VALETE PAUS

Pode-se escolher o VALETE de PAUS para iniciar a sequência. Se a sequência inicia com VALETE PAUS, então a segunda carta pode ser qualquer uma das três DAMAS e a terceira carta pode ser qualquer um dos três REIS.

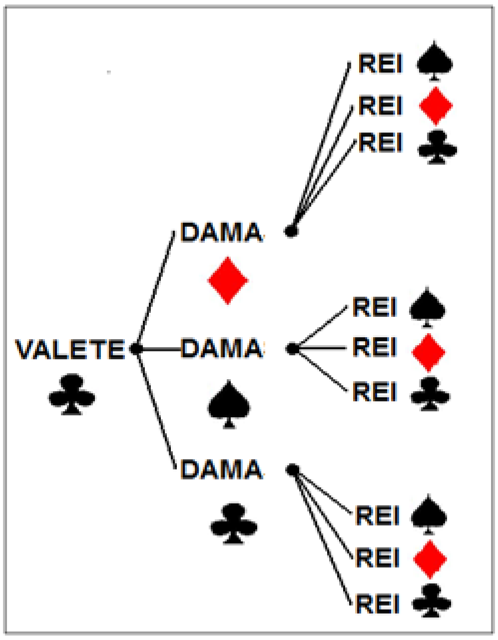


Figura 4 – Sequência Iniciando com VALETE de PAUS

No diagrama de árvore, pode contar nove sequências, iniciando com VALETE de PAUS

CASO 2 - QUALQUER VALETE

Para a primeira carta, pode escolher qualquer VALETE, para segunda tem-se três DAMAS e para a terceira três REIS.

Cada VALETE gera nove sequências (DAMA, REI). A relação é (1:9)

Tem-se três VALETES. Logo multiplica-se: 3x9 = 27 sequências. A relação é (3:27)

Mas, destas 27 sequências é preciso EXCLUIR as sequências com cartas de mesmo naipe, que são três (VALETE, DAMA, REI) todos de OUROS, todos de COPAS ou todos de ESPADAS.

TOTAL

EXCLUIR significa SUBTRAIR

27 – 3 = 24 sequências com naipes não todos iguais.

É PRECISO DIVIDIR?

Para fazer a contagem das sequências, as cartas foram ordenadas, na mão do jogador, na ordem desejada VALETE-DAMA-REI. O cálculo foi feito com esta ordem prefixada, portanto não é preciso questionar se as cartas poderiam estar em outra ordem, que a diferença de ordem não importa na contagem e, portanto, seria preciso dividir pela permutação das três cartas: 3!.

ESQUEMA 2

Esquema de resolução verbal e numérico.

Existem três escolhas para a Carta 1. Para cada Carta 1, existem três escolhas para a Carta 2 e existem três escolhas para a Carta 3. Ou seja, cada caso fornece: 3x3x3 = 27 agrupamentos.

Ao final, subtrai-se as mãos com cartas de mesmo naipe, que são três. Total: 24

d) Formem um par acompanhado por uma carta diferente?

Este problema dificilmente é solucionado pelo esquema da listagem e contagem direta, pois a resposta é 54 agrupamentos. Mas é possível fazer uma contagem parcial, dos pares, que são nove (três pares de VALETE, três pares de DAMA e três pares de REI). O desejável, além disso, é utilizar o diagrama de árvore, o princípio multiplicativo e o princípio aditivo.

ESQUEMA 1

Dividir em casos:

Caso 1) PAR VALETES

Quantos pares de VALETE? Dá para contar diretamente e obter três pares.

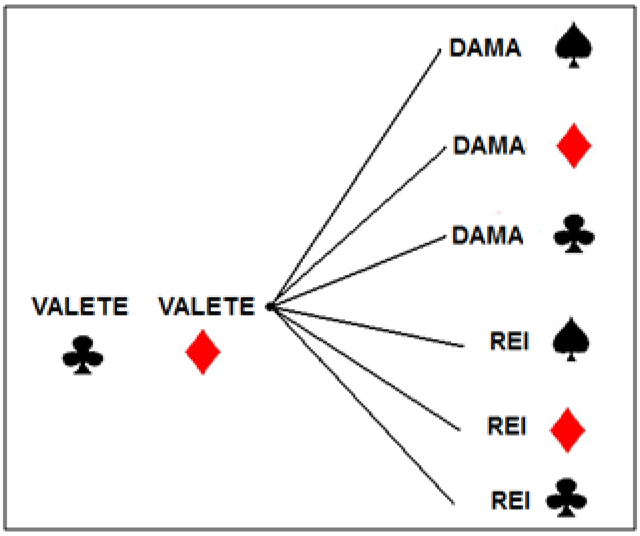


Figura 5 – Sequência Iniciando com Par de VALETES

Isto quer dizer que, para cada par de VALETE, podemos ter seis mãos diferentes: (1:6)

Mas são três pares de VALETE. A relação é (3,18)

Por multiplicação: 3x6 = 18

CASO 2 - PAR DAMAS

Resultado semelhante: 18 mãos com par de DAMAS

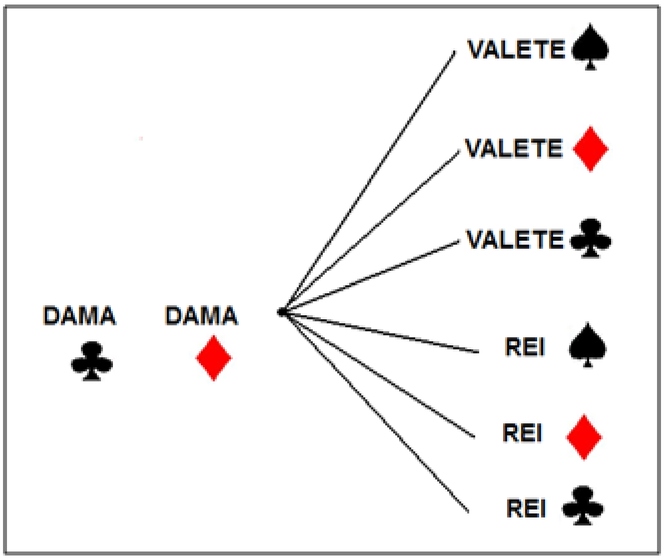


Figura 6 – Sequência Iniciando com Par de DAMAS

CASO 3 - PAR DE REIS

Resultado semelhante: 18 mãos com par de REIS

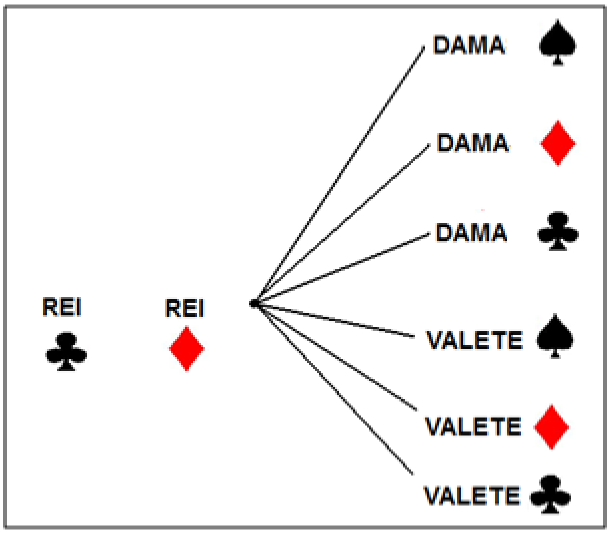


Figura 7 – Sequência Iniciando com Par de REIS

PROPOSTA FINAL

Podemos somar os três casos independentes 18+18+18 (Princípio da Adição)

Pode-se multiplicar. Se para cada par encontra-se 18 mãos então, para três pares, têm-se 3 x 18 = 54 mãos.

ESQUEMA 2

Esquema de resolução verbal e numérico.

Existem nove escolhas para a Carta 1. Para cada Carta 1, existem duas escolhas para a Carta 2, de modo a completar o par. Tem-se assim 18 pares, que se repetem dois a dois, pois aparecem em ordem diferente. É preciso dividir 18 por 2! e obter nove pares. E seis escolhas para a Carta 3, pois é preciso excluir as cartas do grupo do par.

Pelo Princípio Multiplicativo, tem-se:

9x6= 54 mãos.

Num mini pôquer com baralho de 9 cartas e mãos de 3 cartas, quais as probabilidades de obter mãos com sequência de um só naipe, trinca, sequência de naipes diferentes, ou um par?

Para resolver este problema é preciso calcular o número total de agrupamentos possível de formar, com estes critérios.

ESQUEMA 1

Algébrico: $C_{9,3}$

ESQUEMA 2

Verbal, gráfico, tabular

Para formar grupos com 3 cartas, a primeira escolha pode ser qualquer uma das 9 cartas, a segunda escolha, qualquer uma das 8 restantes e a terceira escolha pode ser qualquer uma das 7 restantes.

Teríamos um total de 9x8x7 = 504 grupos. Mas há repetição entre os grupos que estão sendo contados, pois alguns só diferem pela ordem entre as cartas.

Cada grupo de cartas aparece seis vezes. Por exemplo, vê-se na tabela, na Gaveta 1, as repetições do grupo Valete de Copas/ Dama de Copas/ Rei de Copas e, na Gaveta 2, as repetições de Valete de Copas/ Dama de Copas/ Rei de Copas. É preciso calcular o número de gavetas.

O problema é: se 504 grupos aparecem distribuídos em gavetas de 6 grupos cada uma, qual é o número de gavetas?

O resultado é o número de agrupamentos que diferem entre si pelos objetos e não pela ordem: 84.

TOTAL DE GAVETAS 504:6 = 84	TOTAL DE GRUPOS, SEM CONSIDERAR A ORDEM DAS CARTAS = 504 NÚMERO DE GRUPOS IGUAIS, EM CADA GAVETA 6					
GAVETA 1	J♥ Q♥ K♥	Q♥ K♥ J♥	K♥ Q♥ J♥	J♥ K♥ Q♥	Q♥ J♥ K♥	K♥ J♥ Q♥
GAVETA 2	J♥ J♠ K♥	K♥ J♥ J♠	J♠ K♥ J♥	J♥ K♥ J♠	K♥ J♠ J♥	J♠ J♥ K♥

Resposta do problema de cálculo de probabilidades:

Num mini pôquer com baralho de 9 cartas e mãos de 3 cartas, quais as probabilidades de obter mãos com :

Uma sequência de mesmo naipe: 3/84 = 3,57%
Uma trinca: 3/84 = 3,57%
Uma sequência com naipes diferentes: 24 /84 =28,57%
Um par e uma terceira carta: 54/84 = 64,29%

Como resolver os problemas do pôquer com um baralho de 52 cartas.

O número total de mãos que podemos formar com um baralho de 52 cartas, é de 2.598.960.

1) *Royal Straight Flush*/Sequência Máxima de Cor (sequência real):

A	K	Q	J	10
♣	♣	♣	♣	♣

Solução 1: São 4 combinações possíveis.

Sequência de 10 a Ás dos quatro naipes

Solução 2: Obrigatoriamente tem que começar com 10, logo temos quatro possibilidades para esta posição: 10 de Copas, 10 de Ouros, 10 de Paus e 10 de Espadas. Dependendo do naipe obtido, temos apenas uma possibilidade para as demais vagas, que são o Valete, a Dama, o Rei e o Ás daquele naipe:

$$\frac{10,J,Q,K,Ás}{4x1x1x1x1}$$

Isso dá um total de quatro possibilidades

2) *Straight Flush*/Sequência de Cor (de mesmo naipe):

7	8	9	10	J
♦	♦	♦	♦	♦

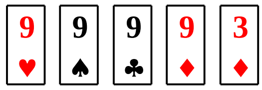
São 36 combinações possíveis, já que:

- *de Ás a 5 x (x 4 naipes);*
- *de 2 a 6 x (x 4 naipes);*
- *de 3 a 7 x (x 4 naipes);*
- *de 4 a 8 x (x 4 naipes);*
- *de 5 a 9 x (x 4 naipes);*
- *de 6 a 10 x (x 4 naipes);*
- *de 7 a 11 x (x 4 naipes);*
- *de 8 a 12 x (x 4 naipes);*
- *de 9 a 13 x (x 4 naipes);*
- *de 10 a Ás x (x 4 naipes).*

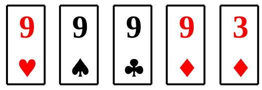
Total: 10 x 4 = 40 menos as quatro sequências do *Royal Straight Flush* fica 36.

Solução 2: Há nove modos de escolher os grupos de cartas (começando por Ás até o 9) e quatro modos de escolher o naipe único, portanto 9 x 4 = 36.

3) Pôquer (quadra):



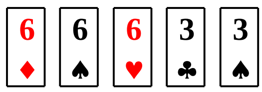
São 624 combinações possíveis.



Solução 1: Escolhendo uma carta como no exemplo acima (9), trocando esses 9 de lugar, a mão não se altera, ou seja, continua sendo uma quadra, independentemente do valor da quinta carta. Como nós temos 13 cartas e escolhemos 4, ficam 48 possibilidades para compormos as mãos, logo, o total é $13\text{x}\dfrac{4\text{x}3\text{x}2}{4\text{x}3\text{x}2}\text{ x } 48 = 624$

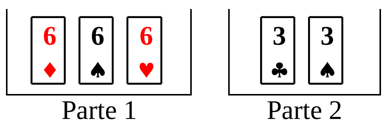
Solução 2: Há treze modos de escolher o grupo da "quadra", um modo de escolher os naipes das quatro cartas da "quadra", doze modos de escolher o grupo da outra carta e quatro modos de escolher o naipe desta carta. A resposta fica 13 x 1 x 12 x 4 = 624.

4) *Full House* (fula):



São 3744 combinações possíveis.

Solução 1: Escolhendo uma trinca qualquer e um par como no exemplo acima e trocando essas cartas de posição, a mão não se altera, ou seja, continua sendo uma fula. Façamos a seguinte ilustração: vamos separar essas cartas em duas partes, 1 e 2 como mostra o desenho a seguir:



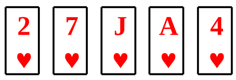
Na Parte 1 temos que obter 3 cartas de mesmo valor. Sabendo que a posição não influencia e que há 4 cartas para cada valor, temos $C_{4,3}$ x 13, pois são 13 cartas de cada naipe. O mesmo ocorre na Parte

2, só que temos duas vagas para 4 cartas de mesmo naipe, logo, $\frac{4x3}{2x1}$ x 12 valores restantes. Como a mão não é uma sequência, as possibilidades são justamente o produto de tudo 13 x $\frac{4x3x2}{3x2x1}$ x 12 x $\frac{4x3}{2x1}$ = 3744.

Solução 2: Há 52 possibilidades de obtermos a 1ª carta da trinca, obtida essa carta, ficamos com 3 possibilidades para a próxima carta, 2 possibilidades para a última carta da trinca. Como as ordem das cartas não altera a "mão" temos que dividir por 3!. Sobram 48 possibilidades para a 1ª carta do par e 3 possibilidades para a próxima carta do par. Como a ordem das cartas não altera o par temos que dividir por 2! Ficando 52 x $\frac{3x2}{3x2x1}$ x $\frac{48x3}{2x1}$ = 3744.

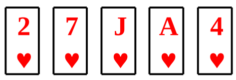
Solução 3: Para formar uma trinca e um par, existem 13 valores para a trinca e 12 valores para o par. Dentre as cartas de mesmo valor há 4 formas de montar uma trinca e 6 formas de montar um par, com os 4 naipes diferentes. Existem 13 x 12 x 4 x 6 = 3744 trincas e pares possíveis.

5) *Flush*/Cor:



São 5108 combinações possíveis.

Solução 1: Vamos observar a seguinte disposição de cartas:



A ordem das cartas não altera a "mão", ou seja, continua sendo um *flush*.

A posição das cartas não muda a mão, então escolhemos cartas de Copas para ocupar a 1ª posição, logo para a primeira posição temos 13 possibilidades, para a segunda 12, para a terceira 11, para a quarta 10 e para a quinta 9. Como a ordem não influencia dividimos tudo por 5! E como são 4 naipes multiplicamos tudo por 4. Logo,

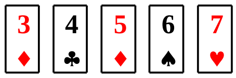
$$\frac{13x12x11x10x9}{5x4x3x2x1} \text{ x } 4 = 5148.$$

Mas temos que ter o cuidado de subtrairmos as sequências de mesmo naipe que são 40 ao total (*Royal Straight Flush* e *Straight Flush*) que já havíamos calculado:

$$\frac{13x12x11x10x9}{5x4x3x2x1} \text{ x } 4 - 40 = 5108.$$

Solução 2: Os grupos de cartas podem ser escolhidos de $C_{13,5}$ x 4 (naipes) – 40 modos de sequências de mesma cor ficando 5108.

6) *Straight*/Sequência:

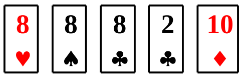


São 10200 combinações possíveis.

Solução 1: De Às a 5, sendo que a ordem muda a mão portanto influencia na resposta. Temos quatro possibilidades para o Às, quatro para o 2, quatro para o 3, quatro para o 4 e quatro para o 5: (4x4x4x4x4) = 4^5. Como temos um total de dez sequências possíveis ficamos com 10 x 4^5 = 10240. Menos as 40 sequências do *Royal Straight Flush* e do *Straight Flush*, fica igual a 10200 combinações possíveis.

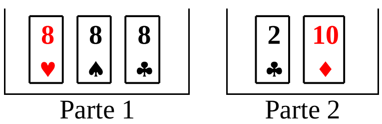
Solução 2: Há apenas dez tipos de sequências: de Ás a 5, de 2 a 6, de 3 a 7, de 4 a 8, de 5 a 9, de 6 a 10, de 7 a Valete, de 8 a Dama, de 9 a Rei e de 10 a Ás. Escolhendo o tipo de sequência, haveria 4x4x4x4x4 = 4^5 modos de escolher os naipes das cartas da sequência, mas quatro desses modos não são permitidos: todas de Ouros, todas de Paus, todas de Copas e todas de Espadas. A resposta é 10 x (4^5 - 4) = 10200.

7) Trio (ou trinca):



São 54912 combinações possíveis.

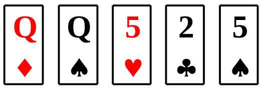
Solução 1: Vamos utilizar o mecanismo das partes. Escolhemos uma trinca para colocarmos em uma das partes (Parte 1) e o restante para a outra (Parte 2).



A posição das cartas na primeira parte não muda a mão, então escolhemos o 8 para colocarmos nela, logo para a primeira posição temos quatro possibilidades, para a segunda três e para a terceira duas possibilidades. Como a ordem não influencia dividimos tudo por 3! E como são 13 figuras, multiplicamos tudo por 13. Para a segunda parte, sobraram 48 cartas para a primeira vaga, como não podemos escolher uma carta igual à primeira ficamos com 44 possibilidades para essa vaga e a ordem não altera essa mão, temos 13 x $\frac{4x3x2}{3x2x1}$ x $\frac{48x44}{2x1}$ = 54912.

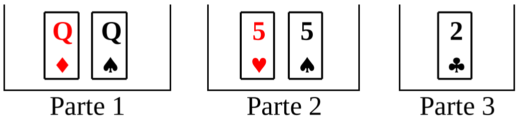
Solução 2: Há 13 modos de escolher o grupo da trinca, $C_{4,3}$ de escolher as figuras das cartas da trinca, $C_{12,2}$ modos de escolher os grupos das duas outras cartas e 4 x 4 = 16 modos de escolher as figuras dessas duas cartas. Portanto 13 x $C_{4,3}$ x $C_{12,2}$ x 16 = 54912.

8) Dois Pares:



São 123.552 combinações possíveis.

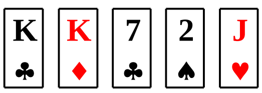
Solução 1: Novamente vamos utilizar o mecanismo das partes. Escolhemos dois pares (no caso a DAMA e o 5) para colocarmos na Parte 1 e na Parte 2, respectivamente. O restante na Parte 3.



A posição das cartas dentro das partes não muda a mão, então escolhemos a DAMA para colocarmos na Parte 1 logo, para a primeira posição, temos quatro possibilidades e para a segunda, três. Como a ordem não influencia dividimos tudo por 2! E multiplicamos por 13. O mesmo raciocínio acontece na Parte 2 e como são 13 valores e um já foi escolhido na Parte 1, multiplicamos agora por 12. Como a ordem das partes não influencia, dividimos tudo por 2!. Para a terceira parte sobraram 44 cartas. Logo $\dfrac{13 \text{ x } \dfrac{4\text{x}3}{2\text{x}1} \text{ x } 12 \text{ x } \dfrac{4\text{x}3}{2\text{x}1} \text{ x } 44}{2!} = \dfrac{247104}{2!} = 123552.$

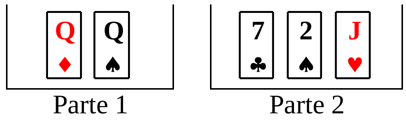
Solução 2: Há $C_{13,2}$ modos de escolher os grupos das cartas que formarão 2 pares, $(C_{4,2})^2$ modos de escolher suas figuras, 11 modos de escolher o grupo da outra carta e 4 modos de escolher sua figura. Logo, $C_{13,2}$ x $(C_{4,2})^2$ x 11 x 4 = 123552.

9) Par:



São 1.098.240 combinações possíveis.

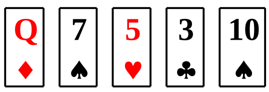
Solução 1: Vamos usar o mecanismo das partes. A ordem das cartas dentro da parte não altera o resultado, ou seja, continua sendo um par.



A posição das cartas dentro da Parte 1 não muda a mão, então escolhemos a DAMA para colocarmos na primeira parte logo, para a primeira posição, temos quatro possibilidade e para a segunda, três. Como a ordem não influencia, dividimos tudo por 2!. E como são 13 figuras multiplicamos tudo por 13. Na segunda parte sobraram 48 cartas para a primeira posição, 44 para a seguinte e 40 para a última. Como a ordem não altera a “mão” temos que dividir por 3! logo, $13 \text{ x } \frac{4\text{x}3}{2\text{x}1} \text{ x } \frac{48\text{x}44\text{x}40}{3\text{x}2\text{x}1} =$ 1098240.

Solução 2: Há 13 modos de escolher o grupo do par (por exemplo DAMA), $C_{4,2}$ de escolher as figuras das duas cartas do par (por exemplo COPAS e ESPADAS), $C_{12,3}$ modos de escolher os grupos das 3 (por exemplo 7, 2 e VALETE) e 4 x 4 x 4 = 64 modos de escolher as figuras dessas 3 cartas. Portanto, 13 x $C_{4,2}$ x $C_{12,3}$ x 64 = 1098240.

10) Carta Alta (*High Card*)



São 1.302.540 combinações possíveis

É o número total de mãos menos todas as mãos anteriores!

Resumo

Pode-se dizer que há um esquema genérico para a resolução dos problemas gerados pelo pôquer que pedem a contagem de mãos com determinado jogo (*Four*, *Fulla*, Trinca. Par, etc.):

1) Ordenar as cartas na mão, de modo a visualizar as partes diferentes do jogo. Este movimento de ordenar divide o agrupamento em partes com ordem pré-fixada, de tal modo que, se houver divisão, é no interior de cada parte. Observe que a sequência é uma 5-upla, agrupamento ordenado, nada para dividir; o *Four* tem duas partes ordenadas (*Four*, uma carta), divisão só no interior do *Four*.

   A exceção é o caso dos dois pares. Ao ordenar (par, par, uma carta), não é possível ordenar dois pares, por isso é preciso dividir também na contagem dos 2 pares, além de dividir no interior de cada par.

2) Fazer a contagem de cada parte de forma independente, sempre questionando a questão da ordem interna, em cada parte (dividir por 2!, 3!, 4! ou 5!).

3) Multiplicar os resultados. A divisão externa, entre as partes, só ocorre nos 2 pares, divide-se por 2!.

O único problema na coleção do pôquer, que parte da hipótese de que o jogador não coloca as cartas em ordem, é aquele mais amplo que pede o número total de mãos de cinco cartas que se pode formar. Este problema é o único que pode ser classificado como um problema de Combinação e resolvido com a fórmula conhecida: $C_{52,5}$.

Considerações finais

Os problemas gerados pelo pôquer podem ser resumidos à contagem ou vinculados ao conceito de probabilidades. Ou seja, estes problemas também dão sentido ao conceito de probabilidade, o que é importante, no ensino médio.

Em termos de classificação são, essencialmente, problemas de Seleção. Como foi mostrado, podem ser resolvidos de diferentes modos, com esquemas verbais, numéricos, gráficos (incluindo o diagrama de árvore), simbólicos e gráficos. Esses esquemas atribuem sentido aos conceitos de conjunto universo, agrupamento ordenado ou não, seleção, multiplicação, divisão, adição, subtração, Combinação, Arranjo e Permutação. Não existem problemas com reposição de objetos.

Os problemas são especialmente significativos para dar sentido aos conceitos de multiplicação e divisão e exigindo esquemas nos quais não cabem uso de formulários. São problemas muito diferentes dos problemas padrão. Cada problema pode ser resolvido de diferentes modos e pode ser utilizado como recurso didático para o professor.

4 ANÁLISE *A PRIORI*

A fase da Análise *a priori* comporta uma parte descritiva e uma parte preditiva. É preciso descrever as escolhas efetuadas, no âmbito global, mais amplo e mais geral, e no âmbito local, descrevendo cada atividade proposta.

A Engenharia tem como principal objetivo favorecer o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Quais são as escolhas globais desta Engenharia?

Nessa direção, apresentam-se as primeiras escolhas, aquelas que se referem à organização global da Engenharia:

1. Planejar uma sequência didática baseada na vivência do jogo de pôquer, para ser aplicada extraclasse;
2. Iniciar com resolução de problemas para, ao final, definir Permutação, Arranjo e Combinação e deduzidas suas fórmulas;
3. Verificar a aprendizagem coletando as produções dos alunos e analisando a evolução dos esquemas e das representações;
4. Criar um ambiente de aprendizagem propício para uma experiência investigativa, com poucos alunos, voluntários, com interação constante entre todos os participantes e com intervenções planejadas pelo professor para responder às dificuldades previstas nas hipóteses;
5. Enfatizar o uso de múltiplas representações, explicitar e dar significado aos conceitos de Combinatória.
6. Utilizar o diagrama de árvores, para introduzir o princípio multiplicativo;
7. Desenvolver recursos didáticos para dar sentido combinatório à divisão.

Quais são as hipóteses que antecederam a prática?

A vivência da situação "jogo de pôquer" permitirá ao aluno atribuir sentido à Combinatória e aos principais conceitos.

1. As atividades envolvendo o jogo de pôquer são interessantes para os alunos e a análise das regras do jogo constitui desafios.
2. A compreensão das regras do jogo dá sentido à contagem de agrupamentos (contar para dar valor às diferentes "mãos") e ao cálculo da probabilidade de um evento ocorrer (calcular a probabilidade de uma certa "mão" ocorrer e verificar qual a "mão" mais ou menos provável).

3. A resolução de problemas que levam à compreensão das regras do pôquer não será imediata, pois exige a utilização das operações de multiplicação e divisão, para a contagem de agrupamentos de 5 elementos gerados por um conjunto de 52 objetos. Como já foi visto, os alunos ainda não desenvolveram esquemas para resolver problemas quando o conjunto universo tem um número maior de objetos e que exigem multiplicação e divisão.
4. A construção de um jogo com regras semelhantes às do pôquer, com baralhos menores (9 cartas e 16 cartas), criando opções de mini pôquer, permite o uso de esquemas existentes, com a contagem direta dos agrupamentos e utilização do diagrama de árvore, e dá sentido combinatório às operações de multiplicação e divisão.
5. A partir dos problemas do pôquer, as definições e os formulários da Combinatória passam a fazer sentido.

Planejamento

A partir dessas escolhas globais, foi elaborado um Plano de Ensino, com uma sequência didática desenvolvida em seis encontros de três horas. O objetivo maior é favorecer a evolução dos esquemas para resolver problemas de Combinatória, incluindo operações e representações.

AULA 1

ASSUNTO: Jogo de pôquer

Aula	Objetivos	Atividades/estratégias	Recursos didáticos	Avaliação Recursos/critérios
Aula1 **3 h**.	Dar significado aos conceitos de conjunto universo, agrupamento, seleção e contagem.	**De sensibilização** Assistir vídeo que inclui um jogo de pôquer (trecho do filme Maverick) **De construção do conhecimento:** Jogar pôquer: familiarização com as regras e com o jogo de pôquer; Identificar as “mãos do pôquer como agrupamentos de 5 objetos, criados a partir de um conjunto de cartas com 52 objetos, seguindo restrições. Questionar o valor das “mãos” do pôquer.	Vídeo Baralho com 52 cartas (sem coringas) Papel impresso com as regras do jogo	Mediante observação; Critérios: participação nas atividades

		Interação com o professor. Relacionar valores das mãos com contagem de agrupamentos.		

Expectativas:

1. O professor evitará o termo Análise Combinatória, utilizando os termos seleção, formação e contagem de agrupamentos;
2. Alguns alunos usarão o termo Análise Combinatória quando o professor fizer a introdução ao plano de aula;
3. Alguns alunos conhecem o pôquer;
4. Os alunos por serem voluntários, têm interesse no pôquer;
5. O interesse pelo jogo manterá o interesse nas atividades de classe;
6. Quando questionados a respeito do valor atribuído às “mãos” de pôquer, os alunos justificarão com expressões: “esta mão é mais difícil de obter ou mais fácil de obter, do que a outra”;
7. O professor traduzirá a expressão, relacionando “mão” com “agrupamento” e “facilidade/dificuldade de obter” com “maior ou menor número de agrupamentos”, o que implica a “contagem” dos agrupamentos.

AULA 2

ASSUNTO: Construção do mini pôquer com baralho de 9 cartas

Aula 2	Objetivos	Atividades/estratégias	Recursos didáticos	Avaliação Recursos/critérios
Aula 2 3h.	Identificar agrupamentos de r objetos, criados a partir de um conjunto com n objetos, $r \leq n$; criar regras para a construção de agrupamentos; contar e comparar o número de agrupamentos obtidos com exigências diferentes. Reconhecer e utilizar o diagrama de árvore como uma forma de organizar os grupos para a contagem e para dar significado para a multiplicação. Utilizar multiplicação e divisão para contagem. Dar significado à multiplicação associando-a às situações de “um-para-muitos”.	**De construção do conhecimento:** Construção de um mini pôquer: Jogo com baralho de 9 cartas, com “mãos de 3 cartas, que não é único; criação das regras, selecionando agrupamentos e contando-os.	Baralho com 9 cartas (VALETE, DAMA, REI em 3 naipes diferentes)	Mediante observação; Critérios: participação nas atividades Mediante resultados: Critérios: Correção na criação das regras do mini pôquer.

Expectativas:

1. O professor utilizará durante a aula os termos conjunto universo, agrupamento e contagem ao referir-se ao baralho, às mãos e às regras para dar valor;
2. Os alunos criarão o mini pôquer inspirados nas regras do pôquer, nomeando as mãos como: um só par, uma trinca, sequência de naipes iguais; sequência com naipes não todos iguais;
3. Os alunos terão clareza da necessidade de contar as mãos para criar as regras do jogo;
4. Esta contagem será fácil no caso da sequência de um só naipe e da trinca, pois a construção dos agrupamentos é imediata e a contagem será feita enumerando-os;
5. Os alunos terão dúvidas e terão que tomar decisões sobre as regras do mini pôquer, no caso, trinca e sequência de um só naipe, pois em ambos os casos, contam-se 3 mãos;
6. Os alunos terão dificuldade na contagem das sequências com naipes não todos iguais e na mão contendo um par (54), pois o número a ser encontrado é bem maior (24), o que inviabiliza a enumeração;
7. O professor vai intervir nestes casos de dificuldades, incentivando o uso do diagrama de árvore, da separação dos problemas em casos, dos princípios aditivo e multiplicativo;
8. Nesta aula, os problemas de contagem não exigem o uso da divisão.

AULA 3

ASSUNTO: Combinações possíveis de se obter com diferentes baralhos

Aula 3 3 h	Objetivos	Atividades/ Estratégias	Recursos Didáticos	Avaliação Recursos/critérios
	1. Perceber a necessidade de dividir;	Relembrar o que ocorreu na aula passada Propõem problemas gerados pelo pôquer, que exigem divisão	Problemas A e B	Observação da participação dos alunos; Coleta da produção dos alunos.
	Dar significado combinatório à divisão	Aula expositiva e utilização do Método das gavetas	Material concreto Gaveta	
	Definir permutação, arranjo e combinação simples sem repetição	Aula expositiva interativa	Folha (Material 1)	

Expectativas:

1. Problema A: **É possível contar todas as “mãos” com 3 cartas possíveis de formar com o baralho de 9 cartas, usando o diagrama de árvore e a multiplicação?** A resposta é conhecida, pois foi calculada na aula anterior, 84 e o problema foi revisto no Material 1. Ao tentar resolver o problema, os alunos farão o diagrama de árvore para UMA carta fixa e chegarão ao produto: 9x8x7 = 504. Mas não conseguirão explicar como chegar ao número já conhecido de 84; os alunos não perceberão a necessidade de dividir;
2. O professor aproveitará este momento, em que a multiplicação não é suficiente para obter a resposta correta, para explicar a divisão;
3. Professor aproveita as contribuições dos alunos e apresenta a solução do grupo, no quadro.
4. Problema B: **Com um baralho de 52 cartas, quantas mãos de 5 cartas quaisquer, pode-se formar?** Alunos acharão difícil resolver desenhando uma árvore. Professor propõe imaginar a árvore, iniciando com qualquer uma das 52 cartas. Com a interação com o professor, e comparando com a solução do Problema A, os alunos chegarão à resposta utilizando multiplicação e divisão.
5. Revendo cada etapa da resolução do problema B, o professor poderá definir com naturalidade Arranjo, Permutação e Combinação, sem utilizar as definições formais dos livros didáticos.

Os alunos, ao interagir, farão perguntas e mostrarão compreensão.

MATERIAL 1 PARA OS ALUNOS

DEFINIÇÕES DE ARRANJOS SEM REPETIÇÃO,
PERMUTAÇÕES, COMBINAÇÕES SEM REPETIÇÃO

ARRANJO

Com a noção de árvore, calculamos todas as mãos de 5 cartas, considerando que a ORDEM das cartas influi na contagem.
Isto é: contamos agrupamentos ORDENADOS.
Iniciando com qualquer uma das 52 cartas, existem:
51 cartas para a segunda posição;
50 para a terceira posição;
49 para a terceira;
48 para a última.
Seguindo a ideia da árvore, cada carta inicial, gera 51x50x49x48 galhos.
Mas temos 52 cartas.
Logo teremos: 52x51x50x49x48 mãos com 5 cartas.

UM ARRANJO É UM AGRUPAMENTO ORDENADO. DOIS ARRANJOS DIFEREM ENTRE SI NÃO SÓ POR SEREM GRUPOS COM OBJETOS DIFERENTES MAS TAMBÉM QUANDO A ORDEM ENTRE OS OBJETOS MUDA.
NO CASO DAS CARTAS, TEMOS ARRANJOS SEM REPETIÇÃO DE OBJETOS.
$A_{52,5} = 52.51.50.49.48$
De um modo geral:
Dado um conjunto universo de n objetos; o número de Arranjos SEM REPETIÇÃO, com p <n objetos é:
$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)... (n-p+1)$

Esta fórmula pode ser escrita de outra maneira, apenas para deixá-la mais sintética:
$A_{n,p} = n! / (n-p)!$

PERMUTAÇÃO
Mas estas mãos não são todas diferentes, pois nesta contagem mãos que só diferem pela ordem são contadas.
Mas estas mãos não são todas diferentes, pois nesta contagem mãos que só diferem pela ordem são contadas.
Por exemplo:
O grupo com 5 cartas
Valete copas/ dama copas/ rei copas/ 7 ouros/2 copas
está sendo contado em todas as suas permutações.
Queremos calcular quantas permutações existem, colocá-las em gavetas e ao final calcular a quantidade de gavetas.

PRECISAMOS CONTAR AS PERMUTAÇÔES DE GRUPOS COM 5 ELEMENTOS.
Por exemplo:
O grupo com 5 cartas
Valete copas/ dama copas/ rei copas/ 7 ouros/2 copas
está sendo contado em todas as suas permutações.
Calculamos todas as PERMUTAÇÔES do grupo de 5:
$P_5 = 5! = 5x4x3x2x1 = 120$

De um modo geral.
UMA PERMUTAÇÃO DE UM GRUPO COM m OBJETOS É OBTIDA COM A TROCA DE POSIÇÂO DOS OBJETOS.
O número de permutações possíveis de obter com um mesmo grupo de p elementos é:
$P_p = p!$

Pode-se dizer que uma permutação é um arranjo formado por todos os objetos do conjunto universo.
SOLICITAR AOS ALUNOS QUE VERIFIQUEM a igualdade entre
$A_{n,p} = n! / (n-p)!$ e $P_n = n!$

COMBINAÇÃO
Queremos calcular as mãos que são diferentes. não são todas diferentes, pois nesta contagem mãos que só diferem pela ordem são contadas.
Isto foi feito, Dividindo o número total de arranjos pelo número de permutações que podem ser feitas em cada arranjo:
(52.51.50.49.48)/5! = **2.598.960**

UMA COMBINAÇÃO É UM AGRUPAMENTO QUE NÃO SE MODIFICA COM A MUDANÇA DA ORDEM ENTRE OS OBJETOS. O QUE IMPORTA SÃO OS OBJETOS PRESENTES NO GRUPO E NÃO SUA POSIÇÃO, QUE È O CASO DE UMA MÃO DE CARTAS.
Acabamos de calcular o número de combinações com 5 cartas possíveis de se formar com 52 cartas.
ESCREVE-SE
$C_{52,5} = A_{52,5}/P_5 = 52.51.50.49.48 / 5!$
De um modo geral, a contagem das combinações de p elementos, retirados de um conjunto de n elementos
$C_{n,p} = A_{n,p}/P_p = n.(n-1).(n-2)....(n-p+1) / p!$
Esta fórmula pode ser escrita de outra maneira, apenas para deixá-la mais sintética:
$C_{n,p} = n! / (n-p)!p!$

AULA 4

ASSUNTO: RESOLVER OS PROBLEMAS QUE JUSTIFICAM AS REGRAS DO PÔQUER PARA O CASO BARALHO 52 CARTAS E PARA UM MINI POQUER BARALHO 16 CARTAS.

Aula	Objetivos	Atividades/ Estratégias	Recursos didáticos	Avaliação Recursos/critérios

Aula 4 3h	Resolver problemas combinatórios gerados pelo pôquer Utilizar as operações aritméticas na resolução (Não é objetivo utilizar fórmulas.)	Resolução de uma coleção de problemas gerados pelo pôquer. Construção de um mini pôquer com baralho de 16 cartas e mãos de 4 cartas.	Problemas (Material 1) Apresentação dos alunos do problema proposto como desafio, na aula 2.	As respostas dos alunos serão analisadas com relação às respostas dadas na primeira aula e nos problemas prévios. O critério é identificar se houve evolução nos esquemas.

Expectativas:

Espera-se que os alunos mostrem evolução nos esquemas (conduta) para resolver problemas, com relação a esquemas utilizados em problemas prévios.

Proposta:

1) Lista com os problemas do pôquer
2) Como pode ser construído um mini pôquer com baralho de 16 cartas e mãos de 4 cartas. Quais são as regras? Justifique as valorações de cada mão obtida.

AULA 5

ASSUNTO: RESOLVER PROBLEMAS PARA CASO DO BARALHO DE 32 CARTAS

Aula	Objetivos	Atividades/ Estratégias	Recursos didáticos	Avaliação Recursos/Critérios
Aula 5 3h	Resolver problemas combinatórios gerados pelo pôquer de 32 cartas Utilizar as operações aritméticas na resolução (Não é objetivo utilizar fórmulas.)	Individual: resolução de uma coleção de problemas gerados pelo pôquer de 32 cartas.	Problemas (Material 1)	As respostas dos alunos serão analisadas. Os erros serão ponto de partida do encontro seguinte. O critério é identificar se houve evolução nos esquemas.

Expectativas:

Espera-se que os alunos mostrem evolução nos esquemas (conduta) para resolver problemas, com relação a esquemas utilizados em problemas prévios.

Espera-se encontrar, nas resoluções, esquemas individuais com erros que não haviam aparecido nas reuniões de grupo.

Lista de problemas

1) De um baralho de pôquer, com 32 cartas, (as figuras são: 7, 8, 9, 10, VALETE, DAMA, REI e ÁS; cada uma aparece em 4 naipes: COPAS, OUROS, PAUS e ESPADAS), sacam-se simultaneamente 5 cartas.

a) Quantas são as extrações possíveis?

Quantas são as extrações nas quais se forma:

b) um par? (São 2 cartas com a mesma figura, e três cartas com figuras diferentes)

Por exemplo:

K♣ K♦ 7♣ 2♠ J♥

c) uma trinca? (São 3 cartas com a mesma figura e 2 com figuras diferentes)

Por exemplo:

8♥ 8♠ 8♣ 2♣ 10♦

d) dois pares? (Um par com uma figura; outro par com outra figura; e a última carta com uma figura diferente)

Por exemplo:

Q♦ Q♠ 5♥ 5♠ 2♣

AULA 6

ASSUNTO: ANÁLISE DOS ERROS QUE OCORRERAM NA RESOLUÇÃO INIDIVIDUAL DE PROBLEMAS

Aula	Objetivos	Atividades/ Estratégias	Recursos Didáticos	Avaliação Recursos/Critérios
Aula 6 3h	Analisar esquemas errôneos, que surgiram na resolução individual de problemas. Utilizar as operações aritméticas na resolução (Não é objetivo utilizar fórmulas.)	Exposição e justificativas dos alunos; discussão dos erros.	Soluções dos alunos para os problemas com baralho de 32 cartas Exposição e discussão oral	A avaliação será feita com lista de problemas para resolução individual. O objetivo será analisar os esquemas.

Expectativas:

Espera-se que os alunos mostrem evolução nos esquemas (conduta) para resolver problemas.

5 EXPERIMENTAÇÃO DIDÁTICA

Este capítulo descreve a prática de ensino, desenvolvida em seis encontros. Simultaneamente à descrição, são inseridos e analisados exemplos de esquemas dos alunos, na resolução dos problemas propostos em cada aula.

Descrição da experimentação

Como primeira atividade da sequência didática, os alunos são convidados a jogar pôquer. A aula inicia com uma cena do filme *Maverick*, em que os principais personagens jogam uma partida decisiva. A seguir começa o jogo, com 7 alunos, em torno de uma mesa. O professor lê as regras. Alguns já as conhecem e explicam aos outros.

Esta é uma atividade inovadora na escola, os pais foram consultados e autorizaram os filhos a participar. Um funcionário do departamento de comunicação estava presente para elaborar uma nota sobre a proposta. O jogo foi escolhido porque é uma atividade em que as noções de contagem surgem naturalmente e que gera muitos problemas interessantes de combinatória.

Sete alunos voluntários estavam presentes, alguns já sabiam as regras do pôquer. O vídeo desencadeou questões sobre o que é sequência, *Straight Flush* e *Royal Straight Flush* e as respostas foram dadas com as regras do jogo (Capítulo III).

A mesa de jogo foi montada com 7 jogadores, incluindo o professor e 2 alunos observadores. Todos muito interessados. Um deles trouxe uma caixa de pôquer oficial com fichas; uns explicavam para os outros.

O jogo começou com entusiasmo.

Nas primeiras rodadas a maior mão encontrada era com apenas um par.

Aluno pergunta: — Só aparece par. Por quê?

Aluno responde: — Por que é mais fácil dar par.

Num certo momento aparece uma mão com 2 pares e outra com sequência.

Aluno pergunta: — Porque sequência ganha de dois pares?

Foram diminuindo o número de jogadores, à medida que perdiam as fichas. Com menos jogadores, começaram a aparecer mais jogos.

Aluno pergunta: — Trinca ganha de dois pares. Por quê?

Aluno responde: — A trinca é mais difícil de achar.

Aluno responde: — A probabilidade de se acharem 2 pares é mais fácil que a trinca.

Aluno pergunta: — *Flush* ganha de sequência. Por quê?

Aluno responde: — É mais provável achar sequência do que *flush*.

Aluno comenta: — Tenho *full hand.* Demorou.

Aluno responde: — Porque é mais difícil.

Aluno comenta: — A trinca é mais difícil que 2 pares que é mais difícil que 1 par.

Aluno comenta: — O *Royal* vale mais porque só pode sair 4 vezes.

O jogo acaba quando se reduz a uma dupla e um aluno ganha do outro. Houve torcida e muito entusiasmo. Os alunos saíram da aula alegres e dispostos a voltar no dia seguinte.

Figura 8 – Alunos na Mesa de Jogo

Análise *a posteriori*

O objetivo da aula foi alcançado, pois ficou claro que o baralho é um grande conjunto, em que se faz a seleção de objetos, cinco cartas, para formar as "mãos" do pôquer. Estas mãos se apresentam de diferentes modos. Há, portanto, regras de construção que permitem montar mãos com um par, dois pares ou uma trinca. A contagem de agrupamentos adquiriu significado. Mãos mais fáceis aparecem em maior número e são mais prováveis de se obter. Facilidade/dificuldade tem a ver com contagem e com probabilidade.

A representação verbal ainda é bastante tosca, coloquial, como se observa na frase: *A probabilidade de se acharem 2 pares é mais fácil que a trinca*.

Com esta observação, ficou decidido que, na Aula 2, o conceito de probabilidade seria introduzido com a linguagem correta.

As **expectativas** ocorreram parcialmente:

1. O professor evitará o termo Análise Combinatória, utilizando os termos seleção, formação e contagem de agrupamentos.

O professor evitou o termo Combinatório mas, guiado por hábitos de vários anos de prática docente, não adquiriu fluência nestes termos (seleção, formação e contagem de agrupamentos) e não os utilizou. Mesmo assim, nas falas dos alunos, estes termos estão implícitos. Ficou decidido reforçar a linguagem e as noções associadas à contagem na Aula 2.

2. Alguns alunos usaram o termo Análise Combinatória quando o professor fez a introdução ao plano de aula.

Um aluno já tinha conhecimento das fórmulas de Combinatória e perguntou se as regras do jogo eram obtidas com estas fórmulas. Os demais, não fizeram associações.

3. Alguns alunos conhecem o pôquer.

Dos oito alunos, seis conheciam o pôquer.

4. Os alunos por serem voluntários, têm interesse no pôquer.

Todos tinham interesse e dedicaram-se à atividade com muito entusiasmo.

5. O interesse pelo jogo manterá o interesse nas atividades de classe.

Esta hipótese foi verificada nos encontros seguintes. O interesse se manteve.

6. Quando questionados a respeito do valor atribuído às “mãos” de pôquer, os alunos justificarão com expressões: *esta mão é mais difícil de obter ou mais fácil de obter, do que a outra*.

Sim, os alunos utilizaram estas expressões e foram mais além, relacionando-as com probabilidade.

7. O professor traduzirá a expressão, relacionando “mão” com “agrupamento” e “facilidade/dificuldade de obter” com “maior ou menor número de agrupamentos”, o que implica a “contagem” dos agrupamentos.

O professor, guiado por hábitos de vários anos de prática docente, não adquiriu fluência nestes termos (seleção, construção, organização e contagem de agrupamentos) e não os utilizou. Ficou combinado com os alunos que isto seria feito nas aulas seguintes.

AULA 2

ASSUNTO: CONSTRUÇÃO DO MINI PÔQUER DE 9 CARTAS

Descrição da aula 2

Na aula 2 estavam presentes, 8 alunos. O professor iniciou a aula voltando ao encontro anterior e apresentando o pôquer com a linguagem desejada: — O baralho é um grande conjunto, conjunto universo, com 52 objetos, cartas, em que se faz a seleção de agrupamentos com cinco objetos, cinco cartas, para formar as "mãos" do pôquer. Estas mãos se apresentam de diferentes modos. Há, portanto, regras de construção que permitem montar mãos com um par, dois pares ou uma trinca. A contagem de agrupamentos adquiriu significado. Mãos mais fáceis aparecem em maior número e são mais prováveis de se obter. Facilidade/dificuldade tem a ver com contagem e com probabilidade.

Logo propôs a atividade de construção de um mini pôquer, com um baralho de nove cartas e com mãos de três cartas, para ser jogado com apenas duas pessoas:

J ♥	Q ♥	K ♥
J ♦	Q ♦	K ♦
J ♠	Q ♠	K ♠

Quadro 5 – O Mini-Pôquer

O professor distribuiu o baralho.

A primeira ideia foi listar as "mãos" possíveis:

1. Um par
2. Uma trinca;
3. Uma sequência com cartas nem todas do mesmo naipe
4. Uma sequência de um só naipe.

Logo após, ficou claro que deveria ser feita a contagem das mãos para, comparando os resultados, decidir sobre quais são as mais valiosas.

TRINCAS

A contagem do número de trincas foi feita por contagem direta, com a formação das trincas, utilizando o baralho: 3

SEQUÊNCIAS

A contagem do número de sequencias de um só naipe foi feita por contagem direta, com a formação das trincas, utilizando o baralho: 3

Os alunos tomaram uma decisão: seguir as regras do pôquer e considerar que a sequência vale mais do que a trinca. Vamos manter esta regra.

SEQUÊNCIAS COM CARTAS DIFERENTES

Para contar o número de sequências com cartas nem todas do mesmo naipe, o baralho (material concreto) não foi suficiente para fazer uma contagem direta.

O professor sugeriu uma árvore: — Fixa o VALETE de PAUS. Quem pode ser a segunda carta? Quem pode ser a terceira carta? Para cada DAMA, temos 3 REIS. São 3 DAMAS, então combinando com o VALETE de PAUS, temos 9 sequências DAMA-REI.

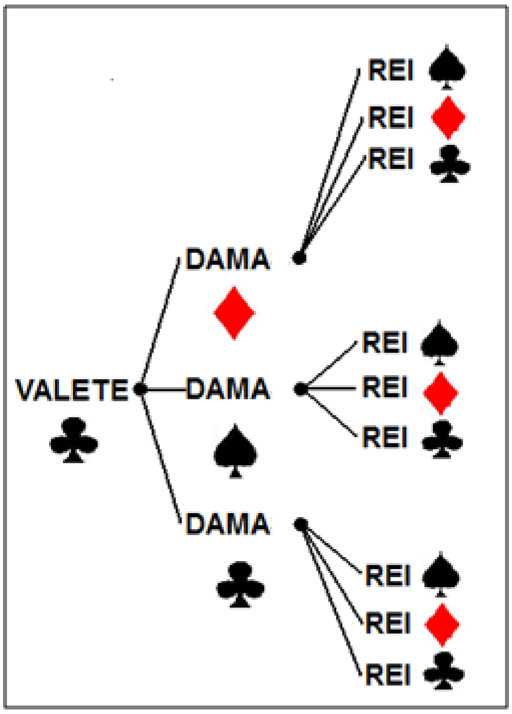


Figura 9 – Árvore Sugerida pelo Professor

A partir daí os alunos generalizaram, usando o princípio **um-para-muitos**. Se para o VALETE de PAUS correspondem 9 sequências VALETE-DAMA-REI; para 3 VALETES, corresponderão 27 sequências VALETE-DAMA-REI.

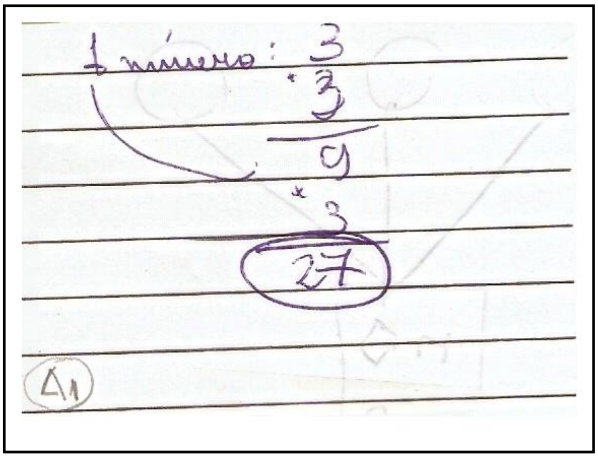


Figura 10 – Generalização Feita pelos Alunos

Solução:

A primeira solução foi: 27

Um dos alunos deu-se conta de que era preciso excluir (subtrair) as sequências de mesmo naipe. Concluíram o total: 27 – 3 = 24.

Número de sequências: 24

TRÊS CARTAS CONTENDO UM PAR

Os alunos articularam dois esquemas:

1) A contagem direta dos pares, usando o material concreto;
2) A representação em árvore com multiplicação.

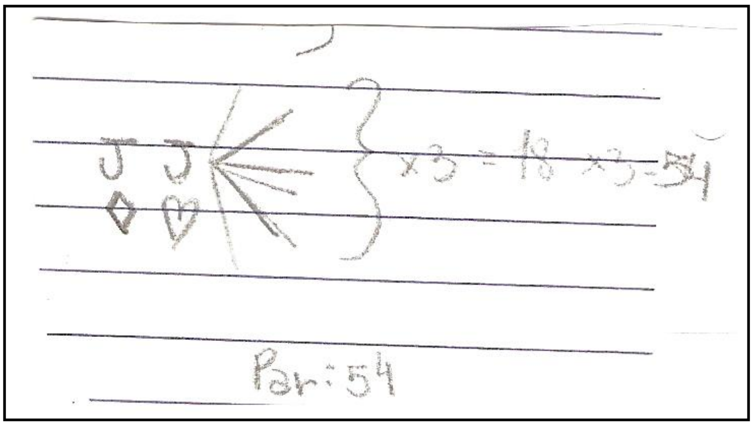


Figura 11 – Representação em Árvore pelos Alunos

A contagem foi feita com interação com o professor. Todos contribuíram.

Construíram 3 pares de Valetes. Para cada par de Valetes, fizeram uma árvore, com 6 ramos (3 Damas, 3 Reis). Multiplicaram por 3, obtendo para os 3 pares de Valete 18 mãos:

3x6 = 18 mãos com três cartas.

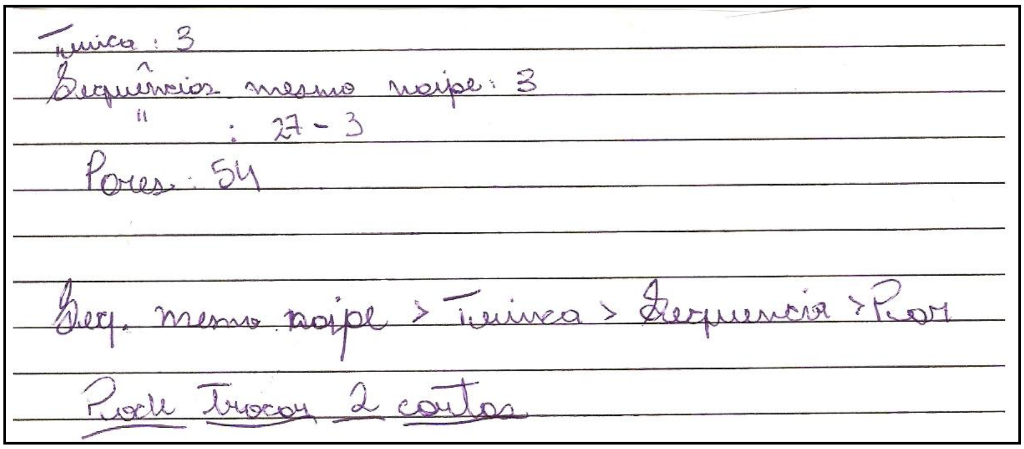
E generalizaram usando a relação **um-para-muitos**.

Se vale para os VALETES, vale para todas as 3 figuras (VALETE, DAMA, REI): 18 x 3 = 54.

Solução: número de pares = 54

A seguir enunciaram as regras do jogo.

REGRAS DO JOGO



Trinca : 3
Sequências mesmo naipe: 3
" : 27 - 3
Pares : 54

Seq. mesmo naipe > Trinca > Sequência > Par
Pode Trocar 2 cartas

Figura 12 – Rascunho das Regras do Jogo

Ao colocarem as regras no quadro branco, o professor perguntou:

— Qual o número total de agrupamentos de 3 cartas que podem ser formados com estas 9 cartas?

Os alunos deduziram que todos os agrupamentos estavam listados no quadro, pois, não havia como tirar três cartas deste baralho e não ter alguma daquelas combinações: três cartas com um par, uma trinca, uma sequência. Basta, então, somá-los.

Número de agrupamentos de 3 cartas obtidos com um conjunto de 9 cartas: 84

O professor perguntou se os alunos saberiam calcular as probabilidades de ocorrência daqueles jogos. Perguntou quais são os "mais prováveis" e os "menos prováveis" de ocorrer.

Eles já sabiam como fazer: dividir o número de ocorrências de cada jogo pelo número total.

E listaram no quadro:

Sequência de um só naipe: 3/84 = 0,036 = 3,6%
Trinca: 3/84 = 0,036 = 3,6%
Sequência de naipes diferentes: 24/84 = 0,2857 = 28,57%
Um par: 54/84 = 0,6428 = 64,28%

Após, o grupo jogou o mini pôquer de 9 cartas, em duplas.

Figura 13 – Alunos Jogando Mini-Pôquer

RESUMO

Dado um baralho com 9 cartas, deduzimos que pode-se formar 84 agrupamentos com 3 cartas.

J ♥	Q ♥	K ♥
J ♦	Q ♦	K ♦
J ♠	Q ♠	K ♠

O cálculo foi feito somando os seguintes CASOS:

CASOS	Tipo de agrupamento MÃOS	Método de contagem	Resultado da contagem
CASO 1	Sequência de um só naipe	Contagem direta	3
CASO 2	Trinca	Contagem direta	3
CASO 3	Sequência de naipes diferentes	Diagrama de árvore Multiplicação: 3x3x3 =27 Subtração das 3 sequências de mesmo naipe	24
CASO 4	Um par	Contagem direta de pares com mesma figura: 3 Multiplicação (pelo número de figuras restantes: 3 x 6 = 18 Multiplicação considerando o número de figuras: 3 x 18 = 54	54
TOTAL	Todas as mãos de 3 cartas possíveis de obter	Adição dos números obtidos em cada caso	84

Quadro 6 – Resumo

O professor lançou como desafio: criar e trazer, em duas semanas, um mini pôquer com um baralho de 16 cartas, com mãos de 4 cartas.

Análise *a posteriori*

Todos os objetivos foram alcançados com mais alguns, não formulados. Ocorreu um caso de utilização da subtração, para excluir casos, ou seja, o jogo deu significado para as operações de multiplicação, adição e subtração. Quanto às expectativas:

1. O professor utilizou os termos desejados, conjunto universo, agrupamento e contagem ao referir-se ao baralho, às mãos e às regras para dar valor.
2. O mini pôquer foi criado como esperado.

3. Os alunos tiveram clareza da necessidade de contar as mãos para criar as regras do jogo;
4. Esta contagem foi fácil, no caso da sequência de um só naipe e da trinca, pois a construção dos agrupamentos é imediata e a contagem foi feita enumerando-os;
5. Os alunos não tiveram dúvidas sobre as regras do mini pôquer, no caso, trinca e sequência de um só naipe, pois seguiram as regras originais do pôquer.
6. Os alunos tiveram dificuldade na contagem das sequencias com naipes não todos iguais e na mão contendo um par, pois os números a serem encontrados são maiores e inviabilizam o esquema de formar e contar os agrupamentos. Estes problemas desestabilizaram e forçaram a ampliação dos esquemas.
7. O professor teve que intervir, nestes casos de dificuldades, incentivando o uso do diagrama de árvore, da separação dos problemas em casos, dos princípios aditivo e multiplicativo.
8. Nesta aula, os problemas de contagem não exigiram o uso da divisão.

AULA 3

ASSUNTO: Combinações possíveis de se obter com diferentes baralhos

Descrição da Aula 3

A aula iniciou com o professor perguntando sobre como foi criado o mini pôquer, no encontro anterior.

Um aluno vai ao quadro branco e explica o jogo, as regras, a hierarquia entre as mãos e justifica, com os cálculos de probabilidades que foram feitos.

O professor lança o **Problema A: É possível contar todas as "mãos" com 3 cartas possíveis de formar com o baralho de 9 cartas, usando o diagrama de árvore e a multiplicação?**

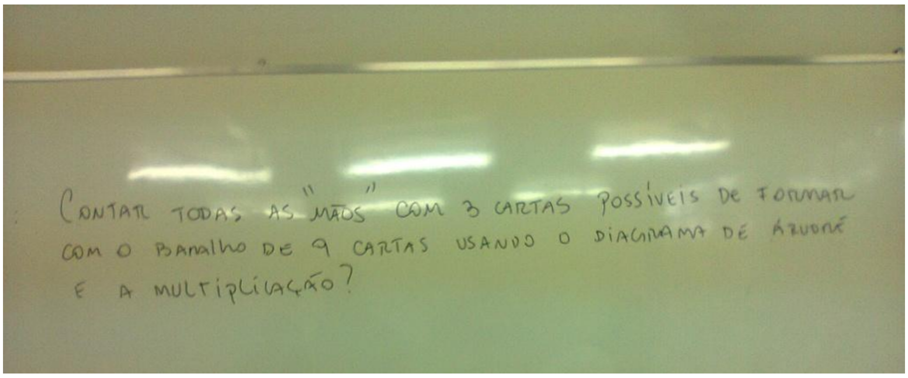


Figura 14 – O Problema A

Os alunos esboçaram árvores, nos cadernos e depois no quadro e ficaram confusos: acharam 9x8x7 = 504. E não conseguiram explicar o número já conhecido de 84.

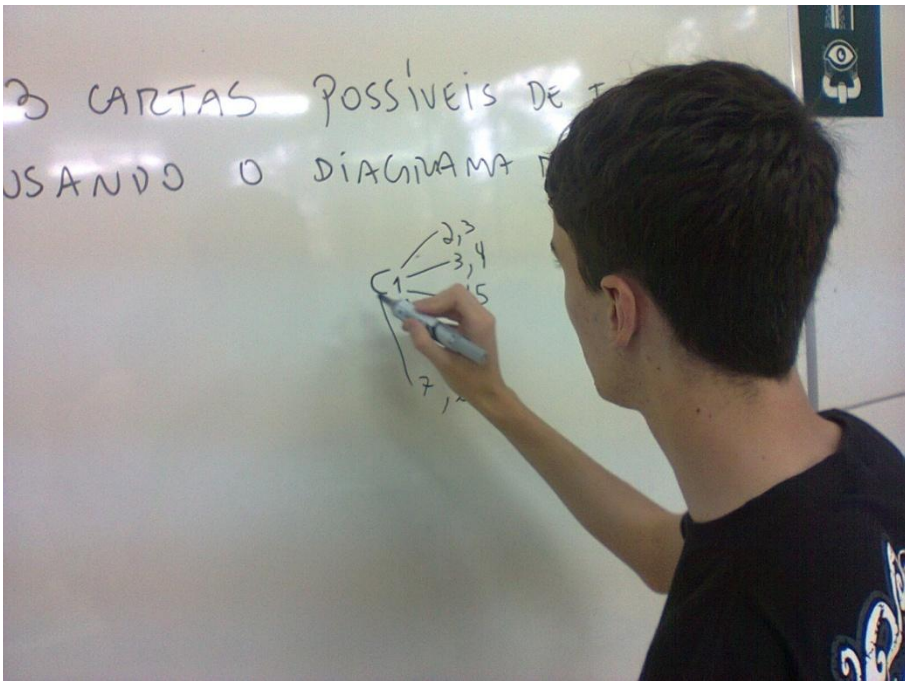


Figura 15 – Aluno Esboçando Diagrama de Árvore

Apenas um deles perguntou — Será que é aquela fórmula de combinação? O professor perguntou qual é a fórmula e ele não lembrava. O aluno disse que, em outra escola, já havia tido contato com a Combinatória, recebera as fórmulas e lembrava de alguns problemas. Claramente não dera sentido aos conceitos.

Os demais, não tinham noção da necessidade de dividir.

O professor aproveitou o momento, em que a multiplicação não é suficiente para obter a resposta correta, para explicar a divisão.

Explicação oral do professor, com auxílio do quadro branco (Quadro 7)

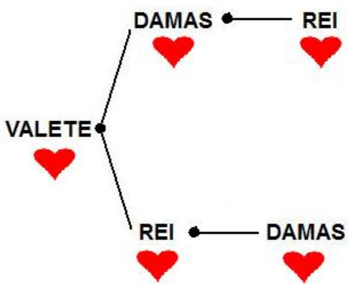
EXPLICAÇÂO ORAL
Nesta contagem, existem conjuntos que são repetidos.
Por exemplo: VALETE COPAS, DAMAS COPAS, REI COPAS.
Esta mão pode aparecer com as cartas em ordem diferente.
De quantos modos diferentes aparecem estas 3 cartas?

MÉTODO DAS GAVETAS
Podemos pensar que temos um móvel com muitas gavetas.
Em cada gaveta estão guardadas 6 grupos de 3 cartas, aqueles que são iguais, apenas diferem pela ordem.
No total, guardamos 504 grupos no gaveteiro, mas o que importa é o número de gavetas. Como calcular o número de gavetas?

MATERIAL CONCRETO: A GAVETA

TOTAL DE GAVETAS 504:6 = 84	**TOTAL DE GRUPOS 504 NÚMERO DE GRUPOS IGUAIS, EM CADA GAVETA 6**					
GAVETA 1	J♥ Q♦ K♠	Q♦ K♠ J♥	K♠ Q♦ J♥	J♥ K♠ Q♦	Q♥ J♥ K♠	K♠ J♥ Q♥
GAVETA 2	J♥ J♠ K♥	K♥ J♥ J♠	J♠ K♥ J♥	J♥ Q♥ J♠	K♥ J♠ J♥	J♠ J♥ K♥

MÉTODO DA PERMUTAÇÃO
Como calcular quantos grupos de 3 cartas diferem apenas pela ordem em que se encontram:
Vamos ver o grupo: VALETE COPAS/ DAMA COPAS/ REI COPAS
De quantos modos diferentes este grupo pode se apresentar, mudando apenas a ordem?
Mudar a ordem significa **PERMUTAR** os objetos do grupo, mudá-los de posição.
Podemos pensar nas vagas que os três objetos podem ocupar:
Na primeira vaga pode estar qualquer uma destas cartas
Vamos ver o caso 1: Iniciar com VALETE COPAS
Cada carta da primeira posição gera 2 permutações diferentes.
Podemos ter 3 cartas na primeira posição, assim temos 3x2 = 6 permutações diferentes
Dizemos que o número que corresponde à permutação de 3 elementos entre si é
$P_3 = 3! = 3x2x1 = 6$



Quadro 7 – Explicação do Professor no Quadro Branco

Preparou um recurso didático com gavetas, para serem preenchidas com as permutações possíveis de se obter com grupos de três cartas. Após várias experiências, com o material, os alunos, concluíram que cada grupo se repetia, 6 vezes.

Figura 16 – Alunos com o Material Concreto

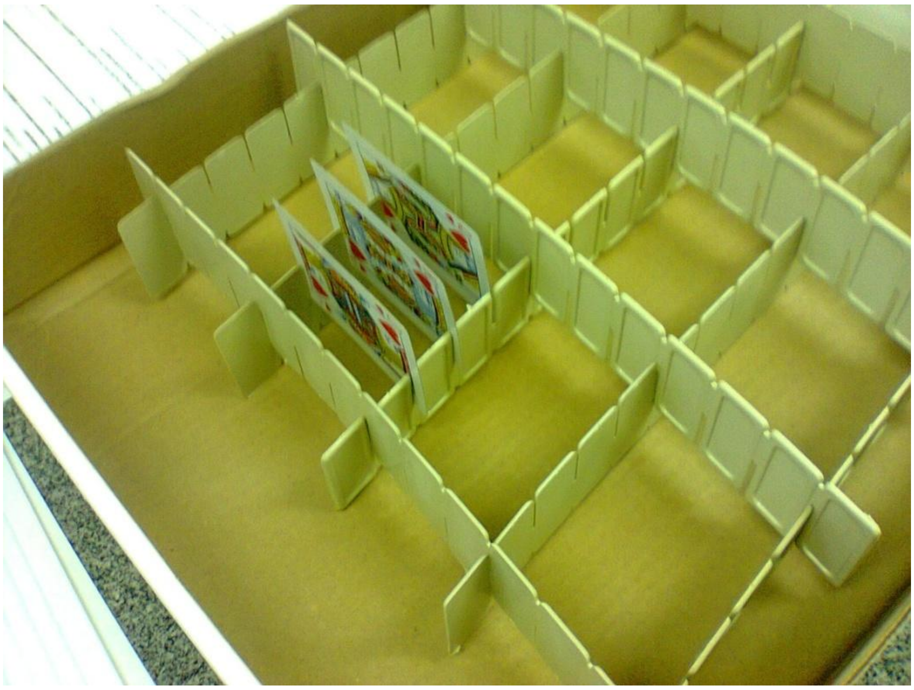


Figura 17 – A Gaveta

O professor definiu permutação. Na sala de aula regular, os alunos já tinham conhecido o fatorial. Alguns lembraram: *É para isto que serve o fatorial, para calcular permutações.*

Importante lembrar que o ensino tradicional de Combinatória inicia com a parte algébrica. Não são propostos problemas, portanto o sentido do conceito de fatorial é apenas numérico: é um símbolo algébrico que representa uma operação numérica.

Ao final, os alunos entregaram o problema resolvido. O esquema foi gráfico e numérico. Começaram com o diagrama de árvore, deram-se conta da multiplicação e dividiram o produto por

6, número correspondente as “trocas” entre as 3 cartas. O esquema dá sentido combinatório à multiplicação e divisão.

Na figura, em primeiro lugar está o raciocínio para o problema com 9 cartas. Em segundo lugar, aparece a solução do problema com 52 cartas.

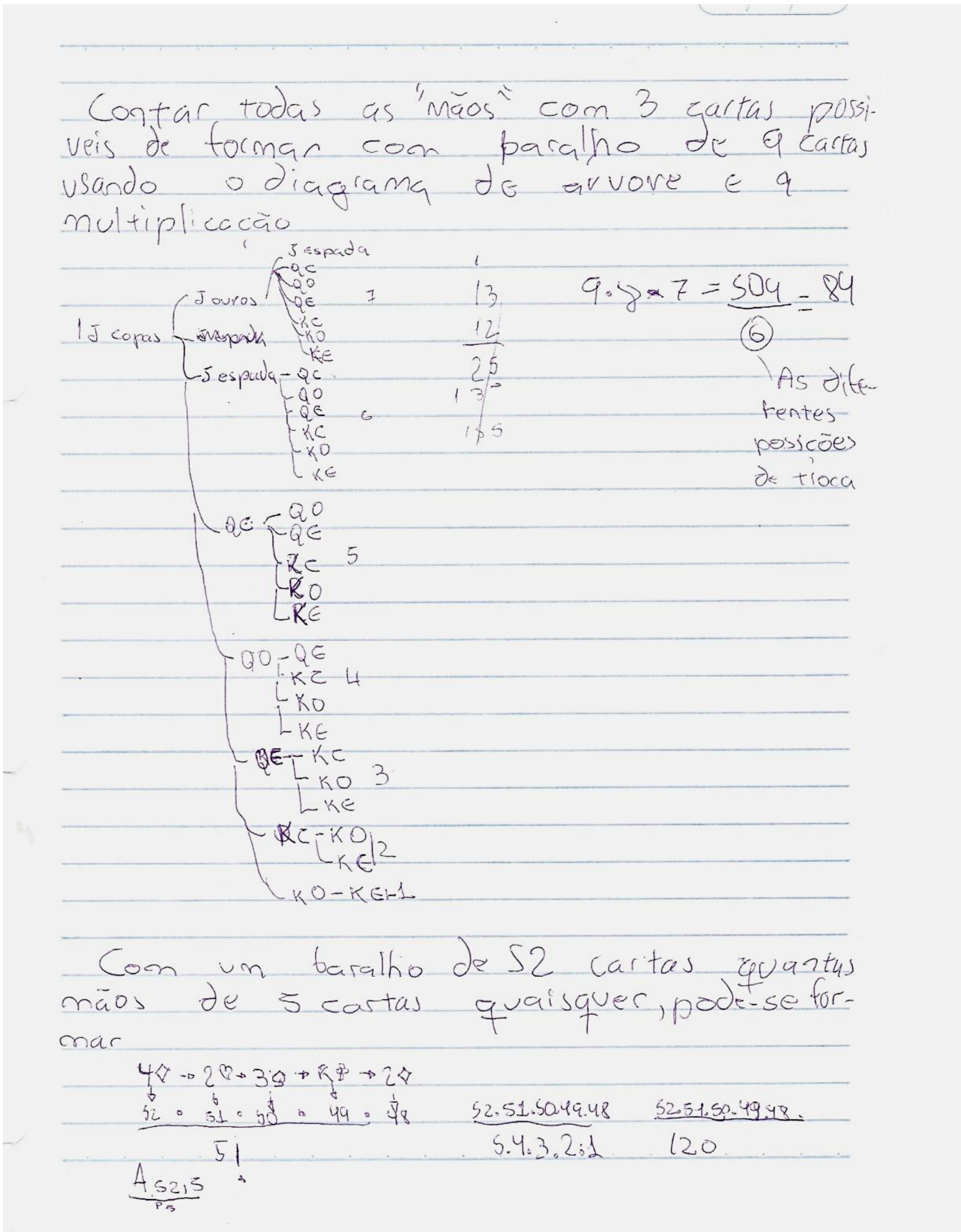


Figura 18 – Rascunho do Problema Resolvido pelos Alunos

Foi natural passar para o universo do baralho de 52 cartas, com as mesmas questões. O professor propôs o **Problema B: Com um baralho de 52 cartas, quantas mãos de 5 cartas quaisquer pode-se formar?**

Alunos acharam difícil resolver desenhando uma árvore, mas concordaram que era natural imaginar a árvore, iniciando com qualquer uma das 52 cartas

Com a interação com o professor, e comparando com a solução do Problema A, os alunos chegaram à resposta utilizando multiplicação e divisão.

Resolvendo, mostram símbolos de fatorial e uma fórmula $(A_{52,5})/P_5$. Esta fórmula, deslocada no contexto, foi dada pelo professor, respondendo a uma pergunta do aluno que conhecia as fórmulas de Combinatória e detectou, na divisão, a contagem de arranjos e a contagem de permutações. O diálogo entre professor e aluno, que levou a escrever esta fórmula, foi interessante para a introdução posterior dos conceitos e formulário.

Revendo cada etapa da resolução do Problema B, o professor definiu Arranjo, Permutação e Combinação, sem utilizar as definições formais dos livros didáticos.

Explicação do professor

ETAPA 1
Iniciando com qualquer uma das 52 cartas, existem:

- 51 cartas para a segunda posição;
- 50 para a terceira posição;
- 49 para a terceira;
- 48 para a última.

Seguindo a ideia da árvore, cada carta inicial, gera 51x50x49x48 galhos. Mas temos 52 cartas.
Logo teremos: 52x51x50x49x48 mãos com 5 cartas. Mas estas mãos não são todas diferentes, pois nesta contagem mãos que só diferem pela ordem são contadas.

ETAPA 2
PRECISAMOS CONTAR AS PERMUTAÇÕES DE GRUPOS COM 5 ELEMENTOS.
Por exemplo: O grupo com 5 cartas **VALETE COPAS / DAMA COPAS / REI COPAS / 7 OUROS /2 COPAS**
O grupo está sendo contado em todas as suas permutações. Queremos calcular quantas são as permutações, colocá-las em gavetas e ao final calcular a quantidade de gavetas.
Novamente, é difícil resolver desenhando uma árvore, mas podemos imaginar a árvore.

Fixando o valete de copas, a segunda posição pode ser ocupada por 4 cartas
Quando a segunda posição estiver ocupada, restam 3 cartas para a terceira posição.
Quando a segunda posição estiver ocupada, restam 2 cartas para a terceira posição.
Quando a segunda posição estiver ocupada, restam 1 carta para a terceira posição.

Assim, o valete de copas, gera vários galhos na árvore: 4x3x2x1 = 24
O mesmo raciocínio vale para todas as 5 cartas, assim temos: 5x4x3x2x 1= 120 permutações de um mesmo grupo de cartas.
Permutações de 5 elementos: $P_5 = 5! = 5x4x3x2x1 = 120$

ETAPA 3
Pensando no total de gavetas, teremos (52x51x50x49x48)/ 5! Resposta: 2.598.960 mãos diferentes

Quadro 8 – Explicação do Professor

Análise *a posteriori*

Os objetivos foram alcançados. Nesta aula, foi possível definir e formalizar os conceitos de arranjo, combinação e permutação, com sentido. O sentido destes conceitos está nos problemas e nos esquemas de resolução. Antes deste encontro, os esquemas privilegiados foram formação e contagem direta dos grupos, gráficos (diagrama de árvore) e numéricos (operações aritméticas). A partir deste encontro, pode-se também utilizar esquemas algébricos.

AULA 4

Descrição da Aula 4

Os alunos resolveram no quadro e nos cadernos, os problemas do pôquer, mostrando esquemas bastante evoluídos.

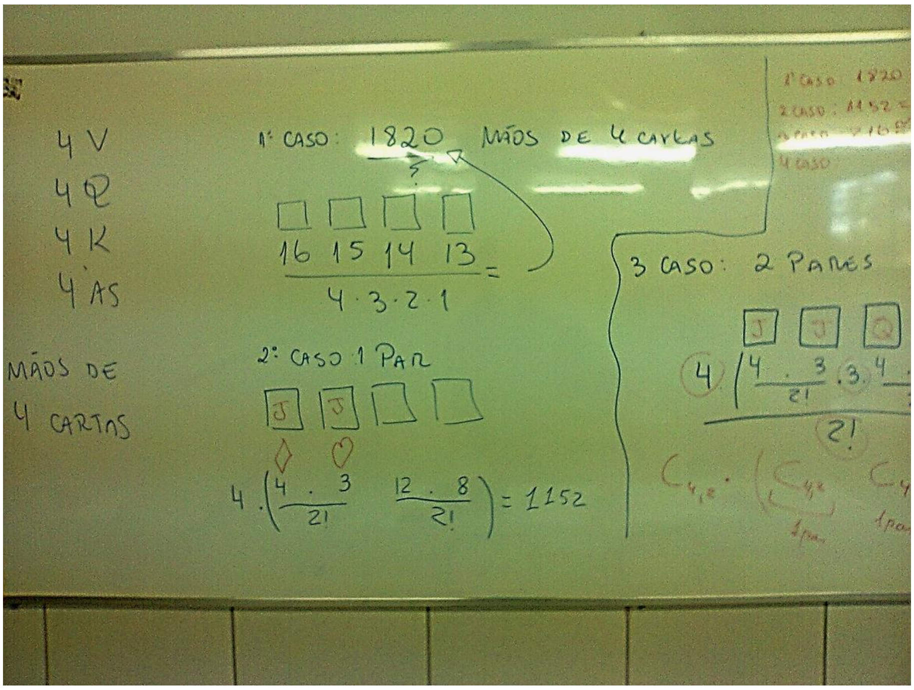


Figura 19 – Resolução da Aula 4 pelos Alunos

Utilizaram esquemas verbais, gráficos, organizando as mãos do pôquer de modo a facilitar os problemas; numéricos (operações aritméticas) e algébricos (fórmula de Combinação).

Aplicaram os conceitos de: multiplicação e divisão; agrupamento sem repetição.

É interessante a organização gráfica, semelhante àquela proposta por Lima et al (2006).

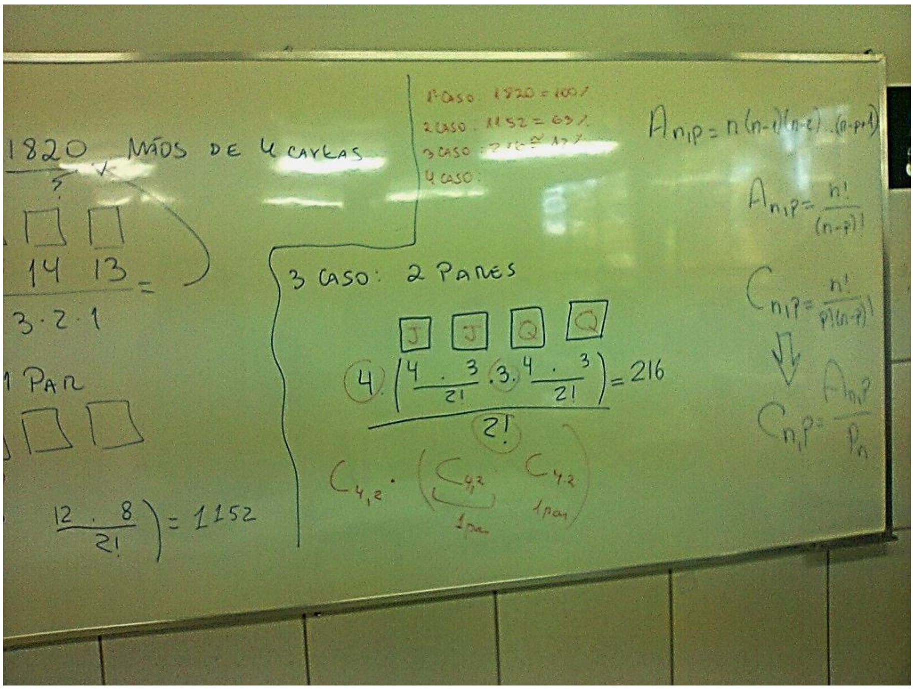
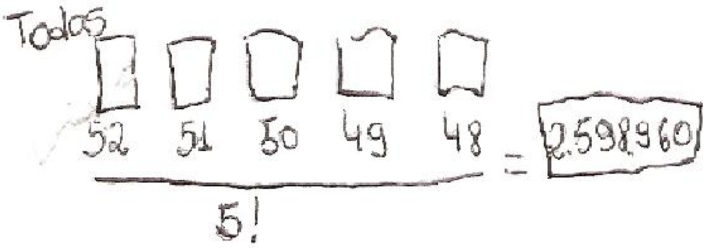


Figura 20 – Organização Gráfica dos Alunos no Quadro Branco

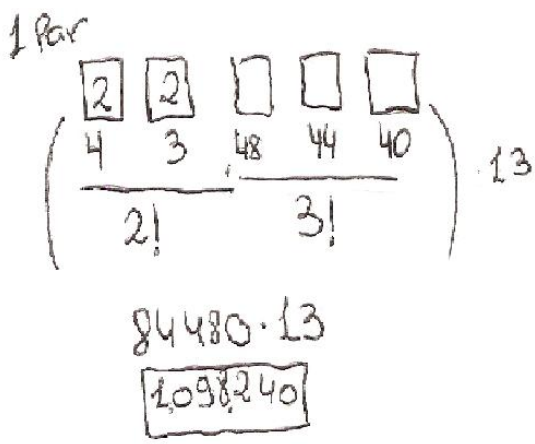
Problema 1: Com um baralho de 52 cartas, quantas “mãos” de 5 cartas cada podemos formar?

Solução dos alunos. Os alunos explicaram o raciocínio usando a expressão “vaga”: *Temos 5 vagas e cada vaga é ocupada por uma carta e essa carta não se repete na vaga seguinte. Precisa dividir pelo fatorial de 5 pois a ordem das cartas não altera a mão.*



Problema 2: Com um baralho de 52 cartas, quantas mãos em que aparece 1 par podemos formar?

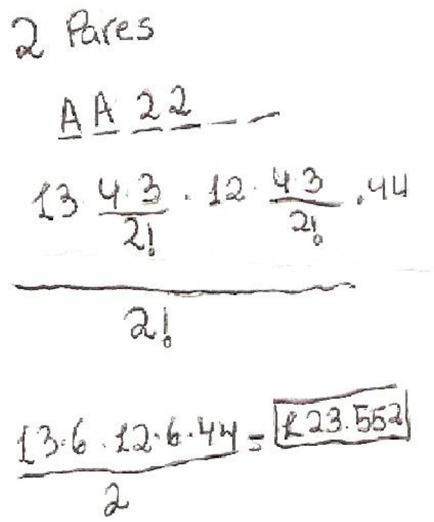
Solução dos alunos: *Fixa um par, por exemplo, o par de 2. Como são 4 naipes para a primeira vaga, sobram 3 para a segunda. Divide por 2! pois a ordem das cartas nesse caso não altera a mão. Como o baralho é de 52 cartas, tira-se essas 4 e sobram 48 para a terceira vaga, como nessa vaga não pode ser uma carta já usada nas vagas anteriores, tiraram as 4 e sobrou 44 e o*



mesmo se faz na última vaga. Divide por 3! pois a ordem não altera a mão. Tudo foi feito para o par de 2. Mas há 13 figuras no baralho. Precisa multiplicar o resultado por 13. O baralho vai de Ás *a* Rei.

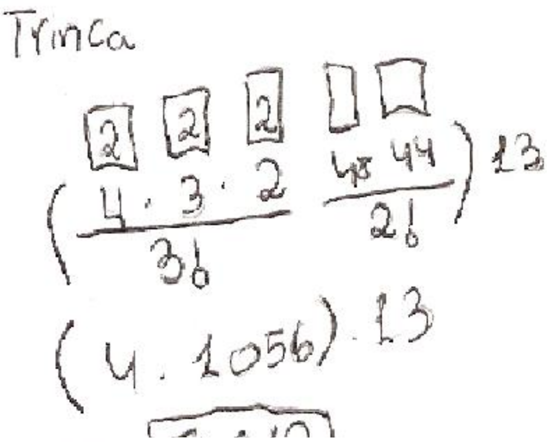
Problema 3: Com um baralho de 52 cartas, quantas são as mãos em que aparecem 2 pares?

Solução dos alunos*: Fixa dois pares, Ás e 2. Calcula o número de diferentes pares de ás, multiplicando quatro por 3 dividindo por 2. Multiplica por 13 porque este cálculo pode ser feito para qualquer um dos 13 figuras. Calcula o número de diferentes pares de 2, multiplicando quatro por 3 dividindo por 2. Multiplica por 12 porque o segundo par não pode ser igual ao primeiro. Divide por 2! porque os dois pares podem aparecer na mão com ordem diferente. Multiplica o valor final por 44 pois das 52 cartas foram retiradas 8 cartas.*

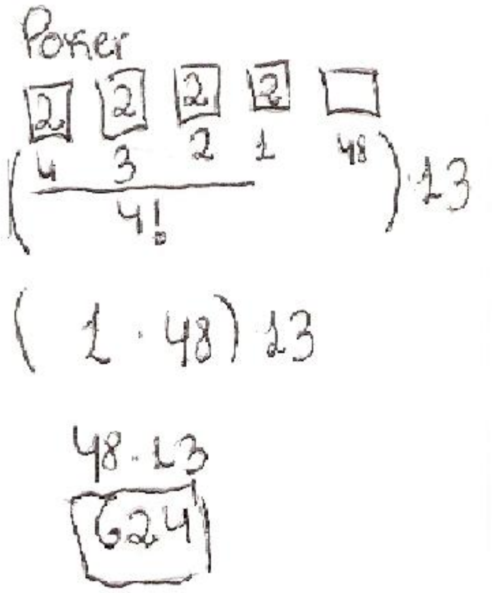


Problema 4: Com um baralho de 52 cartas, quantas são as mãos em que aparecem trincas?

Solução dos alunos*: Fixa uma carta e monta uma trinca com ela. Como são 4 naipes a vaga 1 tem 4 possibilidades a vaga 2 tem 3 possibilidades e a vaga 3 tem 2 possibilidades. Divide por 3! pois a ordem dessas cartas não altera a mão. Sobram 48 cartas para a vaga seguinte. Como a mão apresenta só uma trinca, a última carta não poderia ser igual à anterior, logo restam 44. Divide novamente pelo fatorial de 2, pois a ordem das duas cartas não influencia. Multiplica por 13, porque o mesmo cálculo pode ser repetido para qualquer uma das 13 figuras do baralho.*

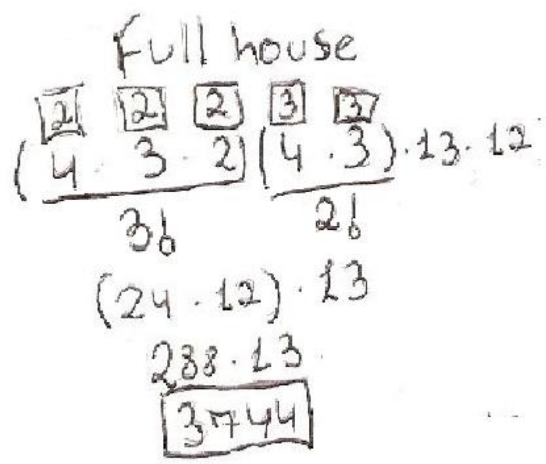


Problema 5: Com um baralho de 52 cartas, quantas são as mãos em que podemos formar uma quadra (*poker*)?



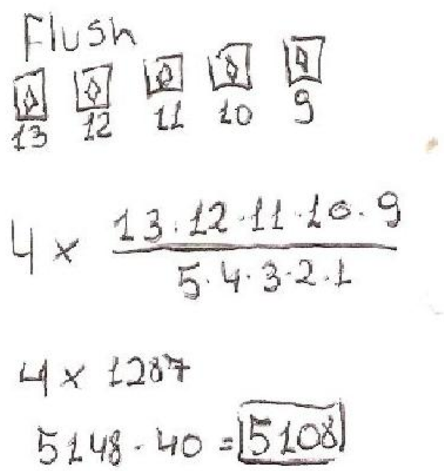
Solução dos alunos*: Fixa uma carta, o 2. Como temos 4 naipes no baralho são quatro números “dois”. Tem 4 na primeira vaga, 3 na segunda, 2, na terceira e resta só um na última vaga. Como a ordem das cartas não influencia, dividimos pelo fatorial de 4. Multiplica por 48, pois são as figuras que sobraram (52 – 4). Se vale para o 2 vale para as treze outras figuras do baralho. Multiplica por 13.*

Problema 6: Com um baralho de 52 cartas, quantas são as mãos em que podemos formar uma fula (*Full house*)?



Solução dos alunos*: Separa em duas etapas. Fixa uma carta para iniciar (no caso o 2) na primeira etapa e faz a mesma coisa na segunda etapa (carta 3). Então ficam 4 possibilidades para a primeira carta, que são os 4 naipes, 3 para a segunda e 2 para a última da trinca. Precisa dividir por 3! porque a ordem das cartas não muda a trinca. No par, ficam 4 possibilidades para a primeira carta, 3 para a segunda do par. Precisa dividir por 2! porque a ordem das cartas não muda o par. Multiplico por 13, porque o raciocínio para as trincas se repete para todas as cartas de Ás a* R*EI. Multiplico por 12, porque o raciocínio para o par se repete paras 12 cartas restantes, afora aquela que já apareceu na trinca.*

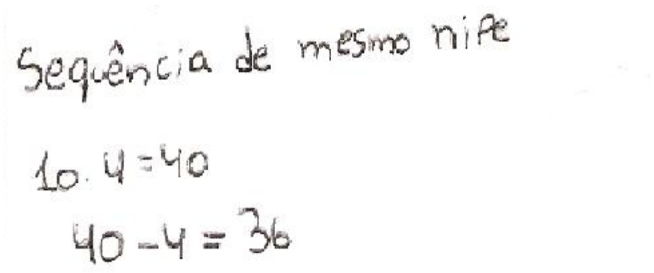
Problema 7: Com um baralho de 52 cartas, quantas são as mãos em que podemos formar uma sequência de mesmo naipe (*Flush/Cor*)?



Solução dos alunos*: Fixa um naipe (o de* O*UROS). São 13 possibilidades para a primeira posição (as 13 cartas de ouros de Ás a* R*EI), 12 para a segunda e assim por diante. Divide por 5! Pois a ordem das cartas não muda a mão. Multiplica por 4 pois são 4 naipes distintos.*

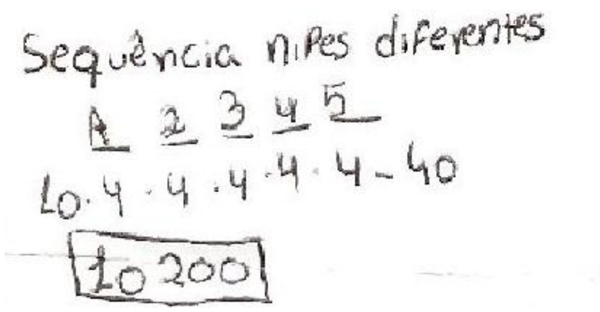
Problema 8: Com um baralho de 52 cartas, quantas são as mãos em que podemos formar uma sequência de naipes distintos (*Straight*)?

Solução dos alunos: *Escolhe uma sequência qualquer (no caso do Ás ao 5). São 4 possibilidades de naipes para cada vaga desta sequência. Mas são 10 sequências possíveis por isso multiplica por 10 (começando com Ás, com 2, com 3, até 10). Diminui 40, o número de sequências de naipes iguais.*



Problema 9: Com um baralho de 52 cartas, quantas são as mãos em que podemos formar uma sequência de mesmo naipe (*Straight*)?

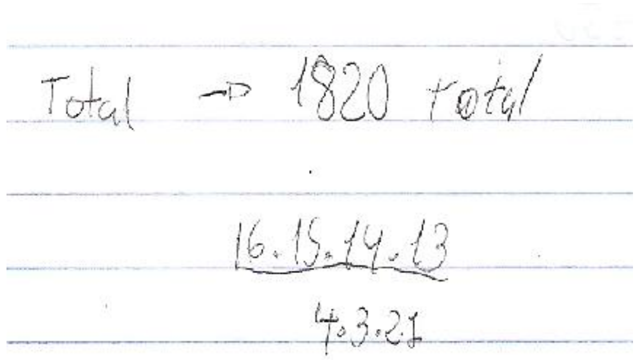
Solução dos alunos: *São 10 sequências e 4 naipes. Subtrai 4 que é o número total de Royal Straight Flush.”*



Mini *Poker* com 16 cartas.

Problema 1: Com um baralho de 16 cartas, quantas mãos, com 4 cartas, podemos formar?

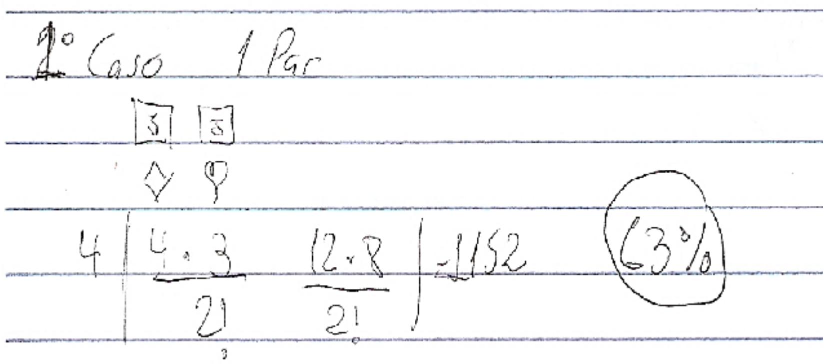
Solução dos alunos:



Interpretação do professor: *O processo de resolução é o mesmo do de 52 cartas. Há 16 possibilidades para a primeira vaga, 15 para a segunda e assim por diante. Dividiram por 4! pois são 4 cartas e a ordem das cartas não influencia na mão.*

Problema 2: Com um baralho de 16 cartas, quantas são as mãos com 4 cartas em que aparece 1 par?

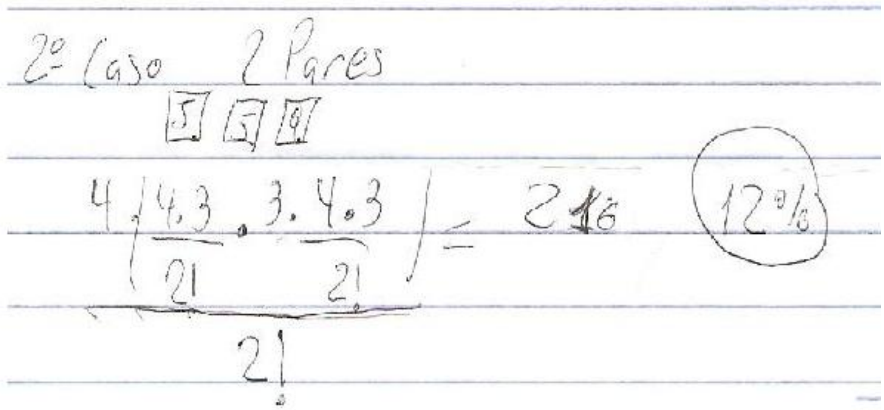
Solução dos alunos:



Interpretação do professor: *Eles fixaram um par qualquer, o de 5. São 4 possibilidades para a vaga 1, 3 para a vaga 2 e dividiram por 2! porque a ordem não influencia. Multiplicaram por 4, pois neste caso estão trabalhando só com 4 tipos de cartas. Sobraram 12 cartas para a terceira vaga e, como na última vaga não pode ocorrer uma carta igual à anterior, restaram 8 possibilidades. Novamente dividiram por 2! Eles ainda expressaram a resposta em percentagem de acontecimentos, nesse caso, 63%.*

Problema 3: Com um baralho de 16 cartas, em quantas mãos com 4 cartas aparecem 2 pares?

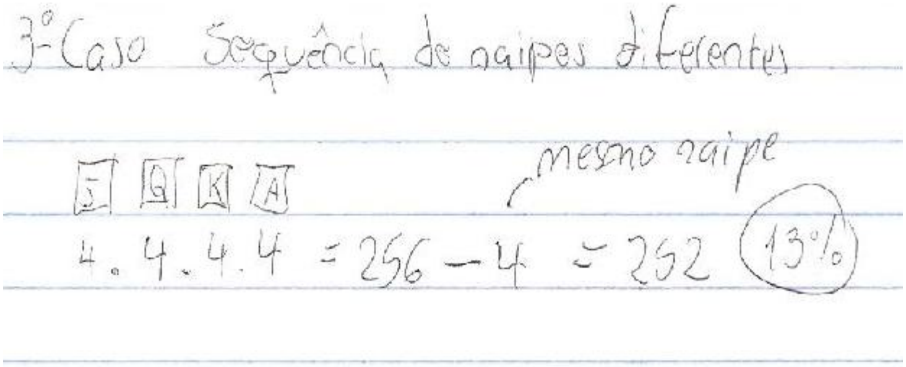
Solução dos alunos:



Interpretação do professor: *É interessante notar a ampliação dos esquemas. Este é considerado um problema difícil, mesmo com um número de cartas menor. Separaram novamente em duas etapas. 4 possibilidades para a primeira e 3 para a segunda. Multiplicaram por 4, pois são 4 valores distintos de cartas e por 3, pois o primeiro valor foi definido no primeiro par. Para a segunda etapa fizeram o mesmo raciocínio. Dividiram por 2 fatorial duas vezes pois a ordem das cartas não influenciava na mão. Por fim, dividiram novamente por 2! Pois os "pares" trocando de posição continuam sendo os mesmos!*

Problema 4*:* Com um baralho de 16 cartas, quantas são as mãos com sequências de naipes distintos?

Solução dos alunos:


3º Caso Sequência de naipes diferentes

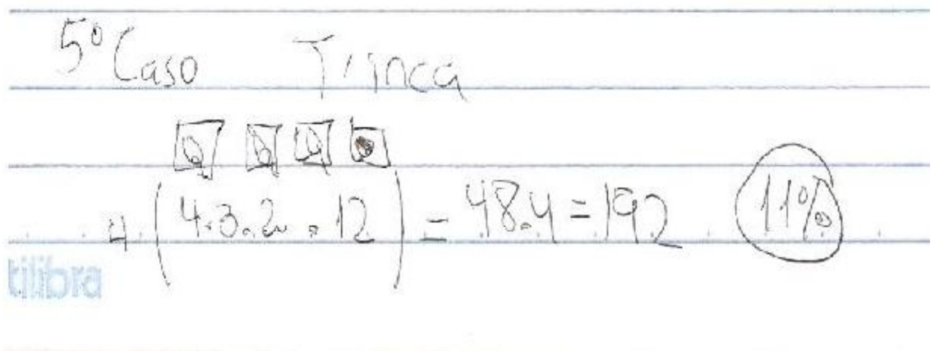
J Q K A mesmo naipe

4 . 4 . 4 . 4 = 256 − 4 = 252 13%

Interpretação do professor: *Como o baralho possui 16 cartas, a única sequência possível é a de* V*ALETE*, D*AMA*, R*EI e* Á*S. São 4 naipes para cada uma delas logo 4 x 4 x 4 x 4 = 256. Subtrair os casos de serem de mesmo naipe, o que é facilmente calculado.*

Problema 5: Com um baralho de 16 cartas, quantas são as mãos com trincas possíveis?

Solução dos alunos:


5º Caso Trinca

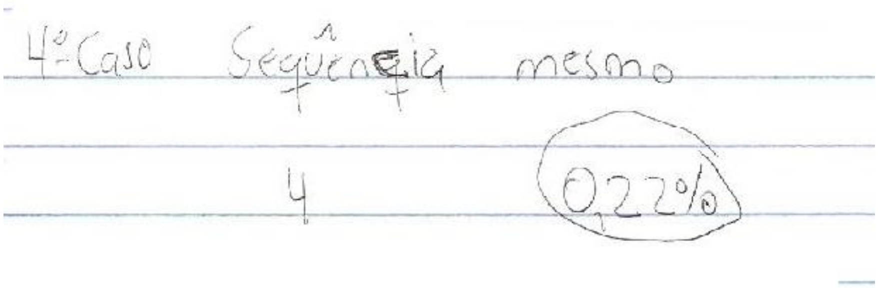
Q Q Q ●

4 . (4 . 3 . 2 . 12) = 48 . 4 = 192 11%

Interpretação do professor: *Neste caso eles fixaram uma trinca. 4 chances para a primeira casa, 3 para a segunda e 2 para a terceira. Multiplicaram por 4 pois são as cartas possíveis de se encaixar na mão. Na última casa sobraram 12 possibilidades, pois 16 – 4 = 12. Nota-se que eles não usaram o produto 3 x 2 pois teriam que dividir por 3!. Por isso a resposta deu certo.*

Problema 6: Com um baralho de 16 cartas, quantas são as mãos com sequências de mesmo naipe?

Solução dos alunos:


4º Caso Sequência mesmo

4 0,22%

Interpretação do professor: *Esta é fácil de contar, pois temos 4 naipes e 4 cartas podendo formar 4 sequências.*

AULA 5

ASSUNTO: RESOLVER PROBLEMAS O CASO DO BARALHO DE 32 CARTAS

Expectativas:

Espera-se que os alunos mostrem evolução nos esquemas (conduta) para resolver problemas, com relação a esquemas utilizados em problemas prévios.

Espera-se encontrar, nas resoluções, esquemas individuais com erros que não haviam aparecido nas reuniões de grupo.

Segue abaixo uma parte da prova feita por um aluno em que ele demonstrou uma considerável evolução na resolução dos problemas.

REDE
LA SALLE
SANTO ANTÔNIO

Prova 2º ano-3º Trimestre
Professor Ricardo R. Chilela

6,5

Em todas as questões devem aparecer os desenvolvimentos completos.

Nome: Matheus **Data:**

1) De um baralho de pôquer, com 32 cartas, (as figuras são: 7, 8, 9, 10, valete, dama, rei e ás; cada uma aparece em 4 naipes: copas, ouros, paus e espadas), sacam-se simultaneamente 5 cartas.

a) Quantas são as extrações possíveis?

$\underbrace{\overline{32}\ \overline{31}\ \overline{30}\ \overline{29}\ \overline{28}}_{P5}$ $\dfrac{32.31.30.29.28}{5!}$

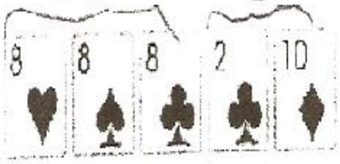
Quantas são as extrações nas quais se forma:

b) um par? (**São 2 cartas com a mesma figura, e três cartas com figuras diferentes**)
Por exemplo:

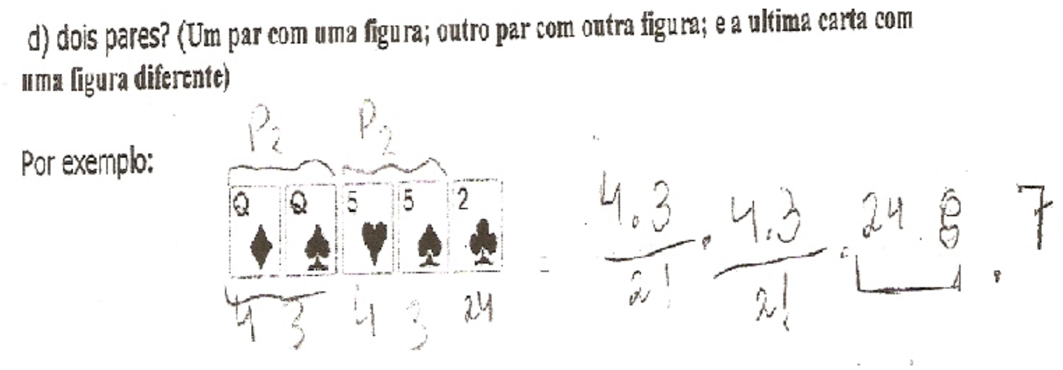
$\dfrac{4.3}{2!}\ \dfrac{28.24.20}{3!}$

c) uma trinca? (**São 3 cartas com a mesma figura e 2 com figuras diferentes**)

Por exemplo:



$\dfrac{4.3.2}{P_3}\ \dfrac{28.24}{2!}$



Evolução dos esquemas

Análise de um problema resolvido por um aluno no segundo dia da experiência, após ter contato com o diagrama de árvore.

Com baralho de nove cartas e com mãos de três cartas, quantas mãos podem ser formadas com um par e uma outra carta (que não forme trinca).

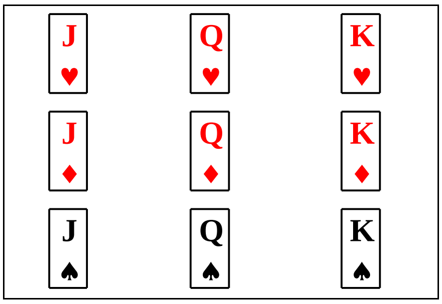
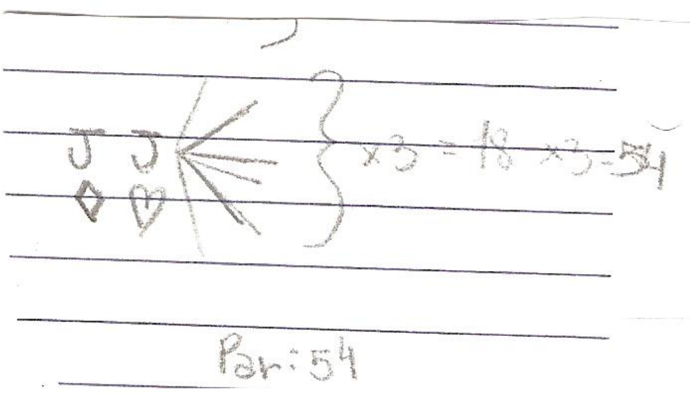


Figura 21 – Baralho de Nove Cartas

Esquema de resolução:



Esquema gráfico (diagrama de árvores) e numérico (operação de multiplicação)

1) Representa o agrupamento com um diagrama de árvore incompleto;
2) Indica que para cada par, há 6 ramos na árvore, ou seja 6 cartas que podem acompanhar;
3) Por contagem direta sabe que há 3 pares de valete. Multiplica 3x6 para calcular o número de mãos com um par de valetes e uma terceira carta;
4) Percebe que o esquema é válido para todas as três figuras, Valetes, Damas e Reis, logo, poderia ter três árvores como esta, obtendo como cálculo final, 3x 18 = 54.

Representações:

Diagrama de árvore, operação de multiplicação.

Conceitos-em-ação:

Contagem; multiplicação

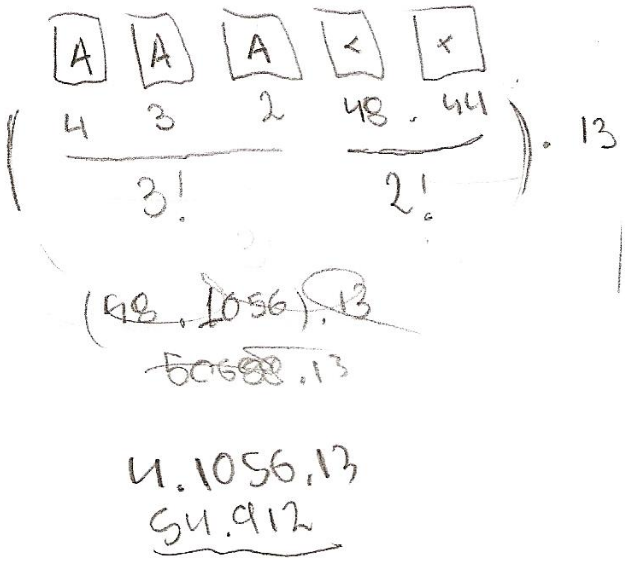
Teoremas-em-ação

1. Quando possível, a maneira mais rápida e segura de contar é a contagem direta.
2. O diagrama de árvore sugere a multiplicação.
3. A expressão “para cada um corresponde n” implica um produto de dois números, de tal modo que a relação (1:n) se mantenha.
4. A contagem de agrupamentos exige multiplicação.
5. Pode-se iniciar a contagem fixando um determinado objeto e fazendo a contagem dos agrupamentos, para este caso particular; a seguir, faz-se a generalização para todos os demais, usando o princípio multiplicativo.

Análise de um p*roblema resolvido por um aluno no último dia da experiência didática*

Num jogo de pôquer com um baralho de 52 cartas, quantos agrupamentos de 5 cartas contém uma trinca?

Esquema gráfico, numérico e simbólico (fatorial)



Esquema:

1) Representa o agrupamento de 5 cartas em duas partes;
2) Cada parte representa um tipo de agrupamento diferente que participa no grupo maior (as trincas; as outras duas cartas);
3) Reduz o problema das trincas a um caso mais simples, escolhendo uma figura do baralho que se apresenta em 4 naipes; utiliza a multiplicação 4x3x2 para representar o raciocínio. Este pode ser o Princípio da Contagem: pode-se fazer 4 escolhas, logo após 3 escolhas e logo após 2 escolhas, portanto tem-se 24 modos de criar trincas, para uma figura do baralho. Reconhece que as trincas são agrupamentos não ordenados e faz a divisão pelo número de permutações de uma trinca (3!);
4) Investigam quais e quantas cartas podem preencher a segunda vaga (não pode utilizar a figura da trinca em seus 4 naipes), logo, sobram 48 cartas, para primeira posição do segundo grupo; a carta utilizada não pode mais aparecer, em seus 4 naipes, logo, sobram 44 cartas para a segunda posição; novamente, aplica a multiplicação e a divisão para o cálculo de números de agrupamentos de 2 cartas;
5) Multiplica o resultado da contagem das trincas e das duas cartas, de acordo com a ideia que “para cada trinca existem n agrupamentos de 2 cartas”;
6) Expande o raciocínio para todas as 13 figuras do baralho, multiplicando o subtotal por 13.

Representações:

Organização gráfica; números; operações aritméticas; símbolo de fatorial

Conceitos-em-ação:

Conceitos e teoremas em ação.

Conjunto universo: o baralho de 52 cartas, o baralho com 13 figuras de ÁS a REI; o baralho com 4 naipes.

Em cada problema, os alunos utilizam estes diferentes cardinais para seus cálculos. Os números-chave são: 52, 13 e 4.

Agrupamentos: mãos de 5 cartas; par de 2 cartas; trinca de 3 cartas; quadra de 4 cartas.

Agrupamentos sem repetição: com um só baralho, não há repetição das cartas.

Agrupamentos ordenados e não ordenados.

Seleção: retirar os agrupamentos do conjunto maior, considerando a cada problema os naipes ou as figuras e o baralho todo.

Multiplicação e divisão.

Teoremas-em-ação

1. Quando um problema exige a contagem de agrupamentos constituídos por partes diferentes, pode-se organizar convenientemente para contar separadamente o número de sub-agrupamentos, de cada parte.
2. Cada parte é ocupada por um certo número de sub-agrupamentos, obtido a partir da análise do problema e a contagem final é o produto dos números obtidos na contagem das partes.
3. A expressão "para cada um corresponde *n*" implica um produto de dois números, de tal modo que a relação (1:*n*) se mantenha. Ou: *se há x modos de tomar uma decisão D1 e, tomada a decisão D1, há y modos de tomar a decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é x·y.*
4. A contagem de agrupamentos não ordenados exige multiplicação e divisão.
5. O cálculo do número de conjuntos não ordenados de *p* objetos extraídos de um conjunto maior de n objetos, exige a divisão pelo número de permutações *p*!.
6. Pode-se iniciar a contagem fixando um determinado objeto e fazendo a contagem dos agrupamentos, deste caso particular; a seguir, faz-se a generalização para todos os demais, usando o princípio multiplicativo.

AULA 6

ASSUNTO: ANÁLISE DOS ERROS QUE OCORRERAM NA RESOLUÇÃO INDIVIDUAL DE PROBLEMAS

Análise

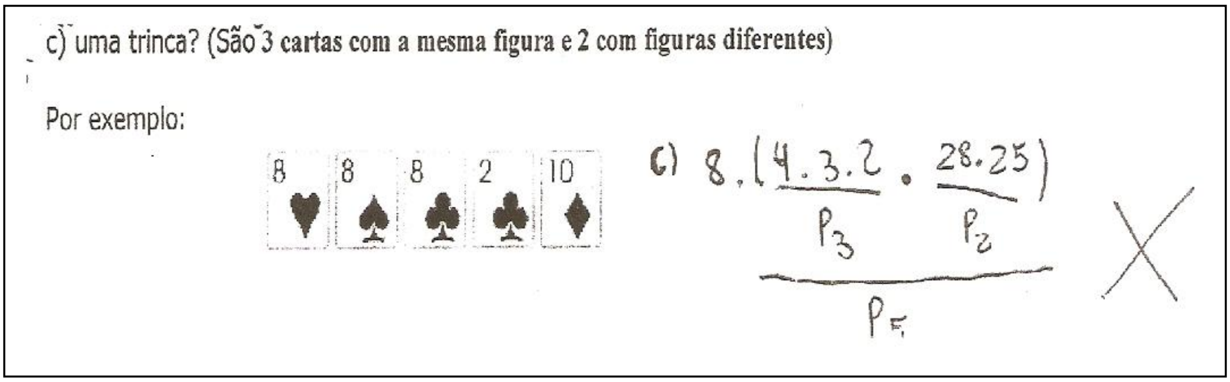
Percebe-se ampliação do primeiro esquema, na análise do segundo. O segundo problema é muito mais complexo do que o primeiro:

1) No segundo problema o cardinal do conjunto universo é 52 (o baralho). Não é possível fazer contagem direta e nem é possível utilizar o diagrama de árvores.
2) O aluno utiliza a operação de multiplicação com auxílio apenas de uma organização gráfica que facilita a visualização do problema.
3) A representação gráfica é uma evolução com relação ao primeiro esquema.
4) O segundo problema exige investigar a ordem dos agrupamentos e perguntar pela necessidade de dividir, o que não ocorre no anterior.

Lembrando as análises dos problemas prévios, percebia-se que os alunos só utilizavam esquemas de contagem direta com representações que possibilitassem a listagem dos agrupamentos. Um único problema pedia a divisão e esta operação não apareceu. Esta comparação também demonstra a ampliação dos esquemas.

Problemas com a divisão

Ao final da experiência, constatou-se evolução nos esquemas, uso da multiplicação com significado, uso de organização gráfica adequada. Mas ainda aparecem erros no uso da divisão, como nas figuras abaixo:

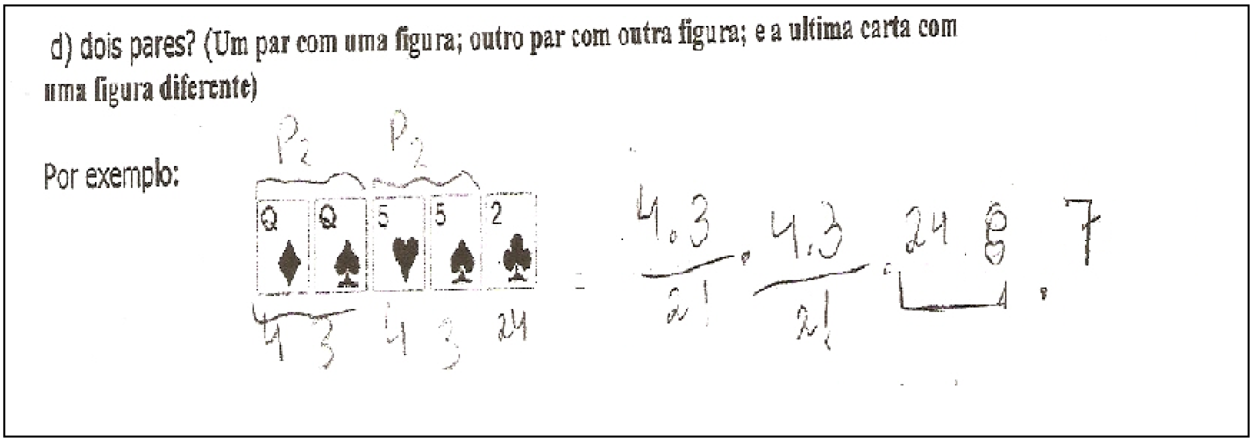


Nota-se que o aluno dividiu pelo fatorial de 5 toda a expressão, dando a entender que as duas etapas não são independentes.

Neste caso ele não dividiu pelo fatorial de 2, não percebendo que a ordem entre os pares é considerada.

Estes erros foram analisados e tentou-se dar uma solução, específica para os problemas do pôquer para a questão: Porque, quando e como dividir?

Espera-se que esta abordagem da questão também seja útil para os professores.



Divisão e multiplicação nos problemas do pôquer

O conjunto de problemas gerados pelo pôquer oferece uma nova percepção a respeito da questão ordem/divisão.

Em qualquer agrupamento de 5 cartas, no pôquer, não importa a ordem de chegada dessas cartas nas mãos dos jogadores; é claro que o jogador vai agrupá-las e ordená-las do modo que desejar. Mas a relação entre a ordem e a necessidade de dividir não é fácil de entender e explicar.

O sentido dado para a divisão relacionada à expressão “a ordem não importa” não esclarece a utilização da operação, nos problemas do pôquer.

A questão ordem/divisão pode ser analisada com os três problemas seguintes:

Problema 1 (Com um baralho de 52 cartas): Quantas mãos de 5 cartas contendo uma sequência de naipes diferentes podem ser formadas?

A solução não exige divisão.

Problema 2: Quantas mãos de 5 cartas contendo uma quadra podem ser formadas?

A solução exige divisão por 4!.

Problema 3: Quantas mãos de 5 cartas contendo dois pares podem ser formadas?

A solução exige divisão por 2!.

No primeiro problema, não é preciso dividir; no segundo divide-se por 4! e no último divide-se por 2! em três momentos. Ou seja, divide-se por 2!2!2!.

Porque estas diferenças?

Análise do Problema 1

No primeiro problema, ao receber as cartas, o jogador pode colocá-las em ordem para visualizar a SEQUÊNCIA:

Carta 1   Seguinte   Seguinte   Seguinte   Seguinte

Por exemplo: 3♦ 4♣ 5♦ 6♠ 7♥

As vagas ficam fixadas. Ou seja, temos 5-uplas, agrupamentos ordenados de 5 elementos. Ao impor a ordem desejada para se visualizar a SEQUÊNCIA, não mais se pode dizer que a ordem causa mudança na mão. O objetivo é contar agrupamentos com uma ordem pré-fixada.

Sabendo a primeira carta, sabe-se as possibilidades para as demais:

A primeira pode ser qualquer uma de ÁS a 10. Nenhuma sequência pode iniciar com cartas maiores do que 10, pois não seria completada, nas cinco cartas. Tem-se 40 possibilidades para a primeira carta.

Conhecida a primeira, a segunda deve ser a carta seguinte do baralho, nos seus quatro naipes; a mesma coisa para as demais.

Assim, para cada carta na primeira vaga tem-se 4x4x4x4 possibilidades para preencher as 4 vagas seguintes. Mas o raciocínio vale para as 40 cartas que podem dar início à sequência. Portanto, tem-se: 40x4x4x4x4 = 10240.

Entre essas, encontram-se 40 sequências de mesmo naipe que devem ser subtraídas. O total final é 10200.

Análise do Problema 2

No segundo problema, ao receber as cartas, o jogador coloca-as em ordem para visualizar a QUADRA, 4 cartas com mesma figura e naipes diferentes.

Por exemplo: 9♥ 9♠ 9♣ 9♦ 3♦

O agrupamento fica separado em duas partes: uma parte é reservada para a QUADRA e a outra é reservada para a carta restante. A contagem das partes é separada e, ao final, multiplicam-se os resultados, raciocinando que para cada quadra existem *x* cartas isoladas.

Percebe-se que não há como fixar uma ordem na quadra. Como ordenar previamente um grupo de 4 REIS?

Questão 1: quantos agrupamentos de 4 cartas com a mesma figura podem ser formados?

Sabendo a primeira carta, sabem-se as possibilidades para as demais:

A primeira pode ser qualquer uma das 52.

Conhecida a primeira, a segunda deve ser da mesma figura, e tem 3 possibilidades de escolha; a terceira tem 2 possibilidades de escolha e a última apenas uma possibilidade. Mas, nesta contagem agrupamentos estão sendo contados com repetição, aqueles que correspondem à mudança de ordem das 4 cartas, portanto é preciso dividir o resultado por 4! Assim, tem-se:

Número de agrupamentos de 4 cartas com mesma figura: (52x3x2x1)/4! = 13

Questão 2: quantas escolhas restaram para a quinta carta? 4 figuras iguais já foram retiradas do baralho, restam 48 cartas.

Resposta final

Para cada QUADRA existem 48 cartas para completar a mão. Mas tem-se 13 quadras, logo a resposta é 13x48 = 624

Análise do problema 3

No terceiro problema, novamente, ao receber as cartas, o jogador coloca-as em ordem para visualizar os DOIS PARES.

Por exemplo: Q♦ Q♠ 5♥ 5♠ 2♣

O agrupamento fica separado em três partes: uma parte é reservada para UM PAR; a outra para OUTRO PAR. e a última para a carta restante: ____ ____ / ____ ____ / _____

Mas, ao questionar a relação ordem/divisão, veem-se dois casos:

a) Na formação de cada PAR não há como previamente fixar uma ordem. Como ordenar previamente um PAR de REIS?

b) Na formação dos DOIS PARES não há como previamente fixar uma ordem, os dois pares podem aparecer em duas diferentes posições, por exemplo:

J♠ J♥ K♥ K♠ ou K♥ K♠ J♠ J♥

Questão 1: Quantos pares podem ser formados, para a primeira parte?

Sabendo a primeira carta, sabem-se as possibilidades para as demais: a primeira escolha pode ser qualquer uma das 52 cartas e, a segunda carta, deve ser da mesma figura; tem-se 3 escolhas. Mas, nesta contagem, agrupamentos estão sendo contados com repetição, aqueles que correspondem à mudança de ordem das 2 cartas, portanto é preciso dividir o resultado por 2! Assim, tem-se, número de pares para primeira parte: (52x3)/2! = 78.

Questão 2: Quantos pares podem ser formados, para a segunda parte?

Não se pode usar as 4 cartas com mesma figura que o primeiro PAR, portanto restam 48 escolhas para primeira carta e 3 para segunda. Mas, nesta contagem, agrupamentos estão sendo contados com repetição, aqueles que correspondem à mudança de ordem das 2 cartas, portanto é preciso dividir o resultado por 2! Assim, tem-se, número de pares, para segunda parte: (48x3)/2! = 72.

Questão 3: Quantas escolhas restaram para a quinta carta?

Oito figuras iguais já foram retiradas do baralho, restam 44 cartas.

Para finalizar multiplica-se os resultados, lembrando que a ordem dos pares pode mudar, formando agrupamentos repetidos, que aparecem duas vezes na contagem, por isso é preciso dividir o resultado por 2! Resposta final: 78x72x44/2 = 123.552

Considerações finais

Este capítulo traz o relato da experiência didática desenvolvida e detalhes da proposta para os professores interessados. O pôquer revelou-se um interessante auxílio para dar significado aos conceitos da Combinatória e para desafiar os alunos para resolver problemas. Tais problemas propiciam a utilização do diagrama de árvores e das operações de multiplicação e divisão com sentido combinatório. Podem também ser usados para definir Combinação, Arranjo e Permutação e desenvolver o formulário, embora, como foi visto, com exceção da Permutação, as fórmulas não são necessárias para resolver problemas.

É preciso destacar a dificuldade intrínseca ao conceito de divisão. Neste sentido, foi feita análise de três problemas que trazem respostas diferentes para as perguntas: precisa dividir? Por quê? O objetivo do professor deveria ser enfatizar a formulação destas perguntas em vez de enfatizar o uso de fórmulas de Combinação ou Permutação com repetição, sem sentido. Em qualquer problema de Combinatória é preciso investigar a necessidade da divisão.

É fácil ver, nas resoluções dos problemas apresentados, a ampliação dos esquemas dos alunos, o que mostra boas possibilidades para reprodução deste plano e deste material.

Destacam-se as diferentes soluções apresentadas, mostrando as diferenças entre os esquemas dos alunos e do professor. É fundamental perceber que um problema de Combinatória exige raciocínio que pode ser expresso de diferentes modos. A resposta numérica final é resultado de uma contagem, portanto, é única. Mas o método utilizado para contar varia: um problema pode ser solucionado com diferentes esquemas que dão sentido a diferentes conceitos e são expressos com diferentes formas de representação.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema desta pesquisa é a parte da Combinatória que trata dos problemas de contagem. As questões são: *Como ocorre o processo de ensino e aprendizagem, usualmente? O que se pode fazer para contribuir com este processo?*

O objetivo maior é contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Combinatória (da contagem), considerado crítico, difícil, tanto para os alunos quanto para os professores.

A investigação foi dividida nas etapas de uma engenharia didática, incluindo uma prática.

Iniciou-se o estudo buscando definir e caracterizar o objeto de estudo, a "Combinatória". Numa revisão bibliográfica, pode-se perceber que a Combinatória é uma parte da Matemática Discreta (a Matemática dos conjuntos discretos, constituído por pontos isolados, cujo protótipo é o conjunto dos números inteiros positivos). A Combinatória ensinada na escola inclui o jogo algébrico com o fatorial; problemas de Arranjo, Permutação e Combinação, Binômio de Newton e, eventualmente, o Triângulo de Pascal. Este trabalho enfoca apenas a parte da Combinatória que trata dos problemas de contagem, problemas que tratam da formação e contagem de agrupamentos com p objetos formados a partir de um conjunto com $n \geq p$ objetos.

Foram encontradas pesquisas orientadas pela Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Vergnaud. Segundo esta teoria, as situações (que também podem ser vistas como problemas) dão sentido aos conceitos. Foi feita, então, uma análise de esquemas (no sentido de Vergnaud) de resolução de problemas exemplares, buscando os conceitos da Combinatória e o sentido do conceito de Combinatória.

Concluiu-se que a Combinatória, que é foco deste estudo, consiste nos problemas de contagem de agrupamentos formados, a partir de um conjunto dado de objetos, seguindo certos critérios. O conjunto original pode ser denominado conjunto universo mas, num mesmo problema, pode ser necessário definir diferentes conjuntos universo ou ele pode não estar explícito. A contagem é resultado da multiplicação do número de decisões sucessivas, que ocorre na escolha dos objetos que vão formar o agrupamento. Se, na formação dos agrupamentos, for necessário dividi-los em conjuntos disjuntos, casos com propriedades diferentes, a adição é a operação necessária para contar estes casos independentes. A subtração retira da contagem final o resultado de casos indesejáveis. A divisão é utilizada, na contagem de agrupamentos, quando o conjunto de todos os agrupamentos possíveis de formar mostra que há repetição de agrupamentos. Se cada agrupamento deste conjunto se repete x vezes, o cardinal do conjunto é dividido por x, para obter a contagem final.

Os agrupamentos podem ser ordenados ou não ordenados. Agrupamentos formados apenas com mudança da estrutura do conjunto universo são denominados permutações. Uma permutação é um agrupamento ordenado. Se o cardinal do conjunto universo é n, a contagem do número de permutações dos n objetos é calculada por $n! = n\ (n\text{-}1)\cdot(n\text{-}2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. As combinações são agrupamentos não ordenados, com p elementos, selecionados num conjunto de $n > p$ elementos, formados com a mudança de composição do conjunto original. O problema de seleção de p entre n objetos é equivalente ao problema da partição dos n objetos em um grupo de p objetos, que são os selecionados, e um grupo de $n - p$ objetos, que são os não selecionados. Problemas de combinação e de permutação com repetição exigem divisão.

Considerando, por outro lado, a Combinatória da contagem como um Campo Conceitual, é preciso classificar os problemas e situações para identificar e dar significado aos conceitos que se articulam. Muitos autores fazem a classificação pensando nos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação, mas foram encontrados outros critérios. Com a revisão bibliográfica e com a análise de problemas exemplares, a pesquisa classifica os problemas de Combinatória em: problemas que podem ser resolvidos com contagem direta; problemas clássicos de Arranjo, Permutação e Combinação; problemas de Produto Cartesiano, problemas de Seleção, de Distribuição e de Partição.

Os esquemas encontrados, nessa análise, dão sentido combinatório aos seguintes conceitos:

1) Conjunto universo; subconjunto; agrupamento; cardinal; produto cartesiano; *n*-upla; cardinal do produto cartesiano de conjuntos; Princípio Fundamental da Contagem; multiplicação.

2) Contagem; escolha/decisão; decisões sucessivas; Princípio Fundamental da Contagem; multiplicação;

3) Casos independentes; conjuntos disjuntos; Princípio da Adição; adição;

4) Princípio da interseção de conjuntos; subtração;

5) Agrupamentos ordenados ou não ordenados; agrupamentos com ou sem repetição de objetos; contagem repetida de agrupamentos; divisão;

6) Ordem; *n*-upla; fatorial; permutação; permutação com repetição; arranjo.

7) Agrupamento não ordenado; combinação;

8) Escolha; combinação;

9) Seleção; distribuição; partição.

Com base na TCC, fica claro que o ensino da Combinatória deve ser desenvolvido a partir de situações/problemas, com o objetivo de dar significado aos conceitos básicos. Porém, na revisão bibliográfica feita com objetivo de descrever como se dá o ensino usual da Combinatória e numa reflexão do professor autor deste trabalho, a respeito da própria prática percebeu-se que aí está um ponto crítico: os problemas não são propostos para dar significado aos conceitos aqui identificados. O ensino usual parte das definições e das fórmulas de Arranjo, Permutação e Combinação e propõe problemas previamente classificados e adequados ao formulário. Todos os pesquisadores consultados mostram que as dificuldades de aprendizagem podem ter origem neste sistema.

Diferentes pesquisas descrevem questões cognitivas e dificuldades de aprendizagem. Os alunos fracassam na compreensão do enunciado, na identificação do tipo de objeto/agrupamento que deve ser contado; na construção adequada dos agrupamentos; na organização adequada para enumerar os agrupamentos sistematicamente; na contagem e na identificação das operações aritméticas necessárias para contar. Além disso, quando a quantidade de elementos de cada agrupamento aumenta, crescem as dificuldades, pois a primeira ideia é agrupar, listar os agrupamentos e fazer uma contagem direta, enumerando os grupos, o que não é possível com muitos elementos em jogo. Ao listar os agrupamentos, diferentes representações são utilizadas, mas o diagrama de árvore é pouco encontrado. Fórmulas são dadas, mas muitas vezes inadequadamente usadas. Pesquisas apontam a dificuldade nos problemas que exigem divisão e também as melhores estratégias de resolução, quando não é possível a contagem direta: aquelas que reúnem o diagrama de árvores e as operações.

Para identificar e descrever os esquemas dos alunos que participam desta pesquisa (alunos do 2º ano, nível médio) foram propostos (antes do início das aulas a respeito do assunto) alguns problemas prévios simples.

Pode-se observar a predominância da tentativa de listar e contar os agrupamentos, o que acarreta erros, quando número de objetos em jogo é maior e quando os agrupamentos são não ordenados. Os problemas com número pequeno de objetos são resolvidos com facilidade com o esquema da listagem. Os alunos demonstraram compreensão a respeito do que lhes foi pedido, dando exemplos de agrupamentos e contando-os. Alguns alunos utilizaram a relação um-para-muitos, na multiplicação, fixando um objeto e percebendo quais e quantos agrupamentos estão vinculados a ele. Nenhum aluno utilizou a operação de divisão, no problema que exigia. As representações utilizadas envolveram predominantemente, listas com símbolos ou números e grafos. As operações numéricas foram pouco utilizadas. Não ocorreu o uso de fórmulas e do diagrama de árvore.

Considerando o objetivo de ampliar estes esquemas, foi preciso explicitar o esquema desejável, no presente trabalho: identificação dos conjuntos e dos objetos envolvidos no problema; representação utilizando gráficos, diagrama de árvore, números e símbolos; aplicação das quatro operações aritméticas; eventualmente, utilização das fórmulas, quando forem significativas para o aluno.

Vergnaud entende que o jogo pode ser pensado como uma situação que gera problemas e que as situações/problemas dão significado aos conceitos. No estudo das origens históricas da Combinatória, estão os jogos de azar, entre eles o pôquer, mas, na revisão bibliográfica a respeito das propostas recentes para ensino que utilizam jogos, não há referência ao jogo de pôquer. Problemas a respeito do pôquer estão presentes em livros didáticos, em listas de problemas.

Considerando os resultados dos estudos, foram formuladas escolhas globais para organizar a parte prática da engenharia: optar por desenvolver uma sequência didática que parte da vivência do "jogo de pôquer"; entender o baralho (sem coringas) como um conjunto de 52 objetos, a partir do qual devemos formar agrupamentos de 5 objetos ("mãos"). Os problemas propostos são gerados pelo "jogo de pôquer"; alguns envolvem os conceitos de arranjo, permutação e combinação; a maioria pode ser resolvida com as quatro operações aritméticas.

A engenharia foi planejada com base em hipóteses que se mostraram válidas, no confronto final:

1. A vivência da situação "jogo de pôquer" permite ao aluno atribuir significado à Combinatória, como sendo uma parte da Matemática que trata da seleção e do agrupamento de objetos, a partir de um universo dado, e da contagem destes agrupamentos;

2. As atividades envolvendo o jogo de pôquer são interessantes para os alunos e a análise das regras do jogo constitui desafio;

3. A compreensão das regras do jogo dá significado à contagem de agrupamentos (contar para dar valor às diferentes "mãos");

4. A resolução de problemas que levam à compreensão das regras, não é imediata, pois exige a utilização das operações de multiplicação e divisão, para a contagem de agrupamentos de 5 elementos gerados por um conjunto de 52 objetos; os alunos ainda não desenvolveram esquemas para resolver estes problemas.

5. A construção de um jogo com regras semelhantes às do pôquer, com baralho menor (9 cartas), criando um mini pôquer, permite a contagem direta dos agrupamentos, por enumeração, favorece o uso do diagrama de árvore e dá significados combinatórios às operações de multiplicação e divisão.

As hipóteses seguintes não foram validadas:

6. A partir dos problemas do pôquer, as definições e os formulários da Combinatória tornam-se significativos:

Na verdade o professor desenvolveu definições e formulários, durante as atividades, mas os alunos não utilizaram estas informações, continuando a resolver problemas com as quatro operações. Apenas utilizaram o fatorial. O que é interessante, pois os problemas de contagem podem ser resolvidos com as 4 operações aritméticas, sem recorrer a formalismos.

7. As atividades com jogo favorecem a resolução de problemas em outros contextos.

Esta hipótese não foi validada pois não foram propostos aos alunos outros problemas, fora do mundo do pôquer. Isto ocorreu porque o pôquer é extremamente rico. Mostramos que um mesmo problema admite diferentes soluções e dá sentido a diferentes conceitos.

A partir dessas escolhas globais, o plano de ensino foi elaborado com objetivos de favorecer a evolução dos esquemas para resolver problemas de combinatória, incluindo operações e representações.

O plano de ensino se desenvolve em problemas que dão significado aos conceitos de Combinatória: conjunto universo, agrupamento, seleção, contagem, adição, subtração, multiplicação e divisão. Foi necessário incluir o conceito de probabilidade.

A estratégia escolhida, para atender a este objetivo, foi a utilização do jogo de pôquer, com análise das regras, (re)construção do jogo. Para a compreensão das regras do pôquer, é preciso de raciocínio combinatório. Pode-se pensar no baralho como um conjunto de 52 elementos (52 cartas). Para compreender as regras do jogo, é preciso construir e contar agrupamentos com 5 elementos (5 cartas) que seguem restrições. Para saber porque uma “mão” de cinco cartas que inclui uma trinca “ganha” de uma “mão” que inclui um ou dois pares, é preciso resolver um problema de Combinatória.

No início da experiência, tinha-se por hipótese, que os alunos não teriam esquemas para a resolução desses problemas. Por isso, foi planejada, a construção de um jogo com regras semelhantes às do pôquer, com baralhos menores (9 cartas e 16 cartas). Esta situação gera problemas que podem ser resolvidos com contagem direta e com auxílio do diagrama de árvore, úteis para dar significados às operações à multiplicação e divisão.

A análise da produção dos alunos, durante a experimentação, teve o objetivo de verificar se houve esta evolução desejada. Ela foi percebida, tanto em relação aos esquemas encontrados na resolução dos problemas prévios, tanto na comparação entre a produção do primeiro e do último encontro.

Ao final, constatou-se evolução nos esquemas, uso da multiplicação com significado de organização gráfica adequada. Mas ainda aparecem erros no uso da divisão. Estes erros foram analisados e tentou-se dar uma solução específica para os problemas do pôquer para a questão: Porque, quando e como dividir?

A engenharia, como proposta de ensino, foi bem sucedida e o plano de ensino pode ser reproduzido, por outros professores, em pequenos grupos. Não se pode concluir se a experiência teria sucesso em situação de sala de aula regular com mais de dez alunos.

Ao final da prática, os alunos apresentaram um pôster na Feira de Ciências da escola, sobre seu trabalho (Figura 22).

Figura 22 – Pôster na Feira de Ciências

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Adriana Luziê de; FERREIRA, Ana Cristina. **Aprendendo Análise Combinatória:** um estudo com classes de 2º ano do ensino médio. In: IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 2009. p.30-50. Disponível em: <http://ww2.rc.unesp.br/ eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf >. Acesso em: 01 mar. 2012.

ALMEIDA, Adriana. **Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória com Ênfase na Comunicação Matemática**: um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio. 166 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática, 2010. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop. br/arquivos/DissAdrianaLuzie.PDF>. Acesso em: 13 mar. 2012.

BATANERO, Carmen; GODINHO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia; **Combinatorial Reasoning and its Assessment**. In GARFIELD, J.B. (editors). The Assessment Challenge in Statistics Education. Amsterdam: Internacional Statistical & I.O.S. Press, p.239-252, 1997. Disponível em: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbk/chapter18.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2012.

BOGA NETO, Francisco Rodrigues. **Uma Proposta para Ensinar os Conceitos da Análise Combinatória e de Probabilidade**: uma aplicação do uso da história da matemática, como organizador prévio, e dos mapas conceituais. Belém: UFPA, 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Núcleo Pedagógico de Apoio e Desenvolvimento Cientifico, Belém, 2005. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/1833>. Acesso em: 05 mar. 2012.

BORBA, Rute; PESSOA, Cristiane. Quem Dança com Quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Revista Zetetiké**, Faculdade de Educação-UNICAMP, v.17, n.31, 2009, p.105-150. Disponível em: <http://www.fe. unicamp.br/viewarticle.php?id=246>. Acesso em: 05 mar. 2012.

CARVALHO, Gustavo Quevedo. **O Uso de Jogos na Resolução de Problemas de Contagem:** um estudo de caso em uma turma do 8º ano do colégio militar de Porto Alegre. Porto Alegre: UFRGS, 2009. 195 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17845>. Acesso em: 13 mar. 2012.

CEMIN, Kelen Luzia. **Ensino de Combinatória**: problemas de divisão, teoria de Vergnaud e metodologia da engenharia didática. Porto Alegre: UFRGS, 2008. Trabalho de Conclusão de Curso - Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://www.euler.mat.ufrgs.br/~comgradmat/tccs/monos_ 0802/TCC_Kelen.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2012.

DORNELAS, A. C. B. **Resolução de Problemas em Análise Combinatória**: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio. In: Anais do VIII ENEM Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2004. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files /viii/pdf/03/CC46033050444.pdf. Acesso em: 13 mar. 2012.

ESTEVES, Inês. **Investigando os Fatores que Influenciam o Raciocínio Combinatório em Adolescentes de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental**. São Paulo: PUCSP, 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/ines_esteves.pdf>. Acesso em 01 mar. 2012.

GARCIA, Vera Clotilde. Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Revista Zetetiké,** Campinas, SP, v. 13, n. 23, p. 85-118, 2005. Disponível em: <http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewarticle.php?id=67>. Acesso em: 01 mar. 2012.

GRECA, Ileana Maria; MOREIRA, Marco Antonio. Do Saber Fazer ao Saber Dizer: uma análise do papel da resolução de problemas na aprendizagem conceitual de Física. **Revista Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências**, FAE/UFMG, v. 5, n. 1, mar. 2003. Disponível em: <http://www.portal.fae.ufmg.br/seer/index.php/ensaio/article/viewFile/59/95>. Acesso em: 02 dez. 2012.

GRECA, Ileana; MOREIRA, Marco Antônio**. Além da Detecção de Modelos Mentais dos Estudantes:** uma proposta representacional integradora. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a2.html>. Acesso em: 13 ago. 2013.

LEITE, Maici; PESSOA, Azevedo; FERRAZ, Martha; BORBA, Elisabete. **Softwares Educativos e Objetos de Aprendizagem:** um olhar sobre a análise combinatória. GT 05 – Educação Matemática: tecnologias informáticas e educação à distância. Anais X EGEM Comunicação Científica. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Ijuí/RS, 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/ CC_46.pdf>. Acesso em 25 ago. 2012.

LESSA, Valéria. **A Compreensão do Número Fracionário:** uma sequência didática para o significado *medida*. Porto Alegre: UFRGS, 2011, 167 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/29355>. Acesso em: 25 ago. 2012.

LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo Cezar; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Paulo César. **A Matemática no Ensino Médio - Volume 2.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LOPES, José Marcos. **Raciocínio Combinatório por Meio de Resolução de Problemas.** In: Anais CNMAC XXX, 2007. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/ xxx_cnmac/PDF/706.pdf>. Acesso em: 13 mar. 2012.

LOPES, José Marcos; REZENDE, Josiane de Carvalho; TEODORO, João Vitor. **Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 36, p. 657 a 682, 2010. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/ eventos/cnmac/xxxii_cnmac/pdf/372.pdf>._ Acesso em 25 ago. 2012.

MENDONÇA, Luciane. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem**: análise combinatória. São Paulo: PUCSP, 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <http://www.pucsp.br/ pos/edmat/mp/dissertacao/lucianemendonca.pdf >. Acesso em: 25 ago. 2012.

MIORIM, Maria Ângela; FIORENTINI, Dario. Uma Reflexão Sobre o Uso de Materiais Concretos e Jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990. Disponível em: <http://drb-assessoria.com.br/umareflexaosobreousodemater iaisconcretosejogos.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2012.

MOREIRA, Marco Antonio. A Teoria dos Campos Cnceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área. **Revista Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, IF/UFRGS, v. 7(1), p. 7-29, 2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ienci/ artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2012.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco; CARVALHO, Paulo Cezar; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 9ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

MORGADO, Augusto; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João; PINTO DE CARVALHO, Paulo; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. O **Jogo e a Construção do Conhecimento Matemático**. Série Idéias, n. 10, São Paulo: FDE, 1992. p. 45-52. Disponível em: <http://www.crmario covas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf >. Acesso em: 12 mar. 2012.

NUNES, Terezinha e BRYANT, Peter. **Crianças Fazendo Matemática**. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.17, n.31, 2010. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/emteia/index.php/emteia/article/view/4/2>. Acesso em: 05 out. 2010.

OLIVEIRA, Nanci. **Conceito de Função:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. São Paulo: PUCSP, 1997, 174 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

PEDROSA FILHO, Celso. **Uma Experiência de Introdução do Raciocínio Combinatório com Alunos do Primeiro Ciclo do Ensino Fundamental (7 e 8 Anos)**. São Paulo: PUCSP, 2008. 233 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Programa de pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008. Disponível em: <www.pucsp.br/pos/edmat/mp/FILHO_celso_pedrosa.html>. Acesso em: 25 ago. 2012.

Razonamento Combinatorio em alunos de Secundaria. **Educación Matemática**. 8(1), 26-39, 1996. Disponível em: <http://www.urg.es/~batanero/ARTICULOS/RAZON.htm>. Acesso em: 05 mar. 2012.

RODRIGUES, Flávio Wagner. O jogo de pôquer e o cálculo de probabilidades. In: DRUCK, Suely (Org.). **Matemática: ensino médio**. Coleção Explorando o ensino, volume 3. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004, p. 171-178. Disponível em: <http://www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_4e5.pdf>. Acesso em: 01 set. 2012.

SABO, Ricardo Dezso. Saberes Docentes**:** a análise combinatória no ensino médio. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 1, 2010. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2923>. Acesso em: 13 Mar. 2012.

SANTOS, José Jefferson; FERREIRA, Douglas; MOITA, Filomena. **O Ensino de Probabilidade a Partir do Uso de um Objeto de Aprendizagem.** Disponível em: <http://bdtd.uepb.edu.br/tde_arquivos/15/TDE-2012-09-10T133313Z-218/Publico/Jose%20Jefferson%20Aguiar%20dos%20Santos%201.pdf>. Acesso em: 13 Mar. 2012.

SELVA, Ana Coelho Vieira. Resolução de Problemas de Divisão com Crianças Pequenas: estratégias X recursos utilizados. In: **Anais 21ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação em Educação** (ANPEd), 1998, Caxambu. Resumos 21ª Reunião Anual da Associação nacional de Pós-Graduação em Educação (ANPEd), v. 1. p. 195-195, 1995.

SILVA, Aparecida Francisco da; KODAMA, Helia Matiko Yano. **Jogos no Ensino de Matemática**. Salvador: II Bienal da SBM, UFBA, out. 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/OF11.pdf >. Acesso em: 13 mar. 2012.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta de. **Análise Combinatória no Ensino Médio Apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem**: avaliação de matemática através da resolução de problemas. Rio Claro: UNESP, 2010, 344 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2010/souza_acp_me_rcla.pdf >. Acesso em: 01 mar. 2012.

TEIXEIRA, Leny R. M. Teixeira; Edileni G. J. de Campos; Mônica Vasconcellos; Sheila Denize Guimarães. **Problemas Multiplicativos Envolvendo Combinatória:** estratégias de resolução empregadas por alunos do ensino fundamental público. Curitiba: Educar em Revista (ISSN 0104-4060), 2011, p. 1-13.

VAZQUEZ, Cristiane; NOGUTI, Fabiane. **Análise Combinatória**: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica**.** In: Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/ 1MC17572744800.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2012.

VERGNAUD, Gérard. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. In: **Journal of Mathematical Behavior**, London, v. 17(2), p. 167-181, 1998.

______. **La teoria de los Campos Conceptuales.** Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-170, 1990. Disponível em: <http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2012.

______. The Theory of Conceptual Fields. In: STEFFE, Leslie P. et al. **Theories of Mathematical Learning**. Mahwah: Routledge, 1996.

APÊNDICE A – LIVRETO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

Ricardo Rodrigues Chilela

O JOGO DE PÔQUER:
uma situação real para dar sentido aos conceitos de Combinatória

Livreto

Porto Alegre
2013

SUMÁRIO

7 INTRODUÇÃO

Planos de ensino, com uma sequência didática desenvolvida em seis encontros, com o objetivo de favorecer a evolução dos esquemas para resolver problemas de Combinatória, incluindo operações e representações.

8 AULA 1 – JOGO DE PÔQUER

Tempo: 3 horas.

Objetivos:

- Dar significado aos conceitos de conjunto universo, agrupamento, seleção e contagem.

Atividades/estratégias:

- Da sensibilização:
    - Assistir vídeo que inclui um jogo de pôquer: trecho do filme *Maverick*;
- Da construção do conhecimento:
    - Jogar pôquer: familiarização com as regras e com o jogo de pôquer;
    - Identificar as "mãos" do pôquer como agrupamentos de 5 objetos, criados a partir de um conjunto de cartas com 52 objetos, seguindo restrições;
    - Questionar o valor das "mãos" do pôquer;
    - Interação com o professor;
    - Relacionar valores das "mãos" com contagem de agrupamentos.

Recursos didáticos:

- Vídeo;
- Baralho com 52 cartas (sem coringas);
- Papel impresso com as regras do jogo.

Avaliação/recursos/critérios:

- Mediante observação;
    - Critérios: participação nas atividades.

Expectativas:

8. O professor evitará o termo Análise Combinatória, utilizando os termos seleção, formação e contagem de agrupamentos;
9. Alguns alunos usarão o termo Análise Combinatória quando o professor fizer a introdução ao plano de aula;
10. Alguns alunos conhecem o pôquer;
11. Os alunos por serem voluntários, têm interesse no pôquer;

12. O interesse pelo jogo manterá o interesse nas atividades de classe;
13. Quando questionados a respeito do valor atribuído às “mãos” de pôquer, os alunos justificarão com expressões: “esta mão é mais difícil de obter ou mais fácil de obter, do que a outra”;
14. O professor traduzirá a expressão, relacionando “mão” com “agrupamento” e “facilidade/dificuldade de obter” com “maior ou menor número de agrupamentos”, o que implica a “contagem” dos agrupamentos.

9 AULA 2: CONSTRUÇÃO DO MINI PÔQUER COM BARALHO DE 9 CARTAS

Tempo: 2 horas.

Objetivos:

- Identificar agrupamentos de *r* objetos, criados a partir de um conjunto com *n* objetos, sendo $r \leq n$;
- Criar regras para a construção de agrupamentos, contar e comparar o número de agrupamentos obtidos com exigências diferentes;
- Reconhecer e utilizar o diagrama de árvore como uma forma de organizar os grupos para a contagem e para dar significado para a multiplicação;
- Utilizar multiplicação e divisão para a contagem;
- Dar significado à multiplicação, associando-a às situações de "um-para-muitos".

Atividades/estratégias:

- Da construção do conhecimento:
    - Construção de um mini pôquer: jogo com baralho de nove cartas, com "mãos" de três cartas, que não é único;
    - Criação das regras, selecionando agrupamentos e contando-os.

Recursos didáticos:

- Baralho com nove cartas (VALETE, DAMA e REI em três naipes diferentes).

Avaliação/recursos/critérios:

- Mediante observação;
    - Critérios: participação nas atividades;
- Mediante resultados;
    - Critérios: correção na criação das regras do mini pôquer.

Expectativas:

15. O professor utilizará durante a aula os termos conjunto universo, agrupamento e contagem ao referir-se ao baralho, às mãos e às regras para dar valor;

16. Os alunos criarão o mini pôquer inspirados nas regras do pôquer, nomeando as mãos como: um só par, uma trinca, sequência de naipes iguais; sequência com naipes não todos iguais;
17. Os alunos terão clareza da necessidade de contar as mãos para criar as regras do jogo;
18. Esta contagem será fácil no caso da sequência de um só naipe e da trinca, pois a construção dos agrupamentos é imediata e a contagem será feita enumerando-os;
19. Os alunos terão dúvidas e terão que tomar decisões sobre as regras do mini pôquer, no caso, trinca e sequência de um só naipe, pois em ambos os casos, contam-se 3 mãos;
20. Os alunos terão dificuldade na contagem das sequências com naipes não todos iguais e na mão contendo um par (54), pois o número a ser encontrado é bem maior (24), o que inviabiliza a enumeração;
21. O professor vai intervir nestes casos de dificuldades, incentivando o uso do diagrama de árvore, da separação dos problemas em casos, dos princípios aditivo e multiplicativo;
22. Nesta aula, os problemas de contagem não exigem o uso da divisão.

10 AULA 3: COMBINAÇÕES POSSÍVEIS DE SE OBTER COM DIFERENTES BARALHOS

Tempo: 3 horas.

Objetivos:

- Perceber a necessidade de dividir;
- Dar significado combinatório à divisão;
- Definir permutação, arranjo e combinação simples sem repetição.

Atividades/estratégias:

- Relembrar o que ocorreu na aula passada;
- Propor problemas gerados pelo pôquer, que exijam divisão.
- Aula expositiva e utilização do Método das Gavetas;
- Aula expositiva interativa.

Recursos didáticos:

- Problemas A e B;
- Material concreto Gaveta;
- Folha (Material 1).

Avaliação/recursos/critérios:

- Observação da participação dos alunos;
- Coleta da produção dos alunos.

Expectativas:

23. Problema A: **É possível contar todas as "mãos" com 3 cartas possíveis de formar com o baralho de 9 cartas, usando o diagrama de árvore e a multiplicação?** A resposta é conhecida, pois foi calculada na aula anterior, 84 e o problema foi revisto no Material 1. Ao tentar resolver o problema, os alunos farão o diagrama de árvore para UMA carta fixa e chegarão ao produto: 9x8x7 = 504. Mas não conseguirão explicar como chegar ao número já conhecido de 84; os alunos não perceberão a necessidade de dividir;

24. O professor aproveitará este momento, em que a multiplicação não é suficiente para obter a resposta correta, para explicar a divisão;
25. Professor aproveita as contribuições dos alunos e apresenta a solução do grupo, no quadro.
26. Problema B: **Com um baralho de 52 cartas, quantas mão de 5 cartas quaisquer, pode-se formar?** Alunos acharão difícil resolver desenhando uma árvore. Professor propõe imaginar a árvore, iniciando com qualquer uma das 52 cartas. Com a interação com o professor, e comparando com a solução do Problema A, os alunos chegarão à resposta utilizando multiplicação e divisão.
27. Revendo cada etapa da resolução do problema B, o professor poderá definir com naturalidade Arranjo, Permutação e Combinação, sem utilizar as definições formais dos livros didáticos.
28. Os alunos, ao interagir, farão perguntas e mostrarão compreensão.

10.1 Material 1 para os alunos

DEFINIÇÕES DE ARRANJOS SEM REPETIÇÃO,
PERMUTAÇÕES, COMBINAÇÕES SEM REPETIÇÃO

ARRANJO
Com a noção de árvore, calculamos todas as mãos de 5 cartas, considerando que a ORDEM das cartas influi na contagem.
Isto é: contamos agrupamentos ORDENADOS.
Iniciando com qualquer uma das 52 cartas, existem:
51 cartas para a segunda posição;
50 para a terceira posição;
49 para a terceira;
48 para a última.
Seguindo a ideia da árvore, cada carta inicial, gera 51x50x49x48 galhos.
Mas temos 52 cartas.
Logo teremos: 52x51x50x49x48 mãos com 5 cartas.

UM ARRANJO É UM AGRUPAMENTO ORDENADO. DOIS ARRANJOS DIFEREM ENTRE SI NÃO SÓ POR SEREM GRUPOS COM OBJETOS DIFERENTES MAS TAMBÉM QUANDO A ORDEM ENTRE OS OBJETOS MUDA.
NO CASO DAS CARTAS, TEMOS ARRANJOS SEM REPETIÇÃO DE OBJETOS.
$A_{52,5} = 52.51.50.49.48$
De um modo geral:
Dado um conjunto universo de n objetos; o número de Arranjos SEM REPETIÇÃO, com p <n objetos é:
$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)... (n-p+1)$

Esta fórmula pode ser escrita de outra maneira, apenas para deixá-la mais sintética:
$A_{n,p} = n! / (n-p)!$

PERMUTAÇÃO
Mas estas mãos não são todas diferentes, pois nesta contagem mãos que só diferem pela ordem são contadas.
Mas estas mãos não são todas diferentes, pois nesta contagem mãos que só diferem pela ordem são contadas.
Por exemplo:
O grupo com 5 cartas
Valete copas/ dama copas/ rei copas/ 7 ouros/2 copas
está sendo contado em todas as suas permutações.
Queremos calcular quantas permutações existem, colocá-las em gavetas e ao final calcular a quantidade de gavetas.

PRECISAMOS CONTAR AS PERMUTAÇÔES DE GRUPOS COM 5 ELEMENTOS.
Por exemplo:
O grupo com 5 cartas
Valete copas/ dama copas/ rei copas/ 7 ouros/2 copas
está sendo contado em todas as suas permutações.
Calculamos todas as PERMUTAÇÔES do grupo de 5:
$P_5 = 5! = 5x4x3x2x1 = 120$

De um modo geral.
UMA PERMUTAÇÃO DE UM GRUPO COM m OBJETOS É OBTIDA COM A TROCA DE POSIÇÂO DOS OBJETOS.
O número de permutações possíveis de obter com um mesmo grupo de p elementos é:
$P_p = p!$

Pode-se dizer que uma permutação é um arranjo formado por todos os objetos do conjunto universo.
SOLICITAR AOS ALUNOS QUE VERIFIQUEM a igualdade entre
$A_{n,p} = n! / (n-p)!$ e $P_n = n!$ quando $n = p$

COMBINAÇÃO
Queremos calcular as mãos que são diferentes. não são todas diferentes, pois nesta contagem mãos que só diferem pela ordem são contadas.
Isto foi feito, Dividindo o número total de arranjos pelo número de permutações que podem ser feitas em cada arranjo:
(52.51.50.49.48)/5! = **2.598.960**

UMA COMBINAÇÃO É UM AGRUPAMENTO QUE NÃO SE MODIFICA COM A MUDANÇA DA ORDEM ENTRE OS OBJETOS. O QUE IMPORTA SÃO OS OBJETOS PRESENTES NO GRUPO E NÃO SUA POSIÇÃO, QUE È O CASO DE UMA MÃO DE CARTAS.
Acabamos de calcular o número de combinações com 5 cartas possíveis de se formar com 52 cartas.
ESCREVE-SE
$C_{52,5} = A_{52,5}/P_5 = 52.51.50.49.48 / 5!$
De um modo geral, a contagem das combinações de p elementos, retirados de um

conjunto de n elemento

$C_{n,p} = A_{n,p}/P_p = n.(n-1).(n-2)....(n-p+1) / p!$

Esta fórmula pode ser escrita de outra maneira, apenas para deixá-la mais sintética:

$C_{n,p} = n! / (n-p)!p!$

11 AULA 4: RESOLVER OS PROBLEMAS QUE JUSTIFICAM AS REGRAS DO PÔQUER PARA O CASO COM BARALHO DE 52 CARTAS E PARA UM MINI PÔQUER COM BARALHO DE 16 CARTAS

Tempo: 3 horas.

Objetivos:

- Resolver problemas combinatórios gerados pelo pôquer;
- Utilizar as operações aritméticas na resolução;
- Não utilizar fórmulas.

Atividades/estratégias:

- Resolução de uma coleção de problemas gerados pelo pôquer;
- Construção de um mini pôquer com baralho de 16 cartas e mãos de 4 cartas.

Recursos didáticos:

- Problemas (Material 1);
- Apresentação dos alunos do problema proposto como desafio, na Aula 2.

Avaliação/recursos/critérios:

- As respostas dos alunos serão analisadas com relação às respostas dadas na primeira aula e nos problemas prévios;
    - O critério é identificar a se houve evolução nos esquemas.

Expectativas:

- Espera-se que os alunos mostrem evolução nos esquemas (conduta) para resolver problemas, com relação a esquemas utilizados em problemas prévios.

Proposta:

1. Lista com os problemas do pôquer;
2. Como pode ser construído um mini pôquer com baralho de 16 cartas e mãos de 4 cartas. Quais são as regras? Justifique as valorações de cada mão obtida.

12 AULA 5: RESOLVER PROBLEMAS COM O CASO DO BARALHO DE 32 CARTAS

Tempo: 3 horas.

Objetivos:

- Resolver problemas combinatórios gerados pelo pôquer de 32 cartas;
- Utilizar as operações aritméticas na resolução;
- Não utilizar fórmulas.

Atividades/estratégias:

- Individual: resolução de uma coleção de problemas gerados pelo pôquer de 32 cartas.

Recursos didáticos:

- Problemas (Material 1).

Avaliação/recursos/critérios:

- As respostas dos alunos serão analisadas e os erros serão ponto de partida do encontro seguinte;
    - O critério é identificar a se houve evolução nos esquemas.

Expectativas:

29. Espera-se que os alunos mostrem evolução nos esquemas (conduta) para resolver problemas, com relação a esquemas utilizados em problemas prévios;
30. Espera-se encontrar, nas resoluções, esquemas individuais com erros que não haviam aparecido nas reuniões de grupo.

Lista de problemas:

1. De um baralho de pôquer, com 32 cartas, (as figuras são: 7, 8, 9, 10, VALETE, DAMA, REI e ÁS; cada uma aparece em 4 naipes: COPAS, OUROS, PAUS e ESPADAS), sacam-se simultaneamente 5 cartas. Quantas são as extrações possíveis?
2. Quantas são as extrações nas quais se forma:
    a) um par (são 2 cartas com a mesma figura, e três cartas com figuras diferentes)?

Por exemplo: K♣ K♦ 7♣ 2♠ J♥.

b) uma trinca (são 3 cartas com a mesma figura e 2 com figuras diferentes)?

Por exemplo: 8♥ 8♠ 8♣ 2♣ 10♦.

c) dois pares (um par com uma figura; outro par com outra figura; e a última carta com uma figura diferente)?

Por exemplo: Q♦ Q♠ 5♥ 5♠ 2♣.

13 AULA 6: ANÁLISE DOS ERROS QUE OCORRERAM NA RESOLUÇÃO INDIVIDUAL DE PROBLEMAS

Tempo: 3 horas.

Objetivos:

- Analisar esquemas errôneos, que surgiram na resolução individual de problemas;
- Utilizar as operações aritméticas na resolução;
- Não utilizar fórmulas.

Atividades/estratégias:

- Exposição e justificativas dos alunos; discussão dos erros.

Recursos didáticos:

- Soluções dos alunos para os problemas com baralho de 32 cartas;
- Exposição e discussão oral.

Avaliação/recursos/critérios:

- A avaliação será feita com lista de problemas para resolução individual;
- O objetivo será analisar os esquemas.

Expectativas:

31. Espera-se que os alunos mostrem evolução nos esquemas (conduta) para resolver problemas.

14 Referência bibliográfica para este livreto

CHILELA, Ricardo Rodrigues. **O Jogo de Pôquer**: uma situação real para dar sentido aos conceitos de Combinatória. Porto Alegre, 2013. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.