

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Transporte de sedimentos finos devido a
ondas de superfície**

por

Juliana Sartori Ziebell

Tese de Doutorado

Prof. Dr. Leandro Farina
Orientador

Porto Alegre, julho de 2013.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Ziebell, Juliana Sartori

Transporte de sedimentos finos devido a ondas de superfície / Juliana Sartori Ziebell.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2013.

161 p.: il.

Tese de Doutorado —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2013.

Orientador: Farina, Leandro

Tese: Matemática Aplicada
dinâmica dos fluidos, transporte de sedimentos

Transporte de sedimentos finos devido a ondas de superfície

por

Juliana Sartori Ziebell

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Leandro Farina

Banca examinadora:

Professor Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zíngano
PPGMAp/UFRGS-RS

Professor Dr. Alexandre Loureiro Madureira
LNCC-RJ

Professor Dr. Elírio Ernestino Toldo Jr.
PPGGeo/UFRGS-RS

Tese apresentada em
22 de julho de 2013.

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenadora

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu pai, à minha mãe e à minha irmã pelo carinho e pelo apoio que sempre recebi. Também agradeço ao meu marido, Lucas, pela compreensão e amor nos momentos de muito trabalho e a todos os amigos pelo companheirismo e pela amizade.

Sou muito grata pelo apoio que tenho recebido dos meus colegas da FURG, Universidade Federal do Rio Grande, onde trabalho. Sempre recebi muito incentivo para que eu concluísse meu doutorado.

Quero também agradecer ao meu orientador, professor Leandro Farina, por ter sempre me incentivado desde a graduação e por ter me convidado para estudar por um mês no BCAM, *Basque Center for Applied Mathematics*, em Bilbao, na Espanha, onde pude finalizar esta tese. Fui muito bem recebida por todos no BCAM, pesquisadores, funcionários e estudantes, pelo que fico muito agradecida. Em especial, devo agradecer ao Dr. Johan Jansson, por me apresentar o *Fenics Project*, *software* que utilizei para obter alguns resultados numéricos.

Agradeço também a todos os professores do Instituto de Matemática da UFRGS, que me ajudaram durante o curso.

Por fim, agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro e ao PPGMAP pela oportunidade que me foi dada para a realização deste trabalho.

Conteúdo

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE SÍMBOLOS	xi
RESUMO	xiv
ABSTRACT	xv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Modelos viscosos	5
1.2 Modelos viscoelásticos	8
1.3 Estrutura do trabalho	10
2 RESSUSPENSÃO E TRANSPORTE DE SEDIMENTOS FINOS DEVIDO ÀS ONDAS DE SUPERFÍCIE	12
2.1 Teoria geral do transporte de massa próximo do fundo aquático	12
2.2 Equação do transporte para a concentração de sedimentos . .	20
2.2.1 Estimativas de escalas	23
2.3 Equação do transporte efetiva usando expansão de múltiplas escalas	27
2.4 Transporte de sedimentos em um lago retangular	34
2.5 Transporte de sedimentos em um lago circular	45
2.5.1 Caso 1: $m = 0$ e $n = 1$	50
2.5.2 Caso 2: $m = n = 1$	56
3 DISPERSÃO DE PARTÍCULAS DE SEDIMENTOS NA CA- MADA LIMITE DE UM LEITO VISCOELÁSTICO	62
3.1 Velocidade da água sobre um leito viscoelástico	63
3.2 Transporte de partículas suspensas	68

3.2.1	Parâmetros adimensionais	74
3.2.2	Resultados numéricos	75
3.3	Solução da equação do transporte	77
3.3.1	Formulação variacional	77
3.3.2	Resultados Numéricos- Equação do transporte	80
4	DISPERSÃO DE PARTÍCULAS DE SEDIMENTOS NA CAMADA LIMITE DE UM LEITO VISCOELÁSTICO- MODELO GENERALIZADO	84
4.1	Formulação	85
4.2	Equações governantes e condições de contorno	86
4.2.1	Equações governantes na água	86
4.2.2	Equações governantes na camada de lama fluida	87
4.2.2.1	Dinâmica reológica da lama fluida	87
4.2.2.2	Equação do movimento adimensional na camada de lama fluida	88
4.3	Condições de contorno	89
4.3.1	Interface entre água e lama fluida	89
4.3.2	Velocidade horizontal no fundo	89
4.3.3	Condições de contorno na água	90
4.4	Aplicação do método de múltiplas escalas	90
4.4.1	Ondas senoidais	91
4.4.2	Expansão das condições de contorno	93
4.4.3	Relação adimensional entre tensão e deformação	94
4.5	Problema perturbativo na lama fluida	97
4.6	Problema perturbativo na água	98
4.7	Equação do transporte	101
4.8	Equação de $\mathcal{O}(\epsilon)$	103

4.9	Equação de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$	105
5	CÁLCULO DO TERMO DE DISSIPACÃO DE ENERGIA DE ONDAS	110
5.1	Modelo de Kranenburg	110
5.1.1	Dissipação de energia	113
5.2	Novo modelo de dissipação de energia	115
6	CONCLUSÃO	121
APÊNDICE A	CÁLCULOS REFERENTES ÀS COMPONENTES DA VELOCIDADE DO FLUXO EULERIANO	123
A.1	Derivadas de U_0	123
A.2	Derivadas de V_0	126
APÊNDICE B	ALGUNS CÁLCULOS REFERENTES À OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE	129
APÊNDICE C	ALGUNS CÁLCULOS REFERENTES AO MODELO VISCOELÁSTICO GENERALIZADO	135
C.1	Problema perturbativo na lama fluida	135
C.2	Solução Φ_{01}	137
C.3	Relação de dispersão	138
APÊNDICE D	CÁLCULOS COMPLEMENTARES PARA OBTENÇÃO DA CONCENTRAÇÃO DE ORDEM ϵ	140
APÊNDICE E	TEORIA LINEAR DE ONDAS EM ÁGUA	144
E.1	Equações governantes do fluido	144
E.2	Condições de Fronteira	145
E.3	Aproximação linear para ondas de pequena amplitude	147

E.4 Ondas progressivas em água de profundidade constante	151
E.5 Velocidade de fase, dispersão e refração	155
BIBLIOGRAFIA	158

Lista de Figuras

Figura 1.1	Regiões (pontos verdes) onde o solo é formado por lama fluida [Bass, 2013].	3
Figura 1.2	Desenho esquemático - camada de água sobre camada de lama.	4
Figura 2.1	Desenho esquemático do problema [Mei et al., 2005b]	13
Figura 2.2	Movimento orbital das partículas das ondas sob uma onda harmônica que se move da esquerda para a direita em águas profundas [Holthuijsen, 2007]. 14	
Figura 2.3	K'_{xx} para $m = n = 1$	41
Figura 2.4	K'_{xy} para $m = n = 1$	41
Figura 2.5	K'_{yy} para $m = n = 1$	42
Figura 2.6	\mathcal{E}' para $m = n = 1$ no lago retangular A.	43
Figura 2.7	\mathcal{E}' para $m = n = 1$ no lago retangular B.	43
Figura 2.8	Concentração no fundo do lago A devido à erosão ao longo da faixa costeira para $m = n = 1$ [Mei et al., 1997].	44
Figura 2.9	Concentração no fundo do lago B devido à erosão ao longo da faixa costeira para $m = n = 1$ [Mei et al., 1997].	44
Figura 2.10	K'_{xx} para $m = 0$ e $n = 1$	52
Figura 2.11	K'_{xy} para $m = 0$ e $n = 1$	53
Figura 2.12	K'_{yy} para $m = 0$ e $n = 1$	54
Figura 2.13	\mathcal{E}' para $m = 0$ e $n = 1$ no lago circular.	54
Figura 2.14	\mathcal{E}' para $m = 0$ e $n = 1$ no lago circular A.	55
Figura 2.15	\mathcal{E}' para $m = 0$ e $n = 1$ no lago circular B.	55
Figura 2.16	K'_{xx} para $m = n = 1$	59
Figura 2.17	K'_{xy} para $m = n = 1$	59
Figura 2.18	K'_{yy} para $m = n = 1$	60
Figura 2.19	\mathcal{E}' para $m = n = 1$ em um lago com um fundo erosível.	60

Figura 2.20	\mathcal{E}' para $m = n = 1$ no lago circular A.	61
Figura 2.21	\mathcal{E}' para $m = n = 1$ no lago circular B.	61
Figura 3.1	Desenho esquemático - água sob lama viscoelástica.	62
Figura 3.2	\hat{U}_t como função de \hat{d} para $\hat{\delta}_m = 5$ e $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15, 0.1$	76
Figura 3.3	\hat{D}_t como função de \hat{d} para $\hat{\delta}_m = 5$ e $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15, 0.1$	76
Figura 3.4	\hat{U}_t como função de \hat{d} para $\hat{\delta}_m = 8$ e $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15, 0.1$	77
Figura 3.5	\hat{D}_t como função de \hat{d} para $\hat{\delta}_m = 8$ e $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15, 0.1$	78
Figura 3.6	velocidade da onda na água para $T = 1, 3$ e 5	80
Figura 3.7	C_b como função de $x/2\pi$ para $C_b(x, 0) = 100$ e $T = 1, 3, 5, 10, 20,$ e 30	81
Figura 3.8	C_b como função de $x/2\pi$ para $C_b(x, 0) = 1000$ e $T = 1, 3, 5, 10, 20,$ e 30	82
Figura 3.9	C_b como função de $x/2\pi$ para $\hat{\delta}_m = 5, \hat{\lambda}_m = 0.1$ e $d = 0.0, 0.25, 0.5$ e 1.0	82
Figura 3.10	C_b como função de $x/2\pi$ para $\hat{\delta}_m = 5, \hat{\lambda}_m = 0.1$ e $d = 7, 8, 9, 10, 11$ e 12 e $T = 5$	83
Figura 3.11	C_b como função de $x/2\pi$ para $\hat{\delta}_m = 8, \hat{\lambda}_m = 0.1$ e $d = 7, 8, 9, 10, 11$ e 12 e $T = 5$	83
Figura 4.1	Desenho esquemático do problema com os dois sistemas de coordenadas.	86
Figura 4.2	Desenho esquemático de ondas portadoras.	92
Figura 5.1	Modelo de duas camadas - [Kranenburg, 2008].	111
Figura 5.2	Equação de dispersão de Delft - [Kranenburg, 2008].	113
Figura 5.3	Desenho esquemático - [Ng and Zhang, 2007].	116
Figura E.1	Problema linearizado [Farina, 2006].	152
Figura E.2	Curvas de dispersão para ondas progressivas [Mei et al., 2005a].	

LISTA DE SÍMBOLOS

(x, y, z)	Coordenadas Cartesianas
t	tempo
$\vec{u} = (u, v, w)$	vetor velocidade
k	número de onda
a ou A	amplitude da onda
ρ	densidade do fluido
p	pressão
p_s	pressão estática
P_a	pressão dinâmica
g	gravidade
σ	frequência
τ	tensor de tensão viscosa
γ	tensor de deformação
G	módulo da rigidez do meio
G_w, G_m	módulo da rigidez do meio na água e na lama fluida
μ	viscosidade cinemática
(U_I, V_I)	coordenadas da velocidade acima da camada limite
δ	espessura da camada limite
δ_w, δ_m	espessura da camada limite da água e da lama fluida
C	concentração de sedimentos
C_0	concentração de sedimentos no fundo
w_0	velocidade de queda das partículas
D_h	coeficiente de difusividade horizontal
D_v	coeficiente de difusividade vertical
E - capítulo 2	constante relacionada a erosão
E - capítulo 3 e 4	constante relacionada a tensão
τ_b	tensão de cisalhamento

τ_c	tensão crítica para a erosão
\mathcal{E}	taxa de erosão (ressuspensão)
κ	taxa de erosão empírica
\mathcal{D}	taxa de deposição
$H(x)$	função de Heaviside
P_e	número de Péclet
S_C	número de Schmidt
ϵ	parâmetro pequeno
U_b	velocidade orbital nas ondas
$t_1, t_2 = T$	tempo em escalas lenta
a, b	medidas do retângulo
\mathcal{U}, \mathcal{V}	componentes da média da velocidade da corrente Euleriana
η	onda na superfície livre
$\zeta(x, z)$	amplitude da onda na superfície livre
Φ	potencial da velocidade
ϕ	amplitude do potencial da velocidade
U_0, V_0	componentes da velocidade da corrente livre
$\mathcal{D}_{ij} (i, j) = (x, y)$	coeficientes de difusividade
\mathcal{E}	taxa média da erosão adimensional
(r, θ)	raio e ângulo - coordenadas polares
$J_m(x)$	função de Bessel
h	profundidade da camada de água
d	profundidade da camada de lama fluida
$\xi(x, t)$	onda na interface
b	amplitude da onda na interface

i	$\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$
$n = h + z + d$	coordenada vertical
P_I	pressão acima da camada limite
(\tilde{u}, \tilde{v})	amplitudes das coordenadas da velocidade horizontal e vertical
ζ	parâmetro complexo relacionado com a variação da viscosidade
ν^+	parâmetro complexo viscoelástico
ν_w, ν_m	viscosidade da água e da lama fluida
λ_w	parâmetro complexo que depende de σ e de ν_w
λ_m	parâmetro complexo que depende de frequência σ e de ν_m
λ_v	parâmetro complexo que depende de σ e de ν_m
λ_e	parâmetro complexo que depende σ , de ρ_m e de G_m
Re	número de Reynolds
$\Lambda^{i,j}$	tensor da tensão total
$(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$	coordenadas horizontais e verticais da função deslocamento
$\vec{n} = (n^{(x)}, n^{(z)})$	vetor unitário normal em direção à interface
C_g	velocidade de grupo
$q = k_0 H$	constante que depende de k_0 e H
$Q = k_0(Z - H)$	termo que depende de k_0 , H e Z
W	trabalho
E_c	energia cinética
\mathcal{D}	dissipação de energia
(α, β)	posição horizontal e vertical da partícula

RESUMO

Neste trabalho, modelos que descrevem o transporte de sedimentos finos devido às ondas aquáticas de superfície foram estudados. Soluções numéricas da equação de transporte bidimensional que descreve a evolução da concentração de sedimentos suspensos em um fundo erodível foram obtidas, para alguns casos particulares. Quando as ondas aquáticas propagam sobre uma camada de lama fluida viscoelástica, a equação do transporte é modificada. Este modelo foi investigado e resultados numéricos foram apresentados. Uma nova equação de transporte de sedimentos foi deduzida supondo-se que os parâmetros viscoelásticos dependem fortemente da frequência da onda aquática. Usando estas hipóteses, uma expressão acurada de ordem superior para a dissipação de energia de ondas foi obtida.

ABSTRACT

In this work, models that describe the transport of fine sediments by aquatic surface waves have been studied. Numerical solutions of the bidimensional transport equation that describes the evolution of the concentration of suspended sediments in an erodible bed have been obtained for some particular cases. When the aquatic waves propagate over a viscoelastic mud layer, the transport equation is modified. This model was investigated and numerical results were presented. A new equation for transport of sediments was deduced assuming that the viscoelastic parameters depends strongly on the frequency of the aquatic wave. Using these hypotheses, an accurate expression of higher order for the wave energy dissipation has been obtained.

1 INTRODUÇÃO

O movimento dos sedimentos no fundo de um meio aquático, causado pelo fluido, tem sido considerado um importante problema a ser estudado, para a engenharia costeira e para a geologia [Mei et al., 1997]. Em regiões costeiras, por exemplo, o transporte de partículas suspensas pelas ondas é mais efetivo perto do fundo onde há as oscilações na camada limite [Mei and Chian, 1994].

A dispersão de sedimentos pesados em uma camada limite da onda sobre um fundo não erosivo foi examinada em [Mei and Chian, 1994]. Uma equação de convecção-difusão foi derivada usando a teoria do método de múltiplas escalas. Esse método foi estudado em [Bensoussan et al., 1978] e foi utilizado em [Mauri, 1991], [Mei, 1992] e [Rubinstein and Mauri, 1986] em problemas de meios porosos.

O artigo [Mei et al., 1997] apresentou uma teoria analítica para ondas harmônicas simples sobre um fundo plano, a fim de examinar como ondas transportam sedimentos finos sozinhas, sem o efeito do vento, pela convecção e difusão, depois de ressuspê-los do fundo. A equação do transporte obtida é uma extensão da equação deduzida em [Mei and Chian, 1994], onde se ignorou o efeito da ressuspensão. Para obter essa equação o método de múltiplas escalas novamente foi empregado.

De acordo com [Sanford and Maa, 2001], a erosão de sedimentos do fundo é um dos fatores de controle do transporte de sedimentos finos mais importantes em corpos de água naturais. Além disso, a erosão tem sido o aspecto mais estudado sobre o transporte de sedimentos finos. Porém, há vários modelos diferentes de transporte de sedimentos finos que são empregados. [Sanford and Maa, 2001] desenvolveu uma extensão simples da formulação linear da erosão para profundidades limitadas e não limitadas.

Já o artigo [Mei et al., 1998] apresentou uma teoria sobre o transporte e ressuspensão de partículas finas na presença de uma camada limite da onda de maré, onde o fluxo da corrente ambiente é não uniforme devido a uma península ao longo da costa. Observou-se que a não uniformidade no fluido horizontal tem efeitos na variação espacial do tensor dispersão assim como na velocidade da convecção horizontal. A taxa de erosão e a concentração foram calculadas para alguns exemplos.

Se uma camada de água está sobre uma camada de lama fluida, seu movimento oscilatório pode ser alterado. Desse modo, o transporte de partículas suspensas na camada limite que fica sobre a interface entre as duas camadas também pode ser modificado.

Os sedimentos coesivos são formados por partículas muito finas, tipicamente menores que $\mathcal{O}(10) \mu\text{m}$ [Ng and Zhang, 2007]. Por [Mei et al., 2010], *lama fluida é uma mistura de água e partículas de argila altamente coesivas, frequentemente transportadas de dentro dos rios em estuários e então depositadas ao longo da costa*. Seu movimento altera o fundo do mar, muda o clima das ondas e altera o desenho das costas [Mei et al., 2010]. Ao analisarmos o mapa abaixo, na figura 1.1, podemos observar que a lama fluida está presente em diversas partes do mundo. De acordo com [Bass, 2013], ainda não se conhece muito a respeito das propriedades da dinâmica desses sedimentos.

O problema da interação da água com lama fluida tem sido tratado como um sistema de duas camadas, sendo a camada de lama um fluido de diferentes propriedades.

Há vários modelos na literatura para descrever a reação de um fundo não rígido com um onda progressiva. Em [De Wit, 1995], os modelos foram divididos em 5 grupos:

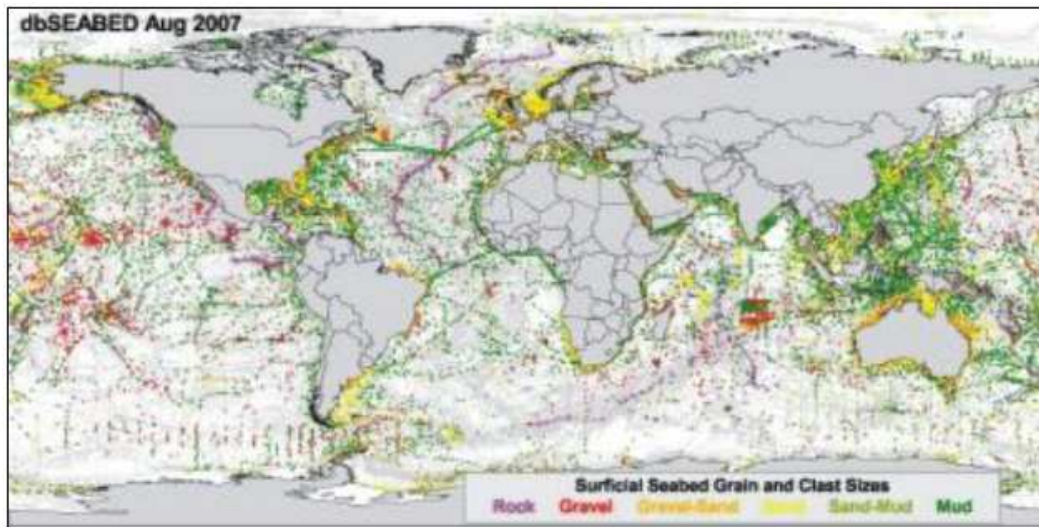


Figura 1.1: Regiões (pontos verdes) onde o solo é formado por lama fluida [Bass, 2013].

1. fundo elástico ideal;
2. modelos poro-elásticos;
3. modelos viscosos;
4. modelos viscoplásticos;
5. modelos viscoelásticos.

De acordo com [Kranenburg, 2008], os dois primeiros modelos acima podem ser usados para calcular a pressão máxima induzida pela tensão de cisalhamento no fundo. Porém, a aplicação do modelo 1 é limitada a fundos coesivos consolidados e não fluidos e a do modelo 2 a camadas de lama fluida não consolidadas.

Os modelos 3, 4 e 5 surgiram devido às propriedades viscosas, viscoplásticas e viscoelásticas da lama fluida. Porém, baseado em alguns resultados observados na natureza, [De Wit, 1995] afirma que o modelo viscoplástico não é adequado para modelar fundos de lama fluida. Já o modelo viscoso foi adotado em diversos

trabalhos, alguns dos quais iremos descrever nesse capítulo. Embora nesse caso nem todas as propriedades reológicas da lama fluida estejam representadas, é possível estimar o amortecimento da onda e a velocidade da onda induzida em um sistema de duas camadas (água - lama fluida). O amortecimento da onda, dado pela parte imaginária do número de onda, ocorre devido a dissipação da viscosidade.

De acordo com [De Wit, 1995], o modelo mais adequado para representar as propriedades reológicas da lama fluida é o modelo viscoelástico. Porém, sua aplicação é mais complexa devido à dependência não linear entre alguns parâmetros.

Nas próximas seções, faremos um breve resumo de alguns dos principais resultados obtidos usando os modelos viscosos e viscoelásticos de duas camadas (camada superior formada por água e a inferior de lama fluida, como na figura 1.2).

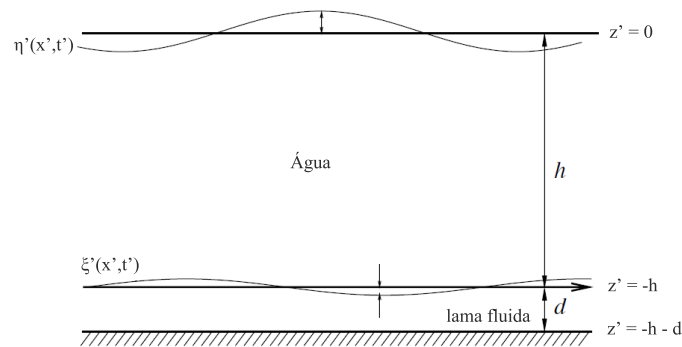


Figura 1.2: Desenho esquemático - camada de água sobre camada de lama.

Denotaremos nesse capítulo k , a e ν como o número de onda, a amplitude da onda na camada de água e a viscosidade, respectivamente. Além disso, adotaremos as coordenadas retangulares x' e z' , como na figura acima.

1.1 Modelos viscosos

[Gade, 1958] foi o primeiro a usar o modelo de um fluido viscoso, também chamado de Newtoniano, para estudar o efeito de um fundo não rígido e impermeável sobre a superfície das ondas. Nesse modelo matemático, a camada superior é invíscida, a aceleração vertical em ambas as camadas foi negligenciada e aproximação de águas rasas foi adotada. A partir dessas hipóteses, Gade deduziu uma relação de dispersão que fornece uma expressão explícita para o número de onda k . Porém, devido a aproximação de águas rasas, o modelo de Gade se restringe aos casos em que, para uma certa profundidade efetiva H' , a desigualdade $H'/L < 20$ é válida, onde L é o comprimento da onda.

O trabalho de [De Wit, 1995] modificou o modelo de Gade para a situação de uma camada de água invíscida não-hidrostática sobre uma camada de lama fluida viscosa que é fina, comparada ao comprimento de onda. A aceleração vertical na camada inferior foi novamente negligenciada, porém na camada superior ela foi considerada. Nesse trabalho foi apresentada uma nova relação de dispersão.

Em [Dalrymple and Liu, 1978] foram desenvolvidos três modelos de duas camadas (A, B e C). A camada de lama fluida foi considerada viscosa em ambas as direções x e z . Foram obtidos resultados numéricos para esses três modelos.

As velocidades horizontais e verticais de ambas as camadas foram supostas como, respectivamente,

$$\hat{u}_j(x, z; t) = u_j(z)e^{i(kx - \sigma t)}$$

e

$$\hat{v}_j(x, z; t) = v_j(z)e^{i(kx - \sigma t)}.$$

Foi observado que os termos viscosos são negligenciáveis fora da camada limite. Assim, no modelo A, as soluções foram escolhidas contendo termos viscosos somente próximo às fronteiras. No modelo B a camada inferior é fina, da mesma ordem de

magnitude da camada limite. Nesse caso, os termos viscosos aparecem em toda a camada. Em ambos os casos as velocidades na água e na lama fluida foram encontradas. A partir desses resultados e usando a equação da continuidade, foi obtido o gráfico da parte imaginária do número de onda k em função da profundidade d adimensional.

Finalmente, no modelo C, o parâmetro

$$\epsilon_i = \frac{\sigma^2}{g} \left(\frac{\nu_i}{\sigma} \right)^{1/2}$$

onde g é a aceleração da gravidade e ν_i é a viscosidade ($i = 1$ e $i = 2$ referentes à água e lama fluida, respectivamente), foi considerado pequeno. Observemos que

$$\left[\sigma^2 \left(\frac{\nu_i}{\sigma} \right)^{1/2} \right] \simeq \text{m/s}^2,$$

isto é, o parâmetro ϵ_i é adimensional. Portanto, ao definir o parâmetro ϵ_i pequeno, o autor está comparando as forças viscosas com as forças gravitacionais. Com essa hipótese, o fluido é essencialmente irrotacional, exceto perto da camada limite viscosa onde a espessura é da ordem de $(\nu_i/\sigma)^{1/2}$. A partir dessa hipótese, a parte real e imaginária do número de onda foi encontrada.

O trabalho [Ng, 2000] apresentou uma teoria assintótica para ondas de água propagando sobre a superfície de uma camada de água sobre uma camada de lama fluida viscosa e homogênea. A hipótese básica desse trabalho é que a espessura da camada de lama fluida e a espessura da camada limite na interface são da mesma ordem de magnitude da amplitude da onda sobre a camada de água. Essa hipótese gerou um parâmetro $\epsilon = ka \ll 1$. Esse parâmetro foi utilizado para ordenar que termos deveriam ser levados em conta nas equações que descrevem o problema. Alguns dos resultados obtidos foram as soluções analíticas das coordenadas das velocidades da água e da lama fluida e uma relação de dispersão. Além disso, eles observaram, através de resultados numéricos, que o amortecimento da onda aumenta com a viscosidade do fluido.

Um procedimento baseado em [Gade, 1958] foi adotado no trabalho desenvolvido em [Winterwerp et al., 2007] para o modelo de ondas SWAN no sistema costeiro da Guiana. *SWAN* [SWAN Team, 2007] é um modelo desenvolvido na Universidade de Tecnologia de Delft. A equação desse modelo representa os efeitos da propagação espacial, refração, formação, dissipação e interação não linear entre ondas.

Um dos objetivos do trabalho desenvolvido em [Kranenburg, 2008] era desenvolver uma extensão do estudo realizado em [Winterwerp et al., 2007] de modo a encontrar um modelo que calculasse a dissipação de energia pela camada de lama fluida que fosse possível ser adotado em águas profundas. Para isso, era necessário adotar um modelo que caracterizasse um sistema de duas camadas (água-lama fluida). Kranenburg observou que ele não poderia adotar o modelo de [Ng, 2000], visto que ele somente é aplicável para águas rasas. Além disso, Kranenburg avaliou que alguns detalhes na derivação da relação obtida em [De Wit, 1995] não foram apresentados. Por isso, em [Kranenburg, 2008], uma nova equação de dispersão foi obtida baseada na esquematização de [De Wit, 1995]. A camada superior foi considerada viscosa e não foram exigidas condições sobre a espessura. Já a camada inferior foi considerada viscosa e com a espessura comparável ao comprimento de onda.

Após ter deduzido a equação de dispersão e ter encontrado valores para o número de onda k como função da espessura da camada de lama fluida normalizada, [Kranenburg, 2008] comparou seus resultados com os obtidos por [Gade, 1958] e [Dalrymple and Liu, 1978]. Foi observado que, no caso de águas rasas, o modelo de [Kranenburg, 2008] coincide com os resultados obtidos em [Gade, 1958]. No caso da espessura da camada de lama fluida normalizada ser grande, os resultados coincidem com [Dalrymple and Liu, 1978] (modelo A).

A seguir, [Kranenburg, 2008] derivou um termo de dissipação de energia e o implementou no modelo SWAN. O termo de dissipação de energia foi adicionado ao termo fonte da equação do modelo SWAN.

1.2 Modelos viscoelásticos

Uma análise perturbativa baseada nas equações do movimento na forma Lagrangiana foi feita em [Zhang and Ng, 2006b] para o movimento de uma onda sobre uma camada de lama fluida viscoelástica. Esse material foi descrito como um *corpo de Voight*. O artigo [Maa and Mehta, 1988] mostrou que esse modelo é uma boa escolha para representar um fluido viscoelástico.

De acordo com [Maa and Mehta, 1988], o corpo de Voight é baseado na analogia com um sistema constituído de uma mola e um amortecedor. Ou seja, é considerado que o fluido tem um aspecto elástico, como de uma mola, e um amortecimento de movimentos e oscilações. Isso significa que, ao modelarmos a lama fluida viscoelástica como um corpo de Voight, estamos supondo que o fluido sofre oscilações que tendem a diminuir com o passar do tempo.

Ao usar o modelo do corpo de Voight para descrever a lama fluida viscoelástica, a relação da tensão obtida em [Zhang and Ng, 2006b] é dada por

$$\tau = G\gamma + \rho\mu\dot{\gamma}, \quad (1.1)$$

onde τ é a tensão, γ é a tensão de deformação, $\dot{\gamma}$ é a variação da tensão, G é o módulo da tensão, ρ é a densidade e μ é a viscosidade cinemática. Uma análise perturbativa de segunda ordem para o movimento induzido pela força da onda propagada em uma fina camada viscoelástica foi realizada. Em $\mathcal{O}(\epsilon)$, as velocidades horizontais e verticais e a pressão foram definidas sendo harmônicas no espaço e no tempo como em [Dalrymple and Liu, 1978], ou seja,

$$(x_1, z_1, p_1) = \text{Re}[(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{p})e^{i(kx - \sigma t)}],$$

onde Re denota a parte real e \tilde{x} , \tilde{z} e \tilde{p} dependem apenas da coordenada vertical β . Em $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, as médias no tempo das velocidades foram deduzidas.

Já no trabalho de [Zhang and Ng, 2006a], foi considerado um sistema de duas camadas, sendo a camada inferior de lama fluida viscoelástica. O objetivo desse trabalho foi analisar os efeitos das propriedades reológicas do leito de lama fluida viscoelástica nas superfícies das ondas. Esse artigo é uma extensão do trabalho de [Ng, 2000], mudando somente as características da segunda camada. Para descrever o fluido viscoelástico foi adotado novamente o modelo do corpo de Voight. Assim como no trabalho de [Ng, 2000], foi feita uma expansão em séries de $\epsilon = ka$, onde a é a amplitude da onda, das coordenadas da velocidade da água, da lama fluida e da pressão. Em [Zhang and Ng, 2006a] as velocidade e a pressão de $\mathcal{O}(\epsilon)$ foram calculadas. Ainda, analisou-se o gráfico do fator do aumento do amortecimento da onda, dado pelo quociente entre o amortecimento da onda na interface e o amortecimento da onda sobre a água, em função da espessura normalizada da camada de lama fluida. Eles observaram que a relação entre o amortecimento da onda e a viscosidade do fluido nem sempre ocorre, como visto em [Ng, 2000], para fluidos viscosos. Porém, eles constataram que conforme a lama fluida se torna mais elástica do que viscosa, o pico do fator do amortecimento da onda aumenta drasticamente. Um segundo pico também foi observado quando a espessura da camada de lama fluida é grande.

Os resultados obtidos em [Zhang and Ng, 2006a] foram estendidos de forma a obter soluções de segunda ordem em [Ng and Zhang, 2007]. A velocidade do transporte de massa, que é a componente constante da velocidade Lagrangiana de segunda ordem, foi obtida.

Em [Ng and Wu, 2008], foi feito um estudo analítico para mostrar os efeitos do fundo de lama fluida viscoelástica na onda induzida pela convecção e dispersão de sedimentos suspensos sobre a camada limite acima do fundo viscoelástico. Esse trabalho foi uma extensão de [Mei and Chian, 1994], onde foi estudada a dispersão de sedimentos suspensos no fundo. Porém, nesse caso, foi considerado um sistema de

uma camada de água invíscida e irrotacional e o fundo foi tomado como horizontal e não erodível.

Observemos que em todos os trabalhos descritos acima, a camada viscoelástica foi descrita como um corpo de Voight. Porém, de acordo com [Krotov, 2008], experimentos sugerem que os coeficientes \bar{G} e $\bar{\mu}$ dependem fortemente da frequência. Por isso, ele propôs um *modelo viscoelástico generalizado*. Esse modelo relaciona as componentes de tensão pela equação diferencial

$$\left(1 + \sum_{n=1}^N \bar{a}_n (\partial_{\bar{t}})^n\right) \bar{\tau}^{ij} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \bar{b}_n (\partial_{\bar{t}})^n\right) \bar{\gamma}^{ij} \quad (1.2)$$

onde $\bar{\tau}^{ij}$ é o tensor de tensão e $\bar{\gamma}^{ij}$ é o tensor tensionado, com o símbolo $(\partial_{\bar{t}})$ denotando a derivada parcial em relação ao tempo \bar{t} e com os coeficientes \bar{a}_n e \bar{b}_n dependendo da frequência.

Em [Mei et al., 2010] e [Krotov, 2008] as ondas foram assumidas como quase senoidais. A partir desse modelo, expandindo também as variáveis em séries de $\epsilon = ka$ e usando a *análise de múltipla escala*, foram obtidas soluções de $\mathcal{O}(1)$ e $\mathcal{O}(\epsilon)$. Além disso, eles deduziram o deslocamento do número de onda, isto é, uma correção de $\mathcal{O}(\epsilon)$.

1.3 Estrutura do trabalho

Analisando os trabalhos descritos acima sobre o problema de interação da água com a lama fluida observamos que não foram obtidos resultados sobre o transporte e a concentração de partículas suspensas. A descrição desse fenômeno é o principal objetivo desse trabalho. A fim de obtermos esses resultados, seguiremos os passos descritos a seguir.

No capítulo 2, estudamos o transporte de sedimentos devido a ondas de superfície na presença de um fundo rígido usando [Mei et al., 1997], [Mei et al., 1998]

e [Mei et al., 2005b]. O caso de um lago retangular já havia sido estudado por [Mei et al., 1997], caso esse que reproduzimos nesse trabalho. Para complementar esses resultados, deduzimos as equações governantes para a ressuspensão e o transporte de sedimento em um lago circular e obtivemos a taxa de erosão e os coeficientes de dispersão.

No capítulo 3 apresentamos, com mais detalhamento, o trabalho desenvolvido em [Ng and Wu, 2008], onde a equação do transporte para a concentração de sedimentos no fundo de um fluido sobre uma camada de lama fluida foi deduzida. A seguir, mostramos alguns novos resultados numéricos que obtivemos dessa equação.

Descrevemos o modelo viscoelástico generalizado definido em [Mei et al., 2010] com maiores detalhes, no capítulo 5. Além disso, deduzimos uma nova equação do transporte de partículas suspensas no fundo a partir desse modelo. Essa equação é semelhante à equação deduzida em [Ng and Wu, 2008], porém é baseada em um modelo mais realístico.

Por fim, no capítulo 6, usamos o modelo viscoelástico descrito como um corpo de Voight para deduzir um novo termo de dissipação de energia, baseado no trabalho de [Kranenburg, 2008]. Comparamos esse novo termo com o que foi encontrado em [Kranenburg, 2008] para um fluido viscoso a fim de verificarmos que ambos são da mesma ordem de grandeza.

É importante observarmos que nos capítulos que seguem iremos denotar as funções definidas na camada de água como f_w e na lama fluida como f_m , a fim de compararmos com a notação existente na literatura.

2 RESSUSPENSÃO E TRANSPORTE DE SEDIMENTOS FINOS DEVIDO ÀS ONDAS DE SUPERFÍCIE

De acordo com [Mei et al., 2005b], ondas podem induzir, além de flutuações, correntes que não mudam a direção ao longo do tempo. Embora muitas vezes essas correntes sejam fracas, com o tempo elas podem transportar sedimentos. Portanto, para compreendermos as mudanças no fundo no mar, é necessário entendermos as correntes geradas pelas ondas.

Existem dois tipos de correntes que são geradas pelas flutuações das ondas. O primeiro são as correntes litorâneas e suas variações próximas da zona de arrebentação. O segundo é o *transporte de massa* que ocorre dentro da camada limite próximo do fundo do mar, onde o campo de ondas acima é essencialmente invíscido e irrotacional. Nesse capítulo iremos examinar o segundo tipo de corrente, fora da zona costeira.

Nós iremos primeiramente calcular a velocidade do fluido utilizando o método de perturbação. A partir desse resultado, através do mesmo método, obteremos uma equação para a concentração de sedimentos de primeira ordem no fundo. A seguir, estudaremos alguns casos particulares.

2.1 Teoria geral do transporte de massa próximo do fundo aquático

Tomaremos um sistema de coordenadas local (x, y, z) , com x, y no plano da camada limite e z apontando normalmente para dentro da região invíscida, como na figura 2.1. Consideramos que o fundo está em $z = 0$. Nosso objetivo é fazer uma

aproximação das equações de Navier-Stokes a fim de simplificarmos o nosso problema e de obtermos a velocidade do fluido.

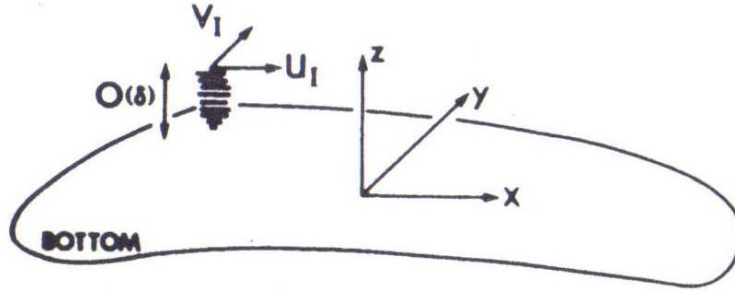


Figura 2.1: Desenho esquemático do problema [Mei et al., 2005b]

Denotaremos a velocidade por (u, v, w) . Se supusermos pequenas inclinações no fundo, a direção de z é aproximadamente vertical. Pela equação da continuidade (E.1) a componente da velocidade normal w é pequena. Logo, $w/u \simeq O(k\delta)$ e $w/v \simeq O(k\delta)$, onde k é o número de onda e δ é a espessura da camada limite. Seja A a amplitude orbital típica próxima à camada limite. Supondo $u = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\sigma t)}$, onde $\mathbf{x} = (x, y)$, temos

$$\frac{\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u}{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{-\nu k^2 u}{-i\omega u} = \frac{\nu k^2}{i\omega} \simeq O(k\delta)^2 \quad \text{e} \quad \frac{\nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} v}{\frac{\partial v}{\partial t}} = \frac{-\nu k^2 v}{-i\omega v} = \frac{\nu k^2}{i\omega} \simeq O(k\delta)^2, \quad (2.1)$$

pois por (E.39), $\delta \simeq \left(\frac{2\nu}{w}\right)^{1/2}$. Logo,

$$\frac{\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}{\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}} = O(k\delta^2) \quad (2.2)$$

Ainda,

$$\frac{u \frac{\partial}{\partial x} u}{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{uiku}{-i\omega u} = \frac{uk}{-\omega} \sim \frac{kA}{\tanh kh} \quad \forall \quad kh, \quad (2.3)$$

por (E.70), onde h é a profundidade.

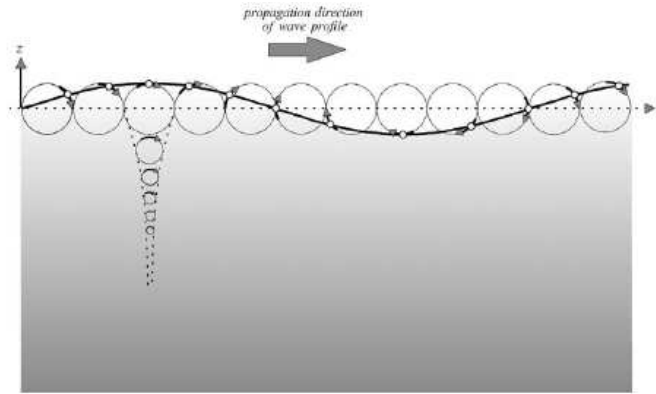


Figura 2.2: Movimento orbital das partículas das ondas sob uma onda harmônica que se move da esquerda para a direita em águas profundas [Holthuijsen, 2007].

Supondo $kh \gg 1$ (águas profundas), pela tabela (E.1), temos que

$$\frac{u \frac{\partial}{\partial x} u}{\frac{\partial u}{\partial t}} \sim kA \quad (2.4)$$

e assim temos

$$\frac{\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} = O(kA). \quad (2.5)$$

Se $1 \gg kA \gg (k\delta)^2$, pois a altura da onda é maior que o comprimento da camada limite. Desse modo, por (2.2) e (2.5) e ignorando os termos de ordem $O(k\delta)$ na equação do momento, as equações de Navier-Stokes podem ser aproximadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2.8)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g. \quad (2.9)$$

Por (2.9),

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g.$$

Assim, $p = P - \rho g z$ não varia na direção normal à camada limite e portanto deve ser igual ao seu valor no fluido invíscido fora da camada limite. Agora, note que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Logo, por (2.7), (2.8) e (2.9),

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U_I}{\partial t} + U_I \frac{\partial U_I}{\partial x} + V_I \frac{\partial U_I}{\partial y}, \quad (2.10)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V_I}{\partial t} + U_I \frac{\partial V_I}{\partial x} + V_I \frac{\partial V_I}{\partial y}, \quad (2.11)$$

onde U_I e V_I são as componentes tangenciais do campo de velocidade invíscido na camada limite no fundo, com W_I valendo zero. Assumiremos que U_I e V_I são prescritos.

Para calcularmos as coordenadas da velocidade do fluido, usaremos o método de perturbação. Desse modo, expandiremos as componentes da velocidade na camada limite u e v em uma série perturbada, tomando kA como o parâmetro pequeno, assumiremos

$$u = u_1 + u_2 + \dots \quad (2.12)$$

$$v = v_1 + v_2 + \dots \quad (2.13)$$

onde $u_1 = O(wA)$ e $u_2 = O(wk^2A^2)$, e assim sucessivamente. Substituindo (2.10) e (2.11) em (2.7) e (2.8), temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial U_I}{\partial t} + U_I \frac{\partial U_I}{\partial x} + V_I \frac{\partial U_I}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial V_I}{\partial t} + U_I \frac{\partial V_I}{\partial x} + V_I \frac{\partial V_I}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (2.15)$$

Substituindo as expansões (2.12) e (2.13) em (2.14) e (2.15) temos que o problema de primeira ordem se reduz a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial U_I}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial V_I}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}. \quad (2.17)$$

As condições de fronteira são

$$(u_1, v_1) = 0, \quad \text{em } z = 0, \quad (2.18)$$

$$(u_1, v_1) \rightarrow U_I, V_I, \quad \frac{z}{\delta} \gg 1. \quad (2.19)$$

Supondo que o movimento é harmônico simples, podemos escrever

$$U_I(x, y, t) = \text{Re}[U_0(x, y)e^{-i\sigma t}], \quad (2.20)$$

$$V_I(x, y, t) = \text{Re}[V_0(x, y)e^{-i\sigma t}]. \quad (2.21)$$

Estimaremos

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} F_1(\xi) e^{-i\sigma t} \right], \quad (2.22)$$

onde $\xi = z/\delta$.

Para isso, temos que calcular $F_1(\xi)$. Assim, substituindo (2.22) em (2.16), temos

$$U_0(x, y)F_1(\xi)i\sigma e^{i\sigma t} = i\sigma U_0(x, y)e^{i\sigma t} + \frac{1}{\delta}U_0(x, y)F_1''(\xi)e^{i\sigma t}, \quad (2.23)$$

ou seja,

$$-i\frac{1}{\delta}F_1''(\xi) + F_1(\xi) = 1. \quad (2.24)$$

Pelas condições de fronteira (2.18) e (2.19),

$$F_1(\xi) = 0 \quad \text{em } \xi = 0 \quad (2.25)$$

e

$$u_1 = \text{Re}[U_0(x, y)F_1(\xi)e^{-i\sigma t}] \rightarrow U_1 = \text{Re}[U_0(x, y)e^{-i\sigma t}] \Rightarrow F_1(\xi) = 1 \quad \text{em } \xi \gg 1. \quad (2.26)$$

Por [Hunt and Johns, 1963],

$$F_1 = 1 - e^{-(1-i)\xi}, \quad \xi = z/\delta. \quad (2.27)$$

e, portanto, as componentes u_1 e v_1 estão determinadas.

Agora, pela equação da continuidade (4.18), a componente da velocidade na direção vertical é dada por

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}. \quad (2.28)$$

Logo,

$$\begin{aligned} w_1 &= -\int_0^{z/\delta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) d\bar{z} \\ &= -\delta \int_0^\xi \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dz d\bar{\xi} \\ &= -\delta \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) e^{-i\sigma t} \int_0^\xi F_1(\xi) d\bar{\xi} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ -\delta \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) e^{-i\sigma t} \left[\xi + \frac{1}{1-i} e^{-(1-i)\xi} - \frac{1}{1-i} \right] \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \delta \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) e^{-i\sigma t} \left[-\xi + \frac{1+i}{2} (1 - e^{-(1-i)\xi}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Assim, por (2.29) e (2.22), juntamente com (2.27), formulamos o problema de primeira ordem. A partir desse resultado, podemos estudar o problema de segunda ordem.

Embora, como vimos anteriormente, $w_1 = u_1 \times \mathcal{O}(k\delta) = v_1 \times \mathcal{O}(k\delta)$, ou seja, w_1/u_1 e w_1/v_1 são pequenos, o efeito dos termos $w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}$ e $w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z}$ é tão importante quanto os outros termos de convecção e portanto não pode ser ignorado. Assim, o problema de segunda ordem se torna

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = U_I \frac{\partial U_I}{\partial x} + V_I \frac{\partial U_I}{\partial y} - \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \quad (2.30)$$

e

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} = U_I \frac{\partial V_I}{\partial x} + V_I \frac{\partial V_I}{\partial y} - \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right), \quad (2.31)$$

A equações (2.30) e (2.31) podem ser usadas para completar o campo de velocidade de segunda ordem. Vamos supor que u_2 e v_2 têm uma parte \bar{u}_2 e \bar{v}_2 que não varia no tempo, referida como *corrente induzida*, e outra parte que é oscilante, isto é,

$$u_2 = \bar{u}_2 + \operatorname{Re} \tilde{u}_2 e^{-2i\sigma t} \quad \text{e} \quad v_2 = \bar{v}_2 + \operatorname{Re} \tilde{v}_2 e^{-2i\sigma t}. \quad (2.32)$$

Tomando as médias no tempo de (2.30) e (2.31), temos

$$-\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial z^2} = \overline{U_I \frac{\partial U_I}{\partial x}} + \overline{V_I \frac{\partial U_I}{\partial y}} - \left(\overline{u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}} + \overline{v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}} + \overline{w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}} \right) \quad (2.33)$$

e

$$-\nu \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial z^2} = \overline{U_I \frac{\partial V_I}{\partial x}} + \overline{V_I \frac{\partial V_I}{\partial y}} - \left(\overline{u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x}} + \overline{v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y}} + \overline{w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z}} \right). \quad (2.34)$$

Agora, note que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(u_1 u_1) = u_1 \frac{\partial}{\partial x} u_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial x} u_1 \\ \frac{\partial}{\partial y}(u_1 v_1) = u_1 \frac{\partial}{\partial x} v_1 + v_1 \frac{\partial}{\partial y} u_1 \\ \frac{\partial}{\partial z}(u_1 w_1) = u_1 \frac{\partial}{\partial z} w_1 + w_1 \frac{\partial}{\partial z} u_1 \end{cases} \quad (2.35)$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(u_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial z}(u_1 w_1) - u_1 (\nabla u) = u_1 \frac{\partial}{\partial x} u_1 + v_1 \frac{\partial}{\partial y} u_1 + w_1 \frac{\partial}{\partial z} u_1, \quad (2.36)$$

ou seja, pela equação da continuidade (4.18),

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(u_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial z}(u_1 w_1) = u_1 \frac{\partial}{\partial x} u_1 + v_1 \frac{\partial}{\partial y} u_1 + w_1 \frac{\partial}{\partial z} u_1, \quad (2.37)$$

Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(v_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial z}(v_1 w_1) = u_1 \frac{\partial}{\partial x} v_1 + v_1 \frac{\partial}{\partial y} v_1 + w_1 \frac{\partial}{\partial z} v_1, \quad (2.38)$$

Substituindo (2.37) e (2.38) em (2.33) e (2.34), respectivamente, temos que

$$-\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial z^2} = \overline{U_I \frac{\partial U_I}{\partial x}} + \overline{V_I \frac{\partial U_I}{\partial y}} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u_1 u_1} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u_1 v_1} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_1 w_1} \right) \quad (2.39)$$

e

$$-\nu \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial z^2} = \overline{U_I \frac{\partial V_I}{\partial x}} + \overline{V_I \frac{\partial V_I}{\partial y}} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u_1 v_1} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v_1 v_1} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v_1 w_1} \right), \quad (2.40)$$

Note que os termos $\overline{u_1 u_1}$, $\overline{u_1 v_1}$, ..., são as componentes do tensor de tensão de Reynolds representando o fluxo do momento devido as flutuações das ondas. As médias das correntes de escoamento $(\overline{u_2}, \overline{v_2})$ surgem devido ao campo de tensão que deve estar presente para equilibrar a média do campo de pressão dinâmica e o campo de tensão de Reynolds.

Para $(\overline{u_2}, \overline{v_2})$, a velocidade deve ser nula na parede e não devemos ter tensão na fronteira exterior da camada limite. Portanto, as condições de fronteira são

$$\begin{aligned} (\overline{u_2}, \overline{v_2}) &= 0, \quad z = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u_2}, \overline{v_2}) &\rightarrow 0, \quad \frac{z}{\delta} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De acordo com [Hunt and Johns, 1963],

$$\bar{u} = \bar{u}_2 = -\frac{1}{\sigma} \text{Re} \left[F_2 U_0 \frac{\partial U_0^*}{\partial x} + F_3 V_0 \frac{\partial U_0^*}{\partial y} + F_4 U_0 \frac{\partial V_0^*}{\partial y} \right] \quad (2.42)$$

e

$$\bar{v} = \bar{v}_2 = -\frac{1}{\sigma} \text{Re} \left[F_2 V_0 \frac{\partial V_0^*}{\partial y} + F_3 U_0 \frac{\partial U_0^*}{\partial x} + F_4 V_0 \frac{\partial U_0^*}{\partial x} \right], \quad (2.43)$$

onde U_0 e V_0 são as amplitudes de U_I e V_I definidas em (2.20) e (2.21), U_0^* e V_0^* são os complexos conjugados de U_0 e V_0 , respectivamente, e

$$F_2 = -\frac{1}{2}(1-3i)e^{(-1+i)\xi} - \frac{i}{2}e^{-(1+i)\xi} - \frac{1+i}{4}e^{-2\xi} + \frac{1}{2}(1+i)\xi e^{(-1+i)\xi} + \frac{3}{4}(1-i), \quad (2.44)$$

$$F_3 = \frac{1}{2}ie^{(-1+i)\xi} - \frac{i}{2}e^{-(1+i)\xi} - \frac{1}{4}e^{-2\xi} + \frac{1}{4} \quad (2.45)$$

e

$$F_4 = -\frac{1}{2}(1-2i)e^{(-1+i)\xi} + \frac{1+i}{2}\xi e^{-(1+i)\xi} - \frac{i}{4}e^{-2\xi} + \frac{1}{4}(2-3i). \quad (2.46)$$

As fórmulas (2.42) e (2.43) representam a velocidade do fluxo Euleriano. Elas serão necessárias na próxima seção deste capítulo para obtermos uma equação para a concentração de sedimentos em um fluido.

2.2 Equação do transporte para a concentração de sedimentos

A ressuspensão e o transporte de sedimentos têm sido objeto de grande interesse para a engenharia costeira e para a geologia, já que os depósitos de sedimentos contém, por exemplo, traços de metais, nutrientes e outros contaminantes. A difusão e a convecção dos sedimentos ressuspensos fora da zona costeira ocorrem devido às correntes induzidas pelas ondas, pelo vento e outras forçantes.

Definiremos C como a concentração do volume de sedimentos, $-w_0$ como a velocidade de queda de partículas suspensas, e D_h, D_v como as difusividades de massa associadas às turbulências horizontal e vertical. De acordo com [Mei et al., 1997], a equação de transporte para a concentração de uma nuvem de sedimentos diluída é

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z}[(-w_0 + w)C] = D_h \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_i} + D_v \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad (2.47)$$

onde $i = 1, 2$ com $(x_1, x_2) \equiv (x, y)$ e $(u_1, u_2) \equiv (u, v)$ representando as coordenadas horizontais e as componentes de velocidade do fluido, respectivamente. Ou seja, temos um sistema de duas equações dado por

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}[(-w_0 + w)C] = D_h \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_v \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad (2.48)$$

e

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}[(-w_0 + w)C] = D_h \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_v \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \quad (2.49)$$

Assim como na seção anterior, a coordenada vertical é denotada por z e a componente vertical da velocidade é denotada por w . Essa equação é aplicável no caso onde C é suficientemente pequeno de modo que as partículas não alteram materialmente o escoamento do fluido.

Para a condição de fronteira, iremos considerar o efeito da erosão. O artigo [Sanford and Maa, 2001] considera dois tipos de erosão: a erosão de profundidade

limitada (tipo 1) e a erosão ilimitada (tipo 2). Por [Sanford and Maa, 2001], a erosão, ou ressuspensão de sedimentos do fundo é um dos fatores mais importantes para o transporte de sedimentos finos em corpos de água naturais. A erosão é a principal fonte de partículas em suspensão na coluna de água. Muitos pesquisadores concordam que as tensões no fundo exercidas pelas ondas e correntes são as forças dominantes que causam erosões e que as características dos sedimentos finos, como, por exemplo, densidade da partícula, distribuição dos tamanhos das partículas e grau de coesão, controlam a resistência da erosão.

Porém, não há um comum acordo sobre a fórmula matemática para a erosão. Alguns pesquisadores escrevem a erosão como

$$\mathcal{E} = E[\tau_b - \tau_c(z)]^n, \quad (2.50)$$

onde \mathcal{E} é a taxa de erosão [$EL^{-2}T^{-1}$], E é uma constante empírica em unidades apropriadas, z é a profundidade da erosão [L], n é uma constante empírica, τ_c é a tensão crítica para a erosão e τ_b é a tensão de cisalhamento aplicada no fundo. Outros pesquisadores utilizam a forma exponencial dada por

$$\mathcal{E} = \kappa \exp(\alpha[\tau_b - \tau_c(z)]^\beta), \quad (2.51)$$

onde κ é a taxa de erosão empírica e α e β são constantes empíricas. A equação (2.51) é usada frequentemente para a erosão de tipo 1, quando τ_c aumenta com a profundidade dentro dos sedimentos e limites da extensão da erosão.

Ainda, muitos cientistas optam pela simples relação linear obtida tomando $n = 1$ na equação (2.50)

$$\mathcal{E} = E(\tau_b - \tau_c). \quad (2.52)$$

Essa equação é frequentemente utilizada usada para o modelo do tipo 2, com um único valor de τ_c constante que não muda com a profundidade dentro dos sedimentos.

De acordo com [Mei et al., 1997], para um fundo de sedimentos finos e coesivos, isto é, partículas de diâmetro menor que 6×10^{-5} metros, experimentos em fluidos uniformes e constantes sugerem a seguinte condição de fronteira (fundo do mar)

$$-D_v \frac{\partial C}{\partial z} - w_0 C = -\mathcal{D} + \mathcal{E}, \quad z = 0. \quad (2.53)$$

O lado esquerdo representa a taxa do fluxo total na direção vertical. No lado direito, \mathcal{D} representa a taxa de deposição que ocorre quando a magnitude da tensão no fundo τ_b está abaixo do limiar τ_d , enquanto \mathcal{E} representa a taxa de erosão (ressuspensão) que ocorre quando $|\tau_b|$ está acima do limiar τ_c (tensão crítica para a erosão), com $\tau_d < \tau_c$. Estes termos são geralmente dados na seguinte forma

$$\mathcal{D} = H(\tau_d - |\tau_b|) w_d C \quad (2.54)$$

$$\mathcal{E} = H(|\tau_b| - \tau_c) E (|\tau_b| - \tau_c)^m, \quad (2.55)$$

onde $H(x)$ denota a função de Heaviside de x , w_d é a velocidade de deposição e m é uma potência empírica.

De acordo com [Mei et al., 1997], na maioria dos estuários e lagos a superfície da camada do fundo é coberta por sedimentos parcialmente consolidados e não consolidados. A tensão de cisalhamento τ_c é normalmente muito pequena para ser mensurada por um penetrômetro, conforme [Patheniades, 1965], [Mehta, 1984], [Mehta and Patheniades, 1982]. Além do mais, a tensão induzida no fundo pela onda induzida pode ser consideravelmente maior que τ_c e a deposição pode ser ignorada. Assim, nesse trabalho podemos simplificar (2.53) para

$$-w_0 C - D_v \frac{\partial C}{\partial z} = E |\tau_b|, \quad z = 0. \quad (2.56)$$

Fora da camada limite assumiremos que

$$C = 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.57)$$

Ainda, a distribuição horizontal inicial da média da concentração ao longo da profundidade é prescrita em alguma área da fonte. Assim, o problema físico é procurar o termo de difusão da nuvem de partículas ressuspensas na região de erosão.

2.2.1 Estimativas de escalas

Temos três escalas de comprimento vertical. A primeira é a espessura da camada estacionária de concentração devida ao balanço da sedimentação gravitacional e da difusão vertical

$$\delta_s = \frac{D_v}{w_0} \quad (2.58)$$

As outras duas escalas são das espessuras da camada limite oscilatória. Elas são associadas com as oscilações do fluido com frequência σ e são dadas por

$$\delta_u = \sqrt{\frac{2\nu_e}{\sigma}} \quad \text{e} \quad \delta_c = \sqrt{\frac{2D_v}{\sigma}}, \quad (2.59)$$

que correspondem, respectivamente, ao momento e a difusão de massa, onde ν_e denota a viscosidade associada à turbulência. Por simplicidade, assumiremos que essas três escalas são da mesma ordem, isto é

$$O(\delta_s) = O(\delta_u) = O(\delta_c) \quad (2.60)$$

e

$$S_c = \frac{\nu_e}{D_v} = \left(\frac{\delta_u}{\delta_c}\right)^2 = O(1) \quad (2.61)$$

onde S_c é o número de Schmidt.

Tomaremos oscilações de pequena amplitude de frequência suficientemente alta de modo que a inclinação da onda kA e a relação da espessura da camada limite oscilatória com o comprimento de onda $k\delta_u$ sejam pequenos, ou seja,

$$\epsilon = kA \ll 1 \quad \text{e} \quad \beta = k\delta_u \ll 1. \quad (2.62)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\epsilon = O(\beta)$. Desse modo, introduziremos a seguinte normalização

$$\begin{aligned} x_i^* &= kx_i, \quad z^* = z/\delta_c, \quad t^* = wt, \\ C^* &= C/C_0, \quad u_i^* = u_i/\sigma A, \quad w^* = w/k\delta_c\sigma A, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde C_0 é uma escala de concentração que iremos estimar a seguir.

Assim, a equação (2.47) se torna

$$\sigma C_0 \frac{\partial C^*}{\partial t} + C_0 k A \sigma \frac{\partial u_i^* C^*}{\partial x_i^*} + \frac{C_0}{\delta_c} \frac{\partial}{\partial z^*} [(-w_0 + w^* k \delta_c \sigma A) C^*] = D_h C_0 k^2 \frac{\partial^2 C^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + D_v \frac{C_0}{\delta_c^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}} \quad (2.64)$$

e portanto,

$$\sigma \frac{\partial C^*}{\partial t} + \epsilon \sigma \frac{\partial u_i^* C^*}{\partial x_i^*} + \sigma \frac{\partial}{\partial z^*} \left[\left(-\frac{w_0}{\delta_c \sigma} + \epsilon w^* \right) C^* \right] = D_h k^2 \frac{\partial^2 C^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + D_v \frac{1}{\delta_c^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}}. \quad (2.65)$$

Dividindo a equação acima por σ temos

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial u_i^* C^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left[\left(-\frac{w_0}{\delta_c \sigma} + \epsilon w^* \right) C^* \right] = \frac{D_h k^2}{\sigma} \frac{\partial^2 C^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + D_v \frac{1}{\sigma \delta_c^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}}. \quad (2.66)$$

Por (2.59), $D_h = \sigma \beta^2 / (2k^2)$ e $D_v = \delta_c^2 \sigma / 2$. Portanto,

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial u_i^* C^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left[\left(-\frac{w_0}{\delta_c \sigma} + \epsilon w^* \right) C^* \right] = \frac{\beta^2}{2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}}. \quad (2.67)$$

Ainda, note que,

$$\frac{w_0}{\delta_c \sigma} = \frac{w_0 \delta_c}{\delta_c^2 \sigma} = \frac{2w_0 \delta_c}{D_v} = P_e \Rightarrow \frac{w_0}{\delta_c \sigma} = \frac{P_e}{2}.$$

Logo,

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial u_i^* C^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left[\left(-\frac{P_e}{2} + \epsilon w^* \right) C^* \right] = \frac{\beta^2}{2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}}, \quad (2.68)$$

onde $P_e = w_0 \delta_c / D_v$ é o *número de Péclet* baseado na velocidade de queda. Novamente, sem perda de generalidade, iremos assumir que $P_e = O(1)$.

Seja h a profundidade da água e

$$U_b = \frac{A}{h} \sqrt{gh} \quad (2.69)$$

a velocidade orbital no fundo para ondas longas. De acordo com [Mei et al., 1997] a escala da tensão no fundo é dada por

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}\rho D_v U_b}{\delta_c} = \frac{\sqrt{2}\rho D_v A \sqrt{g}}{\delta_c \sqrt{h}} \quad (2.70)$$

e a velocidade de convecção devido ao transporte de massa da onda induzida deve ser da ordem de

$$u = O(kAU_b) \sim kA \frac{A}{h} \sqrt{gh}. \quad (2.71)$$

A taxa do aumento da concentração de sedimentos suspensos em uma unidade de coluna de água da camada limite da onda deve ser o resultado dos seguintes mecanismos: convecção horizontal pela corrente induzida por ondas, difusão e dispersão turbulenta horizontal e erosão do fundo. Desse modo, a escala de concentração C_0 deve ser estimada fazendo o balanço da variação da taxa do fluxo que sai da região entre duas seções da camada limite separadas por uma distância dx , que é dada por

$$\text{área} \times \text{fluxo} \simeq \delta_c dx u \frac{\partial C}{\partial x}$$

e a taxa da erosão de uma região do fundo de comprimento dx . Ou seja,

$$\delta_c u \frac{\partial C}{\partial x} dx \sim E \tau_0 dx. \quad (2.72)$$

Por [Mei et al., 1997], as dimensões da concentração, da erosão e da tensão são, respectivamente

$$[C] = \frac{M}{L^3}$$

$$[E] = \frac{T}{L}$$

e

$$[\tau_0] = \frac{ML}{L^2 T^2},$$

onde M é massa, L é distância e T é tempo.

Assim, a dimensão desses termos em ambos os lados de (2.72) é a mesma pois

$$\left[\delta_c u \frac{\partial C}{\partial x} dx \right] = L \frac{L}{T} \frac{M}{L^3 L} L = \frac{M}{LT} \quad (2.73)$$

e

$$[E\tau_0 dx] = \frac{T}{L} \frac{ML}{L^2 T^2} L = \frac{M}{LT}. \quad (2.74)$$

Equivalentemente, usando (2.70), (2.71) e (2.72),

$$\delta_c \sqrt{2} k^2 A^2 \sqrt{\frac{g}{h}} C_0 \sim E\tau_b \sim \rho E D_v \frac{A\sqrt{gh}}{\delta_c h}. \quad (2.75)$$

Logo, a escala de concentração C_0 é da ordem de

$$C_0 \sim \frac{2\sqrt{2}\rho E D_v}{k^2 \delta_c^2 A}. \quad (2.76)$$

Substituindo a normalização (2.63) em (2.56), temos

$$-w_0 C^* C_0 - C_0 \frac{D_v}{\delta_c} \frac{\partial C^*}{\partial z^*} = \tau_0 E |\tau_b^*|, \quad (2.77)$$

onde $\tau_b' = \tau_b/\tau_0$. Multiplicando (2.77) por δ_c/D_v ,

$$-Pe C^* - \frac{\partial C^*}{\partial z^*} = \frac{\delta_c}{C_0 D_v} \tau_0 E |\tau_b^*|, \quad (2.78)$$

e, por (2.70) e (2.76),

$$-Pe C^* - \frac{\partial C^*}{\partial z^*} = \frac{\delta_c}{D_v} \left[\frac{\sqrt{2}\rho D_v U_b}{\delta_c} \right] \left[\frac{k^2 \delta_c^2 U_b h}{2\sqrt{2}\rho E D_v \sqrt{gh}} \right] E |\tau_b^*|. \quad (2.79)$$

Portanto, temos que

$$-Pe C^* - \frac{\partial C^*}{\partial z^*} = \frac{k^2 U_b^2 \delta_c^2 \sqrt{h}}{D_v \sqrt{g}} |\tau_b^*|. \quad (2.80)$$

Note que

$$\frac{k^2 U_b^2 \delta_c^2 \sqrt{h}}{D_v \sqrt{g}} = O(kA)^2 = O(\epsilon)^2. \quad (2.81)$$

Pela nossa hipótese de que $Pe = O(1)$, o resultado acima (2.80) implica que a taxa de erosão é menor que os termos de fluxos do lado esquerdo por um fator de ordem ϵ^2 . Esses resultados serão úteis para a próxima seção.

2.3 Equação do transporte efetiva usando expansão de múltiplas escalas

Na seção anterior, identificamos a ordem de cada termo das equações (2.56) e (2.80) através das equações (2.79) e (2.68). Desse modo, inserindo o parâmetro ϵ na equação (2.47) e na condição de fronteira (2.56), obtemos

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial u_i C}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z} [(-w_0 + \epsilon w)C] = \epsilon^2 D_h \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_i} + D_v \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad (2.82)$$

$$-w_0 C - D_v \frac{\partial C}{\partial z} = \epsilon^2 E |\tau_b|, \quad z = 0. \quad (2.83)$$

Para resolvermos esse problema, usaremos expansões em múltiplas escalas. Esse método foi adotado em [Mei and Chian, 1994] e [Mei et al., 1997], pois no problema em questão a escala no tempo da difusão horizontal era esperada ser muito maior que o período da onda. Esse método é uma modificação do método da homogeneização, estudado em [Bensoussan et al., 1978], [Mauri, 1991], [Mei, 1992] e [Rubinstein and Mauri, 1986] em problemas de meios porosos. [Bensoussan et al., 1978] afirma que geralmente o método de múltiplas escalas dá os mesmos resultados que o método das médias.

As únicas hipóteses necessárias são

- existem duas escalas de comprimento diferentes (micro e macro);
- a micro-estrutura é periódica.

Sejam l e L duas escalas quaisquer. Utilizando a escala de comprimento $\epsilon = l/L$ como parâmetro pequeno, o método de expansão de duas escalas é empregado sistematicamente para aproximar as equações governantes de ordens sucessivas. Junto com condições de fronteira apropriadas, essas equações definem problemas de valor de contorno canônicos em uma célula unitária. Uma vez resolvidos esses problemas, suas médias sobre a célula nos levam à equação em macro escala.

De acordo com [Mei et al., 1997], no processo de convecção-difusão, existem duas escalas de tempo distintas correspondentes às escalas de comprimento horizontal e vertical. Uma é o tempo de difusão através da camada limite, que é igual ao período da onda, ou seja,

$$O(1/\sigma) = O(\delta^2/D_v).$$

A outra é o tempo de difusão através do comprimento da onda, $O(1/k^2 D_h)$. A razão entre essas duas escalas é

$$O(k^2 \delta^2 (D_h/D_v)) = O(\beta^2).$$

No nosso caso, estamos supondo que $\epsilon = O(\beta)$. Sobre essa hipótese, introduziremos coordenadas de múltipla escala para o tempo: t (macro escala) e $T = \epsilon^2 t$ (micro escala). Ainda, expandiremos as coordenadas da velocidade u_i e w e a concentração da seguinte forma

$$u_i = u_i^{(1)} + \epsilon u_i^{(2)} + O(\epsilon^2) \quad (2.84)$$

$$w = w^{(1)} + \epsilon w^{(2)} + O(\epsilon^2) \quad (2.85)$$

$$C = C^{(0)} + \epsilon C^{(1)} + \epsilon^2 C^{(2)} + O(\epsilon^3), \quad (2.86)$$

onde $u_i^{(n)}$ e $w^{(n)}$ são funções de x_i , z e t e $C^{(n)} = C^{(n)}(x_i, z, t, T)$.

Focando a nossa atenção no comportamento físico de alguns períodos de onda, vamos considerar a evolução de longo tempo da concentração no fundo. Estamos decompondo a concentração C em uma parte $C^{(0)}$ que varia na escala de tempo lenta T e em uma outra parte variando na escala de tempo rápida t . Logo $C^{(0)}(x_i, z, T)$ não depende do tempo instantâneo t , mas depende de T .

Note que

$$\frac{\partial C^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial C^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \epsilon^2 \frac{\partial C^{(0)}}{\partial T}. \quad (2.87)$$

Substituindo (2.84), (2.85) e (2.86) na equação (2.82), e utilizando (2.87), temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\epsilon C^{(1)} + \epsilon^2 C^{(2)})}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial C^{(0)}}{\partial T} + \epsilon \frac{\partial(u_i^{(1)} + \epsilon u_i^{(2)})(C^{(0)} + \epsilon C^{(1)} + \epsilon^2 C^{(2)})}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [(-w_0 + \epsilon(w^{(1)} + \epsilon w^{(2)}))(C^{(0)} + \epsilon C^{(1)} + \epsilon^2 C^{(2)})] \\ & = \epsilon^2 D_h \frac{\partial^2(C^{(0)} + \epsilon C^{(1)} + \epsilon^2 C^{(2)})}{\partial x_i \partial x_i} + D_v \frac{\partial^2(C^{(0)} + \epsilon C^{(1)} + \epsilon^2 C^{(2)})}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Tomando os termos de ordem zero na equação (2.88), vemos que $C^{(0)}(x_i, z, t)$ é governada pela equação diferencial homogênea na variável z dada por

$$-w_0 \frac{\partial C^{(0)}}{\partial z} - D_v \frac{\partial^2 C^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < \infty. \quad (2.89)$$

Do mesmo modo, substituindo (2.84), (2.85) e (2.86) em (2.83) e em (2.57), temos

$$-w_0(C^{(0)} + \epsilon C^{(1)} + \epsilon^2 C^{(2)}) - D_v \frac{\partial(C^{(0)} + \epsilon C^{(1)} + \epsilon^2 C^{(2)})}{\partial z} = \epsilon^2 E|\tau_b|, \quad z = 0 \quad (2.90)$$

e

$$C^{(0)} + \epsilon C^{(1)} + \epsilon^2 C^{(2)} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.91)$$

Tomando os termos de ordem zero em (2.90) e em (2.91), obtemos as condições de fronteira

$$w_0 C^{(0)} + D_v \frac{\partial C^{(0)}}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (2.92)$$

e

$$C^{(0)} = 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.93)$$

Logo, a equação (2.89) tem uma solução não-trivial dada por

$$C^{(0)} = \widehat{C}(x_i, T) \mathcal{F}(z), \quad (2.94)$$

onde

$$\mathcal{F}(z) = \exp\left(-\frac{w_0 z}{D}\right) \quad (2.95)$$

e \hat{C} é a concentração de ordem zero no fundo (em $z = 0$).

Da mesma forma, tomando os termos de $O(\epsilon)$ em (2.88), (2.90), (2.91) obtemos

$$\frac{\partial C^{(1)}}{\partial t} - w_0 \frac{\partial C^{(1)}}{\partial z} - D_v \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial z^2} = -\frac{\partial(u_i^{(1)} C^{(0)})}{\partial x_i} - \frac{\partial w^{(1)} C^{(0)}}{\partial z}, \quad (2.96)$$

isto é,

$$\frac{\partial C^{(1)}}{\partial t} - w_0 \frac{\partial C^{(1)}}{\partial z} - D_v \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial z^2} = -\frac{\partial(u_i^{(1)} C^{(0)})}{\partial x_i} - \frac{\partial(w^{(1)} C^{(0)})}{\partial z} \quad (2.97)$$

e as condições de fronteira

$$-w_0 C^{(1)} - D_v \frac{\partial C^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (2.98)$$

e

$$C^{(1)} = 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.99)$$

Analogamente, tomando os termos $O(\epsilon^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^{(2)}}{\partial t} - w_0 \frac{\partial C^{(2)}}{\partial z} - D_v \frac{\partial^2 C^{(2)}}{\partial z^2} &= -\frac{\partial u_i^{(1)} C^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{\partial w^{(1)} C^{(1)}}{\partial z} \\ -\frac{\partial C^{(0)}}{\partial T} - \frac{\partial u_i^{(2)} C^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial w^{(2)} C^{(0)}}{\partial z} + D_h \frac{\partial C^{(0)}}{\partial x_i \partial x_i} & \end{aligned} \quad (2.100)$$

e as condições de fronteira

$$-w_0 C^{(2)} - D_v \frac{\partial C^{(2)}}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (2.101)$$

e

$$C^{(2)} = 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.102)$$

Note que para a equação de ordem zero nós conseguimos obter uma solução não trivial. Portanto, nosso interesse será na difusão lenta de ordem zero. Então, iremos focar nossa atenção na concentração no fundo definida por (2.94), ou seja, queremos obter uma equação para \hat{C} .

Suponhamos que o campo de velocidade de primeira ordem $(u_i^{(1)}, w^{(1)})$ é um movimento harmônico simples com frequência σ . Assim, todos os termos do lado

direito de (2.97) são harmônicos simples no tempo t . Denotaremos a média no tempo de um período de onda de qualquer função f por \bar{f} . Então $\bar{C}^{(1)}$ é governada pela equação

$$-w_0 \frac{\partial C^{(1)}}{\partial z} - D_v \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < \infty, \quad (2.103)$$

que é idêntica à equação (2.92) para $C^{(0)}$, e pelas equações homogêneas (2.98) e (2.99) também como $C^{(0)}$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos tomar $\bar{C}^{(1)} = 0$ e então podemos supor que $C^{(1)}$ consiste apenas das flutuações do primeiro harmônico

$$C^{(1)} = \text{Re}(C_{11} e^{-i\sigma t}), \quad (2.104)$$

onde $C_{11} = C_{11}(x_i, z, T)$.

Tomando a média no tempo de (2.100), (2.101) e (2.102) sobre o período de onda, temos que $\bar{C}^{(2)}$ satisfaz a equação diferencial não homogênea

$$\begin{aligned} -w_0 \bar{C}^{(2)} - D_v \frac{\partial \bar{C}^{(2)}}{\partial z} &= -\frac{\overline{\partial \hat{C}(x_i, T) \mathcal{F}(z)}}{\partial T} - \frac{\overline{\partial u_i^{(1)} C^{(1)}}}{\partial x_i} - \frac{\overline{\partial w^{(1)} C^{(1)}}}{\partial z} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(u_i^{(2)} \hat{C}(x_i, T) \mathcal{F}(z))} - \frac{\overline{\partial w^{(2)} C^{(0)}}}{\partial z} \\ &+ D_h \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \overline{(C(x_i, T) \mathcal{F}(z))}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

as condições de fronteira

$$-w_0 \bar{C}^{(2)} - D_v \frac{\partial \bar{C}^{(2)}}{\partial z} = E |\overline{\tau_b}|, \quad z = 0 \quad (2.106)$$

e

$$\bar{C}^{(2)} = 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.107)$$

Integrando com relação a z a equação (2.105)

$$\begin{aligned} -w_0 \bar{C}^{(2)} - D_v \frac{\partial \bar{C}^{(2)}}{\partial z} &= -\int_0^\infty \frac{\overline{\partial \hat{C}(x_i, T) \mathcal{F}(z)}}{\partial T} dz - \int_0^\infty \frac{\overline{\partial u_i^{(1)} C^{(1)}}}{\partial x_i} dz - \overline{w^{(1)} C^{(1)}} \\ &- \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(u_i^{(2)} \hat{C}(x_i, T) \mathcal{F}(z))} dz - \overline{w^{(2)} C^{(0)}} \\ &+ \int_0^\infty D_h \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \overline{(C(x_i, T) \mathcal{F}(z))} dz. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Logo, substituindo o lado direito de (2.108) em (2.106) e usando (2.93) e (2.99) obtemos a equação

$$\begin{aligned} E|\overline{\tau_b}| &= - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial T} \overline{(\hat{C}(x_i, T)\mathcal{F}(z))} dz - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int_0^\infty \overline{u_i^{(1)} C^{(1)}} dz \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\hat{C}(x_i, T) \int_0^\infty \overline{u_i^{(2)} \mathcal{F}(z)} dz \right] \\ &+ D_h \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} \int_0^\infty \overline{\hat{C}(x_i, T)\mathcal{F}(z)} dz. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Denotaremos a integração de uma função f qualquer na camada limite, de $z = 0$ até $z = \infty$, por $\langle f(z) \rangle$. Então,

$$\begin{aligned} E|\overline{\tau_b}| &= - \frac{\partial}{\partial T} \left[\hat{C}(x_i, T) \left(-\frac{D_v}{w_0} \right) \mathcal{F}(z) \right] \Big|_0^\infty - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u_i^{(1)} C^{(1)}} \rangle - \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{C}(x_i, T) \langle \overline{u_i^{(2)} \mathcal{F}(z)} \rangle) \\ &+ D_h \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} \hat{C} \left(-\frac{D_v}{w_0} \right) (x_i, T) \mathcal{F}(z) \Big|_0^\infty \\ &= -\delta_s \frac{\partial}{\partial T} \hat{C}(x_i, T) - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u_i^{(1)} C^{(1)}} \rangle - \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{C}(x_i, T) \langle \overline{u_i^{(2)} \mathcal{F}(z)} \rangle) \\ &- \delta_s D_h \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} \hat{C}(x_i, T). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Multiplicando (2.110) por $1/\delta_s$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{C}}{\partial T} + \frac{1}{\delta_s} \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle \overline{u_i^{(2)} \mathcal{F}} \rangle \hat{C}] &= -\frac{1}{\delta_s} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u_i^{(1)} C^{(1)}} \rangle \\ &+ D_h \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial x_i x_j} + \frac{E|\overline{\tau_b}|}{\delta_s} \end{aligned} \quad (2.111)$$

que representa a equação efetiva de difusão-convecção para \hat{C} . Observe que essa equação depende da concentração de ordem 1 e foi deduzida a partir da equação de ordem 2.

Ainda, note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_s} \langle \overline{u_i^{(2)} \mathcal{F}} \rangle \hat{C} &= \frac{1}{\delta_s} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{C} \int_0^\infty \overline{u_i^{(2)}} e^{\frac{-z}{\delta_s}} dz + \hat{C} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i^{(2)}}) e^{\frac{-z}{\delta_s}} dz \right] \\ &= \frac{1}{\delta_s} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{C} \overline{u_i^{(2)}} \frac{D}{w_0} \hat{C} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i^{(2)}}) \frac{D}{w_0} \right] \\ &= \frac{1}{\delta_s} \left[\delta_s \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{C} \overline{u_i^{(2)}} \delta_s \hat{C} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i^{(2)}}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i^{(2)}} \hat{C}). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Ou seja, denotando $\overline{u_i^{(2)}} = \mathcal{U}_i = (\mathcal{U}, \mathcal{V})$,

$$\frac{1}{\delta_s} \langle \overline{u_i^{(2)}} \mathcal{F} \rangle \hat{C} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{U}_i \hat{C}). \quad (2.113)$$

Além disso, por ([Mei and Chian, 1994]), teremos que

$$-\frac{1}{\delta_s} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\langle u_i^{(1)} C^{(1)} \rangle} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathcal{D}_{ij} \frac{\partial \hat{C}}{\partial x_j} \right), \quad (2.114)$$

onde

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_{xx} \\ \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{yx} \\ \mathcal{D}_{yy} \end{pmatrix} = \text{Re} \frac{F_5}{\sigma} \begin{pmatrix} |U_0|^2 \\ U_0 V_0^* \\ U_0^* V_0 \\ |V_0|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.115)$$

sendo U_0^* e V_0^* os conjugados de U_0 e V_0 respectivamente e o coeficiente F_5 dado em [Hunt and Johns, 1963].

Assim, a equação (2.111) se torna

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{U}_i \hat{C}) = D_h \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathcal{D}_{ij} \frac{\partial \hat{C}}{\partial x_j} \right) + \frac{E |\overline{\tau_b}|}{\delta_s}, \quad (2.116)$$

onde \mathcal{U} , \mathcal{V} e \mathcal{D}_{ij} são definidos por

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sigma} \text{Re} \left(F_2 U_0 \frac{\partial U_0^*}{\partial x} + F_3 V_0 \frac{\partial U_0^*}{\partial y} + F_4 U_0 \frac{\partial V_0^*}{\partial y} \right), \quad (2.117)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\sigma} \text{Re} \left(F_2 V_0 \frac{\partial V_0^*}{\partial y} + F_3 U_0 \frac{\partial V_0^*}{\partial x} + F_4 V_0 \frac{\partial U_0^*}{\partial x} \right) \quad (2.118)$$

e sendo \mathcal{U} e \mathcal{V} componentes da média ponderada da velocidade da corrente Euleriana como em (2.42) e (2.43), respectivamente. Além disso, os coeficientes F_2 , F_3 e F_4 são dados em [Hunt and Johns, 1963].

A equação acima (2.116) é a equação que queríamos obter. Sua solução representa a concentração de sedimentos no fundo em função das coordenadas horizontais e verticais x e y e em relação ao tempo T .

O termo fonte do lado direito da equação (2.116) representa a média da taxa de erosão sobre um período de onda e , de acordo com [Mei et al., 1997], pode ser calculado através da tensão local no fundo que é dada por

$$\tau_b = \begin{pmatrix} \tau_{bx} \\ \tau_{by} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}\rho D}{\delta} \operatorname{Re} \left[\begin{pmatrix} U_0(x, y) \\ V_0(x, y) \end{pmatrix} e^{-i(\omega t + \frac{\pi}{4})} \right]. \quad (2.119)$$

Essas fórmulas são em geral para ondas de pequena amplitude de qualquer variação espacial, enquanto a velocidade invíscida de ordem zero (U_0, V_0) na direção tangencial é conhecida na borda superior da camada limite.

A seguir, consideraremos alguns casos particulares. Nos exemplos que seguem, tomaremos $D_h = D_v = \nu_e = D$ e $P_e = 1$. Portanto teremos $\delta_s = \delta_c = \delta_u = \delta$. Definindo dessa forma, temos por [Mei and Chian, 1994] que

$$\begin{aligned} F_2 &= -0.122058 + 0.659452i \\ F_3 &= 0.033333 \\ F_4 &= -0.155391 + 0.659452i \\ F_5 &= 0.023615 + 0.233866i \end{aligned} \quad (2.120)$$

É importante observar que a equação (2.116) é a equação de transporte que consideraremos a seguir.

2.4 Transporte de sedimentos em um lago retangular

Nessa seção, examinaremos o transporte de sedimentos da camada limite abaixo de uma onda estacionária longa em um lago retangular. Por simplicidade, assumiremos que a profundidade do lago é constante e trataremos o caso onde as ondas não são atenuadas, seja por ignorar a fricção depois da passagem do vento ou pela suposição que a tendência para o crescimento das ondas é exatamente contrabalançada pelo amortecimento. Suponhamos que um lado da fronteira do lago seja a e o outro lado seja b .

Para movimento harmônico simples, definimos a onda na superfície livre como

$$\eta = \zeta(x, y)e^{-i\sigma t} \quad (2.121)$$

e potencial da velocidade como

$$\Phi = \phi(x, y)e^{-i\sigma t} \quad (2.122)$$

No caso de profundidade constante, por [Mei et al., 2005a], temos que o potencial da velocidade pode ser escrito como

$$\phi = -\frac{ig\zeta}{\sigma}f,$$

onde

$$f = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \text{ e } \sigma^2 = gk \tanh kh.$$

Pela equação de Laplace (4.9), temos que

$$\Delta \left(-\frac{ig\zeta}{\sigma}f \right) = -\frac{ig}{\sigma} \nabla^2(\zeta f) = 0.$$

Portanto,

$$\cosh k(z+h) \nabla^2 \zeta + \zeta \nabla^2(\cosh k(z+h)) = 0,$$

Logo,

$$\cosh k(z+h) \nabla^2 \zeta + k^2 \cosh k(z+h) \zeta = 0.$$

Então, $\zeta(x, y)$ satisfaz a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \zeta + k^2 \zeta = 0. \quad (2.123)$$

Tomando as auto soluções da equação (2.123), temos que a amplitude da onda é

$$\zeta = A \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad (2.124)$$

onde A é a amplitude constante. Vemos que a expressão (2.124) satisfaz a equação de Helmholtz (2.123) com os autovalores correspondentes

$$k = k_{nm} = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.125)$$

De acordo com [Mei et al., 2005a], a relação de dispersão em águas rasas é dada por

$$\sigma = k\sqrt{gh}$$

Por (2.125), obtemos que

$$\sigma = \left[gh \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (2.126)$$

Usando (2.124) temos que o deslocamento dessa superfície de onda é dado por

$$\eta = A \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-i\sigma t}, \quad (2.127)$$

Consideramos ondas de pequena amplitude. Logo, a condição dinâmica na fronteira é

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\eta = \frac{-P_a}{\rho}, \quad (2.128)$$

onde P_a é a pressão atmosférica.

Assim, supondo que $P_a = 0$, obtemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -g\eta. \quad (2.129)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Phi &= -gA \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \int e^{-i\sigma t} dt \\ &= -gA \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \frac{1}{-i\sigma} e^{-i\sigma t} \\ &= -ig \frac{A}{\sigma} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-i\sigma t}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Então, as componentes da velocidade da corrente livre são dadas por

$$U_0 = \phi_x = ig \frac{A m \pi}{\sigma a} \text{sen} \left(\frac{m \pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n \pi y}{b} \right) \quad (2.131)$$

e

$$V_0 = \phi_y = ig \frac{A n \pi}{\sigma b} \cos \left(\frac{m \pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n \pi y}{b} \right). \quad (2.132)$$

Refinaremos U_b como [Mei et al., 1997], ou seja,

$$U_b = \frac{\pi g A}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow A = \sigma \frac{\sqrt{a^2 + b^2} U_b}{\pi g} U_b. \quad (2.133)$$

Desse modo, U_0 e V_0 são dados por

$$U_0 = i \frac{m U_b \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \text{sen} \left(\frac{m \pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n \pi y}{b} \right) \quad (2.134)$$

e

$$V_0 = i \frac{n U_b \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \cos \left(\frac{m \pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n \pi y}{b} \right). \quad (2.135)$$

Agora, introduziremos a seguinte normalização

$$x' = \frac{\pi x}{a} = \mathbb{k}x, \quad y' = \frac{\pi y}{b} = \mathbb{k}y, \quad U'_0 = \frac{U_0}{U_b}, \quad V'_0 = \frac{V_0}{U_b}. \quad (2.136)$$

e

$$\mathcal{U}' = \frac{\mathcal{U}\sigma}{\mathbb{k}U_b^2}, \quad D' = \frac{D\sigma}{U_b^2}, \quad \mathcal{D}'_{xx} = \frac{D_{xx}\sigma}{U_b^2}. \quad (2.137)$$

Logo,

$$U'_0 = mi \sqrt{1 + s^2} \text{sen}(mx') \cos(ny') \quad (2.138)$$

e

$$V'_0 = ni \sqrt{1 + s^{-2}} \cos(mx') \text{sen}(ny'), \quad (2.139)$$

onde $s = b/a$.

Por (2.117) ,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}' &= \frac{\pi}{a} \frac{1}{2\mathbb{k}} \text{Re} \left\{ F_2[m^3(1 + s^2) + F_4(1 + s^{-2})mn^2] \cos^2(ny') \right. \\ &\quad \left. - F_3(1 + s^{-2})mn^2 \text{sen}^2(ny') \right\} \text{sen}(2mx'). \end{aligned} \quad (2.140)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}' &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ F_2 [m^3(1+s^2) + F_4(1+s^{-2})mn^2] \cos^2(ny') \\ &\quad - F_3(1+s^{-2})mn^2 \operatorname{sen}^2(ny') \} \operatorname{sen}(2mx').\end{aligned}\quad (2.141)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}' &= \frac{1}{2s^2} \operatorname{Re} \{ F_2 [n^3(1+s^2) + F_4(1+s^{-2})m^2n] \cos^2(ny') \\ &\quad - F_3(1+s^{-2})m^2n \operatorname{sen}^2(ny') \} \operatorname{sen}(2mx').\end{aligned}\quad (2.142)$$

Por (2.115), temos que os coeficientes de difusividade \mathcal{D}_{ij} são dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_{xx} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} \right\} \frac{|U'_0 U_b|^2}{U_b^2} \sigma = \operatorname{Re}\{F_5\} |U'_0|^2 \\ &= \operatorname{Re}\{F_5\} m^2(1+s^2) \operatorname{sen}^2(mx') \cos^2(ny'),\end{aligned}\quad (2.143)$$

$$\mathcal{D}'_{yy} = \operatorname{Re}\{F_5\} |V'_0|^2 = \operatorname{Re}\{H_4\} n^2(1+s^{-2}) \cos^2(mx') \operatorname{sen}^2(ny'), \quad (2.144)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_{xy} &= \mathcal{D}'_{yx} = \operatorname{Re}\{F_5\} (mi\sqrt{1+s^2} \operatorname{sen}(mx') \cos(ny')) (-ni\sqrt{1+s^2} \cos(mx') \operatorname{sen}(ny')) \\ &= \frac{\operatorname{Re}\{F_5\}}{4} mns(1+s^{-2}) \operatorname{sen}(2mx') \operatorname{sen}(2ny').\end{aligned}\quad (2.145)$$

As componentes da tensão no fundo são dadas por (2.119). Assim,

$$\begin{aligned}\tau_b &= \begin{pmatrix} \tau_{bx} \\ \tau_{by} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}\rho D}{\delta} \operatorname{Re} \left[\begin{pmatrix} i \frac{mU_b \sqrt{a^2+b^2}}{a} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \\ i \frac{nU_b \sqrt{a^2+b^2}}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \end{pmatrix} e^{-i(\sigma t + \frac{\pi}{4})} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}\rho D}{\delta} U_b \operatorname{sen} \left(\sigma t + \frac{\pi}{4} \right) \left[\begin{pmatrix} i \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{a} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \\ i \frac{n\sqrt{a^2+b^2}}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \end{pmatrix} \right].\end{aligned}\quad (2.146)$$

Usando C_0 (2.76), definiremos a taxa média da erosão adimensional por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x', y') &:= \frac{E|\overline{\tau_b}|}{\delta} \frac{\sigma}{k^2 C_0 U_b^2} = \frac{E|\overline{\tau_b}|}{\delta} \frac{\sigma}{k^2 U_b^2} \frac{k^2 \delta^2 \pi U_b}{2\sqrt{2}\rho E D \sigma} \\ &= \frac{|\overline{\tau_b}|}{2\sqrt{2} U_b D} = \frac{|\overline{\tau_b}|}{\tau_0},\end{aligned}\quad (2.147)$$

onde,

$$\tau_0 = \frac{2\sqrt{2}\rho DU_b}{\pi\delta}. \quad (2.148)$$

Agora, avaliaremos a razão $|\overline{\tau_b}|/\tau_0$. Note que

$$\begin{aligned} |\tau_b| &= \frac{\sqrt{2}\rho D}{\delta} U_b \left| \operatorname{sen} \left(\sigma t + \frac{\pi}{4} \right) \right| \left| \left[\begin{array}{l} i \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{a} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \\ i \frac{n\sqrt{a^2+b^2}}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \end{array} \right] \right| \\ &= \frac{\sqrt{2}\rho D}{\delta} U_b \left| \operatorname{sen} \left(\sigma t + \frac{\pi}{4} \right) \right| \\ &\times [m^2 \operatorname{sen}^2(mx') \cos^2(ny')(1+s^2) + n^2 \cos^2(mx') \operatorname{sen}^2(ny')(1+s^{-2})]^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{|\tau_b|}{\tau_0} &= \frac{\sqrt{2}\rho D}{\delta} U_b \frac{\pi\delta}{2\sqrt{2}\rho DU_b} \left| \operatorname{sen} \left(\sigma t + \frac{\pi}{4} \right) \right| \\ &\times [m^2 \operatorname{sen}^2(mx') \cos^2(ny')(1+s^2) + n^2 \cos^2(mx') \operatorname{sen}^2(ny')(1+s^{-2})]^{1/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \left| \operatorname{sen} \left(\sigma t + \frac{\pi}{4} \right) \right| [m^2 \operatorname{sen}^2(mx') \cos^2(ny')(1+s^2) + n^2 \cos^2(mx') \operatorname{sen}^2(ny')(1+s^{-2})]^{1/2}. \end{aligned}$$

Calculando a média no tempo, temos

$$\begin{aligned} \frac{|\overline{\tau_b}|}{\tau_0} &= \frac{\pi}{2} [m^2 \operatorname{sen}^2(mx') \cos^2(ny')(1+s^2) + n^2 \cos^2(mx') \operatorname{sen}^2(ny')(1+s^{-2})]^{1/2} \\ &\times \frac{1}{T} \int_0^T \left| \operatorname{sen} \left(\sigma t + \frac{\pi}{4} \right) \right| dt \\ &= \frac{\pi}{2} [m^2 \operatorname{sen}^2(mx') \cos^2(ny')(1+s^2) + n^2 \cos^2(mx') \operatorname{sen}^2(ny')(1+s^{-2})]^{1/2} \\ &\times \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left| \operatorname{sen} \left(\sigma t + \frac{\pi}{4} \right) \right| dt, \end{aligned}$$

onde o período $T = 2\pi/\sigma$.

Calcularemos a integral separadamente. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\pi/(4\sigma)}^{7\pi/(4\sigma)} |\operatorname{sen}(\sigma t + \pi/4)| dt &= \frac{2}{T} \int_{-\pi/(4\sigma)}^{3\pi/(4\sigma)} |\operatorname{sen}(\sigma t - \pi/4)| dt = \frac{2}{T} \frac{1}{\sigma} [-\cos(\sigma t - \pi/4)] \Big|_{-\pi/(4\sigma)}^{3\pi/(4\sigma)} \\ &= \frac{2}{T} \frac{1}{\sigma} \left[-\cos \left(\frac{3\pi\sigma}{4\sigma} + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\frac{-\pi\sigma}{4\sigma} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2 \frac{\sigma}{2\pi} \frac{1}{\sigma} \left[-\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right] \\ &= \frac{1}{\pi} [-\cos(\pi) + 1] = \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Portanto,

$$\mathcal{E}(x', y') = \frac{|\overline{\tau_b}|}{\tau_0} = [m^2 \sin^2(mx') \cos^2(ny')(1+s^2) + n^2 \cos^2(mx') \sin^2(ny')(1+s^{-2})]^{1/2}. \quad (2.150)$$

Como foi feito no artigo [Mei et al., 1997] consideraremos agora dois lagos A e B com dimensões idênticas (a, b) . O lago A terá a costa erodível, em uma faixa de comprimento $\pi/4$. Já o lago B terá erodível apenas uma área retangular interna com lados normalizados de tamanho $\pi/4$. Tomaremos $m = n = 1$ e os lados do retângulo serão $a = b = 10$ km. Além disso, suponhamos que os lagos tem profundidade $h = 10$ m e que $\sigma = \sqrt{2\pi} \times 10^3$ s. O número de onda é $k = \sigma/\sqrt{gh} = \sqrt{2\pi} \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Para uma onda de amplitude $A = 0.2$ m a velocidade no fundo é $U_b = 0.1$ m/s. Suponhamos ainda que a tensão é dada por $\tau_0 = 0.42$ N e a escala de tempo da convecção é $\sigma/k^2 U_b^2 = (\sqrt{2\pi})^{-1} \times 10^7 \text{ s} = 26$ dias.

Os coeficientes de dispersão são mostrados nas figuras 2.3), (2.4) e (2.5), onde

$$K'_{ij} = \delta_{ij} D' + \mathcal{D}_{ij}, \quad (2.151)$$

onde $(i, j) = (x, y)$ e, como em [Mei et al., 1997], $D' = 0.001$. Nas figuras 2.6 e 2.7 mostramos a taxa de erosão nos lagos A e B, respectivamente.

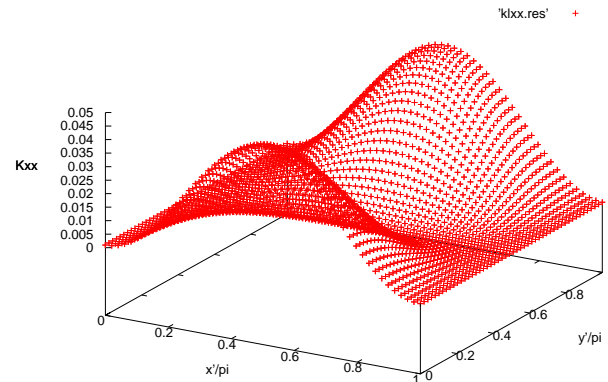


Figura 2.3: K'_{xx} para $m = n = 1$.

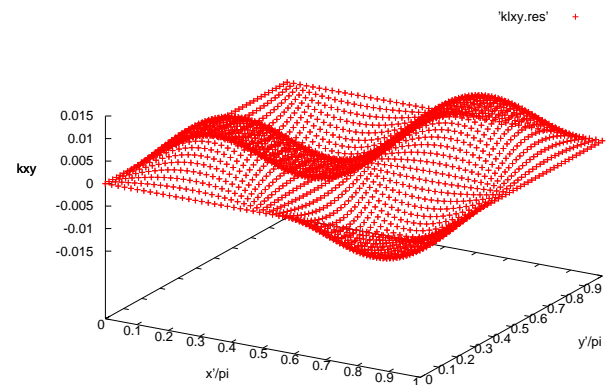


Figura 2.4: K'_{xy} para $m = n = 1$.

Note na figura 2.6 que, apesar de o lago ser erodível na faixa costeira, a erosão é zero nas esquinas. Já na figura 2.7 podemos ver que apesar de o centro ser erodível, a taxa de erosão é maior nas bordas da região que sofre erosão.

Por [Mei et al., 1997], na figura 2.8 vemos que os sedimentos ressuspensos no lago A formam um *plateau* sobre a área de erosão. Ainda, algumas partículas ressuspensas da faixa são levadas para os cantos. De acordo com [Mei et al., 1997],

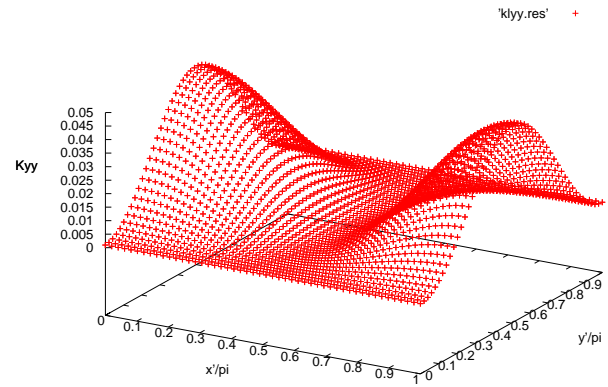


Figura 2.5: K'_{yy} para $m = n = 1$.

essa acumulação nos cantos implica que a concentração de sedimentos irá subir na camada próxima às paredes verticais perto das esquinas. Na realidade, essa tendência será limitada conforme a atenuação das ondas.

Já no lago B, as partículas erodidas do centro são transportadas através da costa não erodível até os quatro cantos como na figura 2.9.

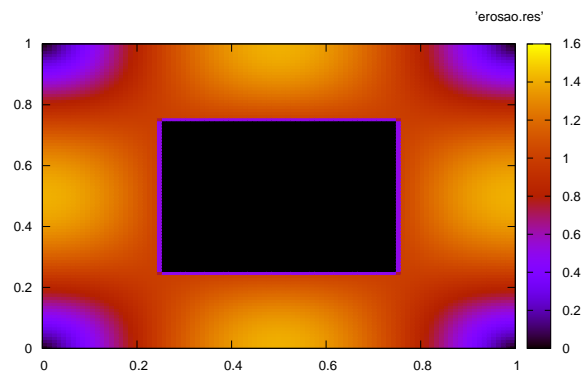


Figura 2.6: \mathcal{E}' para $m = n = 1$ no lago retangular A.

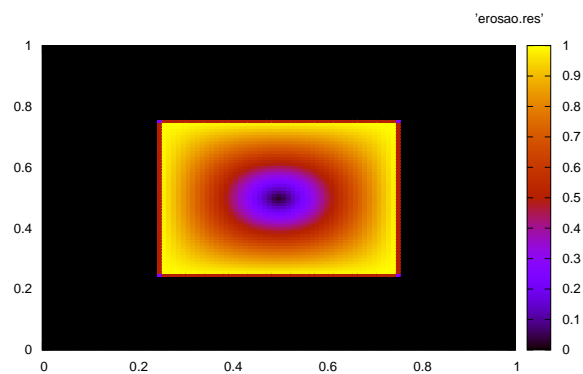


Figura 2.7: \mathcal{E}' para $m = n = 1$ no lago retangular B.

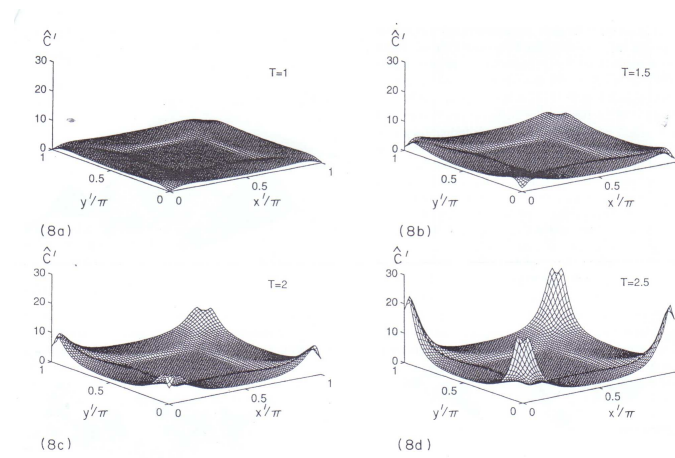


Figura 2.8: Concentração no fundo do lago A devido à erosão ao longo da faixa costeira para $m = n = 1$ [Mei et al., 1997].

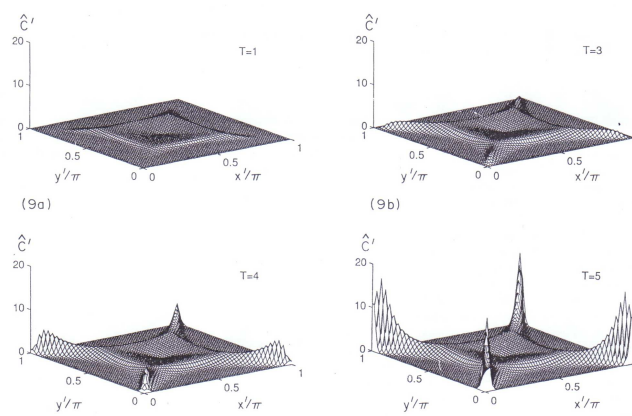


Figura 2.9: Concentração no fundo do lago B devido à erosão ao longo da faixa costeira para $m = n = 1$ [Mei et al., 1997].

2.5 Transporte de sedimentos em um lago circular

O estudo a ser desenvolvido nessa seção representa um trabalho original. Suporemos que o raio do lago seja a e tomaremos coordenadas polares (r, θ) de modo que a origem seja no centro do lago. Do mesmo modo que no caso do lago retangular, $\eta(x, y)$ satisfaz a equação de Helmholtz, que pode ser escrita como

$$\nabla^2 \zeta + k^2 \zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + k^2 \zeta = 0, \quad (2.152)$$

onde k é o número de onda.

Na parede $r = a$, as componentes normais da velocidade radial devem ser nulas. Logo,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0. \quad (2.153)$$

A solução da equação de Helmholtz é, por separação de variáveis,

$$\zeta = J_m(kr)(A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta), \quad (2.154)$$

onde A_m e B_m são constantes arbitrárias e $J_m(x)$ é a função de Bessel. Para satisfazer a condição de fronteira (2.153) devemos ter

$$J'_m(kr)|_{r=a} = J'_m(ka) = 0. \quad (2.155)$$

Denotaremos o n -ésimo zero de J'_m por j'_{mn} , isto é $J'_m(j'_{mn}) = 0$. Dessa forma, por (2.155), os auto-valores da função J'_m são

$$k_{mn} = \frac{j'_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, m - 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.156)$$

e portanto as auto-soluções correspondentes são

$$\zeta_{mn} = J_{mn}(k_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta). \quad (2.157)$$

Como no caso anterior, queremos encontrar os coeficientes de difusão, a taxa de erosão e a velocidade do fluxo Euleriano. Para resolvermos esse problema, usaremos

as auto-soluções dadas em (2.157). Assim, tomando $P_a = 0$ na equação (2.128), temos

$$\frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial t} = -g\eta_{mn},$$

onde $\eta_{mn}(x, y, t) = \zeta_{mn}(x, y)e^{-i\sigma t}$. Assim,

$$\frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial t} = -g\zeta(x, y)e^{-i\sigma t} \quad (2.158)$$

Então,

$$\Phi(x, y, z) = -g\zeta_{mn}(x, y) \int e^{-i\sigma t} dt = \frac{-g\zeta(x, y)}{-i\sigma} e^{-i\sigma t}. \quad (2.159)$$

Logo,

$$\Phi(x, y, z) = \varphi(x, y, z)e^{-i\sigma t} = -\frac{ig}{\sigma}\zeta_{mn}(x, y, z)e^{-i\sigma t}, \quad (2.160)$$

ou seja,

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{ig}{\sigma}\zeta_{mn}(x, y, z). \quad (2.161)$$

Assim, as componentes da velocidade do escoamento invíscido são dadas por

$$U_0 = \varphi_x = \varphi_r \frac{\partial r}{\partial x} + \varphi_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.162)$$

e

$$V_0 = \varphi_y = \varphi_r \frac{\partial r}{\partial y} + \varphi_\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (2.163)$$

Então,

$$\begin{aligned} U_0 = & -\frac{ig}{\sigma} \left[k_{mn} J'_m(k_{mn}r) \cos \theta (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta) \right. \\ & \left. - m J_m(k_{mn}r) \frac{\sin \theta}{r} (-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \right] \end{aligned} \quad (2.164)$$

e

$$\begin{aligned} V_0 = & -\frac{ig}{\sigma} \left[k_{mn} J'_m(k_{mn}r) \sin \theta (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta) \right. \\ & \left. + m J_m(k_{mn}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \right]. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Logo,

$$U_0^* = \frac{ig}{\sigma} \left[k_{mn} J'_m(k_{mn}r) \cos \theta (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta) - m J_m(k_{mn}r) \frac{\sin \theta}{r} (-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \right] \quad (2.166)$$

e

$$V_0^* = \frac{ig}{\sigma} \left[k_{mn} J'_m(k_{mn}r) \sin \theta (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta) + m J_m(k_{mn}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \right]. \quad (2.167)$$

Para encontrarmos as componentes da velocidade do fluxo Euleriano e o tensor \mathcal{D}_{ij} , temos que derivar (2.166) e (2.167). Derivando (2.166) em relação a x ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0^*}{\partial x} &= \frac{\partial U_0^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U_0^*}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial U_0^*}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial U_0^*}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (2.168)$$

Por (A.1) e (A.2) no apêndice A, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0^*}{\partial x} &= \frac{ig}{\sigma} \left\{ \left[k^2 J''_m(k_{mn}r) \cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{r} \left(\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) - k_{mn} J'_m(k_{mn}r) \right) \right] \right. \\ &\times (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \\ &+ \left[\left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J'_m(k_{mn}r) \right) \frac{m}{r} \sin 2\theta \right] \\ &\times (-A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Ainda, derivando em relação a y ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0^*}{\partial y} &= \frac{\partial U_0^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U_0^*}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial U_0^*}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial U_0^*}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \quad (2.170)$$

Por (A.1) e (A.2) no apêndice A, temos que a derivada (2.170) se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0^*}{\partial y} &= \frac{ig}{\sigma} \left\{ \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) + \left(\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{\text{sen}\theta \cos\theta}{r} \right] \right. \\ &\times (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \\ &+ \left[\left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \cos 2\theta \frac{m}{r} \right] \\ &\times (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Analogamente, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0^*}{\partial x} &= \frac{ig}{\sigma} \left\{ \text{sen}\theta \cos\theta \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) - \frac{k_{mn}}{r} J_m'(k_{mn}r) + \frac{m^2}{r^2} J_m(k_{mn}r) \right] (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\ &+ \left. \frac{m}{r} \cos 2\theta \left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) + \frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \right) (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right\} \end{aligned} \quad (2.172)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0^*}{\partial y} &= \frac{ig}{\sigma} \left\{ \left[k^2 J_m''(k_{mn}r) \text{sen}^2\theta + \left(-\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) + k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{\cos^2\theta}{r} \right] \right. \\ &\times (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \\ &+ \left. \left[\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \frac{m}{r} \text{sen}2\theta \right] (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (2.173)$$

Agora, substituindo os resultados obtidos (2.164)-(2.173) em (2.117), (2.118) e (2.115), obtêm-se as componentes da velocidade de fluxo Euleriano \mathcal{U} e \mathcal{V} e o tensor \mathcal{D}_{ij} .

Consideremos o termo da erosão

$$\tau_b = \begin{pmatrix} \tau_{bx} \\ \tau_{by} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}\rho D}{\delta} \text{Re} \left[\begin{pmatrix} U_0(x, y) \\ V_0(x, y) \end{pmatrix} e^{-i(\sigma t + \frac{\pi}{4})} \right]. \quad (2.174)$$

Para a tensão de fundo temos, por (2.164) e (2.165),

$$\begin{aligned} \tau_b &= -\frac{\sqrt{2}\rho D}{\delta} \frac{ig}{\sigma} \text{Re} \left[\left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \text{sen}\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \end{pmatrix} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{m}{r} J_m(k_{mn}r) (-A_{mn} \text{sen}m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \begin{pmatrix} -\text{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right) e^{-i(\sigma t + \frac{\pi}{4})} \right] \end{aligned} \quad (2.175)$$

Logo, calculando o módulo

$$\begin{aligned}
|\tau_b| &= \frac{\sqrt{2}\rho D g}{\delta \sigma} \left\{ [k_{mn} J'_m(k_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{m}{r} J_m(k_{mn}r)(-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \sin \theta]^2 \right. \\
&\quad \left. + [k_{mn} J'_m(k_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \sin \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{r} J_m(k_{mn}r)(-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \cos \theta]^2 \right\}^{1/2} \sin \left| \sigma t + \frac{\pi}{4} \right|. \quad (2.176)
\end{aligned}$$

Portanto, como no caso do retângulo,

$$\begin{aligned}
E|\overline{\tau_b}| &= E \frac{\sqrt{2}\rho D g}{\delta \sigma} \int_0^{2\pi/\sigma} \left\{ [k_{mn} J'_m(k_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{m}{r} J_m(k_{mn}r)(-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \sin \theta]^2 \right. \\
&\quad \left. + [k_{mn} J'_m(k_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \sin \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{r} J_m(k_{mn}r)(-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \cos \theta]^2 \right\}^{1/2} \left| \sigma t + \frac{\pi}{4} \right| dt \\
&= \frac{C_0 \pi k^2 \delta U_b g}{2\sigma^2} \frac{2}{\pi} \left\{ [k_{mn} J'_m(k_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{m}{r} J_m(k_{mn}r)(-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \sin \theta]^2 \right. \\
&\quad \left. + [k_{mn} J'_m(k_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \sin \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{r} J_m(k_{mn}r)(-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \cos \theta]^2 \right\}^{1/2},
\end{aligned}$$

onde,

$$C_0 = \frac{2\sqrt{2}\rho E D \sigma}{\pi k^2 \delta^2 U_b}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
E|\overline{\tau_b}| &= \frac{C_0 k^2 \delta U_b g}{\sigma^2} \left\{ [k_{mn} J'_m(k_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{m}{r} J_m(k_{mn}r)(-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \sin \theta]^2 \right. \\
&\quad \left. + [k_{mn} J'_m(k_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \sin \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{r} J_m(k_{mn}r)(-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \cos \theta]^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.177)
\end{aligned}$$

Definimos a taxa de erosão adimensional por

$$\mathcal{E}'(x') = \frac{\sigma}{k^2 U_b^2 C_0} \frac{E|\overline{\tau_b}|}{\delta} \quad (2.178)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(x') = & \frac{\sigma}{k^2 U_b^2 C_0} \frac{C_0 k^2 \delta U_b g}{\sigma^2} \left\{ [k_{mn} J'_m(k_{mn} r) (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \cos \theta \right. \\ & - \left. \frac{m}{r} J_m(k_{mn} r) (-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \sin \theta]^2 \right. \\ & + [k_{mn} J'_m(k_{mn} r) (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \sin \theta \\ & \left. + \frac{m}{r} J_m(k_{mn} r) (-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \cos \theta]^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.179) \end{aligned}$$

Portanto a taxa de erosão no lago circular será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(x') = & \frac{g}{U_b \sigma} \left\{ [k_{mn} J'_m(k_{mn} r) (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \cos \theta \right. \\ & - \left. \frac{m}{r} J_m(k_{mn} r) (-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \sin \theta]^2 \right. \\ & + [k_{mn} J'_m(k_{mn} r) (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin \theta) \sin \theta \\ & \left. + \frac{m}{r} J_m(k_{mn} r) (-A_{mn} \sin m\theta + B_{mn} \cos m\theta) \cos \theta]^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.180) \end{aligned}$$

Para visualizarmos melhor esses resultados, vamos tomar alguns casos particulares na próxima seção. Nesses casos, tomamos a normalização

$$r' = \frac{r}{a} \quad \text{e} \quad \theta' = \theta. \quad (2.181)$$

Para facilitar a notação, escreveremos r ao invés de r'/a .

2.5.1 Caso 1: $m = 0$ e $n = 1$

Nesse caso, a superfície livre é dada por

$$\eta = A_0 J_0(k_{01} r), \quad (2.182)$$

onde $A_0 = A_{01}$ é uma constante arbitrária.

Assim,

$$D'_{xx} = \frac{D_{xx}\sigma}{U_b^2} = \frac{\sigma}{U_b^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} |U_0|^2 \right\}, \quad (2.183)$$

$$D'_{xy} = \frac{D_{xy}\sigma}{U_b^2} = \frac{\sigma}{U_b^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} U_0 V_0^* \right\}, \quad (2.184)$$

$$D'_{yx} = \frac{D_{yx}\sigma}{U_b^2} = \frac{\sigma}{U_b^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} U_0^* V_0 \right\}, \quad (2.185)$$

e

$$D'_{yy} = \frac{D_{yy}\sigma}{U_b^2} = \frac{\sigma}{U_b^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} |V_0|^2 \right\}, \quad (2.186)$$

onde $U'_0 = U_b U_0$, $U'_0 V_0'^* = U_b^2 U_0 V_0^*$, $U_0'^* V_0 = U_b^2 V_0^* U_0$ e $V'_0 = U_b V_0$.

Temos que,

$$U_0 = -\frac{ig}{\sigma} [k_{01} J'_0(k_{01}r) \cos \theta(A_0)], \quad (2.187)$$

$$V_0 = -\frac{ig}{\sigma} [k_{01} J'_0(k_{01}r) \operatorname{sen} \theta A_0]. \quad (2.188)$$

$$U_0^* = \frac{ig}{\sigma} [k_{01} J'_0(k_{01}r) \cos \theta A_0] \quad (2.189)$$

e

$$V_0^* = \frac{ig}{\sigma} [k_{01} J'_0(k_{01}r) \operatorname{sen} \theta A_0]. \quad (2.190)$$

Logo,

$$|U_0|^2 = \frac{g^2}{\sigma^2} k_{01}^2 A_0^2 (J'_0(k_{01}r) \cos \theta)^2 \quad (2.191)$$

$$|V_0|^2 = \frac{g^2}{\sigma^2} k_{01}^2 (J'_0(k_{01}r) \operatorname{sen} \theta)^2 A_0^2 \quad (2.192)$$

$$U_0 V_0^* = \frac{g^2}{\sigma^2} k_{01}^2 (J'_0(k_{01}r))^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta A_0^2 \quad (2.193)$$

e

$$U_0^* V_0 = \frac{g^2}{\sigma^2} k_{01}^2 (J'_0(k_{01}r))^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta A_0^2. \quad (2.194)$$

Portanto,

$$D'_{xx} = \frac{\sigma}{U_b^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} \frac{g^2}{\sigma^2} k_{01}^2 A_0^2 (J'_0(k_{01}r))^2 \cos^2 \theta \right\}, \quad (2.195)$$

$$D'_{xy} = D'_{yx} = \frac{\sigma}{U_b^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} \frac{g^2}{\sigma^2} k_{01}^2 A_0^2 (J'_0(k_{01}r))^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \right\} \quad (2.196)$$

e

$$D'_{yy} = \frac{\sigma}{U_b^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} \frac{g^2}{\sigma^2} k_{01}^2 A_0^2 (J'_0(k_{01}r))^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right\}. \quad (2.197)$$

Logo, os coeficientes de dispersão K'_{xx} , $K'_{xy} = K'_{yx}$ e K'_{yy} são dados por

$$K'_{xx} = D' + D'_{xx} = \frac{D\sigma}{U_b^2} + \sigma \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma^3} g^2 k_{01}^2 A_0^2 (J'_0(k_{01}r))^2 \cos^2 \theta \right\}, \quad (2.198)$$

$$K'_{xy} = K'_{yx} = D'_{xy} = \sigma \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma^3} g^2 k_{01}^2 A_0^2 (J'_0(k_{01}r))^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \right\} \quad (2.199)$$

e

$$K'_{yy} = D' + D'_{yy} = \frac{D\sigma}{U_b^2} + \sigma \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma^3} g^2 k_{01}^2 A_0^2 (J'_0(k_{01}r))^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right\}. \quad (2.200)$$

Tomamos um lago de altura $h = 10$ m e com auto-frequência $\sigma = \sqrt{2\pi} \times 10^{-3}$ rad/s. Ainda, supomos que a onda tem amplitude $A = 0.2$ m e portanto a velocidade no fundo é $U_b = 0.1$ m/s. Além disso, tomamos $D = 0.001$ e $A_0 = 1$. Para esses valores temos o gráfico dos coeficientes K'_{xx} , $K'_{xy} = K'_{yx}$ e K'_{yy} nas figuras 2.10, 2.11 e 2.12 respectivamente.

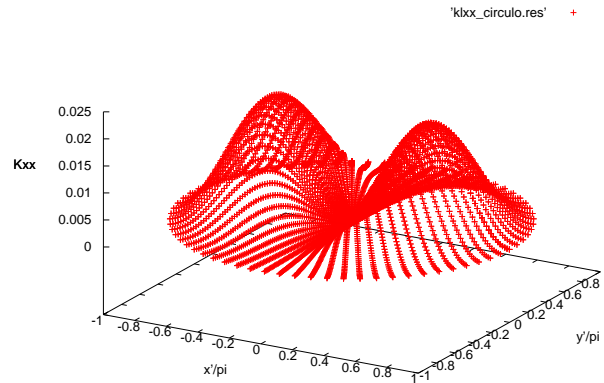


Figura 2.10: K'_{xx} para $m = 0$ e $n = 1$.

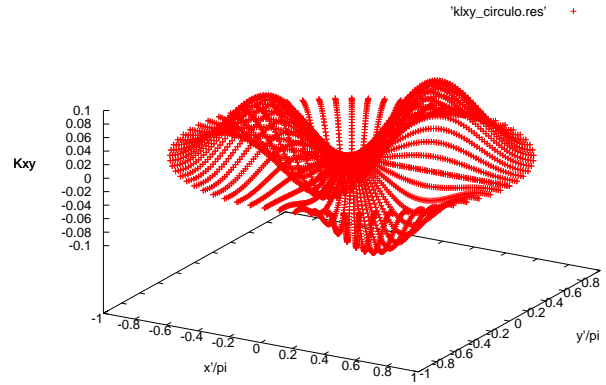


Figura 2.11: K'_{xy} para $m = 0$ e $n = 1$.

Usando a relação $J'_0(x) = -J_1(x) \forall x$, teremos que a taxa de erosão nesse lago circular será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(x') &= \frac{g}{U_b \sigma} \left\{ [k_{01}(-J_1(k_{01}r))A_0 \cos \theta]^2 + [k_{01}(-J_1(k_{01}r))A_0 \sin \theta]^2 \right\}^{1/2} \\ &= \frac{g}{U_b \sigma} k_{01} J_1(k_{01}r) A_0. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Na figura 2.106 temos o gráfico dessa taxa de erosão.

Como fizemos no caso do lago retangular, vamos tomar dois lagos A e B. O lago A tem uma faixa costeira de largura $\pi/4$ que é erodível e o lago B apenas a área circular interna é erodível. As figuras 2.14 e 2.15 mostram a taxa de erosão do lago A e do lago B, respectivamente.

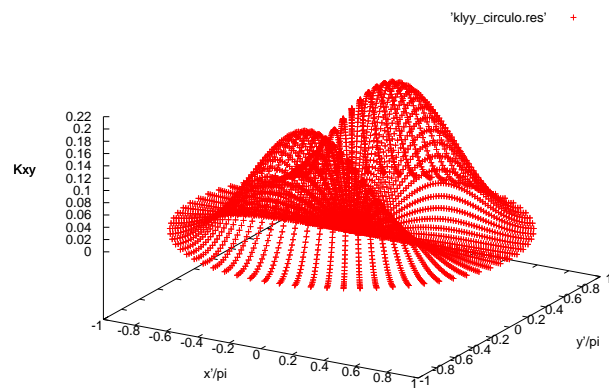


Figura 2.12: K'_{yy} para $m = 0$ e $n = 1$.

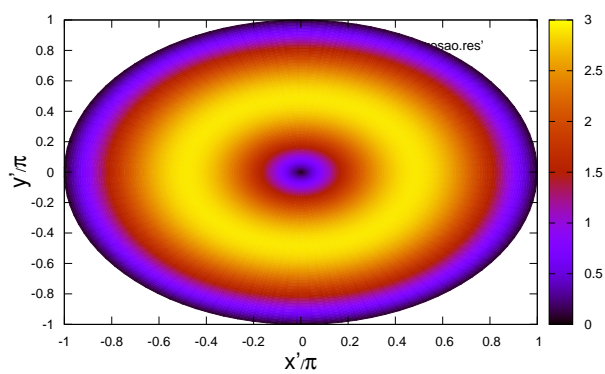


Figura 2.13: \mathcal{E}' para $m = 0$ e $n = 1$ no lago circular.

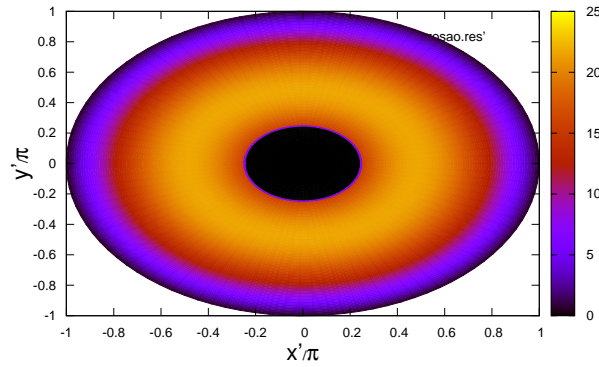


Figura 2.14: \mathcal{E}' para $m = 0$ e $n = 1$ no lago circular A.

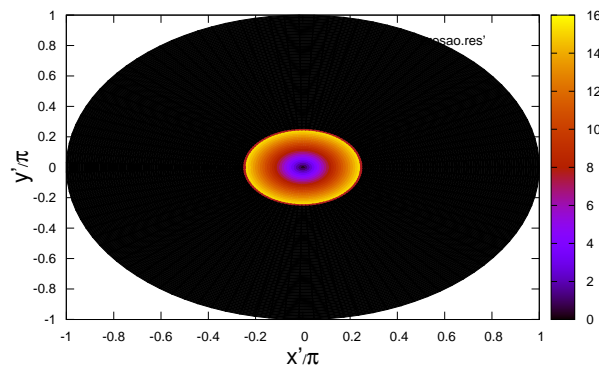


Figura 2.15: \mathcal{E}' para $m = 0$ e $n = 1$ no lago circular B.

Observamos na figura 2.14 que, semelhante ao que ocorreu no lago retangular A, o contorno da faixa do lago que é erodível tem taxa de erosão zero. E pela figura 2.15 temos novamente que no centro a taxa de erosão é zero. Note ainda que em ambos os casos as figuras são simétricas. Isso se deve ao fato da taxa da erosão não depender de θ .

2.5.2 Caso 2: $m = n = 1$

Nesse caso, a superfície livre é dada por

$$\eta = J_1(k_{11}r)(A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta), \quad (2.202)$$

onde $A_1 = A_{11}$ e B_{11} são constantes arbitrárias.

Assim,

$$D'_{xx} = \frac{D_{xx}\sigma}{U_b^2} = \frac{\sigma}{U_b^2} \text{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} |U_0|^2 \right\}, \quad (2.203)$$

$$D'_{xy} = \frac{D_{xy}\sigma}{U_b^2} = \frac{\sigma}{U_b^2} \text{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} U_0 V_0^* \right\}, \quad (2.204)$$

$$D'_{yx} = \frac{D_{yx}\sigma}{U_b^2} = \frac{\sigma}{U_b^2} \text{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} U_0^* V_0 \right\}, \quad (2.205)$$

e

$$D'_{yy} = \frac{D_{yy}\sigma}{U_b^2} = \frac{\sigma}{U_b^2} \text{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma} |V_0|^2 \right\}. \quad (2.206)$$

Temos nesse caso que

$$U_0 = -\frac{ig}{\sigma} [k_{11} J_1'(k_{11}r) \cos \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) - J_1(k_{11}r) \frac{\text{sen} \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta)], \quad (2.207)$$

$$V_0 = -\frac{ig}{\sigma} [k_{11} J_1'(k_{11}r) \text{sen} \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) + J_1(k_{11}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta)], \quad (2.208)$$

$$U_0^* = \frac{ig}{\sigma} [k_{11} J_1'(k_{11}r) \cos \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) - J_1(k_{11}r) \frac{\text{sen} \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta)] \quad (2.209)$$

e

$$V_0^* = \frac{ig}{\sigma} [k_{11} J_1'(k_{11}r) \text{sen} \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) + J_1(k_{11}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta)], \quad (2.210)$$

Logo,

$$|U_0|^2 = \frac{g^2}{\sigma^2} [k_{11} J_1'(k_{11}r) \cos \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) - J_1(k_{11}r) \frac{\text{sen} \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta)]^2,$$

$$\begin{aligned}
|V_0|^2 &= \frac{g^2}{\sigma^2} [k_{11} J_1'(k_{11}r) \text{sen} \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) + J_1(k_{11}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta)]^2, \\
U_0 V_0^* &= \frac{g^2}{\sigma^2} \left[k_{11} J_1'(k_{11}r) \cos \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) - J_1(k_{11}r) \frac{\text{sen} \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta) \right] \\
&\times \left[k_{11} J_1'(k_{11}r) \text{sen} \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) + J_1(k_{11}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta) \right]
\end{aligned} \tag{2.211}$$

e

$$\begin{aligned}
U_0^* V_0 &= \frac{g^2}{\sigma^2} \left[k_{11} J_1'(k_{11}r) \cos \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) - J_1(k_{11}r) \frac{\text{sen} \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta) \right] \\
&\times \left[k_{11} J_1'(k_{11}r) \text{sen} \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) + J_1(k_{11}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta) \right].
\end{aligned} \tag{2.212}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
D'_{xx} &= \frac{\sigma}{U_b^2} \text{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma^3} g^2 [k_{11} J_1'(k_{11}r) \cos \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) \right. \\
&\quad \left. - J_1(k_{11}r) \frac{\text{sen} \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta)]^2 \right\},
\end{aligned} \tag{2.213}$$

$$\begin{aligned}
D'_{xy} &= D'_{yx} = \frac{\sigma}{U_b^2} \text{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma^3} g^2 [k_{11} J_1'(k_{11}r) \cos \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) \right. \\
&\quad \left. - J_1(k_{11}r) \frac{\text{sen} \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta) \right] \\
&\quad \times [k_{11} J_1'(k_{11}r) \text{sen} \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) \\
&\quad \left. + J_1(k_{11}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta) \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{2.214}$$

e

$$\begin{aligned}
D'_{yy} &= \frac{\sigma}{U_b^2} \text{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma^3} g^2 [k_{11} J_1'(k_{11}r) \text{sen} \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \text{sen} \theta) \right. \\
&\quad \left. + J_1(k_{11}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_1 \text{sen} \theta + B_1 \cos \theta)]^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.215}$$

Logo, os coeficientes de dispersão K'_{xx} , $K'_{xy} = K'_{yx}$ e K'_{yy} são dados por

$$K'_{xx} = D' + D'_{xx} = \frac{D\sigma}{U_b^2} + \frac{\sigma}{U_b^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma^3} g^2 [k_{11} J'_1(k_{11}r) \cos \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) - J_1(k_{11}r) \frac{\sin \theta}{r} (-A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta)]^2 \right\}, \quad (2.216)$$

$$K'_{xy} = K'_{yx} = D'_{xy} = \frac{\sigma}{U_b^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma^3} g^2 [k_{11} J'_1(k_{11}r) \cos \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) - J_1(k_{11}r) \frac{\sin \theta}{r} (-A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta)] \times [k_{11} J'_1(k_{11}r) \sin \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) + J_1(k_{11}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta)] \right\} \quad (2.217)$$

e

$$K'_{yy} = D' + D'_{yy} = \frac{D\sigma}{U_b^2} + \frac{\sigma}{U_b^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_5}{\sigma^3} g^2 [k_{11} J'_1(k_{11}r) \sin \theta (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) + J_1(k_{11}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta)]^2 \right\}. \quad (2.218)$$

Além disso, temos por (2.180) que a taxa de erosão é dada nesse caso por

$$\mathcal{E}'(x') = \frac{g}{U_b \sigma} \left\{ [k_{11} J'_1(k_{11}r) (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) \cos \theta - \frac{1}{r} J_1(k_{11}r) (-A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta) \sin \theta]^2 + [k_{11} J'_1(k_{11}r) (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) \sin \theta + \frac{1}{r} J_1(k_{11}r) (-A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta) \cos \theta]^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.219)$$

Com o objetivo de visualizarmos esses resultados, tomamos as mesmas hipóteses que foram tomadas no caso 1. Para esses valores temos o gráfico dos coeficientes K'_{xx} , $K'_{xy} = K'_{yx}$ e K'_{yy} nas figuras 2.16, 2.17 e 2.18, respectivamente.

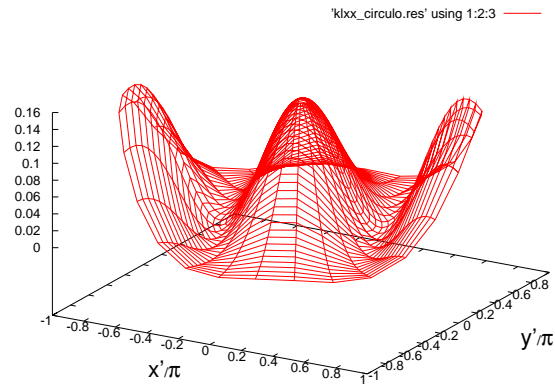


Figura 2.16: K'_{xx} para $m = n = 1$.

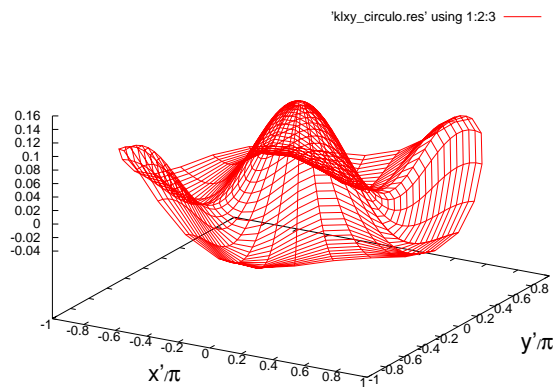


Figura 2.17: K'_{xy} para $m = n = 1$.

Podemos ver nas figuras 2.16, 2.17 e 2.18 que os coeficientes de dispersão são menos suaves que no caso $m = 0$.

Nas figuras 2.20 e 2.21 podemos ver as taxas de erosão no lago com todo o fundo erodível, no lago A e no lago B.

Note que nesse caso perdemos a simetria da figura, já que a taxa de erosão depende de θ .

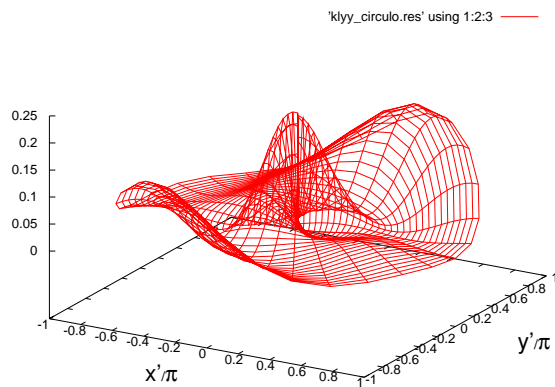


Figura 2.18: K'_{yy} para $m = n = 1$.

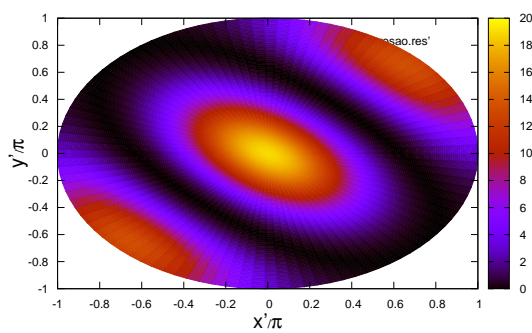


Figura 2.19: \mathcal{E}' para $m = n = 1$ em um lago com um fundo erosível.

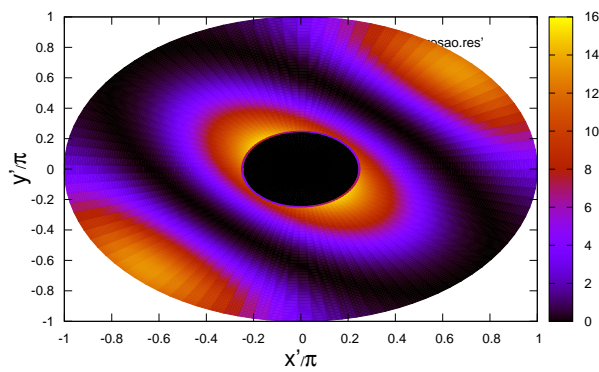


Figura 2.20: \mathcal{E}' para $m = n = 1$ no lago circular A.

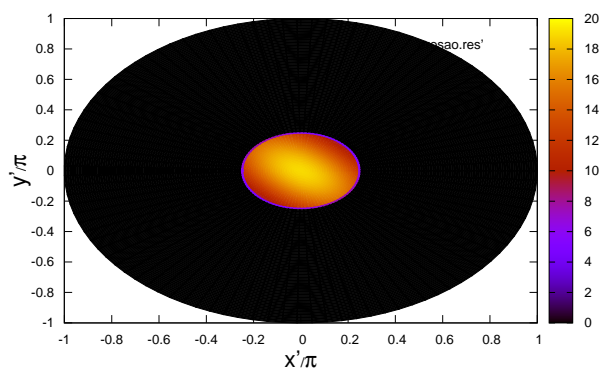


Figura 2.21: \mathcal{E}' para $m = n = 1$ no lago circular B.

3 DISPERSÃO DE PARTÍCULAS DE SEDIMENTOS NA CAMADA LIMITE DE UM LEITO VISCOELÁSTICO

Nesse capítulo mostraremos a pesquisa desenvolvida em [Ng and Wu, 2008] bem como resolveremos numericamente a equação do transporte obtida. Baseado nos artigos [Mei and Chian, 1994] e [Ng, 2000], descritos no capítulo 1, um estudo analítico foi desenvolvido a fim de avaliar os efeitos de um fundo viscoelástico sobre uma onda induzida pela convecção e dispersão de sedimentos suspensos na camada limite da onda sobre esse fundo.

Consideramos um sistema de duas camadas como na figura abaixo.

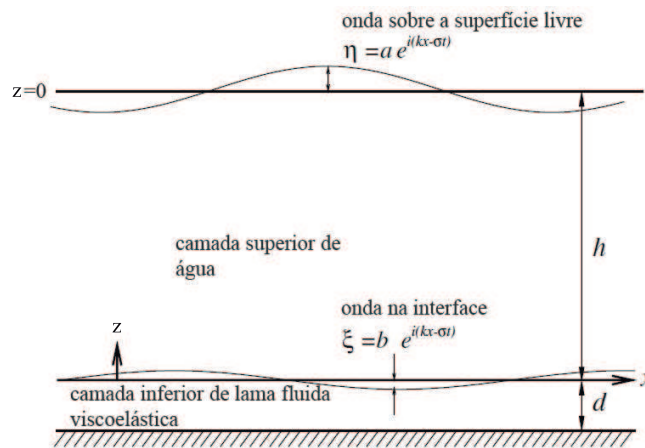


Figura 3.1: Desenho esquemático - água sob lama viscoelástica.

A camada superior é formada por água de profundidade h sobre uma fina camada de lama fluida, a qual estamos supondo viscoelástica, de profundidade d . Assumimos também que a profundidade da lama fluida é constante. De acordo com [Mei et al., 2010], em águas costeiras a profundidade típica d da lama é geralmente de ordem $\mathcal{O}(0,5 \text{ m})$ e muito menor do que a profundidade h da camada superior de água, logo, $h \gg d$.

Para descrevermos a camada inferior, utilizaremos o corpo de Voight. Denotaremos o módulo da constante elástica por G_m e a viscosidade por ν_m .

3.1 Velocidade da água sobre um leito viscoelástico

O objetivo desse capítulo é deduzir as coordenadas horizontal e vertical da velocidade da água sobre um leito viscoelástico. As ondas irão interagir com a camada inferior e, portanto, a velocidade da água também será influenciada.

Suponhamos que uma onda progressiva de pequena amplitude se propague na direção horizontal x sob a superfície da água, cujo deslocamento é dado por

$$\eta = \text{Re}[ae^{i(kx-\sigma t)}], \quad (3.1)$$

onde a é a amplitude da onda, i é a unidade do número complexo, k é o número de onda, σ é a frequência angular da onda e t é o tempo. Estamos considerando $a, \sigma \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{C}$.

Ainda, consideramos o eixo vertical z apontando verticalmente para cima. Assim, definiremos o deslocamento da interface por

$$z = \xi(x, t) = be^{i(kx-\sigma t)}. \quad (3.2)$$

Por fim, denotamos as densidades da água e da lama fluida por ρ_w e ρ_m , respectivamente.

Consideramos ondas de comprimento e amplitude pequenos de modo que $kh = \mathcal{O}(1)$ e $ka \ll 1$. Vamos estudar o caso quando a espessura da camada de lama fluida é comparável à espessura da camada limite de Stokes.

Além disso, assumimos que a profundidade da lama fluida d e a espessura da camada limite que surge sob a lama fluida $\delta_m = (2\nu_m/\sigma)^{1/2}$ são ambas comparáveis com a amplitude da onda sobre a superfície da água a , do mesmo modo que foi

proposto em [Mei and Chian, 1994]. Ainda, a camada limite de Stokes tem espessura dada por $\delta_w = (2\nu_w/\sigma)^{1/2}$ e é desenvolvida na interface entre a água e a lama fluida, onde ν_w é a viscosidade da água como em [Mei and Chian, 1994]. Como estamos assumindo que a lama fluida é mais viscosa do que a água, temos que $\mathcal{O}(\nu_m) \geq \mathcal{O}(\nu_w)$ e assim concluímos que a camada limite de Stokes na lama fluida pode ser mais fina do que na água.

Foi observado que o modelo que mostraremos a seguir é válido enquanto $h \gg a \simeq d \simeq \delta_m \geq \delta_w$ [Ng and Zhang, 2007].

Definimos a declividade da onda por $\epsilon = ka \ll 1$, que é escolhido como um parâmetro pequeno.

Pelas equações da continuidade e de Navier-Stokes, obtemos que as coordenadas da velocidade para a água e para a lama fluida satisfazem

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u_f}{\partial t} + \epsilon u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + \epsilon v_f \frac{\partial u_f}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu_f \frac{\partial^2 u_f}{\partial z^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.4)$$

e

$$0 = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P_f}{\partial z} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.5)$$

onde o parâmetro pequeno ϵ foi inserido a fim de identificarmos as ordens de cada termo da equação, baseado no seguinte dimensionamento das variáveis

$$x = \mathcal{O}(k^{-1}), \quad z = \mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(\epsilon x), \quad t = \mathcal{O}(\sigma^{-1}) \quad (3.6)$$

$$u = \mathcal{O}(\sigma a), \quad v = \mathcal{O}(\epsilon \sigma a), \quad P/\rho = \mathcal{O}(\sigma^2 a k^{-1}) = \mathcal{O}(ga). \quad (3.7)$$

Expandindo em série de Taylor as equações da continuidade das componentes da velocidade e da tensão obtemos que

$$u_w + \epsilon \xi \frac{\partial u_w}{\partial n} = u_m + \epsilon \xi \frac{\partial u_m}{\partial n} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \text{em } n = d, \quad (3.8)$$

$$v_w + \epsilon \xi \frac{\partial v_w}{\partial n} = v_m + \epsilon \xi \frac{\partial v_m}{\partial n} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \text{em } n = d, \quad (3.9)$$

$$\rho_w \nu_w \left(\frac{\partial u_w}{\partial n} + \epsilon \xi \frac{\partial^2 u_w}{\partial n^2} \right) = \rho_w \nu_w \left(\frac{\partial v_w}{\partial n} + \epsilon \xi \frac{\partial^2 v_w}{\partial n^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \text{em } n = d \quad (3.10)$$

e

$$P_w + \epsilon \left(\xi \frac{\partial P_w}{\partial n} - \rho_w g \xi \right) = P_m + \epsilon \left(\xi \frac{\partial P_m}{\partial n} - \rho_m g \xi \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \text{em } n = d, \quad (3.11)$$

onde P_f é a pressão dinâmica em cada camada e $n = h + z + d$ é uma coordenada local que aponta verticalmente para cima do fundo em direção à camada de lama fluida.

Definimos U_I e P_I como a coordenada horizontal da velocidade e como a pressão dinâmica, respectivamente, no fundo, ou seja, em $z = -h$. Assim, temos que

$$(u_w, P_w) \rightarrow (U_I, P_I), \quad \text{quando } n \gg d \text{ e } z \rightarrow -h. \quad (3.12)$$

Essas quantidades são governadas pela equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial U_I}{\partial t} + \epsilon U_I \frac{\partial U_I}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P_I}{\partial x} \quad \text{quando } z \rightarrow -h. \quad (3.13)$$

Observemos que as derivadas de U_I em relação a z são nulas pois a velocidade na camada limite de Stokes é puramente tangencial no fundo.

Usaremos aqui a mesma técnica usada por [Ng, 2000]. A idéia é expandir as coordenadas horizontal e vertical da velocidade. Para obtermos a solução, expandimos as coordenadas da velocidade

$$(u_f, v_f) = (u_{f_0}, v_{f_0}) + \epsilon (u_{f_1}, v_{f_1}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.14)$$

e assumimos que as componentes da velocidade de primeira ordem e a onda da interface são definidas pelo mesmo harmônico que a superfície da onda, ou seja,

$$(u_{f_0}, v_{f_0}, \xi) = \text{Re}[(\tilde{u}_f, \tilde{v}_f, b)e^{i(kx - \sigma t)}] \quad (3.15)$$

onde a condição cinemática na interface é

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_{w_0} \Big|_{z=-h}. \quad (3.16)$$

Do mesmo modo, expandimos a coordenada horizontal da velocidade no fundo U_I , a pressão dinâmica em ambas as camadas P_w, P_m e a pressão no fundo P_I . Pela equação (3.5), notemos que a pressão de $\mathcal{O}(1)$ é constante na água e, pela condição de contorno (3.12), obtemos que $P_{w_0} = P_I$. Ainda, pela condição de contorno (3.11), concluímos que

$$P_{m_0}(0 < n < d) = P_{w_0}(d < n < \infty) = P_{I_0} \quad (3.17)$$

Aqui devemos ressaltar que quando escrevemos $n < \infty$ estamos querendo dizer que $n/d = \mathcal{O}(1)$.

Substituindo (3.13) em (3.4), obtemos as equações para as componentes horizontais das velocidades

$$\frac{d^2 \tilde{u}_w}{dn^2} = \frac{-i\sigma}{\nu_w} (\tilde{u}_w - \tilde{U}_I) \quad \text{em } d < n < \infty \quad (3.18)$$

e

$$\frac{d^2 \tilde{u}_m}{dn^2} = \frac{-i\sigma}{\nu_m} (\tilde{u}_w - \gamma \tilde{U}_I) \quad \text{em } 0 < n < d, \quad (3.19)$$

onde

$$\gamma = \frac{\rho_w}{\rho_m} \quad (3.20)$$

é a razão entre as densidades. Usando (3.12), obtemos que as soluções gerais das equações acima são dadas por, respectivamente,

$$\tilde{u}_w = (1 + De^{-\lambda_w z}) \tilde{U}_I, \quad \text{em } z > 0 \quad (3.21)$$

e

$$\tilde{u}_m = [\gamma - \gamma \cosh(\lambda_m(z+d)) + H \sinh(\lambda_m(z+d))] \tilde{U}_I, \quad \text{em } 0 > z > -d. \quad (3.22)$$

Usando as condições de contorno (3.8), (3.9) de primeira ordem podemos determinar as constantes D e H

$$D = \frac{-\gamma\zeta - (1 - \gamma)\zeta \cosh(\lambda_m d)}{\zeta \cosh(\lambda_m d) + \gamma \sinh(\lambda_m d)} \quad (3.23)$$

e

$$H = \frac{\gamma(1 - \gamma) + \gamma^2 \cosh(\lambda_m d) + \gamma\zeta \sinh(\lambda_m d)}{\zeta \cosh(\lambda_m d) + \gamma \sinh(\lambda_m d)} \quad (3.24)$$

sendo

$$\zeta = (\nu_m^+ / \nu_w)^{1/2} \quad (3.25)$$

um parâmetro complexo relacionado com a variação da viscosidade, onde

$$\nu_m^+ = \nu_m + iG_m / \rho_m \sigma \quad (3.26)$$

é o parâmetro complexo viscoelástico. Observamos que nesse ponto o modelo viscoelástico [Ng and Wu, 2008] se diferencia do modelo viscoso [Ng, 2000], pois nesse último $G_m = 0$.

Notemos ainda que ζ pode ser definido como

$$\zeta = \lambda_w / \lambda_m, \quad (3.27)$$

onde

$$\lambda_w^2 = -i\sigma / \nu_w \quad \text{ou} \quad \lambda_w = (1 - i) / \delta_w \quad (3.28)$$

e

$$\lambda_m^2 = -i\sigma / \nu_m^+ \quad \text{ou} \quad \lambda_m = [\lambda_v^{-2} - \lambda_e^{-2}]^{-1/2} \quad (3.29)$$

com

$$\lambda_v^2 = -i\sigma / \nu_m \quad \text{e} \quad \lambda_e^2 = \rho_m \sigma^2 / G_m. \quad (3.30)$$

Agora podemos calcular as componentes verticais das velocidades. Pela equação da continuidade, obtemos que

$$\tilde{v}_m = -ik \int_0^n \tilde{u}_m dn \quad \text{em} \quad 0 < n < d \quad (3.31)$$

e

$$\tilde{v}_w = v_m(d) - ik \int_d^n u_w dn \quad \text{em } d < n < \infty, \quad (3.32)$$

onde usamos as condições da interface

$$v_m(0) = 0 \quad \text{e} \quad v_m(d) = v_w(d).$$

Substituindo as coordenadas horizontais das velocidades obtidas acima, temos que

$$\tilde{v}_w = -ik\lambda_w^{-1}(\lambda_w z + B - De^{-\lambda_w z})\tilde{U}_I \quad \text{em } z > -h \quad (3.33)$$

e

$$\tilde{v}_m = -ik\lambda_w^{-1}[\gamma(\lambda_w(z+d) - \sinh(\lambda_w(z+d))) + H(\cosh(\lambda_w(z+d)) - 1)]\tilde{U}_I, \quad \text{em } -h > z > -d, \quad (3.34)$$

onde

$$B = \zeta[\gamma(\lambda_m d - \sinh(\lambda_m d)) + H(\cosh(\lambda_m d) - 1)] + D. \quad (3.35)$$

Agora, por (3.16), podemos determinar a amplitude do deslocamento da interface. Usando (3.33), obtemos que

$$b = i\sigma^{-1}\tilde{v}_w \Big|_{z=-h} = k\sigma^{-1}\lambda_w^{-1}(B - D)\tilde{U}_I. \quad (3.36)$$

Após determinarmos a velocidade da água, podemos avaliar como se desenvolve o transporte de sedimentos gerado pelas ondas. Isso nós faremos a seguir na próxima seção.

3.2 Transporte de partículas suspensas

Consideramos o transporte de partículas suspensas na onda da camada limite acima da interface. Segundo [Ng and Wu, 2008], a equação de transporte básica é dada por

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}C) = \nabla \cdot (\mathbf{E}\nabla C), \quad (3.37)$$

onde $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$, $C(x, z, t)$ é a concentração (massa por volume de água), $\mathbf{V}(x, z, t)$ é a velocidade de convecção local e $\mathbf{E}(x, z, t)$ é o tensor de difusividade de vórtices.

A velocidade de convecção é dada por $\mathbf{V} = (u_w, v_w - v_f)$ onde v_f é a velocidade de queda das partículas, que assumimos como constante. Além disso, por simplicidade, vamos considerar o tensor \mathbf{E} como uma constante escalar. Desse modo, e usando a equação da continuidade, podemos escrever a equação (3.37) como

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \epsilon u_w \frac{\partial C}{\partial x} + (\epsilon v_w - v_f) \frac{\partial C}{\partial z} = \epsilon^2 E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \quad (3.38)$$

Os termos do lado esquerdo da equação acima representam a taxa de variação não estacionária e a convecção vertical, devida à onda e à sedimentação. Já os termos do lado direito representam a difusão horizontal e vertical, respectivamente. Aqui estamos assumindo que as partículas dos sedimentos são tão pequenas que podem se mover como as partículas dos fluidos. Além disso, assumimos que a suspensão é tão diluída que sua presença não chega a alterar o comportamento do fluxo.

A equação (3.38) está sujeita às condições de contorno

$$v_f C + E \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad \text{em } z = \epsilon \xi, \quad (3.39)$$

$$C = 0 \quad \text{em } z \rightarrow \infty. \quad (3.40)$$

Em [Ng, 2000] foi adotado o mesmo procedimento que em [Mei and Chian, 1994] e em [Mei et al., 1997]. Ou seja, novamente expandiremos a concentração em uma série de potências

$$C = C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + \dots \quad (3.41)$$

Além disso, como foi feito no capítulo anterior, usaremos a análise de múltiplas escalas. Por isso introduzimos novamente duas coordenadas para o tempo: t (macro escala) e $T = \epsilon^2 t$ (micro escala). Desse modo, a derivada em relação ao tempo pode

ser expandida como

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T}, \quad (3.42)$$

onde esperamos que o termo de ordem zero $C_0 = C_0(x, z, T)$ represente a concentração principal no tempo e portanto não depende do tempo rápido t , enquanto que os termos de ordem mais alta $C_n = C_n(x, z, t, T)$, para $n = 1, 2, \dots$ são funções de ambos os tempos.

A condição de fronteira do fundo (3.39) pode ser expandida em série de Taylor sobre o primeiro nível na interface. Assim obtemos

$$v_f C + E \frac{\partial C}{\partial z} + \epsilon \xi \left(v_f C + E \frac{\partial C}{\partial z} \right) = 0 \text{ em } z = \epsilon \xi. \quad (3.43)$$

As equações perturbadas são obtidas tomando os termos de potências de ϵ iguais depois de substituírmos as expansões (3.41) e (3.42) em (3.38), (3.40) e (3.43).

Dessa forma, a equação de ordem zero é dada por

$$v_f \frac{\partial C_0}{\partial z} + E \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} = 0 \text{ em } -h < z < \infty, \quad (3.44)$$

$$v_f C_0 + E \frac{\partial C_0}{\partial z} = 0 \text{ em } z = -h, \quad (3.45)$$

$$C_0 = 0 \text{ quando } z \rightarrow \infty. \quad (3.46)$$

A solução dessa equação sujeita às condições de contorno acima é dada por

$$C_0(x, z, T) = C_b(x, T)F(z), \quad (3.47)$$

onde $C_b = C_0$ é a concentração no fundo da camada limite (em $z = -h$) e $F(z) = e^{-z/\alpha}$, com

$$\alpha = E/v_f. \quad (3.48)$$

A equação de $O(\epsilon)$ é dada por

$$E \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} + v_f \frac{\partial C_1}{\partial z} - \frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(u_{w_0} C_0) + \frac{\partial}{\partial z}(v_{w_0} C_0) \quad (3.49)$$

$$v_f C_1 + E \frac{\partial C_1}{\partial z} = 0 \text{ em } z = -h, \quad (3.50)$$

$$C_1 = 0 \text{ quando } z \rightarrow \infty. \quad (3.51)$$

Observamos que o lado direito da equação (3.49) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} RHS &= \operatorname{Re}[\tilde{u}_w e^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial C_b}{\partial x} + \operatorname{Re}[\tilde{v}_w e^{i(kx-\sigma t)}] F' C_b \\ &+ \operatorname{Re}[\tilde{u}_w i k e^{i(kx-\sigma t)}] F C_b + \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \tilde{v}_w}{\partial z} e^{i(kx-\sigma t)} \right] F C_b, \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} [-ik\lambda_w^{-1} \lambda_w z + B - D e^{-\lambda_w z}] \tilde{U}_1 \\ &= -ik\lambda_w^{-1} \lambda_w + \lambda_w D e^{-\lambda_w z} \tilde{U}_1 \\ &= -ik(1 + D e^{-\lambda_w z}) \tilde{U}_1 \\ &= -ik\tilde{u}_w. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Portanto, (3.52) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} RHS &= \operatorname{Re}[\tilde{u}_w e^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial C_b}{\partial x} + \operatorname{Re}[\tilde{v}_w e^{i(kx-\sigma t)}] F' C_b \\ &+ \operatorname{Re}[\tilde{u}_w i k e^{i(kx-\sigma t)}] F C_b + \operatorname{Re} [-ik\tilde{u}_w e^{i(kx-\sigma t)}] F C_b \\ &= \operatorname{Re}[\tilde{u}_w e^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial C_b}{\partial x} + \operatorname{Re}[\tilde{v}_w e^{i(kx-\sigma t)}] F' C_b. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Logo, podemos expressar a solução C_1 por

$$C_1 = \mathcal{R}[N(z)e^{i(kx-\sigma t)}] + \mathcal{R}[N(z)e^{i(kx-\sigma t)}], \quad (3.55)$$

onde

$$\frac{d^2 N}{dz^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dN}{dz} + i \frac{\sigma}{E} N = \frac{\tilde{u}_w F}{E} \text{ em } -h < z < \infty, \quad (3.56)$$

$$\frac{dN}{dz} + \frac{1}{\alpha} N = 0 \text{ em } z = -h, \quad (3.57)$$

$$N = 0 \text{ quando } z \rightarrow \infty \quad (3.58)$$

e

$$\frac{d^2 M}{dz^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dM}{dz} + i \frac{\sigma}{E} M = \frac{\tilde{v}_w F'}{E} \text{ em } -h < z < \infty, \quad (3.59)$$

$$\frac{dM}{dz} + \frac{1}{\alpha}N = 0 \text{ em } z = -h, \quad (3.60)$$

$$M = 0 \text{ quando } z \rightarrow \infty. \quad (3.61)$$

Escrevendo $N(z)$ e $M(z)$ como

$$N(z) = \sigma^{-1}\tilde{U}_I(A_1e^{-\beta z/\alpha} - ie^{-z/\alpha} + A_2e^{-(A_0+1)z/\alpha}) \quad (3.62)$$

e

$$M(z) = k\sigma^{-1}\tilde{U}_I[A_3e^{-\beta z/\alpha} + A_4e^{-z/\alpha} + A_5e^{-(A_0+1)z/\alpha} + (z/\alpha)e^{-z/\alpha}] \quad (3.63)$$

obtemos que as constantes são dadas por

$$A_0 = \alpha\lambda_w = (1 - i)/\text{Pe}, \quad (3.64)$$

$$A_1 = A_0A_2/(1 - \beta), \quad (3.65)$$

$$A_2 = D/[(1 - i)\text{Pe}(2\text{Sc})^{-1}(A_0 + 1) + i], \quad (3.66)$$

$$A_3 = (A_0A_5 - 1)/(1 - \beta), \quad (3.67)$$

$$A_4 = B/A_0 - i\text{Pe}^2/(2\text{Sc}), \quad (3.68)$$

$$A_5 = -iA_2/A_0 \quad (3.69)$$

e

$$\beta = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{8\text{Sc}}{\text{Pe}^2} \right)^2} \right)} - i \sqrt{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{8\text{Sc}}{\text{Pe}^2} \right)^2} \right)} \right]. \quad (3.70)$$

Em $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, a equação do transporte (3.38) e as condições de fronteira são dadas por

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_0}{\partial T} + \frac{\partial C_2}{\partial t} + \frac{\partial u_{w_2} C_0}{\partial x} + \frac{\partial u_{w_1} C_1}{\partial x} + \frac{\partial v_{w_1} C_1}{\partial z} \\ & + \frac{\partial v_{w_2} C_0}{\partial z} - v_f \frac{\partial C_2}{\partial z} = E \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} + E \frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2}, \text{ em } -h < z < \infty, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$v_f C_2 + E \frac{\partial C_2}{\partial z} + \xi \left(v_f \frac{\partial C_1}{\partial z} + E \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} \right), \text{ em } z = -h, \quad (3.72)$$

$$C_2 = 0 \text{ quando } z \rightarrow \infty. \quad (3.73)$$

Tomando a média no tempo sobre o período de onda, as equações (3.71), (3.72) e (3.73) se tornam

$$\frac{\partial C_0}{\partial T} + \frac{\partial \bar{u}_{w_2} C_0}{\partial x} + \frac{\overline{\partial u_{w_1} C_1}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial v_{w_1} C_1}}{\partial z} - v_f \frac{\partial \bar{C}_2}{\partial z} = E \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} + E \frac{\partial \bar{C}_2}{\partial z^2} \text{ em } -h < z < \infty, \quad (3.74)$$

$$v_f \bar{C}_2 + E \frac{\partial \bar{C}_2}{\partial z} + v_f \xi \frac{\overline{\partial C_1}}{\partial z} + E \xi \frac{\overline{\partial^2 C_1}}{\partial z^2} = 0 \text{ em } z = -h, \quad (3.75)$$

$$\bar{C}_2 = 0 \text{ quando } z \rightarrow \infty. \quad (3.76)$$

pois, supondo que C_2 é periódica no tempo, temos que

$$\frac{\partial \bar{C}_2}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial C_2}{\partial t} dt = 0, \quad (3.77)$$

e

$$\frac{\overline{\partial v_{w_2} C_0}}{\partial z} = 0 \quad (3.78)$$

já que C_0 não depende de t e v_{w_2} também não, pois estamos supondo que só há convecção e dispersão na direção horizontal.

Integrando com respeito à profundidade da camada limite e usando a condição de fronteira (3.76), temos

$$\langle F \rangle \frac{\partial C_b}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x} (\langle u_{w_2} F \rangle C_b) + \frac{\partial}{\partial x} \langle \overline{u_{w_1} C_1} \rangle - \overline{v_{w_1} C_1} \Big|_{z=-h} - v_f \bar{C}_2 = E \langle F \rangle \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} + E \frac{\partial \bar{C}_2}{\partial z}. \quad (3.79)$$

Pela condição de fronteira (3.75), a equação acima pode ser escrita como

$$\langle F \rangle \frac{\partial C_b}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x} (\langle u_{w_2} F \rangle C_b) + \frac{\partial}{\partial x} \langle \overline{u_{w_1} C_1} \rangle - \overline{v_{w_1} C_1} \Big|_{z=-h} - v_f \xi \frac{\overline{\partial C_1}}{\partial z} \Big|_{z=-h} - E \xi \frac{\overline{\partial^2 C_1}}{\partial z^2} \Big|_{z=-h} = E \langle F \rangle \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \quad (3.80)$$

onde $\langle f \rangle$ denota a integração com respeito a z de 0 a ∞ .

A partir dos cálculos que estão descritos no apêndice B, obtemos que a equação do transporte para a concentração de partículas no fundo é dada por

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + U \frac{\partial C_b}{\partial x} = [E - D_T] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \quad (3.81)$$

onde

$$U = \frac{\langle \tilde{u}_{w_2} F \rangle}{\langle F \rangle} + \frac{\text{Re}[\langle \tilde{u}_w^* M \rangle - b \tilde{u}_w^*|_{z=-h}]}{2\langle F \rangle} \quad (3.82)$$

e

$$D_T = \frac{\text{Re}\langle \tilde{u}_w^* N \rangle}{2\langle F \rangle}. \quad (3.83)$$

3.2.1 Parâmetros adimensionais

Para analisar os coeficientes de dispersão e convecção [Ng and Wu, 2008] calculou os coeficientes U e D_T adimensionais, isto é,

$$\begin{aligned} \hat{U} &= U/(k\sigma^{-1}|\tilde{U}_I|^2) = \frac{1}{2}\text{Re}[D(2 - iB^*)/(A_0 + 1) + DA_0/(A_0 + 1)^2 - 4D + A_3/\beta + A_4 \\ &+ A_5/(A_0 + 1) + A_3D^*/(A_0^* + \beta) + A_4D^*/(A_0^* + 1) + A_5D^*/(2\text{Pe}^{-1} + 1) \\ &+ D^*/(A_0^* + 1)^2 - (B - D)(1 + D^*)/A_0] + \frac{1}{4}|D|^2/(2\text{Pe}^{-1} + 1) - \frac{3}{4}|D|^2 \end{aligned} \quad (3.84)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{D}_t &= D_t/(\sigma^{-1}|\tilde{U}_I|^2) = -\frac{1}{2}\text{Re}[A_1/\beta + A_2/(A_0 + 1) + A_1D/(A_0^* + \beta) - iD^*/(A_0^* + 1) \\ &+ A_2D^*/(2\text{Pe}^{-1} + 1)]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Ainda, a seguinte normalização foi definida

$$(\hat{z}, \hat{d}, \hat{\delta}_m) = (z, d, \delta_m)/\delta_w, \quad (\hat{\lambda}_m, \hat{\lambda}_v, \hat{\lambda}_e) = \delta_w(\lambda_m, \lambda_v, \lambda_e). \quad (3.86)$$

A partir dessa normalização, podemos expressar na forma adimensional

$$\hat{\lambda}_m = (\hat{\lambda}_v^{-2} - \hat{\lambda}_e^{-2})^{-1/2}, \quad (3.87)$$

onde

$$\hat{\lambda}_v = (1 - i)/\hat{\delta}_m \quad \text{e} \quad \hat{\lambda}_e = \delta_w(\rho_m\sigma^2/G_m)^{1/2} = (2\rho_m\nu_m\sigma/G_m)^{1/2}, \quad (3.88)$$

e

$$\zeta = (1 - i)/\hat{\lambda}_m. \quad (3.89)$$

Dessa forma, as constantes B , D e H podem ser expressas como

$$B = \zeta[\gamma(\hat{\lambda}_m \hat{d} - \sinh(\hat{\lambda}_m \hat{d})) + H(\cosh(\hat{\lambda}_m \hat{d}) - 1)] + D., \quad (3.90)$$

$$D = \frac{-\gamma\zeta - (1 - \gamma)\zeta \cosh(\hat{\lambda}_m \hat{d})}{\zeta \cosh(\hat{\lambda}_m \hat{d}) + \gamma \sinh(\hat{\lambda}_m \hat{d})} \quad (3.91)$$

e

$$H = \frac{\gamma(1 - \gamma) + \gamma^2 \cosh(\hat{\lambda}_m \hat{d}) + \gamma\zeta \sinh(\hat{\lambda}_m \hat{d})}{\zeta \cosh(\hat{\lambda}_m \hat{d}) + \gamma \sinh(\hat{\lambda}_m \hat{d})} \quad (3.92)$$

3.2.2 Resultados numéricos

Para obtermos os gráficos dos coeficientes (3.84) e (3.85) em função da espessura da camada de lama fluida normalizada \hat{d} , seis parâmetros foram especificados:

- i) $\gamma = 0.8$, correspondente à razão de $\rho_m/\rho_w = 1.25$;
- ii) $\hat{\delta}_m = 5$ e 8 , correspondentes a $\nu_m = \mathcal{O}(10)$ Pa, se a viscosidade associada a vórtices da água é $\nu_w = \mathcal{O}(1)$ cm²s⁻¹;
- iii) $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15$ e 0.1 , correspondentes a $G_m \simeq \mathcal{O}(10)$ Pa.

Segue que

$$\text{iv) } \hat{\lambda}_m = \mathcal{O}(0.1).$$

Lembrando que $\lambda_m = (-i\sigma/\nu_m^+)^{1/2}$, temos que $\lambda_m^{-1} \simeq \delta_m \simeq d$. Portanto, definimos o quinto parâmetro:

- v) $\hat{d} = \mathcal{O}(10)$, correspondente a uma camada de lama fluida de profundidade $d = \mathcal{O}(10)$ cm.

Ainda, consideramos que

vi) $Pe=Sc=1$.

Reproduzimos aqui os resultados obtidos em [Ng and Wu, 2008]. As linhas vermelha, verde e azul correspondem a $\hat{\lambda}_m = 0.1$, $\hat{\lambda}_m = 0.15$ e $\hat{\lambda}_m = 0.3$, respectivamente.

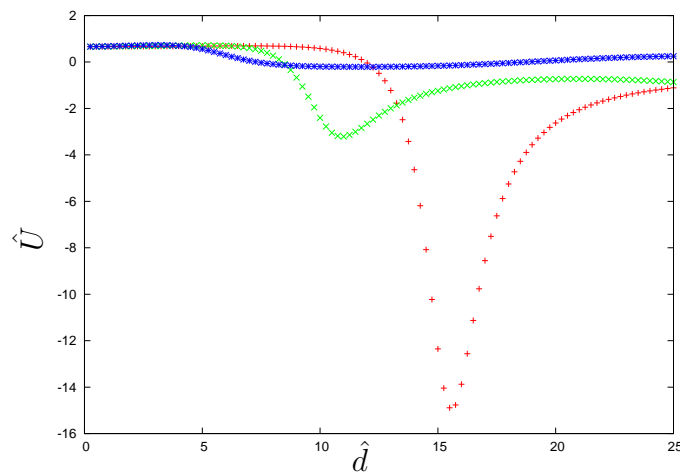


Figura 3.2: \hat{U}_t como função de \hat{d} para $\hat{\delta}_m = 5$ e $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15, 0.1$

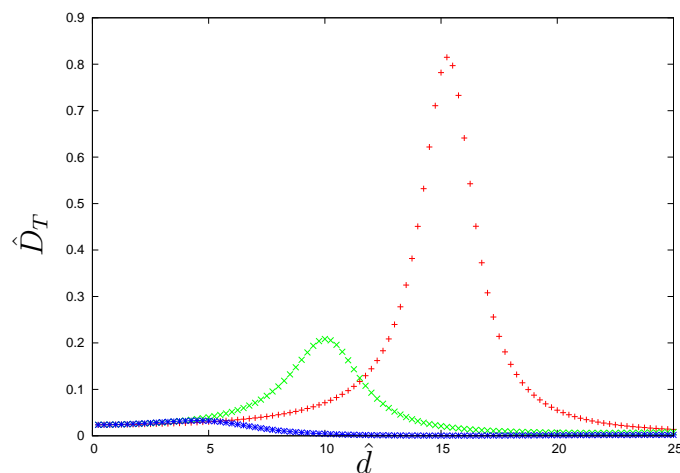


Figura 3.3: \hat{D}_t como função de \hat{d} para $\hat{\delta}_m = 5$ e $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15, 0.1$.

Observamos que para $\hat{\lambda}_e = 0, 1$ e $\hat{\lambda}_e = 0, 15$, que representam casos de forte elasticidade, há um aumento da altura dos picos nas figuras (3.2),(3.3), (3.4) e

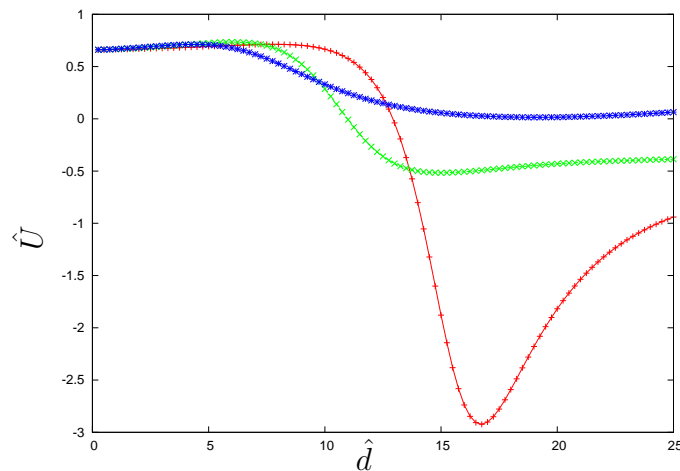


Figura 3.4: \hat{U}_t como função de \hat{d} para $\hat{\delta}_m = 8$ e $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15, 0.1$

(3.5). Sendo assim, ambos coeficientes possuem pontos de máximo ou mínimo locais. Podemos observar que esses pontos ocorrem próximos de $\hat{d}_R = \pi/2\lambda_e$.

Finalmente, observamos que em [Ng and Wu, 2008] a solução da equação (3.81) não foi procurada. Na próxima seção, apresentaremos alguns resultados numéricos da equação (3.80).

3.3 Solução da equação do transporte

Para encontrarmos a solução usamos a rotina desenvolvida em *Fenics project* [Schläger and Fenics Team, 2013]. Na próxima subseção, a fim de explicarmos como funciona dessa rotina, usaremos a equação de Poisson.

3.3.1 Formulação variacional

Consideremos o seguinte problema:

$$[E - D_T] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} = f(x, T), \quad x \in \Omega, \quad (3.93)$$

$$C_b(x, T) = C_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.94)$$

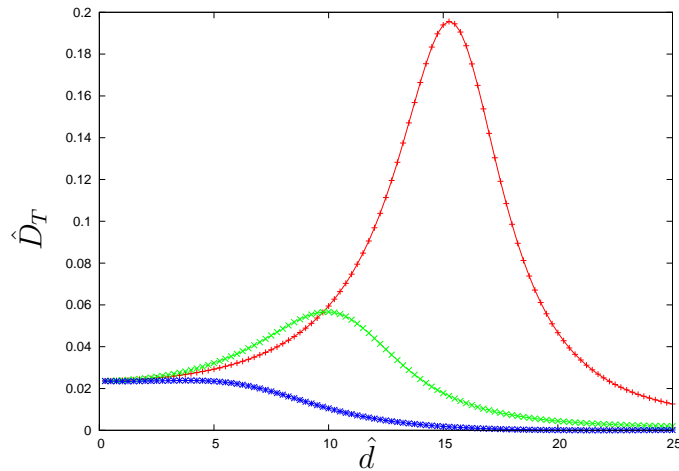


Figura 3.5: \hat{D}_t como função de \hat{d} para $\hat{\delta}_m = 8$ e $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15, 0.1$.

onde

$$f(x, T) = \frac{\partial C_b}{\partial T} + U \frac{\partial C_b}{\partial x}. \quad (3.95)$$

Aqui $C_b(x, T)$ é uma função desconhecida, $f(x, T)$ é uma função dada, Ω é um domínio espacial unidimensional e $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω . Usaremos o método de Galerkin adotando o programa que está disponível em [Schläger and Fenics Team, 2013]. A idéia é transformar essa equação diferencial parcial em um problema variacional. Para isso, multiplicamos primeiramente a EDP por uma função teste v e integramos a equação obtida em Ω , obtendo

$$\int_{\Omega} \left([E - D_T] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} \right) v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (3.96)$$

Usando integração por partes a integral do lado esquerdo pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} [E - D_T] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} v dx = [E - D_T] \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial C_b}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial C_b}{\partial n} v ds \right\}, \quad (3.97)$$

onde $\frac{\partial C_b}{\partial n}$ é a derivada de C_b na direção normal à fronteira.

A função teste v é escolhida de modo a ser nula nos pontos onde a função C_b é conhecida. O que significa que $v = 0$ para $x \in \partial\Omega$. Segue que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} v dx = \int_{\Omega} \frac{\partial C_b}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx. \quad (3.98)$$

Essa equação deve ser válida para toda função v pertencente a algum espaço \hat{V} . Dizemos que a equação (3.98) é a forma fraca do problema (3.93-3.94). Dessa forma, o problema variacional é dado por: encontrar $C_b \in V$, onde V é um espaço que pode ser diferente de \hat{V} , tal que a função teste v é escolhida de modo a ser nula nos pontos onde a função C_b é conhecida. Logo,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C_b}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in \hat{V}. \quad (3.99)$$

Em [Schläger and Fenics Team, 2013], os espaços V e \hat{V} são definidos como

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = u_0 \in \partial\Omega\} \quad (3.100)$$

e

$$\hat{V} = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \in \partial\Omega\}, \quad (3.101)$$

onde $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev contendo as funções v tal que v^2 e $\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|^2$ possuem integral finita sobre o espaço Ω .

Para resolvermos esse problema numericamente precisamos transformar o problema variacional contínuo em um problema variacional discreto. Para tal, tomamos espaços $V_h \sqsubset V$ e $\hat{V}_h \sqsubset \hat{V}$. Desse modo, o problema variacional discreto se torna: encontrar $C_{b,h} \in V_h \sqsubset V$ que satisfaz

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C_{b,h}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_h}{\partial x} dx = \int_{\Omega} f v_h dx. \quad \forall v_h \in \hat{V}_h \sqsubset \hat{V}. \quad (3.102)$$

A escolha de V_h e \hat{V}_h segue da escolha de elementos finitos que queremos aplicar no nosso problema.

3.3.2 Resultados Numéricos- Equação do transporte

Observe que a velocidade horizontal da onda é representada pela figura (3.6). Podemos ver que a onda está se deslocando para a frente.

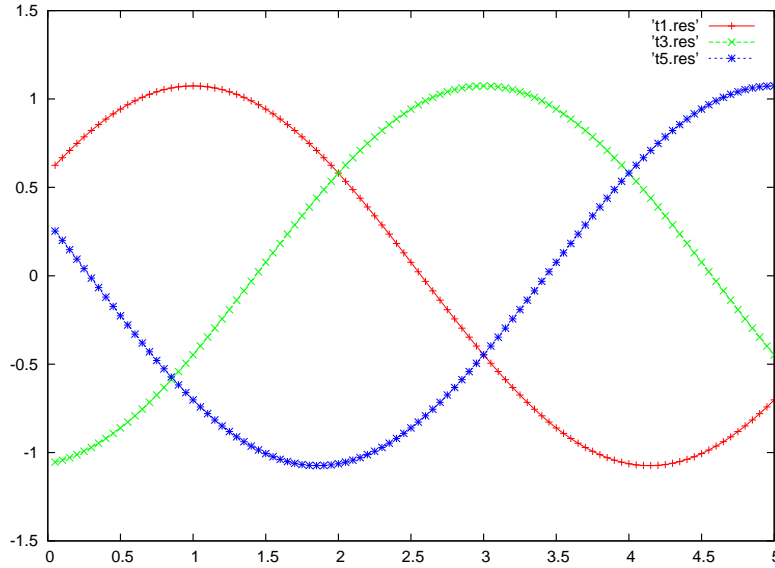


Figura 3.6: velocidade da onda na água para $T = 1, 3$ e 5 .

Por isso, podemos esperar que a solução C' se comporte da mesma maneira com o passar do tempo. Ao analisarmos os gráficos (3.7) e (3.8) podemos ver que obtivemos o que era esperado. Na figura (3.7) consideramos uma concentração inicial $C'(x', 0) = 100$ e na figura (3.8) $C'(x', 0) = 1000$.

A seguir consideramos que há erosão em uma faixa para $x'/2\pi \in [0, 1]$ como em [Mei et al., 1997]. Usando a mesma normalização, a equação que formula o problema será dada por

$$\frac{\partial C'}{\partial T'} + \hat{U} \frac{\partial C'}{\partial x'} = [\hat{E} - \hat{D}_T] \frac{\partial^2 C'}{\partial x'^2} + \mathcal{E}_{\mathcal{R}}'(x'), \quad (3.103)$$

onde \hat{U} e \hat{D}_T são definidos em (3.84) e (3.85) e

$$\mathcal{E}'(x') = \begin{cases} 1, & 0 < x' < L' = kL \\ 0, & x' < 0, x' > L. \end{cases} \quad (3.104)$$

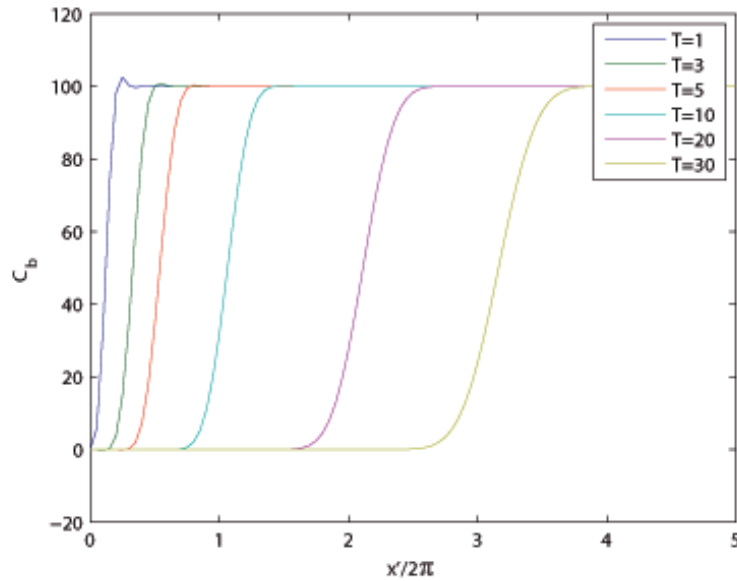


Figura 3.7: C_b como função de $x/2\pi$ para $C_b(x, 0) = 100$ e $T = 1, 3, 5, 10, 20,$ e 30 .

Consideramos a concentração inicial nula. Adotamos a mesma normalização usada em [Ng and Wu, 2008] e em [Mei et al., 1997].

A solução da equação do transporte uni-dimensional em um sistema sem a camada de lama fluida e com erosão foi encontrada analiticamente em [Mei et al., 1997]. Comparamos a solução numérica obtida por nós e a solução analítica obtida por Mei e vimos que o erro é muito pequeno. A seguir resolvemos a equação para $\hat{d} = \{0.25, 0.5, 1.0\}$ com $T = 5$. O gráfico está na figura (3.9). Observemos que não houve mudança para \hat{d} pequeno, já que as curvas estão sobrepostas.

O resultado para $\delta = 5$, $\lambda = 0.1$ e $\hat{d} = 7, 8, 9, 10, 11$ e 12 são dados na figura (3.10). Observamos que os picos não sofrem alterações consideráveis ao variar a espessura na camada de lama fluida. Porém, conforme essa camada aumenta, o pico da concentração ocorre para x' menor.

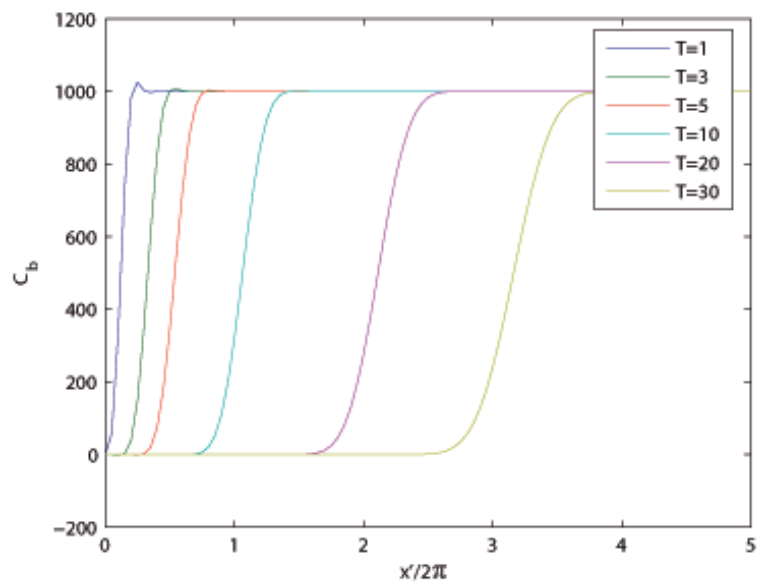


Figura 3.8: C_b como função de $x/2\pi$ para $C_b(x, 0) = 1000$ e $T = 1, 3, 5, 10, 20$, e 30

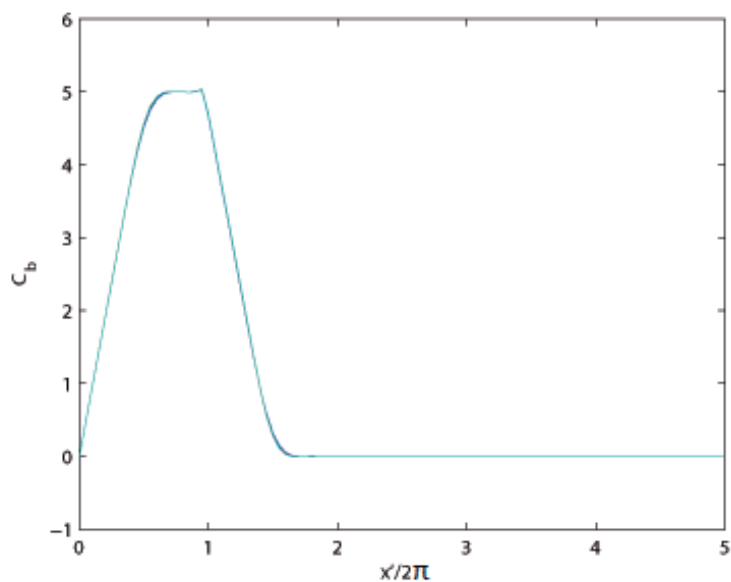


Figura 3.9: C_b como função de $x/2\pi$ para $\hat{\delta}_m = 5$, $\hat{\lambda}_m = 0.1$ e $d = 0.0, 0.25, 0.5$ e 1.0

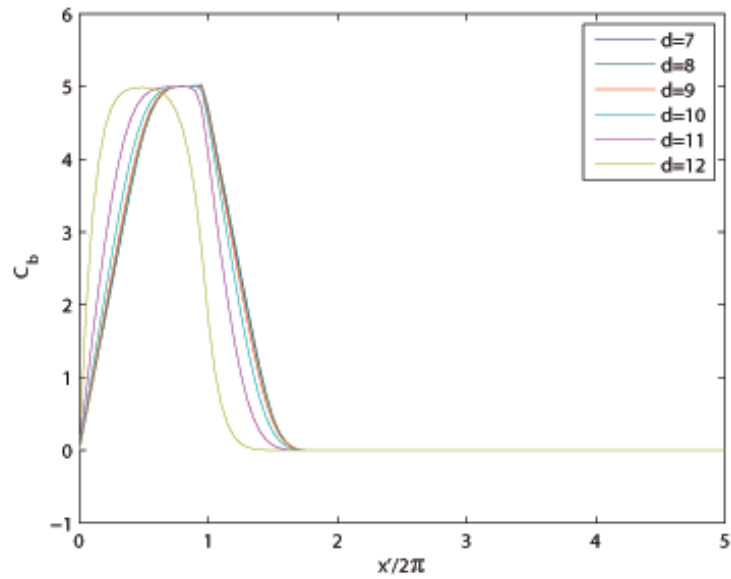


Figura 3.10: C_b como função de $x/2\pi$ para $\hat{\delta}_m = 5$, $\hat{\lambda}_m = 0.1$ e $d = 7, 8, 9, 10, 11$ e 12 e $T = 5$.

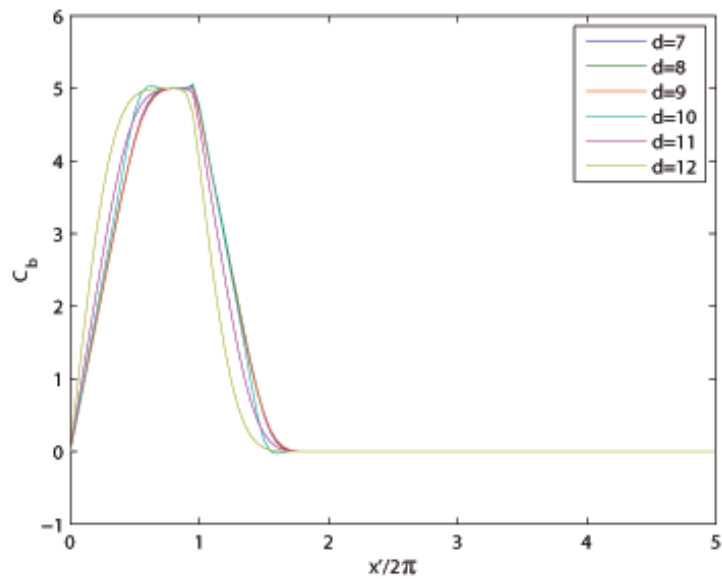


Figura 3.11: C_b como função de $x/2\pi$ para $\hat{\delta}_m = 8$, $\hat{\lambda}_m = 0.1$ e $d = 7, 8, 9, 10, 11$ e 12 e $T = 5$.

4 DISPERSÃO DE PARTÍCULAS DE SEDIMENTOS NA CAMADA LIMITE DE UM LEITO VISCOELÁSTICO- MODELO GENERALIZADO

O objetivo desse capítulo é apresentar o modelo viscoelástico generalizado definido por [Mei et al., 2010] e deduzir uma nova equação do transporte de partículas no fundo como em (3.81) usando esse novo modelo.

Consideramos um sistema de duas camadas, sendo a camada superior formada de água não viscosa e a inferior consistindo de lama fluida, modelada como um material viscoelástico. Além disso, supomos que a água é invíscida e que tanto a amplitude da onda a_0 quanto o deslocamento vertical da interface ar-água η são pequenos comparados com a profundidade da água h e com o comprimento de onda $\lambda = 2\pi/K$, onde k é o número de onda. Ou seja,

$$\eta = \mathcal{O}(a_0), \quad k\eta = \mathcal{O}(ka_0) = \mathcal{O}(\epsilon) \ll 1. \quad (4.1)$$

Consideramos ainda a profundidade da camada inferior pequena quando comparada com o comprimento de onda. Isto é, supomos que a profundidade da água h é constante e comparável ao comprimento de onda de modo que $kh = \mathcal{O}(1)$.

Como no capítulo anterior, assumimos que

$$\frac{d}{h} = \mathcal{O}(\epsilon) \ll 1. \quad (4.2)$$

No trabalho de [Liu and Mei, 1989] foi mostrado que o deslocamento vertical da interface água-lama ξ é muito menor que o da superfície livre. Portanto,

$$\xi = \mathcal{O}(\epsilon\eta). \quad (4.3)$$

Isso nos permite usarmos novamente a análise perturbativa de múltiplas escalas que explicaremos a seguir.

4.1 Formulação

Consideramos que cristas longas de ondas de superfície se propagam na direção positiva x' . Sejam x' , z' coordenadas retangulares que descrevem um plano vertical com origem sobre a superfície do mar, sendo z' negativo para baixo.

Seja Φ' o potencial de velocidade na camada de água invíscida e η' o deslocamento da superfície livre. Na camada de lama fluida, u' e v' denotam as componentes da velocidade e ξ' o deslocamento da interface.

As pressões estática e total são denotadas por p'_s e P' , respectivamente, com $P' = p'_s + p'$.

Sejam σ e a_0 a frequência e a amplitude da onda de superfície, respectivamente. Para a camada de água, usamos a seguinte normalização

$$(x', z', h) = \frac{g}{\sigma^2}(x, z, H), \quad t' = \sigma^{-1}t, \quad k' = \frac{\omega^2}{g}k, \quad (4.4)$$

$$\Phi' = \frac{a_0 g}{\sigma} \Phi, \quad \eta' = a_0 \eta, \quad (P'^{(w)}, p'^{(w)}) = \rho^{(w)} g a_0 (P^{(w)}, p^{(w)}), \quad (4.5)$$

onde g é a gravidade, $\rho^{(w)}$ é a densidade da água, σ é a frequência e t é o tempo.

Para a camada de lama fluida, definimos uma nova coordenada vertical medida a partir do fundo dessa camada

$$Z' = z' + h + d \quad (4.6)$$

e usamos a seguinte normalização

$$x' = \frac{g}{\sigma^2}x, \quad Z' = dZ, \quad t' = \sigma^{-1}t, \quad \xi' = \epsilon a_0 \xi, \quad (4.7)$$

$$u' = a_0 \sigma u, \quad v' = \left(\epsilon a_0 \sigma \frac{d}{a_0} \right) v, \quad (p', P) = (\gamma \rho^{(m)} g a_0) (p^{(m)}, P^{(m)}). \quad (4.8)$$

Após definirmos a nova coordenada vertical e a normalização, o problema pode ser representado pela figura (4.1).

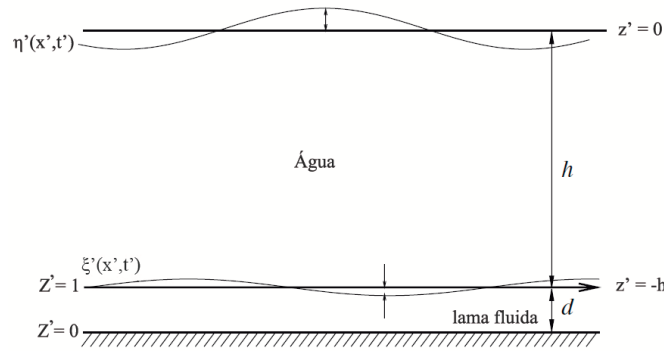


Figura 4.1: Desenho esquemático do problema com os dois sistemas de coordenadas.

4.2 Equações governantes e condições de contorno

4.2.1 Equações governantes na água

Para um fluido invíscido irrotacional, nas variáveis adimensionais, o potencial de velocidade é governado pela equação de Laplace, ou seja,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.9)$$

Definimos um parâmetro pequeno ϵ por

$$\epsilon = \frac{\sigma^2 a_0}{g} \ll 1, \quad (4.10)$$

que caracteriza a inclinação da onda.

Na forma adimensional, a pressão total na água $P^{(w)}$ é relacionada com o potencial Φ pela equação de Bernoulli,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gz = -\frac{P^{(w)}}{\rho}, \quad (4.11)$$

ou seja,

$$-P^{(w)} = -p_s^{(w)} - p^{(w)} = \frac{z}{\epsilon} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\epsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (4.12)$$

onde $p_s^{(w)} = z/\epsilon$ e $p^{(w)}$ são a pressão estática e a pressão dinâmica, respectivamente.

4.2.2 Equações governantes na camada de lama fluida

4.2.2.1 Dinâmica reológica da lama fluida

Como mencionamos anteriormente, a melhor maneira de modelar a lama fluida é como um material viscoelástico, que combina ao mesmo tempo as propriedades do fluido e do sólido.

De acordo com [Krotov, 2008], experimentos sugerem que os coeficientes \bar{G} e $\bar{\nu}$ dependem fortemente da frequência. Por isso, ele propôs um modelo viscoelástico generalizado. Esse modelo relaciona as componentes de tensão (τ'_{ij}) e deformação (γ'_{ij}) pela equação diferencial

$$\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n (\partial_{t'})^n\right) \tau'_{ij} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} b_n (\partial_{t'})^n\right) \gamma'_{ij} \quad (4.13)$$

com o símbolo $(\partial_{t'})$ denotando a derivada parcial em relação ao tempo t' e com os coeficientes a_n e b_n dependendo da frequência. Logo,

$$\tau'_{ij} = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} b_n (\partial_{t'})^n\right) \gamma'_{ij}}{\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n (\partial_{t'})^n\right)}. \quad (4.14)$$

Nessa expressão, a_0 foi tomado como 1. Podemos definir desse modo pois, caso a_0 fosse diferente de um e de zero, bastaria dividirmos a equação por a_0 . Observemos ainda que o maior índice no numerador é $N - 1$ enquanto no denominador é N . Isso foi feito de modo que houvesse o mesmo número de incógnitas (N) no numerador e no denominador.

Para o caso especial onde o movimento é puramente senoidal no tempo,

$$\tau' = \tilde{\tau}' e^{-i\sigma t'}, \quad \dot{\gamma}' = \tilde{\dot{\gamma}}' e^{-i\sigma t'}, \quad (4.15)$$

temos por (4.13) que

$$\tilde{\tau}' = \nu \tilde{\dot{\gamma}}', \quad (4.16)$$

onde ν é complexo e

$$\nu = |\nu|e^{i\theta} = \frac{i}{\sigma} \frac{b_0 + \sum_{n=0}^{N-1} b_n(-i\sigma)^n}{1 + \sum_{n=1}^N a_n(-i\sigma)^n}. \quad (4.17)$$

Para encontrar os coeficientes a_n e b_{n-1} , $n = 1, 2, 3, \dots, N$ da expressão (4.17), [Krotov, 2008] utilizou valores experimentais obtidos em [Huhe and Huang, 1994] e de [Jiang and Mehta, 1995] da viscosidade complexa ν_d em termos das frequências $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$, obtendo assim um sistema linear algébrico real de $2N$ equações e $2N$ incógnitas.

4.2.2.2 Equação do movimento adimensional na camada de lama fluida

As equações governantes para a camada de lama fluida são as equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível. Ou seja, as componentes da velocidade u e v horizontal e vertical, respectivamente, satisfazem a equação de conservação de massa,

$$u_x + v_Z = 0, \quad (4.18)$$

a equação de conservação do momento- x ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Z} \right) = -\gamma \frac{\partial p^{(m)}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{a_0}{d} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial Z} + \epsilon \frac{d}{a_0} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \quad (4.19)$$

e a equação de conservação do momento- Z

$$\left(\epsilon \frac{d}{a} \right)^2 [v_t + \epsilon(uv_x + vv_Z)] = -\gamma p_Z^{(m)} + \frac{\epsilon}{Re} \left(\tau_Z^z + \epsilon \frac{d}{a} \tau_x^{xz} \right). \quad (4.20)$$

4.3 Condições de contorno

4.3.1 Interface entre água e lama fluida

A condição de fronteira cinemática na interface em termos das variáveis na água é

$$\Phi_z = \epsilon \xi_t + \epsilon^2 \xi_x \Phi_x, \quad z = -H + \epsilon^2 \xi, \quad (4.21)$$

e em termos das variáveis na lama fluida é

$$\xi_t = v - \epsilon \xi_x u, \quad Z = 1 + \epsilon \frac{d}{a} \xi. \quad (4.22)$$

A condição de contorno dinâmica na interface necessita da continuidade da tensão através da interface

$$\Lambda \cdot \vec{n} = -(p_s^{(w)} + p^{(w)}) \vec{n}, \quad (4.23)$$

com $\vec{n} = (n^{(x)}, n^{(z)})$ sendo o vetor unitário normal em direção à interface e apontando para dentro da camada de água. Em componentes, temos que

$$\begin{cases} \Lambda^{xx} n^{(x)} + \Lambda^{xz} n^{(z)} = -(p_s^{(w)} + p^{(w)}) n^{(x)} \\ \Lambda^{zx} n^{(x)} + \Lambda^{zz} n^{(z)} = -(p_s^{(w)} + p^{(w)}) n^{(z)} \end{cases} \quad (4.24)$$

em $z = -H + \epsilon^2 \xi$ ($Z = 1 + \epsilon \frac{d}{a} \xi$), onde

$$\Lambda_{ij} = -(p_s^{(m)} + p^{(m)}) \delta_{ij} + \frac{\epsilon}{\gamma Re} \tau_{ij} \quad (4.25)$$

com

$$p_s^{(m)} = \frac{H}{\epsilon} + \gamma(1 - Z), \quad (4.26)$$

por [Mei et al., 2010].

4.3.2 Velocidade horizontal no fundo

A condição de contorno não deslizando no fundo da camada da lama fluida é

$$u = 0, \quad \text{em } Z = 0 \quad (4.27)$$

$$v = 0, \text{ em } Z = 0 \quad (4.28)$$

e, em termos do deslocamento,

$$\mathcal{X} = 0, \text{ em } Z = 0 \quad (4.29)$$

$$\mathcal{Z} = 0, \text{ em } Z = 0. \quad (4.30)$$

4.3.3 Condições de contorno na água

Na superfície livre S_F da água, impomos a condição cinemática,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad z = \epsilon \eta, \quad (4.31)$$

ou seja, estamos supondo que o fluido é tangencial em S_F .

Consideramos que a pressão é atmosférica. Assim, a condição de fronteira dinâmica é dada por

$$-\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\epsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad z = \epsilon \eta. \quad (4.32)$$

Combinando as duas condições acima temos que

$$\Gamma \Phi - \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \quad z = \epsilon \eta. \quad (4.33)$$

onde

$$\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}$$

4.4 Aplicação do método de múltiplas escalas

Estamos supondo que a camada de lama fluida é fina comparada ao comprimento de onda e que a profundidade adimensional $d\sigma^2/g = \mathcal{O}(\epsilon)$. Assim, é esperado que as equações de ordem zero não se alterem com a presença da camada de lama

fluida. Essa camada vai influenciar os termos de $\mathcal{O}(\epsilon)$. Logo é natural introduzirmos novas variáveis no espaço e no tempo como, respectivamente,

$$x, x_1 = \epsilon x \quad \text{e} \quad t = \epsilon t_1. \quad (4.34)$$

Desse modo, devemos substituir as derivadas com respeito a x e t pelas derivadas com respeito às variáveis na escala lenta x_1 e t_1 dadas por [Mei, 1989]

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon \partial_{t_1}, \quad (4.35)$$

$$\partial_x \rightarrow \partial_x + \epsilon \partial_{x_1}, \quad (4.36)$$

$$\partial_{tt} \rightarrow \partial_{xx} + 2\epsilon \partial_{tt_1} + \epsilon^2 \partial_{t_1 t_1} \quad (4.37)$$

e

$$\partial_{xx} \rightarrow \partial_{xx} + 2\epsilon \partial_{xx_1} + \epsilon^2 \partial_{x_1 x_1}. \quad (4.38)$$

Para fazermos a análise de múltipla escala, cada incógnita \mathcal{F} , que representa $\xi, \eta, \Phi, u, v, \tau$, e p , será expandida em uma série de potências em termos de ϵ , ou seja,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \epsilon \mathcal{F}_1 + \epsilon^2 \mathcal{F}_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (4.39)$$

onde (η_n, ξ_n) dependem de $(x, x_1; t, t_1)$, $\Phi_n = \Phi_n(x, x_1; z; t, t_1)$ na água e (u_n, v_n) de $(x, x_1; Z; t, t_1)$ na lama fluida.

Cada série perturbada será substituída nas equações e nas condições de contorno, e assim obteremos equações perturbadas em cada ordem.

4.4.1 Ondas senoidais

Assumimos que as ondas sobre a superfície livre são portadoras. Ou seja, consideramos que as ondas de superfície são quase simplesmente harmônicas com amplitude variando lentamente. Um exemplo de uma onda portadora está representado na figura (4.2).

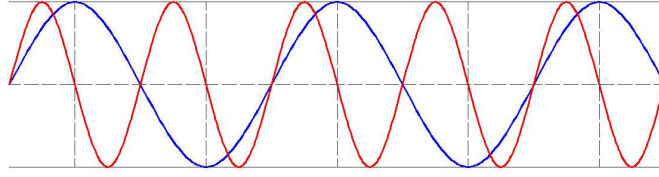


Figura 4.2: Desenho esquemático de ondas portadoras.

$$\eta = \eta_o + \mathcal{O}(\epsilon) = \frac{1}{2}A(x_1, t_1)e^{i\psi} + \text{c.c.} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (4.40)$$

onde $A(x_1, t_1)$ é a amplitude que varia lentamente, *c.c.* representa o complexo conjugado e

$$\psi = k_0x - t$$

é a fase das ondas portadoras.

Essa hipótese feita por [Mei et al., 2010] se diferencia do trabalho de [Kranenburg, 2008] onde foram consideradas apenas ondas harmônicas no tempo e no espaço nas escalas rápidas.

Assim, teremos que

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{00} + (\mathcal{F}_{01}e^{i\psi} + \text{c.c.}), \quad (4.41)$$

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_{10} + (\mathcal{F}_{11}e^{i\psi} + \text{c.c.}) + (\mathcal{F}_{21}e^{2i\psi} + \text{c.c.}), \quad (4.42)$$

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{20} + (\mathcal{F}_{21}e^{i\psi} + \text{c.c.}) + (\mathcal{F}_{22}e^{2i\psi} + \text{c.c.}) + (\mathcal{F}_{32}e^{3i\psi} + \text{c.c.}) \quad (4.43)$$

e assim sucessivamente, onde $\mathcal{F}_{nm} = \mathcal{F}_{nm}(z, x_1, t_1) \forall n, m \in \mathbb{N}$. Observemos que assim temos que $\mathcal{F}_{nm,x}(z, x_1, t_1) = \mathcal{F}_{nm,t}(z, x_1, t_1) = 0 \forall n, m \in \mathbb{N}$. Usaremos essa observação por diversas vezes nesse trabalho.

Supomos também que o deslocamento do meio dentro da camada de lama fluida é de $\mathcal{O}(\epsilon)$. Portanto, $\mathcal{X}_{00} = \mathcal{Z}_{00} = 0$.

4.4.2 Expansão das condições de contorno

Em [Krotov, 2008], as ordens de magnitude das componentes do vetor $\vec{n} = (n^{(x)}, n^{(z)})$ foram estimadas. Em termos das variáveis dimensionais, são dadas por

$$n^{(x)} = \frac{d\zeta'}{\sqrt{(dx')^2 + (d\zeta')^2}} = \frac{\frac{d\zeta'}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta'}{dx}\right)^2}} \quad (4.44)$$

e

$$n^{(z)} = \frac{dx'}{\sqrt{(dx')^2 + (d\zeta')^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta'}{dx'}\right)^2}}. \quad (4.45)$$

Assim, as componentes do vetor normal são dadas por

$$n^{(x)} = \frac{\epsilon^2 \frac{d}{a} \frac{d\zeta}{dx}}{\sqrt{1 + \epsilon^4 \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2}} = \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4.46)$$

e

$$n^{(z)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^4 \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2}} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (4.47)$$

Então, por (4.24), as componentes adimensionais da tensão tangencial são

$$(\Lambda \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}^{(x)} = \Lambda^{xx} n^{(x)} + \Lambda^{xz} n^{(z)} = -(p_s^{(w)} + p^{(w)}) \frac{\epsilon^2 \frac{d}{a} \frac{d\zeta}{dx}}{\sqrt{1 + \epsilon^4 \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2}} + \frac{\epsilon}{\gamma Re} \tau^{zx} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (4.48)$$

pois $\tau^{xx} = \tau_0^{xx} + \epsilon \tau_1^{xx} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mu(\gamma_0^{xx} + \epsilon \gamma_1^{xx}) = 0$ por (4.61), e

$$(\Lambda \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}^{(z)} = \Lambda^{xz} n^{(x)} + \Lambda^z n^{(z)} = -(p_s^{(w)} + p^{(w)}) + \frac{\epsilon}{\gamma Re} \tau^{zz} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (4.49)$$

Pela equação que define a continuidade da tensão através da interface (4.23), teremos que

$$-(p_s^{(w)} + p^{(w)}) \frac{\epsilon^2 \frac{d}{a} \frac{d\zeta}{dx}}{\sqrt{1 + \epsilon^4 \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2}} = -(p_s^{(m)} + p^{(m)}) \frac{\epsilon^2 \frac{d}{a} \frac{d\zeta}{dx}}{\sqrt{1 + \epsilon^4 \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2}} + \frac{\epsilon}{\gamma Re} \tau^{zx} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (4.50)$$

isto é,

$$\tau^{xz} + \mathcal{O}(\epsilon^3) = 0 \quad (4.51)$$

e

$$-(p_s^{(w)} + p^{(w)}) = -(p_s^{(m)} + p^{(m)}) + \frac{\epsilon}{\gamma Re} \tau^{zz} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (4.52)$$

onde $p_s^{(m)} = \frac{H}{\epsilon} + \gamma(1 - Z)$.

Expandindo em série de Taylor a equação (4.51) ao redor da posição média da interface, temos, respectivamente,

$$\tau^{xz}|_{Z=1} + \epsilon \frac{a}{d} \zeta \tau_Z^{xz}|_{Z=1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \quad (4.53)$$

Substituindo em (4.53) as séries perturbadas das incógnitas, obtemos que a condição de continuidade da tensão na interface é dada por

$$\tau_0^{xz}|_{Z=1} + \epsilon \tau_1^{xz}|_{Z=1} + \epsilon^2 \tau_2^{xz}|_{Z=1} + \epsilon \frac{a}{d} \zeta_0 \tau_{0,Z}^{xz}|_{Z=1} + \frac{a}{d} \zeta_1 \tau_{0,Z}^{xz}|_{Z=1} = \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4.54)$$

Logo, a condição da tensão tangencial de $\mathcal{O}(1)$ na interface é dada por

$$\tau_0^{xz}|_{Z=1} = 0 \quad (4.55)$$

4.4.3 Relação adimensional entre tensão e deformação

Adotamos o modelo viscoelástico generalizado de [Mei et al., 2010]. Pela equação (4.13), diferentemente do caso de um fluido puramente viscoso, o tensor de tensão normalizado está relacionado com o tensor de deformação normalizado pela seguinte equação diferencial

$$\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n (\partial_t)^n \right) \tau = \left(\sum_{n=0}^{N-1} b_n (\partial_t)^n \right) \gamma, \quad (4.56)$$

onde os coeficientes adimensionais a_n e b_n são dados por

$$a_n = \bar{a}_n \omega^n \quad \text{e} \quad b_n = \frac{\bar{b}_n}{\mu_0} \omega^{n-1}. \quad (4.57)$$

O tensor de deformação é definido pela matriz

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^{xx} & \gamma^{xz} \\ \gamma^{zx} & \gamma^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\epsilon \frac{d}{a} X_x & \mathcal{X}_Z + \left(\epsilon \frac{d}{a}\right)^2 \mathcal{Z}_x \\ \mathcal{X}_Z + \left(\epsilon \frac{d}{a}\right)^2 \mathcal{Z}_x & 2\epsilon \frac{d}{a} \mathcal{Z}_Z \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Expandindo o deslocamento $(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ em séries perturbadas, temos que

$$\gamma = \begin{pmatrix} 2\epsilon \frac{d}{a} \mathcal{X}_{0,x} + 2\epsilon^2 \frac{d}{a} (\mathcal{X}_{1,x} + \mathcal{X}_{0,x_1}) & \mathcal{X}_{0,Z} + \epsilon \mathcal{X}_{1,Z} + \epsilon^2 \mathcal{X}_{2,Z} + \left(\epsilon \frac{d}{a}\right)^2 \mathcal{Z}_{0,x} \\ \mathcal{X}_{0,Z} + \epsilon \mathcal{X}_{1,Z} + \epsilon^2 \mathcal{X}_{2,Z} + \left(\epsilon \frac{d}{a}\right)^2 \mathcal{Z}_{0,x} & 2\epsilon \frac{d}{a} \mathcal{Z}_{0,Z} + 2\epsilon^2 \frac{d}{a} \mathcal{Z}_{1,Z} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (4.59)$$

Agrupando os termos de $\mathcal{O}(1)$, obtemos que,

$$\mathcal{O}(1) : \begin{cases} \gamma_0^{xx} = 0, \\ \gamma_0^{xz} = X_{0,Z}, \\ \gamma_0^{zz} = 0, \end{cases} \quad (4.60)$$

onde $\gamma_i^{xz} = \gamma_i^{zx} \forall i \in 0, 1, 2$. Desse modo, podemos encontrar o tensor de deformação para cada harmônico. Para $\mathcal{O}(1)$, temos que

$$\begin{cases} \gamma_{00}^{xx} = 0, \\ \gamma_{00}^{xz} = \mathcal{X}_{00,Z} = 0, \\ \gamma_{00}^{zz} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{01}^{xx} = 0, \\ \gamma_{01}^{xz} = \mathcal{X}_{01,Z}, \\ \gamma_{01}^{zz} = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

visto que $\mathcal{X}_{00} = 0$ e $\mathcal{Z}_{00} = 0$.

Introduzindo as escalas de tempo lentas nos operadores diferenciais em (4.56), obtemos que

$$1 + \sum_{n=1}^N a_n (\partial_t + \epsilon \partial_{t_1})^n \rightarrow 1 + \sum_{n=1}^N a_n (\partial_t)^n + \epsilon \sum_{n=1}^N n a_n (\partial_{t_1}) (\partial_t)^{n-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

e

$$\sum_{n=0}^{N-1} b_n (\partial_t + \epsilon \partial_{t_1})^n \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} b_n (\partial_t)^n + \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} n b_n (\partial_{t_1}) (\partial_t)^{n-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Introduzindo as expansões das séries perturbadas em (4.56), obtemos que

$$\begin{aligned} & 1 + \sum_{n=1}^N a_n(\partial_t)^n + \epsilon \sum_{n=1}^N n a_n(\partial_{t_1})(\partial_t)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} b_n(\partial_t)^n + \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} n b_n(\partial_{t_1})(\partial_t)^{n-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (4.62)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n(\partial_t)^n\right) \tau_0 + \epsilon \left[\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n(\partial_t)^n\right) \tau_1 + \sum_{n=1}^N n a_n(\partial_{t_1})(\partial_t)^{n-1} \tau_0 \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} b_n(\partial_t)^n \gamma_0 + \epsilon \left(\sum_{n=0}^{N-1} b_n(\partial_t)^n \gamma_1 + \sum_{n=0}^{N-1} n b_n(\partial_{t_1})(\partial_t)^{n-1} \gamma_0 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Tomando os termos de $\mathcal{O}(1)$,

$$\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n(\partial_t)^n\right) \tau_0 = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(\partial_t)^n \gamma_0. \quad (4.64)$$

Logo, substituindo os harmônicos,

$$\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n(\partial_t)^n\right) (\tau_{00} + \tau_{01} e^{i\psi} + \text{c.c.}) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(\partial_t)^n (\gamma_{00} + \gamma_{01} e^{i\psi} + \text{c.c.}). \quad (4.65)$$

Assim, separando por harmônicos a equação de $\mathcal{O}(1)$, obtemos que

$$\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n(\partial_t)^n\right) \tau_{00} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(\partial_t)^n \gamma_{00}, \quad (4.66)$$

$$\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n(-i)^n\right) (\tau_{01} + \text{c.c.}) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(-i)^n (\gamma_{01} + \text{c.c.}). \quad (4.67)$$

Logo, obtemos para o primeiro harmônico que

$$\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n(-i)^n\right) \tau_{01}^{xx} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(-i)^n \gamma_{01}^{xx} = 0, \quad (4.68)$$

$$\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n(-i)^n\right) \tau_{01}^{xz} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(-i)^n \gamma_{01}^{xz} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(-i)^n \mathcal{X}_{01,Z} \quad (4.69)$$

e

$$\left(1 + \sum_{n=1}^N a_n(-i)^n\right) \tau_{01}^{zz} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(-i)^n \gamma_{01}^{zz} = 0, \quad (4.70)$$

onde usamos que $\gamma_{01} = 0$ por (4.60). Definindo

$$\mu = i \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n(-i)^n}{1 + \sum_{n=1}^N a_n(-i)^n}, \quad (4.71)$$

concluimos que

$$\tau_{01}^{xx} = 0, \quad \tau_{01}^{xz} = \mu u_{01,Z} \quad \text{e} \quad \tau_{01}^{zz} = 0. \quad (4.72)$$

4.5 Problema perturbativo na lama fluida

No apêndice C, mostramos que a solução da equação diferencial (C.9) com as condições de contorno (C.10) e (C.12) é dada por

$$u_{01} = \frac{k_0 \gamma A}{2 \cosh q} (1 - \cosh(\lambda Z) + \tanh \lambda \sinh(\lambda Z)). \quad (4.73)$$

Integrando a equação da continuidade e usando a condição não deslizante no fundo (4.28) obtemos o perfil da velocidade vertical

$$v_{01} = -i \frac{\gamma k_0 A}{2 \lambda \sinh q} [\lambda Z - \sinh(\lambda Z) + \tanh \lambda [\cosh(\lambda Z) - 1]]. \quad (4.74)$$

Pela condição cinemática na fronteira (4.22), obtemos a amplitude do deslocamento da interface

$$\xi_{01} = i \frac{d}{a_0} (v_{01})|_{Z=1} = \gamma \frac{d}{a_0} \frac{k_0 A}{2 \sinh q} G(\sigma), \quad (4.75)$$

onde

$$G(\sigma) = 1 - \frac{\tanh \sigma}{\sigma}. \quad (4.76)$$

4.6 Problema perturbativo na água

Substituindo a expansão de Φ definida em (4.39) na equação de Laplace (4.9), obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_0 + \epsilon\Phi_1) + \frac{\partial}{\partial z}(\Phi_0 + \epsilon\Phi_1) = \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4.77)$$

Usando (4.77) e (4.41) a equação de ordem $\mathcal{O}(1)$ é dada por

$$-k_0^2\Phi_{01} + \frac{\partial\Phi_{01}}{\partial z} = 0 \quad \text{em } -H < z < 0. \quad (4.78)$$

Tomando os termos de $\mathcal{O}(1)$ em (4.33), obtemos que a condição de contorno de ordem 0 para Φ é dada por

$$\frac{\partial\Phi_{01}}{\partial z} - \Phi_{01} = 0 \quad \text{em } z = 0. \quad (4.79)$$

Pela condição de contorno dinâmica (4.32),

$$-i\Phi_{01} = \frac{-A}{2} \quad \text{em } z = 0. \quad (4.80)$$

Ainda, pela condição na interface (4.21)

$$\frac{\partial\Phi_{01}}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = -H. \quad (4.81)$$

Usando as condições de fronteira (4.79) e (4.80), mostramos no apêndice C que

$$\Phi_{01} = -\frac{iA \cosh Q}{2 \cosh q}, \quad \text{onde } Q = k_0(z + H), \quad q = k_0H, \quad (4.82)$$

onde k_0 é o número de onda. Mostramos também no apêndice C que k_0 satisfaz a relação de dispersão

$$k_0 \tanh(k_0H) = 1. \quad (4.83)$$

Observemos que essa é a relação de dispersão usual. Para isso, basta transformarmos as variáveis adimensionais de (4.83) em dimensionais. Temos que

$$k_0 = \bar{k}_0 \frac{g}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad H = h \frac{\sigma^2}{g}.$$

Portanto, (4.83) pode ser escrito como

$$\sigma^2 = g\bar{k}_0 \tanh(\bar{k}_0 h) \quad (4.84)$$

Para encontrarmos a equação do transporte que queremos, precisamos calcular as coordenadas horizontal e vertical da água. Estamos considerando que a água é um fluido potencial. Logo, a velocidade da água adimensional é dada por

$$\mathbf{u}'_{\mathbf{w}} = (u'_{\mathbf{w}}, v'_{\mathbf{w}}) = \frac{a_0 g}{\sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\sigma^2}{g}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\sigma^2}{g} \right) = a_0 \sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right),$$

isto é,

$$\mathbf{u}'_{\mathbf{w}} = a_0 \sigma \mathbf{u}_{\mathbf{w}}. \quad (4.85)$$

Obtemos que

$$u_{w_{01}} = \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{01} e^{i\psi}) = ik_0 \Phi_{01} a_0 \sigma = \frac{k_0 A \cosh Q}{2 \cosh q} \quad (4.86)$$

e

$$v_{w_{01}} = -\frac{i A k_0 \sinh Q}{2 \cosh q}. \quad (4.87)$$

A solução Φ_{00} também foi obtida em [Mei et al., 2010]. Porém ela não será necessária no nosso trabalho, como veremos a seguir.

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos que o problema de valor de contorno do primeiro harmônico de $\mathcal{O}(\epsilon)$ é dado por

$$\frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial z^2} - k_0^2 \Phi_{11} = -k_0 \frac{\cosh Q}{\cosh q} \frac{\partial A}{\partial x_1}, \quad (4.88)$$

sujeito às condições de contorno

$$\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial z} - k_0 \Phi_{11} = \frac{\partial A}{\partial t_1}, \quad z = 0 \quad (4.89)$$

e

$$\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial z} = -i \xi_{01}, \quad z = -H, \quad (4.90)$$

onde ξ_{01} está dado em (4.75).

[Mei et al., 2010] mostrou que a solução desse problema de valor de contorno é dada por

$$\Phi_{11} = ik_1 C_g A \sinh q \sinh Q - \frac{Q \sinh Q}{2k_0 \cosh q} \frac{\partial A}{\partial x_1}, \quad (4.91)$$

onde

$$k_1 = -\gamma \frac{d}{a_0} \left(\frac{2k_0^2}{2q + \sinh(2q)} \right) \quad (4.92)$$

e C_g é a velocidade de grupo dada por

$$C_g = \frac{1}{2k_0} \left(1 + \frac{2q}{\sinh(2q)} \right). \quad (4.93)$$

Ele afirma também que a solução do problema do segundo-harmônico é dada por

$$\Phi_{12} = \frac{3i}{16} \frac{A^2}{\sinh^4 q} \cosh(2Q). \quad (4.94)$$

Para calcularmos as coordenadas da velocidade de água de $\mathcal{O}(\epsilon)$, novamente iremos usar o fato de estarmos supondo que a água é irrotacional. Logo,

$$\begin{aligned} u_{w_1} &= \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right] \\ &= \left[\frac{\partial \Phi_{00}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{01}}{\partial x_1} e^{i\psi} + ik_0 \Phi_{11} e^{i\Psi} + 2ik_0 \Phi_{12} e^{2i\Psi} \right] + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (4.95)$$

e

$$v_{w_1} = \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial z} e^{i\psi} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial z} e^{2i\Psi} \right] + \text{c.c.} \quad (4.96)$$

Separando por harmônicos

$$u_{w_{10}} = \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial x_1}, \quad (4.97)$$

$$u_{w_{11}} = \left[\frac{-i}{2} \frac{\partial A}{\partial x_1} \frac{\cosh Q}{\cosh q} + ik_0 \left(ik_1 C_g A \sinh q \sinh Q - \frac{Q \sinh Q}{2k_0 \cosh q} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) \right], \quad (4.98)$$

$$u_{w_{12}} = ik_0 \frac{3i}{8} \frac{A^2}{\sinh^4 q} \cosh(2Q), \quad (4.99)$$

$$v_{w_{10}} = 0, \quad (4.100)$$

$$v_{w_{10}} = \left[ik_1 k_0 C_g A \sinh q \cosh Q - k_0 \frac{\sinh Q + Q \cosh Q}{2k_0 \cosh q} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right] \quad (4.101)$$

e

$$v_{w12} = \frac{3ik_0}{8} \frac{A^2}{\sinh^4 q} \sinh(2Q). \quad (4.102)$$

4.7 Equação do transporte

O principal objetivo desse capítulo é obter uma equação do transporte para a concentração de sedimentos suspensos no fundo usando o modelo viscoelástico generalizado. Os resultados obtidos aqui são originais.

Consideramos o transporte de partículas suspensas na onda da camada limite sobre uma interface água-lama fluida.

Expandimos a concentração, a velocidade do fluido e a derivada no tempo da seguinte forma

$$(u'_w, v'_w) = (u'_{w0}, v'_{w0}) + \epsilon(u'_{w1}, v'_{w1}) + \dots, \quad (4.103)$$

$$C' \rightarrow C'_0 + \epsilon C'_1 + \epsilon^2 C'_2 + \dots \quad (4.104)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t'} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t'_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T'} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (4.105)$$

onde esperamos que o termo de ordem zero $C'_0 = C'_0(x', z, T')$ represente a concentração principal no tempo e portanto não depende do tempo rápido t' , enquanto que os termos de ordem mais alta $C'_n = C'_n(x', z', t', T')$, para $n = 1, 2, \dots$ são funções de ambos os tempos. Observamos que estamos escrevendo as equações com variáveis dimensionais.

Continuaremos a usar a análise de múltipla escala. Assim, expandiremos novamente as derivadas no espaço como em (4.36) e (4.38).

Da mesma forma que no capítulo anterior, a condição de fronteira do fundo (3.39) pode ser expandida em série de Taylor sobre o primeiro nível na interface. Assim obtemos

$$v'_f C' + E' \frac{\partial C'}{\partial z'} + \epsilon \xi \left(v'_f C' + E' \frac{\partial C'}{\partial z'} \right) = 0 \text{ em } z' = \epsilon \xi'. \quad (4.106)$$

As equações perturbadas são obtidas tomando os termos de potências de ϵ iguais depois de substituírmos as expansões (4.103), (4.104), juntamente com as expansões das derivadas, em (3.38) e (4.106). Isto é,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t'} (C'_0 + \epsilon C'_1 + \epsilon^2 C'_2) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t'_1} (C'_0 + \epsilon C'_1) + \epsilon^2 \frac{\partial C'_0}{\partial T'} + \epsilon (u'_{w_0} + \epsilon u'_{w_1}) \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} [(C'_0 + \epsilon C'_1)] \right. \\ & + \left. \epsilon \frac{\partial}{\partial x'_1} (u'_{w_0} C'_0) \right\} + (\epsilon (v'_{w_0} + \epsilon v'_{w_1}) - v'_f) \frac{\partial}{\partial z'} [(C'_0 + \epsilon C'_1)] \\ & = \epsilon^2 E' \frac{\partial^2 C'_0}{\partial x'^2} + E' \frac{\partial^2}{\partial z'^2} (C'_0 + \epsilon C'_1 + \epsilon^2 C'_2). \end{aligned} \quad (4.107)$$

Dessa forma, as equações de ordem zero são dadas por

$$v'_f \frac{\partial C'_0}{\partial z'} + E' \frac{\partial^2 C'_0}{\partial z'^2} \text{ em } 0 < z' < \infty, \quad (4.108)$$

$$v'_f C'_0 + E' \frac{\partial C'_0}{\partial z'} = 0 \text{ em } z' = 0, \quad (4.109)$$

$$C'_0 = 0 \text{ quando } z' \rightarrow \infty. \quad (4.110)$$

Consideramos a seguinte normalização

$$C = C'/C_i \quad v'_f = a_0 \sigma v_f \quad E' = \frac{a_0 g}{\sigma} E, \quad (4.111)$$

onde C_i é a concentração inicial. Usando também a normalização definida em (4.5), obtemos que o problema de $\mathcal{O}(1)$ pode ser escrito como

$$v_f \frac{\partial C_0}{\partial z} + E \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} = 0 \text{ em } 0 < z < \infty, \quad (4.112)$$

$$v_f C_0 + E \frac{\partial C_0}{\partial z} = 0 \text{ em } z = 0, \quad (4.113)$$

$$C_0 = 0 \text{ quando } z' \rightarrow \infty. \quad (4.114)$$

Pelo capítulo 3, sabemos que a solução dessa equação sujeita a essas condições de contorno é dada por (3.47).

4.8 Equação de $\mathcal{O}(\epsilon)$

Por (4.107), a equação de $\mathcal{O}(\epsilon)$ é dada por

$$E' \frac{\partial^2 C_1'}{\partial z'^2} + v_f' \frac{\partial C_1'}{\partial z'} - \frac{\partial C_1'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} (u_{w_0}' C_0') + \frac{\partial}{\partial z'} (v_{w_0}' C_0') \quad (4.115)$$

$$v_f' C_1' + E' \frac{\partial C_1'}{\partial z'} = 0 \text{ em } z' = 0, \quad (4.116)$$

$$C_1' = 0 \text{ quando } z' \rightarrow \infty. \quad (4.117)$$

Substituindo a normalização, obtemos que o problema de $\mathcal{O}(\epsilon)$ pode ser escrito como

$$\frac{a_0 g}{\sigma} E \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} \frac{\sigma^4}{g^2} + a_0 \sigma v_f \frac{\partial C_1}{\partial z} \frac{\sigma^2}{g} - \frac{\partial C_1}{\partial t} \sigma = \frac{\sigma^2}{g} a_0 \sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_{w_0} C_0) + \frac{\partial}{\partial z} (v_{w_0} C_0) \right] \quad (4.118)$$

$$v_f C_1 + E \frac{\partial C_1}{\partial z} = 0 \text{ em } z = 0, \quad (4.119)$$

$$C_1 = 0 \text{ quando } z \rightarrow \infty. \quad (4.120)$$

Assim, podemos ver que a equação (4.118) se torna

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial C_1}{\partial z} - \frac{g}{a_0 \sigma^2 E} \frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{1}{E} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_{w_0} C_0) + \frac{\partial}{\partial z} (v_{w_0} C_0) \right], \quad (4.121)$$

onde α está definido em (3.48).

Observemos que

$$u_{w_0} = a_0 \sigma \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial x} = 0 \text{ pois } \Phi_{00} = \Phi_{00}(x_1, t_1).$$

Lembrando que

$$u_{w_0} = u_{00} + u_{01} e^{i\psi} + \text{c.c.},$$

e usando as equações da continuidade e (3.47), obtemos que o lado direito da equação (4.118) é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (u_{w_0} C_0) + \frac{\partial}{\partial z} (v_{w_0} C_0) &= u_{w_0} \frac{\partial C_0}{\partial x} + v_{w_0} \frac{\partial C_0}{\partial z} \\ &= \text{Re}[u_{w_01} e^{i\psi}] F \frac{\partial C_b}{\partial x} + \text{Re}[v_{w_01} e^{i\psi}] F' C_b. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Logo, podemos expressar C_1 como

$$C_1 = \operatorname{Re}[N(z)e^{i\psi}] \frac{\partial C_b}{\partial x} + \operatorname{Re}[M(z)e^{i\psi}] C_b, \quad (4.123)$$

onde as funções M e N são governadas pelos seguintes problemas de valor de contorno

$$\frac{d^2 N}{dz^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dN}{dz} + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} N = \frac{u_{w01} F}{E} \quad \text{em } 0 < z < \infty, \quad (4.124)$$

$$\frac{dN}{dz} + \frac{1}{\alpha} N = 0 \quad \text{em } z = 0, \quad (4.125)$$

$$N = 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (4.126)$$

e

$$\frac{d^2 M}{dz^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dM}{dz} + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} M = \frac{v_{w01} F'}{E} \quad \text{em } 0 < z < \infty, \quad (4.127)$$

$$\frac{dM}{dz} + \frac{1}{\alpha} M = 0 \quad \text{em } z = 0, \quad (4.128)$$

$$M = 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.129)$$

A solução do problema de valor de contorno (4.124)-(4.126) é dada por

$$N(z) = A_1 e^{-\beta z/\alpha} + [A_2 \cosh(k_0 z) + A_3 \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha}, \quad (4.130)$$

onde A_1 , A_2 , A_3 , e β são constantes a serem determinadas. No apêndice D mostramos que essas constantes são dadas por

$$A_1 = \frac{k_0 \alpha}{\beta - 1} A_3, \quad (4.131)$$

$$A_2 = \frac{\frac{k_0 A}{2E} - \frac{k_0}{\alpha} A_3}{\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right)} \quad (4.132)$$

e

$$A_3 = \frac{\frac{k_0 A}{2E} \left[\tanh q \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} \right) + \frac{k_0}{\alpha} \right]}{\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} \right)^2 - \frac{k_0^2}{\alpha^2}}. \quad (4.133)$$

Analogamente, consideramos a solução do problema de valor de contorno (4.127)-(4.129) dada por

$$M = B_1 e^{-\theta z/\alpha} + (B_2 \cosh(\sigma z) + B_3 \sinh(\sigma z)) e^{-z/\alpha}, \quad (4.134)$$

onde B_1 , B_2 , B_3 e θ são constantes a serem determinadas. Também mostramos no apêndice D que essas constantes são dadas por

$$B_1 = \frac{\sigma \alpha}{\beta - 1} B_3, \quad (4.135)$$

$$B_2 = \frac{\frac{ik_0 A}{2\alpha E} \tanh q - \frac{k_0}{\alpha} B_3}{\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right)} \quad (4.136)$$

e

$$B_3 = \frac{\frac{ik_0 A}{2\alpha E} \left[\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right) + \frac{k_0}{\alpha} \right]}{\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right)^2 + \frac{k_0^2}{\alpha^2}}. \quad (4.137)$$

4.9 Equação de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$

Tomando os termos de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ na equação (4.107) temos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C'_0}{\partial T'} + \frac{\partial C'_2}{\partial t'} + \frac{\partial C'_1}{\partial t'_1} + \frac{\partial}{\partial x'}(u'_{w_1} C'_0) + \frac{\partial}{\partial x'}(u'_{w_0} C'_1) + \frac{\partial}{\partial x'_1}(u'_{w_0} C'_0) + \frac{\partial}{\partial z'}(v'_{w_1} C'_0) \\ & + \frac{\partial}{\partial x'}(v'_{w_0} C'_1) - v'_f \frac{\partial C'_2}{\partial z'} = E'^2 \left(\frac{\partial^2 C'_0}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 C'_2}{\partial t'^2} \right). \end{aligned} \quad (4.138)$$

$$v'_f C'_2 + E' \frac{\partial C'_2}{\partial z'} = \xi' \left(v'_f C'_1 + E' \frac{\partial C'_1}{\partial z'} \right) \quad \text{em } z' = 0, \quad (4.139)$$

$$C'_2 = 0 \quad \text{quando } z' \rightarrow \infty, \quad (4.140)$$

onde u'_{w_1} e v'_{w_1} são definidas em (4.95) e (4.96), respectivamente.

Tomando a média sobre o período de onda, temos pela equação (4.138) que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{C'_0}}{\partial T'} + \frac{\partial \overline{C'_1}}{\partial t'_1} + \frac{\partial}{\partial x'}(\overline{u'_{w_1} C'_0}) + \frac{\partial}{\partial x'}(\overline{u'_{w_0} C'_1}) + \frac{\partial}{\partial x'_1}(\overline{u'_{w_0} C'_0}) + \frac{\partial}{\partial x'}(\overline{v'_{w_0} C'_1}) \\ & - v'_f \frac{\partial \overline{C'_2}}{\partial z'} = E'^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{C'_0}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \overline{C'_2}}{\partial t'^2} \right) \quad \text{em } 0 < z' < \infty. \end{aligned} \quad (4.141)$$

pois

$$\frac{\partial \overline{C'_2}}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial z'} (\overline{v'_{w_1} C'_0}) = 0,$$

visto que $v'_{w_2} = 0$ em $z' = 0$. Podemos afirmar isso já que não há a componente normal da corrente constante no fundo da camada de Stokes.

As condições de contorno de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ são dadas por

$$v'_f \overline{C'_2} + E' \frac{\partial \overline{C'_2}}{\partial z'} = \xi \left(v'_f C'_1 + E' \frac{\partial C'_1}{\partial z'} \right) \text{ em } z' = 0, \quad (4.142)$$

e

$$\overline{C'_2} = 0 \text{ quando } z' \rightarrow \infty, \quad (4.143)$$

Integrando (4.141) com respeito à profundidade através da camada limite,

$$\begin{aligned} & \langle F \rangle \frac{\partial C'_b}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial t'_1} \langle \overline{C'_1} \rangle + \frac{\partial}{\partial x'} (\langle \overline{u'_{w_1} F} \rangle C'_b) + \frac{\partial}{\partial x'} \langle \overline{u'_{w_0} C'_1} \rangle + \frac{\partial}{\partial x'_1} (\langle \overline{u'_{w_0} F} \rangle C'_b) \\ & - \overline{v'_{w_0} C'_1} \Big|_{z'=0} + v'_f \overline{C'_2} \Big|_{z'=0} = E' \langle F \rangle \frac{\partial^2 C'_2}{\partial x'^2} - E' \frac{\partial \overline{C'_2}}{\partial z'} \Big|_{z'=0}, \end{aligned} \quad (4.144)$$

onde

$$\langle G \rangle = \int_0^\infty G dz'.$$

Pela condição na interface (4.22), temos que

$$\frac{\partial \xi'_0}{\partial t'} = v'_{w_0} \Big|_{z'=0}. \quad (4.145)$$

Além disso, notemos que

$$\begin{aligned} \overline{v'_{w_0} C'_1} \Big|_{z'=0} + v'_f \overline{C'_2} \Big|_{z'=0} + E' \frac{\partial \overline{C'_2}}{\partial z'} \Big|_{z'=0} &= \overline{-\xi'_0 \frac{\partial C'_1}{\partial t'} + \xi'_0 \left(v'_f C'_1 + E' \frac{\partial C'_1}{\partial z'} \right)} \Big|_{z'=0} \\ &= \xi'_0 \left(-\frac{\partial C'_1}{\partial t'} + v'_f C'_1 + E' \frac{\partial C'_1}{\partial z'} \right) \Big|_{z'=0} \\ &= \xi'_0 \left(\frac{\partial}{\partial x'} (u'_{w_0} C'_0) + \frac{\partial}{\partial z'} (v'_{w_0} C'_0) \right) \Big|_{z'=0} \end{aligned} \quad (4.146)$$

por (4.118). Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{v'_{w_0} C'_1} \Big|_{z'=0} + v'_f \overline{C'_2} \Big|_{z'=0} + E' \frac{\partial \overline{C'_2}}{\partial z'} \Big|_{z'=0} &= \left[\overline{\xi'_0 \left(\frac{\partial}{\partial x'} (u'_{w_0} C'_0) \right)} + \overline{\left(\frac{\partial}{\partial z'} (v'_{w_0} C'_0) \right)} \right] \Big|_{z'=0} \\
&= \overline{\xi'_0 \left(\frac{\partial}{\partial x'} (u'_{w_0} C'_0) \right)} \Big|_{z'=0} \\
&= -\frac{1}{2} \text{Re}(\xi'_{01} u'^*_{01})_{z'=0} \frac{\partial C'_b}{\partial x'}. \tag{4.147}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.147) em (4.144),

$$\begin{aligned}
\langle F \rangle \frac{\partial C'_b}{\partial T'} + \frac{\partial}{\partial t'_1} \langle \overline{C'_1} \rangle + \frac{\partial}{\partial x'} (\langle \overline{u'_{w_1} F} \rangle C'_b) + \frac{\partial}{\partial x'} \langle \overline{u'_{w_0} C'_1} \rangle + \frac{\partial}{\partial x'_1} (\langle \overline{u'_{w_0} F} \rangle C'_b) \\
- \frac{1}{2} \text{Re}(\xi'_{01} u'^*_{01})_{z'=0} \frac{\partial C'_b}{\partial x'} = E' \langle F \rangle \frac{\partial^2 C'_2}{\partial x'^2}, \tag{4.148}
\end{aligned}$$

Dividindo a equação acima por $\langle F \rangle$ e lembrando que C_1 é harmônico no tempo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C'_b}{\partial T'} + \frac{\frac{\partial}{\partial x'} (\langle \overline{u'_{w_1} F} \rangle C'_b)}{\langle F \rangle} + \frac{\frac{\partial}{\partial x'} \langle \overline{u'_{w_0} C'_1} \rangle}{\langle F \rangle} + \frac{\frac{\partial}{\partial x'_1} (\langle \overline{u'_{w_0} F} \rangle C'_b)}{\langle F \rangle} \\
- \frac{1}{2} \frac{\text{Re}(\xi'_{01} u'^*_{01})_{z'=0}}{\langle F \rangle} \frac{\partial C_b}{\partial x'} = E' \frac{\partial^2 C'_2}{\partial x'^2}, \tag{4.149}
\end{aligned}$$

Substituindo a normalização que definimos anteriormente obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_b}{\partial T} \sigma + a_0 \sigma \frac{\frac{\partial}{\partial x} (\langle \overline{u_{w_1} F} \rangle C_b)}{\langle F \rangle} \frac{\sigma^2}{g} + a_0 \sigma \frac{\frac{\partial}{\partial x} \langle \overline{u_{w_0} C_1} \rangle}{\langle F \rangle} \frac{\sigma^2}{g} + a_0 \sigma \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} (\langle \overline{u_{w_0} F} \rangle C_b)}{\langle F \rangle} \frac{\sigma^2}{g} \\
- a_0^2 \sigma \frac{1}{2} \frac{\text{Re}(\xi_{01} u_{01}^*)_{z=0}}{\langle F \rangle} \frac{\partial C_b}{\partial x} \frac{\sigma^2}{g} = \frac{a_0 g}{\sigma} E \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} \frac{\sigma^4}{g^2}, \tag{4.150}
\end{aligned}$$

Dividindo por σ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_b}{\partial T} + \frac{\frac{\partial}{\partial x} (\langle \overline{u_{w_1} F} \rangle C_b)}{\langle F \rangle} \frac{a_0 \sigma^2}{g} + \frac{\frac{\partial}{\partial x} \langle \overline{u_{w_0} C_1} \rangle}{\langle F \rangle} \frac{a_0 \sigma^2}{g} + \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} (\langle \overline{u_{w_0} F} \rangle C_b)}{\langle F \rangle} \frac{a_0 \sigma^2}{g} \\
- \frac{1}{2} \frac{\text{Re}(\xi_{01} u_{01}^*)_{z=0}}{\langle F \rangle} \frac{\partial C_b}{\partial x} \frac{a_0 \sigma^2}{g} = \frac{a_0 \sigma^2}{g} E \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2}, \tag{4.151}
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_b}{\partial T} + \frac{a_0 \sigma}{g} \left[\frac{\langle \overline{u_{w1}} F \rangle}{\langle F \rangle} + \frac{\operatorname{Re} \langle u_{w0}^* M \rangle}{2 \langle F \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}(\xi_{01} u_{01}^*)_{z=0}}{2 \langle F \rangle} \right] \frac{\partial C_b}{\partial x} + \frac{a_0 \sigma^2}{g} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\langle \overline{u_{w0}} F \rangle}{\langle F \rangle} C_b \\ &= \frac{a_0 \sigma^2}{g} \left[E - \frac{\operatorname{Re} \langle u_{w0}^* N \rangle}{2 \langle F \rangle} \right] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (4.152)$$

Em [Ng and Wu, 2008], a média da velocidade de ordem ϵ no tempo foi calculada como

$$\bar{u}_{w1} = k \sigma^{-1} |\hat{U}_I|^2 \left\{ \operatorname{Re} \left[D \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_w (z + \lambda_w^* B^*) \right) e^{-\lambda_w z} - 2D \right] + \frac{1}{4} |D|^2 e^{-2z/\delta_w} - \frac{3}{4} |D|^2 - \frac{1}{2} \right\},$$

onde u_L é o transporte de massa na camada limite sob a interface e é dado por

$$u_l = k \sigma^{-1} |\hat{U}_I|^2 \left\{ 2 \operatorname{Re} [D (e^{-\lambda_w z} - 1)] + \frac{3}{4} |D|^2 (e^{-2z/\delta_w} - 1) \right\}.$$

Portanto

$$\frac{\partial \bar{u}_{w1}}{\partial x} = 0.$$

Além disso, observemos que, como u_{w0} é harmônico no tempo, temos que $\overline{u_{w0}} = 0$.

Logo, obtemos que a equação adimensional para a concentração no fundo é dada por

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + U \frac{\partial C_b}{\partial x} = [E - D_T] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \quad (4.153)$$

onde

$$U = \frac{a_0 \sigma^2}{g} \left[\frac{\langle \overline{u_{w1}} F \rangle}{2 \langle F \rangle} + \frac{\operatorname{Re} \langle u_{w0}^* M \rangle}{2 \langle F \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}(\xi_{01} u_{01}^*)_{z=0}}{\langle F \rangle} \right] \quad (4.154)$$

e

$$D_T = - \frac{a_0 \sigma^2}{g} \frac{\operatorname{Re} \langle u_{w0}^* N \rangle}{2 \langle F \rangle}, \quad (4.155)$$

A equação acima é o principal resultado original que obtivemos neste capítulo. Observemos que os coeficientes de dispersão e convecção D_T e U , respectivamente,

têm as mesmas características dos coeficientes obtidos por [Ng and Wu, 2008], descritos em (3.82) e (3.83). O que torna a equação diferente são as coordenadas da velocidade da água de $\mathcal{O}(1)$ e $\mathcal{O}(\epsilon)$ e a onda da interface de $\mathcal{O}(1)$, que foram obtidas com o modelo viscoelástico generalizado. A importância desse resultado se deve ao fato de esse modelo ter sido obtido através de um modelo mais realístico, de acordo com [Krotov, 2008], visto que ele leva em consideração a dependência dos coeficientes da tensão e deformação da frequência.

5 CÁLCULO DO TERMO DE DISSIPACÃO DE ENERGIA DE ONDAS

Por [Kranenburg, 2008], em diversos lugares do mundo há lama em frente às costas e nas foz dos rios. Essa lama pode ser transportada a esses lugares como um fluido ou pode se tornar um fluido devido a certas condições das ondas. A lama fluida pode ter um forte efeito no amortecimento das ondas de superfície.

Nesse capítulo descreveremos o trabalho de [Kranenburg, 2008] onde um termo de dissipação de energia por uma camada de lama fluida viscosa foi deduzido. A seguir, encontraremos um novo termo de dissipação de energia baseado nos modelos de camadas viscoelásticas mostrados em [Ng, 2000] e [Ng and Zhang, 2007]. Esse modelo pode ser incorporado no modelo de previsão de ondas SWAN.

5.1 Modelo de Kranenburg

O modelo de [Kranenburg, 2008] é descrito do seguinte modo: a camada superior de água é não viscosa e de qualquer espessura. Já a camada inferior de lama fluida é viscosa e é fina, em comparação com o comprimento de onda, como na figura 5.1. O modelo é bi-dimensional, e denotaremos como x e z as coordenadas horizontal e vertical, respectivamente.

Com esse modelo, uma equação de dispersão foi elaborada, usando a esquematização de [De Wit, 1995] que descrevemos brevemente no capítulo 1.

O sistema foi descrito através das equações do momento e da continuidade em ambas as camadas. Ou seja, a camada de água foi descrita através das seguintes equações

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1(x, z, t) + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} p_1(x, z, t) = 0, \quad (5.1)$$

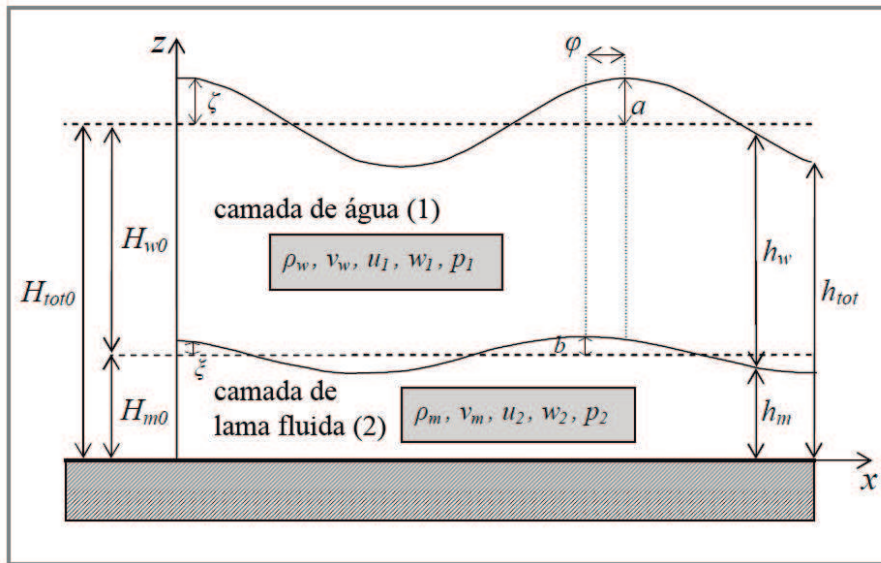


Figura 5.1: Modelo de duas camadas - [Kranenburg, 2008].

$$\frac{\partial}{\partial t} w_1(x, z, t) + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} p_1(x, z, t) + g = 0, \quad (5.2)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} u_1(x, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} w_1(x, z, t) = 0 \quad (5.3)$$

e a camada de lama fluida por

$$\frac{\partial}{\partial t} u_2(x, z, t) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} p_2(x, z, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_2(x, z, t), \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} p_2(x, z, t) + g = 0, \quad (5.5)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} u_2(x, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} w_2(x, z, t) = 0, \quad (5.6)$$

onde as funções com índice 1 e 2 representam as funções definidas na água e na lama fluida, respectivamente.

A seguir, as seguintes soluções para as coordenadas da velocidade horizontal e vertical e a pressão em ambas as camadas foram supostas como

$$u_1(x, z, t) = U_1(z) e^{i(kx - \sigma t)}, \quad (5.7)$$

$$u_2(x, z, t) = U_2(z)e^{i(kx-\sigma t)}, \quad (5.8)$$

$$w_1(x, z, t) = W_1(z)e^{i(kx-\sigma t)}, \quad (5.9)$$

$$w_2(x, z, t) = W_2(z)e^{i(kx-\sigma t)}, \quad (5.10)$$

$$p_1(x, z, t) = P_1(z)e^{i(kx-\sigma t)} + \rho_1 g(H_{tot0} - z) \quad (5.11)$$

e

$$p_2(x, z, t) = P_2(z)e^{i(kx-\sigma t)} + \rho_1 g(H_{tot0} - H_{m0}) + \rho_2 g(H_{m0} - z), \quad (5.12)$$

onde $H_{tot0} = H_{w0} + H_{m0}$ sendo que H_{w0} e H_{m0} são a profundidade da água e da lama fluida, respectivamente. Além disso ϕ é a diferença de fase entre as ondas da superfície livre e da interface.

Além disso, o deslocamento da superfície livre e da interface foram descritos como, respectivamente,

$$\eta = ae^{i(kx-\sigma t)} \quad (5.13)$$

e

$$\xi = \xi_0 e^{i(kx-\sigma t)} = be^{i\phi} e^{i(kx-\sigma t)}, \quad (5.14)$$

onde ξ_0 é complexo para que a diferença de fase entre as duas ondas seja considerada.

Substituindo essas soluções nas equações escritas acima e depois substituindo em condições de contorno apropriadas, uma matriz foi obtida com 8 equações e 8 incógnitas dada por

$$\begin{pmatrix} \cosh(kH_{tot0}) & \sinh(kH_{tot0}) & 0 & 0 & \sigma & 0 \\ \sinh(kH_{tot0}) & \cosh(kH_{tot0}) & 0 & 0 & \frac{-gk}{\sigma} & 0 \\ \cosh(kH_{tot0}) & \sinh(kH_{tot0}) & 0 & 0 & 0 & -\sigma \\ 0 & 0 & -\frac{k(\cosh(mH_{m0})-1)}{m} & \frac{k(-\sinh(mH_{m0})+mH_{m0})}{m} & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & \cosh(mH_{m0}) & \sinh(mH_{m0}) & 0 & 0 \\ \frac{\sigma \sinh(kH_{m0})}{k} & \frac{\sigma \cosh(kH_{m0})}{k} & \frac{-2i\nu\rho_2 k \sinh(mH_{m0})}{\rho_1} & \frac{-\rho_2(-\sigma+2i\nu k^2 \cosh(mH_{m0})-2i\nu k^2)}{k\rho_1} & 0 & \frac{g(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Ao igualar essa matriz a zero, a equação de dispersão foi obtida, chamada *equação de dispersão de Delft*. Essa equação foi escrita em [Kranenburg, 2008] usando o software MAPLE e está definida na figura 5.2 onde $\omega = \sigma$ é a frequência.

$$\begin{aligned}
 \text{Disprel} := & \left(\frac{\cosh(m H m 0) \rho 2 \cosh(k H w 0)}{k} - \frac{\rho 1 \sinh(k H w 0) \sinh(m H m 0)}{m} + \rho 1 \sinh(k H w 0) \cosh(m H m 0) H m 0 \right) \omega^4 \\
 & + (-2 I k \rho 2 v \cosh(m H m 0)^2 \cosh(k H w 0) + 2 I k v \rho 2 \sinh(m H m 0)^2 \cosh(k H w 0) + 2 I k \rho 2 v \cosh(m H m 0) \cosh(k H w 0)) \omega^3 \\
 & + \left(\frac{\rho 2 g k \cosh(k H w 0) \sinh(m H m 0)}{m} - \rho 2 g k \cosh(k H w 0) \cosh(m H m 0) H m 0 - \rho 2 g \cosh(m H m 0) \sinh(k H w 0) \right) \omega^2 \\
 & + (2 I k^2 \rho 2 v g \sinh(k H w 0) \cosh(m H m 0)^2 - 2 I k^2 \rho 2 v g \sinh(k H w 0) \sinh(m H m 0)^2 - 2 I k^2 \rho 2 v g \sinh(k H w 0) \cosh(m H m 0)) \omega \\
 & + \frac{k^2 g^2 \sinh(k H w 0) \sinh(m H m 0) \rho 1}{m} - k^2 g^2 \sinh(k H w 0) \rho 1 \cosh(m H m 0) H m 0 + k^2 g^2 \sinh(k H w 0) \cosh(m H m 0) H m 0 \rho 2 \\
 & - \frac{k^2 g^2 \sinh(k H w 0) \sinh(m H m 0) \rho 2}{m} = 0
 \end{aligned}$$

Figura 5.2: Equação de dispersão de Delft - [Kranenburg, 2008].

Um método iterativo foi adotado para resolver essa equação de modo a calcular o número de onda k . Esse método se baseia na rotina que está descrita em FORTRAN IMSL library [Visual Numerics Inc., 1997]. Após calculado o número de onda, pode-se encontrar os coeficientes das soluções que foram supostas anteriormente.

5.1.1 Dissipação de energia

[Gade, 1958] expressou o trabalho por unidade de área dW no tempo dt na camada inferior como

$$dW = -p \frac{dn}{dt} dt \quad (5.16)$$

onde dn é o deslocamento infinitesimal normal à interface e p é a pressão na água. A inclinação da interface é assumida pequena devido a hipótese de que a amplitude da onda na superfície livre é pequena comparada à profundidade da camada de água e ao comprimento de onda e pelo fato da amplitude da oscilação na interface ser menor do que a amplitude na superfície. Por isso, podemos reescrever o trabalho como

$$dW = -p \frac{d\xi}{dt} dt \quad (5.17)$$

Ao multiplicarmos a parte imaginária da pressão pela parte imaginária da onda na interface obtemos um termo real. Porém, [Kranenburg, 2008] afirma que essa parte não representa a física envolvida no problema. Por isso, a parte imaginária da pressão foi desprezada.

Integrando sob o período de onda T obtemos o trabalho total. A divisão por T resulta na média da energia transmitida através da interface por unidade de área e tempo. Isto é,

$$W = \frac{-1}{T} \int_0^T p \frac{d\xi}{dt} dt \quad (5.18)$$

[Kranenburg, 2008] afirmou que a perda de energia pode ser relacionada com a energia total e que a média da energia total sob um período de onda por unidade de área é dada por

$$E_M = \frac{1}{2} \rho_1 g a^2 (e^{-ikx})^2 \quad (5.19)$$

Assim, a dissipação relativa foi obtida através da divisão entre a média do trabalho e a média da energia, resultando na equação de dispersão de Delft:

$$\mathcal{D} = \frac{-\sigma \operatorname{Re}(P_1) b \operatorname{sen}(\phi)}{\rho_1 g a^2}, \quad (5.20)$$

onde

$$\operatorname{Re}(P_1) = \rho_1 a g \cosh(kz) - \frac{\rho_1 a \sigma^2 \operatorname{senh}(kz)}{k} \quad \text{para } z \in H_{tot0} - z \quad (5.21)$$

e ϕ é a diferença de fase entre as ondas da superfície da água e da interface.

5.2 Novo modelo de dissipação de energia

Vimos na seção anterior que [Kranenburg, 2008] deduziu um termo que calcula a dissipação de energia para uma camada de lama fluida viscosa. Nosso objetivo na seção presente é deduzir uma nova forma para o termo que descreve a dissipação de energia para uma lama fluida viscoelástica, já que, como mencionamos no capítulo 1, existem estudos que mostram que a abordagem viscoelástica é a melhor maneira de descrever as propriedades reológicas da lama fluida.

Novamente consideramos um sistema de duas camadas, sendo a superior de água não viscosa e a inferior de lama fluida viscoelástica. O modelo que adotaremos para descrever a camada inferior é o modelo de Voight. Seguiremos os passos de [Ng and Zhang, 2007].

Descreveremos esse problema em coordenadas Lagrangianas. Denotaremos as posições horizontal e vertical da partícula material, respectivamente, como (α, β) . O eixo α se direciona ao longo da propagação das ondas de superfície e o eixo β verticalmente acima do nível de equilíbrio da superfície livre, como na figura 5.3.

A posição instantânea da partícula, denotada por (x_f, z_f) com $f = w, m$ representando água e lama fluida, respectivamente, é função de α, β e t .

Introduzimos também duas coordenadas locais sobre as camadas limites

$$n_m = \beta + h + d \quad \text{e} \quad n_w = \beta + h = n_m - d,$$

que apontam para cima da camada de lama fluida e de água, respectivamente.

Em [Ng and Zhang, 2007], o deslocamento da interface foi expandido em série de potências de $\epsilon = ka$ como

$$\xi = \epsilon \xi_1 + \epsilon^2 \xi_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{5.22}$$

e a pressão na água e na lama fluida como

$$p_f = \rho_w g h - \epsilon_f \rho_f g (n_m - d) + \epsilon p_{f1} + \epsilon^2 p_{f2} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{5.23}$$

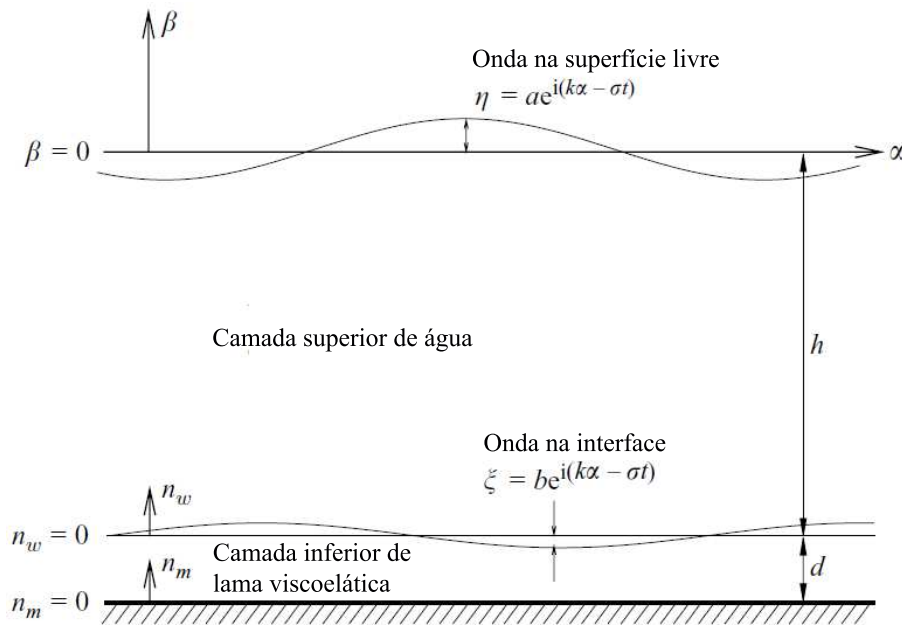


Figura 5.3: Desenho esquemático - [Ng and Zhang, 2007].

onde $\epsilon_w = k\delta_w$ e $\epsilon_m = k\delta_m$. [Ng and Zhang, 2007] observou que a relação entre os três parâmetros pequenos é

$$\epsilon_w \ll \epsilon_m \simeq \epsilon \ll 1. \quad (5.24)$$

Seguindo a mesma descrição do sistema que usamos no capítulo 3, as equações de continuidade e do momento em $\mathcal{O}(\epsilon)$ são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{X}_{f1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{Z}_{f1}}{\partial n_f} = 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{X}_{f1}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_{f1}}{\partial \alpha} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \tau_{fzx1}}{\partial n_f}, \quad (5.26)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_{f1}}{\partial n_f}, \quad (5.27)$$

onde τ_{fzx1} é dado por

$$\tau_{fzx1} = \mu_f \frac{\partial^2 \mathcal{X}_{f1}}{\partial n_f \partial t} + G_f \frac{\partial \mathcal{X}_{f1}}{\partial n_f} \quad (5.28)$$

e G_f é o módulo da rigidez do meio.

Por (3.12), temos que o deslocamento da partícula e a pressão são assintoticamente iguais próximos do fundo, ou seja,

$$(\mathcal{X}_{w1}, p_{w1}) \rightarrow (X_I, P_I), \quad \text{quando } n_w \gg \delta_w, \beta \rightarrow -h, \quad (5.29)$$

onde X_I e P_I satisfazem a equação

$$\frac{\partial^2 X_I}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P_I}{\partial \alpha}, \quad \text{quando } \beta \rightarrow -h. \quad (5.30)$$

Como fizemos no capítulo 3, vamos expressar as quantidades na mesma forma harmônica que a onda da superfície livre

$$(\mathcal{X}_{f1}, \mathcal{Z}_{f1}, p_{f1}, X_I, \xi_1) = (\tilde{x}_f, \tilde{z}_f, \tilde{p}_f, \tilde{X}_I, b) e^{i(k\alpha - \sigma t)}, \quad (5.31)$$

onde $\tilde{x}_f = \tilde{x}_f(n_f)$, $\tilde{z}_f = \tilde{z}_f(n_f)$ e $\tilde{p}_f = \tilde{p}_f(n_f)$ são funções complexas de n_f .

Pela equação (5.27) e pela condição de contorno (5.29), observamos que

$$p_{f1} = P_I = -\rho_w \int \frac{\partial^2 X_I}{\partial t^2} d\alpha, \quad (5.32)$$

onde na última igualdade do lado direito usamos a equação (5.30). [Ng and Zhang, 2007] mostrou que \tilde{X}_I é dado por

$$\tilde{X}_I = \frac{ia}{\sinh(kh) + B \cosh(kh)} + \mathcal{O}(\epsilon_w), \quad (5.33)$$

onde $\epsilon_w = k\delta_w$ e

$$B = k\lambda_m^{-1}[\gamma(\lambda_m d - \sinh(\lambda_m d)) + H(\cosh(\lambda_m d) - 1) + k\lambda_w^{-1}D], \quad (5.34)$$

com D e H dados por (3.23) e (3.24), respectivamente.

Logo, p_{f1} é dado por

$$p_{f1} = \frac{-\rho_w \sigma^2}{k} \frac{a}{\sinh(kh) + B \cosh(kh)} e^{i(k\alpha - \sigma t)} + \mathcal{O}(\epsilon_w). \quad (5.35)$$

Ainda, usando (3.36), obtemos que a amplitude da onda na interface pode ser reescrita como

$$b = -i(B - k\lambda_w^{-1}D)\tilde{X}_I \quad (5.36)$$

Usando (5.18), obtemos que a média do trabalho pode ser expandida como

$$\begin{aligned}
W &= -\frac{1}{T} \left\{ \int_0^T p_{w0} \frac{d\xi_0}{dt} dt + \epsilon \int_0^T \left[p_{w0} \frac{d\xi_1}{dt} + p_{w1} \frac{d\xi_0}{dt} \right] dt \right. \\
&\quad \left. + \epsilon^2 \int_0^T \left[p_{w0} \frac{d\xi_2}{dt} + p_{w1} \frac{d\xi_1}{dt} + p_{w2} \frac{d\xi_0}{dt} \right] dt \right\} \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Notemos que o termo de primeira ordem é nulo, $\xi_0 = 0$. Além disso, o termo

$$\int_0^T p_{w0} \frac{d\xi_1}{dt} dt = 0, \quad (5.38)$$

visto que ξ_1 é harmônico no tempo.

[Zhang and Ng, 2006b] confirmaram que o transporte de massa estável não pode ser sustentado em um meio viscoelástico descrito como um corpo de Voight. A média no tempo do movimento de segunda ordem tenderá a zero exponencialmente. Ou seja, após um certo tempo, o movimento de segunda ordem se torna estacionário. Por isso, consideramos que

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0 \quad (5.39)$$

Podemos expressar o número de onda como $k = k_r + ik_i$ e a amplitude do deslocamento na interface como $b_r + ib_i$. Assim, observamos que o deslocamento da interface $\mathcal{O}(\epsilon)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
Re[\xi] &= (b_r + ib_i) e^{i[(k_r + ik_i)\alpha - \sigma t]} = (b_r + ib_i) e^{i(k_r\alpha - \sigma t)} e^{-k_i\alpha} \\
&= Re\{[b_r \cos(k_r\alpha - \sigma t) - b_i \sin(k_r\alpha - \sigma t) + i(b_r \sin(k_r\alpha - \sigma t) + b_i \cos(k_r\alpha - \sigma t))]\} e^{-k_i\alpha} \\
&= [b_r \cos(k_r\alpha - \sigma t) - b_i \sin(k_r\alpha - \sigma t)] e^{-k_i\alpha}. \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Analogamente a pressão de $\mathcal{O}(\epsilon)$ é dada por

$$p_f = [p_r \cos(k_r\alpha - \sigma t) - p_i \sin(k_r\alpha - \sigma t)] e^{-k_i\alpha}. \quad (5.41)$$

Assim, a média do trabalho no tempo por unidade de área é dada por

$$\begin{aligned}
W &= \frac{-\epsilon^2 \sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} [p_r \cos(k_r \alpha - \sigma t) - ip_r \text{sen}(k_r \alpha - \sigma t)] \\
&\times \frac{\partial}{\partial t} [b_r \cos(k_r \alpha - \sigma t) - b_i \text{sen}(k_r \alpha - \sigma t)] e^{-2k_i \alpha} dt \\
&= \frac{-\epsilon^2 \sigma^2}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} [p_r \cos(k_r \alpha - \sigma t) - ip_i \text{sen}(k_r \alpha - \sigma t)] \\
&\times [b_r \text{sen}(k_r \alpha - \sigma t) + b_i \cos(k_r \alpha - \sigma t)] e^{-2k_i \alpha} dt \\
&= \frac{-\epsilon^2 \sigma}{2} (p_r b_r - p_i b_i) e^{-2k_i \alpha}, \tag{5.42}
\end{aligned}$$

onde

$$p_r = \text{Re} \left[\frac{-\rho_w \sigma^2}{k} \frac{a}{\text{senh}(kh) + B \cosh(kh)} \right], \tag{5.43}$$

$$p_i = \text{Im} \left[\frac{-\rho_w \sigma^2}{k} \frac{a}{\text{senh}(kh) + B \cosh(kh)} \right], \tag{5.44}$$

$$b_r = \text{Re}[-i(B - k\lambda_w^{-1}D)\tilde{X}_I] \tag{5.45}$$

e

$$b_i = \text{Im}[-i(B - k\lambda_w^{-1}D)\tilde{X}_I] \tag{5.46}$$

Para calcularmos a média da energia usaremos (5.19). Logo,

$$E_M = \frac{1}{2} \rho_w g a^2 (e^{-ik_r \alpha})^2 \tag{5.47}$$

Como foi feito em [Kranenburg, 2008], obtemos o novo termo de dissipação da energia dividindo (5.42) por (5.47), ou seja,

$$\mathcal{D} = \frac{-\epsilon^2 \sigma}{2\pi \rho_w g a^2} (p_r b_r - p_i b_i). \tag{5.48}$$

De acordo com [Ng and Zhang, 2007], podemos expandir o número de onda k como

$$k = k_1 + k_2 + \dots, \tag{5.49}$$

onde $k_i = \mathcal{O}(\epsilon_m)^{i-1}$. Com essa opção, foi observado que k_1 satisfaz a relação de dispersão dada por

$$\sigma^2 = g k_1 \tanh(k_1 h) \tag{5.50}$$

e k_2 é complexo e satisfaz

$$k_2 = -\frac{Bk_1}{\sinh(k_1h) \cosh(k_1h) + k_1h}. \quad (5.51)$$

Se desprezarmos a parte imaginária da pressão, o termo de dissipação que obtivemos tem a mesma estrutura que o termo obtido em [Kranenburg, 2008].

Além disso, observemos que ambos os termos de dissipação de energia (5.20) e (5.48) tem a mesma dimensão, como deve ser. Ou seja

$$\mathcal{D} \simeq \left[\frac{\text{s}^{-1}}{\text{kgm}^{-3}\text{ms}^{-2}\text{m}} \right] = \left[\frac{\text{ms}}{\text{kg}} \right]. \quad (5.52)$$

Porém, o ponto mais importante do nosso modelo é o fato de ele ser baseado em uma teoria mais realística, pois consideramos a camada de lama fluida viscoelástica.

6 CONCLUSÃO

Estudamos no capítulo 2 a equação bidimensional para o transporte de sedimentos no fundo de um meio aquático devido à ação de ondas de superfície. Calculamos numericamente os coeficientes de dispersão e convecção deste modelo para um lago circular.

O problema de propagação de ondas de água sobre uma camada de lama fluida viscoelástica foi investigado e a equação que descreve a evolução da concentração de sedimentos, obtida por [Ng and Wu, 2008], foi resolvida numericamente para fundos erodíveis e não erodíveis. Comparamos estes resultados com aqueles onde o fundo é rígido [Mei et al., 1997], unidimensional e com erosão restrita a uma faixa do fundo. Observamos que para camadas finas de lama fluida não há uma variação grande na concentração de sedimentos. Porém, como mostrado nas figuras 3.10 e 3.11, foi constatado um deslocamento da curva que representa a concentração de sedimentos, com o aumento da camada viscoelástica.

Usando um modelo viscoelástico generalizado para um sistema de duas camadas, obtivemos uma nova equação para a descrição da concentração de sedimentos (4.153).

Obtivemos uma expressão de ordem superior para descrever a dissipação de energia de ondas (5.48). Esta descrição se baseia no modelo de um corpo de Voight para um fluido viscoelástico. Esta expressão se diferencia do termo obtido por [Kranenburg, 2008], que considera uma camada de lama fluida viscosa. Esta nova descrição da dissipação de energia pode ser incorporada em modelos de previsão de ondas, tais como SWAN, como um termo fonte na equação do balanço de ação de ondas. Este é um trabalho futuro que segue naturalmente do presente estudo.

Outra perspectiva que o presente trabalho abre é o estudo, através de simulação numérica, do transporte bidimensional de sedimentos, utilizando o novo modelo obtido para este fenômeno, dado pela equação (4.153).

Apêndice A CÁLCULOS REFERENTES ÀS COMPONENTES DA VELOCIDADE DO FLUXO EULERIANO

A.1 Derivadas de U_0

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_0^*}{\partial r} &= ig \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r)(A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \cos \theta \right. \\
&\quad - k_{mn} m J_m'(k_{mn}r)(-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \frac{\text{sen}\theta}{r} \\
&\quad \left. + m J_m(k_{mn}r)(-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \frac{\text{sen}\theta}{r^2} \right] \\
&= ig \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \cos \theta (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{m}{r} \text{sen}\theta (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \quad (A.1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_0^*}{\partial \theta} &= ig \left[k_{mn} J_m'(k_{mn}r) m (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \cos \theta \right. \\
&\quad - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \text{sen}\theta (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \\
&\quad + m^2 J_m(k_{mn}r) (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \frac{\text{sen}\theta}{r} \\
&\quad \left. - m J_m(k_{mn}r) \frac{\cos \theta}{r} (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \text{sen}\theta \right] \\
&= ig \left[\left(\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \text{sen}\theta (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&\quad \left. + \left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) - \frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \right) m \cos \theta (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \quad (A.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_0^*}{\partial x} &= ig \left\{ [k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \cos \theta (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{m}{r} \text{sen}\theta (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \cos \theta \\
&- \left[\left(\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{\text{sen}^2 \theta}{r} (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&+ \left. \left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) - \frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \right) \frac{\text{sen}\theta \cos \theta}{r} (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \left. \right\} \\
&= ig \left\{ [k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \cos^2 \theta \right. \\
&- \left. \frac{\text{sen}^2 \theta}{r} \left(\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \right] (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \\
&+ \left[\left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{m}{r} \text{sen}\theta \cos \theta \right. \\
&+ \left. \left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{m}{r} \text{sen}\theta \cos \theta \right] \\
&\times (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \left. \right\} \\
&= ig \left\{ \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \cos^2 \theta - \frac{\text{sen}^2 \theta}{r} \left(\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \right] \right. \\
&\times (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \\
&+ \left[\left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{m}{r} \text{sen}2\theta \right] \\
&\times (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \left. \right\}. \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_0^*}{\partial y} &= ig \left\{ \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \cos \theta (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \right. \right. \\
&+ \left. \left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{m}{r} \sin \theta (-A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \sin \theta \\
&+ \left[\left(\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \sin \theta (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \right. \\
&+ \left. \left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) - \frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \right) m \cos \theta (-A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \frac{\cos \theta}{r} \left. \right\} \\
&= ig \left\{ \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \sin \theta \cos \theta + \left(\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \right] \right. \\
&\times (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \\
&+ \left[\left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{m}{r} \sin^2 \theta - \left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{m}{r} \cos^2 \theta \right] \\
&\times (-A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta) \left. \right\} \\
&= ig \left\{ \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \sin \theta \cos \theta + \left(\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \right] \right. \\
&\times (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \\
&+ \left[\left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \cos 2\theta \frac{m}{r} \right] \\
&\times (-A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta) \left. \right\} \\
&= ig \left\{ \left[\left(k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) + \frac{m^2}{r^2} J_m(k_{mn}r) - \frac{k}{r} J_m'(k_{mn}r) \right) \sin \theta \cos \theta \right] \right. \\
&\times (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \\
&+ \left[\left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \cos 2\theta \frac{m}{r} \right] \\
&\times (-A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta) \left. \right\} \tag{A.4}
\end{aligned}$$

A.2 Derivadas de V_0

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0^*}{\partial r} &= ig \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \text{sen}\theta (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&+ \left. \left[mk_{mn} J_m'(k_{mn}r) \frac{\cos\theta}{r} - m J_m(k_{mn}r) \frac{\cos\theta}{r^2} \right] (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \\
&= ig \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \text{sen}\theta (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&- \left. \frac{m}{r} \cos\theta \left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0^*}{\partial \theta} &= ig \left[k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \cos\theta (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&- k_{mn} m J_m'(k_{mn}r) \text{sen}\theta (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \\
&- m J_m(k_{mn}r) \frac{\text{sen}\theta}{r} (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \\
&+ \left. m^2 J_m(k_{mn}r) \frac{\cos\theta}{r} (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right] \\
&= ig \left\{ \left[k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \cos\theta + \frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) \cos\theta \right] (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&+ \left. \left[\left(k_{mn} m J_m'(k_{mn}r) \text{sen}\theta - \frac{m}{r} J_m(k_{mn}r) \right) \text{sen}\theta \right] (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right\} \\
&= ig \left[\left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) + \frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) \right) \cos\theta (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&+ \left. \left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) - \frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \right) m \text{sen}\theta (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0^*}{\partial x} &= ig \left\{ [k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \text{sen}\theta \cos\theta (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&\quad - \left. \frac{m}{r} \cos^2\theta \left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \\
&\quad + \left[- \left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) + \frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) \right) \frac{\text{sen}\theta \cos\theta}{r} (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&\quad \left. - \left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) + \frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \right) \frac{m}{r} \text{sen}^2\theta (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \left. \right\} \\
&= ig \left\{ \text{sen}\theta \cos\theta \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) - \frac{k}{r} J_m'(k_{mn}r) + \frac{m^2}{r^2} J_m(k_{mn}r) \right] (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{r} \cos 2\theta \left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) + \frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \right) (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right\} \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0^*}{\partial y} &= ig \left\{ \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \text{sen}^2\theta (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{m}{r} \text{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \right. \\
&\quad + \left[\left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) - \frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) \right) \frac{\cos^2\theta}{r} (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \right. \\
&\quad \left. + \left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) - \frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \right) m \frac{\text{sen}\theta \cos\theta}{r} (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \right] \left. \right\} \\
&= ig \left\{ \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \text{sen}^2\theta + \left(\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) + k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{\cos^2\theta}{r} \right] \right. \\
&\quad \times (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \\
&\quad + \left[-\frac{m}{r} \text{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{J_m'(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m(k_{mn}r) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{r} \text{sen}\theta \cos\theta \left(k_{mn} J_m'(k_{mn}r) - \frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \right) \right] (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \left. \right\} \\
&= ig \left\{ \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \text{sen}^2\theta + \left(-\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) + k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{\cos^2\theta}{r} \right] \right. \\
&\quad \times (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \\
&\quad - \left[\left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) + \frac{J_m(k_{mn}r)}{r} \right) \frac{m}{r} \text{sen}\theta \cos\theta \right] \\
&\quad \times (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \left. \right\} \\
&= ig \left\{ \left[k_{mn}^2 J_m''(k_{mn}r) \text{sen}^2\theta + \left(-\frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) + k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{\cos^2\theta}{r} \right] \right. \\
&\quad \times (A_m \cos m\theta + B_m \text{sen}m\theta) \\
&\quad + \left[\left(\frac{J_m(k_{mn}r)}{r} - k_{mn} J_m'(k_{mn}r) \right) \frac{m}{r} \text{sen}2\theta \right] (-A_m \text{sen}m\theta + B_m \cos m\theta) \left. \right\} \text{(A.8)}
\end{aligned}$$

Apêndice B **ALGUNS CÁLCULOS REFERENTES À OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE**

Para deduzirmos a equação do transporte de sedimentos das partículas no fundo, é necessário calcularmos a derivada da função $\xi(x, t)$, que define a interface entre a água e a lama fluida, em relação ao tempo t .

Note que, por (3.16), temos

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -i\sigma(i\sigma^{-1}\tilde{v}_w) \Big|_{z=0} e^{i(kx-\sigma t)} = \tilde{v}_w \Big|_{z=0} e^{i(kx-\sigma t)} = v_{w1} \Big|_{z=0}. \quad (\text{B.1})$$

e, escrevendo $b = b_r + ib_i$, $N(z) = N_r + iN_i$, $M(z) = M_r + iM_i$ e $K = i(kx - \sigma t)$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\overline{\xi C_1})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\{ \text{Re}[(b_r + ib_i)(\cos K + i\text{sen}(K))] [\text{Re}[(N_r + iN_i)(\cos(K) + i\text{sen}(K))] \} F \frac{\partial C_b}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\{ \text{Re}[(b_r + ib_i)(\cos K + i\text{sen}(K))] \text{Re}[(M_r + iM_i)(\cos(K) + i\text{sen}(K))] \} F' C_b} \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\{ [(b_r \cos K - b_i \text{sen}(K))] [(N_r \cos(K) - N_i \text{sen}(K))] \} F \frac{\partial C_b}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\{ [(b_r \cos K - b_i \text{sen}(K))] \text{Re}[(M_r \cos(K) - M_i \text{sen}(K))] \} F' C_b} \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\{ [(b_r N_r \cos^2 K - (b_i N_r + b_r N_i) \text{sen}(K) \cos(K) + b_i N_i \text{sen}^2(K))] \} F \frac{\partial C_b}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\{ [(b_r M_r \cos^2 K - (b_i M_r + b_r M_i) \text{sen}(K) \cos(K) + b_i M_i \text{sen}^2(K))] \} F' C_b} \\ & = \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial t} (\cos^2 K + 2i \cos K \text{sen} K - \text{sen}^2 K) \\ & = \mathcal{A} \{ -2i\sigma \cos K \text{sen} K + 2\sigma(\cos^2 K - \text{sen}^2 K) + 2i\sigma \text{sen} K \cos K \} \\ & = \frac{2\sigma}{T} \int_0^T (\cos^2 K \text{sen}^2 K) dt \\ & = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde

$$\mathcal{A} = b_r(N_r + M_r) - b_i(N_i + M_i) + i(b_r(N_i + M_i) + b_i(N_r + M_r)),$$

pois,

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \cos^2(kx - \sigma t) dt &= \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \left[\frac{1 + \cos(2(kx - \sigma t))}{2} \right] dt \\
&= \frac{\sigma}{2\pi} \left[\frac{1}{2}t + \frac{\text{sen}(2(kx - \sigma t))}{4} \right] \Big|_0^{2\pi/\sigma} \\
&= \frac{\sigma}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\sigma} + \frac{\text{sen}(2(kx - \sigma \frac{2\pi}{\sigma}))}{4} - \frac{\text{sen}(2(kx))}{4} \right\} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2\pi} \left[\frac{\text{sen}(2(kx - 2\pi))}{4} - \frac{\text{sen}(2(kx))}{4} \right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2\pi} \left[\frac{\text{sen}(2kx) \cos(4\pi) - \cos(2kx) \text{sen}(4\pi)}{4} - \frac{\text{sen}(2(kx))}{4} \right] \\
&= \frac{1}{2}, \tag{B.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \text{sen}^2(kx - \sigma t) dt &= \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \left[\frac{1 - \cos(2(kx - \sigma t))}{2} \right] dt \\
&= \frac{1}{2}, \tag{B.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \text{sen}(kx - \sigma t) \cos(kx - \sigma t) dt &= \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \frac{\text{sen}(2(kx - \sigma t))}{2} dt \\
&= - \frac{\cos(2(kx - \sigma t))}{4} \Big|_0^{2\pi/\sigma} \\
&= - \left[\frac{\cos(2(kx - 2\pi)) - \cos(2kx)}{4} \right] \\
&= - \left[\frac{\cos(kx) \cos(2\pi) - \text{sen}(kx) \text{sen}(2\pi) - \cos(kx)}{4} \right] \\
&= 0 \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{v_{w_1} C_1} \Big|_{z=0} = \overline{\frac{\partial \xi}{\partial t} C_1} \Big|_{z=0} = - \overline{\frac{\partial C_1}{\partial t} \xi} \Big|_{z=0}. \tag{B.6}$$

Desse modo, os três termos de fronteira do lado esquerdo de (3.80) podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
-\overline{v_{w_1} C_1} \Big|_{z=0} - v_f \overline{\xi \frac{\partial C_1}{\partial z}} \Big|_{z=0} - E \overline{\xi \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2}} \Big|_{z=0} &= \overline{\xi \left(\frac{\partial C_1}{\partial t} - v_f \frac{\partial C_1}{\partial z} - E \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} \right)} \Big|_{z=0} \\
&= -\overline{\xi \left(u_{w_1} \frac{\partial C_0}{\partial x} + v_{w_1} \frac{\partial C_0}{\partial z} \right)} \Big|_{z=0}, \tag{B.7}
\end{aligned}$$

por (3.49) e visto que, pela equação da continuidade,

$$C_0 \frac{\partial u_{w_1}}{\partial x} + C_0 \frac{\partial v_{w_1}}{\partial z} = 0.$$

Note que, escrevendo

$$\operatorname{Re} b = b_r, \operatorname{Im} b = b_i, \operatorname{Re} \tilde{u}_w = u_r, \operatorname{Im} \tilde{u}_w = u_i \text{ e } (kx - \sigma t) = K$$

temos

$$\begin{aligned} -\overline{\xi u_{w_1}}|_{z=0} &= -\overline{\operatorname{Re}[be^{i(kx-\sigma t)}] \operatorname{Re}[\tilde{u}_w e^{i(kx-\sigma t)}]} \\ &= \overline{(b_r \cos(K) - b_i \operatorname{sen}(K))(u_r \cos(K) - u_i \operatorname{sen}(K))} \\ &= \overline{b_r u_r \cos^2(K) - b_r u_i \cos(K) \operatorname{sen}(K) - b_i u_r \operatorname{sen}(K) \cos(K) + b_i u_i \operatorname{sen}^2(K)} \\ &= \frac{1}{2}(b_r u_r + b_i u_i) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[b \tilde{u}_w^*], \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

já que

$$\begin{aligned} \overline{\xi v_{w_1}}|_{z=0} &= \frac{1}{2} \overline{\operatorname{Re}[b \tilde{v}_w^*|_{z=0}]} = \frac{1}{2} \overline{\operatorname{Re}[i \sigma^{-1} \tilde{v}_w|_{z=0} \tilde{v}_w^*|_{z=0}]} = \frac{1}{2} \overline{\operatorname{Re}[i \sigma^{-1} \tilde{v}_w \tilde{v}_w^*|_{z=0}]} \\ &= \frac{1}{2} \overline{\operatorname{Re}[i \sigma^{-1} |\tilde{v}_w|^2|_{z=0}]} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\overline{v_{w_1} C_1}|_{z=0} - v_f \xi \overline{\frac{\partial C_1}{\partial z}}|_{z=0} - E \xi \overline{\frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2}}|_{z=0} &= -\overline{\xi u_{w_1}}|_{z=0} \frac{\partial C_b}{\partial x} + \overline{\xi v_{w_1}}|_{z=0} \frac{C_b}{\alpha} \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(b \tilde{u}_w^*)|_{z=0} \frac{\partial C_b}{\partial x}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Assim, dividindo a equação (3.80) por $\langle F \rangle$ e usando (B.9) temos

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle u_{w_2} F \rangle C_b}{\langle F \rangle} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle \overline{u_{w_1} C_1} \rangle}{\langle F \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}(b \tilde{u}_w^*)|_{z=0}}{\langle F \rangle} \frac{\partial C_b}{\partial x} = E \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \quad (\text{B.10})$$

De acordo com Ng(2008),

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{w_2} &= u_L - \overline{\left(\int u_{w_1} dt \right) \frac{\partial u_{w_1}}{\partial x}} - \overline{\left(\int v_{w_1} dt \right) \frac{\partial u_{w_1}}{\partial z}} \\ &= k \sigma^{-1} |\tilde{U}_I|^2 \left\{ \operatorname{Re} \left[D \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_w (z + \lambda_w^{*-1} B^*) \right) e^{-\lambda_w z} - 2D \right] + \frac{1}{4} |D|^2 e^{-2z/\delta_w} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} |D|^2 - \frac{1}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

onde

$$u_L = k\sigma^{-1}|\tilde{U}_I|^2 \left\{ 2\text{Re}[D(e^{-\lambda_w z} - 1)] + \frac{3}{4}|D|^2(e^{-2z/\delta_w} - 1) \right\}.$$

Portanto, u_{w_2} não depende de x . Logo,

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + \frac{\langle u_{w_2} F \rangle}{\langle F \rangle} \frac{\partial C_b}{\partial x} + \frac{\partial \langle \overline{u_{w_1} C_1} \rangle}{\partial x \langle F \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\text{Re}(b\tilde{u}_w^*)|_{z=0}}{\langle F \rangle} \frac{\partial C_b}{\partial x} = E \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \quad (\text{B.12})$$

Portanto,

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + \left[\frac{\langle u_{w_2} F \rangle}{\langle F \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\text{Re}(b\tilde{u}_w^*)|_{z=0}}{\langle F \rangle} \right] \frac{\partial C_b}{\partial x} + \frac{\partial \langle \overline{u_{w_1} C_1} \rangle}{\partial x \langle F \rangle} = E \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \quad (\text{B.13})$$

Agora note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \langle \overline{u_{w_1} C_1} \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \overline{u_{w_1} \left\{ \text{Re}[N(z)e^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial C_b}{\partial x} + \text{Re}[M(z)e^{i(kx-\sigma t)}] C_b \right\}} \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{u_{w_1} \left\{ \text{Re}[N(z)ike^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial C_b}{\partial x} + \text{Re}[N(z)e^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} \right\}} \right\rangle \\ &+ \left\langle \overline{\text{Re}[M(z)ike^{i(kx-\sigma t)}] C_b + \text{Re}[M(z)e^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial C_b}{\partial x}} \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{u_{w_1} \left\{ \text{Re}[N(z)e^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} + \text{Re}[M(z)e^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial C_b}{\partial x} \right\}} \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{u_{w_1} \left\{ \text{Re}[N(z)e^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} + \text{Re}[M(z)e^{i(kx-\sigma t)}] \frac{\partial C_b}{\partial x} \right\}} \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{u_{w_1} \left\{ \text{Re} \left[N(z) \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} e^{i(kx-\sigma t)} dt \right] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} \right.} \right. \\ &+ \left. \left. \text{Re} \left[M(z) \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} e^{i(kx-\sigma t)} dt \right] \frac{\partial C_b}{\partial x} \right\}} \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{u_{w_1} \left\{ \text{Re} \left[N(z) \frac{1}{2} \right] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} + \text{Re} \left[M(z) \frac{1}{2} \right] \frac{\partial C_b}{\partial x} \right\}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \overline{u_{w_1} \left\{ \text{Re} [N(z)] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} + \text{Re} [M(z)] \frac{\partial C_b}{\partial x} \right\}} \right\rangle \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\overline{\text{Re}[N(z)ike^{i(kx-\sigma t)}]} &= \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \text{Re}[(N_r + iN_i)i(\cos(kx - \sigma t) + i\text{sen}(kx - \sigma t))]dt \\
&= -\frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} [N_r\text{sen}(kx - \sigma t) + N_i \cos(kx - \sigma t)]dt \\
&= -\frac{\sigma}{2\pi} [N_r \cos(kx - \sigma t) - N_i\text{sen}(kx - \sigma t)] \Big|_0^{2\pi/\sigma} \\
&= -\frac{\sigma}{2\pi} [N_r(\cos(kx - 2\pi) - \cos(kx)) - N_i(\text{sen}(kx - 2\pi) - \text{sen}(kx))] \Big|_0^{2\pi/\sigma} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.15}$$

e, analogamente,

$$\overline{\text{Re}[M(z)ike^{i(kx-\sigma t)}]} = 0. \tag{B.16}$$

Ainda, note que (B.14) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \langle \overline{u_{w_1} C_1} \rangle &= \left\langle \overline{\text{Re}[\tilde{u}_w e^{i(kx-\sigma t)}]} \left\{ \text{Re}[N(z)\overline{e^{i(kx-\sigma t)}}] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} + \text{Re}[M(z)\overline{e^{i(kx-\sigma t)}}] \frac{\partial C_b}{\partial x} \right\} \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\text{Re}[\tilde{u}_w e^{i(kx-\sigma t)}]} \left\{ \text{Re}[N(z)\overline{e^{i(kx-\sigma t)}}] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} \right\} \right\rangle \\
&+ \left\langle \overline{\text{Re}[\tilde{u}_w e^{i(kx-\sigma t)}]} \left\{ \text{Re}[M(z)\overline{e^{i(kx-\sigma t)}}] \frac{\partial C_b}{\partial x} \right\} \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{(u_r \cos(K) - u_i \text{sen}(K))(N_r \cos(K) - N_i \text{sen}(K))} \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} \right\rangle \\
&+ \left\langle \overline{(u_r \cos(K) - u_i \text{sen}(K))(M_r \cos(K) - M_i \text{sen}(K))} \frac{\partial C_b}{\partial x} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2} \text{Re}[N(z)\tilde{u}_w^*] + \frac{1}{2} \text{Re}[M(z)\tilde{u}_w^*] \right\rangle.
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Substituindo (B.17) em (B.13), temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial C_b}{\partial T} + \left[\frac{\langle u_{w_2} F \rangle}{\langle F \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\text{Re}(b\tilde{u}_w^*)|_{z=0}}{\langle F \rangle} \right] \frac{\partial C_b}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\langle \text{Re}[N(z)\tilde{u}_w^*] \rangle}{F} \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\langle \text{Re}[M(z)\tilde{u}_w^*] \rangle}{\langle F \rangle} \frac{\partial C_b}{\partial x} = E \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2},
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_b}{\partial T} + \left[\frac{\langle u_{w_2} F \rangle}{\langle F \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\text{Re}(b\tilde{u}_w^*)|_{z=0}}{\langle F \rangle} + \frac{1}{2} \frac{\langle \text{Re}[M(z)\tilde{u}_w^*] \rangle}{\langle F \rangle} \right] \frac{\partial C_b}{\partial x} \\ &= \left[E + \frac{1}{2} \frac{\langle \text{Re}[N(z)\tilde{u}_w^*] \rangle}{F} \right] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Logo,

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + \left[\frac{\langle \tilde{u}_{w_2} F \rangle}{\langle F \rangle} + \frac{\text{Re}[\langle \tilde{u}_w^* M \rangle - b\tilde{u}_w^*|_{z=0}]}{2\langle F \rangle} \right] \frac{\partial C_b}{\partial x} = \left[E - \frac{\text{Re}\langle \tilde{u}_w^* N \rangle}{2\langle F \rangle} \right] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}. \quad (\text{B.20})$$

Então

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + U \frac{\partial C_b}{\partial x} = [E - D_T] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \quad (\text{B.21})$$

onde

$$U = \frac{\langle \tilde{u}_{w_2} F \rangle}{\langle F \rangle} + \frac{\text{Re}[\langle \tilde{u}_w^* M \rangle - b\tilde{u}_w^*|_{z=0}]}{2\langle F \rangle} \quad (\text{B.22})$$

e

$$D_T = \frac{\text{Re}\langle \tilde{u}_w^* N \rangle}{2\langle F \rangle}. \quad (\text{B.23})$$

Apêndice C ALGUNS CÁLCULOS REFERENTES AO MODELO VISCOELÁSTICO GENERALIZADO

C.1 Problema perturbativo na lama fluida

Queremos obter a equação para a velocidade horizontal de $\mathcal{O}(1)$. Para isso, primeiramente substituímos as séries perturbadas na equação, tomamos os termos de cada ordem, introduzimos os harmônicos e, por último, separamos cada equação por harmônicos.

Introduzindo as séries perturbadas na equação (4.19), temos que

$$\begin{aligned} & u_{0,t} + \epsilon u_{1,t} + \epsilon \left[(u_0 + \epsilon u_1) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + (v_0 + \epsilon v_1) \left(\frac{\partial u_0}{\partial Z} + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial Z} \right) \right] \\ = & \gamma \frac{\partial p^{(m)}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{a_o}{d} \left[\frac{\partial}{\partial Z} (\tau_0^{xz} + \epsilon \tau_1^{xz}) + \epsilon \frac{d}{a_o} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_0^{xz} + \epsilon \tau_1^{xz}) \right] \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} & u_{0,t} + \epsilon(u_{0,t_1} + u_{1,t}) + \epsilon[u_0 u_{0,x} + \epsilon(u_0 u_{0,x_1} + u_0 u_{1,x} + u_1 u_{0,x}) + v_0 u_{0,Z} + \\ & + \epsilon(v_1 u_{0,Z} + v_0 u_{1,Z})] = -\gamma[p_{0,x}^{(m)} + \epsilon(p_{0,x_1}^{(m)} + p_{1,x}^{(m)}) \\ & + \frac{1}{Re} \frac{a}{d} \left[\tau_{0,Z}^{xz} + \epsilon \tau_{1,Z}^{xz} + \epsilon \frac{d}{a} \tau_{0,x}^{xx} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (C.2)$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} & u_{0,t} + \epsilon(u_{0,t_1} + u_{1,t}) + \epsilon[u_0 u_{0,x} + v_0 u_{0,Z} + \epsilon(u_0 u_{0,x_1} + u_0 u_{1,x} + u_1 u_{0,x} + v_1 u_{0,Z} + v_0 u_{1,Z})] \\ = & -\gamma[p_{0,x}^{(m)} + \epsilon(p_{0,x_1}^{(m)} + p_{1,x}^{(m)}) + \frac{1}{Re} \frac{a}{d} \left\{ \tau_{0,Z}^{xz} + \epsilon(\tau_{1,Z}^{xz} + \frac{d}{a} \tau_{0,x}^{xx}) \right\} \end{aligned} \quad (C.3)$$

Tomando os termos de $\mathcal{O}(1)$,

$$u_{0,t} = -\gamma p_{0,x}^{(m)} + \frac{1}{Re} \frac{a}{d} \tau_{0,Z}^{xz} \quad (C.4)$$

Por (C.4) vemos que a equação de conservação do momento em $\mathcal{O}(1)$ é

$$(-iu_{01}e^{i\psi} + \text{c.c.}) = \gamma(-ik_0p_{01}^{(m)}e^{i\psi} + \text{c.c.}) + \frac{1}{\text{Re } d}a[\tau_{00,Z} + \tau_{01,Z}^{xz}e^{i\psi} + \text{c.c.}] \quad (\text{C.5})$$

Agrupando os termos da equação (C.5) harmônico por harmônico,

$$\tau_{00,Z} = 0 \quad (\text{C.6})$$

e

$$-iu_{01} = -ik_0\gamma p_{01}^{(m)} + \frac{1}{\text{Re } d}a\tau_{01,Z}^{xz}. \quad (\text{C.7})$$

Então, por (4.72),

$$-iu_{01} = -ik_0\gamma p_{01}^{(m)} + \frac{1}{\text{Re } d}\mu u_{01,Z}. \quad (\text{C.8})$$

Pela equação (C.8), temos que

$$\frac{\partial^2 u_{01}}{\partial Z^2} - \lambda^2 u_{01} = -\lambda^2 \frac{k_0\gamma A}{2 \cosh q}, \quad (\text{C.9})$$

onde

$$\lambda^2 = -i \frac{\text{Re } d}{\mu a_0}.$$

De acordo com (4.27), temos a seguinte condição de contorno,

$$u_{01} \Big|_{z=0} = 0. \quad (\text{C.10})$$

Além disso, por (4.55),

$$\tau_{01}^{xz} \Big|_{Z=1} = \mu u_{01,Z} \Big|_{Z=1} = 0. \quad (\text{C.11})$$

Logo,

$$u_{01,Z} \Big|_{Z=1} = 0. \quad (\text{C.12})$$

A solução do problema (C.9)-(C.12) é dada pela soma das soluções da correspondente equação homogênea e da solução particular, dada por

$$u_{01p} = k_0\gamma p_{01}^{(m)}, \quad (\text{C.13})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} u_{01} &= k_0 \gamma p_{01}^{(m)} (1 + G_0 \cosh(\lambda Z) + F_0 \sinh(\lambda Z)) \\ &= \frac{k_0 \gamma A}{2 \cosh q} (1 + G_0 \cosh(\lambda Z) + F_0 \sinh(\lambda Z)). \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Aplicando a condição de contorno (C.10),

$$\frac{k_0 \gamma A}{2 \cosh q} (1 + F_0 \cosh(0) + F_0 \sinh(0)) \Rightarrow G_0 = -1, \quad (\text{C.15})$$

e pela condição (C.12),

$$\mu \frac{k_0 \gamma A \lambda}{2 \cosh q} (-1 \sinh(\lambda) + F_0 \cosh(\lambda)) = 0 \Rightarrow F_0 = \tanh \lambda. \quad (\text{C.16})$$

Portanto, a solução da equação diferencial (C.9) com as condições de contorno (C.10) e (C.12) é dada por

$$u_{01} = \frac{k_0 \gamma A}{2 \cosh q} (1 - \cosh(\lambda Z) + \tanh \lambda \sinh(\lambda Z)). \quad (\text{C.17})$$

C.2 Solução Φ_{01}

Podemos observar que a solução de (4.78) é dada por

$$\Phi_{01} = B_1 e^{k_0 z} + B_2 e^{-k_0 z}, \quad (\text{C.18})$$

onde B_1 e B_2 são constantes a determinar. Por (4.79), obtemos que

$$k_0 B_1 - k_0 B_2 - B_1 - B_2 = 0.$$

Logo,

$$B_2 = B_1 \frac{(k_0 - 1)}{k_0 + 1}.$$

Portanto, a solução Φ_{01} é dada por

$$\Phi_{01} = B_1 e^{kz} + \frac{k_0 - 1}{k_0 + 1} B_1 e^{-kz}. \quad (\text{C.19})$$

Em $z = -H$, usando (4.81),

$$k_0 B_1 e^{-k_0 H} - k_0 B_2 e^{k_0 H} = 0.$$

Então,

$$\frac{k_0 + 1}{k_0 - 1} = e^{2q}. \quad (\text{C.20})$$

Substituindo (C.20) em (C.19), obtemos que

$$\Phi_{01} = B_1 e^{kz} + e^{-(kz+2q)}. \quad (\text{C.21})$$

Ainda, usando (4.80), em $z = 0$,

$$-\frac{A}{2} = -i [B_1 + B_1 e^{-2q}].$$

Portanto,

$$-i \frac{A}{2} = B_1 [1 + e^{-2q}].$$

Multiplicando por e^q em ambos os lados da equação acima obtemos que

$$B_1 = -i \frac{Ae^q}{\cosh q} \quad \text{e} \quad B_2 = -i \frac{Ae^{-q}}{\cosh q}.$$

Então, Φ_{01} é dado por

$$\Phi_{01} = \frac{-iA}{2 \cosh q} \cosh Q. \quad (\text{C.22})$$

C.3 Relação de dispersão

Para obtermos a relação de dispersão para o número de onda k_0 basta usarmos a equação (C.20). Multiplicando e^{-q} em ambos os lados obtemos que

$$(k_0 + 1)e^{-q} - (k_0 - 1)e^q = 0,$$

isto é

$$-k_0 \operatorname{senh} q + \operatorname{cosh} q = 0.$$

Dividindo a equação acima por $\operatorname{cosh} q$ encontramos que a relação de dispersão é dada por

$$k_0 \tanh q = 1.$$

Apêndice D CÁLCULOS COMPLEMENTARES PARA OBTENÇÃO DA CONCENTRAÇÃO DE ORDEM ϵ

A solução do problema de valor de contorno (4.124)-(4.126) é dada por

$$N(z) = A_1 e^{-\beta z/\alpha} + [A_2 \cosh(k_0 z) + A_3 \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha}, \quad (\text{D.1})$$

onde A_1 , A_2 , A_3 , e β são constantes a serem determinadas. Substituindo (4.130) em (4.125), obtemos que

$$\frac{-\beta}{\alpha} A_1 + k_0 A_3 - \frac{1}{\alpha} A_2 + \frac{1}{\alpha} [A_1 + A_2] = 0, \quad \text{em } z = 0. \quad (\text{D.2})$$

Portanto,

$$A_1 = \frac{k_0 \alpha}{\beta - 1} A_3. \quad (\text{D.3})$$

Ainda, substituindo (4.130) na equação (4.124),

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^2}{\alpha^2} A_1 e^{-\beta z/\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} [A_2 \cosh(k_0 z) + A_3 \sinh(k_0 z)] e^{-1/\alpha} - \frac{2k_0}{\alpha} [A_2 \sinh(k_0 z) + A_3 \cosh(k_0 z)] \\ & + k_0^2 [A_2 \cosh(k_0 z) + A_3 \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{-\beta}{\alpha} A_1 e^{-\beta z/\alpha} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\alpha} [A_2 \cosh(k_0 z) + A_3 \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha} + k_0 [A_2 \sinh(k_0 z) + A_3 \cosh(k_0 z)] e^{-z/\alpha} \right\} \\ & + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} \{ A_1 e^{-\beta z/\alpha} + [A_2 \cosh(k_0 z) + A_3 \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha} \} \\ & = \frac{k_0 A}{2E} [\cosh(k_0 z) + \tanh q \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Tomando os coeficientes de $\cosh(k_0 z) e^{-z/\alpha}$,

$$\frac{A_2}{\alpha^2} - \frac{2k_0}{\alpha} A_3 + k_0^2 A_2 - \frac{1}{\alpha^2} A_2 + \frac{k_0}{\alpha} A_3 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} A_2 = \frac{k_0 A}{2E}, \quad (\text{D.5})$$

ou seja,

$$-\frac{k_0}{\alpha} A_3 + \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} \right) A_2 = \frac{k_0 A}{2E}. \quad (\text{D.6})$$

Logo,

$$A_2 = \frac{\frac{k_0 A}{2E} - \frac{k_0}{\alpha} A_3}{\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right)}. \quad (\text{D.7})$$

Tomando os coeficientes de $\sinh(k_0 z)e^{-z/\alpha}$,

$$\frac{1}{\alpha^2} A_3 - \frac{2k_0}{\alpha} A_2 + k_0^2 A_3 - \frac{1}{\alpha^2} A_3 + \frac{k_0}{\alpha} A_2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} A_3 = \frac{k_0 A}{2E} \tanh q, \quad (\text{D.8})$$

ou seja,

$$-\frac{k_0}{\alpha} A_2 + \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right) A_3 = \frac{k_0 A}{2E} \tanh q. \quad (\text{D.9})$$

Substituindo (4.132) na equação acima,

$$-\frac{k_0}{\alpha} \frac{\frac{k_0 A}{2E} - \frac{k_0}{\alpha} A_3}{\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right)} + \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right) A_3 = \frac{k_0 A}{2E} \tanh q. \quad (\text{D.10})$$

Logo,

$$-\frac{k_0}{\alpha} \left[\frac{k_0 A}{2E} - \frac{k_0}{\alpha} A_3 \right] + \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right)^2 A_3 = \frac{k_0 A}{2E} \tanh q \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right). \quad (\text{D.11})$$

Portanto,

$$A_3 \left[\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right)^2 - \frac{k_0^2}{\alpha^2} \right] = \frac{k_0 A}{2E} \left[\tanh q \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right) + \frac{k_0}{\alpha} \right]. \quad (\text{D.12})$$

Logo, A_3 é dado por

$$A_3 = \frac{\frac{k_0 A}{2E} \left[\tanh q \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right) + \frac{k_0}{\alpha} \right]}{\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E}\right)^2 - \frac{k_0^2}{\alpha^2}}. \quad (\text{D.13})$$

Analogamente, consideramos a solução do problema de valor de contorno (4.127)-(4.129) dada por

$$M = B_1 e^{-\theta z/\alpha} + (B_2 \cosh(\sigma z) + B_3 \sinh(\sigma z)) e^{-z/\alpha}, \quad (\text{D.14})$$

onde B_1 , B_2 , B_3 e θ são constantes a serem determinadas. Desse modo, obteremos que

$$B_1 = \frac{\sigma\alpha}{\beta - 1} B_3. \quad (\text{D.15})$$

Substituindo (4.134) na equação (4.127),

$$\begin{aligned} & \frac{\theta^2}{\alpha^2} B_1 e^{-\theta z/\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} [B_2 \cosh(k_0 z) + B_3 \sinh(k_0 z)] e^{-1/\alpha} - \frac{2k_0}{\alpha} [B_2 \sinh(k_0 z) + B_3 \cosh(k_0 z)] \\ & + k_0^2 [B_2 \cosh(k_0 z) + B_3 \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{-\beta}{\alpha} B_1 e^{-\theta z/\alpha} \right. \\ & - \left. \frac{1}{\alpha} [B_2 \cosh(k_0 z) + B_3 \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha} + k_0 [B_2 \sinh(k_0 z) + B_3 \cosh(k_0 z)] e^{-z/\alpha} \right\} \\ & + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} \{ B_1 e^{-\beta z/\alpha} + [B_2 \cosh(k_0 z) + B_3 \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha} \} \\ & = \frac{ik_0 A}{2\alpha E} [\tanh q \cosh(k_0 z) + \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Tomando os coeficientes de $\cosh(k_0 z) e^{-z/\alpha}$,

$$\frac{B_2}{\alpha^2} - \frac{2k_0}{\alpha} B_3 + k_0^2 B_2 - \frac{1}{\alpha^2} B_2 + \frac{k_0}{\alpha} B_3 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} B_2 = \frac{ik_0 A}{2\alpha E} \tanh q, \quad (\text{D.17})$$

ou seja,

$$-\frac{k_0}{\alpha} B_3 + \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} \right) B_2 = \frac{ik_0 A}{2\alpha E} \tanh q. \quad (\text{D.18})$$

Logo,

$$B_2 = \frac{\frac{ik_0 A}{2\alpha E} \tanh q - \frac{k_0}{\alpha} B_3}{\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} \right)}. \quad (\text{D.19})$$

Tomando os coeficientes de $\sinh(k_0 z) e^{-z/\alpha}$,

$$\frac{1}{\alpha^2} B_3 - \frac{2k_0}{\alpha} B_2 + k_0^2 B_3 - \frac{1}{\alpha^2} B_3 + \frac{k_0}{\alpha} B_2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} B_3 = \frac{ik_0 A}{2\alpha E}, \quad (\text{D.20})$$

ou seja,

$$-\frac{k_0}{\alpha} B_2 + \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0 \sigma^2 E} \right) B_3 = \frac{ik_0 A}{2\alpha E}. \quad (\text{D.21})$$

Substituindo (4.136) na equação acima, obtemos que

$$-\frac{k_0}{\alpha} \frac{\frac{ik_0 A}{2\alpha E} \tanh q - \frac{k_0}{\alpha} B_3}{\left(k_0^2 + \frac{ig}{A\sigma^2 E}\right)} + \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0\sigma^2 E}\right) B_3 = \frac{ik_0 a_0}{2\alpha E}, \quad (\text{D.22})$$

ou seja,

$$-\frac{k_0}{\alpha} \left[\frac{ik_0 A}{2\alpha E} \tanh q - \frac{k_0}{\alpha} B_3 \right] + \left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0\sigma^2 E}\right)^2 B_3 = \frac{ik_0 A}{2\alpha E} \left[\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0\sigma^2 E}\right) \right], \quad (\text{D.23})$$

Logo,

$$B_3 \left[\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0\sigma^2 E}\right)^2 + \frac{k_0^2}{\alpha^2} \right] = \frac{ik_0 A}{2\alpha E} \left[\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0\sigma^2 E}\right) + \frac{k_0}{\alpha} \right]. \quad (\text{D.24})$$

Portanto, B_3 é dado por

$$B_3 = \frac{\frac{ik_0 A}{2\alpha E} \left[\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0\sigma^2 E}\right) + \frac{k_0}{\alpha} \right]}{\left(k_0^2 + \frac{ig}{a_0\sigma^2 E}\right)^2 + \frac{k_0^2}{\alpha^2}}. \quad (\text{D.25})$$

Apêndice E TEORIA LINEAR DE ONDAS EM ÁGUA

E.1 Equações governantes do fluido

Para formularmos o problema de valor de contorno com o propósito de deduzirmos características básicas sobre ondas aquáticas de superfície, não iremos considerar a força do vento. A principal força restauradora é a gravidade e, em termos práticos, podemos tomar a variação da densidade da água no tempo e no espaço como sendo pequena. Assim, obtemos as equações de movimento para um fluido incompressível

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{E.1})$$

conhecida como *equação da conservação da massa* (ou equação da continuidade) e

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right) + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (\text{E.2})$$

conhecida como a *equação da conservação de momento* (ou equação de Navier-Stokes), onde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$ é o vetor velocidade, $P(\mathbf{x}, t)$ denota a pressão, ρ a densidade da água. g a aceleração da gravidade, ν a viscosidade cinemática e \mathbf{x} é um ponto em coordenadas cartesianas (x, y, z) com o eixo z verticalmente para cima.

Na água, ν é da ordem $0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ e o termo do Laplaciano em (E.2) é muito pequeno, exceto onde o gradiente da velocidade e vorticidade são muito grandes. Portanto, assumindo que o fluido é não viscoso, a equação (E.2) se reduz a *equação de Euler*:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right) \quad \text{Equação de Euler.} \quad (\text{E.3})$$

Para um fluido invíscido irrotacional, ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0, \quad (\text{E.4})$$

sabemos que existe um *potencial de velocidade* Φ de modo que a velocidade \mathbf{u} pode ser expressa como

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi. \quad (\text{E.5})$$

Assim, por (E.1), temos que o potencial de velocidade satisfaz a *equação de Laplace*

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{E.6})$$

Usando a seguinte identidade vetorial

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = \nabla\frac{\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (\text{E.7})$$

e substituindo (E.5) em (E.3), temos, por (E.4) que

$$\nabla \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 \right) = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right). \quad (\text{E.8})$$

Integrando (E.8) obtemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz = -\frac{P}{\rho} + A(t), \quad (\text{E.9})$$

onde $A(t)$ é uma função arbitrária de t . Essa equação é chamada de *equação de Bernoulli*.

E.2 Condições de Fronteira

Estamos interessados em duas fronteiras: a interface entre o ar e a água, que iremos chamar de superfície livre, e a superfície molhada de um sólido impenetrável, por exemplo a batimetria (relevo do fundo). Assumiremos que ao longo dessas duas fronteiras o fluido se mova tangencialmente. Suponhamos que a equação da fronteira seja

$$F(\mathbf{x}, t) = z - \eta(x, y, t) = 0, \quad (\text{E.10})$$

onde η é a maior medida a partir de $z = 0$. Definiremos a velocidade da partícula \mathbf{x} ao se mover na superfície livre por \mathbf{q} . Desse modo, após um curto espaço de tempo dt , expandindo em série de Taylor, a superfície livre é descrita como

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{q}dt, t + dt) = 0 = F(\mathbf{x}, t) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla F \right) dt + O(dt)^2. \quad (\text{E.11})$$

Assim, pela equação (E.10),

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla F \right) = 0 \quad (\text{E.12})$$

para dt suficientemente pequeno. Como supomos que a partícula se move tangencialmente na superfície livre, temos que ter $\mathbf{u} \cdot \nabla F = \mathbf{q} \cdot \nabla F$. Logo,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F \right) = 0 \text{ em } z = \eta, \quad (\text{E.13})$$

isto é,

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{-\partial \eta}{\partial x}, \frac{-\partial \eta}{\partial y}, \frac{-\partial \eta}{\partial z} \right) = 0. \quad (\text{E.14})$$

Logo,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \text{ em } z = \eta, \quad (\text{E.15})$$

As equações (E.13) ou (E.15) são chamadas de *condição cinemática da fronteira*.

No caso em que a fronteira é a superfície molhada de um sólido estacionário S_B , isto é, o sólido está sempre em contato com o fluido, temos que $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$. Logo, a condição de fronteira nesse sólido é dada por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ em } S_B. \quad (\text{E.16})$$

Porém, para a interface entre ar e água, ainda precisamos de uma condição que relacione as funções Φ e η . Como estamos tratando de um problema na superfície livre, devemos ter a pressão igual à pressão atmosférica P_a . Então, pela equação (E.9) e tomando $A(t) = 0$, temos a *condição dinâmica da fronteira* que é dada por

$$-\frac{P_a}{\rho} = g\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2, \text{ em } z = \eta. \quad (\text{E.17})$$

Tomando a derivada total de (E.17), isto é, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$, obtemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \frac{P_a}{\rho} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + g\eta \right) = 0. \quad (\text{E.18})$$

Por (E.18),

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \frac{P_a}{\rho} + \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right. \\ & \left. + \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \mathbf{u}^2}{2} + g \mathbf{u} \cdot \nabla (\eta) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Usando a identidade

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2, \quad (\text{E.20})$$

temos

$$\frac{D}{Dt} \frac{P_a}{\rho} + \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}^2) + g \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \mathbf{u}^2}{2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = 0. \quad (\text{E.21})$$

Se supormos que a pressão atmosférica é constante, finalmente obtemos

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}^2) + g \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \mathbf{u}^2}{2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = 0. \quad (\text{E.22})$$

Essa é a chamada *condição combinada da fronteira*. Note que além de aparecerem termos não lineares nessa condição, aparece também a posição da superfície livre que é uma incógnita no nosso problema. Por isso, é muito difícil termos uma teoria analítica exata para problemas de ondas de água. Isso nos motiva a fazermos uma aproximação linear.

Ainda, para não nos preocuparmos com a troca de momento e de energia entre o ar e a água, tomaremos regiões suficientemente localizadas de modo que não sofram ação direta do vento.

E.3 Aproximação linear para ondas de pequena amplitude

Para simplificarmos o nosso problema, faremos uma aproximação linear, supondo que as ondas são de pequena amplitude.

Suponhamos que

$$\begin{pmatrix} \lambda/2\pi \\ \sigma^{-1} \\ A \\ A\sigma\lambda/2\pi \end{pmatrix} \text{ caracteriza } \begin{pmatrix} x, y, z, h \\ t \\ \eta \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad (\text{E.23})$$

onde λ , σ e A são os valores típicos de comprimento de onda, frequência e amplitude da superfície livre, respectivamente. Note que tomamos a escala de Φ como $A\sigma\lambda/2\pi$, já que, por (E.5), supondo que vale a relação $u \simeq A/t$,

$$u \simeq \nabla\Phi \Rightarrow \Phi \simeq \frac{\lambda}{2\pi} \frac{A}{\eta}.$$

Estamos supondo ainda que o eixo z é negativo para baixo e que a profundidade é $z = -h$.

Introduziremos as variáveis adimensionais dadas por

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ x, y, z, h \\ t \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aw\lambda\Phi'/2\pi \\ \lambda(x', y', z', h')/2\pi \\ t'/\sigma \\ A\eta' \end{pmatrix}. \quad (\text{E.24})$$

Estamos tomando $\epsilon = 2\pi A/\lambda = 2\pi \times \text{amplitude/comprimento de onda} = \text{inclinação da onda}$.

Substituindo essas variáveis adimensionais nas equações (E.6),

$$\nabla'^2\Phi' = \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \Phi' = 0, \quad (\text{E.25})$$

e na equação (E.16),

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial n'} = 0 \text{ em } z' = -h'. \quad (\text{E.26})$$

Ainda, substituindo as variáveis de (E.24) em (E.15),

$$A\sigma \frac{\partial\eta'}{\partial t'} + \frac{A^2\sigma\lambda}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x'} \frac{\partial\eta'}{\partial x'} + \frac{\partial\Phi'}{\partial y'} \frac{\partial\eta'}{\partial y'} \right) = \frac{A\sigma\lambda}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial\Phi'}{\partial z'}, \quad -h' < z' < \epsilon\eta',$$

ou seja,

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \epsilon \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x'} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi'}{\partial y'} \frac{\partial \eta'}{\partial y'} \right) = \frac{\partial \Phi'}{\partial z'}. \quad (\text{E.27})$$

Do mesmo modo, pela equação (E.17),

$$\frac{\lambda^2 \epsilon \sigma}{2\pi} \frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + g \frac{\lambda \epsilon}{2\pi} \eta' + \frac{1}{2} \left| \frac{\lambda \epsilon \sigma}{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x'}, \frac{\partial \Phi'}{\partial y'}, \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right) \right|^2 = -\frac{P_a}{\rho},$$

ou seja,

$$\frac{\lambda \epsilon \sigma^2}{2\pi} \frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + g \frac{\lambda \epsilon}{2\pi} \eta' + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2 \epsilon^2 \sigma^2}{2\pi} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} \right) = -\frac{P_a}{\rho}. \quad (\text{E.28})$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{2\pi}{w^2 \lambda}$, temos

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + g \eta' + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} \right) = -\frac{2\pi}{\sigma^2 \lambda} \frac{P_a}{\rho}. \quad (\text{E.29})$$

Assim, as equações (E.25), (E.26), (E.27) e (E.29) formulam o problema com variáveis adimensionais. Essas variáveis devem ser de ordem um, já que elas devem refletir as propriedades físicas. A importância de cada termo anterior é mensurada pelos coeficientes que os multiplicam.

Consideraremos ondas de pequena amplitude no sentido que a inclinação das ondas é pequena: $\epsilon \ll 1$. Note que as condições da fronteira de superfície livre podem ser simplificadas pois a diferença entre a superfície livre e o plano horizontal $z' = 0$ é de $O(\epsilon)$. Assim, podemos expandir Φ' e suas derivadas em séries de Taylor.

Tomando o termo de ordem 0 nas equações (E.27) e (E.29), as condições da superfície livre no plano $z' = 0$ se tornam, aproximadamente,

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} = \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \quad (\text{E.30})$$

e

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + g \eta' = -\frac{2\pi}{w^2 \lambda} \frac{P_a}{\rho}. \quad (\text{E.31})$$

Note que nessas condições aparecem somente termos lineares. Desse modo, junto com as equações (E.25) e (E.26), nosso problema completo está linearizado. Retornando às variáveis físicas, temos

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad -h < z < 0, \quad (\text{E.32})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{em } z = -h, \quad (\text{E.33})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \text{em } z = 0, \quad (\text{E.34})$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = -\frac{P_a}{\rho}, \quad \text{em } z = 0. \quad (\text{E.35})$$

Podemos ainda combinar as equações (E.34) e (E.35). Para isso, derivamos a equação (E.35) em relação à variável t

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \text{em } z = 0. \quad (\text{E.36})$$

A seguir, usamos (E.34) e assim obtemos

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (\text{E.37})$$

Para relacionarmos a pressão dentro do fluido com Φ , linearizamos a equação de Bernoulli (E.9) e obtemos

$$P = -\rho g z + p, \quad \text{onde } p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{pressão dinâmica}. \quad (\text{E.38})$$

Porém muitas vezes para resolvermos um problema pode ser necessário ainda condições iniciais e condições de fronteira no corpo e no infinito. Para obtermos essas condições podemos nos basear na teoria do potencial.

Essa teoria nos permite ter um deslocamento finito na direção tangencial perto de uma fronteira sólida, mas na realidade as componentes da velocidade tendem a zero. Portanto, devemos ter uma fina camada limite para suavizar a transição de

zero para um valor finito. Assim, tomando um sistemas de coordenadas local x_N, x'_T e x''_T , onde x_N é normal à superfície sólida e x'_T e x''_T são tangenciais à essa superfície, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_N} \gg \frac{\partial}{\partial x'_T}, \frac{\partial}{\partial x''_T}.$$

Portanto, podemos escrever que

$$\nabla^2 \mathbf{u} \simeq \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_N^2}.$$

Linearizando a equação do momento (E.2) e usando a aproximação acima, obtemos que a velocidade tangencial \mathbf{u}_T satisfaz

$$\frac{\partial \mathbf{u}_T}{\partial t} \simeq \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial x_N^2} - \frac{1}{\rho} \nabla_T p.$$

dentro da camada limite. Com o período de onda como escala de tempo, podemos aproximar a equação acima como

$$\frac{\sigma}{2\pi} \sim \frac{\nu}{\delta^2},$$

ou seja, a espessura da camada limite δ deve ser da ordem

$$\delta \sim \left(\frac{2\nu}{\sigma} \right)^{1/2}. \quad (\text{E.39})$$

E.4 Ondas progressivas em água de profundidade constante

Supondo que a água tem profundidade constante no tempo e no espaço, o problema linearizado é definido pelas equações (E.32), (E.33) e (E.36) (figura (E.1)).

Porém, ainda é muito difícil encontrarmos a solução dessa equação com essas condições de contorno. Por causa dessa dificuldade, suponhamos que a propagação

$$\begin{array}{c}
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \\
 \hline
 z = 0 \\
 \\
 \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \\
 \\
 \hline
 z = -h \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0
 \end{array}$$

Figura E.1: Problema linearizado [Farina, 2006].

das ondas é periódica no tempo e no espaço, ou seja, consideraremos uma forma especial de superfície livre dada por

$$\eta(x, y, t) = \text{Re} A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)}, \quad (\text{E.40})$$

onde i é a unidade imaginária e

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2) \text{ e } \mathbf{x} = (x, y),$$

ou seja, estamos supondo que a onda é periódica no tempo e no espaço. Isto caracteriza a hipótese de *movimento harmônico simples*. Dizemos que $k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$ é o *número de onda*.

Para o movimento harmônico simples com frequência σ , a linearidade do problema nos permite a seguinte separação

$$\left. \begin{array}{l}
 \eta(x, y, t) = \zeta(x, y) \\
 \Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) \\
 \mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z) \\
 P(x, y, z, t) + \rho g z = p(x, y, z)
 \end{array} \right\} e^{-i\sigma t}. \quad (\text{E.41})$$

Desse modo, as equações governantes linearizadas (E.32), (E.34), (E.33) e (E.35) podem ser reduzidas a

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h < z < 0 \quad (\text{E.42})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + i\sigma \zeta = 0 \quad \text{em } z = 0, \quad (\text{E.43})$$

$$g\zeta - i\sigma \phi = -\frac{P_a}{\rho} \quad \text{em } z = 0 \quad (\text{E.44})$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } S_B. \quad (\text{E.45})$$

Suponhamos agora que uma solução deste problema é dada por

$$\phi = \frac{Ag}{\sigma} \Gamma(z) \text{Re}\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\}, \quad (\text{E.46})$$

ou seja,

$$\Phi = \phi e^{-i\sigma t} = \frac{Ag}{\sigma} \Gamma(z) \text{Re}\{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \sigma t)}\}. \quad (\text{E.47})$$

A expressão (E.47) modela uma onda de amplitude $A = \frac{h}{2}$, onde $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência angular, \mathbf{k} é o vetor de onda, T é o período e λ é o comprimento de onda e $k = |\mathbf{k}|$ é o número de onda. De fato, substituindo (E.46) em (E.42),

$$\frac{Ag}{\sigma} \Gamma''(z) \text{Re}\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\} - \frac{Ag}{\sigma} \Gamma(z) k^2 \text{Re}\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\} = 0, \quad (\text{E.48})$$

obteremos uma equação diferencial ordinária dada por

$$\Gamma'' - k^2 \Gamma = 0. \quad (\text{E.49})$$

A solução geral dessa EDO é dada por

$$\Gamma(z) = B_1 \sinh(kz) + B_2 \cosh(kz), \quad (\text{E.50})$$

onde B_1 e B_2 são constantes arbitrárias. Pela condição de fundo dada por (E.33), temos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{Ag}{\sigma} \Gamma'(z) \text{Re}\{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\} = 0, \quad \text{em } z = -h, \quad (\text{E.51})$$

isto é $\Gamma'(z) = 0$ em $z = -h$. Logo,

$$kB_1 \cosh(kh) + B_2 k \sinh(kh) = 0 \Rightarrow B_1 = -B_2 \tanh(kh). \quad (\text{E.52})$$

Assim, definindo $B = B_2$,

$$\Gamma(z) = B_2 (\tanh(kh) \sinh(kz) + \cosh(kz)). \quad (\text{E.53})$$

Reescrevendo (E.53) como

$$\Gamma(z) = B \left(\frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)} \sinh(kz) + \cosh(kz) \frac{\cosh(kh)}{\cosh(kh)} \right), \quad (\text{E.54})$$

ou seja, usando a identidade $\cosh(\alpha + \beta) = \sinh(\alpha) \sinh(\beta) + \cosh(\alpha) \cosh(\beta)$,

$$\Gamma(z) = B \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)}. \quad (\text{E.55})$$

Assumindo que a amplitude das ondas é pequena comparada com o comprimento de onda, e com a profundidade da água, as condições da superfície livre podem ser impostas em $z = 0$. Procuraremos uma solução bi-dimensional que representa uma onda progressiva sem força atmosférica, isto é, $P_a = 0$. Assim, por (E.44), temos que

$$\zeta = \frac{i\sigma}{g} \frac{Ag}{\sigma} B \operatorname{Re}\{e^{ikx}\},$$

logo,

$$\zeta = iAB \operatorname{Re}\{e^{ikx}\}.$$

Definindo $B = -i$, temos que

$$\zeta = A \operatorname{Re}\{e^{ikx}\}. \quad (\text{E.56})$$

Por (E.47) temos ainda que

$$\phi = -i \frac{Ag}{\sigma} \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \operatorname{Re}\{e^{ikx}\} \quad (\text{E.57})$$

Vejamos agora como se dá o deslocamento vertical e horizontal da água. Por (E.1), temos que o campo de velocidades é dado por

$$u = \frac{gkA}{\sigma} \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} e^{ikx}, \quad (\text{E.58})$$

$$v = 0 \quad (\text{E.59})$$

e

$$w = \frac{gkA}{\sigma} \frac{\sinh(k(z+h))}{\cosh(kh)} e^{ikx}. \quad (\text{E.60})$$

E.5 Velocidade de fase, dispersão e refração

A velocidade de fase, a dispersão e a refração são importantes conceitos para a teoria linear de ondas. Veremos a seguir a definição desses conceitos.

Substituindo (E.46) em (E.43), em $z = 0$, temos

$$-\frac{Ag}{\sigma} k \frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)} \sigma \operatorname{Re}\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\} = -i\sigma\eta. \quad (\text{E.61})$$

Por (E.44),

$$-Agk \frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)} \operatorname{Re}\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\} = \frac{\sigma^2}{g} \frac{Ag}{\sigma} \sigma \operatorname{Re}\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\}. \quad (\text{E.62})$$

Logo,

$$k \frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)} = \frac{\sigma^2}{g}. \quad (\text{E.63})$$

ou seja,

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh). \quad (\text{E.64})$$

A equação (E.64) é chamada *relação de dispersão* para ondas lineares em profundidade finita. Esta equação é muito importante na teoria linear de ondas em água. Em particular, (E.64) expressa uma relação única entre σ , k e h . Desse modo, se duas dessas variáveis são conhecidas, a terceira estará unicamente definida. Para entendermos como a onda se propaga, temos que entender a seguinte definição:

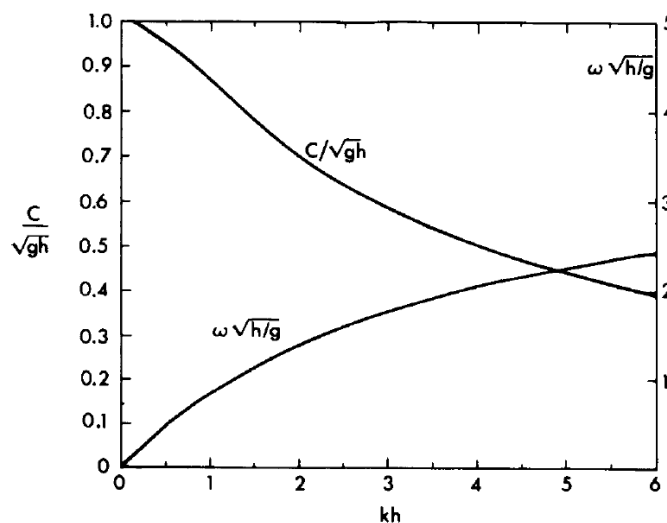


Figura E.2: Curvas de dispersão para ondas progressivas [Mei et al., 2005a].

Definição:

A velocidade de fase (ou velocidade de propagação) \mathcal{C} de uma onda é dada por

$$\mathcal{C} = \frac{\sigma}{k} = \left(\frac{g}{k} \tanh(kh) \right)^{1/2}. \quad (\text{E.65})$$

Na figura (E.2), podemos ver o gráfico de \mathcal{C} na forma adimensional.

Se analisarmos esta expressão, veremos que, para valores de w e k dados, a onda se propagará mais rápido em águas rasas ($kh \ll 1$) do que em águas profundas ($kh \gg 1$). Este fato explica porque as ondas normalmente chegam com as suas cristas paralelas à praia: uma onda em mar aberto com direção oblíqua à praia tenderá a dobrar-se, já que sua parte mais distante da praia, e portanto está sujeita a profundidades maiores, será mais rápida, emparelhando com a parte da onda que estará em águas mais rasas e portanto, mais lenta. Este processo de mudança de direção de ondas se chama *refração*.

Na teoria de ondas aquáticas são feitas classificações em relação à profundidade, as quais são muito importantes para a análise matemática de soluções e pro-

priedades de ondas em águas rasas ou profundas. As funções hiperbólicas que aparecem nas soluções das seções anteriores fornecem a principal simplificação através de seus valores assintóticos para kh muito grandes ou próximos de zero (Tabela E.1).

	$kh \rightarrow 0$	$kh \rightarrow \infty$
$\sinh(kh)$	kh	$e^{kh}/2$
$\cosh(kh)$	1	$e^{kh}/2$
$\tanh(kh)$	kh	1

Tabela E.1: Valores assintóticos das funções hiperbólicas da teoria de ondas lineares

Desse modo, para ondas longas e curtas, as relações do comportamento assintótico da velocidade de fase \mathcal{C} são, por (E.65), respectivamente,

$$\mathcal{C} = (gh)^{1/2}, \quad kh\lambda 1, \quad (\text{E.66})$$

$$\mathcal{C} = (g/k)^{1/2}, \quad kh \gg 1. \quad (\text{E.67})$$

Por último, pela relação de dispersão (E.64), temos os limites

$$\sigma^2 = gk, \quad \text{em águas profundas, } (kh \gg 1), \quad (\text{E.68})$$

$$\sigma = k\sqrt{gh}, \quad \text{em águas rasas, } (kh\lambda 1). \quad (\text{E.69})$$

Conferiremos a hipótese de linearização comparando um termo não-linear com um termo linear, ambos avaliados na superfície livre $z = 0$. Seja kh arbitrário. Pelas equações (E.65) e (E.58),

$$\left(\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}} \right)_{z=0} \sim \left(\frac{uk}{w} \right)_{z=0} \sim \left(\frac{u}{C} \right)_{z=0} = \frac{kA}{\tanh kh} \quad \forall kh. \quad (\text{E.70})$$

Note que para $kh\lambda 1$ essa razão se torna A/h . Assim, em águas rasas a teoria linear é de fato uma aproximação muito restrita, já que para essa aproximação ser boa, teríamos que ter $A \sim h$. Essa comparação será útil no próximo capítulo.

Bibliografia

- [Bass, 2013] Bass, J. (2013). Mini curso - fine sediment dynamics - iph - ufrgs. 12 e 13 de Julho. 2012.
- [Bensoussan et al., 1978] Bensoussan, A., Lions, J., and Papanicolau, G. (1978). *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, Amsterdam.
- [Dalrymple and Liu, 1978] Dalrymple, R. and Liu, P. (1978). Waves over soft mud beds: a two layer fluid model. *Delft University of Technology*, 8:1569–1588.
- [De Wit, 1995] De Wit, P. (1995). *Liquefaction of cohesive sediments caused by waves*, volume 174. Delft University of Technology, Netherlands.
- [Farina, 2006] Farina, L. (2006). *Ondas oceânicas de superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada, São Carlos.
- [Gade, 1958] Gade, H. (1958). Effects of a nonrigid, impermeable bottom on plane surface waves in shallow water. *Journal of Marine Research*, 16(2):61–82.
- [Holthuijsen, 2007] Holthuijsen, H. (2007). *Waves in oceanic and coastal waters*. Cambridge, New York.
- [Huhe and Huang, 1994] Huhe, A. and Huang, Z. (1994). An experimental study of fluid mud rheology - mud properties in hangzhou bay navigation channel. part ii. *Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences*, 1:34–56.
- [Hunt and Johns, 1963] Hunt, J. and Johns, B. (1963). Currents induced by tides and gravity waves. *Tellus*, 15:343–351.
- [Jiang and Mehta, 1995] Jiang, F. and Mehta, A. J. (1995). Mudbanks of the southwest coast of india, part iv. mud viscoelastic properties. *J. Coastal Res.*, 11(3):918–926.

- [Kranenburg, 2008] Kranenburg, W. (2008). *Modelling wave damping by fluid mud*. Delft University of Technology.
- [Krotov, 2008] Krotov, M. (2008). *Water waves over a muddy seabed*. Massachusetts Institute of Technology.
- [Liu and Mei, 1989] Liu, K. and Mei, C. (1989). Effects of wave-induced friction on a muddy seabed modelled as a bingham-plastic fluid. *J. Coastal Res.*, 5(4):777–789.
- [Maa and Mehta, 1988] Maa, J. and Mehta, A. (1988). Soft mud properties: voight model. *J. Waterway*, 114:765–770.
- [Mauri, 1991] Mauri, R. (1991). Dispersion, convection and reaction in porous media. *Phys. Fluids*, A3:743–756.
- [Mehta, 1984] Mehta, A. (1984). *Characterization of cohesive sediment properties and transport processes in estuaries*. Springer-Verlag, New York.
- [Mehta and Patheniades, 1982] Mehta, A. and Patheniades, E. (1982). Resuspension of deposited cohesive sediment beds. *Coastal Eng.*, pages 1121–1131.
- [Mei, 1989] Mei, C. (1989). *The applied dynamics of ocean surface waves*. Singapore - World Scientific.
- [Mei, 1992] Mei, C. (1992). Method of homogenization applied to dispersion in porous media. *Transport in Porous Media*, 9:261–274.
- [Mei and Chian, 1994] Mei, C. and Chian, C. (1994). Dispersion of small suspended particles in a wave boundary layer. *American Meteorological Society*, pages 2479–2495.
- [Mei et al., 1998] Mei, C., Chian, C., and Ye., F. (1998). Transport and resuspension of fine particles in a tidal boundary layer near a small peninsula. *American Meteorological Society*, pages 2313–2331.

- [Mei et al., 1997] Mei, C., Fan, S., and Jin, K. (1997). Resuspension and transport of fine sediments by waves. *J. Geophysical Research*, 102:15.807–15.821.
- [Mei et al., 2010] Mei, C., Krotov, M., Huang, Z., and Huhe, A. (2010). Short and long waves over a muddy seabed. *J. Fluid. Mech.*, 643:33–58.
- [Mei et al., 2005a] Mei, C., Stiassnie, M., and Yue, D. (2005a). *Theory and applications of ocean surface waves, Part 1: Linear Aspects*, volume 23. World Engineering, Singapore.
- [Mei et al., 2005b] Mei, C., Stiassnie, M., and Yue, D. (2005b). *Theory and applications of ocean surface waves, Part 2: Nonlinear Aspects*, volume 23. World Engineering, Singapore.
- [Ng, 2000] Ng, C. (2000). Water waves over a muddy bed: a two-layer stokes’boundary layer model. *Coastal Engineering*, 40:221–242.
- [Ng and Wu, 2008] Ng, C. and Wu, C. (2008). Dispersion of suspended particles in a wave boundary layer over a viscoelastic bed. *International Journal of Engineering Science*, 46:50–65.
- [Ng and Zhang, 2007] Ng, C. and Zhang, X. (2007). Mass transport in water waves over a thin layer of soft viscoelastic mud. *J. Fluid. Mech.*, 573:105–130.
- [Patheniades, 1965] Patheniades, E. (1965). Erosion and deposition of cohesive soils. *J. Hydraul. Div. Amer. Soc. Civ., Engrs.*, 91:105–139.
- [Rubinstein and Mauri, 1986] Rubinstein, J. and Mauri, R. (1986). Dispersion and convection in periodic porous media. *SIAM J. Appl. Math.*, 6:1018–1019.
- [Sanford and Maa, 2001] Sanford, P. and Maa, J. P.-Y. (2001). A unified erosion formulation for fine sediments. *Marine Geology*, 179:9–23.
- [Schläger and Fenics Team, 2013] Schläger, M. and Fenics Team (2013). Fenics project. citado 05 Junho. 2013, <http://fenicsproject.org/>.

- [SWAN Team, 2007] SWAN Team (2007). *Technical Documentation SWAN Cycle III version 40.51AB*. Delft University of Technology, Delft.
- [Visual Numerics Inc., 1997] Visual Numerics Inc. (1997). *Fortran subroutines for mathematical applications*, volume 2. IMSL.
- [Winterwerp et al., 2007] Winterwerp, J., Graaf, R., Groeneweg, J., and Lujendijk, A. (2007). Modelling of wave damping at guyana mud coast. *Coastal Engineering*, 54(3):249–261.
- [Zhang and Ng, 2006a] Zhang, X. and Ng, C. (2006a). Mud-wave interaction: a viscoelastic model. *China Ocean Engineering*, 20:15–26.
- [Zhang and Ng, 2006b] Zhang, X. and Ng, C. (2006b). On the oscillatory and mean motions due to waves in a thin viscoelastic layer. *Wave Motion*, 43:387–405.