UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Um estudo evolutivo e espectral dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko

por

Viviane Klein

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeyssen
Orientador

Porto Alegre, agosto de 2006

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Viviane Klein

Um estudo evolutivo e espectral dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko / Viviane Klein.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2006.

79 p.: il.

Dissertação de Mestrado—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2006. Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeyssen

Área: Vibrações, Controle e Sinais

Palavras chave: teoria de semigrupos de operadores, modelo de Timoshenko, base matricial fundamental

Um estudo evolutivo e espectral dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko

por

Viviane Klein

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeyssen

Aprovada por:

Prof^{a}. Dr^{a}. Rosemaira D. Copetti- UFSM
Prof. Dr. Leonardo Bonorino - PPGMAp/UFRGS
Prof. Dr. Paulo de Ávila Zingano - PPGMat/UFRGS

Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Cristina Varriale
Coordenador do PPGMAp
Porto Alegre, Agosto de 2006

Sumário

RESUMO

Nesta dissertação são abordados os modelos estruturais de Euler-Bernoulli e de Timoshenko com o uso da teoria de semigrupos de operadores fortemente contínuos. Um estudo do espectro do modelo de Timoshenko é realizado com o uso de uma base fundamental de valor inicial para a determinação das autofunções. Uma expansão assintótica é realizada para a equação característica dos autovalores no caso de condições de contorno clássicas.

ABSTRACT

The aim of this work is to study the structural models of the Euler-Bernoulli and Timoshenko beams. At first, they are analyzed by using the tools provided by the semigroup theory of strongly continuous operators. Next,the fundamental basis of initial value is applied to determine the eigenfunctions. Finally, the characteristics equations of the Timoshenko beams with classical boundary values are asymptotic expanded.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho são abordados os modelos estruturais de Euler-Bernoulli e de Timoshenko com condições de contorno não-clássicas utilizando da teoria de semigrupos de operadores fortemente contínuos. Um estudo do espectro do modelo de Timoshenko com condições clássicas é realizado com o uso de uma base fundamental de valor inicial para a determinação das autofunções. Uma expansão assintótica é realizada para a equação característica dos autovalores no caso de condições de contorno clássicas.

O modelo de Timoshenko é o mais completo modelo físico para uma viga longa e fina, onde os movimentos de rotação da seção transversal não são desprezados. Tais vigas tem importantes aplicações em engenharia estrutural e, mais recentemente, no estudo de nanotubos de carbono.

O problema inicial de Cauchy foi formulado como uma equação diferencial linear de primeira ordem num espaço de Hilbert e utilizada para sua resolução a teoria de semigrupos de operadores fortemente contínuos. Para mostrar a geração de um semigrupo através do coeficiente da equação, foram consideradas estimativas de natureza parabólica e hiperbólica.

O estudo do espectro do modelo de Euler-Bernoulli foi realizado utilizando a base de Euler, construída segundo a natureza das raízes do polinômio característico, da equação diferencial associada com a determinação das autofunções. Na determinação das autofunções do modelo de Timoshenko, com condições clássicas e não-clássicas, foi utilizada uma base matricial fundamental, gerada por uma solução que corresponde a função de Green de valor inicial. Isto permitiu evitar a tradicional redução a equações de primeira ordem e manter o estudo no próprio espaço físico do problema. Finalmente, um expansão assintótica é realizada para a equação característica dos autovalores, descrita em termos da base de Euler. Foram consideradas condições de contorno clássicas e freqüências arbitrárias.

O trabalho é organizado como segue.

No capítulo 2 são apresentadas as definições e propriedades elementares da teoria de semigrupos.

No capítulo 3 são caracterizados e discutidos alguns aspectos evolutivos dos modelos estruturais de Euler-Bernoulli e Timoshenko sujeitos a certas condições de contorno não-clássicas, ou com controle de fronteira, e com condições de contorno clássicas.

No capítulo 4 é feito um estudo sobre a existência de autovalores duplos para o sistema de equações de Timoshenko para cinco condições de contorno clássicas, a saber: livre-livre, fixa-livre, apoiada-apoiada, fixa-fixa, fixa-apoiada. Além disso, são estipuladas condições a serem satisfeitas para a existência de autovalores simples e uma fórmula geral para estes.

No capítulo 5 seguimos analisando a viga de Timoshenko, sujeita as condições citadas acima, expandindo assintoticamente o determinante característico do problema para cada uma das condições de contorno e buscando maiores informações sobre os autovalores do problema quando estes são suficientemente grandes.

Por fim se apresentam as referências bibliográficas, onde estão citadas as referências das quais foi extraído o conhecimento necessário para a realização deste trabalho.

2 O PROBLEMA DE CAUCHY E A TEORIA DE SEMIGRUPOS

A teoria de semigrupos de operadores é uma técnica muito utilizada no estudo abstrato de equações diferenciais de primeira ordem formuladas em espaços de Banach, tendo como coeficientes operadores lineares ilimitados. Esta teoria é uma abstração da conhecida técnica operacional da transformada de Laplace ([Ca-Ja]) aplicada no problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ \\ u(0) = u_o. \end{cases} \tag{2.1}$$

Este problema é chamado de Problema de Cauchy com $t \in [0, T]$ Aqui A é um operador linear com domínio num espaço de Banach. Os resultados a seguir, que serão necessários ao longo deste trabalho, podem ser encontrados na literatura usual ([Pa], [B-M], [Dau-Li], [Dav], [Kr], [Ev]).

2.1 Definições e Propriedades Elementares

A seguir, X denota um espaço de Banach complexo com norma $\|\cdot\|$ e A um operador linear com domínio $D(A)$ em X e valores em X.

Definição 2.1. *Seja u_o em $D(A)$. Por uma* ***solução do problema inicial*** *(2.1) entendemos uma função $u = u(t)$ definida num intervalo $[0, T]$ tal que:*

1. *$u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, T]$*
2. *Em cada ponto $t \in [0, T]$, tem-se que*

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - Au(t) \right\| = 0 \tag{2.2}$$

3. $\lim_{t \to 0^+} u(t) = u_o$,

ou seja, $u'(t) = Au(t)$ para todo $t \in [0,T]$ e $u(0) = u_o$.

Definição 2.2. *O problema de Cauchy é **bem-posto** se*

1. *Para cada $u_o \in D(A)$ existe solução única.*

2. *Esta solução depende continuamente sobre o dado inicial no sentido que se os valores iniciais $u_n(0)$ correspondentes as soluções $u_n(t)$ convergem para 0 ($u_n(0) \to 0$, $u_n(0) \in D(A)$), então $u_n(t) \to 0$ para cada $t \in [0,T]$.*

O fato de A ser um operador independente do tempo t permite estabelecer que se um problema é bem-posto em $[0,T]$ então resulta ser bem-posto em $[0,\infty)$.

Suponha que o problema de Cauchy é bem-posto. Para cada $t > 0$ fixo , defina-se o operador $T(t) : D(A) \to X$ através da relação $T(t)u_o = u(t)$ onde $u(t)$ denota a solução do problema de Cauchy com condição inicial u_o em $D(A)$. Pela linearidade e dependência contínua, resulta que $T(t)$ é linear e contínuo em $D(A)$. Além disso, por unicidade segue que $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s > 0$.

Se A é densamente definido, então, o operador $T(t)$ pode ser estendido por continuidade para um operador linear limitado definido em todo o espaço X.

Definição 2.3. *Suponha-se que o problema de Cauchy é bem-posto e que A é densamente definido. Se $u_o = lim_{n\to\infty} u_{o,n}$ com $u_{o,n}$ em $D(A)$, então*

$$u(t) = \lim_{n \to \infty} T(t)u_{o,n}, t > 0 \tag{2.3}$$

*é chamada de **solução generalizada** da equação diferencial $u' = Au$.*

Uma solução generalizada é contínua para $t > 0$, porém não é necessariamente diferenciável. Seus valores podem estar fora do domínio $D(A)$ e pode não convergir para o valor inicial quando t tende para zero. Para evitar estes inconvenientes, o problema deve ser *uniformemente* bem-posto.

Definição 2.4. *Um problema bem-posto é dito* ***uniformenente bem-posto*** *se* $u_n(0) \to 0$ *implica* $u_n(t) \to 0$ *uniformente em* t *num intervalo finito* $[0, T]$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} ||u_n(t)|| = 0. \tag{2.4}$$

Teorema 2.1. *Para um problema uniformemente bem-posto, tem-se que*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x \tag{2.5}$$

para qualquer $x \in X$.

A seguir o estudo de semigrupos de operadores $T(t)$ será realizado independente de equações diferenciais.

Definição 2.5. *Uma família* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores lineares limitados de* X *em* X *é chamada de* ***semigrupo de operadores lineares contínuos*** *se:*

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *para todo* $t, s \geq 0$.

A propriedade relativa a translação é referida como sendo *propriedade de semigrupo.*

Definição 2.6. *Um semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores lineares limitados em* X *é dito um* ***semigrupo uniformemente contínuo*** *se*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Definição 2.7. *Um semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores lineares limitados em* X *é dito um semigrupo* C_0 *ou* ***semigrupo fortemente contínuo*** *se*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$$

para cada $x \in X$.

Definição 2.8. *Um semigrupo fortemente contínuo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito um* ***semigrupo contrativo*** *se*

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall \ t \geq 0.$$

Da propriedade de semigrupo fortemente contínuo, segue que para cada $x \in X$ a função $T(t)x$ é contínua para $t \geq 0$. Um semigrupo $T(t)$ que é gerado por um problema de Cauchy uniformemente bem-posto resulta ser de classe C_0. Será estabelecido que o recíproco também é válido.

O estudo dos semigrupos uniforme contínuos, essencialmente segue o padrão da exponencial de uma matriz no caso finito-dimensional. O seguinte resultado resume as principais propriedades deste tipo de operadores. Um estudo mais aprimorado pode ser encontrado em [Da-Kr].

Teorema 2.2. *Seja* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo uniformemente contínuo em* X.

1. ***Representação****: Existe um operador limitado* A *tal que*

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{2.6}$$

O operador A *é dado pela fórmula*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Reciprocamente, se $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$ *com* A *limitado, então* $T(t)$ *é um semigrupo uniformemente contínuo. Para* $Re(\lambda)$ *suficientemente* *grande, o resolvente*[1] *do operador limitado A pode ser escrito em termos do semigrupo*

$$R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-st}T(t)dt.$$

2. ***Unicidade**: A representação exponencial (2.6) de um semigrupo uniformemente contínuo depende de um único operador limitado A.*

3. ***Ordem e diferenciabilidade***

(a) Existem constantes reais $M \geq 0$ e ω tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

(b) $t \to T(t)$ é diferenciável e

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$$

Com relação ao teorema anterior, uma representação exponencial para semigrupos de classe C_o, nem sempre será possível uma vez que o correspondente operador A não é necessariamente limitado. Contudo alguns dos resultados do teorema podem ser adequadamente estendidos para esta classe de semigrupos. Por exemplo, será possível garantir diferenciabilidade do semigrupo e ser considerada como solução da equação $u' = Au$.

Definição 2.9. *Seja $T(t)$ um semigrupo de operadores limitados. Para $h \geq 0$ seja A_h o operador definido por*

$$A_h x = \frac{T(h)x - x}{h}.$$

[1] *Se A é um operador linear em X, o conjunto resolvente $\rho(A)$ é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador limitado em X. A família de operadores lineares limitados $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ é chamado de resolvente de A.*

Seja $D(A)$ dado por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h \to 0^+} A_h x \text{ existe} \right\}.$$

Define o operador A com domínio $D(A)$ pela fórmula

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} A_h x \text{ para } x \in D(A).$$

O operador A com domínio $D(A)$ é chamado ***gerador infinitesimal*** *do semigrupo $T(t)$.*

Teorema 2.3. *Seja $T(t)$ um semigrupo C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então:*

(a) *Existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

(b) *$\overline{D(A)} = X$ e A é um operador linear fechado. Se $D(A^n)$ é o domínio de A^n, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X.*

(c) *Para $x \in D(A), T(t)x \in D(A)$ e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{2.7}$$

(d) *$T(t)x = \lim_{h \to 0} e^{tA_h}x,\ x \in X$, uniformemente para t em qualquer intervalo finito em $[0, \infty)$.*

Teorema 2.4. *Com as mesmas hipóteses do teorema anterior, tem-se que*

(a) *Se $Re(\lambda) > \omega_o,\ \ \omega_o = \lim_{t\to\infty} log|T(t)|/t$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-st}T(t)dt. \tag{2.8}$$

Em particular, o resolvente é uma função analítica para $Re(\lambda)$ suficientemente grande.

(b) *O problema de Cauchy com dado inicial em $D(A)$ é uniformemente bem-posto. Em particular, se $T(t)$ e $S(t)$ são semigrupos C_0 com o mesmo gerador infinitesimal A, então $T(t) = S(t)$ para $t \geq 0$.*

O fato do resolvente ser a transformada de Laplace do semigrupo, permite obter o semigrupo $T(t)$ em termos de seu gerador inifinitesimal.

Teorema 2.5. *Seja A um operador fechado densamente definido em X.*

1. *Se A é limitado, então para $\gamma > ||A||$ tem-se*

$$T(t) = e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{t\lambda} R(\lambda, A) d\lambda.$$

A convergência é na topologia uniforme de operadores e uniforme em t em intervalos limitados.

2. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$ de classe C_0 tal que $||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$. Então, para $\gamma > max(0, \omega)$ tem-se*

$$i)T(t)x = e^{tA}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{t\lambda} R(\lambda, A) x d\lambda, \quad x \in D(A^2)$$

$$\begin{aligned} ii)T(t)x &= \lim_{n\to\infty} (I - \frac{t}{n}A)^{-n} x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} R(\frac{n}{t}, A)\right]^n x, \ x \in X. \end{aligned}$$

Observações

- Dos resultados anteriores resulta claro que o problema de Cauchy com A fechado é uniformente bem-posto, se, e somente se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0.

- Nas aplicações, o domínio de um gerador infinitesimal é usualmente complicado. Se o semigrupo é conhecido, então pode ser preferível trabalhar num subespaço menor D que seja denso em X e invariante sob ação do semigrupo, isto é, $T(t)D \subseteq D$. Nesta situação, D é também denso em $D(A)$ com respeito da norma do grafo $|||x||| = ||x|| + ||Ax||$. Veja-se [Dav].

- Na formulação de um problema de Cauchy, o coeficiente A pode não ser imediatamente fechado. Então, se A é *fechável*[2] ou o problema é uniformemente bem-posto, então $\overline{A}$ gera um semigrupo C_0.

2.2 Caracterização de Geradores Infinitesimais

A seguir vamos enunciar a caracterização de operadores lineares que geram semigrupos com geradores infinitesimais não necessariamente limitados. Este tipo de gerador aparece no estudo de problemas em espaços de dimensão infinita.

Teorema 2.6 (Hille-Yosida-Phillips). *Seja A um operador linear em X fechado e densamente definido. Então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 se, e somente se existem números reais M e ω tais que para qualquer $\lambda > \omega$, λ está em $\rho(A)$ e*

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, n = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

O seguinte resultado, que vem a ser um corolário do teorema H-Y-P, é conhecido na literatura como o teorema de Hille-Yoshida.

Teorema 2.7 (Hille-Yosida). *Seja A um operador linear em X fechado e densamente definido. Então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo contrativo*

[2] Um operador A é dito fechável se ele possui uma extensão fechada.

$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ se, e somente se $\lambda > 0$ está em $\rho(A)$ e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \ \textit{para} \ \lambda > 0. \tag{2.10}$$

Se o operador A no problema de Cauchy é limitado, então ele é uniformemente bem-posto e o semigrupo é representado na forma $T(t) = e^{tA}$.

Resulta que qualquer problema de Cauchy uniformente bem-posto é, em certa forma, um problema limite em que os coeficientes são operadores limitados.

Teorema 2.8. *O problema de Cauchy $u' = Au, u(0) = u_o \in D(A)$ com A fechado é uniformemente bem-posto, se, e somente se A possui resolvente para $\lambda > 0$ suficientemente grande e que seja o limite de uma seqüência de operadores limitados A_n que comutam entre si tal que*

$$||e^{tA_n}|| \leq Me^{\omega t}, \tag{2.11}$$

para M e ω que independem de n.

Em [Kr] os operadores A_n são definidos justamente como sendo $A_n = -\lambda_n[I - \lambda_n R(\lambda, A)]$.

Corolário 2.8.1. *Um operador linear A é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de forma que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ se, e somente se*

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém o conjunto $\{\lambda : Im\lambda > \omega\}$ e para tal λ

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}. \tag{2.12}$$

Para anunciar o próximo resultado iremos definir, para todo $x \in X$, o conjunto dualidade $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x) = \{x^* : x^* \in X^* \ \ e \ \ \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

Definição 2.10. *Um operador linear A é dito* ***dissipativo*** *se $\forall\ x \in D(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Teorema 2.9. *Um operador linear A é dissipativo se, e somente se $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|$ $\forall x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.*

Teorema 2.10 (Lumer-Phillips). *Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em X.*

(a) Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $Im(\lambda_0 I - A)$, de $\lambda_0 I - A$ é X,então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo contrativo C_0 em X.

(b) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contração em X, então $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in D(A)$ e para todo $x^* \in F(x)$, $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.

Teorema 2.11. *([B-M], pg.142) Seja H um espaço de Hilbert e A um operador linear limitado com domínio $D(A)$ denso em H e com imagem $Im(A) \subset H$. Então, A é gerador infinitesimal de um semigrupo contrativo C_0 $T(t)$,$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ se, e somente se:*

(i)

$$Im(\lambda I - A) = H, \quad \forall\ \lambda > \beta$$

e

(ii)

$$Re\langle Ay, y\rangle \leq \beta\|y\|^2, \ \ \forall\ y \in D(A),$$

onde β é uma constante.

Observação 2.1. *Se $\beta \leq 0$ o operador A é dissipativo e recaímos no Teorema de Lummer-Phillips .*

2.3 Perturbações por um Operador Linear Limitado

Teorema 2.12. *Seja A um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 $T(t)$ em X, satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Se B é um operador linear limitado em X, então $A+B$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 $S(t)$ em X, satisfazendo $\|S(t)\| \leq Me^{(\omega+M\|B\|)t}$.*

2.4 Propriedades espectrais

O espectro de um operador A pode ser relacionado com o espectro do seu resolvente $R(\lambda : A)$. Esta propriedade permite obter, em particular, que operadores definidos em dimensão infinita com resolvente compacto possuam espectro análogo ao espectro de operadores em um espaço finito-dimensional. O espectro resulta ser um conjunto discreto que se acumula no infinito.

Teorema 2.13.

1. *Seja A um operador fechado ilimitado e densamente definido em X. Para $\lambda \notin \sigma(A)$, tem-se*

$$\sigma(R(\lambda : A)) = \{0\} \cup \{(\lambda - z)^{-1} : z \in \sigma(A)\}$$

2. *Seja A um operador fechado em X tal que o resolvente $R(\lambda : A)$ existe e é compacto para algum λ_o. Então, o espectro de A consiste de um conjunto enumerável de autovalores λ_n com multiplicidade finita tais*

que $\lim_{n\to} |\lambda_n| = +\infty$ *e e* $R(\lambda : A)$ *é compacto para qualquer* $\lambda \in \rho(A)$*.(veja [Ka],pg.187)*

Este teorema é bastante utilizado em conexão com operadores diferenciais em que o conjunto resolvente é não vazio e o resolvente pode ser escrito como um operador integral do tipo Fredholm.

Definição 2.11. *Um semigrupo* C_0 $T(t)$ *é dito* ***compacto*** *para* $t > t_0$ *se para todo* $t > t_0$, $T(t)$ *é um operador compacto.*

Teorema 2.14. $T(t)$ *é compacto se, e somente se* $T(t)$ *é contínuo na topologia uniforme de operador para* $t > 0$ *e* $R(\lambda : A)$ *é compacto para* $\lambda \in \rho(A)$*.*

Corolário 2.14.1. *Se* $R(\lambda : A)$ *é compacto para algum* $\lambda \in \rho(A)$ *e se* $T(t)$ *é contínuo na topologia uniforme de operador para* $t > t_0$*, então* $T(t)$ *é compacto para* $t > t_0$*.*

Corolário 2.14.2. $T(t)$ *é um semigrupo compacto se, e somente se* $R(\lambda : A)$ *é compacto para todo* $\lambda \in \rho(A)$*.*

Teorema 2.15. *Se* $T(t)$ *é contínuo na topologia uniforme de operador para* $t > 0$*, então existe uma função* $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *tal que*

$$\rho(A) \supset \{\lambda : \lambda \ = \sigma + i\tau, |\tau| \geq \psi(|\sigma|)\},$$

e

$$\lim_{|\tau|\to\infty} \|R(\sigma + i\tau : A)\| = 0$$

para todo σ *real.*

Corolário 2.15.1. *Para todo* $-\infty < \alpha \leq \beta < \infty$*, a intersecção da faixa* $\alpha \leq Re\lambda \leq \beta$ *com* $\sigma(A)$ *contém no máximo um número finito de autovalores de* A*.*

Observação 2.2. *Note que no corolário acima (2.15.1) foi prova de que se* $T(t)$ *é um semigrupo* C_0 *compacto o espectro* $\sigma(A)$ *de seu gerador infinitesimal consiste somente dos autovalores.*

3 MODELOS ESTRUTURAIS DE EULER-BERNOULLI E TIMOSHENKO

Seja X um espaço de Banach e considere o problema:

$$\dot{u} = Au, \qquad u(0) = u_0 \in X \tag{3.1}$$

Iremos adicionar restrições a A de maneira que a EDO acima tenha uma única solução. É interessante observar que muitas EDP podem ser reescritas como o problema (3.1). Se A for um gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$, então $T(t)x$ é uma solução do problema (3.1).

Iremos necessitar da seguinte definição, ([Ev]):

Definição 3.1. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro não-negativo, fixos. O espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(U)$$

consiste de todas as funções localmente integráveis $u : U \to \mathbb{R}$ tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(U)$.

Observação 3.1. *Se $p = 2$, escrevemos*

$$H^k(U) = W^{k,2} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Note que $H^0(U) = L^2(U)$.

3.1 Um modelo de Euler-Bernoulli com massa atarrachada

Nesta seção iremos considerar o problema de contorno que foi estudada em ([K-Re]) :

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \tag{3.2}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0 \tag{3.3}$$

$$-u_{xxx}(l,t) + mu_{tt}(l,t) = \omega(t) \tag{3.4}$$

onde $m > 0$ é a massa atarrachada e $\omega(t)$ é a força de controle na fronteira aplicada a extremidade livre da viga (veja figura 3.1).

Analisaremos a estabilidade de (3.2) para a lei de controle de *feedback* linear $\omega(t)$

$$\omega(t) = -\alpha u_t(l,t) + \beta u_{xxxt}(l,t) \tag{3.5}$$

onde α, β são constantes positivas.

Iremos definir uma função auxiliar η

$$\eta(t) = -u_{xxx}(l,t) + \frac{m}{\beta}\, u_t(l,t) \tag{3.6}$$

Utilizando (3.6) podemos reescrever a condição (3.4) como

$$\beta\dot{\eta}(t) + \eta(t) + (\alpha - \frac{m}{\beta})u_t(l,t) = 0. \tag{3.7}$$

3.1.1 Caracterização do Problema

Sejam os espaços:

$$\mathcal{V} = \{u : [0,l] \to \mathbb{R} | u \in H^2(0,l), u(0) = u_x(0) = 0\}, \tag{3.8}$$

$$\mathcal{H} = \{(u, v, \eta)^T | u \in \mathcal{V}, v \in L^2(0, l)\ \eta \in \mathbb{R}\}. \tag{3.9}$$

Vamos definir em $\mathcal{H}$ o produto interno:

$$\langle y, \tilde{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^l (u_{xx}\tilde{u}_{xx} + v\tilde{v})dx + K\eta\tilde{\eta}, \tag{3.10}$$

onde $y = (u, v, \eta)^T \in \mathcal{H}, \tilde{y} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta})^T \in \mathcal{H}, K > 0$ é escolhido como

$$K = \frac{\beta^2}{m + \alpha\beta}. \tag{3.11}$$

Agora vamos definir o operador linear ilimitado $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por:

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xxxx} \\ -\frac{1}{\beta}\eta - \frac{1}{\beta}(\alpha - \frac{m}{\beta})v(l) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

onde o domínio do operador A é definido como

$$\begin{aligned} D(A) \ = \ & \{(u, v, \eta)^T | u \in H^4(0, l) \cap \mathcal{V}, v \in \mathcal{V}, \eta \in \mathbb{R} \\ & u_{xx}(l) = 0, \eta = u_{xxx}(l) + \frac{m}{\beta}v(l)\}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Podemos assim reescrever o problema (3.1) como

$$\dot{y} = Ay, \qquad y(0) \in \mathcal{H}, \tag{3.14}$$

onde $y = (u, v, \eta)^T, \eta$ é definido por (3.6) e $v = u_t$. De agora em diante iremos assumir, sem perda de generalidade, que $l = 1$.

Para provar o nosso próximo resultado necessitaremos do teorema de Lax-Milgram ([Ev],pg.297)

Teorema 3.1 (Lax-Milgram). *Seja $B : H \times H \to \mathbb{R}$ um funcional bilinear, onde H é um espaço de Hilbert, para o qual existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que:*

(i)

$$\|B(u,v)\| \leq \alpha\|u\|\|v\| \quad (u, v \in H)$$

e

(ii)

$$B(u,v) \geq \beta\|u\|^2 \quad (u \in H).$$

E seja $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado em H.

Então existe um único elemento $u \in H$ tal que

$$B(u,v) = \langle f, v\rangle$$

para todo $v \in H$.

Teorema 3.2. *O operador A definido em (3.12) gera um semigrupo contrativo C_0 em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Começaremos mostrando que o operador A é dissipativo. Utilizando o produto interno definido (3.10) e integrando por partes e usando (3.6) e (3.11), temos:

$$\begin{aligned}
\langle Ay, y\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1 (u_{xx}v_{xx} - vu_{xxxx})dx - \frac{K}{\beta}\,\eta\left(\eta + \left(\alpha - \frac{m}{\beta}\right)v(1)\right) \quad (3.15)\\
&= -v(1)u_{xxx}(1) - \frac{K}{\beta}\,\eta\left(\eta + \left(\alpha - \frac{m}{\beta}\right)v(1)\right)\\
&= -\frac{K}{\beta}\,u_{xxx}^2(1) - \frac{Km\alpha}{\beta^2}\,v^2(1)\\
&\leq 0
\end{aligned}$$

A seguir mostraremos que $\lambda I - A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é sobrejetivo para $\lambda > 0$.

Seja $z = (f, g, h)^T \in \mathcal{H}$, queremos encontrar $y = (u, v, \eta)^T \in D(A)$ tal que $(\lambda I - A)y = z$. Que é equivalente a resolver o problema:

$$\lambda u - v = f \tag{3.16}$$

$$\lambda v + u_{xxxx} = g \tag{3.17}$$

$$(\lambda + \frac{1}{\beta})\eta + \frac{1}{\beta}(\alpha - \frac{m}{\beta})v(1) = h \tag{3.18}$$

Substituindo (3.17) em (3.16) chegamos a

$$\lambda^2 u + u_{xxxx} = \lambda f + g. \tag{3.19}$$

Usando (3.16) e (3.4), a equação (3.18) pode ser escrita como

$$-\left(\lambda + \frac{1}{\beta}\right) u_{xxx}(l) + \frac{\lambda(\alpha + m\lambda)}{\beta} u(l) = h + \frac{m\lambda + \alpha}{\beta} f(l). \tag{3.20}$$

Portanto, para provar que $\lambda I - A$ é sobrejetiva temos que mostrar a existência de solução do problema:

$$\begin{cases} \lambda^2 u + u_{xxxx} = f^*, \\ u(0) = u_x(0) = u_{xx}(1) = 0, \\ -u_{xxx}(1) + cu(1) = h^*, \end{cases} \tag{3.21}$$

onde

$$\begin{cases} f^* = \lambda f + g \in L^2(0,1), \\ h^* = \dfrac{\beta}{\alpha\beta + 1} h + \dfrac{m\lambda + 1\alpha}{\lambda\beta + 1} f(1) \in \mathbb{R}, \\ c = \dfrac{\lambda(m\lambda + \alpha)}{\lambda\beta + 1} > 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

O problema de contorno não-homogêneo (3.21) é bem-posto para os termos não-homogêneos. Uma maneira de provar isto é através da formulação variacional. A seguir, daremos uma idéia dos passos que são utilizados na literatura [Co-Mor]. A formulação fraca do problema (3.21), que é

$$\int_0^1 u_{xx}\phi_{xx}dx + \lambda^2 \int_0^1 u\phi dx + cu(1)\phi(1) = \int_0^1 f^*\phi dx + h^*\phi(1) \qquad (3.23)$$

para $u \in \mathcal{V}, \forall \phi \in \mathcal{V}$. Obtem-se que a forma bilinear

$$B(u,\phi) = \int_0^1 u_{xx}\phi_{xx}dx + \lambda^2 \int_0^1 u\phi dx + cu(1)\phi(1) \qquad (3.24)$$

é contínua e coerciva, isto é, existem constantes C_1 e C_2 tais que,

(i) $|B(u,u)| \geq C_1|u\|^2$

(ii) $|B(u,\phi)| \leq C_2\|u\|\|\phi\|$.

Assim, pelo teorema de Lax-Milgram sabemos que existe um único $u \in \mathcal{V}$ satisfazendo a formulação fraca do problema. Utilizando regularidade padrão de $u \in H^4(0,1)$ e utilizando um ϕ particular, recuperam-se as condições de contorno em u.

Devido a dependência de v, η em u, segue que $\lambda I - A$ é sobrejetivo. Aplicando o teorema de Lumer-Phillips (2.10) temos que A é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0.

Teorema 3.3. *Seja $T(t)$ o semigrupo contrativo C_0 gerado por A em $\mathcal{H}$. Então existem constantes positivas M e δ tal que:*

$$\|T(t)\|_{L(\mathcal{H})} \leq Me^{-\delta t}, \quad t \geq 0 \qquad (3.25)$$

com a norma induzida pelo produto interno definido em (3.10).

Prova: Vamos definir a função

$$V(t) = tE(t) + \int_0^1 xu_t(x,t)u_x(x,t)dx \qquad (3.26)$$

onde a "energia" $E(t)$ é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\|z(t)\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_t^2(x,t) + u_{xx}^2(x,t))dx + \frac{K}{2}\,\eta^2(t), \tag{3.27}$$

onde $z(t) = (u(\cdot,t), u_t(\cdot,t), \eta(t))^T \in \mathcal{H}$ é a solução de (3.14) e K é dado por (3.11). Assuma que $z(0) \in D(A)$ então, usando a propriedade de semigrupo, $z(t) = T(t)z(0) \in D(A), \forall t \geq 0$. Assim, por (3.1),(3.7),(3.15) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \int_0^1 (u_t(x,t)u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t)u_{xxt}(x,t))dx + K\eta(t)\eta_t(t) \\ &= \langle Az, z\rangle \leq 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz[1] e de Poincarè[2] temos:

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 xu_t(x,t)u_x(x,t)dx\right| &\leq \int_0^1 u_t^2(x,t)dx \int_0^1 u_x^2(x,t)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(x,t) + Cu_{xx}^2(x,t)dx \\ &\leq CE(t),\ C > 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Assim,

$$(t - C)E(t) \leq V(t) \leq (t + C)E(t) \tag{3.30}$$

[1]Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Se x e y são dois vetores em um espaço com produto interno V, então

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

[2]Desigualdade de Poincarè: Seja U um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$.Suponha que $x \in W_0^{1,p}(U)$ para algum $1 \leq p < n$. Então

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^q(U)}$$

para cada $q \in [1, np/(n-p)]$ e C depende somente de n, p, q e U.

Derivando (3.26) e usando (3.1), obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= E(t) + tE(t) + \int_0^1 (xu_{tt}(x,t)u_x(x,t) + xu_{tx}(x,t)u_t(x,t))dx \qquad (3.31)\\ &= E(t) + tE(t) + \int_0^1 (-xu_{xxxx}(x,t)u_x(x,t) + xu_{tx}(x,t)u_t(x,t))dx\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando a condição (3.2) obtemos:

$$\int_0^1 xu_{xxxx}(x,t)u_x(x,t)dx = u_x(1,t)u_{xxx}(1,t) + \frac{3}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx, \qquad (3.32)$$

e

$$\int_0^1 xu_{tx}(x,t)u_t(x,t)dx = \frac{1}{2}u_t^2(1,t) - \frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(x,t)dx \qquad (3.33)$$

Usando (3.3) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz chegamos a

$$u_x^2(1,t) = \left(\int_0^1 u_{xx}dx\right)^2 \leq \int_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx. \qquad (3.34)$$

Também temos as seguintes desigualdades:

$$u_x(1,t)u_{xxx}(1,t) \leq \delta_1 u_x^2(1,t) + \frac{1}{\delta_1}u_{xxx}^2(1,t), \qquad (3.35)$$

onde $\delta_1 > 0$ é uma constante arbitrária, e

$$\eta^2(t) \leq 2u_{xxx}^2(1,t) + 2\frac{m^2}{\beta^2}u_t^2(1,t). \qquad (3.36)$$

Usando (3.28),(3.32)-(3.36) em (3.31), nós obtemos

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq\; & -(1-\delta_1)\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx - \left[\frac{K}{\beta}t - \beta - \frac{1}{\delta_1}\right]u_{xxx}^2(1,t) \qquad (3.37)\\ & - \left[\frac{Km\alpha}{\beta^2}t - \frac{1}{2}\frac{Km^2}{\beta^2}\right]u_t^2(1,t).\end{aligned}$$

Se escolhermos $\delta_1 < 1$, o termo da integral de (3.37) é negativo. Assim, existe uma constante $T > 0$, dependendo somente de K, m, α, β, e δ_1 tal que vale:

$$\dot{V} \leq 0, \qquad t \geq T. \tag{3.38}$$

Agora, de (3.30),(3.28) e (3.38) obtemos que

$$E(t) \leq \frac{T+C}{t-C} E(0), \qquad t > max\{C, T\}. \tag{3.39}$$

Note que $E(t) = \frac{1}{2}\|z(t)\|^2 = \frac{1}{2}\|T(t)z(0)\|^2$; assim de (3.39) segue que $\|T(t)\| < 1$ para $t > 0$ suficientemente grande. Assim, segue da propriedade de semigrupo que (3.25) vale. □

3.1.2 Análise Espectral

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor do operador A e $y = (u, v, \eta)^T \in D(A)$ o autovetor correspondente. Queremos encontrar $y \in D(A)$ tal que $(\lambda I - A)y = 0$. Usando as equações com $z = (0, 0, 0)^T$ obtemos,

$$\begin{cases} \lambda^2 u + u_{xxxx} = 0, \\ u(0) = u_x(0) = u_{xx}(1) = 0, \\ -\left(\lambda + \dfrac{1}{\beta}\right) u_{xxx}(1) + \dfrac{\lambda(\alpha + m\lambda)}{\beta} u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.40}$$

Desta forma podemos encontrar u. Depois calculamos v utilizando a relação $\lambda u - v = 0$, (3.16), e η com a relação (3.6). Utilizando as condições da extremidade inicial podemos facilmente chegar a

$$u(x) = c_1(\cosh(\tau x) - \cos(\tau x)) + c_2(\sinh(\tau x) - \sin(\tau x)), \quad \lambda = i\tau^2 \tag{3.41}$$

Usando as condições de contorno na extremidade x=1. Chegamos ao sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{c} c_1\tau^2(\cosh\tau+\cos\tau)+c_2\tau^2(\sinh\tau+\sin\tau)=0 \\ c_1[q_1(\lambda)\tau^3(\sinh\tau-\sin\tau)+q_2(\lambda)(\cosh\tau-\cos\tau)] \\ +c_2[-q_1(\lambda)\tau^3(\cosh\tau+\cos\tau)+q_2(\lambda)(\sinh\tau-\sin\tau)]=0 \end{array}\right. \tag{3.42}$$

onde

$$q_1(\lambda)=\lambda+\frac{1}{\beta} \qquad q_2(\lambda)=\frac{\lambda(m\lambda+\alpha)}{\beta} \tag{3.43}$$

Diretamente, podemos afirmar que o sistema acima só possui solução não trivial se

$$-q_1(\lambda)\tau^3(1+\cosh\tau\cos\tau)+q_2(\lambda)(\cosh\tau\sinh\tau-\cos\tau\sin\tau)=0 \tag{3.44}$$

As soluções de (3.44) são os autovalores de A e seus respectivos autovetores podem ser encontrados da forma como foi demonstrado no início desta seção.

A seguir faremos a seguinte observação sobre o espectro de A no caso em que $\alpha=m/\beta$. Podemos reescrever (3.44) como

$$\left(\lambda+\frac{1}{\beta}\right)[\tau^3(1+\cosh\tau\cos\tau)+\alpha\lambda(\cosh\tau\sinh\tau-\cos\tau\sin\tau)]=0 \tag{3.45}$$

Segue de (3.45) que $\lambda=-1/\beta$ é um autovalor de A. Para encontrarmos os outros autovalores precisamos determinar as raízes de

$$f(\tau)=\tau^3(1+\cosh\tau\cos\tau)+\alpha\lambda(\cosh\tau\sinh\tau-\cos\tau\sin\tau). \tag{3.46}$$

É conhecido que (3.46) é a equação característica do problema (3.2)-(3.5) quando não há massa atarrachada, isto é, $m=0$ (veja [Ri]).

3.2 Um modelo de Timoshenko com controle de fronteira

Muitos sistemas mecânicos, como artefatos espaciais ou braços de robôs com ligações flexíveis, podem ser modelados como uma combinação de partes elásticas e rígidas. Muitas aplicações espaciais futuras, como uma estação espacial, dependem de materiais leves e com sistemas de controle de alta performance por causa da necessidade de alta precisão pontual e contínua. Para atingir a precisão requerida por estes sistemas, é preciso considerar o efeito das partes flexíveis do sistema. O modelo de viga de Timoshenko é intensamente utilizado para descrever tais sistemas. Neste modelo aparecem duas equações diferenciais acopladas,

$$\begin{cases} \rho\omega_{tt}(x,t) - K(\omega_{xx}(x,t) - \phi_x(x,t)) = 0, \\ I_\rho\phi_{tt}(x,t) - EI\phi_{xx} - K(\omega_x(x,t) - \phi(x,t)) = 0 \end{cases} \tag{3.47}$$

onde $0 < x < l, t > 0$, l é o comprimento de uma viga uniforme, ρ é a densidade, $\omega(x,t)$ é a deflecção da viga em relação ao seu estado de equilíbrio e $\phi(x,t)$ é o ângulo total de rotação da viga na posição x e no tempo t. As constantes I_p e EI são a massa do momento de inércia e o coeficiente de rigidez da seção tranversal, respectivamente, e K é o módulo de cisalhamento de elasticidade. Diferentes condições de contorno podem ser aplicadas a (3.47).

Nesta seção as condições de contorno estudadas serão:

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0 & \phi(0,t) = 0 \\ K(\phi(l,t) - \omega_x(l,t)) = \alpha\omega_t(l,t) & EI\phi_x(l.t) = -\beta\phi_t(l,t) \end{cases} \tag{3.48}$$

onde $\alpha, \beta > 0$ são constantes dependendo do dispositivo de controle .

As condições (3.48) descrevem uma viga com uma extremidade fixa em $x = 0$ e um controle na fronteira na extremidade $x = l$ este problema foi estudado por [Co-Mor].

3.2.1 Caracterização do problema

Sejam os espaços:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} = \ & \{ \quad y = [\omega_1, \omega_2, \phi_1, \phi_2]^T | \omega_1, \phi_1 \in H^1(0,l), \\
& \quad \omega_2, \phi_2 \in L^2(0,l), \omega_1(0) = \phi_1(0) = 0\}, \\
\mathcal{S} = \ & \{ \quad y = [\omega_1, \omega_2, \phi_1, \phi_2]^T | \omega_1, \phi_1 \in H^2(0,l), \omega_2, \phi_2 \in H^1(0,l), \\
& \quad \omega_1(0) = \phi_1(0) = \omega_2(0) = \phi_2(0) = 0, \\
& \quad K(\phi_1(l) - \omega_{1x}(l)) = \alpha\omega_2(l), EI\phi_{1x}(l) = -\beta\phi_2(l)\}.
\end{aligned}$$

Vamos definir o produto interno em $\mathcal{G}$:

$$\langle y, \tilde{y} \rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^l \left\{ \frac{K}{\rho} \omega_{1x}\tilde{\omega}_{1x} + \omega_2\tilde{\omega}_2 + \frac{EI}{I_\rho}\phi_{1x}\tilde{\phi}_{1x} + \phi_2\tilde{\phi}_2 \right\} dx, \tag{3.49}$$

Agora vamos definir o operador linear ilimitado $A : \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ (K/\rho)\partial_{xx} & 0 & -(K/\rho)\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ (K/I_\rho)\partial_x & 0 & (EI/I_\rho)\partial xx - (K/I_\rho)I & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

Podemos assim reescrever o problema (3.47) como

$$\dot{y} = Ay, \tag{3.51}$$

onde $y = [\omega, \omega_t, \phi, \phi_t]^T$ e $l = 1$.

Teorema 3.4. *O operador A definido em (3.50) é gerador infinitesimal de um semi-grupo C_0 em $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Vamos escrever $A = A_0 + A_1$, onde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ (K/\rho)\partial_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & (EI/I_\rho)\partial xx & 0 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

com $D(A_0) = \mathcal{S}$ e,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(K/\rho)\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (K/I_\rho)\partial_x & 0 & -(K/I_\rho)I & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.53}$$

Temos que A_1 é um operador limitado em $\mathcal{G}$. Pelo teorema (2.12), basta provar que A_0 é gerador infinitesimal. Pelo teorema (2.11) precisamos mostrar que:

(i) $\langle A_0 y, y\rangle \leq c\|y\| \quad \forall u \in \mathcal{S}$ e,

(ii) $Im(\lambda I - A_0) = \mathcal{G}$ para $\lambda > c$.

Seja $y = [\omega, \omega_t, \phi, \phi_t]^T \in \mathcal{S}$, integrando por partes e utilizando as condições de contorno para $y \in \mathcal{S}$ temos,

$$
\begin{aligned}
\langle A_0 y, y\rangle_{\mathcal{G}} &= \int_0^1 \left\{ \frac{K}{\rho}(\omega_{1x}\omega_{2x} + \omega_{1xx}\omega_2) + \frac{EI}{I_\rho}(\phi_{1x}\phi_{2x} + \phi_{1xx}\phi_2) \right\} dx \\
&= \frac{K}{\rho}\,\omega_{1x}(1)\omega_2(1) + [\frac{EI}{I_\rho}\,\phi_{1x}(1)\phi_2(1)] \\
&= \frac{K}{\rho}\,\omega_{1x}(1)\frac{K}{\alpha}(\phi_1(1) - \omega_{1x(1)}) - \frac{\beta}{I_\rho}\,\phi_2^2(1) \\
&\leq \frac{K^2}{4\alpha\rho}\,\phi_1^2 \\
&\leq \frac{K^2}{4\alpha\rho}\int_0^1 \phi_{1x}^2 dx \\
&\leq \left(\frac{K^2}{4\alpha\rho}\right)\int_0^1 \phi_{1x}^2 dx \\
&\leq \left(\frac{K^2}{4\alpha\rho}\right)\frac{I_\rho}{EI}\|y\|^2
\end{aligned}
$$

Para terminar iremos mostrar que $\lambda I - A_0$ é sobrejetor para $\lambda > 0$. Dado $y = [f_1, f_2, g_1, g_2] \in \mathcal{G}$ precisamos encontrar $x = [\omega_1, \omega_2, \phi_1, \phi_2] \in \mathcal{S}$ de maneira que:

$$\lambda\omega_1 - \omega_2 = f_1, \tag{3.54}$$

$$\lambda\omega_2 - \frac{K}{\rho}\,\omega_{1xx} = f_2, \tag{3.55}$$

$$\lambda\phi_1 - \phi_2 = g_1 \tag{3.56}$$

$$\lambda\phi_2 - \frac{EI}{I_\rho}\,\phi_{1xx} = g_2 \tag{3.57}$$

Substituindo (3.56) em (3.57) e usando as condições de contorno, chegamos a EDO:

$$
\begin{aligned}
\lambda^2\phi_1 - \frac{EI}{I_\rho}\,\phi_1'' &= g_2 + \lambda g_1 \\
\phi_1(0) = 0, \quad EI\phi_1'(1) &+ \beta\lambda\phi_1(1) = \beta g_1(1)
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

E substituindo (3.54) em (3.55) e usando as condições de contorno do espaço $\mathcal{S}$ obtemos:

$$\begin{cases} \lambda^2\omega_1 - \frac{K}{\rho}\omega_1'' = f_2 + \lambda f_1, \\ \omega_1(0) = 0, \qquad K\phi_1(1) - K\omega_1'(1) = \alpha\lambda\omega_1(1) - \alpha f_1(1) \end{cases}$$

onde (') é a derivada com relação a x.

Podemos facilmente resolver o problema (3.58) encontrando $\phi_1 \in H^2$:

$$\phi_1(x) = c\sinh\mu x - \frac{I_\rho}{\mu EI}\int_0^x (g_2(s) + \lambda g_1(s))\sinh\mu(x-s)ds \tag{3.59}$$

onde $\mu = \lambda(I_\rho/EI)^{1/2}$ e c é unicamente determinado por $EI\phi_1'(1) + \beta\lambda\phi_1(1) = \beta g_1(1)$. Assim, ϕ_2 pode ser calculado por (3.56). Fica claro que $\phi_2 \in H^1$, $\phi_2(0) = 0$ e $EI\phi_{1x}(1) = -\beta\phi_2(1)$.

Da mesma maneira podemos resolver a EDO (3.59). Fica assim, determinado de maneira única $x = [\omega_1, \omega_2, \phi_1, \phi_2] \in \mathcal{S}$ de forma que (3.54)-(3.57) vale.

Portanto, pelo teorema (2.11), temos que A_0 é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. Logo, pelo teorema (2.12), $A = A_0 + A_1$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. □

Teorema 3.5. *Seja $T(t)$ o semigrupo contrativo C_0 gerado por A em $\mathcal{H}$. Então existem constantes positivas M e δ tal que:*

$$\|T(t)\|_{L(\mathcal{H})} \leq Me^{-\delta t}, \quad t \geq 0 \tag{3.60}$$

com a norma induzida pelo produto interno definido em (3.10).

Demonstração. Seja $z_0 \in D(A)$, então $T(t)z_0 \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)z_0 = AT(t)z_0$$

Assim, podemos escrever

$$T(t)z_0 = [\omega(x,t), \omega(x,t)_t, \phi(x,t), \phi(x,t)_t]^T \tag{3.61}$$

onde $\omega(x,t)$ e $\phi(x,t)$ satisfazem o problema (3.47).

Primeiramente vamos dar uma idéia de como será a prova.

Vamos definir uma função

$$F(t) = \mu t\epsilon(t) + G(T(t)z_0) \tag{3.62}$$

onde μ é uma constante dependendo dos coeficientes do problema (3.47)-(3.48) e $\mathcal{G}$ é tal que

$$|G(z)| \leq C\|z\|_{\mathcal{G}}^2, \quad \forall z \in \mathcal{G} \tag{3.63}$$

Utilizando a inequação ([Co-Mor]):

$$\int_0^1 \omega_x^2 dx \leq 2\int_0^1 (\phi - \omega_x)^2 dx + 2\int_0^1 \phi_x^2 dx \tag{3.64}$$

para todo $\phi \in H^1$, $\omega \in H^1$ satisfazendo $\omega(0) = 0$. Foi mostrado em [K-Re] que

$$d_1\|T(t)z_0\|_{\mathcal{G}}^2 \leq \epsilon(t) \leq d_2\|T(t)z_0\|_{\mathcal{G}}^2 \tag{3.65}$$

vale para todo $t > 0$, onde d_1 e d_2 são constantes positivas que dependem somente dos coeficientes de (3.47). Então mostramos que

$$F(t) \leq M_1\|z_0\|_{\mathcal{G}}^2 \tag{3.66}$$

vale para todo $t > 0$, onde M_1 é uma constante positiva que depende somente de α, β e dos coeficientes de (3.47). As equações (3.66) e (3.65) implicam

$$\|T(t)z_0\|_{\mathcal{G}}^2 \leq \frac{1}{t}M_2\|z_0\|_{\mathcal{G}}^2, \quad \forall t > 0. \tag{3.67}$$

Como $\mathcal{S}$ é denso em $\mathcal{G}$, (3.67) implica

$$\|T(t)z\|_{\mathcal{G}} \leq \left[\frac{M_2}{t}\right]^{1/2} \|z_0\|_{\mathcal{G}}, \quad \forall z \in \mathcal{G}. \tag{3.68}$$

Por último, usamos as propriedades de semigrupo e chegamos a (3.60).

Agora segue a demosntração em detalhes:

Vamos construir uma função $F(t)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\mu t}{2}\int_0^1 \rho\omega_t^2 + I_\rho\phi_t^2 + K(\phi-\omega_x)^2 + EI\phi_x^2 dx \qquad (3.69)\\ &+ \rho\int_0^1 x\omega_t\omega_x dx + I_\rho\int_0^1 x\phi_t\phi_x dx - \frac{1}{2+\eta}\rho\int_0^1 \omega\omega_t dx + \frac{1}{2+\eta}I_\rho\int_0^1 \phi\phi_t dx \end{aligned}$$

onde μ e η são constantes positivas que serão determinadas adiante. Derivando (3.69) obtemos

$$\frac{dF}{dt} = \mu J_1 + \mu t J_2 + \sum_{n=3}^{9} J_n \tag{3.70}$$

onde

$$\begin{aligned} J_1 &= \epsilon(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \rho\omega_t^2 + I_\rho\phi_t^2 + K(\phi-\omega_x)^2 + EI\phi_x^2 dx,\\ J_2 &= \int_0^1 \{\rho\omega_t\omega_{tt} + I_\rho\phi_t\phi_{tt} + K(\phi-\omega_x)(\phi_t-\omega_{xt}) + EI\phi_x\phi_{xt}\}dx,\\ J_3 &= \rho\int_0^1 x\omega_t\omega_{xt}dx, \quad J_6 = I_\rho\int_0^1 x\phi_x\phi_{tt}dx\\ J_4 &= \rho\int_0^1 x\omega_x\omega_{tt}dx, \quad J_7 = \frac{1}{2+\eta}I_\rho\int_0^1 \phi\phi_{tt}dx\\ J_5 &= I_\rho\int_0^1 x\phi_t\phi_{tx}dx, \quad J_8 = \frac{1}{2+\eta}I_\rho\int_0^1 \phi_t^2 dx\\ J_9 &= -\frac{1}{2+\eta}\rho\int_0^1 \omega_t^2 dx - \frac{1}{2+\eta}\rho\int_0^1 \omega\omega_{tt}dx \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando (3.47)-(3.48) chegamos a

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^1 \{K\omega_t(\omega_{xx}-\phi_x)+\phi_t(EI\phi_{xx}+K(\omega_x-\phi))+K(\phi-\omega_x)(\phi_t-\omega_{xt})+EI\phi_x\phi_{xt}\}dx\\
&= -\alpha\omega_t(1,t)^2-\beta_t(1,t)^2,\\
J_3 &= \frac{1}{2}\rho\omega_t(1,t)^2-\frac{1}{2}\rho\int_0^1 \omega_t(1,t)^2,\\
J_4 &= \int_0^1 x\omega_x K(\omega_{xx}-\phi_x)dx\\
&= \frac{1}{2}K\omega_x(1,t)^2-\frac{1}{2}K\int_0^1 \omega_x^2dx-K\int_0^1 x\omega_x\phi_x dx\\
J_5 &= \frac{1}{2}I_\rho\phi_t(1,t)^2-\frac{1}{2}I_\rho\int_0^1 \phi_t^2dx\\
J_6 &= \int_0^1 x\phi_x(EI\phi_{xx}-K\phi+K\omega_x)dx\\
&= \frac{1}{2}EI\phi_x(1,t)^2-\frac{1}{2}EI\int_0^1\phi_x^2dx-\frac{1}{2}K\phi(1,t)^2\\
&+ \frac{1}{2}K\int_0^1\phi^2dx-K\int_0^1 x\phi_x\omega_x dx,\\
J_7 &= \frac{1}{2+\eta}\int_0^1 \phi(EI\phi_{xx}-K\phi+K\omega_x)dx\\
&= \frac{1}{2+\eta}EI\phi(1,t)\phi_x(1,t)-\frac{1}{2+\eta}EI\int_0^1\phi_x^2dx\\
&- \frac{1}{2+\eta}K\int_0^1\phi^2dx+\frac{1}{2+\eta}K\phi(1,t)\omega(1,t)\\
&- \frac{1}{2+\eta}\rho\int_0^1\omega_{tt}\omega_x dx-\frac{1}{2+\eta}K\omega_x(1,t)\omega(1,t)\\
&+ \frac{1}{2+\eta}K\int_0^1\omega_x^2dx.
\end{aligned}
$$

Vamos escolher $\eta>0$ de maneira que

$$K\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\eta}\right)\leq\frac{1}{4}EI,$$

e depois escolhemos $\mu>0$ tal que

$$\mu(2K+EI)\leq\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2+\eta}\right)EI,$$

$$2\mu \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\eta}$$

Assim encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &\leq -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2+\eta}\right)EI\int_0^1 \phi_x^2 dx - \frac{K}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\eta}\right)\int_0^1 \omega_x^2 dx \quad (3.71)\\
&- \alpha\mu t\omega_t^2(1,t) - \beta\mu t\phi_t^2(1,t) + \frac{1}{2}\rho\omega_t^2(1,t)\\
&+ \frac{1}{2}K\omega_x^2(1,t) + \frac{1}{2}I_\rho\phi_t^2(1,t) + \frac{1}{2}EI\phi_x^2(1,t)\\
&- \frac{1}{2}K\phi^2(1,t) + \frac{1}{2+\eta}EI\phi(1,t)\phi_x(1,t)\\
&+ \frac{1}{2+\eta}K\phi(1,t)\omega(1,t) - \frac{1}{2+\eta}K\omega_x(1,t)\omega(1,t)
\end{aligned}$$

Utilizando as já conhecidas desigualdades :

$$\phi^2(1,t) \leq \int_0^1 \phi_x^2(x,t)dx,$$

$$\omega^2(1,t) \leq \int_0^1 \omega_x^2(x,t)dx,$$

e as condições de contorno do problema, deduzimos a partir de (3.71) que $\forall t \geq T$,

$$\frac{dF}{dt} \leq 0 \qquad (3.72)$$

onde T é uma constante positiva que depende de α, β e dos coeficientes da equacões (3.47). Segue de (3.72) que vale (3.66). □

3.3 Um modelo de Timoshenko com condições de contorno clássicas

Nesta seção iremos tratar do mesmo problema da seção anterior, a viga de Timoshenko, para as cinco condições de contorno clássicas, [Vu-W-Xu-Y], listadas a seguir:

(B1) livre-livre:

$$\begin{cases} K(\omega_x(0,t) - \phi(0,t)) = 0, & EI\phi_x(0,t) = 0, \\ K(\omega_x(l,t) - \phi(l,t)) = 0, & EI\phi_x(l,t) = 0, \end{cases} \tag{3.73}$$

(B2) fixa-livre:

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0 & \phi(0,t) = 0, \\ K(\omega_x(l,t) - \phi(l,t)) = 0, & EI\phi_x(l,t) = 0, \end{cases} \tag{3.74}$$

(B3) apoiada-apoiada:

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0, & EI\phi_x(0,t) = 0, \\ \omega(l,t) = 0, & EI\phi_x(l,t) = 0, \end{cases} \tag{3.75}$$

(B4) fixa-fixa:

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0, & \phi(0,t) = 0, \\ \omega(l,t) = 0, & \phi(l,t) = 0, \end{cases} \tag{3.76}$$

(B5) fixa-apoiada:

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0, & \phi(0,t) = 0, \\ \omega(l,t) = 0, & EI\phi_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{3.77}$$

3.3.1 Caracterização do Problema

Define o espaço $\mathcal{H} := H^1(0,l) \times L^2(0,l) \times H^1(0,l) \times L^2(0,l)$ com $H^k(0,l)$ $(k = 1, 2)$ sendo o espaço usual de Sobolev de ordem k. Para $Y_1 = [\omega_1, z_1, \phi_1, \psi_1]^T$, $Y_2 = [\omega_2, z_2, \phi_2, \psi_2]^T \; \epsilon \; \mathcal{H}$, o produto interno em $\mathcal{H}$ é definido por

$$\begin{aligned} \langle Y_1, Y_2 \rangle &= \int_0^L K(\omega_1' - \phi_1)\overline{(\omega_2' - \phi_2)}dx + \int_0^L \rho z_1 \overline{z_2} dx + \int_0^L EI\phi_1' \overline{\phi_2'} dx \\ &+ \int_0^L I_\rho \psi_1 \overline{\psi_2} dx + K\omega_1(0)\overline{\omega_2(0)} + EI\phi_1(0)\overline{\phi_2(0)} \end{aligned}$$

e assim fica fácil ver que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert . Definiremos os subespaços de $\mathcal{H}$ por

$$\mathcal{H}_2 := \{Y = [\omega, z, \phi, \psi]^T \epsilon \mathcal{H} | \omega(0) = 0, \phi(0) = 0\},$$
$$\mathcal{H}_3 := \{Y = [\omega, z, \phi, \psi]^T \epsilon \mathcal{H} | \omega(0) = 0\}$$

e temos

$$\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_2 + \{\xi [0, 0, 1, 0]^T | \xi \ \epsilon \ \mathbb{C}\}$$

e

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \{\xi [1, 0, 0, 0]^T + \zeta [0, 0, 1, 0]^T | \xi, \zeta \ \epsilon \ \mathbb{C}\}.$$

Agora vamos considerar a viga de Timoshenko (3.47) com cada uma das condições de contorno clássicas: B_1; B_2; B_3; B_4 e B_5 .

Seja $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_5 = \mathcal{H}_2$; observe que todos $\mathcal{H}_j$, j = 1:5, são subespaços de $\mathcal{H}$. Neles podemos definir o operador $\mathcal{A}_j$ por

$$\mathcal{A}_j \begin{pmatrix} \omega \\ z \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \frac{K}{\rho}(\omega'' - \phi') \\ \psi \\ \frac{EI}{I_\rho}\phi'' + \frac{K}{I\rho}(\omega' - \phi) \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} \omega \\ z \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} \epsilon \ \mathcal{D}(\mathcal{A}_j), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{3.78}$$

com domínios

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = \ & \{ \ \ Y = [\omega,\, z,\, \phi,\, \psi]^T \,\epsilon\, \mathcal{H}_1 |\ \omega, \phi \,\epsilon\, H^2(0,l),\ z, \psi \,\epsilon\, H^1(0,l), \\
& \quad K(\omega'(x) - \phi(x))|_{x=0,\,l} = 0, EI\phi'(x)|_{x=0,\,l} = 0\}, \\
\mathcal{D}(\mathcal{A}_2) = \ & \{ \ \ Y = [\omega,\, z,\, \phi,\, \psi]^T \,\epsilon\, \mathcal{H}_2 |\ \omega, \phi \,\epsilon\, H^2(0,l),\ z, \psi \,\epsilon\, H^1(0,l), \\
& \quad K(\omega'(x) - \phi(x))|_{x=l} = 0, EI\phi'(l) = 0\}, \\
\mathcal{D}(\mathcal{A}_3) = \ & \{ \ \ Y = [\omega,\, z,\, \phi,\, \psi]^T \,\epsilon\, \mathcal{H}_3 |\ \omega, \phi \,\epsilon\, H^2(0,l),\ z, \psi \,\epsilon\, H^1(0,l), \\
& \quad z(l) = \omega(l) = 0, EI\phi'(x)|_{x=0,\,l} = 0\}, \\
\mathcal{D}(\mathcal{A}_4) = \ & \{ \ \ Y = [\omega,\, z,\, \phi,\, \psi]^T \,\epsilon\, \mathcal{H}_4 |\ \omega, \phi \,\epsilon\, H^2(0,l),\ z, \psi \,\epsilon\, H^1(0,l), \\
& \quad z(l) = \omega(l) = 0, \phi(l) = \psi(l) = 0\}, \\
\mathcal{D}(\mathcal{A}_5) = \ & \{ \ \ Y = [\omega,\, z,\, \phi,\, \psi]^T \,\epsilon\, \mathcal{H}_5 |\ \omega, \phi \,\epsilon\, H^2(0,l),\ z, \psi \,\epsilon\, H^1(0,l), \\
& \quad z(l) = \omega(l) = 0, EI\phi'(l) = 0\}.
\end{aligned}
$$

É claro que cada $\mathcal{A}_j$ com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$ é um operador de Timoshenko correspondente a condição (B_j), e que a equação (3.47) com a condição de contorno (B_j) torna-se a sequinte equação evolutiva em $\mathcal{H}_j$:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \mathcal{A}_j Y(t), \qquad t \ > \ 0 \tag{3.79}$$

onde $Y = [\omega(\cdot, t),\, \dot{\omega}(\cdot, t),\, \phi(\cdot, t),\, \dot{\phi}(\cdot, t)]^T$. Utilizando a teoria das equações evolutivas, imediatamente temos os seguintes resultados que serão provados a seguir.

Teorema 3.6. *$\mathcal{A}_j$ é a anti-adjunta em um subespaço invariante com codimensão no máximo 2.*

Demonstração. Seja $Y_1 = [\omega_1, z_1, \phi_1, \psi_1]^T, Y_2 = [\omega_2, z_2, \phi_2, \psi_2]^T \in \mathcal{H}_j$. Aplicando o produto interno definido acima,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_j Y_1, Y_2\rangle &= \int_0^L K(z_1' - \psi_1)\overline{(\omega_2' - \phi_2)}dx + \int_0^L K(\omega_1'' - \phi_1')\overline{z_2}dx + \int_0^L EI\psi_1'\overline{\phi_2}dx \\ &+ \int_0^L [EI\phi_1'' + K(\omega_1' - \phi_1)]\overline{\psi_2}dx + Kz_1(0)\overline{\omega_2(0)} + EI\psi_1(0)\overline{\phi_2(0)}\end{aligned}$$

Integrando por partes e reorganizando os termos chegamos a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_j Y_1, Y_2\rangle = &- \int_0^l \{K(\omega_1' - \phi_1)\overline{(z_2' - \psi_2)}dx + Kz_1\overline{(\omega_2'' - \phi_2')}dx + EI\phi_1'\overline{\psi_2'}dx\} \\ &- \int_0^l \psi_1\overline{[EI\phi_2'' + K(\omega_2' - \phi_2)]}dx - K\omega_1(0)\overline{z_2(0)} - EI\phi_1(0)\overline{\psi_2(0)} + B_j\end{aligned}$$

Isto é,

$$\langle \mathcal{A}_j Y_1, Y_2\rangle = -\langle Y_1, \mathcal{A}_j Y_2\rangle + B_j$$

onde

$$\begin{aligned}Bj &= K\omega_1(0)\overline{z_2(0)} + Kz_1(0)\overline{\omega_2(0)} + EI\phi_1(0)\overline{\psi_2(0)} + EI\psi_1(0)\overline{\phi_2(0)} \\ &+ \Big[Kz_1(x)\overline{(\omega_2'(x) - \phi_2(x))} + K(\omega_1'(x) - \phi_1(x))\overline{z_2(x)} + EI\psi_1(x)\overline{\phi_2'(x)} + EI\phi_1(x)\overline{\psi_2'(x)}\Big]_0^l\end{aligned}$$

Falta mostrar que existe um subespaço $M_j \subseteq D(\mathcal{A}_j)$ de codimensão de no máximo 2 onde $B_j = 0$. Para isso vamos analisar cada $B_j, j = 1:5$.

$$\begin{aligned}B_1 &= K[\omega_1(0)\overline{z_2(0)} + z_1(0)\overline{\omega_2(0)}] + EI[\phi_1(0)\overline{\psi_2(0)} + \psi_1(0)\overline{\phi_2(0)}], \\ B_2 &= K[-z_1(0)\overline{\omega_2'(0)} + \omega_1'(0)\overline{z_2(0)}] + EI[-\psi_1(0)\overline{\phi_2'(0)} - \phi_1'(0)\overline{\psi_2(0)}], \\ B_3 &= K[z_1(0)\overline{(\omega_2'(0) - \phi_2(0))} - (\omega_1'(0) - \phi_1(0))\overline{z_2(0)}] + EI[\phi_1(0)\overline{\psi_2(0)} + \psi_1(0)\overline{\phi_2(0)}], \\ B_4 &= K[\omega_1'(0)\overline{z_2(0)} - z_1(0)\overline{\omega_2'(0)}] + EI[-\phi_1'(0)\overline{\psi_2(0)} - \psi_1(0)\overline{\phi_2'(0)}], \\ B_5 &= B_2.\end{aligned}$$

Podemos definir,

$$M_1 = \{Y = [\omega, z, \phi, \psi]^T \in \mathcal{H}_1 | \omega(0) = \phi(0) = 0\},$$
$$M_2 = \{Y = [\omega, z, \phi, \psi]^T \in \mathcal{H}_2 | z(0) = \psi(0) = 0\},$$
$$M_3 = \{Y = [\omega, z, \phi, \psi]^T \in \mathcal{H}_3 | \omega(0) = z(0) = 0\},$$
$$M_4 = \{Y = [\omega, z, \phi, \psi]^T \in \mathcal{H}_4 | z(0) = \psi(0) = 0\},$$
$$M_5 = \{Y = [\omega, z, \phi, \psi]^T \in \mathcal{H}_5 | z(0) = \psi(0) = 0\}.$$

Assim cada M_j é claramente um subespaço invariante de $\mathcal{H}_j$ de codimensão no máximo 2. Observe que a escolha dos M_j's não é única. $\square$

Teorema 3.7. *$\sigma(\mathcal{A}_j)$ é simétrico com respeito ao eixo real e*

$$\sigma(\mathcal{A}_j) = \{i\eta_n \,|\, n = (0), \pm 1, \pm 2, ..., \eta_{-n} = -\eta_n\},$$

com $\eta_n > 0$ real para todo $n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \infty$

Demonstração. Uma prova detalhada pode ser encontrada em [Cos],pg.94. $\square$

Teorema 3.8. *Seja A um operador fechado em X com resolvente não-vazio. Então, A tem resolvente compacto se, e somente se, a indentidade de $D(A)$ em X é compacta.*

Definição 3.2. *Sejam X e Y espaços de Banach, $X \subseteq Y$. Dizemos que X esta* ***imersamente compacto*** *em Y, e denotamos por $X \subset\subset Y$ se :*

(a) $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$, para alguma constante C; e

(b) $I : X \to Y$, o operador identidade de X em Y é compacto.

Teorema 3.9 (Rellich). *Seja Ω uma região limitada de classe C^m em $\mathbb{R}^n$ e $0 \leq j < m$, $1 < p < \infty$. Então $W_p^m(\Omega)$ é imersamente compacto em $W_p^j(\Omega)$*

Teorema 3.10. *O operador $\mathcal{A}_2$ possui resolvente compacto.*

Demonstração. Vamos mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A}_2)$. Dado $V = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T \in \mathbb{H}$ queremos encontrar $Y = [\omega, z, \phi, \psi]^T \in D(A_2)$ tal que $A_2 Y = V$, ou seja, tal que

$$z = f_1 \tag{3.80}$$

$$\frac{K}{\rho}(\omega''(x) - \phi'(x)) = f_2(x) \tag{3.81}$$

$$\psi(x) = f_3(x) \tag{3.82}$$

$$\frac{EI}{I_\rho}\phi''(x) + \frac{K}{I_\rho}(\omega'(x) - \phi(x)) = f_4(x) \tag{3.83}$$

Lembrando que

$$\mathcal{H}_2 := \{Y = [\omega, z, \phi, \psi]^T \epsilon \mathcal{H} | \omega(0) = 0, \phi(0) = 0\} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}_2) = \{Y = [\omega,\, z,\, \phi,\, \psi]^T \,\epsilon\, \mathcal{H}_2 |\ \omega, \phi \,\epsilon\, H^2(0,1),\, z, \psi \,\epsilon\, H^1(0,1), \\ K(\omega'(x) - \phi(x))|_{\,x=0,\,1} = 0, EI\phi'(1) = 0\} \end{aligned}$$

Integrando a equação (3.81) e usando (3.84) chegamos a

$$\frac{K}{\rho}(\omega'(x) - \phi(x)) = \int_0^x f_2(\tau)d\tau \tag{3.85}$$

Substituindo em (3.83) temos

$$\frac{EI}{I_\rho}\phi''(x) = f_4(x) - \frac{\rho}{I_\rho}\int_0^x f_2(\tau)d\tau \tag{3.86}$$

Integrando (3.86) e usando que $EI\phi'(1) = 0$

$$-\frac{EI}{I_\rho}\phi'(x) = \int_x^1 [f_4(\xi) - \frac{\rho}{I_\rho}\int_0^\xi f_2(\tau)d\tau]d\xi \tag{3.87}$$

Integrando novamente e usando $\phi(0) = 0$

$$-\frac{EI}{I_\rho}\phi(x) = \int_0^x \int_s^1 [f_4(\xi) - \frac{\rho}{I_\rho}\int_0^\xi f_2(\tau)d\tau]d\xi ds \tag{3.88}$$

Desta forma $\phi(x)$ fica determinado de forma única e segue de (3.84) e de $\omega(0) = 0$

$$\omega(x) = \int_0^x [\phi(\xi) + \int_0^\xi f_2(\tau) d\tau] d\xi \tag{3.89}$$

que Y existe e é único. Como $\mathcal{H}_2 \subset\subset \mathcal{H}$ e $\mathcal{A}_2^{-1}$ é um operador limitado de $\mathcal{H}$ em $D(A_2) \subset \mathcal{H}_2$, temos que o resolvente de $\mathcal{A}_2$ é compacto. (Veja [Shu] e [Ad]) $\square$

4 ESPECTRO DO MODELO DE TIMOSHENKO UTILIZANDO UMA BASE FUNDAMENTAL DE VALOR INICIAL

Já vimos que as equações diferenciais acopladas que modelam a viga de Timoshenko são dadas por

$$\begin{cases} \rho\omega_{tt}(x,t) - K(\omega_{xx}(x,t) - \phi_x(x,t)) = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ I_\rho\phi_{tt}(x,t) - EI\phi_{xx} - K(\omega_x(x,t) - \phi(x,t)) = 0, & 0 < x < l, t > 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

O método de Euler de procurar soluções do tipo exponencial

$$\begin{cases} \phi(x,t) = e^{\lambda t}\phi(x) \\ \omega(x,t) = e^{\lambda t}\omega(x) \end{cases} \tag{4.2}$$

leva, após substituição de (4.2) em (4.1), para um problema de autovalor descrito pelo sistema de equações

$$\begin{cases} \rho\lambda^2\omega(x) - K(\omega''(x) - \phi'(x)) = 0, & 0 < x < l \\ I_\rho\lambda^2\phi(x) - EI\phi''(x) - K(\omega'(x) - \phi(x)) = 0, & 0 < x < l, \end{cases} \tag{4.3}$$

Este sistema pode reescrever-se na forma matricial como

$$MU'' + CU' + \kappa(\lambda)U = 0 \tag{4.4}$$

onde

$$U = \begin{bmatrix} \omega(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{bmatrix}; \quad \kappa(\lambda) = \begin{bmatrix} \rho\lambda^2 & 0 \\ 0 & I_\rho\lambda^2 + K \end{bmatrix}$$

As condições de contorno também podem ser escritas na forma matricial

$$\begin{aligned} AU(0) + BU'(0) = 0 \\ CU(l) + DU'(l) = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde A, B, C e D são matrizes 2×2. Adiante serão calculados A, B, C e D para cada uma das condições de contorno clássicas (3.73)-(3.77).

Vamos procurar uma solução para (4.3) na forma $U(x) = \Phi_1(x)c_1 + \Phi_2(x)c_2$ onde $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ são matrizes 2×2 e c_1, c_2 são vetores 2×1. Substituindo nas condições de contorno (4.5) segue que

$$\mathcal{U}.c = 0 \tag{4.6}$$

onde $\mathcal{U}$ é uma matriz 4×4 com blocos de ordem 2×2 e c o vetor 4×1 com linhas bloco de ordem 2×1 dados por

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} A\Phi_1(0) + B\Phi_1'(0) & A\Phi_2(0) + B\Phi_2'(0) \\ C\Phi_1(L) + D\Phi_1'(L) & C\Phi_2(L) + D\Phi_2'(L) \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Para obter soluções não-nulas da equação (4.3) é necessário que o determinante da matriz $\mathcal{U}$ seja nulo, isto é,

$$\Delta = \det(\mathcal{U}) = 0 \tag{4.9}$$

A equação (4.9) é chamada de equação característica do problema.

4.1 Base Fundamental

O estudo de sistemas de equações diferenciais de ordem superior é usualmente feito através de uma redução a sistemas de primeira ordem. Porém, no caso de equações ordinárias isto não é necessario. Para isto, pode ser considerada uma base fundamental gerada por uma solução matricial sujeita a condições iniciais pré-determinadas. Um estudo deste caminho tem sido desenvolvido em [Clay1], [Clay2], [Clay3], [Clay4], e inclusive é proposta uma forma fechada para esta solução [Clay1], [Clay4]. Por outro lado,o uso desta base tem-se mostrado satisfatório no estudo de problemas de autovalor [Clay1], [Cos], [Bi].

Sejam $\Phi_1(x) = h(x)$ e $\Phi_2(x) = h'(x)$ onde supomos h solução matricial 2×2 do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Mh'' + Ch' + \kappa(\lambda)h = \mathbf{0} \\ h(0) = \mathbf{0}, \;\; Mh'(0) = I \end{cases} \tag{4.10}$$

onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula 2×2 e I a matriz identidade 2×2. Como os coeficientes matriciais são constantes, segue que h' também é solução da equação em (4.10). As soluções h e h' formam uma base de soluções para (4.1). Esta base fundamental, também é denominada *base dinâmica* devido as condições iniciais de h.

Outra base que pode ser escolhida, a base normalizada, é definida por

$$\Phi(x) = h_0(x) \qquad \Phi_2(x) = h_1(x) \tag{4.11}$$

onde

$$
\begin{aligned}
h_0(x) &= h'(x)M + h(x)C && (4.12)\\
h_1(x) &= h(x)M && (4.13)
\end{aligned}
$$

satisfazem as condiçoes iniciais normalizadas.

$$h_0(0) = I, \qquad h_0'(0) = \mathbf{0} \tag{4.14}$$

$$h_1(0) = \mathbf{0}, \qquad h_1'(0) = I \tag{4.15}$$

4.1.1 Cálculo de h(x)

Segue de [Clay3], [Clay4] que

$$h(x) = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{j-i-1}(x) \mathbf{h_{4-j}} \tag{4.16}$$

onde $\mathbf{h_k} = \mathbf{h^k(0)}$ satisfaz a equação matricial de diferenças

$$\begin{cases} M\mathbf{h_{k+2}} + C\mathbf{h_{k+1}} + \kappa(\lambda)\mathbf{h_k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h_0} = \mathbf{0}, \;\; M\mathbf{h_1} = I \end{cases} \tag{4.17}$$

O polinômio de grau 4, denotado por

$$P(s) = det[Ms^2 + Cs + \kappa(\lambda)] = \sum_{k=0}^{4} b_k s^{4-k} \tag{4.18}$$

corresponde ao polinômio característico associado ao sistema problema (4.10) e $d(x)$ corresponde a solução do problema de valor inicial expresso por

$$b_0 d^{(4)}(x) + b_1 d'''(x) + b_2 d''(x) + b_3 d'(x) + b_4 d(x) = 0 \tag{4.19}$$
$$d(0) = d'(0) = d''(0) = 0, \;\; b_0 d'''(0) = 1.$$

No problema de Timoshenko temos $b_0 = ab$, $b_1 = 0$, $b_2 = -(ae + cb)\lambda^2$, $b_3 = 0$ e $b_4 = c\lambda^2(e\lambda^2 + a)$,

$$P(s) = ab(s^4 + g^2(\lambda)s^2 - r^4(\lambda)) \tag{4.20}$$

$$g^2(\lambda) = -\left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right)\lambda^2, \tag{4.21}$$

$$r^4(\lambda) = -\frac{c\lambda^2(e\lambda^2 + a)}{ab} \tag{4.22}$$

onde $a = K$, $b = EI$, $c = \rho$, $e = I_\rho$.

As raízes do polinômio (4.20) são dadas por $s = \epsilon, -\epsilon, i\delta, -i\delta$, onde

$$\epsilon = \frac{1}{2}\sqrt{-2g^2 + 2\sqrt{g^4 + 4r^4}} \tag{4.23}$$

$$\delta = \sqrt{g^2 + \epsilon^2} \tag{4.24}$$

Segue que a solução de (4.19) é dada por

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab\epsilon\delta(\epsilon^2 + \delta^2)} \tag{4.25}$$

Facilmente podemos obter os valores de (4.17):

$$\begin{aligned}
\mathbf{h_0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{h_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \\
\mathbf{h_2} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{h_3} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2-c\lambda^2 b}{a^2 b} & 0 \\ 0 & \frac{e\lambda^2}{b^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Assim,

$$h(x) = \begin{bmatrix} -bd''(x) + (e\lambda^2 + a)d(x) & -ad'(x) \\ ad'(x) & -ad''(x) + c\lambda^2 d(x) \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Segue que

$$h_0 = \begin{bmatrix} bad'''(x) - ad'(x)e\lambda^2 & ad(x)e\lambda^2 + d(x)a^2 \\ -ac\lambda^2 d(x) & bad'''(x) - bc\lambda^2 d'(x) + a^2 d'(x) \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} -(-bd''(x) + (e\lambda^2 + a)d(x))a & ad'(x)b \\ -a^2 d'(x) & -(-ad''(x) + c\lambda^2 d(x))b \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

4.2 Freqüencia Crítica

Para as freqüencias naturais (veja [Cos]) $\lambda = i\omega$, a natureza das raízes $s_{1,2} = \pm\epsilon$ e $s_{3,4} = \pm i\delta$ do polinômio $P(s) = ab(s^4 + g^2(\lambda)s^2 - r^4(\lambda))$ depende do valor de ω. As raízes $s_{1,2}$ podem ser reais ou imaginárias conforme o valor de ϵ. Observe que ϵ é real se, e somente se $r^4 \geq 0$, isto é, $a - e\omega^2 \leq 0$. Para $r^4 < 0$, $a - e\omega^2 > 0$ temos que ϵ é puramente imaginário, isto é, $\epsilon = i \in$ com $\in$ real não-negativo. Em ambos os casos temos que $g^4 + 4r^4$ é real não negativa para qualquer ω real. Segue que as raízes $s_{3,4}$ são sempre imaginárias puras para ω real. O caso ϵ real ou puramente imaginário pode ser caracterizado pela introdução da freqüência crítica ω_c

$$\omega_c = \sqrt{\frac{a}{e}} = \sqrt{\frac{K}{I_\rho}} \tag{4.29}$$

Então temos que para:

- $\omega = \omega_c$:

$$d(x) = \frac{x - \sin(\delta x)}{ab\delta^3} \tag{4.30}$$

- $\omega < \omega_c$:

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab\epsilon\delta(\epsilon^2 + \delta^2)} \tag{4.31}$$

- $\omega > \omega_c$:

$$d(x) = \frac{\epsilon \sin(\delta x) - \delta \sin(\epsilon x)}{ab\epsilon\delta(\epsilon^2 - \delta^2)} \tag{4.32}$$

4.3 Estudo da matriz $\mathcal{U}$

Escolhendo a base dinâmica normalizada $(h_0(x), h_1(x))$ temos

$$U(x) = h_0(x)U(0) + h_1(x)U'(0) \tag{4.33}$$

e a matriz $\mathcal{U}$ e o vetor c ficam da forma

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} A & B \\ Ch_0(L) + Dh_0'(L) & Ch_1(L) + Dh_1'(L) \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

$$c = \begin{bmatrix} U(0) \\ U'(0) \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Caso 1: quando ao menos uma das matrizes A ou B é não-singular

- Se A for uma matriz não-singular: a equação característica pode ser simplificada, pois segue de (4.5) e de (4.33) que

$$U(0) = -A^{-1}BU'(0)$$

$$U(x) = (h_1(x) - h_0(x)A^{-1}B)U'(0)$$

e

$$[C(h_1(l) - h_0(l)A^{-1}B) + D(h_1'(l) - h_0'(l)A^{-1}B)]U'(0) = 0$$

Assim, a equação característica é dada por

$$\Delta(\lambda) = \det(\widehat{D}(\lambda))$$

onde $\widehat{D}(\lambda)$ é a matriz 2×2 definida por

$$\widehat{D}(\lambda) = C(h_1(l) - h_0(l)A^{-1}B) + D(h_1'(l) - h_0'(l)A^{-1}B) \qquad (4.36)$$

São exemplos deste caso as condições de contorno B2(3.74),B4(3.76) e B5(3.77) que estão descritas na página 46.

- Se B for uma matriz não-singular: analogamente, a equação caracterítica pode ser simplificada pois, segue de (4.5) e de (4.33) que

$$U'(0) = -B^{-1}AU(0)$$

e então

$$U(x) = (h_0(x) - h_1(x)B^{-1}A)U(0)$$

e

$$[C(h_0(l) - h_1(l)B^{-1}A) + D(h_0'(l) - h_1'(l)B^{-1}A)]U(0) = 0$$

Assim, a equação característica é dada por

$$\Delta(\lambda) = \det(\widehat{D}(\lambda))$$

onde $\widehat{D}(\lambda)$ é a matriz 2×2 definida por

$$\widehat{D}(\lambda) = C(h_0(l) - h_1(l)B^{-1}A) + D(h_0'(l) - h_1'(l)B^{-1}A) \qquad (4.37)$$

Neste caso encontra-se o problema de Timoshenko com condições de contorno B1(3.73).

Caso 2: quando A e B são matrizes singulares

A priori não conseguimos reduzir a matriz $\mathcal{U}$. Em particular para as condições de contorno B3 (3.75) conseguimos reduzir a matriz $\mathcal{U}$ a uma matriz 2×2 $\widetilde{D}(\lambda)$. Neste caso temos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então $\mathcal{U}$ fica,

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} A & B \\ \Delta_1 & \Delta_2 \end{bmatrix};$$

onde $\Delta_1 = Ch_0(l) + Dh_0'(l) = [\Delta_{1,ij}]$ e $\Delta_2 = Ch_1(l) + Dh_1'(l) = [\Delta_{2,ij}]$ são matrizes 2×2. Como $\mathcal{U}.c = 0$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Delta_1 & & & \Delta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases};$$

Restringindo o problema a

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_{1,12}c_2 + \Delta_{2,11}c_3 = 0 \\ \Delta_{1,22}c_2 + \Delta_{2,21}c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Delta_{1,12} & \Delta_{2,11} \\ \Delta_{1,22} & \Delta_{2,21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0;$$

Assim conseguimos reduzir $\mathcal{U}$ a uma matriz 2×2

$$\widetilde{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_{1,12} & \Delta_{2,11} \\ \Delta_{1,22} & \Delta_{2,21} \end{bmatrix}$$

4.3.1 Discussão dos autovalores de $\widehat{D}$

Para que uma matriz $\widehat{D}(\lambda) \in M^{2\times 2}$ tenha autovalores simples temos que achar valores de λ tal que posto($\widehat{D}(\lambda)$)= 1 e para existir autovalores duplos temos que achar valores de λ tal que posto($\widehat{D}(\lambda)$)= 2.

A seguir será feito um estudo dos autovalores de uma viga de Timoshenko para as cinco condições de contorno estudadas, lembrando que $\lambda = i\omega$, com ω real.(veja [Cos])

4.4 Estudo dos autovalores da viga de Timoshenko com várias condição de contorno clássicas

4.4.1 Condição de Contorno Livre-Livre

Em uma viga livre-livre as condições de contorno são dadas por

$$\begin{cases} \omega_x(0,t) - \phi(0,t) = 0, & \phi_x(0,t) = 0, \\ \omega_x(l,t) - \phi(l,t) = 0, & \phi_x(l,t) = 0, \end{cases} \tag{4.38}$$

que vamos reescrever na forma matricial, chegando a

$$AU(0) + BU'(0) = 0$$
$$CU(l) + DU'(l) = 0$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso a matriz B é não-singular, A = C, B = D = I, e $B^{-1}A = A$. Então,

$$\widehat{D} = C(h_0(l) - h_1(l)B^{-1}A) + D(h_0'(l) - h_1'(l)B^{-1}A)$$

se reduz a

$$\widehat{D} = Ah_0(l) - Ah_1(l)A + h_0'(l) - h_1'(l)A$$

$$\widehat{D} = \begin{bmatrix} bc\lambda^2 d''(l) - ce\lambda^4 d(l) & bc\lambda^2 d'(l) \\ -ac\lambda^2 d'(l) & ae\lambda^2 d''(l) - c\lambda^2(e\lambda^2 + a)d(l) \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Teorema 4.1. $\lambda^2 = 0$ *é um autovalor duplo do problema de Timoshenko com condições de contorno (4.38) e que seus correspondentes autovetores associados são quaisquer dois vetores linearmente independentes em* $\mathbb{R}^2$*, em particular temos* $Z_1 = [1,0]^T$ *e* $Z_2 = [0,1]^T$.

Demonstração. É fácil ver que para $\lambda = 0$, $\widehat{D} = \mathbf{0}$. □

4.4.2 Condição de Contorno Fixa-Livre

As condições de Contorno para uma viga de Timoshenko com as extremidades fixa-livre são dadas por

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0 & \phi(0,t) = 0, \\ \omega_x(l,t) - \phi(l,t) = 0, & \phi_x(l,t) = 0, \end{cases} \tag{4.40}$$

Reescrevendo-las na forma matricial

$$AU(0) + BU'(0) = 0$$
$$CU(l) + DU'(l) = 0$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso A é não-singular, A=D=identidade e $A^{-1}B = 0$. Então

$$\widehat{D} = C(h_1(l) - h_0(l)A^{-1}B) + D(h_1'(l) - h_0'(l)A^{-1}B)$$

se reduz a

$$\widehat{D} = Ch_1(l) + h_1'(l)$$

$$\widehat{D} = \begin{bmatrix} abd'''(l) - ae\lambda^2 d'(l) & bc\lambda^2 d(l) \\ -a^2 d''(l) & abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l) \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

Teorema 4.2. *Todos os autovalores problema de Timoshenko (4.1)com condições de contorno (4.40) fixa- livre são simples.*

Demonstração. Vamos mostrar que o problema (4.1)-(4.40) não possui autovalores duplos. Procurar autovalores duplos do problema (4.1)-(4.40) é equivalente a buscar uma solução para o sistema de equações

$$\begin{cases} abd'''(l) - ae\lambda^2 d'(l) = 0 \\ d(l) = 0 \\ d''(l) = 0 \\ abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l) = 0 \end{cases}$$

Da onde segue que λ é uma autovalor duplo do problema (4.1)-(4.40) se, e somente se $d(l) = d'(l) = d''(l) = d'''(l) = 0$ a menos que $\lambda = 0$. Entretanto tal λ não existe pois se $\lambda = i\omega$ para:

- $\omega = \omega_c$

$$\begin{aligned} d(l) &= \frac{\delta l - sin(\delta l)}{ab\delta^3} \\ d(l) &= 0 \Leftrightarrow \delta l - sin(\delta l) = 0 (\delta \neq 0) \end{aligned}$$

O que nunca acontece. Note que $d(\delta = 0, l) = l^3/ab$.

- $\omega < \omega_c$

$$\begin{aligned} d(l) &= \frac{\delta sinh(\epsilon l) - \epsilon sin(\delta l)}{ab\epsilon\delta(\epsilon^2 + \delta^2)} \\ d(l) &= 0 \Leftrightarrow \delta sinh(\epsilon l) = \epsilon sin(\delta l)(\delta, \epsilon \neq 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d''(l) &= \frac{\epsilon sinh(\epsilon l) + \delta sin(\delta l)}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)} \\ d''(l) &= 0 \Leftrightarrow \epsilon sinh(\epsilon l) = -\delta sin(\delta l)(\delta, \epsilon \neq 0) \\ &\Rightarrow (\epsilon^2 + \delta^2) sinh(\epsilon l) = 0 \Leftrightarrow \epsilon = 0 \end{aligned}$$

Recaindo no caso anterior onde $\omega = \omega_c$. Chegamos assim numa contradição.

- $\omega > \omega_c$

$$\begin{aligned} d(l) &= \frac{\epsilon sin(\delta l) - \delta sin(\epsilon l)}{ab\epsilon\delta(\epsilon^2 - \delta^2)} \\ d(l) &= 0 \Leftrightarrow \epsilon sin(\delta l) = \delta sin(\epsilon l)(\epsilon, \delta, \epsilon^2 - \delta^2 \neq 0) \end{aligned}$$

e

$$d'(l) = \frac{cos(\delta l) - cos(\epsilon l)}{ab(\epsilon^2 - \delta^2)} \Rightarrow d'(l) = 0 \Leftrightarrow cos(\delta l) = cos(\epsilon l)(\epsilon^2 - \delta^2 \neq 0)$$

e

$$d''(l) = \frac{-\delta sin(\delta l) + \epsilon sin(\epsilon l)}{ab(\epsilon^2 - \delta^2)} \Rightarrow d''(l) = 0 \Leftrightarrow \delta sin(\delta l) = \epsilon sin(\epsilon l)(\epsilon^2 - \delta^2 \neq 0)$$

Isto acontece quando $\delta = n\pi/l$ e $\epsilon = (2p + n)\pi/l$ onde n,p são inteiros não-nulos. Contudo ainda precisamos que $d'''(l) = 0$. Porém

$$d'''(l) = \frac{-\delta^2 cos(\delta l) + \epsilon^2 cos(\epsilon l)}{ab(\epsilon^2 - \delta^2)}$$

Então $d'''(l) = (-1)^n/ab(\epsilon + \delta)$.

E se $\lambda = 0$ recaímos no caso $\omega = \omega_c$ com $\delta = 0$.

Logo não conseguimos encontrar λ que satisfaça as condições necessárias para a existência de um autovalor duplo. □

Teorema 4.3. *Os autovalores simples do problema (4.1)-(4.40) existem se*

$$\frac{-abd'''(l) + ae\lambda^2 d'(l)}{bc\lambda^2 d(l)} = \frac{a^2 d''(l)}{abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l)},$$

com $abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l) \neq 0$ *ou* $\lambda \neq 0, d(l) \neq 0$.

Ademais, os autovetores simples são da forma $V = [v_1, v_2]^T$ *onde :*

(i) $V = [1, v_2]^T$ *se* $v_1 \neq 0$ *e* v_2 *é dado por:*

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \frac{-abd'''(l) + ae\lambda^2 d'(l)}{bc\lambda^2 d(l)} se \;\; \lambda \neq 0, d(l) \neq 0, ou \\
v_2 &= \frac{a^2 d''(l)}{abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l)}, se \;\; abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l) \neq 0
\end{aligned}
$$

(ii) $V = [v_1, 1]^T$ *se* $v_2 \neq 0$ *e* v_1 *é dado por:*

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{bc\lambda^2 d(l)}{-abd'''(l) + ae\lambda^2 d'(l)}, se \;\; - abd'''(l) + ae\lambda^2 d'(l) \neq 0, ou \\
v_1 &= \frac{abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l)}{a^2 d''(l)}, se \;\; d''(l) \neq 0
\end{aligned}
$$

Demonstração. Segue direto de (4.41) □

4.5 Condições de Contorno Apoiada-Apoiada

Relembrando as condições de contorno são dadas por:

$$
\begin{cases}
\omega(0,t) = 0, & \phi_x(0,t) = 0, \\
\omega(l,t) = 0, & \phi_x(l,t) = 0,
\end{cases} \tag{4.42}
$$

Que na forma matricial podem ser escritas como

$$
\begin{aligned}
AU(0) + BU'(0) = 0 \\
CU(l) + DU'(l) = 0
\end{aligned}
$$

onde

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Já demonstramos na seção (4.3) que

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} \Delta_{1,12} & \Delta_{2,11} \\ \Delta_{1,22} & \Delta_{2,21} \end{bmatrix}$$

onde $\Delta_1 = Ch_0(l) + Dh_0'(l)$ e $\Delta_2 = Ch_1(l) + Dh_1'(l)$. Onde h_0 e h_1 foram deduzidas em (4.27), (4.28) respectivamente. Assim,

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} h_{0,11} & h_{0,12} \\ h'_{0,21} & h'_{0,22} \end{bmatrix}$$

e

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} h_{1,11} & h_{1,12} \\ h'_{1,21} & h'_{1,22} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} (ea\lambda^2 + a^2)d(l) & abd''(l) - (ae\lambda^2 + a^2)d(l) \\ (e\lambda^2 + a)(ad''(l) - c\lambda^2 d(l)) & -a^2 d''(l) \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

O problema (4.1)-(4.42) apresenta autovalores simples quando posto($\widetilde{D}$) = 1. Isto acontece quando $e\lambda^2 + a = 0$, isto é, quando $\omega = \omega_c$; e quando $d''(l) \neq 0$. Neste caso a matriz $\widetilde{D}$ fica

$$\widetilde{D}(e\lambda^2 + a = 0) = \begin{bmatrix} 0 & abd''(l) \\ 0 & -a^2 d''(l) \end{bmatrix}$$

Temos que quando $\omega = \omega_c$

$$d''(l) = \frac{sin(\delta l)}{ab\delta}$$

Então precisamos impor $\delta \neq n\pi/l$ onde n é inteiro não-nulo para que $e\lambda^2 + a = 0$ seja um autovalor simples de B3.

O problema (4.1)-(4.42) apresenta autovalores duplos quando posto($\widetilde{D}$) = 0. Então procurar autovalores duplos é equivalente a buscar uma solução para o sistema

$$\begin{cases} ea\lambda^2 + a^2)d(l) = 0 \\ abd''(l) - (ae\lambda^2 + a^2)d(l) = 0 \\ (e\lambda^2 + a)(ad''(l) - c\lambda^2 d(l)) = 0 \\ -a^2 d''(l) = 0 \end{cases}$$

Da onde segue que d"(l)=0 e

$$\begin{cases} (e\lambda^2 + a)d(l) = 0 \\ (e\lambda^2 + a)\lambda^2 d(l)) = 0 \end{cases}$$

Então para que exista um autovalor duplo é necessário que d"(l)=d(l)=0 quando $e\lambda^2 + a \neq 0$ ou que d"(l)=0 e que $e\lambda^2 + a = 0$

Se $e\lambda^2 + a \neq 0$, já vimos no caso (4.40) que d(l)=d"(l)=0 é satisfeita quando $\omega > \omega_c$ e $\delta = n\pi/l$ e $\epsilon = p\pi/l$ para n,p inteiros não-nulos.

Se $e\lambda^2 + a = 0$ temos

$$d''(l) = \frac{sin(\delta l)}{ab\delta}$$

então

$$d''(l) = 0 \Leftrightarrow sin(\delta l) = 0(\delta \neq 0) \Leftrightarrow \delta = n\pi/l$$

onde n é um inteiro não-nulo.

Logo $e\lambda^2 + a = 0$ é um autovalor simples de B3 se $\delta \neq n\pi/l$ e um autovalor duplo se $\delta = n\pi/l$. Desta forma provamos o teorema anunciado a seguir.

Teorema 4.4. *O problema de Timoshenko (4.1)-(3.75) possui autovalores duplos se $e\lambda^2 + a \neq 0$, $\omega > \omega_c$ e $\delta = n\pi/l$ e $\epsilon = p\pi/l$ para n,p inteiros não-nulos. Além* *disso, $e\lambda^2+a=0$ é um autovalor simples de (4.1)-(3.75) se $\delta \neq n\pi/l$ e um autovalor duplo se $\delta = n\pi/l$*

Teorema 4.5. *Os autovalores simples do problema (4.1)-(3.75) existem se*

$$-\frac{(e\lambda^2+a)d(l)}{bd''(l)-(e\lambda^2+a)d(l)} = \frac{(e\lambda^2+a)(ad''(l)-c\lambda^2 d(l))}{a^2 d''(l)},$$

com $bd''(l)-(e\lambda^2+a)d(l) \neq 0$ ou $d''(l) \neq 0$.

Ademais, os autovalores simples são da forma $V=[v_1,v_2]^T$ onde :

(i) $V=[1,v_2]^T$ se $v_1 \neq 0$ e v_2 é dado por:

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{(e\lambda^2+a)d(l)}{bd''(l)-(e\lambda^2+a)d(l)}, \textit{ se } bd''(l)-(e\lambda^2+a)d(l) \neq 0 \\ v_2 &= \frac{(e\lambda^2+a)(ad''(l)-c\lambda^2 d(l))}{a^2 d''(l)}, \textit{ se } d''(l) \neq 0 \end{aligned}$$

(ii) $V=[v_1,1]^T$ se $v_2 \neq 0$ e v_1 é dado por:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{bd''(l)-(e\lambda^2+a)d(l)}{(e\lambda^2+a)d(l)}, \textit{ se } d(l) \neq 0, ou \\ v_1 &= \frac{a^2 d''(l)}{(e\lambda^2+a)(ad''(l)-c\lambda^2 d(l))}, \textit{ se } ad''(l)-c\lambda^2 d(l) \neq 0 \end{aligned}$$

Demonstração. Segue direto de (4.43) □

4.5.1 Condições de Contorno Fixa-Fixa

Vamos analisar o problema de Timoshenko sujeito as condições de contorno

$$\begin{cases} \omega(0,t)=0, & \phi(0,t)=0, \\ \omega(l,t)=0, & \phi(l,t)=0, \end{cases} \tag{4.44}$$

Podemos escrever as condições de contorno na forma matricial

$$AU(0) + BU'(0) = 0$$
$$CU(l) + DU'(l) = 0$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso A é não-singular, A=C=I , B=D=0 . Então

$$\widehat{D} = C(h_1(l) - h_0(l)A^{-1}B) + D(h_1'(l) - h_0'(l)A^{-1}B)$$

se reduz a

$$\widehat{D} = h_1(l)$$

$$\widehat{D} = \begin{bmatrix} abd''(l) - (ae\lambda^2 + a^2)d(l) & abd'(l) \\ -a^2d'(l) & abd''(l) - bc\lambda^2 d(l) \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

Teorema 4.6. *O problema de Timoshenko (4.1)-(4.44)possui autovalores duplos somente se* $\omega > \omega_c$,$\delta = n\pi/l, \epsilon = (2p+n)\pi/l$.

Demonstração. Procurar autovalores duplos é equivalente a buscar uma solução para o sistema

$$\begin{cases} abd''(l) - (ae\lambda^2 + a^2)d(l) = 0 \\ d'(l) = 0 \\ abd''(l) - bc\lambda^2 d(l) = 0 \end{cases}$$

Da onde segue que λ é uma autovalor duplo de B4 se e somente se d(l)=d'(l)=d"(l)=0 a menos que $(ae - bc)\lambda^2 + a = 0$.

Do problema B2(4.40) sabemos que não existe λ tal que d(l)=d"(l)=0 para $\omega = \omega_c, \omega < \omega_c$.

Também de B2(4.40) temos que quando $\omega > \omega_c$ esta condição é satisfeita para um λ tal que $\delta = n\pi/l, \epsilon = (2p+n)\pi\backslash l$.

Então existe autovalores duplos no problema B4(4.44) somente se $\omega > \omega_c$, $\delta = n\pi/l, \epsilon = (2p+n)\pi/l$. □

Teorema 4.7. *Os autovalores simples do problema (4.1)-(4.44) existem se*

$$\frac{(ae\lambda^2 + a^2)d(l) - abd''(l)}{abd'(l)} = \frac{a^2 d'(l)}{abd''(l) - bc\lambda^2 d(l)},$$

com $abd''(l) - bc\lambda^2 d(l) \neq 0$ *ou* $d'(l) \neq 0$.

Ademais, os autovalores simples são da forma $V = [v_1, v_2]^T$ *onde :*

(i) $V = [1, v_2]^T$ *se* $v_1 \neq 0$ *e* v_2 *é dado por:*

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{(ae\lambda^2 + a^2)d(l) - abd''(l)}{abd'(l)}, \mathit{se}\;\; d'(l) \neq 0 \\ v_2 &= \frac{a^2 d'(l)}{abd''(l) - bc\lambda^2 d(l)}, \mathit{se}\;\; abd''(l) - bc\lambda^2 d(l) \neq 0 \end{aligned}$$

(ii) $V = [v_1, 1]^T$ *se* $v_2 \neq 0$ *e* v_1 *é dado por:*

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{abd'(l)}{(ae\lambda^2 + a^2)d(l) - abd''(l)}, \mathit{se}\;\; (ae\lambda^2 + a^2)d(l) - abd''(l) \neq 0, ou \\ v_1 &= \frac{abd''(l) - bc\lambda^2 d(l)}{a^2 d'(l)}, \mathit{se}\;\; d'(l) \neq 0 \end{aligned}$$

Demonstração. Segue direto de (4.45) □

4.6 Condições de Contorno Fixa-Apoiada

As condições de contorno do problema (4.1) com extremidades fixa-apoiada são:

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0, & \phi(0,t) = 0, \\ \omega(l,t) = 0, & \phi_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{4.46}$$

Reescritas na forma matricial

$$AU(0) + BU'(0) = 0$$
$$CU(l) + DU'(l) = 0$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso A é não-singular, A=I , B=0 e $A^{-1}B = 0$. Então

$$\widehat{D} = C(h_1(l) - h_0(l)A^{-1}B) + D(h_1'(l) - h_0'(l)A^{-1}B)$$

se reduz a

$$\widehat{D} = Ch_1(l) + Dh_1'(l)$$

$$\widehat{D} = \begin{bmatrix} abd'''(l) - ae\lambda^2 d'(l) & bc\lambda^2 d(l) \\ -a^2 d''(l) & abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l) \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

Teorema 4.8. *O problema de Timoshenko (4.1)-(4.46) não possui autovalores duplos.*

Demonstração. Procurar autovalores duplos é equivalente a buscar uma solução para o sistema

$$\begin{cases} abd'''(l) - ae\lambda^2 d'(l) = 0 \\ d(l) = 0 \\ d''(l) = 0 \\ abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l) = 0 \end{cases}$$

Da onde segue que λ é uma autovalor duplo do problema (4.1)-(3.77) se e somente se d(l)=d'(l)=d"(l)=d"'(l)=0 a menos que $ae - bc = 0$ ou $\lambda = 0$; ou se d'(l)=d"(l)=d"'(l)=0 quando $ae - bc = 0$ ou $\lambda = 0$.

Do problema B2(3.74) sabemos que não existe λ tal que d(l)=d"(l)=0 para $\omega < \omega_c$.

Também temos que quando $\omega > \omega_c$ não existe λ tal que $d(l) = d'(l) = d''(l) = d'''(l) = 0$.

No caso de $\omega = \omega_c$ basta que d'(l)=d"(l)=d"'(l)=0. O que não acontece para nenhum valor de λ pois

$$d'(l) = 0 \Leftrightarrow cos(\delta l) = 1$$

e

$$d'''(l) = 0 \Leftrightarrow cos(\delta l) = 0$$

E chegamos assim num absurdo.

Logo, o problema B5 não possui autovalores duplos para nenhum ω real. □

Teorema 4.9. *Os autovalores simples do problema (4.1)-(3.76) existem se*

$$\frac{abd'''(l) - ae\lambda^2 d'(l)}{bc\lambda^2 d(l)} = \frac{a^2 d''(l)}{abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l)},$$

com $abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l) \neq 0$ *ou* $\lambda d(l) \neq 0$.

Ademais, os autovetores simples são da forma $V = [v_1, v_2]^T$ *onde :*

(i) $V = [1, v_2]^T$ *se* $v_1 \neq 0$ *e* v_2 *é dado por:*

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{abd'''(l) - ae\lambda^2 d'(l)}{bc\lambda^2 d(l)}, se \ d(l) \neq 0, \lambda \neq 0 \\ v_2 &= -\frac{a^2 d''(l)}{abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l)}, se \ abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l) \neq 0 \end{aligned}$$

(ii) $V = [v_1, 1]^T$ *se* $v_2 \neq 0$ *e* v_1 *é dado por:*

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{bc\lambda^2 d(l)}{abd'''(l) - ae\lambda^2 d'(l)}, se \ abd'''(l) - ae\lambda^2 d'(l) \neq 0, ou \\ v_1 &= -\frac{abd'''(l) - bc\lambda^2 d'(l)}{a^2 d''(l)}, se \ d''(l) \neq 0 \end{aligned}$$

Demonstração. Segue direto de (4.47) □

5 EXPANSÃO ASSINTÓTICA DE EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS DO MODELO DE TIMOSHENKO

Já foi visto no capítulo 4 que as soluções exponenciais para o problema de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho\omega_{tt}(x,t) - K(\omega_{xx}(x,t) - \phi_x(x,t)) = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ I_\rho\phi_{tt}(x,t) - EI\phi_{xx} - K(\omega_x(x,t) - \phi(x,t)) = 0, & 0 < x < l, t > 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

são dadas por

$$\tilde{U} = e^{\lambda t}U(x) \tag{5.2}$$

onde $\tilde{U} = [\omega(x,t), \phi(x,t)]^T$ e $U = [\omega(x), \phi(x)]^T$, com

$$U(x) = h_0(x)U(0) + h_1(x)U'(0) \tag{5.3}$$

onde

$$h_0(x) = h'(x)M + h(x)C \tag{5.4}$$

$$h_1(x) = h(x)M \tag{5.5}$$

com

$$M = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{bmatrix}.$$

Já vimos também em (4.26) que,

$$h(x) = \begin{bmatrix} -bd''(x) + (e\lambda^2 + a)d(x) & -ad'(x) \\ ad'(x) & -ad''(x) + c\lambda^2 d(x) \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

onde

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab\epsilon\delta(\epsilon^2 + \delta^2)}. \tag{5.7}$$

Como

$$U(x) = h_0 U(0) + h_1 U'(0)$$

Substituindo (4.27) e (4.28), temos

$$U(x) = \begin{bmatrix} bad'''(x) - ad'(x)e\lambda^2 & ad(x)e\lambda^2 + d(x)a^2 \\ -ac\lambda^2 d(x) & bad'''(x) - bc\lambda^2 d'(x) + a^2 d'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega(0) \\ \phi(0) \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -(-bd''(x) + (e\lambda^2 + a)d(x))a & ad'(x)b \\ -a^2 d'(x) & -(-ad''(x) + c\lambda^2 d(x))b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega'(0) \\ \phi'(0) \end{bmatrix}$$

As componentes de h_0 e h_1 podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned}
\omega_1(x,\lambda) &= bad'''(x) - ad'(x)e\lambda^2 \\
&= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left((\mu_1 - A)\cosh\sqrt{\mu_2}\,x - (\mu_2 - A)\cosh\sqrt{\mu_1}\,x\right); \\
\omega_2(x,\lambda) &= ad(x)e\lambda^2 + d(x)a^2 \\
&= \frac{B}{\mu_1 - \mu_2}\left(\sqrt{\mu_1}^{\,-1}\sinh\sqrt{\mu_1}\,x - \sqrt{\mu_2}^{\,-1}\sinh\sqrt{\mu_2}\,x\right); \\
\phi_1(x,\lambda) &= -ac\lambda^2 d(x) \\
&= \frac{AC}{\mu_1 - \mu_2}\left(\sqrt{\mu_1}^{\,-1}\sinh\sqrt{\mu_1}\,x - \sqrt{\mu_2}^{\,-1}\sinh\sqrt{\mu_2}\,x\right); \\
\phi_2(x,\lambda) &= bad'''(x) - bc\lambda^2 d'(x) + a^2 d'(x) \\
&= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left((\mu_1 - B)\cosh\sqrt{\mu_2}\,x - (\mu_2 - B)\cosh\sqrt{\mu_1}\,x\right); \\
\omega_3(x,\lambda) &= -(-bd''(x) + (e\lambda^2 + a)d(x))a \\
&= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left((\mu_1 - B)\sqrt{\mu_1}^{\,-1}\sinh\sqrt{\mu_1}\,x - (\mu_2 - B)\sqrt{\mu_2}^{\,-1}\sinh\sqrt{\mu_2}\,x\right); \\
\omega_4(x,\lambda) &= ad'(x)b = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left(\cosh\sqrt{\mu_1}\,x - \cosh\sqrt{\mu_2}\,x\right); \\
\phi_3(x,\lambda) &= -a^2 d'(x) = \frac{C}{\mu_1 - \mu_2}\left(\cosh\sqrt{\mu_1}\,x - \cosh\sqrt{\mu_2}\,x\right); \\
\phi_4(x,\lambda) &= -(-ad''(x) + c\lambda^2 d(x))b \\
&= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left((\mu_1 - A)\sqrt{\mu_1}^{\,-1}\sinh\sqrt{\mu_1}\,x - (\mu_2 - A)\sqrt{\mu_2}^{\,-1}\sinh\sqrt{\mu_2}\,x\right).
\end{aligned}$$

onde

$$A = \frac{c}{a}\lambda^2, \qquad B = \frac{e}{b}\lambda^2 + \frac{a}{b}, \qquad C = -\frac{a}{b} \tag{5.8}$$

e μ_1 e μ_2 as duas raízes da equação quadrática

$$\mu^2 - (A + B + C)\mu + AB = 0. \tag{5.9}$$

Assuma que $\mu_1 \neq \mu_2$, então ω e ϕ são dados por

$$\omega(x,t) = \omega(0)\omega_1(x,\lambda) + \phi(0)\omega_2(x,\lambda) + \omega'(0)\omega_3(x,\lambda) + \phi'(0)\omega_4(x,\lambda)$$

e

$$\phi(x,t) = \omega(0)\phi_1(x,\lambda) + \phi(0)\phi_2(x,\lambda) + \omega'(0)\phi_3(x,\lambda) + \phi'(0)\phi_4(x,\lambda).$$

5.1 Determinantes Característicos

Para considerar o problema de autovalor $\mathcal{A}_j$ (3.78), assumimos $\lambda \ \epsilon \ i\mathbb{R}$ tal que a equação $(\lambda I - \mathcal{A}_j)Y = 0$ tenha solução não-nula $Y = [\omega, \lambda\omega, \phi, \lambda\phi]^T \ \epsilon \ \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$. Temos

$$Y(x) = \omega(0)Y_1(\lambda) + \phi(0)Y_2(\lambda) + \omega'(0)Y_3(\lambda) + \phi'(0)Y_4(\lambda)$$

onde

$$Y_k = [\omega_k(x,\lambda), \lambda\omega_k(x,\lambda), \phi_k(x,\lambda), \lambda\phi_k(x,\lambda)]^T, \quad k = 1,2,3,4.$$

Sem perda de generalidade, considere $\rho_1 \neq \rho_2$. Substituindo as fórmulas das soluções dadas acima chegamos no determinante característico de $\mathcal{A}_1$, que é dado por

$$D_1(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \omega_1'(l,\lambda) - \phi_1(l,\lambda) & \omega_2'(l,\lambda) - \phi_2(l,\lambda) & \omega_3'(l,\lambda) - \phi_3(l,\lambda) \\ \phi_1'(l,\lambda) & \phi_2'(l,\lambda) & \phi_3'(l,\lambda) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.10}$$

de $\mathcal{A}_2$, que é dado por

$$D_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \omega_3'(l,\lambda) - \phi_3(l,\lambda) & \omega_4'(l,\lambda) - \phi_4(l,\lambda) \\ \phi_3'(l,\lambda) & \phi_4'(l,\lambda) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.11}$$

de $\mathcal{A}_3$, que é dado por

$$D_3(\lambda) = \begin{vmatrix} \omega_2(l,\lambda) & \omega_3(l,\lambda) \\ \phi_2'(l,\lambda) & \phi_3'(l,\lambda) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.12}$$

de $\mathcal{A}_4$, que é dado por

$$D_4(\lambda) = \begin{vmatrix} \omega_3(l,\lambda) & \omega_4(l,\lambda) \\ \phi_3(l,\lambda) & \phi_4(l,\lambda) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.13}$$

de $\mathcal{A}_5$, que é dado por

$$D_5(\lambda) = \begin{vmatrix} \omega_3(l,\lambda) & \omega_4(l,\lambda) \\ \phi_3'(l,\lambda) & \phi_4'(l,\lambda) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.14}$$

Para ilustrar mostraremos como foi obtida o determinante característico para o operador $\mathcal{A}_3$, o problema de contorno fixa-fixa. Sabemos que:

$$Y(\lambda, x) = \omega(0)Y_1(\lambda) + \phi(0)Y_2(\lambda) + \omega'(0)Y_3(\lambda) + \phi'(0)Y_4(\lambda)$$

onde

$$Y_k = [\omega_k(x,\lambda), \lambda\omega_k(x,\lambda), \phi_k(x,\lambda), \lambda\phi_k(x,\lambda)]^T, \quad k = 1,2,3,4.$$

Aplicando as restrições do domínio $D(\mathcal{A}_3)$, $\omega(0) = \phi'(0) = 0$, temos

$$Y(l) = \phi(0)Y_2(\lambda, l) + \omega'(0)Y_3(\lambda),$$

e aplicando as condições de contorno do domínio $D(\mathcal{A}_3)$, $\omega(l) = \phi'(l) = 0$, obtemos

$$Y(\lambda, l) = \phi(0) \begin{bmatrix} \omega_2(l) \\ \lambda\omega_2(l) \\ \phi_2(l) \\ \lambda\phi_2(l) \end{bmatrix} + \omega'(0) \begin{bmatrix} \omega_3(l) \\ \lambda\omega_3(l) \\ \phi_3(l) \\ \lambda\phi_3(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi(l) \\ \lambda\phi(l) \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

e

$$Y'(\lambda, l) = \phi(0) \begin{bmatrix} \omega_2'(l) \\ \lambda\omega_2'(l) \\ \phi_2'(l) \\ \lambda\phi_2'(l) \end{bmatrix} + \omega'(0) \begin{bmatrix} \omega_3'(l) \\ \lambda\omega_3'(l) \\ \phi_3'(l) \\ \lambda\phi_3'(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega'(l) \\ \lambda\omega'(l) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

Segue que,

$$\phi(0)\omega_2(l) + \omega'(0)\omega_3(l) = 0 \tag{5.17}$$

e

$$\phi(0)\phi_2'(l) + \omega'(0)\phi_3'(l) = 0. \tag{5.18}$$

Reescrevendo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \omega_2(l) & \omega_3(l) \\ \phi_2'(l) & \phi_3'(l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \omega'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

segue o determinante característico de $\mathcal{A}_3$.

5.2 Expansão Assintótica

Temos as seguintes expressões assintóticas para o determinantes característicos (quando $|Im\lambda| \to \infty$) [1]

$$
\begin{aligned}
D_1(\lambda) &= \lambda^2 \rho_1 \rho_2 \sinh(\rho_2 \lambda l) + O(1), \\
D_2(\lambda) &= \cosh(\rho_1 \lambda l) \cosh(\rho_2 \lambda l) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \\
D_3(\lambda) &= \sinh(\rho_1 \lambda l) \sinh(\rho_2 \lambda l) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \\
D_4(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2}[\sinh(\rho_1 \lambda l) \sinh(\rho_2 \lambda l)] + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right), \\
D_5(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}[\sinh(\rho_1 \lambda l) \cosh(\rho_2 \lambda l)] + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right),
\end{aligned}
$$

onde $\rho_1^2 = c/a$ e $\rho_2^2 = e/b$.

Novamente, para ilustrar, iremos detalhar como foi obtida a expansão assintótica para o polinômio característico $D(\mathcal{A}_2)$.

Temos que

[1] Dizemos que uma função $f(x)$ é da ordem de uma função $g(x)$ e notamos $f(x) = O(g(x))$ quando $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

onde C é uma constante.

$$
\begin{aligned}
D_2(\lambda) = \quad & \frac{1}{(\mu_1-\mu_2)^2}\big\{(\mu_1-A)(\mu_1-B)\cosh^2\sqrt{\mu_1}\,l \\
& -[(\mu_2-A)(\mu_1-B)+(\mu_1-A)(\mu_2-B)]\cosh\sqrt{\mu_1}\,l\cosh\sqrt{\mu_2}\,l \\
& +(\mu_2-A)(\mu_2-B)\cosh^2\sqrt{\mu_2}\,l\big\} \\
& -\frac{C}{(\mu_1-\mu_2)^2}\big\{(\mu_1-A)\cosh^2\sqrt{\mu_1}\,l \\
& -[(\mu_2-A)+(\mu_1-A)]\cosh\sqrt{\mu_1}\,l\cosh\sqrt{\mu_2}\,l \\
& +(\mu_2-A)\cosh^2\sqrt{\mu_2}\,l\big\} \\
& -\frac{C}{(\mu_1-\mu_2)^2}[\sqrt{\mu_1}\sinh\sqrt{\mu_1}l-\sqrt{\mu_2}\sinh\sqrt{\mu_1}l]^2 \\
& -\frac{C}{(\mu_1-\mu_2)^2}\big\{(\mu_1-A)\sinh^2\sqrt{\mu_1}\,l \\
& -[(\mu_2-A)\sqrt{\tfrac{\mu_1}{\mu_2}}+(\mu_1-A)\sqrt{\tfrac{\mu_2}{\mu_1}}]\sinh\sqrt{\mu_1}\,l\sinh\sqrt{\mu_2}\,l \\
& +(\mu_2-A)\sinh^2\sqrt{\mu_2}\,l\big\}\,.
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Iremos precisar das seguintes equações:

$$\mu_1 = \frac{\lambda^2}{2}\left(\rho_1^2+\rho_2^2+(\rho_1^2-\rho_2^2)\sqrt{\Delta}\right) \tag{5.21}$$

$$\mu_2 = \frac{\lambda^2}{2}\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 - (\rho_1^2 - \rho_2^2)\sqrt{\Delta}\right) \tag{5.22}$$

onde

$$\Delta = 1 - 4\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2}\frac{\omega^2}{\lambda^2} \tag{5.23}$$

com $\omega^2 = c/e$.

Com um pouco de paciência podemos facilmente chegar que

$$\sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_j}} = O\,(1)\,; \tag{5.24}$$

$$\frac{(\mu_j - A)(\mu_j - B)}{(\mu_1 - \mu_2)^2} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \tag{5.25}$$

$$\frac{C(\mu_j - A)}{(\mu_1 - \mu_2)^2} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \tag{5.26}$$

$$\frac{C\mu_j}{(\mu_1 - \mu_2)^2} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \tag{5.27}$$

$$\frac{C\sqrt{\mu_1\mu_2}}{(\mu_1 - \mu_2)^2} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{5.28}$$

para $j = 1, 2$.

Utilizando (5.24)-(5.28), podemos reescrever (5.20)

$$D_2(\lambda) = -\frac{[(\mu_2 - A)(\mu_1 - B) + (\mu_1 - A)(\mu_2 - B)]}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\cosh\sqrt{\mu_1}\,l\cosh\sqrt{\mu_2}\,l + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{5.29}$$

Através de simples cálculos podemos reduzir a equação acima a

$$D_2(\lambda) = -\frac{\lambda^4(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\cosh\sqrt{\mu_1}\,l\cosh\sqrt{\mu_2}\,l + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{5.30}$$

Utilizando (5.23) temos

$$D_2(\lambda) = \frac{1}{\Delta} \cosh \sqrt{\mu_1}\, l \cosh \sqrt{\mu_2}\, l + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{5.31}$$

Quando $|Im\lambda| \to \infty$ é fácil ver que $\Delta \to 1$ e, conseqüentemente $\mu_1 \to \lambda^2\rho_1^2$ e $\mu_2 \to \lambda^2\rho_2^2$. Ademais $\cosh \sqrt{\mu_j}\, l$ fica limitado.

Assim podemos concluir que

$$D_2(\lambda) = \cosh \rho_1\lambda\, l \cosh \rho_2\lambda\, l + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{5.32}$$

quando $|Im\lambda| \to \infty$.

Analogamente chegamos as outras expansões assintóticas.

Defina

$$f(\lambda) = \cosh \rho_1\lambda\, l \cosh \rho_2\lambda\, l. \tag{5.33}$$

É natural pensar que os zeros de $f(\lambda)$ e de $D_2(\lambda)$ estejam próximos quando $|Im\lambda| \to \infty$.

Onde os zeros de $f(\lambda)$ são dados por:

$$\xi_n := \frac{2(n+1)\pi i}{2l}$$

Este problema é abordado em [Ge-Mc] e em [Vu-W-Xu-Y].

Referências Bibliográficas

[Ad] R.A.Adams, Sobolev Spaces, Academic Press,1975.

[B-M] A. Belleni-Morante, Applied Semigroups and Evolution Equations, Oxford, 1979.

[Bi] E. Bihuna, *A Base Dinâmica na Existência de Autovalores Duplos no Modelo de Timoshenko para uma Viga Livre-Livre*, UFRGS-PPGMAP, Porto Alegre,2006.

[Ca-Ja] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, Operational Methods in Applied Mathematics, Oxford University Press, 1949.

[Clay1] J.R.Claeyssen, S.N.J.Costa, *Modes for the coupled Timoshenko model with a restrained end*,Journal of Sound and Vibration 296,pg.1053-1058, 4-5(2006).

[Clay2] J.R. Claeyssen, G.C. Suazo, C. Jung. *Applied Numerical Mathematics.* A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations, vol. 39, 65-78, 1999.

[Clay3] J.R. Claeyssen, T. Tsukazan. *Quart.App.Math.* Dynamic Solutions of Linear Matrix Differential Equations, vol. XLVIII (1), 1990.

[Clay4] J.R. Claeyssen, R.A. Soder. *Journal of Sound and Vibration.* A Dynamical Basis for Computing Modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams, vol. 259(4), 986-990, 2003.

[Clay5] J.R.Claeyssen, On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions, *Journal of Sound and Vibration*, vol.140(1),73-84, 1990.

[Co-Mor] F.Conrad,O.Morgül, *On the Stabilization of a Flexible Beam*,SIAM J. Control Optim., vol.36, pg.1962-1986, 1998.

[Cos] S.N.J.Costa, *O Modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas, Estruturas Offshore e Nanotubos de Carbono através da Resposta Fundamental de Valor Inicial*, UFRGS-PPGMAP, Porto Alegre,2006.

[Cop] R.D.Copetti, *Sistemas Concentrados e Distribuídos através da Análise Modal Adjunta* , UFRGS/PROMEC, Porto Alegre,2002.

[Da-Kr] J.V.Daleckii, M.G.Krein *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces*, AMS Translations, vol.43, 1974.

[Dau-Li] R.Dautray, J.-L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vol.5, Springer, 1985.

[Dav] E. B. Davies, One-Parameter Semigroups, Academic Press, 1980.

[Ev] L.C. Evans,Partial Differential Equations, Berkeley, 1994.

[Ge-Mc] B.Geist, J.R.McLaughlin *Eigenvalues Formulas for the Uniform Timoshenko Beam*, Eletronic Research Announcements of the American Mathematical Society, vol. 4, pg. 12-17, 1998.

[K-Re] J.U.Kim,Y.Renardy, *Boundary Control of the Timoshenko Beam*, SIAM J. Control Optim., vol.25, n.6, November, 1987.

[Ka] T.Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, 1966.

[Kr] S. Krein̆, Linear Differential Equations in Banach Spaces, AMS Translations, vol.29, 1971.

[Pa] A.Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1983.

[Ri] P.Rideau, *Contrôle d'un assemblage de poutres flexibles par des capteurs-actionneurs ponctuels: étude du spectre du système*, Thèse, Ecole Nationale Supérieriure des Mines de Paris, Sophia-Antipolis, France,1985.

[Shu] M.A.Shubov, *Asymptotic and Spectral Analysis of the Spatially Nonhomogeneus Timoshenko Beam Model*, Math. Nachr., 241, pg.125-162, 2002.

[Vu-W-Xu-Y] Q.-P. Vu, J.-M. Wang, G.-Q. Xu, S.-P.Yung *Spectral Analysis and System of Fundamental Solutions for Timoshenko Beams* , Applied Mathematics Letters 18, 2005.