UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA – UFRGS
DOUTORADO EM ENSINO DE FÍSICA

INVESTIGAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM FÍSICA BÁSICA UNIVERSITÁRIA A PARTIR DE UM ENSINO QUE INTEGRA SITUAÇÕES E CONCEITOS DAS DISCIPLINAS DE CÁLCULO I E DE FÍSICA I

MARIA CECÍLIA PEREIRA SANTAROSA

PORTO ALEGRE
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA

DOUTORADO EM ENSINO DE FÍSICA

INVESTIGAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM FÍSICA BÁSICA UNIVERSITÁRIA A PARTIR DE UM ENSINO QUE INTEGRA SITUAÇÕES E CONCEITOS DAS DISCIPLINAS DE CÁLCULO I E DE FÍSICA I

MARIA CECÍLIA PEREIRA SANTAROSA

Tese de Doutorado em Ensino de Física apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Física.

Orientador: **Dr. Marco Antonio Moreira**

Porto Alegre

2013

MARIA CECÍLIA PEREIRA SANTAROSA

INVESTIGAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM FÍSICA BÁSICA UNIVERSITÁRIA A PARTIR DE UM ENSINO QUE INTEGRA SITUAÇÕES E CONCEITOS DAS DISCIPLINAS DE CÁLCULO I E DE FÍSICA I

Tese de Doutorado em Ensino de Física apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Física.

Orientador: **Dr. Marco Antonio Moreira**

Aprovada em 05 de dezembro de 2013.

Prof° Dr. Marco Antonio Moreira
Doutor em Ensino de Ciências, IF – UFRGS

Profª Dra. Maria Madalena Dullius
Doutora em Ensino de Ciências e Matemática, CETEC – UNIVATES

Profª Dra. Irene Maria Fonseca Strauch
Doutora em Física, IM – UFRGS

Prof° Dr. Daniel Adrian Stariolo
Doutor em Física, IF – UFRGS

Prof° Dr. Paulo Machado Mors
Doutor em Física, IF – UFRGS

Prof° Dr. Paulo Pureur Neto
Doutor em Ciências Físicas, IF – UFRGS

Dedico esta tese:

A Deus, pela minha existência;

Aos meus pais, Clotilde (in memoriam) e Rubem (in memoriam), pelos valores da humildade e do trabalho, transmitidos em vida;

Aos meus filhos, Carolina e Rubem Luiz, razões da minha vida;

Ao meu marido, Gerson, pelo apoio e companheirismo em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Dr. Marco Antonio Moreira, pela orientação do trabalho e pelo valioso legado de conhecimentos transmitido, mas principalmente pelo exemplo de educador a ser seguido;

Aos professores do Instituto de Física da UFRGS, que permitiram minha inserção, como pesquisadora, nas aulas das disciplinas de Física introdutória;

Aos alunos dos Cursos de Física da UFRGS, pelo entusiasmo, participação e colaboração com a pesquisa;

Aos pesquisadores do Laboratório de Supercondutividade e Magnetismo da UFRGS, que permitiram minha inserção nas atividades do Laboratório, o que contribuiu fortemente para os fundamentos metodológicos empregados na tese;

A Andrea Regina Zeni, Erika Mozena e Eliane Cappelletto, pela amizade e cumplicidade;

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, pelas discussões, compartilhamento de ideias e aprendizado;

As amigas: professora Bernadete Giuliato, pelos “ensinamentos de base”; professora Vânia Denardi, pela “lealdade” nos momentos difíceis; professora Irene Maria Fonseca Strauch, por mostrar que “existem outros caminhos”; professora Leandra Anversa Fioreze, pelos “ideais” firmados em outras épocas; professora Janice Rachelli, por “abrir as portas” para o meu retorno ao Departamento de Matemática da UFSM;

A todos que, de alguma forma, contribuíram para esta conquista, em especial a Vera Maria Cesar de Oliveira (Secretária da IENCI) e a Maria Aparecida de Souza Duran (Secretária do PPGEnFís da UFRGS) pelo apoio na etapa final da entrega da tese.

RESUMO

A presente tese teve por objetivo investigar e desenvolver formas alternativas de abordagem dos conteúdos matemáticos de Cálculo I, através de sua integração com conteúdos da disciplina de Física I, com vistas à aprendizagem significativa em física básica universitária. A investigação foi de caráter qualitativo, descritivo e interpretativo, fundamentada em estudos etnográficos. Para tanto, as intervenções da pesquisa ocorreram em turmas de Física Geral I A, disciplina ofertada para os discentes de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Na primeira fase de pesquisa, de caráter exploratório, concluiu-se que os conceitos matemáticos centrais do Cálculo I – derivadas e integrais – ora são contornados enquanto desenvolvido o conteúdo da Mecânica, ora são apresentados antecipadamente, com linguagem e notações distintas daquelas veiculadas no Cálculo I. A significação de tais conceitos, porém, não é estritamente necessária à resolução das situações-problemas propostas na disciplina. Na segunda fase de pesquisa, houve o desenvolvimento de material instrucional do Cálculo I para a disciplina de Física Geral I A. O referido material foi embasado na integração entre aquelas áreas, sendo distribuído nos seguintes módulos: vetores e trigonometria, noções de Cálculo Diferencial, e noções de Cálculo Integral. Constatou-se que o significado lógico do material dependia fortemente do modo com que era introduzido aos discentes: se trabalhado articuladamente ao longo do desenvolvimento do campo conceitual da Mecânica, e não de forma compartimentalizada, é que seria bem sucedido. Ainda na segunda etapa, vislumbrou-se a necessidade de criar estratégias de ensino que favorecessem a troca de significados entre os sujeitos participantes da pesquisa. Já na terceira etapa realizou-se, finalmente, a investigação da aprendizagem assentada na proposta integrada de ensino, a partir da visão de um professor de Cálculo. Sendo assim, no decorrer das atividades colaborativas, foi percebida a correlacionabilidade entre os conteúdos do Cálculo e os da Física. As atividades individuais, por sua vez, demonstraram que muitos discentes careciam de subsunçores básicos necessários à aprendizagem significativa em Mecânica e, dentre os que possuíam os subsunçores, poucos externalizavam a correlação entre Cálculo e Física. Tal fato demonstra a existência de uma estrutura cognitiva compartimentada mesmo se tratando de conhecimentos correlacionados. Discutem-se, pois, as implicações deste estudo para o ensino do Cálculo direcionado aos discentes da Física.

Palavras-Chave: Aprendizagem Significativa; Ensino Integrado; Situações Físicas; Conceitos Matemáticos; Etnografia em sala de aula.

ABSTRACT

This thesis aims to investigate and develop alternative ways of addressing the mathematical content of Calculus I, through its integration with content of Physics I, with a view to meaningful learning basic physics university. The research was qualitative, descriptive and interpretive, based on ethnographic studies. Therefore, the interventions occurred in the research groups of General Physics IA, discipline offered to the students of Physics, Federal University of Rio Grande do Sul - UFRGS. In the first phase of research, exploratory, it was concluded that the central mathematical concepts of Calculus I - derivatives and integrals - why are contoured as content developed of mechanics, are now presented in advance, with language and notation different from those conveyed in Calculation I. The significance of these concepts, however, is not strictly necessary to the resolution of problem situations in the proposed discipline. In the second phase of research was the development of instructional material from Calculus I for the introductory physics course I A. Such material was based on the integration between these areas, being distributed in the following modules: vectors and trigonometry, notions of differential calculus, integral calculus and basic. It was found that the logical meaning of the material relied heavily on the manner in which it was introduced to the students: it worked articulately throughout the development of the conceptual field of mechanics, not so compartmentalized, that would be successful. Still in the second stage, saw the need to create teaching strategies that would promote the exchange of meanings between subjects participating in the research. In the third step was conducted, finally, the investigation of learning grounded in the proposed integrated education, from the perspective of a teacher of Calculus. Thus, in the course of collaborative activities were perceived correlations between the contents of Calculus and Physics. Individual activities, in turn, demonstrated that many students lacked basic subsumers necessary for meaningful learning in mechanics and, among those who had the subsumers, few perceived correlations between calculation and Physics. This fact demonstrates the existence of a cognitive structure compartmentalized knowledge despite being correlated. We discuss therefore the implications of this study for teaching Calculus directed to students of physics.

Keywords: Meaningful Learning; Integrated Education; Physical Situations; Mathematical Concepts; Ethnography in the classroom.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O objetivo desta apresentação é fornecer um panorama geral do desenvolvimento da tese. As ideias e procedimentos adotados ao longo da pesquisa serão apresentados aqui de forma ampla e posteriormente serão progressivamente diferenciados no corpo do texto.

O trabalho teve como principal objetivo ***investigar e desenvolver formas alternativas de abordagens dos conteúdos matemáticos da disciplina de Cálculo através de uma possível integração com os conteúdos físicos da disciplina de Física, com vistas à aprendizagem significativa em Física Básica Universitária, na primeira etapa dos Cursos de Graduação em Física.***

A tese foi motivada por problemas vivenciados com o sistema de ensino/aprendizagem da disciplina de Cálculo em dois diferentes contextos: Universidade Federal de Santa Maria[1] (UFSM) e Universidade Federal do Rio Grande do Sul[2] (UFRGS). Dentre os problemas destacamos a *desarticulação no ensino*, entre os conteúdos abordados nas disciplinas de Cálculo e de Física, no primeiro semestre dos Cursos de Graduação em Física.

Inicialmente, fizemos uma breve revisão da literatura buscando estudos que tratassem do tema relacionado aos problemas no sistema de ensino e aprendizagem das referidas disciplinas, no contexto considerado. Após a análise desta revisão, elaboramos uma hipótese inicial, relacionando os resultados analisados com problemas vivenciados ao longo de nossa atuação profissional.

Pressupomos, então, que a desarticulação sugerida entre as duas áreas provém da forte influência de estratégias comportamentalistas, presentes nos seus respectivos sistemas de ensino. Este tipo de concepção fornece poucas possibilidades para inovações metodológicas, ficando o ensino das duas áreas mantido na sua forma tradicional, e compartimentado.

Esse fato pode desencadear a desmotivação para o aprendizado, levando à reprovação ou evasão em ambas as disciplinas. A mais grave consequência, porém, pode vir a ser o tipo de aprendizagem que está sendo proporcionada aos alunos. A Matemática ensinada na forma tradicional e compartimentada não favorece o entendimento dos significados dos conceitos a partir das situações-problema enfrentadas pelos alunos.

[1] Instituição onde a autora mantém o vínculo profissional desde 1996.

[2] Instituição onde a autora manteve vínculo provisório de 2006 até 2009.

O produto deste processo poderá ser uma *aprendizagem mecânica*, na qual os conhecimentos e experiências prévias dos estudantes não influenciam e não interagem com o novo conhecimento adquirido. Sob estas condições, as informações recebidas ficam retidas brevemente na memória, sendo facilmente esquecidas frente a novas situações, mais complexas, que necessitam de conhecimentos anteriores elaborados e diferenciados para serem solucionadas.

Partindo deste pressuposto, construímos uma questão geral de pesquisa: ***no nível do ensino, é possível integrar conteúdos matemáticos e físicos das disciplinas de Cálculo e Física, à luz da teoria da aprendizagem significativa e da teoria dos campos conceituais, com vistas à aprendizagem significativa em Física Básica Universitária, na primeira etapa dos Cursos de Graduação em Física?*** Para respondê-la levamos em conta fundamentações *teórica, metodológica e epistemológica,* senão vejamos.

Os *fundamentos teóricos* necessários estão implícitos nas justificativas e hipótese inicial do trabalho. Se um ensino com concepções *comportamentalistas* pode propiciar uma aprendizagem técnica e mecânica, parece lógico que um *enfoque cognitivista* poderia favorecer outros tipos de aprendizagem. Assim, optamos por tentar incrementar o ensino à luz da *teoria da Aprendizagem Significativa* (Ausubel, 1963 e 2000) e da *teoria dos Campos Conceituais* (Vergnaud, 1990).

Esta escolha deu-se por almejarmos que a aprendizagem dos conteúdos matemáticos seja rica em significados dentro do contexto da Física. Por outro lado, só saberemos se há evidências de aprendizagem significativa quando for possível analisar as formas como os alunos esquematizam e constroem seus conhecimentos, diante das situações-problema propostas no ensino.

Com relação aos *fundamentos metodológicos,* consideramos que nossa maior experiência é com o ensino de Cálculo e que desejávamos investigar relações da Matemática com a Física no contexto da Física, nos níveis do ensino e da aprendizagem. Optamos, então, por um *estudo do tipo etnográfico,* caracterizado pela *observação participante*, pelas *entrevistas em profundidade,* e pela *análise de documentos;* mais especificamente, trata-se de uma adaptação da etnografia aplicada à educação, defendida por André (1998 e 2005). A observação participante permitiria um constante grau de interação com a situação estudada. As entrevistas aprofundariam questões observadas e a análise das informações coletadas seria fortificada através da consulta a documentos históricos ou outros tipos de documentos relevantes.

Por outro lado, a metodologia de pesquisa escolhida estaria de acordo com as características básicas de uma *investigação qualitativa*, definidas por Bogdan e Biklen (1994). A *fonte direta dos dados ocorreria em ambientes naturais; a investigação seria de cunho descritivo; o processo da investigação se tornaria importante frente aos resultados obtidos; a análise dos dados poderia ser feita de forma indutiva, e o significado atribuído aos eventos pelos sujeitos seria de extrema importância para as conclusões do trabalho.*

Sabíamos que devido à escolha do referencial metodológico, hipóteses iniciais e resultados supostamente esperados poderiam ser modificados ou reestruturados ao longo da investigação. Novas questões de pesquisa poderiam surgir fazendo-se necessária a consulta a diferentes referenciais teóricos. A pesquisa seria fundamentalmente *interpretativa* dos fatos, e estaríamos completamente inseridos no contexto de investigação.

Consideramos esta uma importante forma de poder contribuir com o ensino do Cálculo para os cursos das áreas científicas. A *etnografia* coloca-nos próximos à realidade dos alunos em outros contextos, e o *estudo do desenvolvimento cognitivo* fornece um mapeamento das dificuldades enfrentadas por estes alunos.

Para trilhar o caminho escolhido surgiram questões mais específicas de pesquisa.

- ***De que forma a matemática é transposta nas aulas da disciplina de Física Geral I A?***
- ***Quais situações-problema da disciplina de Física Geral I A podem dar sentido aos conceitos matemáticos desenvolvidos no Cálculo I?***
- ***É possível elaborar um material instrucional baseado na integração entre os conteúdos do Cálculo I e da Física Geral I A, à luz dos referenciais de Ausubel e Vergnaud?***
- ***Como se dá o processo do ensino e da aprendizagem da disciplina de Física Geral I A, a partir da integração sugerida?***
- ***Há evidências de aprendizagem significativa a partir desse processo?***

- ***Quais implicações para o ensino de Cálculo em disciplinas dirigidas a estudantes de cursos de Física?***

Na primeira etapa da pesquisa, denominada ***Estudo Exploratório***, buscamos respostas às duas primeiras questões. Os objetivos principais foram: *investigar as formas como a Matemática era transposta nas aulas da disciplina de Física teórica e experimental, e analisar situações-problema da disciplina de Física que podem dar sentido aos conceitos matemáticos da disciplina de Cálculo.*

Por dois semestres letivos consecutivos observamos as aulas das disciplinas: Física Geral e Experimental I ~~A~~[3], Física Geral I ~~A~~ e Física Experimental I ~~A~~[4], respectivamente. As disciplinas foram oferecidas para estudantes dos Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Física da UFRGS, em 2009/2 e 2010/1. Os registros foram feitos em diários de campo. Não utilizamos gravações em áudio e vídeo por percebermos que isto constrangia alunos e professores, de modo que suas atitudes e concepções deixavam de ser espontâneas.

Seguindo as recomendações de Rosa e Arnoldi (2006), realizamos entrevistas *semiestruturadas*, formulando questões de forma a permitir que os sujeitos discorressem e verbalizassem seus pensamentos, tendências e reflexões sobre temas relacionados com o Cálculo e a Física.

Resolvíamos listas de exercícios propostos observando como e quando os conceitos do Cálculo surgiam e de que forma surgiam. Paralelamente, realizamos consultas a documentos que pudessem fornecer informações sobre a criação dos Cursos de Física na UFRGS. Uma análise preliminar da grade curricular das disciplinas do primeiro semestre destes Cursos, no contexto investigado, mostra uma gradativa modificação estrutural das cadeiras matemáticas, em termos de conteúdos e carga horária. Alguns foram sendo retirados ao longo dos anos (como é o caso da *Matemática Elementar*), e outros foram sendo transferidos para o contexto da disciplina de Física (como é o caso de *Vetores*).

---

[3] Esta disciplina era composta pela parte teórica e pela parte experimental da Mecânica Básica. Foi oferecida até o segundo semestre de 2009, perfazendo uma carga horária de 120 horas/aula semestrais. 90 horas para a parte teórica e 30 horas para a parte experimental.

[4] A partir de 2010/1 a antiga disciplina foi dividida em duas. A Física Geral I ~~A~~, de 90 horas/aula semestrais, tratando da parte teórica e, a Física Experimental I ~~A~~, de 30 horas, tratando da parte experimental.

Pudemos constatar, dentre as aulas teóricas dos dois professores observados nesta etapa, que o primeiro *(professor A)* não desenvolveu os conceitos físicos de *velocidade e aceleração instantânea* a partir dos conceitos matemáticos de *derivada e integral de funções escalares*, apenas definiu-os, sem retomá-los ao longo do desenvolvimento da Dinâmica. O tópico matemático sobre *vetores* foi apresentado por ele de forma ampla, logo após o conteúdo inicial sobre *medições*, numa fase imediatamente anterior à dedução das *equações cinemáticas para o movimento unidimensional.*

O segundo professor observado *(professor B)* desenvolveu o conceito de *derivada e de integral*, na primeira semana de aula, e apresentou algumas regras básicas de derivação, juntamente com o conteúdo sobre Cinemática unidimensional. Também trabalhou com gráficos, realizando análises qualitativas do comportamento de curvas a partir de situações-problema clássicas da Cinemática. O conteúdo sobre *vetores* foi introduzido numa fase anterior ao desenvolvimento da teoria sobre *movimento bidimensional*, sendo retomado no ensino dos conceitos dinâmicos de *trabalho e torque*.

As listas de exercícios propostas em ambos os semestres observados são listas disponibilizadas no site geral da disciplina, e podem ser resolvidas apenas com aplicações de fórmulas matemáticas, sem uma exigência maior em termos do significado dos seus conceitos no contexto da Física.

Poucos exercícios fazem menção à interpretação dos conceitos *de derivada ou de integral para serem resolvidos.* Na sua grande maioria, nos exercícios propostos, estes conceitos podem ser contornados, de forma a não serem necessário para a resolução.

Pudemos observar que *a forma com que a Matemática é transposta na disciplina de Física é distinta da forma como a Matemática é transposta na disciplina de Cálculo.* Na forma como os sistemas de ensino se apresentam, parece até *não tratar-se da mesma Matemática*, tão distintas são as linguagens, notações e significados dos conceitos nos diferentes contextos.

A postura dos professores de Física com relação à Matemática é semelhante à postura dos professores da Matemática com relação à Física. No contexto da Física a Matemática é subordinada à *física conceitual* e, no contexto da Matemática, aplicações físicas são pouco referenciadas, o que caracteriza a desarticulação sugerida.

Nesta fase da pesquisa não tivemos acesso ao desempenho dos estudantes em provas avaliativas, mas interpretando os questionamentos levantados por eles em sala de aula constatamos serem necessárias e bem vindas, formas alternativas de abordagem dos conceitos matemáticos do Cálculo para o contexto da Física. O estudo etnográfico desta etapa trouxe à tona importantes considerações, as quais foram divididas em dez categorias, descritas e interpretadas ao longo da tese.

Para responder à terceira questão de pesquisa desenvolvemos uma segunda etapa, relacionada ao ***Material Instrucional do Cálculo para a Física*** a qual foi dividida em três fases: *elaboração, apresentação e análise de uma primeira versão de Material Instrucional*.

Aqui, pudemos avançar um pouco mais na forma de observação participante. Com a autorização do professor da disciplina de Física Geral I ~~A~~, para alunos do primeiro semestre letivo dos Cursos de Graduação em Física, em 2011/1, lecionamos três módulos denominados *Módulos Matemáticos do Cálculo para a Física*, num total de 6 horas/aula. Os módulos foram elaborados a partir das aulas observadas na etapa anterior da pesquisa, e trataram especificamente dos seguintes assuntos: *Vetores e Trigonometria; Noções de Cálculo Diferencial e Noções de Cálculo Integral.*

Além da elaboração e da forma de apresentação de uma primeira versão de material instrucional, supostamente potencialmente significativo, para os conteúdos matemáticos, outro objetivo foi interpretar como os conteúdos das duas disciplinas se entrelaçam ao longo do desenvolvimento da Mecânica, a partir da apresentação deste material, e se existe alguma implicação da forma que este conteúdo foi desenvolvido, para o aprendizado de conceitos integrados.

O professor da disciplina de Física (*professor C*) iniciou o semestre solicitando que os alunos indicassem, dentre uma lista de conceitos físicos, aqueles que não haviam visto no Ensino Médio. Também deixou que os alunos decidissem por onde iniciar o programa, se pela Cinemática ou pela Dinâmica. Antes da decisão dos alunos, esclareceu que a Cinemática não tem muita Física, pois trata da descrição Matemática do movimento. A maioria concordou em iniciar pela Dinâmica.

O módulo sobre *Vetores e Trigonometria* foi lecionado por mim após o desenvolvimento, pelo professor, de vários problemas de Mecânica envolvendo vetores em uma única dimensão. Neste caso, *vetor foi interpretado como um escalar positivo ou* *negativo*, dependendo do sistema de referência considerado. Já havia passado pelo menos duas semanas de aula quando apresentei o conceito de vetor, sua representação geométrica e analítica e as operações básicas com vetores, deixando fora, a pedido do professor, o produto escalar e o produto vetorial, que seriam abordados quando fossem apresentados os conceitos de *trabalho* e *torque*. Após o professor ter apresentado as definições de *velocidade e aceleração instantâneas* para os casos unidimensional e bidimensional, lecionei o segundo módulo sobre *noções do Cálculo Diferencial*. Retomei os conceitos, algumas regras básicas de derivação e sua interpretação geométrica e física. Algumas aulas depois, houve a apresentação do módulo sobre *noções do Cálculo Integral*. Da mesma forma, apresentei o conceito, algumas regras básicas de integração e sua interpretação geométrica.

Em substituição ao professor, trabalhei com os alunos em duas aulas de exercícios. Alguns entendiam a resolução dos problemas físicos por um professor de Cálculo como *outra forma de interpretar o problema*.

O tempo disponibilizado para a apresentação deste material não foi suficiente para que diferentes situações-problema pudessem ser inseridas no material instrucional, a fim de contribuir com a integração pretendida. Após minhas intervenções, os conceitos matemáticos da disciplina foram sendo retomados gradativamente pelo professor. À luz da teoria da aprendizagem significativa analisamos e discutimos a potencialidade significativa deste material no corpo da tese.

Na primeira prova, o professor permitiu que fosse cobrada uma questão que envolvia a interpretação das Leis de Newton juntamente com o conceito de derivada. A análise da representação matemática da questão por parte de alguns estudantes, à luz da teoria dos campos conceituais, indica que há pouca relação com o conteúdo do Cálculo, de forma significativa. No entanto, esta análise careceria de novas intervenções no ensino para que pudesse ser concluída.

Os três professores observados ao longo da pesquisa apresentam notável conhecimento matemático e físico. Apesar do grande apoio prestado por eles em prol da pesquisa, notamos que o interesse destes profissionais frente à disciplina que ministram é diferente dos interesses de um professor de Cálculo buscando a pretendida integração. Os programas das disciplinas de Física e de Cálculo são bastante extensos, devendo ser cumpridos no tempo estipulado.

Constatamos que, dentro dos padrões de ensino vigentes no contexto investigado, é difícil tentar realizar algum tipo de integração de conteúdos, no contexto da disciplina de Física.

Após este estudo, questões epistemológicas sobre *as relações entre a Matemática e a Física* surgiram, naturalmente. Constatamos a ênfase dada pelos sujeitos observados de que a *Física não é Matemática.*

Bunge[5] (1980) classifica a Matemática como uma *ciência formal* e a Física como uma *ciência fática*. De acordo com referido autor

> ...enquanto as ciências formais se contentam em demonstrar rigorosamente seus teoremas, as ciências fáticas têm que olhar as coisas e, sempre que possível, devem procurar modificá-las para tentar descobrir em que medida suas hipóteses são adequadas aos fatos (p.12). Os referentes das ciências fáticas são objetos concretos (coisas), e os referentes das ciências formais são objetos conceituais (construtos). Além do que nenhum objeto é concreto e conceitual ao mesmo tempo (ibid. p. 54).

Senão vejamos, a Física é uma ciência experimental que utiliza a Matemática como uma de suas linguagens. Todavia, a ideia da Matemática como uma simples ferramenta para a Física parece estar bastante distante da concepção articuladora entre as duas áreas. E é por esta razão que a pesquisa não trata de visualizar os conceitos matemáticos do Cálculo como uma espécie de pré-requisitos para a resolução de problemas físicos da Mecânica, senão de construir os conceitos matemáticos do Cálculo a partir de situações físicas.

Para Feynman (2008), a Matemática não é uma ciência, pois seu teste de validade não é a experiência. Em suas *dicas de física,* para alunos do Caltech na década de 1960, ele afirma:

> A matemática é um assunto bonito, e tem seus prós e contras, também, mas nós estamos tentando entender qual é o mínimo que temos que aprender para os propósitos da física. Assim, a atitude que é tomada aqui é “desrespeitosa” para a matemática, mas é completamente eficiente. Eu não estou menosprezando a matemática (ibid. p.33).

Parece ser esta a expectativa dos docentes de Física com relação à Matemática necessária para a aprendizagem da Física. Existem, no entanto, outros pontos de vista sobre o

[5] O autor define *objetos conceituais* por conceitos, proposições e teorias independentemente de suas representações linguísticas, que são objetos concretos (escritos ou falados). Exemplos: conjuntos, relações, funções, hipóteses, teoremas e concepções de todo tipo (p. 49).

assunto. Para Hewitt (2002), as equações matemáticas são *guias para o pensamento*, mostrando as conexões entre os conceitos sobre a natureza.

> Quando as ideias da ciência são expressas em termos matemáticos, elas não são ambíguas. As equações científicas proveem expressões compactas das relações entre os conceitos. Não possuem os duplos significados que frequentemente tornam confusa a discussão de ideias em linguagem comum. Quando as descobertas sobre a natureza são expressas matematicamente, é mais fácil comprová-las ou negá-las através de experimentos (ibid. p.33).

Sendo a Matemática uma linguagem ou guia para o pensamento, ao longo do trabalho nova questão específica de pesquisa surge: ***quais os lugares ocupados pela Matemática dentro do contexto da Física?*** Para respondê-la, nova revisão bibliográfica foi necessária, desta vez com ênfase nas relações entre a Matemática e a Física, nos níveis *teórico, metodológico e epistemológico*, para a qual reservamos um capítulo exclusivo. Com esta revisão construímos diretrizes que podem guiar a formulação do ensino de disciplinas matemáticas dirigidas a estudantes da Física.

Concluímos que um material instrucional do Cálculo para a Física, baseado na integração das duas áreas, não poderia ser desenvolvido de forma compartimentada, ao final de uma unidade física da Mecânica, e com carga horária pré-definida. Ao contrário, *tal material deveria apresentar os conceitos matemáticos à medida que fosse desenvolvido o conteúdo sobre Mecânica, no momento em que ela fosse necessária para os estudantes, com a linguagem pertinente das situações físicas. O significado lógico deste material dependeria fortemente do fato de ser desenvolvido articuladamente com os conteúdos da disciplina de Física.*

A próxima etapa, denominada ***Investigação da Aprendizagem a partir de um ensino integrado,*** teve como objetivo investigar como se dá o processo do ensino quando tentamos integrar conteúdos físicos e matemáticos nas aulas da disciplina de Física, e se há alguma evidência de aprendizagem significativa neste processo.

Assumimos as turmas da disciplina de Física Geral I ~~A~~, na condição de docência orientada, na UFRGS, por três semestres letivos consecutivos: 2011/2, 2012/1 e 2012/2, respectivamente. Ainda que não se trate de um sistema de ensino unificado, como ocorre na disciplina de Cálculo, procuramos manter alguns padrões adotados pelos docentes da mesma disciplina, em outras turmas. Havia um programa de ensino a ser cumprido, havia uma coordenação geral, bibliografias recomendadas, listas de exercícios pré-definidas, e um sistema avaliativo pré-determinado.

Para diferenciar nossa intervenção do ensino tradicional, aplicamos nos três semestres letivos *atividades colaborativas onde permitíamos, ao longo do desenvolvimento do conteúdo, discussões a respeito de cada tema tratado.* Os alunos reuniam-se em grupos para a discussão e resolução de exercícios. Essas discussões eram constantes e, algumas vezes, até mesmo polêmicas.

No semestre 2011/2 a intervenção foi numa turma de Licenciatura Noturna. Havia, inclusive, alguns alunos do Curso Diurno, já que sua matrícula era permitida. Foi o primeiro semestre em que tive contato como docente da disciplina de Física Geral I ~~A~~. Considero esta a etapa de adaptação ao conteúdo e aos métodos adotados no sistema de ensino/aprendizagem. Tornou-se uma adaptação no sentido de *sentir e entender como uma professora da disciplina de Cálculo ministra os conteúdos físicos e qual a expectativa dos alunos com relação a isto*.

Nas aulas que ministrei ao longo dos três semestres, busquei resgatar os *módulos matemáticos* desenvolvidos na fase anterior da pesquisa, procurando incrementá-los com formas específicas de apresentação do conteúdo, constatadas nas aulas dos três docentes observados ao longo da pesquisa. Das aulas do *professor A* resgatamos a forma com a qual desenvolveu o conteúdo sobre *vetores*; das aulas do *professor B* resgatamos a forma com a qual desenvolveu o conceito de *velocidade instantânea e aceleração instantânea a partir do conceito de derivada*; das aulas do *professor C* resgatamos *a introdução à Mecânica,* por ele apresentada no início da disciplina.

Nesta etapa pude perceber o quanto lecionar Física é diferente de lecionar Cálculo. Não há como errar uma técnica de integração ou de diferenciação na lousa. Mesmo que haja um engano, “apagamos” e resolvemos os problemas novamente. Ocorre que não há questionamentos sobre a resposta final, mas sim apresentação de outras formas de resolução. No contexto da Física, os cálculos podem estar corretos, ainda que a interpretação física do problema esteja errada. Tal fato foi constatado muitas vezes: não bastava ser “muito bom” em álgebra ou em cálculos se a parte conceitual física não tivesse sido entendida. A participação dos estudantes era bastante ativa. Procuravam acrescentar às discussões, situações vivenciadas através de suas experiências.

No semestre 2012/1, a turma era do diurno. Havia alunos do Bacharelado e da Licenciatura em Física. Naquele semestre permaneci um mês retratando o conteúdo da Cinemática, inclusive adentrando em noções do conteúdo sobre *análise vetorial*. A parte *conceitual da matemática* foi um pouco mais exigida no primeiro trabalho e na primeira prova aplicada, ocasião em que alguns alunos reclamaram, afirmando que as questões propostas não estavam de acordo com as questões das listas de exercícios presentes no site oficial da disciplina. Observei que mesmo desenvolvendo diferentes *situações* em sala de aula, os estudantes estavam atrelados às listas de exercícios do sistema tradicional de ensino.

Após a primeira prova alguns alunos abandonaram a disciplina, e outros pareciam desmotivados com o assunto. Os que permaneceram, aguardavam pelo início do conteúdo sobre Dinâmica. Notei que os estudantes que procuram o curso de Física estão motivados a estudar Física conceitual. O interesse pela forma como a Matemática é utilizada no contexto da Física é secundário, para muitos deles. Alguns afirmam que suas dificuldades são devidas à falta de fundamentos matemáticos do Ensino Médio, de sorte que sua motivação advém dos aspectos físicos e respostas aos fenômenos naturais observados no dia-a-dia.

Segundo Martinez (2010) *motivação intrínseca* refere-se à associação emocional que leva uma pessoa a abraçar uma atividade por conta própria, ao invés de por recompensas que estão fora da atividade. A motivação intrínseca é classificada como um dos mais importantes objetivos da educação, ainda que, em muitos ambientes de ensino, seja substituída pela *motivação extrínseca*. Ocorre que no lugar da curiosidade e do interesse, a motivação passa a ser, por exemplo, a aprovação na disciplina. Ao invés de encorajarmos emoções positivas para o aprendizado, muitas vezes nós, docentes, desenvolvemos no aluno, ainda que de modo inconsciente, ansiedade, medo ou outros sentimentos negativos a respeito das disciplinas. Talvez isto possa ter ocorrido com alguns alunos, devido à tentativa de integrar a Matemática com a Física nas aulas de Física.

Tomemos, por exemplo, um aluno que buscava sua motivação de forma individual: enquanto ministrava as aulas, ele se punha a ler o livro de texto indicado nas referências bibliográficas. Argumentava que, como já havia estudado a teoria, preferia fazer os exercícios propostos no livro.

Já outro aluno, vez ou outra comparecia as aulas reaparecendo quando requisitado para algum trabalho mais importante ou para resolver às provas. Alegava que tudo que estava sendo ensinado já havia aprendido no semestre anterior, nada vislumbrando “de novo”. Segundo ele, sua reprovação na disciplina, no semestre anterior, foi causada pela desatenção na resolução das questões das provas.

De outra sorte, uma aluna que estava repetindo pela terceira vez a disciplina disse ter gostado da forma como os conteúdos eram introduzidos, a partir de situações-problema: a teoria era explicada à medida que o exercício era resolvido. Algumas aulas foram expostas em “power point”, a fim de estimular mais os alunos. Pude notar o quanto os conceitos do Cálculo são importantes para o entendimento de algumas situações propostas, através dos questionamentos dos estudantes à questões que, para serem solucionadas, necessitavam destes conceitos.

A terceira intervenção, em 2012/2, foi novamente implementada na turma do noturno. Além das atividades colaborativas propostas nos semestres anteriores, os alunos apresentaram trabalhos feitos em grupo, especificamente sobre o conteúdo “Energia”. Foi uma experiência muito rica, já que cada grupo adotou uma estratégia diferente. Nesta etapa os alunos concordaram que as apresentações fossem gravadas em vídeo. A cada apresentação, observamos a forma como os estudantes situam a Matemática na Física: apenas um dos grupos considerou, na apresentação, que o conteúdo sobre energia deveria ser dividido na parte do *modelo físico* seguido do *modelo matemático* e da interpretação dos dados. Dois outros grupos procuraram apresentar, após o desenvolvimento da parte conceitual, situações reais que requeriam a utilização da Matemática, tornando o ambiente de compartilhamento de informações rico e significativo. Um dos grupos desenvolveu um aparato experimental relacionado ao assunto abordado (a energia dos cataventos), o que contribuiu fortemente para a aprendizagem do conceito.

Notamos que a maior riqueza de pensamentos externalizados pelos estudantes ocorria, justamente, nas atividades colaborativas e nos debates em sala de aula comparativamente às formas externalizadas em provas ou trabalhos escritos. Transcrevemos e interpretamos, no corpo da tese, várias formas de representação matemática a partir da esquematização dos estudantes, frente às situações-problema propostas em provas, listas de exercícios, e em discussões abertas em sala de aula, à luz da teoria dos campos conceituais. Estas interpretações teriam fortes implicações para a forma como os conteúdos matemáticos podem ser ministrados para estudantes dos cursos de Física.

No capítulo conclusivo procuramos sintetizar as análises interpretativas das etapas anteriores e refletir sobre as implicações deste estudo para o ensino do Cálculo dirigido a estudantes da Física.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1. Reflexões iniciais

Este trabalho foi motivado por problemas vivenciados com o sistema de ensino/aprendizado da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral para alunos ingressantes nos Cursos das áreas científicas.

Quando estudante do Curso de Licenciatura em Matemática, na UFSM, surpreendia-me com as discussões filosóficas dos colegas da Física, nas aulas de Cálculo. Para eles, a forma como o conteúdo era desenvolvido parecia não ser suficiente para sanar suas dúvidas e atender suas expectativas.

Quando aluna do Mestrado em Física, na mesma Instituição, intrigavam-me as divergências de opiniões com relação ao enfoque matemático que deveria ser dado no desenvolvimento das disciplinas de Mecânica Clássica, Mecânica Estatística, Teoria Eletromagnética, Física Matemática e Mecânica Quântica. Os alunos, especialmente os físicos, criticavam alguns professores pela cobrança exagerada de um enfoque puramente matemático na resolução das questões das provas das disciplinas. Naquela época não entendia o porquê do descontentamento com relação à Matemática já que sua necessidade parecia ser natural frente às situações que nos eram proporcionadas.

Quando professora do Departamento de Matemática da UFSM passei a ter um contato mais direto com os estudantes, como docente da disciplina de Cálculo e como membro do colegiado do Curso de Física, em duas gestões. Nas reuniões de Curso sempre havia, na pauta, reclamações por parte dos alunos com relação à falta de didática de professores, ao excesso de professores substitutos nas disciplinas iniciais dos Cursos, aos problemas de relacionamento entre professor e aluno, dentre outros. As reclamações abrangiam tanto disciplinas da Matemática como disciplinas da Física, muito embora a forma de abordagem da Matemática em ambos os contextos fosse sempre a “causa primeira” das insatisfações.

Observava que poucos alunos que se destacavam na disciplina de Cálculo eram dos Cursos de Física e muitos com dificuldade no aprendizado, também. Além do que, o bom ou o mau desempenho parecia não estar diretamente relacionado com métodos de ensino utilizados.

Mas sob quais circunstâncias podemos afirmar que um estudante da Física tem um desempenho satisfatório na disciplina de Cálculo? Sempre que paramos para refletir sobre o *significado* da disciplina para os nossos alunos constatamos que algumas estratégias adotadas poderiam ter sido planejadas e avaliadas de forma diferente. De fato, dependendo da forma como o ensino de Cálculo for conduzido talvez os alunos não necessitem de um professor em sala de aula. Se o método for baseado exclusivamente na reprodução literal e técnica de índices bibliográficos não é difícil ser um *professor*, tampouco um *memorizador*, quando se está predisposto a apreender o conteúdo dessa forma.

Naquele contexto, a cada semestre letivo, a disciplina de Cálculo I seguia os mesmos padrões de ensino de semestres anteriores. Em uma carga horária de 90 horas/aula semestrais, duas ou três vezes por semana, os conteúdos eram expostos aos alunos com o uso de livros didáticos recomendados e distribuídos por editoras conceituadas. Se estivéssemos interessados na apresentação dos conceitos em sua forma final, na tradicional demonstração de teoremas ou na reprodução dos exemplos propostos, não teríamos problemas em encontrá-los nas bibliografias indicadas.

> Os conceitos são importantes no pensar, no sentir e no fazer, são fundamentais na compreensão humana, no desenvolvimento científico, no desenvolvimento cognitivo. Nosso mundo é um mundo de conceitos. No entanto, incompreensivelmente, a importância dos conceitos é ignorada na escola, em especial na educação científica. Os professores de ciências e matemáticas não dão atenção aos conceitos, preferem fórmulas, algoritmos, regras empíricas, demonstrações e experimentações que sempre funcionam, perguntas com respostas predeterminadas (Moreira, 2008).

De fato, conteúdos apresentados em livros texto estão prontos e parecem facilmente executáveis. No entanto, sofreram um processo único para serem escritos e apresentam visões pessoais de diferentes autores. O processo do ensino requer uma análise crítica destes conteúdos, não com a pretensão de redescobri-los, mas de entender qual sua utilidade nos diferentes contextos em que são empregados.

De acordo com Novak (2000) para levar em conta o processo educacional devemos considerar cinco elementos fundamentais: *o aluno, o professor, o conhecimento, a avaliação e o contexto*. A combinação destes elementos gera a construção ou a reconstrução do significado das experiências vivenciadas ao longo da formação educacional. Dificilmente isto é levado em conta em sistemas de ensino tradicionais.

Listas de exercícios da disciplina eram selecionadas nos próprios livros indicados nas referências bibliográficas do plano de ensino. As discussões destes exercícios nas vésperas das provas muitas vezes acabavam sendo sua resolução na lousa. Prontamente os alunos transcreviam-nas nos seus cadernos, considerando que pudessem ser cobradas questões semelhantes nas provas.

As avaliações eram *somativas*[6] e realizadas ao final de cada unidade de ensino trabalhada. Em muitas situações este tipo de avaliação é necessária, especialmente quando nos deparamos com turmas muito grandes. No entanto, a avaliação da aprendizagem deve estar relacionada às concepções de ensino que orientam a ação do professor.

> Não tem sentido hoje, em uma época de grandes avanços do conhecimento, de grandes mudanças tecnológicas, continuar avaliando exatamente como se avaliava há trinta ou quarenta anos atrás, no auge do comportamentalismo (Moreira, 2007).

Se os alunos não atingissem média aritmética mínima nas três provas realizadas durante o semestre letivo poderiam realizar um exame final versando sobre toda a matéria do semestre, desde que tivessem frequência mínima. Acreditando que alguns deles pudessem apresentar uma evolução do conhecimento no final do semestre letivo, a fim de estimulá-los, numa fase anterior ao exame final, aplicávamos as chamadas *provas substitutivas*. Nelas, poderia ser empregado o mesmo raciocínio da resolução dos exercícios. Era comum que alguns deles transcrevessem as resoluções dos exercícios que haviam memorizado, não se atendo nem mesmo à leitura da questão. Devido a isto, alguns professores optavam por não devolverem as provas, como forma de evitar que as questões pudessem ser memorizadas. *É lamentável o prejuízo na formação dos alunos diante de um sistema de ensino que estimula, mesmo que inconscientemente, a memorização de provas e listas de exercícios.* Seria esta a mesma realidade em outros contextos[7]?

Na UFRGS somaram-se à experiência já adquirida outras tantas, com um olhar mais atento para todos os acontecimentos em sala de aula e no ambiente profissional. Envolver-se

---

[6] Neste caso o aluno é avaliado ao final de cada fase de sua aprendizagem (Valadares e Graça, 1998).

[7] O histórico da formação do Curso de Física da UFSM não é o foco de nossa investigação. Porém, maiores Informações sobre suas habilitações, seus Projetos Pedagógicos, suas grades curriculares, seus programas de ensino e bibliografias adotadas nas disciplinas estão disponíveis em http://www.ufsm.br/cfisica/.

com a disciplina de Cálculo naquele contexto pode requerer o envolvimento no Programa denominado Pré-Cálculo, composto por uma atividade de extensão de 30 horas e pelas disciplinas de Cálculo e Geometria Analítica I A e II A. A atividade de extensão, denominada Pré-Cálculo, é oferecida semestralmente a alunos de todos os Cursos de Graduação que apresentem a disciplina de Cálculo na sua grade curricular. Já na sua vigésima terceira edição[8], a referida atividade visa proporcionar experiências que facilitem a transição da Matemática do Ensino Médio para a Matemática de nível Superior, em especial para o Cálculo. De acordo com a coordenação do projeto é uma forma de incentivar a autonomia, a autocrítica e superação de dificuldades dos alunos ingressantes. Lopes (1999) sugeriu essa iniciativa, que já vinha sendo adotada em universidades americanas, como possível solução para lidar com a falta de pré-requisitos dos alunos ingressantes.

A respeito do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS, o autor apresentou uma análise estatística comparativa entre o desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo I (onde as provas são dissertativas) e o desempenho dos alunos na prova de Matemática do concurso Vestibular (onde as questões são de múltipla escolha). Concluiu que os professores de Cálculo estão fazendo um excelente trabalho frente ao baixo nível de conhecimento matemático de muitos alunos ingressantes[9].

Já no primeiro semestre, na cadeira de Cálculo e Geometria Analítica I A, o aluno divide a sala de aula com outros tantos (~70 alunos). Em geral, cada turma é composta por alunos de até três Cursos distintos. Vale lembrar que as Universidades Federais Brasileiras têm adotado estratégias para resolver o aumento considerável de alunos em sala de aula, a fim de cumprir metas estipuladas pelo Ministério de Educação. Dentre essas metas destaca-se a criação de condições para a ampliação do acesso e permanência na educação superior, no nível de graduação, pelo melhor aproveitamento da estrutura física e de recursos humanos existentes (Projeto REUNI, 2007). Diante disto, o Departamento de Matemática da UFRGS optou por reservar às disciplinas de Cálculo um sistema de ensino unificado. Isto requer uma coordenação geral e um grupo de professores que ministram os conteúdos numa sequência

[8] Em 2013/1.

[9] Informações sobre o Curso Pré-Cálculo disponíveis em: http://www.ufrgs.br/procalculo/precalculo/precalculo.html.

igualmente pré-definida. Assim como na UFSM, as avaliações são *somativas*[10]. Entretanto, na UFRGS, são aplicadas em datas e horários específicos, para todos os alunos matriculados na disciplina, independentemente do Curso ao qual pertençam.

A unificação parece ser uma forma administrativa de solucionar as eventuais discrepâncias encontradas nas práticas de ensino e na avaliação do aprendizado adotados por diferentes professores. A experiência na coordenação do Curso de Graduação em Matemática da UFSM mostrou que, muitas vezes, os alunos matriculam-se naquelas turmas em que, supostamente, o professor seja mais *acessível* em termos de cobrança para aprovação. Isto acaba lotando determinadas turmas e esvaziando outras. Além disso, a unificação parece possibilitar o melhor aproveitamento dos recursos técnicos, humanos e físicos, para dar conta do aumento na demanda dos cursos de graduação.

É uma experiência nova para aqueles docentes que costumam ministrar suas aulas de forma individual, recorrendo aos recursos e metodologias próprios. Ao contrário, este sistema exige um espírito de participação e cumprimento de regras pré-estabelecidas. Para aqueles que estão iniciando suas carreiras como contratados, a unificação é uma segurança em termos didáticos e organizacionais[11]. Ela delimita a abordagem dos conteúdos, especifica aqueles de maior e de menor importância, e direciona o ensino para uma avaliação também unificada. Porém, muito embora a unificação tenha aspectos positivos, de certa forma ela tira do professor a autonomia universitária. Há professores experientes que não aceitam dar aulas em turmas unificadas por causa disso[12].

Com relação às provas, no sistema unificado cada questão, independentemente da turma, é corrigida por um ou dois professores. Neste caso, o professor pode estar avaliando a questão de um aluno supostamente desconhecido. Tecnicamente não há problemas maiores, já que o peso numérico de cada questão é pré-definido. Contudo, as decisões que temos que

---

[10] No caso da UFRGS, além das provas por unidade de ensino, eram realizados testes avaliativos a cada quinze dias. Era uma forma de manter os alunos constantemente envolvidos com o estudo dos conteúdos da disciplina.

[11] Nas Universidades públicas a escassez de recursos humanos, especialmente de professores, acarreta a contratação de profissionais denominados *professores substitutos.* Geralmente são alunos da Pós-Graduação que almejam um futuro profissional na própria Instituição. Em universidades norte-americanas esses profissionais são os chamados T*eaching Assistants (TAs)*.

[12] A falta de docentes experientes em disciplinas introdutórias com sistemas unificados também é um problema que foi detectado na disciplina de Física básica, ofertada pelo Departamento de Física da UFRGS, para os Cursos afins. Esta problemática fez com que a disciplina deixasse de ser unificada a partir de 2011/1.

tomar diante de problemas como o aumento significativo de alunos em sala de aula, pode nos colocar distantes das reais dificuldades de aprendizagem desses alunos.

Na Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, por exemplo, García e Cudmani (2005) realizaram um diagnóstico no sistema de aprendizagem da disciplina de Matemática I na Faculdade de Bioquímica, Química e Farmácia (~100 alunos). Dentre as conclusões destacam que: a avaliação dos conteúdos dá ênfase à memorização; não há relevância na avaliação de conhecimentos integrados; não são examinados os conhecimentos prévios dos estudantes; a avaliação não integra os processos do ensino e da aprendizagem; as provas de papel e lápis são os instrumentos mais empregados para a avaliação dos alunos.

Na UFRGS adota-se um livro de Cálculo com listas de exercícios pré-definidas[13]. Os docentes disponibilizam horários diversos de atendimento para os alunos matriculados na disciplina, independentemente da turma. Em geral estes horários são nos intervalos das aulas. É a oportunidade de conhecer as dúvidas dos alunos de outras turmas. Percebe-se que essas dúvidas assemelham-se, independentemente da turma e que, muitas vezes, os alunos não tentam, antecipadamente, fazer os exercícios. É comum alguns infiltrarem-se nas aulas de outros professores, no início do semestre, a fim de compararem diferentes didáticas. Esse fluxo termina à medida que o conteúdo da disciplina avança e à medida que os alunos acabam se adaptando às exigências da frequência mínima.

Horários de monitoria também são pré-determinados. A seleção dos monitores é feita através de uma prova seletiva, onde só podem participar aqueles que obtiveram conceito final A ou B na disciplina[14]. Também são escolhidos, por indicação dos professores e por desempenho na disciplina, os monitores que participam do Programa Pré-Cálculo. A procura pelas monitorias é intensa.

Lopes (1999) argumenta que a presença de monitores, fora do horário de aula, para discutir a resolução dos exercícios e apontar erros, pode reduzir drasticamente o índice de reprovação na disciplina de Cálculo I. O autor sugere que os órgãos administrativos devem valorizar mais essa atividade, já que os alunos mais qualificados acabam optando por bolsas de iniciação científica que são mais vantajosas em termos financeiros. No entanto, é grande o

---

[13] Atualmente são adotados os livros de Cálculo, Volume I e II, de Howard Anton, Irl Bievens e Stephen Davis.

[14] Processos de monitoria para as disciplinas dos currículos de graduação também são bastante comuns na UFSM.

interesse dos alunos na participação de atividades que possam enriquecer seu currículo acadêmico[15].

Mas, e quanto aos alunos dos Cursos de Física? Mesmo diante de tanto empenho por parte da comunidade Matemática da UFRGS, aquela percepção de outras épocas se mantinha; poucos se destacavam na disciplina; poucos pareciam motivados pelos conteúdos que ela aborda, e muitos faziam parte da lamentável estatística de reprovações e desistências[16].

Até 2009/2, na UFRGS, eram oferecidas 100 vagas para a Física (duração de quatro anos) e 30 vagas para a Física-Licenciatura Noturna (duração de cinco anos). Dos 867 alunos ingressantes no Bacharelado em Física, de 2000 a 2007, 80 colaram grau (~10%). Dos 250 ingressantes em Física Licenciatura Diurna 50 colaram grau no mesmo período (~20%) e, dos 280 ingressantes em Física Licenciatura Noturna 20 colaram grau (~7%) (Projeto Inova Física, 2007). Atualmente o Curso Bacharelado em Física é dividido em quatro habilitações: Astrofísica, Pesquisa Básica, Física Computacional e Materiais e Nanotecnologia, mantendo-se as Licenciaturas Diurna e Noturna.

Independentemente do grau de excelência das duas Instituições, parece que a mesma realidade dos estudantes da UFSM é vivenciada pelos estudantes da UFRGS[17]. No entanto, questões de pesquisa relacionadas ao sistema de ensino/aprendizado do Cálculo para estudante da Física deveriam ser respondidas cientificamente, a partir de uma intensa revisão bibliográfica, fundamentação teórica, metodológica e epistemológica, e não apenas através de observações empíricas, suposições e percepções[18].

---

[15] Semelhante ao caso da UFSM, as grades curriculares dos Cursos de Graduação passaram a exigir, a partir de 2005, carga horária mínima em *atividades complementares*. É uma forma de inserir os acadêmicos no seu contexto de formação e colocá-los a par das suas realidades profissionais.

[16] O Departamento de Matemática da UFRGS disponibiliza, semestralmente, o *Módulo Estatístico do Cálculo*, onde são apresentados índices de reprovação e desistência na disciplina. Os dados podem ser obtidos em http://turing.mat.ufrgs.br/mysql/estat.php.

[17] Informações sobre os Cursos de Graduação em Física disponíveis em: http://www.if.ufrgs.br/gra/index.html.

[18] Conhecendo as intenções pessoais de investigar questões relacionadas, o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da UFRGS abriu as portas para a iniciativa. A opção por um Programa em Ensino de Física ao invés de um Programa em Ensino de Matemática (já que as atividades profissionais da autora são exercidas num departamento de Matemática) justifica-se pela intenção de compreender como as dificuldades com o aprendizado dos conteúdos da disciplina de Cálculo repercutem nas questões do aprendizado dos conteúdos de disciplinas afins. Para isso, é necessário conhecer um pouco da especificidade dessas disciplinas.

1.2. Justificativas e hipótese inicial

Observamos no relato anterior fortes vínculos tradicionais e behavioristas presentes no sistema de ensino/aprendizagem da disciplina de Cálculo, em ambos os contextos.

> A tônica da visão de mundo behaviorista está nos comportamentos observáveis e mensuráveis do sujeito, i.e., nas respostas que ele dá aos estímulos externos. Está também naquilo que acontece após a emissão das respostas, ou seja, na consequência. Se a consequência for boa para o sujeito, haverá uma tendência de aumento na frequência da conduta e, ao contrário, se for desagradável, a frequência de respostas tenderá a diminuir (Moreira, 1999).

Os alunos são estimulados a estudarem para provas e testes de lápis, caneta e papel. As respostas dadas aos estímulos são as notas e conceitos obtidos nas avaliações. As melhores notas são as mais valorizadas. Estes alunos serão os escolhidos e aceitos em Programas de Pós-Graduação, na participação em Projetos de Pesquisa e Extensão, no recebimento de prêmios, na participação em monitorias, etc. *Recompensas desta natureza dão a garantia de uma boa formação científica para os nossos alunos?*

Na UFSM tínhamos total autonomia em sala de aula, desde que fosse cumprido um programa oficial da disciplina. No entanto, o isolamento nos distanciava da vivência de outros colegas, de outras realidades que pudessem ser importantes para a análise dos acontecimentos. A troca informal de experiências não nos obrigava a mudanças de atitudes e de concepções enganosas. Na dúvida, acabava sendo mais fácil manter os padrões tradicionais.

Já no caso da UFRGS, estávamos atrelados a um sistema de ensino pré-definido. Tratava-se de outro extremo, já que os eventos ocorridos em sala de aula poderiam necessitar mudanças nos métodos adotados. Estávamos, de antemão, supondo que tudo se enquadraria nos padrões determinados. Por outro lado, o sistema unificado de ensino nos colocava na responsabilidade de participação efetiva. Aprendíamos a nos moldar conforme a decisão da maioria.

Como já foi dito, nosso interesse não é comparar o grau de excelência das duas Instituições no nível do ensino, mas chamar a atenção para o fato de que, em ambos os contextos descritos, não havia relações mais próximas entre a disciplina de Cálculo e disciplinas das áreas científicas. Os conteúdos matemáticos eram desenvolvidos no domínio exclusivo da Matemática, de forma compartimentada. Nossos alunos graduavam-se com um ferramental matemático suficiente para a resolução técnica de qualquer problema que envolvesse regras de diferenciação e de integração, sem conhecer o significado disso para sua área de formação. Assim, nesta etapa do trabalho, foi necessário recorrer à literatura científica a fim de fundamentar o relato descrito anteriormente, formular uma hipótese inicial geral de pesquisa, e justificar a proposta de articulação entre as duas áreas.

Esta consulta inicial nos levou a dividir as justificativas em cinco categorias, cada qual com uma implicação direta com nossa proposta de estudo: *ensinos desarticulados e aprendizagem mecânica; complexidade da Matemática da Física; transferência de conhecimento do Cálculo para a Física; situações físicas e conceitos matemáticos; inovações didáticas.*

1.2.1. Ensinos desarticulados e aprendizagem mecânica

De um modo geral o Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina que compartilha, no primeiro semestre da vida acadêmica dos estudantes de Física, o mesmo espaço que disciplinas de Física teórica e experimental. No entanto, a experiência mostra que apesar da indiscutível importância dessa disciplina para a sua formação, grande parte dos alunos demonstra um gradativo desinteresse pelos conteúdos que ela aborda. Quando muito, conseguem apenas mecanizar as técnicas desenvolvidas a fim de obterem aprovação.

> Nossa educação superior é eminentemente voltada para a aprendizagem mecânica[19]. Formamos aplicadores, não geradores, de conhecimentos. Os egressos que eventualmente criam conhecimentos, o fazem apesar da educação superior que tiveram (Moreira, 2005).

Segundo Artigue (1995), muito embora os estudantes consigam realizar de forma mecânica alguns cálculos de derivadas e primitivas, dificilmente alcançam uma compreensão satisfatória dos conceitos centrais do Cálculo. Larson, Hoestetler e Edwards (1998) lamentam que os alunos tentem aprender Cálculo como se fosse simplesmente uma coleção de fórmulas de diferenciação e integração, já que o Cálculo pode desenvolver o raciocínio e a autoconfiança.

<u>1ª hipótese</u>: *A aprendizagem mecânica do Cálculo no contexto da Física pode ser fruto da desmotivação proveniente de sua desarticulação com o ensino da disciplina de Física.*

---

[19] Na *aprendizagem mecânica* as novas informações recebidas não interagem com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva (Moreira, 2006a).

A articulação que se supõe necessária é justificada pelas origens históricas do surgimento do Cálculo e da Física. Garber (1999) afirma que para entender a Física é necessário que entendamos simultaneamente ambos os desenvolvimentos da Física e do Cálculo. A autora define não só o papel da Matemática para a Física, mas também as interligações do tripleto: *Física Teórica, Física Experimental e Matemática*.

> Os físicos reorganizam suas interpretações experimentais em torno de uma série de princípios – leis da natureza – confinadas na esfera de ação dos conceitos mecânicos englobados nestes princípios. A teoria, então sistematizada e guiada pela matemática, usualmente o cálculo, dominou o empreendimento interpretativo dos físicos (ibid. p.2).

As relações entre a Física e a Matemática estão documentadas na história do desenvolvimento da humanidade. É forte a contribuição da Física para o desenvolvimento da Matemática, sendo inúmeros os grandes matemáticos cuja obra foi impulsionada, em grande parte, por problemas originários da Física. Temos, por exemplo, nomes como os de Newton, Euler, Laplace, Gauss e Riemann, que remontam a um tempo no qual as Ciências Naturais envolviam a Física e a Matemática de modo quase indistinto, até nomes mais recentes como os de Poincaré, Hilbert, Kolmogorov, John Von Neumann, Atiyah e Alain Connes (Couto, 2007). No entanto, nos diferentes níveis de ensino, este elo parece ter se perdido no momento em que os dois ramos do conhecimento compartimentaram-se na forma de disciplinas independentes, exclusivas de distintos departamentos: *Matemática e Física.*

1.2.2. Complexidade da Matemática da Física

Se a desarticulação entre os ensinos do Cálculo e da Física pode ser uma das causas da desmotivação do aluno ou de uma aprendizagem mecânica, também pode ser uma das causas do consequente abandono do Curso, ainda na etapa inicial.

Na Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, alguns professores que fazem parte do grupo de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología chamam a atenção para o problema da alta evasão nos Cursos de Física, e para o baixo rendimento nas disciplinas introdutórias. Para eles, mais importante do que atribuir o mau desempenho dos alunos a fatores externos, como a falta de conhecimentos prévios do Ensino Médio ou a falta de estudos, convém analisar atentamente os fatores internos. Dentre eles, a complexidade da Matemática introduzida na Física, que não permite um entendimento conceitual satisfatório dos fenômenos físicos (Ferreyra y González, 2000).

Professores de Física participantes do Grupo de Reelaboração do Ensino de Física, da Universidade de São Paulo explicam que os alunos têm sido expostos ao aparato matemático-formal antes mesmo de terem compreendido os conceitos físicos a que tal aparato deveria corresponder, o que faz com que a Física seja frequentemente confundida com a Matemática (GREF, 2002, pp. 15-16).

De fato, dependendo da forma como se dispõem os conteúdos das duas disciplinas, pode haver uma total falta de sincronismo entre seus ensinos. Um exemplo clássico disso é o conceito de derivada, que pode ser abordado indiretamente através dos conceitos de velocidade e aceleração instantânea pelo professor de Física, na primeira semana de aula, às vezes com um tratamento no nível da análise vetorial. Em geral, nos currículos de Física, a análise vetorial é trabalhada na disciplina de Cálculo, na segunda ou terceira etapa do Curso.

Por outro lado o mesmo conceito de derivada é trabalhado pelo professor de Cálculo após a abordagem do conteúdo sobre *limites de funções*, ao final do primeiro mês de aula com o tratamento de *função escalar*, com linguagem e notações diferentes daquelas utilizadas na Física. Certamente isso pode gerar uma confusão em termos de aprendizado. Nessas circunstâncias, ensinar antecipadamente os conceitos matemáticos avançados do Cálculo nas aulas de Física pode tornar a Matemática de difícil compreensão.

2ª hipótese: *Diferenças no uso de notações e linguagens, assincronismo nos ensinos do Cálculo e da Física e complexidade da Matemática podem levar o aluno ao abandono do curso.*

A propósito da evasão nos Cursos de Licenciatura em Física, é um problema que pode estar acarretando outro, um tanto mais surpreendente. Trata-se de professores de Matemática assumindo as responsabilidades de professores de Física, devido à escassez desses profissionais no Ensino Médio. No Estado de São Paulo, para que isso seja possível, basta que o profissional com formação em Licenciatura em Matemática tenha comprovado, em seu currículo, uma carga horária de 160 horas em disciplinas específicas da Física.

Em sua recente tese de doutorado, Santos (2010) direciona seu foco de pesquisa para as potencialidades e limitações que o domínio de conhecimentos matemáticos e de registros de suas representações gera para a aprendizagem de Física no Ensino Superior. Seus resultados revelam a importância de relacionar imbricadamente aspectos do conteúdo, didáticos e curriculares na formação inicial de professores de Matemática. Novamente parece justificar-se a necessidade de uma maior articulação em termos de linguagens, notações e conteúdos nos ensinos da Física e da Matemática.

1.2.3. Transferência do Cálculo para a Física

Muitas vezes, professores da Física detêm-se na resolução analítica dos problemas, para dar conta das questões da aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos na sua disciplina. Veit, Mors e Teodoro (2002) argumentam ser muito longo o tempo investido na solução matemática dos problemas abordados na primeira etapa do Curso de Física Geral, em detrimento da ênfase que deve ser dada às situações físicas. Com relação ao ensino da segunda Lei de Newton, por exemplo, a insistência numa abordagem puramente analítica pode comprometer a aprendizagem, visto que os ingressantes no ensino universitário geralmente não dispõem das ferramentas matemáticas necessárias para sua solução (ibid. 2002).

Contudo, observamos que mesmo em etapas posteriores dos Cursos de Graduação, muitas vezes os alunos não conseguem transferir os conhecimentos matemáticos adquiridos na disciplina de Cálculo para dar conta das situações físicas. Cui (2006) explica que, enquanto retenção é a capacidade de recordar o conhecimento em um momento posterior, transferência de aprendizagem é definida como a capacidade de aplicar o que aprendeu em uma situação em outra situação diferente. Em sua tese, a autora conclui que mesmo possuindo as habilidades de Cálculo necessárias para a resolução de problemas, a maioria dos alunos têm várias dificuldades na sua aplicação no contexto da Física. Ela defende um ensino de Cálculo mais direcionado para a área de formação dos alunos.

3ª hipótese: O sucesso na transferência do conhecimento do Cálculo para a Física requer a aquisição e a retenção desses conhecimentos, ao longo do Curso, de forma significativa.

Ao mesmo tempo em que não transferem conhecimentos, os alunos não conseguem visualizar as situações físicas como uma fonte de aplicações dos conteúdos abordados no Cálculo. Um exemplo disso é quando os alunos têm dificuldades em conectar gráficos com a Física. De acordo com McDermott, Rosenquist e Van Zee (1987), estas dificuldades não podem ser atribuídas apenas à inadequada preparação na Matemática. A análise descritiva dos dados registrados num laboratório de Física mostra que esta dificuldade é consequência direta da falta de habilidade dos alunos para fazer conexões entre uma representação gráfica e o assunto da matéria que ele representa.

1.2.4. Situações e conceitos

A respeito da aquisição e retenção do conhecimento, em 1963, David Paul Ausubel apresentou pela primeira vez a hipótese sobre a qual fundamentou sua Teoria da Aprendizagem Significativa: *a aquisição e a retenção do conhecimento é o produto de um processo ativo, integrativo e interacional entre o material instrucional (assunto), a matéria instrucional e ideias relevantes na estrutura cognitiva do aluno para o qual as novas ideias são relacionáveis de maneira particular* (Ausubel, 2000*).* Ele resume esta premissa da seguinte forma:

> Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo (apud Moreira, 2006a).

Porém, lidar com as possíveis deficiências dos alunos e ao mesmo tempo investigar seus conhecimentos prévios, com vistas à aprendizagem significativa, não é tarefa simples. É necessário um ensino bem estruturado, lembrando que a responsabilidade do aprendizado não é tarefa apenas do aluno. Além do que a aprendizagem significativa só ocorrerá se o aluno estiver predisposto para esse tipo de aprendizado e se o material instrucional apresentar algum tipo de relação com os conhecimentos prévios do aluno[20].

Aliado a isto, Vergnaud (1993) nos explica que é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o aprendiz. A operacionalidade de um conceito deve ser provada através de uma variada gama de situações, sendo responsabilidade do professor a análise dos comportamentos e os esquemas dos alunos a fim de compreender em que consiste cognitivamente um conceito. Traduzindo as ideias de Vergnaud para o contexto discutido acreditamos que a aprendizagem na disciplina de Física será significativa se a instrução for mediadora de situações físicas que possam dar sentido aos conceitos matemáticos do Cálculo, necessários para manipular tais situações. Da mesma forma, isso deveria ser feito na disciplina do Cálculo também, ou seja, usar situações que

[20] O material instrucional é caracterizado como potencialmente significativo se for relacionável (ou incorporável) à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não arbitrária e não literal (Moreira, 2006a).

dessem sentido aos conceitos do Cálculo. São as situações que dão sentidos aos conceitos em qualquer disciplina.

4ª hipótese: a *aprendizagem na disciplina de Física introdutória poderá ser significativa, se a instrução for mediadora de situações físicas que possam dar sentido aos conceitos matemáticos do Cálculo introdutório, necessários para manipular tais situações.*

1.2.5. Currículos tradicionais no ensino

Frente à argumentação que sistemas de ensino considerados tradicionais possam não promover uma aprendizagem significativa, nos questionamos sobre qual deve ser a melhor estratégia. Redisch e Steinberg (1999) argumentam que para descobrir o que podemos oferecer aos estudantes ingressantes nos Cursos de Física precisamos investigar três aspectos: *o que está envolvido no entendimento e uso da disciplina; o que os estudantes trazem para as aulas e como os estudantes respondem à instrução.* Como exemplo, os autores descrevem duas iniciativas implantadas nas universidades americanas e que funcionam eficientemente nas aulas de Física: Workshops (oficinas) e Tutoriais de Ensino.

5ª hipótese: *Pequenas mudanças nos moldes tradicionais de ensino podem tornar as aulas mais atrativas e motivadoras para uma aprendizagem significativa.*

Por exemplo, a disciplina de Cálculo introdutório poderia proporcionar um ensino um pouco mais direcionado para a área de formação do aluno (por si só este ato já poderia ser considerado uma pequena inovação no ensino), ao invés de enfatizar apenas a resolução algorítmica de problemas e apresentar a matemática num nível puramente técnico, como uma simples ferramenta operacional para as áreas afins.

Artigue (1995) descreve algumas críticas apresentadas pelo grupo da contra reforma do Cálculo nos anos 80, com relação aos sistemas de ensino vigentes nas décadas de 60 e 70: *a introdução das noções básicas sem o planejamento de um problema, a partir de problemas muito distantes da realidade do aluno; a construção linear dos conceitos, sem nenhuma conexão com a resolução de problemas; predomínio do quantitativo sobre o qualitativo; emprego muito precoce de uma linguagem formalizada; ensino muito centrado no discurso do professor.* Entretanto, a metodologia tradicional daquelas épocas ainda persiste nas Instituições de ensino.

Por outro lado, as aulas de Física introdutória poderiam ser mais discutidas a partir dos fenômenos físicos apresentados no contexto da Mecânica. Os alunos, através de atividades colaborativas teriam chance de expor seus pontos de vista sobre o assunto, compartilhando os significados da matéria com seus colegas e com o professor (isso por si só também já poderia ser considerado uma pequena inovação no ensino).

Moreira (2005) em sua obra *Aprendizagem Significativa Crítica* sugere algo ainda mais notável: *a aprendizagem significativa crítica é aquela perspectiva que permite ao sujeito fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, estar fora dela (ibid. p. 18).* Pensemos quão difícil seria para nós docentes proporcionarmos tal formação aos nossos alunos na atual conjuntura em que nos encontramos; atrelados a sistemas de ensino tradicionais com programas extensos a serem vencidos, com concepções comportamentalistas enraizadas na nossa formação, sem dúvidas nem questionamentos, sem nada a oferecer de diferente diante do que já existe.

Freire (2008) também nos fornece as diretrizes: *ensinar não é transferir conhecimentos, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção (ibid. p.22).* Neste sentido, qualquer ação na tentativa de melhorar a formação dos nossos alunos seria, sem dúvida, uma grande inovação didática.

Com base nas hipóteses específicas apresentadas formulamos a seguinte hipótese geral:

<u>Hipótese Geral</u>: *Métodos de ensino exclusivamente tradicionais adotados nas disciplinas de Cálculo e de Física introdutórias não permitem formas inovadoras de articulação entre as duas áreas do conhecimento. Essa desarticulação pode gerar problemas no ensino, tais como: diferenças no uso de linguagens e notações, a não utilização de situações-problema que deem sentido aos conceitos físicos e matemáticos, assincronismos no ensino dos conteúdos abordados e complexidade da Matemática na Física. Com relação ao aproveitamento acadêmico, a desarticulação pode levar à desmotivação, à reprovação, ao abandono do curso ou à aprendizagem mecânica em ambas as disciplinas.*

1.3. Objetivo e questões de pesquisa

Vimos na seção anterior que os problemas relacionados com o sistema de ensino e de aprendizagem do Cálculo são muitos, e não se esgotam aqui. Vão desde a falta de pré-requisitos do Ensino Médio, a desatualização dos métodos didáticos de ensino e a resistência de alguns professores em aceitarem mudanças em suas práticas (Cury, 1999) até a desmotivação dos alunos, provenientes de fatores internos e externos (Santos e Neto, 1999). Contudo, o que mais preocupa diante de todos esses problemas é constatar que a especificidade e a importância dos assuntos abordados nas disciplinas Cálculo e Física, bem como as possíveis articulações que poderiam existir entre elas, têm ficado cada vez mais distantes do contexto de formação do aluno, podendo caracterizar um obstáculo epistemológico para a sua aprendizagem.

Sabemos que é em termos de obstáculos que se torna preciso apresentar o problema do conhecimento científico (Bachelard, 1983). O enfrentamento das dificuldades proporciona idas e vindas aos próprios erros até a obtenção dos acertos, para o início de novos enfrentamentos. No entanto os obstáculos podem tornar-se intransponíveis diante de um emaranhado de situações e conceitos descorrelacionados.

Considerando as estreitas relações[21] entre a Matemática e a Física devemos refletir sobre o papel da abstração matemática frente ao aprendizado das situações físicas, já que a função da Matemática no contexto da Física vai muito além do que simplesmente expor um conteúdo programático numa aula de Cálculo. Não se trata de julgar se esta maneira é certa ou errada, pois estamos colocando em prática as concepções que herdamos de uma estrutura isolada de ensino. No entanto para a comunidade Física está claro que, considerada por si só, a Matemática não dá nenhuma informação sobre os fenômenos físicos apesar do grande poder que tem como abstrato simbólico na descrição do mundo real.

Devemos então nos perguntar: *o que pode um professor de Cálculo fazer para contribuir com a formação científica dos alunos da Física?* Um bom começo é buscar a articulação sugerida. Como professores de Cálculo, conhecemos algumas dificuldades apresentadas pelos alunos no domínio exclusivo da Matemática, mas não sabemos como seus erros e suas dúvidas repercutem em diferentes contextos. Sabemos que físicos e matemáticos têm visões e objetivos distintos e que, tradicionalmente, na forma como o sistema de ensino está estruturado, não há diálogo entre as duas áreas. Entretanto, para que haja um compromisso maior com a formação acadêmica e profissional desses alunos parecem

[21] Dentre as *habilidades gerais* que devem ser desenvolvidas pelos formandos em Física destaca-se a utilização da matemática como uma linguagem para a expressão dos fenômenos naturais (Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Física, 2001).

conveniente distintas visões do ensino e distintas compreensões da aprendizagem[22]. Pois então, seguem o objetivo e questões da pesquisa.

Objetivo Geral

- *Propomos investigar e desenvolver formas alternativas de abordagem dos conteúdos matemáticos da disciplina de Cálculo, através de uma possível integração com os conteúdos físicos da disciplina de Física, à luz da teoria da aprendizagem significativa e da teoria dos campos conceituais, com vistas à aprendizagem significativa em Física Básica Universitária, na primeira etapa dos Cursos de Graduação em Física.*

Questão Geral de Pesquisa

- *É possível integrar conteúdos matemáticos e físicos das disciplinas de Cálculo e Física, com vistas à aprendizagem significativa em Física Básica Universitária, na primeira etapa dos Cursos de Graduação em Física?*

Questões Específicas de Pesquisa

- *De que forma a matemática é transposta nas aulas da disciplina de Física Geral I A?*
- *Quais situações-problema da disciplina de Física Geral I A podem dar sentido aos conceitos matemáticos desenvolvidos na disciplina de Cálculo I?*
- *É possível elaborar um material instrucional para estudantes de Física baseado na integração entre os conteúdos do Cálculo I e da Física Geral I A, à luz dos referenciais de Ausubel e Vergnaud?*
- *Como se dá o processo do ensino e da aprendizagem da disciplina de Física Geral I A, a partir da integração sugerida?*
- *Há alguma evidência de aprendizagem significativa neste processo?*
- *Quais possíveis implicações para o ensino de Cálculo em disciplinas dirigidas a estudantes de cursos de Física?*

[22] De acordo com o Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI, quando se trabalha em conjunto sobre projetos motivadores e fora do habitual, as diferenças e até os conflitos interindividuais tendem a reduzir-se, chegando a desaparecer em alguns casos (Delors, 1998).

Capítulo 2

REVISÃO DA LITERATURA

Nesta etapa da investigação damos continuidade à breve revisão bibliográfica realizada no capítulo anterior, desta vez, de forma mais profunda, buscando resultados de pesquisa que pudessem contribuir com nossa proposta. Nossos objetivos são: *o rastreamento, documentação e análise de estudos cujas abordagens pudessem indicar os tipos de relações ocupadas pela Matemática dentro do contexto da Física (especialmente relações entre o Cálculo e a Física); verificar as possíveis implicações destes estudos para a nossa proposta, identificando semelhanças e diferenças em termos de estratégias adotadas, fundamentações teóricas, metodológicas e epistemológicas.*

As questões-foco que nos guiaram para esta consulta foram as seguintes: *Quais são os lugares ocupados pela Matemática dentro do contexto da Física? De que maneira a comunidade Física têm lidado com problemas relacionados com o uso da Matemática? Quais estratégias têm sido desenvolvidas ou utilizadas para dar conta destes problemas? Dentre estas estratégias existe alguma que integre o Cálculo com a Física? Quais são as implicações destes estudos para nossa proposta de pesquisa?*

2.1. Metodologia para a revisão

A fim de responder estas questões consultamos artigos científicos no período de 2000 até 2010. De acordo com o andamento do trabalho houve a necessidade de complementar a pesquisa com novas consultas, incluindo os anos de 2011, 2012 e o primeiro trimestre de 2013[23]. Parte dos estudos inicialmente analisados foi utilizada na construção das justificativas e hipótese inicial da pesquisa[24].

Os artigos analisados foram divididos em quatro categorias: *Lugares da Matemática na Física; Estratégias Articuladoras; Dificuldades com a aprendizagem da Matemática e*

[23] Devido à escolha do referencial metodológico adotado (*um estudo do tipo etnográfico)* sabíamos, antecipadamente, que hipóteses e resultados supostamente esperados poderiam ser modificados ou reestruturados na pesquisa. Foi justamente o que aconteceu; ao longo das etapas novos questionamentos surgiam fazendo-se necessária novas consultas.

[24] No artigo intitulado *O Cálculo e a Física: Reflexões iniciais acerca de um ensino integrado,* submetido à revista Experiências em Ensino de Ciências em junho de 2011 e aguardando parecer, apresentamos tais justificativas e hipóteses iniciais, além de uma descrição detalhada da proposta de pesquisa.

Formação Básica. Cada categoria foi distribuída em subcategorias (legendadas), com exceção da categoria Formação Básica. A categoria *Lugares da Matemática na Física* foi dividida em duas subcategorias: *Modelos Matemáticos na Física (M) e Modelagem Matemática na Física (MM).* Dentro da categoria *estratégias articuladoras* destacamos as seguintes subcategorias: *currículos integrados (CI) e inovações no ensino (IE)*. Da mesma forma, a categoria relacionada às *dificuldades de aprendizagem da Matemática na Física* é subdividida em duas subcategorias: *dificuldades com a Matemática (DM) no Cálculo* e *dificuldades com a Matemática na Física (DF).* Finalmente tratamos da categoria que se refere aos problemas originários da *Formação básica (FB).*

A quantidade de artigos analisados em cada categoria e subcategoria bem como os periódicos a que pertencem é apresentada na tabela 1. Além dos 26 artigos, houve a necessidade de recorrer a outras fontes para complementar as reflexões: teses de doutorado, dissertações de mestrado, trabalhos apresentados em congressos e livros-texto, que são citados ao longo do texto.

TABELA 1: Quantidade de artigos revisados distribuídos por categoria e subcategoria.

	Quantidade de Artigos por Categorias e Subcategorias							
	Lugares da Matemática na Física		Estratégias Articuladoras		Dificuldades com a Aprendizagem da Matemática		Problemas Originários da Formação Básica	**Total**
Periódicos	(M)	(MM)	(CI)	(IE)	(DMC)	(DMF)		
American Journal of Physics			1					1
Cad. Cat. de Ensino de Física	1							1
Cognition and Instruction						2		2
Enseñanza de las Ciencias					1	1		2
Int. Journal of Math. Educ. in Sci. and Tech.		4		2			3	9
Investigações em Ensino de Ciências						1		1
Journal of Computer Assisted Learning		1						1
Physics Education		2				1		3

Revista Brasileira de Ensino de Física		2						2
Revista Mexicana de Investigación Educativa		1						1
Science & Education	2							2
Science Education	1							1
Total	4	10	1	2	1	5	3	26
	14		3		6		3	

2.2. Relações entre a Matemática e a Física

Esta seção apresenta duas diferentes formas de relacionar a Matemática com a Física, através de Modelos Matemáticos e através da Modelagem Matemática.

2.2.1. Modelos Matemáticos

Modelos Matemáticos aparecem na literatura como um dos principais lugares ocupado pela Matemática dentro do contexto da Física.

Paty (1995) argumenta que a *Modelização Matemática* na Física pode ser efetuada de diversas formas, desde o aspecto puramente fenomelógico até a axiomatização[25] completa do fenômeno. No início do processo, a partir de dados empíricos coletados experimentalmente, o físico se propõe a explicar uma distribuição observada; com a ajuda do Cálculo e fundamentado em teorias científicas aceitas, surgem relações funcionais entre variáveis que podem ser ajustadas no sentido de que uma ou mais delas possam ser deixadas livres. Para que o modelo adquira um alcance Físico é necessário que seja abandonado o estágio de simples representação paramétrica dos dados e que se atinja uma representação mais profunda e mais explicativa do fenômeno.

Necessariamente tais modelos indicam uma forte ferramenta para a resolução de problemas em Física. Podem ser usados, por exemplo, para predizer a evolução no tempo de um sistema Físico ou retrodizer seu comportamento no passado (Quale; 2010). No entanto, este processo explicativo parece justificar muito bem a utilização da Matemática no contexto da Física, mas num nível teórico e experimental, a partir de atividades realizadas dentro dos

[25] Aqui entra o papel da Matemática, já que *axiomas* são proposições que se admitem como verdadeiras porque dela se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático.

Laboratórios de Pesquisa em Física. E no nível do ensino de Física, como se apresentam os *Modelos Matemáticos?*

Greca e Moreira (2001) abordam esta questão discutindo e apresentando as relações entre *Modelos Físicos, Modelos Matemáticos e Modelos Mentais* no nível do ensino de Ciências. De acordo com os autores, as articulações entre teoria e realidade são sempre mediadas por algum *Modelo Físico*[26], enquanto os *Modelos Matemáticos* constituem a parte axiomática, responsáveis por expressar as deduções e afirmações de uma dada teoria na forma de equações. Adotando como referencial teórico na sua pesquisa a *teoria dos Modelos Mentais* de Johnson-Laird os autores argumentam que a compreensão num campo particular da Física pode ser atingida quando for possível predizer um fenômeno Físico do seu *Modelo Físico* sem necessitar previamente referir-se ao formalismo Matemático.

Na visão dos autores*, o Modelo Matemático* está implícito e incorporado no *Modelo Físico.* Por sua vez, os dois são partes constitutivas do *Modelo Mental*[27]. Por si só o *Modelo Matemático* nada prediz sobre a teoria Física. Só terá sentido utilizá-lo após a interpretação semântica do sistema em estudo, através do *Modelo Físico*. Segundo os autores, a maioria dos estudantes têm dificuldades em construir Modelos Mentais apropriados para as situações físicas trabalhadas.

Fica claro neste estudo o importante papel subordinado ocupado pela Matemática no processo do entendimento de fenômenos Físicos. Em discussões anteriores alertou-se para o fato de que a destreza no manuseio de cálculos Matemáticos não implica a habilidade Matemática necessária para uma formação científica. Portanto, este papel de subordinação não exclui a Matemática do contexto da Física. Ao contrário, a relação de incorporação argumentada pelos autores caracteriza o Modelo Matemático como um conjunto que está contido num conjunto maior, referente ao conjunto dos Modelos Físicos, sendo que a intersecção destes conjuntos não é vazia, mas o próprio conjunto referente aos Modelos Matemáticos. No entanto, o complementar do conjunto referente aos Modelos Matemáticos com relação ao conjunto referente aos Modelos Físicos é a parte que não contém a Matemática, mas que está contida no universo Físico. O conjunto referente aos Modelos

---

[26] Espécie de descrição sintetizada e idealizada de um sistema Físico ou de um fenômeno Físico (ibid. Greca e Moreira).

[27] Modelo Mental poder ser definido como um análogo representacional dos fenômenos físicos, para os quais o modelo Físico é uma simplificação, uma iedealização (ibid. Greca e Moreira).

Mentais é ainda mais subordinante, por conter os demais. Neste estudo, Modelos Mentais podem ser considerados como um universo cognitivo único, onde se processa toda a construção conceitual fenomenológica. Vemos que a forma que os autores sugerem para lidar com a interpretação de um fenômeno Físico parece amenizar a problemática questão da complexidade Matemática apresentada na Física antes mesmo do entendimento conceitual Físico, como já foi dito.

Já Uhden e colaboradores (2012) sugerem que não haja distinção entre *Modelos Físicos* e *Modelos Matemáticos* no ensino da Física e que a imagem qualitativa possa ser considerada como o primeiro estágio de um *modelo Físico-Matemático*. Fazendo a mesma analogia de conjuntos utilizada no estudo anterior, neste caso podemos afirmar que tanto o conjunto dos Modelos Matemáticos pode estar contido no conjunto dos Modelos Físicos como vice-versa. Isto é, a intersecção dos dois conjuntos resulta em qualquer um dos dois conjuntos, e porque não dizer que, na visão dos autores trata-se de um único conjunto, o dos Modelos Físico-Matemáticos.

Para eles, assim como para muitos outros autores, a maneira como os Físicos criam e interpretam expressões Matemáticas são diferentes da maneira que um Matemático puro usa a Matemática, sendo a Física mais do que apenas um contexto para as aplicações Matemáticas. Pietrocola (2002), um dos colaboradores do estudo classifica as habilidades Matemáticas em *técnicas* e *estruturais*.

Após uma discussão histórica e filosófica sobre as relações da Física com a Matemática os autores expõem seu ponto de vista com relação à importância do desenvolvimento da habilidade Matemática estrutural para o contexto da Física. Para atingir a tal habilidade, os autores sugerem que a *resolução de problemas da Física* possa ser fundamentada numa readaptação do *ciclo de modelagem da Educação Matemática.* Nessa visão a regra da matematização na Física passa a ser *uma translação de ideias Físicas em linguagem Matemática*. Isto é, pensar a Física matematicamente.

Nesta discussão a Física e a Matemática parecem estar ainda mais próximas e os autores sugerem uma articulação com a área da Educação Matemática para atacar o problema das dificuldades Matemáticas dos alunos no contexto da Física. No entanto, a habilidade estrutural argumentada vai requerer a destreza na capacidade de transferência da Matemática para a Física, a qual passa, necessariamente, pela aquisição anterior de conhecimento matemático formal e técnico. Acreditamos não ser possível adquirir habilidades Matemáticas específicas para lidar com situações Físicas no domínio exclusivo da Física, mas sim com o auxílio da própria Matemática.

Entendemos que as concepções apresentadas em ambos os trabalhos não excluiriam a possibilidade de uma possível integração entre os ensinos do Cálculo I e da Física I. Nessas perspectivas ou os conceitos da disciplina do Cálculo I fundamentariam os Modelos Matemáticos necessários para dar conta dos Modelos Físicos, ou os conceitos matemáticos do Cálculo serviriam como peças estruturantes dos fenômenos Físicos, entrelaçando-se a estes, na forma de Modelos Físico-Matemáticos.

Entretanto existem posições mais cautelosas com relação ao uso de Modelos Matemáticos na Física. Quale (2010) critica o pressuposto fundamental que impera no ensino das Ciências: *o raciocínio Matemático válido conduzirá geralmente à Física válida*. Não é difícil entender porque os problemas que possam surgir dessa afirmação tendem a ser ignoradas pelos professores de Física.

Para o autor os Modelos Matemáticos frequentemente exibem soluções que não são esperadas, no sentido que elas descrevem uma situação Física que difere daquela que um Físico pode inicialmente ter pensado quando empregou o modelo. Pode ser que tais soluções inesperadas representem uma situação Física realizável. Mas, podem também descrever um sistema não Físico – isto é, um sistema que, de acordo com nossa intuição Física, simplesmente não existe. O problema que pode surgir deste fato diz respeito à posição epistêmica do *realismo na Física*: *uma teoria matemática que afirma dar uma descrição correta da realidade Física não poderia dar origem para tais soluções não realísticas (ibid. 2010).*

Em outras palavras o autor quer dizer*: muito cuidado com a forma com que se está trabalhando a Matemática no contexto da Física.* E eu acrescentaria: *muito cuidado com o papel de culpabilidade que se está atribuindo à Matemática dentro do contexto da Física*. A culpa deve ser atribuída a quem a está utilizando de forma equivocada. Ela só será considerada um problema se estiver sendo mal desenvolvida e mal interpretada nas suas mais variadas formas e significados, nos diferentes contextos em que está sendo empregada. Nestas circunstâncias, soluções numéricas apresentadas na resolução dos problemas propostos podem descrever sistemas que não são físicos, mas cabe ao professor mediar o processo de elucidação do problema direcionando o aluno para outras formas de interpretações do problema.

A implicação deste estudo para nossa proposta de pesquisa é um alerta: o professor de Cálculo deve estar consciente de que, se a intenção é contextualizar o ensino para o bom domínio da Física, deve-se preservar o que é essencial para o entendimento das leis e teorias Física, “debulhando” das mais variadas formas os resultados matemáticos obtidos frente às situações físicas trabalhadas.

2.2.2. Modelagem Matemática

A ideia de que os ensinos da Física e da Matemática possam ser integrados de alguma forma também não é novidade para os estudos que discutem a *Modelagem Matemática na Física (MM)* em favor da aprendizagem.

Gaisman (2006) afirma que o uso da MM permite desenvolver metodologias de ensino que promovem a reflexão dos conceitos importantes trabalhados e suas relações com a Matemática. Através de um projeto que investigou as concepções dos alunos com relação ao estudo do movimento do pêndulo e a forma como constroem seus *Modelos Mentais* no processo da modelagem, a autora destacou que, a maioria dos estudantes investigados, não relaciona a Matemática com a Física que conhece. Estas dificuldades não ficam apenas no nível de matérias distintas, mas também no nível do mesmo conceito estudado em diferentes contextos. A hipótese central do seu trabalho considerou que o conhecimento se desenvolve através da interação do que foi aprendido na escola – entre diversas disciplinas – com o ambiente social.

Comungamos com a autora no que diz respeito ao interacionismo social entre todos os sujeitos envolvidos no processo do ensino e da aprendizagem, bem como na observação do desenvolvimento das tarefas propostas, pelos estudantes. Em termos de conteúdo, seu trabalho difere do nosso, pois as articulações Matemáticas do movimento do pêndulo se dão mais especificamente com os conteúdos da disciplina matemática de Equações Diferenciais, a qual faz parte da quarta etapa dos Cursos de Graduação. Na nossa proposta pretendemos lidar com conceitos mais básicos do Cálculo e do Pré-Cálculo, relacionando-os com as situações e conceitos da Mecânica Básica. Logicamente, se apreendidos de forma significativa, tais conceitos básicos do Cálculo I e da Física I poderão se apresentar frente às disciplinas mais avançadas, de forma mais elaborada e diferenciada, o que facilitaria novas aprendizagens significativas.

Angell e colaboradores (2008) sugerem que métodos de Modelagem na Física além de refletirem a natureza da disciplina, são úteis na aprendizagem dos conceitos. Os autores criticam formas tradicionais do ensino da Física que podem induzir *à fragmentação do conhecimento, à passividade do estudante e à persistência de crenças ingênuas sobre o mundo físico*. A *Modelagem Empírico-Matemática*, por sua vez, pode proporcionar ao estudante o treinamento que ele precisa para interpretar uma situação Física em termos das relações Matemáticas. Particularmente, o estudo trata de uma análise das *representações múltiplas*[28] no estudo de fenômenos Físicos.

Diferentemente da nossa proposta, que foi aplicada entre alunos ingressantes dos Cursos de Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil, a referida pesquisa foi aplicada em Escolas Secundárias da Noruega, por meio de um projeto denominado PHYS21. Os autores argumentam que os estudantes que foram submetidos ao desenvolvimento desse projeto estão mais aptos para decodificarem a linguagem da Física. No seu trabalho as atividades de modelagem iniciam com o e entendimento do aparato experimental referente à situação a ser explorada. Algumas das atividades experimentais desenvolvidas no projeto foram denominadas: *dobrando a régua; alongamento da geleia de bebês; resistência do ar na queda de copos de bolinhos.*

Novamente comungamos com a abordagem qualitativa dada à pesquisa. No entanto, penso que o diferencial da nossa proposta é o estudo etnográfico realizado ao longo de seis semestres consecutivos, observando e registrando dados. Além do que todas as pesquisas citadas até agora não utilizaram os referenciais teóricos que propomos no nosso estudo.

Também de forma qualitativa Crouch e Haines (2004) realizaram um estudo que analisou as respostas a questionários de múltiplas escolhas sobre problemas de *Modelagem Matemática* para estudantes dos cursos de Engenharia, Ciências e Tecnologias. Os resultados demonstram e explicam os problemas vividos pelos estudantes quando têm que utilizar e relacionar Modelos Matemáticos nas aplicações de situações reais. Os autores argumentam que os estudantes são ineficientes neste processo, devendo apoiar-se nas suas próprias

[28] A partir do fenômeno o aluno constrói múltiplas representações para dar conta das situações: *representações experimentais; representações pictóricas; representações matemáticas e representações conceituais.*

experiências. Por isso sugerem que o ensino e a aprendizagem precisam focar de forma mais profunda no processo de abstração e de formulação de Modelos Matemáticos. Além da necessidade de praticar tarefas mais "abertas", num ambiente mais realístico.

Percebemos neste trabalho que a difícil conexão entre o "mundo Matemático" e o "mundo real" por parte dos alunos pode ser devido à lacuna cognitiva existente entre estes dois mundos. Entre a Matemática e o mundo real existe um longo caminho a ser percorrido, um importante processo de construção do Modelo Físico citado nos trabalhos anteriores. No entanto, o diferencial deste trabalho é a ênfase nos conhecimentos e experiências prévias no processo de construção do aprendizado. Esta proposta fica mais próxima da concepção de Ausubel (1963, 2000) de que o fator isolado mais importante para uma aprendizagem significativa são os conhecimentos prévios dos alunos.

No Brasil, trabalhos sobre modelagem com o uso das tecnologias de informação e comunicação (TICs) vêm sendo desenvolvido por um grupo de pesquisadores da área do Ensino de Física da UFRGS, Brasil. Veit e colaboradores (2002) discutem a importância da *modelagem computacional* no ensino/aprendizagem da Física, apresentando o *software Modellus* como uma importante ferramenta computacional para este fim. Sua defesa é pelo uso do computador como meio de construção do conhecimento e não apenas como máquina de informação. O enfoque dos autores é nos *Modelos Conceituais*[29], nos *Modelos Matemáticos*[30] e na modelagem – o processo das representações.

> O poder da linguagem Matemática resulta, pois, não da sua capacidade de explicação, mas da sua capacidade de representação, de descrição do processo natural (ibid. p.88).

Araujo e colaboradores (2004) também sugerem o uso do aplicativo MODELLUS nos cursos iniciais de Mecânica, para *modelagem computacional Matemática*. Para eles o aplicativo pode ser útil na introdução dos conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral, tornando o ensino da Cinemática atrativo no exercício do Cálculo de uma variável[31].

Para dar conta do aprendizado do conceito físico de *onda*, Bryan e Fennell (2009) sugerem uma sequência instrucional com o uso da modelagem, combinando *tecnologia e pedagogia*. O autor constata que esta iniciativa não apenas promove a construção do referido

[29] Versões didáticas dos modelos físicos.

[30] Formas de representações que se valem de objetos matemáticos tais como funções, vetores, figuras geométricas, etc.

[31] Essa ideia culminou na elaboração do livro didático *Física Geral Universitária, Mecânica Interativa,* um forte referencial para o ensino da Física introdutória (Veit e Mors, 2010).

conceito, mas demonstra, através de *representações múltiplas*[32], uma relação primária entre Ciência e Matemática.

Graham e Rowlands (1998) defendem o uso de softwares computacionais no ensino da Mecânica como ferramentas auxiliares para a construção de novos *Modelos Mentais* pelos estudantes, além de favorecer a ligação entre representações Matemáticas e o estudo do movimento. Segundo os autores, problemas considerados não padronizados, apresentados nos livros didáticos, podem ser abordados de forma mais clara através da utilização destes softwares. Simpson, Hoyles e Noss (2006) argumentam que a *Modelagem Matemática* do estudo do movimento seja investigada através do processo de *construção e colaboração*, via WEB.

A Modelagem Matemática computacional também é alvo de pesquisas no nível do Pré-Cálculo. Sokolowski e colaboradores (2011) explicam que muito embora os livros texto apresentem uma vasta gama de problemas aplicados às Ciências, o foco dos estudantes é na sua resolução mecânica. Para os autores, a fim de que os estudantes possam ter um entendimento significativo dos problemas propostos, devem ter oportunidade de aliar *conhecimento à experiência*. Então, propõem *simulações Físicas computacionais*[33] como alternativa para os experimentos reais.

Os artigos citados revelam dificuldade dos alunos ingressantes nos cursos das áreas científicas com a falta de conhecimentos prévios em Matemática (alguns se referem aos conhecimentos prévios do Cálculo) e com a aprendizagem mecânica que pode surgir neste processo. Todos enfatizam a importância de relacionar a Matemática com a Física para dar conta dos problemas Físicos, através do processo da modelagem computacional, que permite ao aluno um contato simultâneo com Modelos Físicos e Modelos Matemáticos sem uma maior preocupação inicial com o enfoque Matemático analítico. Entretanto, cedo ou tarde, os alunos terão de transpor, de forma analítica, seus conhecimentos Matemáticos para dar conta das situações físicas e, até mesmo para dar conta do manuseio dos recursos computacionais utilizados no ensino, em favor da aprendizagem. Com relação ao Modellus, por exemplo,

---

[32] Modelos científicos aparecem de várias formas tais como: *físicos (concreto; objetos tridimensionais); gestuais (cinestésicos; movimentos de corpos); verbais (texto falado e escrito; analogias, metáforas); pictóricos (diagramas visuais; animações); numéricos (tabelas de dados; listas); gráficos (pares ordenados sobre uma rede); matemáticos (fórmulas; equações).*

[33] Os autores sugerem simulações interativas - PhET- desenvolvidas na Universidade do Colorado, Estados Unidos, em Boulder.

apesar de apresentar facilidades na sintaxe da escrita, exige um conhecimento anterior do simbolismo Matemático necessário (ibid. Veit, 2002). Já a sintaxe de softwares como *Mathematica ou Maple*, mais utilizadas no domínio da Matemática, são mais complexas. Para obter o traçado de uma superfície, por exemplo, é necessário que o aluno tenha entendido de forma analítica a representação geométrica de funções de várias variáveis e também a representação geométrica de curvas planas: *domínio, imagem, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos críticos, pontos de inflexão, etc.*

Outros trabalhos encontrados na literatura científica abordam o desenvolvimento de situações-problema da Física com o uso de softwares Matemáticos, sem falar especificamente em *modelagem*. Alwis (1994) explica como utilizar o sistema de álgebra computacional (CAS) *Mathematica* para a análise do movimento de projéteis com ou sem a resistência do ar. O autor sugere que este recurso desperta os estudantes para o formalismo da Matemática, já que leis e teoremas podem ser demonstrados com a sua utilização.

No nosso trabalho não utilizamos softwares educativos para facilitar o entendimento das situações, pelos motivos já justificados, muito embora reconheçamos seu importante papel no processo de aprendizagem do fenômeno físico.

2.3. Estratégias Articuladoras

2.3.1. Currículos integrados

Algumas universidades tentam integrar o uso de recursos computacionais nos Laboratórios de Ensino com aulas teóricas e experimentais, em horários alternativos. É o caso dos Departamentos de Matemática e Física da Universidade de Puget Sound em Washington, USA, que desde 1999 oferecem aos alunos, um ano de curso que integra o Cálculo e a Física. O objetivo é aumentar a compreensão por temas relacionados com a sincronização entre as duas áreas. O curso é de oito horas semanais e composto por uma equipe formada por professores da Matemática e da Física. Essa iniciativa culminou na elaboração do livro didático *Integrated Physics and Calculus*, de dois volumes, que apresenta uma sugestão de sincronismo entre os tópicos abordados no ensino integrado[34] (Rex e Jackson, 1999). Não é um curso imposto pelos órgãos institucionais; ao contrário, os alunos podem optar por participar do currículo integrado ou dos currículos tradicionais que continuam sendo

[34] Outras Universidades adotaram a ideia: Portland, Tennessee e New Hampshire.

oferecidos pelas universidades. Para participar do curso integrado há a necessidade de noções básicas do Cálculo I, vistas no Ensino Médio[35], naquele contexto. Não foram encontrados na literatura resultados publicados, por estas universidades, com relação ao tipo e ao processo de aprendizagem dos alunos participantes do curso integrado. Contudo, os autores afirmam que no curso integrado os índices de reprovação são menores do que no curso tradicional, além de haver um interesse maior por aspectos relacionados à interdisciplinaridade entre as duas áreas.

No Brasil, a busca por esse sincronismo também é alvo de professores do Grupo Interdisciplinar de Pesquisa e Ensino de Matemática (GIPEM), da Universidade Federal de São Carlos, em São Paulo. A fim de melhorar o ensino do Cálculo Diferencial e Integral para os chamados "profissionais do futuro", incrementou-se o ensino com sistemas de computação algébrica, com modelagem matemática e com o projeto *Volta às Origens*[36](Costa e Salvador, 2004). Os resultados revelam uma melhoria significativa na motivação e no rendimento geral dos alunos.

Currículos integrados para as Ciências e as Engenharias também foram alvo de discussão e ação no *Union College, New York.* Dunn e Barbanel (1999) apresentam resultados de um sistema de ensino que integra Matemática e Física num curso sobre eletricidade e magnetismo e tópicos relacionados do Cálculo. Tradicionalmente, no ensino não integrado, observa-se que os estudantes apresentam muitas dificuldades com as ideias do Cálculo Vetorial, introduzidas com diferentes notações, em diferentes contextos. As conexões apresentada pelos autores são: *Campos Vetoriais e Campos Elétricos; Integrais de Superfície e Fluxo Elétrico; Teorema da Divergência e Lei de Gauss.* Dentre as vantagens observadas com relação ao currículo integrado destacam-se: *a comunicação entre físicos e matemáticos; melhor entendimento do Cálculo no contexto da Física; desenvolvimento da habilidade em aplicar e transferir conhecimentos do Cálculo para a Física.*

[35] No Brasil, há alguns simpatizantes da inserção de tópicos do Cálculo no Ensino Médio. Por exemplo, no ensino sobre funções, no primeiro ano, noções de derivada podem ser incluídas de forma simples e modesta (Ávila, 2006). Tal inserção pode ser favorecida com o uso da linguagem JAVA (Pereira, 2009), que além de melhorar o ensino de Matemática no próprio Ensino Médio favorece o posterior bom desempenho na disciplina introdutório do Cálculo, na Universidade (ibid. 2009). No Brasil, até a década de setenta, noções de derivada ocorriam no *Curso Científico* – equivalente ao Ensino Médio.

[36] Este projeto integra o Cálculo Diferencial I ou III com a Física I ou III, respectivamente, nas turmas de Engenharia de Materiais e Engenharia Química.

Este parte do conteúdo Físico talvez seja a que mais necessite dos conceitos do Cálculo, tanto escalar como vetorial. Mais uma vez salientamos a importância de que os conceitos mais básicos do Cálculo possam ser apreendidos significativamente, a partir da integração sugerida na nossa proposta, para a aprendizagem de novos currículos.

O significado do conceito de *campo vetorial* no contexto da Física também é tema de um projeto de investigação que se realizou na Faculdade de Engenharia da Universidade Nacional de La Plata, na Argentina (Costa et. al.; 2008). Com a utilização do *software matemático Maple,* o projeto contempla três aspectos fundamentais: *o ambiente físico de estudo; a integração curricular e as metodologias de ensino e aprendizagem.* A meta principal foi que, a partir da articulação proposta no ensino, o aluno fosse capaz de reconhecer campos de uso comum na Física, a partir da visualização de campos vetoriais, e interpretar aplicações dos mesmos. A similaridade com a nossa proposta é que os autores utilizaram a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1982) para analisar qualitativamente os resultados do estudo, muito embora no nosso estudo está análise tenha sido realizada de viés.

O primeiro seminário promovido pelo GIREP[37] em Udine, Itália, teve como temática *o desenvolvimento formal do pensamento na Física.* Destaca-se o estudo apresentado por Ellermeijer e Heck (2001) sobre possíveis consequências que podem surgir na aprendizagem quando são adotados no ensino *ambientes de aprendizagem integrados com tecnologias de informação.* Tais problemas são justamente causados pelas diferenças entre o uso de conceitos matemáticas nos dois diferentes contextos: *Física e Matemática*. Para os autores, em geral o computador é aplicado no ensino de Ciências de duas formas: *para a aquisição e processamento de dados e para simulação de problemas de modelagem*. No entanto, essa implementação é bastante complexa, devendo a equipe de trabalho integrado estar atenta para o significado da palavra *variável* na Matemática e na Física e suas implicações quanto ao uso do computador em tarefas envolvendo modelagem. Também enfatizam a importância das diferenças na construção e interpretação gráfica nos dois contextos. Para os autores ambientes integrados de aprendizagem tem diferentes complexidades quando considerados com ou sem a utilização do computador, sendo o primeiro mais facilmente aplicável em relação ao segundo. A riqueza do estudo para outros estudos propostos se deve à descrição detalhada e exemplificada de noções matemáticas básicas nos dois domínios, da Matemática e da Física.

[37] International Research Group on Physics Teaching.

2.3.2. Inovações no ensino

Diferentes abordagens metodológicas aplicadas no ensino, articuladas com outras áreas do conhecimento também são enfatizadas na literatura científica.

Keynes e Olson (2000)[38] apresentam um estudo que redesenha a sequência instrucional de um curso de Cálculo para estudantes universitários (*Calculus Initiative - CI*). A CI é um programa institucional que tem como principais objetivos: oportunizar uma aprendizagem ativa; aumentar o contato dos estudantes com o curso e aumentar a exposição dos alunos com aspectos conceituais e visuais do Cálculo. Seus instrutores visam: melhorar a qualidade do material de ensino; aumentar a satisfação profissional; buscar uma interação pessoal mais efetiva com os estudantes e melhorar a aprendizagem e a retenção dos conceitos e métodos do Cálculo. As características básicas do programa CI são: *alterações na apresentação do conteúdo; grupo de trabalho instrucional; aprendizagem centrada no aluno; atividades colaborativas; exploração de ideias matemáticas através do uso de tecnologias.* Uma análise quantitativa do desempenho do programa foi feita através da comparação entre um grupo experimental (onde calouros recebiam a instrução na forma inovadora) com um grupo de controle (onde calouros recebiam a instrução na forma tradicional). Também foi realizada uma análise qualitativa a partir dos dados quantitativos e estatísticos obtidos. Os perfis esperados pela faculdade para os alunos participantes do CI são: *habilidade para manusear com computação; habilidade para pensar geometricamente e conceitualmente; habilidade para explorar conceitos criativamente; habilidade para trabalhar independentemente e com os outros; habilidade para comunicar conceitos matemáticos claramente.*

Dentre os resultados positivos obtidos com a pesquisa destaca-se o aumento da curiosidade científica entre os estudantes e boa vontade para explorar, o que melhora significativamente a maneira com que eles utilizam Matemática e a usam em outros assuntos.

Também intencionamos que nossos estudantes sejam capazes de transferir os conhecimentos matemáticos do Cálculo frente às situações Físicas trabalhadas na Mecânica. Porém, diferentemente do referido estudo, pretendemos explorar este processo no contexto da disciplina de Física Básica universitária, e não no domínio exclusivo da disciplina de Cálculo.

---

[38] Pesquisadores do Instituto do Centro de tecnologia para Programas Educacionais (ITCEP), Escola de Matemática da Universidade de Minnesota, Minneapolis, Minnesota, USA.

A descrição do estudo que segue tem estreitas relações com o nosso, pois enfatiza de uma forma bastante aprofundada relações da Matemática e da Física no nível da Cinemática, onde os conceitos não são muito bem trabalhados nem no contexto do Cálculo e nem no contexto da Física. Além do que a descrição matemática apresentada na Cinemática é um dos pressupostos básicos para o entendimento do conceito de *movimento* por meio dos conceitos de *posição, velocidade* e *aceleração.* Particularmente o conceito de aceleração fará parte do tripleto fundamental para o entendimento da Dinâmica, juntamente com os conceitos de *força* e *massa.*

Basson (2002) argumenta que *se a Matemática é a linguagem da Física* necessariamente os problemas de aprendizagem na Matemática repercutirão em problemas de aprendizagem na Física. Para a autora, a transferência de conhecimentos entre as duas áreas é uma das grandes deficiências de aprendizagem causadas por sérios problemas nos ensinos da Física e da Matemática (como já foi amplamente discutido). *Como o novo conhecimento é aprendido, os estudantes deveriam ser direcionados a considerar múltiplos contextos e ligar estes conhecimentos com os conhecimentos previamente aprendidos.* Esta é premissa básica das ideias de Ausubel (1963, 2000), que afirma serem os conhecimentos prévios os fatores mais importantes para a aprendizagem significativa de novos conhecimentos. Neste sentido a proposta da autora assemelha-se à nossa.

No contexto vivenciado pela autora[39] vários esforços têm sido realizados a fim de estruturar novos currículos para disciplinas de Matemática e Ciências, levando em conta as necessidades do aprendiz. A interpretação de um currículo "integrado" envolvendo Matemática e Ciência é apresentada pela autora na figura 1, a qual representa um *continuum* que se estende até a Matemática pura por um lado e até a Ciência pura por outro lado; na posição central encontra-se a "Ciemática[40]". Nesta posição a Ciência continua a investigar o mundo natural e a Matemática continua a explorar os números, quantidades, dados, moldes, espaço, padrões e estruturas (ibid. Basson, 2002).

[39] Departamento de Física da Universidade da África do Sul.

[40] Onde os assuntos de ambas as disciplinas Ciência e Matemática são respeitados. Nessa posição não há superioridade nem inferioridade de uma disciplina com relação á outra.

Matemática pura	Ciência como parte da Matemática	Matemática e Ciência integradas	Matemática como parte da Ciência	Ciência pura

Figura 1: Continuum representando a integração Matemática-Ciência (ibid. p.681).

A autora exemplifica como poderia se dar o processo da *construção conceitual* do conceito *aceleração* no contexto de ensino integrado sugerido.

> Embora o estudante geralmente dê uma definição aceitável para *velocidade*, ele não entende o *conceito* bem o suficiente para determinar o procedimento que poderia ser usado numa situação física real para decidir se e quando dois objetivos tem a mesma *rapidez* (ibid. p.682).

Na figura 2 ela apresenta o que denomina “construção em blocos”, numa ordem descendente, dos conceitos matemáticos e físicos necessários para o entendimento do conceito aceleração: *rapidez e velocidade, variação, distância e deslocamento, intervalo de tempo e comprimento*.

A autora compara a hierarquia entre conceitos apresentada na sequência didática de dois livros texto de Física[41] indicando a não coerência com um formato de ensino que proporcione uma aprendizagem conceitual. Argumenta que novos materiais instrucionais de aprendizagem devem ser desenvolvidos, de tal forma que possam sustentar a estrutura básica dos conceitos, como no caso da construção em blocos apresentada para o entendimento do conceito aceleração. Para ela, quando o aprendiz conhece o que é movimento e como descrevê-lo, ele pode passa par a próxima fase: entender porque temos movimento e quais as suas causas (ibid. p.685).

A mesma discussão é realizada em termos dos conceitos matemáticos necessários para a conceitualização da *acelerelação,* destacando-se o conceito de *função* e os *aspectos espaciais* desenvolvidos na Matemática que precedem a Cinemática. Diferentemente do que é identificado em livros-texto de Matemática, a autora apresenta uma sequência de aspectos requeridos para introduzir os fundamentos construídos em blocos para: *posição, comprimento, ângulo e tempo.* Assim, é apresentada uma nova hierarquia de *blocos construídos* combinando Física e Matemática, para lidar com o conceito *aceleração*, conforme figura 3.

[41] Estes livros dão fortes referências iniciais ao estudo sobre vetores sendo que o foco principal é a descrição do movimento.

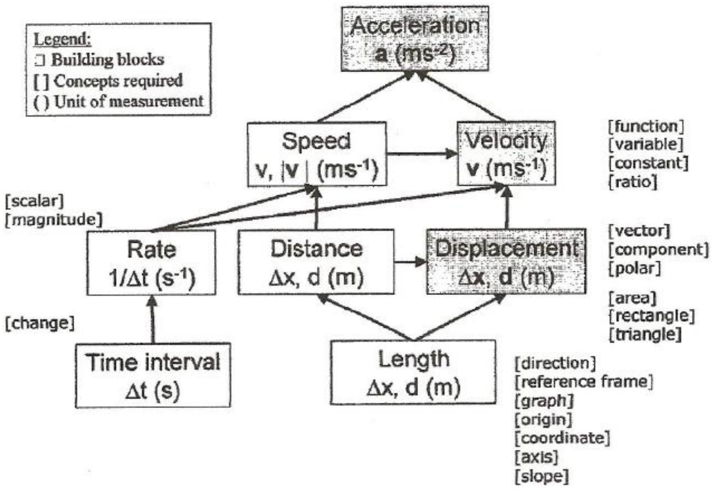


Figura 2: Hierarquia de conceitos físicos necessários para o conceito *aceleração* (ibid. Basson; 2002).

Após a discussão a autora conclui que muito embora a interação entre os ensinos da Física e da Matemática seja uma questão complexa, novas formas de abordagem para integrar as duas áreas poderiam ser aprimoradas e utilizadas a partir da *elaboração de materiais instrucionais que apresentem os conceitos científicos e matemáticos hierarquicamente relacionados*. A aprendizagem conceitual cognitiva poderia ser favorecida nestes moldes de ensino. Este foi uma das principais metas da nossa pesquisa, considerando que a elaboração de tais materiais instrucionais além de tentar integrar os conceitos Físicos e Matemáticos, deveria ser potencialmente significativo, relacionável aos conhecimentos anteriores presentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

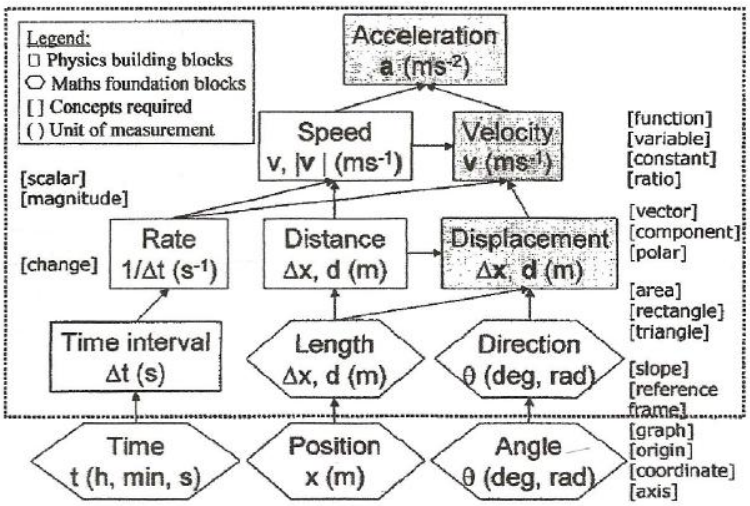


Figura 3: Herarquia de conceitos que combinam Física e Matemática (ibid. Basson; 2002).

Os resultados deste estudo são muito interessantes para a nossa pesquisa. Além de referenciar questões cognitivas para a aprendizagem conceitual, apresenta uma forte discussão em torno da elaboração de materiais instrucionais. Apesar de ser um estudo direcionado para estudantes do Ensino Médio, sua fundamentação teórica pode sustentar as mesmas concepções para o Ensino Superior, especificamente para as disciplinas iniciais dos cursos de graduação em Física, como é o nosso propósito. Muitas semelhanças se apresentam com os referenciais cognitivistas que almejamos empregar na pesquisa. A construção hierárquica em blocos apresentada pela autora pode ser interpretada como um *mapa conceitual* para o assunto abordado. Inclusive, da forma como foi construído podemos também interpretá-lo como um diagrama de conceitos, onde os que estão mais abaixo poderiam ser entendidos como pré-requisitos para a aprendizagem dos demais conceitos. A ideia de conteúdos de ensino considerados como pré-requisito não é o interesse de nossa pesquisa. Podemos entender que os fundamentos que sustentam o conceito de *aceleração* podem ser interpretados a partir da interação deste novo conhecimento com os conhecimentos prévios enraizados na mente do aluno, com os quais os novos conceitos serão apreendidos, numa relação de subordinação. Tais conceitos matemáticos e físicos fazem parte do *campo conceitual da Mecânica* que pode ser dominado a partir de uma grande variedade de situações-problema tanto da Física como da Matemática, se estivermos interessados na “integração” entre as duas áreas.

Interpretamos a ordem descendente de hierarquia apresentada como se o conceito aceleração estivesse subordinado aos demais conceitos, sendo os conceitos mais abrangentes os que estão situados na posição mais baixa do bloco: *tempo, posição e ângulo.* Nesta relação, a autora justifica a forte relação existente entre Matemática e a Física para o exemplo proposto. Entendemos que o conceito de aceleração deva ser abordado tanto através de situações Físicas da Mecânica como através de situações Matemáticas, como uma taxa de variação instantânea da velocidade ou como derivada de primeira ordem da função posição com respeito ao tempo.

Nossa proposta não almeja sugerir algum tipo de alteração na grade curricular das disciplinas do Cálculo e da Física Geral, para os Cursos de Graduação em Física da UFRGS. Não temos subsídios suficientes e nem competência para entrar nesta discussão. Nosso interesse é propor uma possível articulação entre os conteúdos desenvolvidos nas duas disciplinas, no contexto da disciplina de Física Geral I A, e investigar até que ponto essa estratégia é promovedora de uma aprendizagem significativa na etapa introdutória dos Cursos de Graduação. Acreditamos não haver sentido algum em mudanças curriculares, se forem promovedoras de uma aprendizagem mecânica. Espera-se que os resultados da pesquisa levem à reflexão quanto à verdadeira função das disciplinas Matemáticas para a formação profissional dos estudantes de Física.

2.4. Dificuldades de aprendizagem

Nesta seção procuramos analisar os principais tipos de dificuldades de aprendizagem da Matemática nos dois diferentes contextos: *Cálculo e Física.*

2.4.1. Dificuldades de aprendizagem no Cálculo

Em sua tese de doutorado, Rezende (2003) defende a hipótese de que grande parte dos problemas de aprendizagem no Cálculo é essencialmente de natureza epistemológica. Entrelaçando fatos históricos e pedagógicos o autor define cinco macro-espaços relacionados a estas dificuldades, identificados pelas cinco dualidades fundamentais do Cálculo: *discreto/contínuo; permanência/variabilidade; finito/infinito; local/global; sistematização/construção.*

Importantes para propostas que almejam possíveis articulações entre o Cálculo e a Física são os macroespaços das dualidades *variabilidade/permanência e sistematização/construção*, sugeridas pelo autor. Sua crítica, e também nossa, é a predominância no ensino superior da Matemática da abordagem estática sobre a abordagem dinâmica. O interessante para os estudantes da Física, por exemplo, é a construção do conceito de derivada a partir da medida instantânea da variabilidade de grandezas físicas, como *posição* e *velocidade*. Nas aulas tradicionais de Cálculo, em geral, a ênfase é na interpretação da derivada de uma função num determinado ponto como o coeficiente angular da reta tangente à curva, neste ponto. Se nosso objetivo é ensinar o Cálculo no contexto da Física devemos levar em conta a questão do *movimento,* a partir de alguma causa.

Com relação à dualidade sistematização/construção o autor critica o padrão proposto por Cauchy e Weierstrass, presente em clássicos livros de ensino de Cálculo, que obedece a sequência *limite, continuidade, derivada, diferencial e integral.* Nessa concepção, os conceitos do Cálculo são trabalhados no âmbito da justificação formal das definições e das demonstrações dos teoremas. Concordamos com o autor quando afirma que não são as ideias de *velocidade e coeficiente angular*, interpretações do conceito de *derivada.* Ao contrário, elas são ideias geradoras do campo semântico da noção de derivada. Juntamente com Vergnaud (1990) temos insistido que são as situações-problema físicas que podem dar significado aos conceitos matemáticos desenvolvidos na disciplina do Cálculo.

Muitas pesquisas associadas com a investigação da aprendizagem de conceitos específicos do Cálculo Diferencial e Integral são apresentadas no livro *Advanced Mathematical Thinking*[42] (Tall, 1991). Dentre eles destacam-se o trabalho de Theodore Eisenberg sobre as dificuldades de aprendizagem associadas com o conceito de *função*[43], o trabalho de Bernard Cornu sobre as dificuldades com conceito de *limite*[44] e o trabalho de Michèle Artigue voltado para a área da Análise Matemática[45].

O conceito de *derivada* também é foco de investigações. García e colaboradores (2006) investigaram o desenvolvimento da compreensão do conceito de *derivada* em nível do último ano do Ensino Médio e primeiro ano da universidade, a partir do *desenvolvimento de esquemas,* proposto por Jean Piaget. Para os autores os estudantes só terão uma compreensão completa da ideia de derivada quando estiverem aptos a reconhecer e reconstruir as ideias de razão, limite e função em diferentes contextos. Como conclusão os autores argumentam que a ideia de *síntese de transformação*[46] tem suficiente poder explicativo para ajudar-nos a caracterizar e compreender o processo pelo qual o aluno passa de um nível de desenvolvimento do esquema de derivada para o outro (ibid., 2006).

---

[42] Outros tópicos abordados no livro são: os processos envolvidos no pensamento matemático avançado, a criatividade matemática, a prova matemática, o papel das definições, símbolos e abstração reflexiva. Tall (1991) critica o sistema de ensino tradicional que apresenta para os alunos a forma final da dedução matemática ao invés de permitir que o estudante participe do seu ciclo completo de criação. Ele cita as palavras de Richard R. Skemp que diz que as abordagens correntes de ensino para graduandos tende a dar ao estudante *o produto final do pensamento matemático ao invés do processo do pensamento matemático*.

[43] O tema mais importante destacado por Eisenberg é que *funções* e suas notações associadas não são concebidas visualmente. Os estudantes parecem pensar no conceito de *função* em um único modo representacional simbólico (apud Tall, 1991).

[44] Segundo Carnu, um obstáculo epistemológico que aparece nesse domínio é que o termo limite favorece uma concepção de *limite* (no contexto do Cálculo) como uma barreira intransponível e não alcançável (apud Tall, 1991).

[45] Para Artigue (1995) existem três tipos de dificuldades de acesso ao Cálculo: a complexidade dos objetos básicos da disciplina (números reais, sucessões e funções), a conceitualização e formalização da noção de limite (centro do campo do Cálculo) e as dificuldades vinculadas com as rupturas necessárias com relação aos modos de pensamento puramente algébricos.

[46] Proposta por Piaget, a ideia de síntese pode ser entendida como o processo pelo qual, a partir de algo que se conhece, realizando operações com e sobre ele, se chega à conclusão e à compreensão do que não se conhecia previamente.

Não há dúvidas quanto a importância dos estudos relacionados ao *Pensamento Matemático Avançado*, particularmente os de Michèle Artigue, que abordam questões cognitivas com o uso da metodologia orientada pela *Engenharia Didática*[47]. Contudo, as investigações feitas nestes estudos, geralmente são realizadas no domínio exclusivo da Matemática, a partir de situações-problema específicas da Matemática, sem nenhuma ênfase as áreas afins que fazem uso do conceito de derivada constantemente ao longo de sua formação. Nossa proposta busca a investigação deste processo nas aulas da disciplina de Física básica, a partir de situações-problema da Mecânica, na primeira etapa dos Cursos de graduação em Física.

2.4.2. Dificuldades de aprendizagem na Física

Muitas vezes estas dificuldades matemáticas surgem no contexto da Física no momento em que os estudantes têm que lidar com o entendimento dos significados das *equações matemáticas* que surgem a partir da análise e interpretação dos fenômenos físicos estudados.

Paul Hewitt (2002) quando se refere, em seu livro *Física Conceitual,* ao fato de que a primeira lei de Newton deva ser introduzida anteriormente aos conceitos cinemáticos do movimento, faz a seguinte afirmação com relação às equações da Cinemática.

> Com muita frequência, a Cinemática domina a “parte do leão” de um curso introdutório de Física, constituindo-se no “buraco negro” do ensino de Física – gasta-se muito tempo para se obter muito pouco [...] além do mais, as *equações da Cinemática* parecem ao estudante as mais intimidantes do livro (ibid. p. xi).

Feynman (2008) em suas *Dicas de Física* faz a seguinte referência quanto ao fato de se querer memorizar todas as fórmulas e equações Matemáticas da Física.

> [...] quanto mais você trabalha em decorar fórmulas, mais longo este trabalho fica – e no final, ele acaba não funcionando direito. [...] você irá fracassar – não este ano, nem nos próximos, mas eventualmente quando você estiver no seu trabalho, ou alguma coisa parecida – você irá perder um longo tempo, pois a Física é uma coisa enormemente extensa: existem milhões de fórmulas! (ibid. p. 52).

---

[47] O termo *Engenharia Didática,* criado na área de Didáticas das Matemáticas, na França, na década de 80, tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia – momento em que é preciso construir soluções (Carneiro, 2005). A origem desta teoria está na preocupação comum a certa “ideologia de inovação” presente no domínio educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula (ibid., 2005).

O mais completo estudo encontrado na literatura científica sobre este tema certamente é o de Sherin (2006) que sugere que os estudantes aprendem a entender *equações* em termos de um vocabulário de elementos que denominou *formas simbólicas.* Cada forma simbólica associa um esquema conceitual simples com um padrão de símbolos numa equação.

> Entender uma equação envolve mais do que habilidade para escrever expressões literais da memória e realizar manipulações habituais. Mas o que, exatamente? Tento responder esta questão dentro do domínio da Física. As expressões matemáticas são parte de uma linguagem da Física. Equações são usadas para conter e transmitir aspectos fundamentais do conteúdo; físicos leem as equações na forma escrita e as compõem com o uso de notações físicas (ibid., p.480).

Através do exemplo da equação $v = v_0 + at$ o autor afirma que seu entendimento pode não se estender além das condições sob as quais a equação pode ser usada e como ela pode ser usada, até mesmo sob o ponto de vista de um físico. Normalmente a resposta que se obtém de um físico é que tal equação fornece o valor da velocidade v para o caso de uma aceleração constante a. No entanto, a presença de dois termos separados por um sinal de adição geralmente não expressa algum significado particular. Sherin quer saber em quais termos conceituais são aprendidas as equações físicas.

As ideias dele vão ao encontro das nossas, no momento em que intencionamos investigar o significado dos conceitos matemáticos da disciplina de Cálculo I no domínio da Física introdutória. Estes significados certamente não são os mesmos em diferentes contextos. Por exemplo, a mesma equação apresentada por Sherin pode ser interpretada por um matemático como uma função linear cuja variável dependente é v e a variável independente é t. O gráfico representativo de tal função seria uma reta que intercepta o eixo das ordenadas no ponto v_0 e o eixo das abcissas no ponto $-v_0/a$. Os termos v_0 e a recebem as denominações de coeficiente linear da reta e coeficiente angular da reta, respectivamente. Já no domínio da Física os mesmo termos recebem as denominações de velocidade inicial do objeto que se move e aceleração do movimento, respectivamente. Observamos através deste simples exemplo o quanto uma equação matemática analisada no domínio exclusivo da Matemática nada nos diz a respeito do seu significado no contexto da Cinemática.

Outros exemplos também são pertinentes para a opção de uma articulação entre conceitos matemáticos e físicos, como é o caso do conceito de *diferencial* que, segundo Artigue (1986) e Artigue e Viennot (1987), no ensino da Matemática é um instrumento formal que ocupa um papel marginal; já no ensino Física, é um instrumento de aproximação, uma quantidade muito pequena, que ocupa um lugar central (apud López-Gay e Torregrosa, 2005).

Na tentativa de ampliar as hipóteses propostas por Sherin (2006), Buteler e Coleoni (2012) apresentam um estudo que se refere ao lugar ocupado pelas equações matemáticas na modificação do *conhecimento prévio*[48] dos estudantes. Argumentando que é durante a resolução de problemas que os estudantes modificam suas intuições físicas, os autores sugerem que a relação entre intuições físicas e matemática é mais profunda do que aquela proposta por Sherin: *durante a resolução de problemas as equações matemáticas se subordinam às intuições físicas, as quais parecem decidir quais tipos de equações são aceitas ou não no problema.* Trata-se de um estudo qualitativo, onde os autores analisam três casos – grupos constituídos de dois alunos – resolvendo problemas de Física básica, onde um dos três casos é uma descrição do caso apresentado por Sherin (2006), e os outros dois são e investigados no contexto dos autores. Os autores concluem que a modificação das intuições físicas ao longo da resolução de problemas não ocorre de uma vez e para sempre, mas é um processo longo e gradual que exige muitas situações problemáticas, muitas intuições e muitas resoluções requisitando diferentes equacionamentos matemáticos.

A implicação dos trabalhos referentes à análise do papel das equações matemáticas para nossa pesquisa nos remete, principalmente, à necessidade de apresentar, no contexto do ensino, diferentes situações-problema físicas que possam dar sentido aos conceitos matemáticos. Particularmente com relação às equações matemáticas na Física, elas proveem de relações funcionais entre grandezas físicas. Conhecendo tais relações o estudante pode fazer uso dos conceitos de diferenciação e integração para dar conta da resolução dos problemas.

Izsák (2004) sugere que a área da educação matemática necessita estudos mais aprofundados sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de *modelagem de situações físicas com equações matemáticas algébricas*. A análise qualitativa de um corpo de dados que registrou as ações cognitivas dos estudantes modelando uma situação física sem a instrução direta do conteúdo, mas através de um aparato experimental revelam que: *os estudantes têm e usam critérios para julgar quando uma expressão algébrica é melhor do que outra; os estudantes utilizam outros tipos de conhecimentos para representar o modelo*

[48] Os autores denominam estes conhecimentos prévios como *intuição física*, conforme diSessa (1993).

matemático. Dentre os estudos futuros indicados pelo autor destaca-se a necessidade de investigar a constituição de um material instrucional que pudesse dar suporte às discussões sobre construção e uso de representações pelos estudantes, para resolverem problemas. Como já dissemos, um dos objetivos da nossa proposta foi investigar e elaborar um material instrucional potencialmente significativo para as aulas de Física Geral I A, fundamentado na articulação com os conteúdos matemáticos do Cálculo.

Outro importante estudo sobre dificuldades matemáticas no contexto da Física é aquele apresentado por Torregrosa; López-Gay e Gras Martí (2002). O trabalho é uma análise da utilização e a compreensão do Cálculo diferencial no ensino da Física. Segundo os autores os problemas considerados básicos[49] do Cálculo são relacionados com o *movimento*, de forma ampla e o uso do Cálculo na forma de algoritmos de resolução resulta num obstáculo para os estudantes de Física. No trabalho é feita uma análise das concepções históricas sobre o conceito de diferencial e suas relações com o uso da diferencial no ensino. Após, é feita uma clarificação a respeito da utilidade da diferencial na Física, com base nas concepções de Maurice Frèchet[50]. A partir desta análise os autores elaboram quatro indicadores do que consideram uma adequada compreensão da *diferencial* e do seu uso. A testagem dos indicadores é realizada através de questões-problema aplicadas aos professores e estudantes em distintas províncias da Espanha. Dentre os resultados destaca-se que professores e estudantes: *não sabem quando e nem porque é necessário utilizar a diferencial; não conhecem o significado correto da diferencial; utilizam de forma operativa e sem compreensão a relação entre derivada e diferencial; não sabem por que se calcula a integral mediante a antiderivada ou função primitiva; limitam o uso do Cálculo à aplicação mecânica de regras e têm baixas expectativas sobre a possibilidade de usá-las com sentido; valorizam positivamente o uso do Cálculo diferencial na aprendizagem da Física.* Os resultados indicam a necessidade de formular propostas alternativas para a introdução do Cálculo diferencial que promova o melhor entendimento do conceito no contexto da Física.

---

[49] Problemas: *calcular o ritmo da variação, o coeficiente angular da reta tangente a uma curva dada, e o cálculo de valores máximos e mínimos, bem como calcular somas infinitas.*

[50] Matemático francês, nascido em 1878 e falecido em 1973. Formulou, em topologia, o conceito de espaço métrico, a teoria dos espaços abstratos, a noção de compacidade. Suas contribuições alargaram-se, para além da topologia, à estatística, probabilidade e análise. Disponível em: URL:http://www.ifopedia.pt/$maurice-frechet.

No nosso trabalho não nos detemos especificamente no conceito de *diferencial*, mas abordamos de forma mais geral os conteúdos relacionados com o Cálculo: *vetores e trigonometria, noções do Cálculo diferencial e noções do Cálculo integral*, no contexto da disciplina de Física Geral I A, dirigida aos alunos ingressantes dos Cursos de Física da UFRGS, no Brasil.

Observa-se a importância em analisar a utilização e a compreensão dos conceitos do Cálculo no domínio da Física para a promoção de um ensino que favoreça a aprendizagem significativa em Física Básica Universitária.

A fim de identificar e analisar até que ponto dificuldades conceituais da Matemática afetam o entendimento dos estudantes com relação aos conceitos Físicos da Termodinâmica Christensen e Thompson (2012) investigaram representações gráficas da *declividade* e da *derivada*, através de um estudo exploratório. Os autores criaram um exame cujas questões denominaram: *questões físicas com menos física*[51], para aplicar aos estudantes da Universidade de Maine, USA[52].

Com relação à tarefa relacionada ao entendimento da *declividade* em gráficos de funções escalares (o gráfico foi apresentado na sua forma final) 85% dos estudantes foram considerados aptos, sendo que menos da metade deles mostrou algum raciocínio escrito que justificasse sua resposta. Aproximadamente 5% dos estudantes que responderam erroneamente confundiram a declividade média entre pontos com a declividade instantânea num ponto. Outro erro típico constatado pelos autores é a confusão entre o valor da função num ponto com o valor da declividade em cada ponto[53]. Quanto à tarefa relacionada ao *sinal da derivada* em pontos específicos de gráficos de funções escalares (três gráficos de funções foram apresentados num mesmo sistema de coordenadas retangulares) mais da metade dos estudantes foram considerados aptos para determinar os sinais das derivadas. O erro mais

[51] São questões tipicamente usadas no domínio matemático.

[52] Ao longo de três semestres letivos os instrutores da disciplina de Física do terceiro semestre letivo aplicaram este exame, sempre na última semana de aula, após os alunos terem recebido toda a instrução matemática relativa à disciplina de Cálculo de variáveis múltiplas.

[53] Este tipo de erro é bastante comum no contexto da disciplina de Cálculo introdutório. Ele é percebido principalmente quando os alunos têm que obter a equação de uma reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto de coordenadas $(a, f(a))$. A equação pode ser dada na forma $y - f(a) = f'(a)(x-a)$. No lugar do termo $f'(a)$ os alunos substituem os valores de $f(a)$ ou até da própria função derivada $f'(x)$ sem substituir em $x = a$.

comum encontrado em 7% das respostas foi um conjunto de sinais e um ranking consistente com aquele para os valores da segunda derivada das curvas.

Os autores concluem que os tipos de tarefas matemáticas que professores de Física querem que seus alunos façam numa aula de Física são externas às formas de pensamento matemáticos destes alunos. Algumas das dificuldades detectadas na pesquisa parecem ter origem no entendimento dos conceitos matemáticos a si mesmos[54].

2.5. Dificuldades de Formação Básica

Uma dos grandes problemas encontrados pelos estudantes ao ingressar na Universidade é a lacuna existente entre a matemática do Ensino Médio e a matemática do Ensino Superior.

Luk (2004) sugere que esse problema se deve a dois fatores: *os circunstanciais* (incluem currículos matemáticos, sistema de acesso à universidade, expectativa dos estudantes, avaliação do curso, etc.) e *os matemáticos* (relacionados à natureza da Matemática). Em termos gerais, na conjuntura universidade-escola há uma mudança do ponto de vista "elementar" para o "avançado", resultando em lacunas específicas em Álgebra, Cálculo e Geometria, cruciais para os alunos (ibid. 2004). Em sua investigação o autor concluiu que talvez o raciocínio formal frio que tem dominado a Educação Matemática seja uma falha. Concordamos com o autor quando afirma que critérios de ensino baseados unicamente em estímulo e resposta não permitem uma elucidação de questões de aprendizagem no nível da psicologia cognitiva, imprescindível para o pensamento matemático avançado.

Em sua tese de doutorado, Rezende (2003) destaca que a maior parte do território do lugar-matriz de aprendizagem do ensino superior de Cálculo encontra-se no Ensino Básico. A evitação/ausência das ideias problemas construtores do Cálculo no ensino Básico de matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo.

O que parece é que a desarticulação sugerida entre as disciplinas afins de Física e Matemática, tanto no nível Médio quanto no nível Superior, também está presente no

[54] Este resultado parece comprovar a forma isolada com que os ensinos das disciplinas Matemáticas e Física atuam. As dificuldades conceituais Matemáticas encontradas são do domínio exclusivo da Matemática. Além do que estes conceitos apresentados de forma isolada não são suficientes para justificar questões físicas que necessitam tais conceitos para serem solucionadas.

processo de transição do estudante. Na nossa visão, o Ensino Superior segue padrões tradicionalmente behavioristas, cujos conteúdos sequenciais, em outras épocas, entrelaçavam-se com os conteúdos vistos no antigo Científico[55]. De lá para cá, o Ensino Médio sofreu muitas reformas, onde conteúdos de Matemática e de Física foram sendo automaticamente excluídos dos programas. No entanto, o Ensino Superior continua adotando a mesma sistemática. Então, as dificuldades oriundas da falta de conhecimentos prévios são detectadas exatamente na fase transitória do ingresso na academia e, se não resolvidas ainda nesta etapa, comprometem a aprendizagem ao longo de toda a Graduação.

Hoyles, Newman e Noss (2001) sugerem que dificuldades matemáticas apresentadas no ingresso ao Ensino Superior no Reino Unido, devem-se ao aumento significativo no número de estudantes ingressantes. Políticas aplicadas ao Ensino Superior, naquele contexto, favorecem a entrada de estudante com uma formação básica insuficiente para dar conta dos conhecimentos de nível superior. Além do que os currículos matemáticos dos Cursos de Graduação vêm sendo reformulados de acordo com as necessidades do futuro mercado de trabalho destes estudantes. Os autores sugerem que, devido a este fato, a qualidade de ensino da matemática nas universidades tem decrescido consideravelmente. Concluem que, ironicamente, mudanças curriculares que visam tornar a Matemática mais amplamente útil podem resultar em perdas das características que a tornam comercializáveis. Na nossa concepção não há sentido pensar em novas estratégias de ensino sem que o *conteúdo* seja o foco principal no processo do ensino e da aprendizagem significativa.

Ainda a respeito das deficiências matemáticas dos alunos oriundas do Ensino Médio e das dificuldades de transição para a Graduação (Anthony, 2000; Cox, 2001), as Instituições de Ensino Superior têm buscado alternativas diversas para lidar com elas. Assim como na UFRGS, na Escola de Engenharia da Universidade Presbiteriana Mackenzie existe o Departamento de Propedêutica, específico para lidar com essas dificuldades. Todo semestre letivo é disponibilizada para os alunos a atividade de Cálculo, Química e Física Zero, a fim de promover a integração destas atividades com as disciplinas profissionalizantes[56]. Os alunos, voluntariamente e paralelamente às aulas, recebem um material didático de apoio, com teoria

[55] Até a década de sessenta, o Ensino Médio brasileiro, tinha duas opções: clássico e científico. A primeira mais voltada para a área humanística e a segunda mais dirigida à área científica. Nesta, no terceiro ano chegava-se a limites e derivadas.

[56] Essa iniciativa foi apresentada no XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, em 2005.

e prática de exercícios relativos ao conteúdo do segundo grau. Através de simulados podem garantir um bônus de até meio ponto na média final da disciplina.

Indiscutivelmente, oportunizar aos alunos um contato inicial com os tópicos da Matemática e da Física é de extrema relevância. Contudo, devemos refletir sobre a importante tarefa do professor nesta etapa de transição, já que nessa fase inicia-se o processo de incorporação de valores, no estudante. Acredita-se que a história de vida do professor e acima de tudo a acomodação aos padrões tradicionalmente transmitidos no meio profissional são elementos cruciais nessa fase[57]. Assim, esse primeiro contato não deve condicionar o aluno a uma aprendizagem mecânica. Além do que, deficiências em termos de conhecimentos prévios devem ser trabalhadas através de métodos coerentes com teorias de aprendizagem adotadas no ensino.

2.6. Considerações

Este artigo documentou, descreveu e analisou 26 artigos científicos a fim de verificar algum tipo de implicação para nossa proposta de pesquisa que investiga e desenvolve formas alternativas de abordagens do ensino do Cálculo para alunos dos cursos de graduação em Física, através de uma possível integração com o ensino da Física, com vistas à aprendizagem significativa em Física básica universitária.

Esta análise, aliada aos resultados obtidos através do estudo exploratório referenciado na apresentação (Santarosa e Moreira, 2011) é fundamental para a reestruturação do material instrucional potencialmente significativo, cuja primeira versão foi aplicada num estudo preliminar (conforme já foi salientado), para dar novos rumos ao processo do ensino e investigação da aprendizagem, a partir da integração pretendida.

Dentre as implicações para os propósitos da nossa pesquisa destacamos:

- Com relação aos lugares ocupados pela Matemática no contexto da Física, a ideia da Matemática como Modelo para a interpretação dos fenômenos físicos têm fortes implicações epistemológicas para nossa pesquisa, já que delimita nosso campo de atuação, fazendo-nos perceber que não cabe ao matemático ensinar a física conceitual,

[57] Utilizando a técnica de Repertório em Rede de Kelly, descrita através de um estudo de caso, Munby (1984) mostra como as crenças e os princípios de um professor constituem parte significante do contexto para as escolhas sobre adotar as descobertas da pesquisa, implementar novo currículo, ou, em outras palavras, mudar a prática profissional.

senão mediar os diferentes significados que a Matemática apresenta nas diversas situações fenomenológicas apresentadas pela Física. Por outro lado, a ideia da Matemática num processo de modelagem nos remete para o fato de que os conceitos matemáticos devem ser construídos a partir das situações físicas ao invés de serem apresentados unicamente em termos das suas definições, independentemente do uso ou não uso de softwares educativos.

- Com relação às estratégias articuladoras entre Matemática e Física, no contexto da disciplina de Física, devemos ter cuidado com o excesso de informações matemáticas num ambiente de ensino que enfatiza, num primeiro momento, o entendimento conceitual físico. A Matemática deve tomar sua posição no exato momento em que o fenômeno deva ser abstraído na forma de símbolos e equações matemáticas. Além do que, não deve haver descaracterização de uma disciplina em relação à outra.

- Com relação às dificuldades de aprendizagem da Matemática, entendemos que, devem ser investigadas e analisadas de formas diferentes em diferentes contextos. O que entendemos como erro matemático cometido pelo estudante no contexto da Matemática pode não ser totalmente um erro no contexto da Física, já que, neste caso a Matemática não surge unicamente como simples equação que deva ser resolvida para que seja obtida uma resposta matematicamente correta. Na verdade, os resultados numéricos de uma equação não são o fator mais importante no contexto da Física, senão a necessidade de uma análise qualitativa detalhada em termos de relações entre variáveis físicas quantitativas bem como das condições necessárias para que a resposta seja fisicamente aceitável.

- Com relação aos problemas de formação básica, devemos estar atentos ao processo de identificação das experiências e conhecimentos prévios dos nossos alunos, já que é em termos desta “bagagem” de ensino que se apoiarão os novos conhecimentos recebidos. Além do que, lidamos com diferentes formas de aprendizagem, dependendo de como cada aluno lida cognitivamente com o processo de aquisição e retenção das informações recebidas. São diferentes formas de vida num mesmo espaço de ensino. Cada forma de lidar com a informação recebida e cada esquema utilizado para dar conta das situações apresentadas deve ser respeitada, compartilhada e mediada, para uma aquisição significativa dos novos conhecimentos.

Pudemos constatar um grau satisfatório quanto à autenticidade da nossa proposta no que se refere ao emprego de referenciais teóricos, metodológicos e epistemológicos. Há poucos trabalhos relacionados que investigam estratégias de inovações no ensino (dois, conforme a tabela 1), dificuldades de formação básica (3, conforme a tabela 1) e dificuldades de aprendizagem da Matemática no contexto da Física (5, conforme a tabela 1). Os que existem não empregam os referenciais de Ausubel (1963, 2000) e nem de Vergnaud (1990). Percebemos que nosso grande diferencial é o *estudo etnográfico* realizado ao longo de quatro anos de investigação. Também pudemos verificar que o maior número de estudos referentes à problemática aplicação da Matemática na Física provém, justamente, de pesquisadores da área da Física, sendo poucos os trabalhos relacionados da área da Matemática, realizados por matemáticos. Consideramos este fato como um alerta para a comunidade Matemática com relação à forma com que deixamos de articular disciplinas matemáticas com as áreas específicas de formação do aluno, e o quanto isto pode ser prejudicial para o desenvolvimento das diversas habilidades matemáticas dos nossos alunos. Com isto a Matemática pode estar perdendo um imenso campo de investigação que deve interessar muito mais à própria Matemática do que às áreas específicas, já que cabe aos profissionais da Matemática, talvez muito mais do que aos profissionais da Física, investigar as aprendizagens matemáticas frente aos diferentes significados por ela representados.

Capítulo 3

REFERENCIAL METODOLÓGICO

O objetivo deste capítulo é descrever os fundamentos metodológicos que guiaram nossa investigação. Obviamente tais escolhas foram influenciadas pelos propósitos da pesquisa e pelas concepções e experiências pessoais com o ensino de Cálculo. Mais especificamente com a insatisfação com que costumamos nos referir aos métodos de ensino e formas de avaliação das aprendizagens matemáticas em sistemas tradicionais, tantas vezes já referenciadas no texto.

É bastante comum pesquisadores e professores das áreas das Ciências Naturais e Exatas apresentarem certa resistência a investigações de natureza qualitativa. Lopes (1999) argumenta que a tendência das diferentes áreas das Ciências é se *matematizarem* cada vez mais, na medida em que se encontram e descobrem leis, regras, tendências ou princípios que podem ser *quantificados* para expressarem de maneira *determinística ou estatística* os diversos fenômenos que se deseja analisar. Esta é a constante realidade de busca presenciada nos laboratórios de pesquisa em Ciências, e uma poderosa ferramenta para o desenvolvimento científico. Além disso, somos egressos de um sistema de formação que enfatiza a quantificação. Quando avaliamos, pelo menos em alguma fase da avaliação, nos detemos em resultados quantificados e, no meio profissional, esperamos que nos avaliem da mesma forma.

Não há dúvidas que uma abordagem quantitativa de pesquisa é necessária em muitas situações. No ensino, *medições* e *análises estatísticas* são muito importantes para a discussão de fenômenos como reprovação e evasão. Porém, neste mesmo contexto, *a construção das complexas relações que unem os sujeitos do ensino e da aprendizagem é uma variável de difícil quantificação.* Como afirma Massoni (2010), *a pesquisa qualitativa oferece um conjunto de procedimentos úteis, mas não preceitos, que permitem observar, participar, refletir e estudar a realidade social da sala de aula de forma a, esperançosamente, conduzir a um entendimento maior de como ela funciona. "Maior" do que seria possível compreender através de uma análise puramente quantitativa e estatística* (ibid. p. 115).

No nosso trabalho, por exemplo, o objetivo de tentar integrar conteúdos do Cálculo com conteúdos da Física a fim de favorecer os caminhos da aprendizagem significativa dos estudantes ingressantes nos cursos de Física, subentende a análise e interpretação dos diferentes significados atribuídos por estudantes e professores, aos fenômenos que relacionam as duas áreas, no contexto da Física. Além do que, tais significados dependem dos conhecimentos e experiências prévias relacionadas com estes fenômenos, que cada sujeito construiu ao longo da sua vida escolar, acadêmica ou profissional. Este fato, por si só, justifica nossa escolha por *uma abordagem metodológica qualitativa,* à luz dos pressupostos que a caracterizam.

Dentre estas abordagens optamos por um *estudo do tipo etnográfico,* caracterizado pela *observação participante*, pelas *entrevistas em profundidade* e pela *análise de documentos;* mais especificamente, aderimos à etnografia aplicada à educação, defendida por André (1998). Ao longo da pesquisa a observação participante nos permitiu um constante grau de interação com a situação estudada. As entrevistas e recolhas de depoimentos diversos aprofundaram questões observadas, e amparamos a análise das informações coletadas à consulta a documentos relevantes (descrições da formação dos cursos de graduação, programas de ensino, ementas das disciplinas), incluindo revisões bibliográficas.

Por outro lado, a metodologia de pesquisa escolhida estava de acordo com as cinco características básicas de uma *investigação qualitativa*, definidas por Bogdan e Biklen (1994): a *fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; a investigação qualitativa é descritiva; o processo da investigação se torna importante frente aos resultados obtidos; a análise dos dados é feita de forma indutiva, e o significado atribuído aos eventos pelos sujeitos investigados é de extrema importância para as conclusões do trabalho.*

Ao longo do trabalho, sabíamos que devido à escolha do referencial metodológico, hipóteses iniciais e resultados supostamente esperados poderiam ser modificados ou reestruturados ao longo da investigação. Novas questões de pesquisa poderiam surgir fazendo-se necessária a consulta a outros referenciais teóricos. Naturalmente, a pesquisa seria fundamentalmente *descritiva e interpretativa* dos fatos e estaríamos, cada vez mais, inseridos no contexto de investigação.

3.1. Pesquisa e Desenvolvimento

No nosso trabalho procuramos aliar desenvolvimento à pesquisa, no sentido em que elaboramos um material instrucional baseado na integração entre conteúdos das disciplinas do Cálculo e da Física, e investigamos as formas de aprendizagem resultantes neste processo.

Se o interesse do educador é investigar a aprendizagem a partir de inovações no ensino, deve estar atento para os fundamentos que relacionam o *desenvolvimento* e a *pesquisa* no contexto de investigação. É bastante comum, entre os professores que estão começando a atuar na área da pesquisa em ensino, o desconhecimento das suas especificidades.

> Os chamados *projetos de desenvolvimento* em ensino podem ser definidos como aqueles que se referem às inovações didáticas e que estão estreitamente relacionados aos trabalhos de conclusão no âmbito dos mestrados profissionais nas áreas de ensino (Ostermann e Rezende, 2009).
>
> Pesquisa em ensino de ciências é produção de conhecimentos sobre educação em ciências; busca de respostas a perguntas sobre ensino, aprendizagem, currículo de ciências, sobre o contexto em que isso ocorre e sobre o professorado de ciências e sua formação permanente, dentro de um quadro epistemológico, teórico e metodológico consistente e coerente, no qual o conteúdo específico das ciências está sempre presente (Moreira, 2004b).

O *mapa conceitual* apresentado na figura 4 é uma visão pessoal de como essas ideias interagem em nossa proposta de investigação[58].

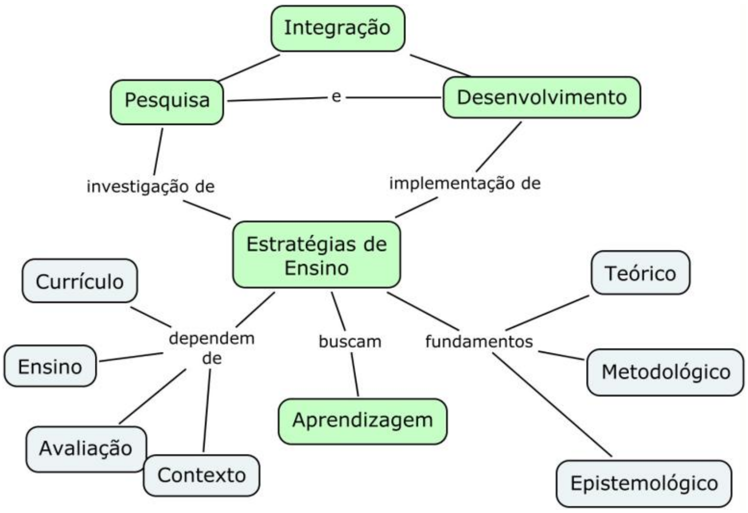


Figura 4: Pesquisa aliada ao Desenvolvimento.

[58] *Mapas conceituais* podem ser interpretados como diagramas hierárquicos que procuram refletir a organização conceitual de um corpo de conhecimento ou de parte dele. Podem ser usados como instrumento de ensino e/ou de aprendizagem (Moreira, 2006b).

3.2. A Etnografia

Para entendermos o *estudo do tipo etnográfico* devemos entender a *etnografia* e seu papel como componente histórica da pesquisa qualitativa. Este tipo de abordagem de pesquisa *qualitativa* ou *naturalista* surgiu como um *novo paradigma* no final do século XIX, como forma de questionar o *método positivista* no estudo do conhecimento dos fenômenos humanos e sociais (André, 1998).

O *positivismo*, criado por Augusto Comte, reconhecia apenas dois tipos de conhecimentos científicos: o *empírico*, representado pelos achados das ciências naturais, o mais importante de ambos; e o *lógico*, constituído pela lógica e pela matemática (Triviños, 2008). Com relação às novas tendências de pensamentos que surgiram no começo da década de oitenta, com a "abertura política", o autor afirma que:

> O positivismo perdeu importância na pesquisa das ciências sociais que se realizava, especialmente, nos cursos de pós-graduação das universidades, porque a prática da investigação se transformou numa atividade mecânica, muitas vezes alheia às necessidades dos países, sem sentido, opaca, estéril. A tendência à quantificação privilegiou o emprego da estatística, às vezes usando-se técnicas sofisticadas no intuito de atingir maior prestígio como pesquisador. A busca de resultados essencialmente estatísticos amarrou, em repetidas oportunidades, o investigador ao dado, ao estabelecer "relações estatisticamente significativas" entre os fenômenos. Desta maneira, terminava a análise das realidades precisamente no ponto onde devia começar (ibid. p.31).

A fase inicial da pesquisa qualitativa deu-se com o historiador Wilhelm Dilthey, através da *hermenêutica* e com Max Weber, que defendia a compreensão dos significados atribuídos pelos sujeitos às suas ações[59]. Neste contexto, a perspectiva do conhecimento é *idealista-subjetivista* em oposição a uma visão *empiricista* do conhecimento. O valor é para a *interpretação em lugar da mensuração* e pela *descoberta em lugar da constatação* (ibid. André, 1998).

As quatro raízes teóricas da *pesquisa qualitativa* são: a *fenomenologia*, o *interacionismo simbólico*, a *etnometodologia* e a *etnografia*. A ideia chave da *concepção fenomenológica* é que "a realidade é socialmente construída". A realidade nada mais é do que o significado das nossas experiências, as quais podem ser interpretadas de várias formas, dependendo da maneira com a qual interagimos com os outros (Bogdan e Biklen, p. 54).

[59] A *hermenêutica* se caracteriza pela interpretação dos significados contidos num texto.

O *interacionismo simbólico* pressupõe que "a experiência humana é mediada pela interpretação". Não são os objetos, as pessoas, as situações ou os acontecimentos que são dotados de significado, senão os significados lhes são atribuídos (ibid. p. 55). A *etnometodologia* se refere ao estudo dos "modos como os indivíduos constroem e compreendem as suas vidas quotidianas" a partir das várias situações em que se encontram na vida moderna (ibid. p. 60). A *concepção etnográfica* está ligada ao conceito de *cultura* e à forma como seus aspectos são descritos. Os etnógrafos tentam, através dos dados observados, apreender os significados que os membros da cultura têm, a fim de apresentar novos significados às pessoas externas à cultura. Isto é, o etnógrafo preocupa-se essencialmente com as representações.

Moreira (2011) nos explica que *o pesquisador etnográfico tem um duplo papel, por um lado "aculturar-se" no grupo que está investigando e, por outro lado, ser capaz de observar, interpretar, discernir, desenvolver uma perspectiva holística. Isto é, ao mesmo tempo em que tenta "pertencer" à cultura pesquisada, deve ser capaz de "mirá-la desde fora", interpretá-la, descrevê-la* (ibid. p.48). O mapa conceitual da figura 5 apresenta as ideias-chave que caracterizam a especificidade de cada uma das abordagens qualitativas para a pesquisa em educação, destacando a *etnografia*, tradicionalmente utilizada pelos antropólogos para estudar a cultura de um grupo social.

3.2.1. A Etnografia em Sala de Aula

Para André (2005) os estudos etnográficos realizados no contexto educacional podem ser denominados *estudos do tipo etnográfico*. Por haver uma diferença de enfoques nas duas áreas, *antropológica* e *educacional*, certos requisitos da etnografia não precisam necessariamente ser cumpridos em estudos educacionais (ibid. André, 2005).

Fazendo um apanhado geral das características mais básicas do enfoque qualitativo à pesquisa educacional, o *estudo do tipo etnográfico* pode ser caracterizado por: *observação participante; entrevista intensiva; análise de documentos; interação entre o pesquisador e o objeto pesquisado; ênfase no processo e não nos resultados finais; preocupação com o significado; importância da visão pessoal dos participantes; trabalho de campo; descrição e indução; busca de formulações de hipóteses, conceitos, abstrações, teorias e não sua testagem* (André, 1998).

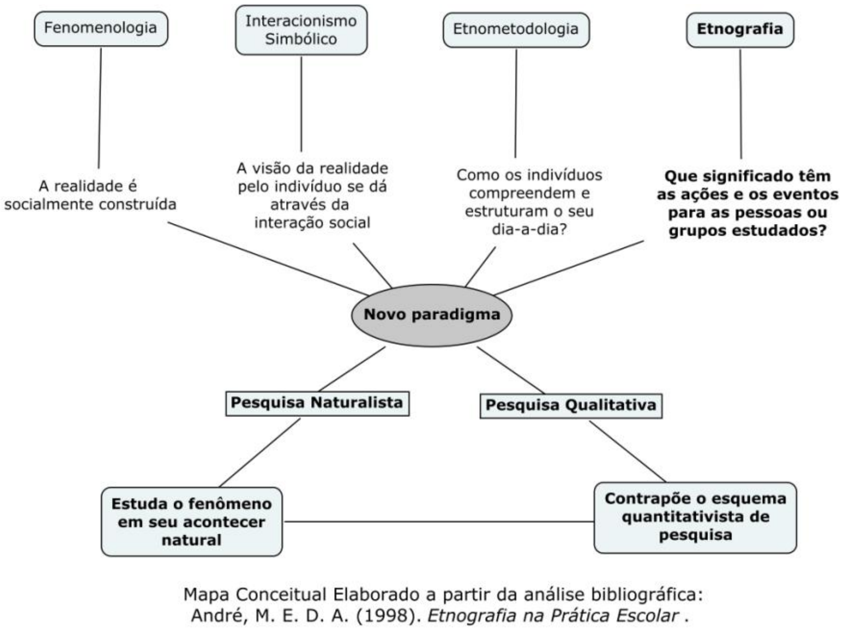


Figura 5: Raízes Teóricas da Pesquisa *Qualitativa* ou *Naturalista.*

> A observação é chamada participante porque parte do princípio de que o pesquisador tem sempre um grau de interação com a situação estudada, afetando-a e sendo por ela afetado. As entrevistas têm a finalidade de aprofundar as questões e esclarecer os problemas observados. Os documentos são usados no sentido de contextualizar o fenômeno, explicitar suas vinculações mais profundas e completar as informações coletadas através de outras fontes (ibid., p.28).

Assim, a pesquisa do tipo etnográfico, que se caracteriza fundamentalmente pelo contato direto do pesquisador com a situação pesquisada, permite reconstruir processos e as relações que configuram a experiência escolar diária (ibid., p. 41).

Capítulo 4

REFERENCIAIS TEÓRICOS

Este capítulo tem quatro objetivos principais: *apresentar uma breve discussão quanto à questão do uso de enfoques cognitivistas em sistemas de ensino e aprendizagem tradicionais onde prevalecem concepções fortemente behavioristas (principalmente nas áreas científicas); descrever os fundamentos básicos da teoria da Aprendizagem Significativa e da teoria dos Campos Conceituais (referenciais aplicados na pesquisa); analisar a implicação da utilização das duas teorias para os propósitos da pesquisa.*

4.1. Concepções cognitivistas em sistemas de ensino behavioristas

Trabalhos de pesquisa relacionados com o ensino e a aprendizagem de Ciências e Matemática começaram a ser relevantes a partir do avanço no número de investigações nessas áreas, nas duas ou três últimas décadas. Até pouco tempo, nas universidades, as “verdadeiras pesquisas” estavam centralizadas nos laboratórios das áreas científicas e no âmbito da Matemática pura. Da mesma forma, atividades de ensino e extensão envolvendo o desenvolvimento de estratégias que pudessem contemplar o alunado e o professorado do Ensino Médio eram exclusivas dos centros de Educação. Atualmente as áreas das ciências naturais e exatas contribuem ativamente com os três eixos característicos da academia: *ensino, pesquisa e extensão.* Percebe-se o avanço, nestas atividades, do rigor em termos de conteúdos, aliado às questões teóricas, metodológicas e epistemológicas, o que qualifica ainda mais este crescimento.

Entretanto, em meio a este gradativo progresso continuam existindo sérios problemas com relação aos sistemas de ensino e de aprendizagem das disciplinas das áreas científicas e das disciplinas matemáticas. Frente aos desafios com que temos que lidar, como por exemplo: *o aumento na demanda dos cursos de graduação, a defasagem de formação básica dos alunos ingressantes, a ausência de infraestrutura nas salas de aula e nos laboratórios de ensino, e a ausência de políticas claras que contemplem a área do ensino*, muitas vezes acabamos nos assegurando nos tradicionais métodos de ensino.

Neste sistema de ensino considerado “tradicional” o costume é ministrar as disciplinas sem nenhum apego em teorias de aprendizagem e sem nenhuma reflexão maior sobre métodos avaliativos ou estratégias que possam promover a aprendizagem. Quem de nós não vivenciou (ou vivencia) experiências com o ensino, sem maiores preocupações com essas questões? Isso não significa que não estejamos preocupados com a aprendizagem dos alunos, mas não nos isenta dos problemas de formação humana e profissional que eles possam apresentar. Façamos um retrospecto.

Sugerimos, na introdução do trabalho, que a aprendizagem mecânica dos conceitos matemáticos do Cálculo pode ser fruto de uma visão de mundo comportamentalista, onde o que está em jogo são apenas os comportamentos observáveis dos sujeitos, a partir dos estímulos externos que recebem (Moreira, 1999). Estendemos esta conjectura para os sistemas de ensino adotados nas disciplinas de Física introdutórias, para os cursos de graduação em Física.

Na tentativa de vislumbrar estratégias que possam mediar o significado dos conteúdos matemáticos necessários frente às situações físicas, nos propomos a introduzir referenciais cognitivistas no processo do ensino e da aprendizagem de uma disciplina de Física básica. Para esta iniciativa são exigidas mudanças de postura e de concepções, docente e discente, com relação à aceitação do "novo" ao invés do "tradicional". Várias consequências podem surgir (como já pudemos observar ao longo da pesquisa e da experiência em sala de aula): *a não aceitação de formas alternativas de ensino e aprendizagem por parte do aluno (diferentes daquelas a que estão acostumados), a inexperiência por parte do professor pesquisador diante da implantação de estratégias que não sejam puramente tradicionais, o descrédito da comunidade acadêmica científica com relação aos resultados obtidos,* por exemplo, são questões que não podem ser desconsideradas numa pesquisa deste nível.

Sabemos que as disciplinas de Cálculo e de Física introdutórias são consideradas como uma espécie de "peneira" para o seguimento das demais disciplinas, até a formação acadêmica definitiva. Já comentamos que seus programas de ensino são extensos, elaborados de forma a serem desenvolvidos compartimentadamente, propícios para aprendizagens técnicas e mecanicistas. Também sabemos que pesquisas do gênero a que nos propomos geralmente são realizadas de forma isolada, gerando pouco impacto em relação aos métodos tradicionais adotados por colegas docentes, na mesma disciplina, "na sala ao lado". Quero dizer: *são estes moldes de ensino que nos são oferecidos para realizar uma pesquisa de teor* *cognitivista e é sob estes moldes que vamos nos apegar para dar suporte a muitas conclusões de teor cognitivo.*

Por si só, este é um fator que deve ser considerado diante dos resultados que possam surgir. *Por isso, não podemos afirmar com convicção que nossos sistemas tradicionais de ensino – supostamente promovedores de uma aprendizagem mecânica - não possam promover uma aprendizagem significativa.* Mas em que circunstâncias?

O contra exemplo são nossas próprias experiências, que buscam alternar formas diferentes de ensino, ora considerando concepções comportamentalistas, ora buscando introduzir concepções cognitivistas e até humanistas. Quero dizer: *somos comportamentalistas por formação e sempre adotaremos esta postura nas ocasiões em que forem apropriadas.*

Na Psicologia Cognitiva, a *filosofia comportamentalista (behaviorismo)* antecede à *cognitivista* e *à humanista,* sendo que, em ordem decrescente de apresentação, cada uma delas surge para dar conta das questões psicológicas não explicadas por suas antecessoras. Enquanto o *behaviorismo* é o estudo da aprendizagem em humanos e animais entendida por meio da análise do comportamento ao invés dos pensamentos e sentimentos, na *perspectiva cognitivista*, a mente humana é apreciada como uma entidade pessoal capaz de raciocinar, resolver problemas, sentir emoções, ter intenções e aprender informações complexas (Martinez, 2010). Já a *filosofia humanista* vê o ser que aprende, primordialmente, como pessoa. O importante é a autorrealização da pessoa, seu crescimento pessoal (Moreira, 1999).

Para Novak (2000) o ser humano tem *pensamentos, sentimentos* e *ações* que juntos formam os *significados das experiências,* sendo que uma educação bem sucedida deve levar em conta estes três fatores. Podemos perceber a importância da influência das três filosofias no processo educacional. *Ações* estão ligadas a *comportamentos com significado; pensamentos* estão ligados à *cognição* e *sentimentos* são de teor *humanista*.

Diante disto, o que parece ser mais grave do que um ensino comportamentalista (muitas vezes visto com maus olhos por profissionais da área educacional) é a grande confusão e incoerência, apercebida no meio acadêmico, entre filosofias e técnicas de ensino adotadas, bem como das respectivas aprendizagens que possam surgir. Nosso propósito não é defender especificamente uma ou outra filosofia, mas defender um enfoque que seja coerente com valores e crenças individuais, que tenha relação com o contexto investigado, no momento em que está sendo investigado. Em determinadas situações talvez um método humanista de ensino seja mais adequado do que outro, ou vice-versa. Quiçá, em outras ocasiões, seja importante o entrelaçamento das três visões.

Na nossa pesquisa optamos por uma análise baseada no enfoque cognitivista, especificamente à luz das teorias da aprendizagem significativa e dos campos conceituais, mas não descartamos evidências que possam provir dos comportamentos e dos sentimentos dos sujeitos envolvidos na investigação. Justifica-se essa escolha pelos pressupostos iniciais da pesquisa. Se métodos puramente behavioristas adotados no ensino podem ser considerados “ultrapassados” diante de novas exigências de formação profissional, por que não moldá-lo com novas concepções e investigar o processo de aprendizagem a partir delas?

A teoria da Aprendizagem Significativa nos dá suporte para isto. Ausubel (2000) afirma que só há aprendizagem se ela for significativa. No entanto, ao mesmo tempo em que a aprendizagem significativa contrapõe-se a aprendizagem mecânica, os dois tipos de aprendizagem não são dicotômicos. Além disso, pode ocorrer que em certas situações a aprendizagem mecânica seja desejável e necessária: por exemplo, em uma fase inicial da aquisição de um novo corpo de conhecimentos (Moreira, 2006a). Para Novak (1977), a aprendizagem mecânica é sempre necessária quando um indivíduo adquire novas informações em uma área de conhecimentos que lhe é completamente nova (apud Moreira, 2006a).

Este é o caso dos alunos que têm que aprender os conceitos do Cálculo na primeira etapa da sua vida acadêmica sem terem tido contato com as noções preliminares necessárias para que haja a retenção e transferência deste novo conhecimento para o contexto da Física. Este aprendizado não estará necessariamente vinculado à utilização ou não de grandes modificações em termos didáticos. Justificamos no início do nosso trabalho que *pequenas modificações podem resultar em grandes avanços*. No nosso caso procuramos, a partir dos conteúdos físicos desenvolvidos na Mecânica Newtoniana, “rechear” o ensino com situações também do contexto do Cálculo, conforme as orientações de Vergnaud (1990), a fim de que o aluno pudesse perceber semelhanças e diferenças no uso de notações, e reconstruir os conceitos matemáticos a partir destas variadas situações. Fizemos isto preservando os recursos tradicionais de “quadro e giz”, preservando a estruturação curricular tradicional, utilizando livros didáticos recomendados nos programas de ensino. Procuramos proporcionar um ambiente de ensino pautado na negociação de significados, através de atividades colaborativas e do diálogo. Neste sentido, pode ser que pequenas intervenções no processo do ensino "tradicional" nos remetam à eficiência no processo da aprendizagem.

4.2. A Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel

Aprendizagem significativa é o conceito central da *Teoria da Assimilação da Aprendizagem e da Retenção Significativas* de David Paul Ausubel[60], cuja primeira versão foi formulada em 1963. Sua intenção foi apresentar uma *teoria cognitiva de aprendizagem significativa* em oposição a uma *aprendizagem verbal por memorização*, predominante nas décadas de sessenta e setenta, e ainda presente nos sistemas atuais de ensino[61].

A *aprendizagem por recepção significativa* envolve a aquisição de *novos significados* a partir de material de aprendizagem apresentado (Ausubel, 2000). É um processo pelo qual uma nova informação se relaciona, de maneira *substantiva* (não literal) e *não arbitrária*, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo[62]. Neste processo a nova informação interage com a estrutura de conhecimentos específicos do aprendiz, denominada *conceitos subsunçores*[63]. Em outras palavras, a *aprendizagem significativa* ocorre quando a nova informação *ancora-se* em conceitos relevantes (*os subsunçores*) preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz (Moreira[64], 2006a).

Através desta definição podemos entender que a aquisição significativa de conhecimentos, *por recepção* (particularmente de matérias específicas cujos conteúdos são apresentados de forma expositiva aos alunos), é um processo lento, que ocorre ao longo da formação escolar e acadêmica dos estudantes. Também é um processo cíclico, que ocorrerá

---

[60] Ausubel foi um médico-psiquiatra de formação que se dedicou à Psicologia Educacional. Nasceu nos Estados Unidos, em 1918, na cidade de Nova York e faleceu em 2008.

[61] Ausubel (2000) se refere contrariamente à ênfase nas orientações teóricas neobehavioristas e em abordagens construtivistas na aprendizagem nos anos sessenta e setenta.

[62] A informação não é incorporada tal o qual o é, ou seja, "ao pé da letra". Ainda, de outra sorte, afirmar que se incorpora ao conhecimento prévio de maneira substantiva implica dizer que a informação é incorporada apenas no que houver de mais relevante (substancial).

[63] Um subsunçor é um conceito, uma ideia, uma proposição já existente na estrutura cognitiva, capaz de servir de "ancoradouro" a uma nova informação de modo que esta adquira, assim, significado para o indivíduo.

[64] Marco Antonio Moreira é um dos principais divulgadores da *Teoria da Aprendizagem Significativa* no Brasil e em várias partes do mundo. Na sua obra *Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica*, apresenta uma *visão crítica e subversiva* da teoria original.

sempre que novos significados emergirem da interação entre os novos conhecimentos adquiridos e os conhecimentos prévios presentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

Na época da primeira versão do trabalho de Ausubel, predominava o entendimento de que a aprendizagem significativa poderia estar vinculada ao processo da aprendizagem pela descoberta (numa espécie de implicação), onde o aprendiz deveria "descobrir", através da sua própria experiência, o conteúdo específico das matérias de ensino. Ausubel provou que um dos tipos de aprendizagem significativa, *a aprendizagem proposicional,* é típica das situações que prevalecem na aprendizagem por recepção, não implicando que a aprendizagem significativa pudesse ser oriunda, exclusivamente, de aprendizagens por descoberta. Ao contrário, os dois tipos de aprendizagem poderiam resultar em aprendizagem significativa, desde que as condições para ocorrência desta aprendizagem fossem satisfatórias.

Outro fator importante a ser discutido na teoria de Ausubel é o fato de cada estrutura cognitiva ser *única,* no sentido que cada estudante traz consigo experiências e *conhecimentos prévios* pessoais (que foram construídos em diferentes contextos), assim como são distintos os processos de *formação e assimilação* de conceitos em cada um destes estudantes. Alguns terão seus conceitos subsunçores mais *elaborados e diferenciados*, outros nem tanto e outros talvez não disponham dos subsunçores necessários; isso vai depender da forma como relacionaram, ao longo da sua vida escolar, as novas informações recebidas com as informações já presentes na sua estrutura cognitiva. Logicamente, esse processo não é independente da forma como os estudantes foram ensinados.

Já na aprendizagem mecânica as novas informações são memorizadas praticamente sem interagirem com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, sem nenhuma ligação com *conceitos subsunçores* específicos. A nova informação é armazenada de maneira *arbitrária e literal*, não interagindo com aquela já existente na estrutura cognitiva e pouco ou nada contribuindo para sua *elaboração e diferenciação*. A figura 6 apresenta um quadro ilustrativo comparativo entre os processos da aprendizagem significativa e da aprendizagem mecânica, mostrando como se dá a interação entre novos conhecimentos e conhecimentos já retidos na estrutura cognitiva do aprendiz.

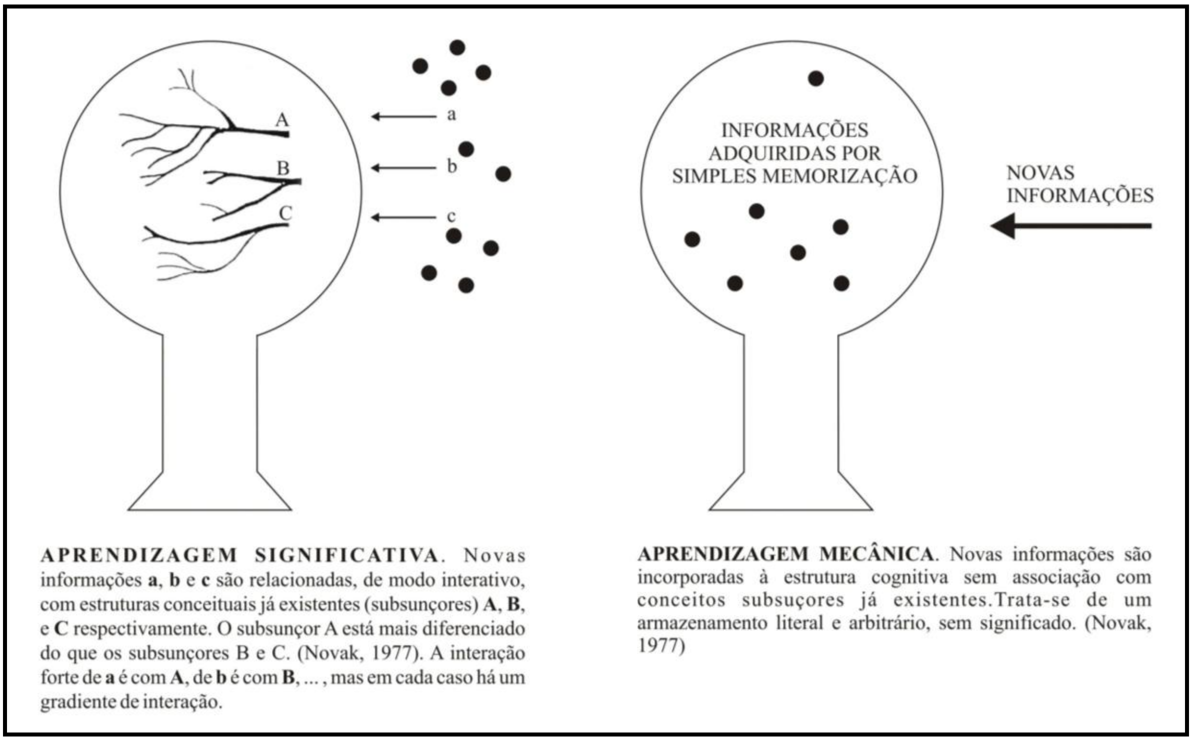


Figura 6: Aprendizagem significativa versus aprendizagem mecânica (Novak, 1977).

Podemos observar na figura 6 o teor "aleatório" com que as novas informações penetram na estrutura cognitiva e a forma com que elas encontram os conhecimentos já retidos, quando o processo da aprendizagem é mecânico. Desta forma as informações têm retenção e significado transitório na estrutura cognitiva, possuindo tão somente utilidades práticas e limitadas, com o objetivo de poupar tempo e esforços (ibid. Ausubel, 2000). A memorização de fórmulas ou a aprendizagem de "última hora", de véspera de prova, talvez caracterize este tipo de aprendizagem mecânica (ibid. Moreira, 2006a).

A Psicologia Cognitiva nos explica que o processo da aprendizagem na mente humana é composto por três fases. Inicialmente há a *fase da codificação*, que ocorre durante a apresentação do material de aprendizagem. Após, segue a *fase do armazenamento* onde algumas informações recebidas são armazenadas dentro do sistema de memória. Na *fase de recuperação ou resgate* algumas informações armazenadas no sistema de memória são extraídas ou resgatadas (Eysenck e Keane, 1997).

A *fase do armazenamento*, por sua vez, é composta de três partes: *armazenamentos sensoriais*, que têm duração de 1s*; armazenamentos de curto prazo (STS),* que têm duração de

1 a 30s e capacidade limitada (retêm 7 ± 2 partes da informação*);* e, *armazenamento de longo prazo (LTS),*onde as informações podem ser retidas por minutos ou por toda uma vida.

Novak (2000) se refere a este fato como característico de um possível continuum entre a aprendizagem mecânica e a aprendizagem significativa. Na aprendizagem mecânica as informações são retidas brevemente, ao passo que na aprendizagem significativa as informações têm chances de ficarem retidas por um longo período de tempo.

Voltando à *aprendizagem significativa,* pode ocorrer de três formas, as quais interagem entre si: na *aprendizagem representacional* (ou de representações) o aprendiz adquire significados para símbolos unitários (tipicamente palavras); na *aprendizagem conceitual* (ou de conceitos[65]) o aprendiz adquire significados dos conceitos. Neste caso a aquisição de significados pode ser por *formação* (ocorre, principalmente, em crianças que não estão ainda em fase escolar, através da experiência, da construção de hipóteses e testagem destas hipóteses) ou *por assimilação* (ocorre em crianças em fase escolar ou nos adultos – a aquisição dos novos conceitos se dá através da interação com conceitos já existentes na estrutura cognitiva).

O terceiro tipo de aprendizagem significativa, a *aprendizagem proposicional* (ou de proposições), envolve a aquisição do significado de proposições que compõem uma ideia. Neste caso os significados dos conceitos se combinam para formar significados proposicionais.

É importante ressaltar que a aprendizagem de conceitos pode ocorrer anteriormente à aprendizagem representacional, no sentido que os *atributos criteriais de um conceito*[66] podem ser adquiridos antes mesmo de serem atribuídos nomes a estes conceitos.

Na *aprendizagem significativa proposicional*, a aquisição de *significados proposicionais* pode ocorrer por *subordinação (ou subsunção),* quando uma proposição "logicamente" significativa de uma determinada disciplina se relaciona de forma significativa

[65] Ausubel de refere aos conceitos como objetos, acontecimentos, situações ou propriedades que possuem atributos específicos comuns e são designados pelo mesmo signo ou símbolo.

[66] Os *atributos criteriais* são características semânticas necessárias e suficientes para algo ser uma instância do conceito. Por exemplo: os atributos criteriais do conceito "solteiro" poderiam ser sexo masculino, sem compromisso afetivo e adulto (Eysenck e Keane, 2007).

com *proposições subordinantes* específicas na estrutura cognitiva do aprendiz[67]. A aprendizagem proposicional também pode ocorrer de forma *subordinante (ou superordenada),* onde a nova proposição se relaciona com ideias subordinadas específicas da estrutura cognitiva existente[68]. Finalmente, a aprendizagem proposicional pode ser *combinatória*, no sentido que a nova proposição não se relaciona de forma subordinada nem de forma superordenada, mas à combinação de conteúdos geralmente relevantes, bem como a outros menos relevantes, na estrutura cognitiva.

São necessárias três condições para que haja *aprendizagem significativa* (Novak[69], 2000, p.19):

- O aprendiz deve possuir conhecimentos anteriores relevantes que possam se relacionar com novos conhecimentos, de maneira *não trivial*;
- O material apresentado pelo professor deve ser *potencialmente significativo*, no sentido que os conhecimentos apreendidos devem ser relevantes para outros conhecimentos;
- O aprendiz deve querer aprender significativamente, relacionando os novos conhecimentos com outros que já conhece.

Senão vejamos, em nada contribui para a aprendizagem significativa o material instrucional ser potencialmente significativo, mas o aluno não dispor na sua estrutura cognitiva dos conceitos subsunçores necessários para a aprendizagem significativa dos novos conhecimentos, ou mesmo dispondo deste requisito, não intencionar incorporar de forma significativa estes conhecimentos. Da mesma forma, o aluno pode estar predisposto para aprender significativamente, possuir os conhecimentos prévios necessários para a

---

[67] Neste tipo de aprendizagem a ocorrência de assimilação conduz à *diferenciação progressiva* do conceito subsunçor.

[68] Neste tipo de aprendizagem, à medida que novas informações são adquiridas, elementos já existentes na estrutura cognitiva podem ser percebidos como relacionados, podem ser reorganizados e adquirir novos significados. Este rearranjo de elementos existentes na estrutura cognitiva é conhecido como *reconciliação integrativa* (ibid. Moreira 2006a).

[69] Joseph D. Novak é outro importante divulgador da aprendizagem significativa. Sua contribuição para a teoria da aprendizagem significativa é a visão humanística da teoria. Aprendizagem significativa estaria vinculada aos pensamentos, sentimentos e ações do aprendiz. Criador da importante e conhecida técnica do mapeamento cognitivo (através dos *mapas conceituais*) como ferramenta para facilitação da aprendizagem significativa em escolas e empresas. [69] Neste tipo de aprendizagem a ocorrência de assimilação conduz à *diferenciação progressiva* do conceito subsunçor.

aprendizagem, mas o material instrucional não ser potencialmente significativo. Em ambos os casos a aprendizagem poderá ser mecânica.

Ausubel (2000) explica que os *significados verdadeiros (ou psicológicos)* dos novos conhecimentos se dão através da interação entre o *significado lógico* do material instrucional (deve se relacionar de maneira “substantiva” e “não literal” a “qualquer” estrutura cognitiva) e os *conhecimentos prévios* relevantes do aprendiz.

Com relação às evidências de aprendizagem significativa, não são simples de serem detectadas. Ausubel sugere algumas iniciativas para o professor (apud Moreira, 2006b):

- Formular questões e problemas de maneira nova e não familiar que requeira máxima transformação do conhecimento adquirido;
- Elaborar testes de compreensão de maneira diferente e em contextos diferentes daqueles originalmente encontrados no material instrucional;
- Propor ao aprendiz uma tarefa de aprendizagem sequencialmente dependente da outra, a qual não possa ser executada sem uma genuína compreensão da precedente.

Um recurso bastante utilizado para a avaliação da aprendizagem significativa é o uso de *mapas conceituais*[70] que dão informações sobre o tipo de estrutura representada pelo aluno para um dado conjunto de conceitos (Moreira, 2006a). Outro instrumento que pode ser utilizado para avaliar o processo da aprendizagem significativa é o *diagrama V*, ou “Vê” heurístico, inventado por D. Bob Gowin para ilustrar os elementos conceituais e metodológicos que interagem no processo de construção do conhecimento ou nas análises de conferências ou documentos que apresentam um dado conteúdo de conhecimento (Novak, 1984).

Um problema a ser enfrentado pelo professor com relação à investigação da aprendizagem significativa, já referenciado no texto, é a falta de conhecimentos prévios relevantes nos alunos, ou, na linguagem de Ausubel, a ausência de conceitos subsunçores nas suas estruturas cognitivas. Uma solução proposta pelo autor é o uso de *organizadores prévios*

[70] Como já foi referenciado no texto, *mapas conceituais* foram desenvolvidos por Joseph D. Novak como forma de desvelar a estrutura cognitiva do aprendiz. Também podem ser interpretados como diagramas hierárquicos que procuram refletir a organização conceitual de uma disciplina ou de parte dela (Moreira, 2006b).

(ou organizadores avançados) que possam servir de ancoradouro provisório para o novo conhecimento, facilitando a aprendizagem subsequente (ibid. Moreira 2006a).

Um *organizador avançado* é um mecanismo pedagógico que ajuda a implementar os princípios da aprendizagem significativa, estabelecendo uma ligação entre aquilo que o aprendiz já sabe e aquilo que precisa saber, caso necessite apreender novos materiais de forma mais ativa e expedita (Ausubel, 2000). São materiais introdutórios, apresentados antes do material de aprendizagem em si.

Moreira (2006a) explica que organizadores prévios verdadeiros são aqueles destinados a facilitar a aprendizagem significativa de tópicos específicos, ou série de ideias estreitamente relacionadas. Os materiais introdutórios utilizados para facilitar a aprendizagem de vários tópicos, denominam-se *pseudo-organizadores prévios* (ibid. 141).

Por exemplo, existem pelo menos *três conceitos subsunçores* essenciais para a aprendizagem significativa do princípio que se refere à terceira lei de Newton, $F = ma$; os conceitos de *força, massa e aceleração*. Por sua vez, o *conceito de aceleração (taxa de variação instantânea da velocidade)* necessita ancorar-se no *conceito subsunçor de derivada,* para que possa ser assimilado e retido de forma significativa. No entanto, sabe-se que, em geral (temos observado isto ao longo da nossa pesquisa), os estudantes ingressantes nos cursos de graduação em Física não possuem, na sua estrutura cognitiva, os atributos necessários para entender o significado do conceito *derivada* dentro do contexto da Física. Tampouco assimilarão tal conceito, na disciplina de Cálculo, a tempo de retê-lo e transferi-lo para o contexto da Física, de forma significativa, já que naquele contexto este conceito é desenvolvido numa fase posterior, com base apenas na sua *definição matemática.*

Derivação é um conteúdo que, na ótica de Ausubel, poderia ser trabalhado, no contexto da Mecânica, na forma de *organizador prévio*, e poderia ser apresentado numa fase anterior ao ensino dos novos conceitos, a fim de promover a aprendizagem significativa. No entanto, uma alternativa melhor seria auxiliar o aluno a construir o *conceito de derivada* considerando suas características semânticas no contexto da Física e deixar os organizadores para mostrar a *discriminabilidade e a relacionabilidade* entre novos conhecimentos e aqueles já existentes na sua estrutura cognitiva.

Nossa proposta de estudo procurou explorar os conceitos da teoria de Ausubel a partir dos dados obtidos com a pesquisa que procurou investigar e desenvolver formas alternativas de abordagem dos conceitos matemáticos do Cálculo, no contexto da disciplina de Física, a partir da integração entre os conteúdos das duas áreas, na primeira etapa dos cursos de graduação em Física.

4.3. Os Campos Conceituais de Gérard Vergnaud

A teoria dos campos conceituais de Vergnaud[71] é uma *teoria psicológica do conceito,* ou melhor, da *conceitualização do real*. Sua principal finalidade é *propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos,* em crianças e adolescentes, entendendo-se por "conhecimento", tanto as habilidades quanto as informações expressas (Vergnaud, 1993, p.1). Nas aprendizagens dos adultos, estas ideias estão mais ligadas aos hábitos e formas de pensamentos adquiridas do que ao desenvolvimento da estrutura física (ibid. 1993).

Apesar de ser uma teoria elaborada no contexto da Educação Matemática, ela não é restrita exclusivamente à Matemática, mas também às áreas científicas e tecnológicas. No entanto, Vergnaud reconhece que na área da Matemática existe a maior lacuna entre a cientificidade do conhecimento e o conhecimento subjacente às competências das crianças e dos adultos (Vergnaud, 1994).

Quando fala em *conceitualização,* o autor não se refere à mera *definição de um conceito*, senão à sua *definição psicológica*, que vai requerer o reconhecimento ou a descoberta das *diferentes propriedades de tal conceito*, de maneira *complexa*, *progressiva* e, por vezes, *bastante demorada.* Quando se refere à *generalização do conhecimento* Vergnaud (1996) caracteriza o teor construtivista da sua teoria.

> Um dos problemas é generalizar o conhecimento, mas nesse momento é preciso dar à criança a oportunidade de *construir o conhecimento*. Isso quer dizer que o processo de conceitualização não se faz apenas por simples generalização. A generalização só é possível porque nós vamos pagar o preço de certas operações de pensamento (ibid. p.15).

[71] Gérard Vergnaud é um matemático, filósofo e psicólogo francês. Formou-se em Genebra e faz parte do segundo conjunto de pesquisadores orientado por Jean Piaget. É professor emérito do Centro Nacional de Pesquisas Científicas (CNRS) em Paris, pesquisador em *didática da Matemática* e autor da *teoria dos Campos Conceituais*. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9rard_Vergnaud.

Por isso, para entender como se dá o *desenvolvimento de um conceito* pelo aprendiz, à luz da teoria dos campos conceituais, é necessário considerar tal *conceito (C)* como um *tripleto de três conjuntos*: $C = (S, I, R)$, onde:

- S: é o *conjunto de situações* que tornam o conceito útil e significativo;
- I: é o *conjunto de invariantes operacionais* que podem ser usados pelos indivíduos para lidar com estas situações;
- R: é o *conjunto de representações simbólicas, linguísticas, gráficas ou gestuais* que podem ser usadas para representar invariantes, situações e procedimentos.

Em termos psicológicos, S é a *realidade* e (I, R) é uma *representação*. Representação pode ser considerada como dois aspectos do pensamento interagindo, o *significado* (I) e o *significante* (R) (Vergnaud, 1988, p.141).

Esta definição traz importantes implicações para a forma como um professor pesquisador pode conduzir o sistema de ensino e aprendizagem dos conceitos referentes à sua disciplina. Por isso muitos didáticos se interessam grandemente pela teoria dos campos conceituais, apesar de não ser uma teoria propriamente *didática*.

Numa primeira etapa, o processo da *conceitualização* vai requer a caracterização e identificação de uma ampla variedade de *situações* que possam dar sentido aos conceitos que serão desenvolvidos. Numa segunda etapa será necessário identificar os diferentes *invariantes* explicitados pelos estudantes frente às situações à que estão submetidos, bem como identificar as diferentes simbologias, gestos, falas e outras particularidades por eles utilizadas, para dar conta das situações. Vergnaud (2007) afirma que o aluno expressa seu conhecimento científico pela sua maneira de atuar em situação – *forma operatória* – e pelos enunciados e explicações que é capaz de anunciar – *forma predicativa*.

Há de se considerar que grande parte dos invariantes utilizados pode permanecer *implícita*, no sentido em que o estudante pode utilizá-lo, em determinada situação, sem que consiga *explicitar* a forma como foi utilizado. Esta talvez seja o maior desafio de professor: *mediar o processo de explicitação dos invariantes operacionais utilizados pelos estudantes*.

Como podemos perceber, o *desenvolvimento cognitivo* do aprendiz está diretamente relacionado com o *processo de conceitualização do real*, o qual, por sua vez, vai depender da maneira com que o aprendiz *esquematiza* e *utiliza conceitos específicos* para lidar com as *situações* que lhe são propostas.

Os *invariantes operacionais* são componentes básicos dos *esquemas*[72], os quais Vergnaud (1996c) define como *organizações invariantes* da ação para uma determinada classe de *situações*[73].

> Os invariantes operacionais constituem a base conceitual implícita, ou explícita, que permite obter a informação pertinente, e inferir dela, a partir desta informação e do objetivo por alcançar, as regras de ação mais pertinentes (ibid. p.201).

Quanto às *situações*, Vergnaud distingue duas *classes* (ibid. 1993, p. 2):

- Aquelas em que o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento, e sob certas circunstâncias, de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
- Aquelas em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

O conceito de *esquema* não funciona da mesma forma nas duas classes de situações. Na primeira *os comportamentos são amplamente automatizados*, organizados por um só esquema. Já a segunda classe de situações vai requerer a sucessiva utilização de vários esquemas que podem entrar em competição e que devem ser acomodados, descombinados e recombinados para que se atinja uma solução desejada (ibid. 1993, p.2).

Sintetizando o que foi dito até agora podemos afirmar que o *desenvolvimento das habilidades e competências* dos estudantes se dá através da sua experiência com um grande número de *situações*. Quando submetido a novas situações, o estudante usa o conhecimento adquirido em situações mais simples e tenta adaptá-la a esta nova situação, através do uso de *esquemas*. Estes esquemas são constituídos de *invariantes operacionais*, que são teoremas e conceitos não científicos implícitos na sua mente. Quando houver explicitação, negociação e

[72] Os demais componentes de um esquema são: *objetivos e antecipações, regras de ação, de coleta e de controle da informação e possibilidades de inferência.*

[73] O conceito de *esquema* é a principal herança de Piaget para a teoria de Vergnaud. *Esta dinâmica proposta por Piaget para dar conta das habilidades sensório-motoras e habilidades intelectuais, requer uma análise profunda caso se queira entender as relações entre competências e concepções* (Vergnaud, 1994, p.53).

transformação destes invariantes operatórios em conceitos e teoremas científicos haverá desenvolvimento cognitivo.

Importante observar que, neste processo, o caráter do conhecimento muda se for comunicável, debatido e compartilhado. A principal tarefa do professor é ajudar o aluno a desenvolver seu repertório de esquemas e representações (ibid. Moreira, 2004a).

Ocorre que as *situações* propostas por Vergnaud (1990) são elementos de um conjunto mais amplo, denominado *campo conceitual*, responsável pela organização do conhecimento. A necessidade de se estudar os *campos conceituais* se deve ao fato que *um único conceito não se refere a apenas um tipo de situação, e uma única situação não pode ser analisada com apenas um conceito* (Vergnaud, 1988).

Uma definição mais elaborada caracteriza o *campo conceitual* como sendo um conjunto de situações cujo domínio requer, por sua vez, o domínio de vários *conceitos, procedimentos e representações* de naturezas distintas (Moreira, 2004a).

> Um campo conceitual é um conjunto de problemas e situações para o tratamento dos quais, conceitos, procedimentos, e representações de diferentes, mas estreitamente interconectados tipos, são necessários (Vergnaud, 1983b, p. 127).

Em nosso trabalho procuramos analisar como se dá o processo da conceitualização dos conceitos matemáticos necessários para lidar com as situações físicas do campo conceitual da Mecânica. Considerando os pressupostos de Vergnaud (1990) que afirma que *um conceito não se forma através de uma única situação e uma situação não define com um único conceito*, procuramos introduzir ao longo do desenvolvimento da disciplina da Mecânica, situações físicas que poderiam ser desenvolvidas no domínio do Cálculo, com a linguagem e notações do Cálculo, e que podem dar sentido aos conceitos matemáticos do Cálculo. Os resultados obtidos com a pesquisa são descritos e interpretados ao longo da tese.

4.4. Ausubel & Vergnaud: implicações para a pesquisa

No desenvolvimento da nossa tese a *teoria da assimilação e da retenção significativa* e a *teoria dos campos conceituais* se entrelaçam e se complementam.

Senão vejamos, em sua teoria Ausubel (1963, 2000) propõe uma forma de *aquisição de novos significados* a partir do *material de aprendizagem apresentado*. Estes significados são alcançados quando os novos conhecimentos adquiridos interagem com *conhecimentos* *prévios* relevantes da estrutura cognitiva do aprendiz, considerando a *não arbitrariedade* e a *substancialidade* exigida na apresentação do material instrucional com relação a estes conhecimentos prévios. Notamos dois eixos principais na proposta de Ausubel: (1) o desenvolvimento do material instrucional potencialmente significativo, que implica na apresentação de diferentes situações didáticas proporcionadas aos alunos, considerando sua disponibilidade cognitiva para a aprendizagem do novo material; (2) A análise do mecanismo da aprendizagem significativa, considerando toda a bagagem cognitiva previamente presente na estrutura cognitiva do aprendiz aliado ao material apresentado.

Em contrapartida, Vergnaud (1990) propõe uma teoria psicológica para *conceitualização do real*, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual. Neste processo o aluno expressa seu conhecimento científico pela sua maneira de atuar em situação (forma operatória), e pelos enunciados e explicações que é capaz de enunciar (forma predicativa) (Vergnaud, 2007).

Notamos que o processo da *aprendizagem significativa* vai requerer que o aprendiz esteja constantemente em contato com *atividades didáticas* que subentendem a mediação (por parte do professor) de distintas *situações* que possam permitir que algum novo conhecimento interaja com conhecimentos e experiências anteriores do aluno. Neste processo o estudante fará uso dos seus esquemas de representação e lançará mão de todo o conhecimento prévio de que for capaz para dar conta da situação.

Podemos constatar uma forte compatibilidade entre as duas teorias. Ausubel (1963, 2000) argumenta que o conhecimento prévio do aluno é o fator determinante na assimilação de novas informações. Pois este conhecimento prévio é constituído de teoremas e conceitos não científicos que devem interagir com as novas informações a fim de evoluírem e transformarem-se em conceitos científicos. A teoria dos Campos Conceituais atribui o desenvolvimento cognitivo do sujeito à forma como domina um campo conceitual, através do processo de conceitualização, esquematizado por ele, diante das situações reais vivenciadas.

Os esquemas estruturados pelo aprendiz para a conceitualização do real são constituídos de conhecimentos prévios, os quais são necessários para a aprendizagem significativa. Ou seja, os conhecimentos prévios definidos por Ausubel estão contidos nos invariantes operacionais dos alunos. Contudo, assim como em alguns casos o conhecimento prévio do aluno pode ser determinante no progressivo domínio de um campo conceitual, em outros pode impedir este progresso. Cabe ao professor identificar sobre quais conhecimentos prévios o aluno pode se apoiar para aprender.

A teoria dos Campos Conceituais parece prover um referencial adequado para analisar a estrutura fina da teoria da aprendizagem significativa. O que para Ausubel são *campos organizados de conhecimento*, para Vergnaud são *campos conceituais* (ibid. Moreira, 2006a).

De que forma estas hipóteses foram aplicadas na nossa pesquisa?

Ao longo do desenvolvimento da pesquisa observamos que todos os conceitos básicos das teorias propostas tinham alguma espécie de implicação para o trabalho, alguns de forma mais intensa e outros, nem tanto. Particularmente, nos "apegamos" fortemente ao conceito de *conceito subsunçor* definido por Ausubel e no conceito de *situação* apresentado por Vergnaud. Isto porque nas etapas introdutórias da pesquisa identificamos, com raras exceções, a falta de subsunçores básicos do Cálculo, por parte dos estudantes, para lidar com as situações físicas da disciplina de Mecânica.

A partir desta identificação tivemos dois propósitos: incialmente, investigar e elaborar um material instrucional potencialmente significativo que pudesse contemplar, de alguma forma, uma possível integração entre os conceitos matemáticos e físicos das áreas do Cálculo I e da Física I. Em uma primeira tentativa, elaboramos os denominados módulos matemáticos para a Física onde foram contemplados os conteúdos sobre vetores e trigonometria, alguns fundamentos básicos do cálculo diferencial e fundamentos básicos do cálculo integral. Estes conteúdos foram apresentados aos alunos, na disciplina de Física I, nas etapas introdutórias aos conceitos físicos que seriam apresentados. Depois foram retomados num nível mais elevado de abstração pelo professor da disciplina, sendo que a forma com a qual tínhamos trabalhado não havia sido satisfatória para a construção dos conceitos subsunçores.

Na segunda tentativa, a estratégia escolhida para a apresentação dos conteúdos matemáticos nas aulas de Física foi apresentar tais conceitos ao longo do desenvolvimento do conteúdo da disciplina, com a visão de uma professora de Cálculo. Procuramos, na medida do possível, alternar as situações apresentadas, introduzindo levemente situações problema do Cálculo que necessitassem da utilização dos mesmos conceitos para serem manipuladas e resolvidas. A intenção foi mostrar aos estudantes que os mesmos conceitos teriam interpretações distintas nos dois diferentes contextos, do Cálculo e da Física. A análise da forma com que os estudantes lidavam com as situações apresentadas baseou-se em tarefas colaborativas, trabalhos resolvidos em aula e a provas realizadas ao final de cada unidade de ensino. Procuramos alguma evidência de aprendizagem significativa, bem alguma alusão à articulação enfatizada ao longo do desenvolvimento da disciplina. Os resultados deste processo serão discutidos ao longo da tese.

Capítulo 5

O ESTUDO EXPLORATÓRIO

Conforme pressupostos discutidos no segundo capítulo, partimos para a fase exploratória da pesquisa, amparados pelas características básicas da pesquisa qualitativa do tipo etnográfica: *observação participante e entrevista em profundidade.* Nessa fase da pesquisa *o investigador é o instrumento principal de investigação e o ambiente natural é a fonte direta dos dados* (Bogdan e Biklen, 1994).

Dentre os objetivos específicos desta etapa destaca-se *verificar como a Matemática é transposta nas aulas de Física; como as situações-problemas da Cinemática e da Dinâmica podem dar sentido aos conceitos matemáticos desenvolvidos no Cálculo I e como se dá o processo de enculturação que começa a se formar na etapa inicial do Curso, com relação à importância da Matemática para o aprendizado da Física*[74].

Os resultados obtidos neste estudo são complementados pela experiência pessoal da autora com o ensino da disciplina de Cálculo para estudantes dos Cursos de Física em dois diferentes contextos, particularmente na UFRGS. Por isto considerou-se importante apresentar, no primeiro capítulo da tese, uma descrição desta experiência.

Apesar de metas estipuladas é importante ressaltar que o interesse na abordagem qualitativa de pesquisa está focado mais no *processo* do que simplesmente nos *resultados ou produtos*. A investigação é *descritiva* e a análise dos dados é feita de forma *indutiva*, com ênfase nos *significados* (Bogdan e Biklen, 1994).

5.1. Os Cursos de Física da UFRGS

Conforme discutido na introdução do trabalho, de uma maneira geral, as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e de Física são concomitantes na primeira etapa dos Cursos de Física, em diferentes contextos. Na UFRGS elas compartilham esta realidade desde a criação do Curso de Física, que antecede o surgimento do próprio Instituto de Física, numa época em que o Curso pertencia a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras instituída em 1942 (Maciel,

---

[74] Para Spradley (1980), *cultura* é o conhecimento acumulado que as pessoas utilizam para interpretar a experiência e induzir o comportamento (apud Bogdan e Biklen, 1994).

1987). Em 1953, os Cursos de Física e Matemática pertenciam a um único Departamento de Matemática e Física quando, neste mesmo ano, o Ministério de Educação e Cultura sugeriu a separação dos Cursos. Em 1957, o Conselho Universitário aprovou o regimento da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras onde constavam os Cursos de Bacharelado (3 anos) e Licenciatura (1 ano após o Bacharelado), em 13 áreas, dentre as quais o Curso de Física, que agrupava cadeiras em 10 diferentes departamentos. Particularmente, o Departamento de Física era constituído pelas cadeiras de *Análise Matemática e Análise Superior, Geometria, Mecânica Racional, Mecânica Celeste, Física Geral e Experimental, Física Matemática, Física Teórica e Física Superior*. A seriação do Curso de Física na época era dada pelas seguintes cadeiras (ibid., Maciel 1987, pp. 2-3):

<u>1ª Série</u>: Análise Matemática, Geometria Analítica e Projetiva, Física Geral e Experimental e Cálculo Vetorial;

<u>2ª Série</u>: Análise Matemática, Geometria Descritiva e Complementos de Geometria, Mecânica Racional, Física Geral e Experimental;

<u>3ª Série</u>: Análise Superior, Física Superior, Física Matemática, Física Teórica, Mecânica Analítica.

Observa-se que as disciplinas relacionadas aos conteúdos do Cálculo e da Geometria Analítica faziam parte do Departamento de Física sendo, portanto, lecionadas por profissionais pertencentes aquele Departamento. Este fato corrobora os argumentos citados por outros autores a respeito de uma época em que os Departamentos de Matemática e Física fundiam-se num único Departamento e que as disciplinas de Matemática e de Física eram trabalhadas quase como uma unidade, com um único fim, a formação científica dos alunos.

A peça chave no processo de fundação do Instituto de Física, no ano de 1959, foi o surgimento do Centro de Pesquisas Físicas, órgão de natureza científica e autônoma, diretamente subordinado à Reitoria. No mesmo ano foi fundado também o Instituto de Matemática, quando então os Cursos de Física e Matemática passaram a pertencer a Departamentos distintos. Desde aquela época, o Curso de Pós-Graduação em Física da UFRGS vem ocupando lugar de destaque dentre os Centros de Pesquisa Nacionais e Internacionais.

De fato, o Instituto de Física foi inicialmente constituído sob a forma de órgão de pesquisa. No setor de ensino, limitou-se inicialmente a colaborar no preparo de estagiários e bolsistas, *visando a estimular vocações e adestrar pessoal especializado e a formar seleto grupo de investigação* (Paglioli, 1952).

Em 1959, o Instituto de Física divulgou um panfleto explicativo sobre o Curso de Física a fim de estimular os alunos que estavam concluindo o Curso Científico, para a carreira científica. Fica clara, a partir da leitura do texto, a intenção em preparar o aluno para a área da pesquisa em Física, estando em menor evidência à ênfase para a área do Ensino. Observa-se também a apresentação de um Curso que prioriza a sólida formação científica de ambos profissionais físicos: professores para o magistério secundário e pesquisadores. Isto é, importa que os professores formados para o magistério tenham, antes, a formação de pesquisadores. Contudo, a mesma prioridade não é evidente quanto à formação dos pesquisadores físicos no papel de professores do Ensino Superior, já que para tanto não há exigências em termos de disciplinas específicas da área do Ensino. O papel atribuído às disciplinas de cunho matemático também parece ser evidente para a formação científica do aluno, porém de maneira paralela, e não integradora, aos conhecimentos físicos necessários para o mesmo fim.

> Entre os cursos ordinários que ministra a Faculdade de Filosofia encontra-se o de Física, que se destina à preparação de professores e de pesquisadores. O curso tem duração de três anos, ao fim dos quais é conferido ao estudante o título de Bacharel em Física. Para dedicar-se ao magistério secundário, é necessário obter ainda, subsequentemente, o título de Licenciado, o que implica em mais um ano de estudo de disciplinas como Didática, Psicologia, Biologia, Sociologia e Administração. Durante o primeiro e o segundo ano do Curso, a Física é estudada sob o título de Física Geral e Experimental. Todos os grandes temas que já constam do programa do colégio (Mecânica, Acústica, Calor, Eletricidade, Magnetismo e Ótica) são retomados com maior amplitude e profundidade em um curso teórico e prático. Concomitantemente vai-se aprofundando o conhecimento de Matemática nas cadeiras de Análise Matemática e de Geometria. No segundo ano agrega-se ademais, a essas disciplinas, a de Mecânica Racional. No último ano o estudo da Física se desdobra em quatro disciplinas. Graças aos estudos de Física e de Matemática feitos nos dois anos anteriores, o aluno já está em condições de abordar problemas em um novo nível[75].

As habilitações do Curso de Física da UFRGS até 1999/2 eram Bacharelado e Licenciatura em Física. A partir de 2000/1 incluiu-se a Licenciatura Noturna. Atualmente,

---

[75] Texto retirado do documento histórico intitulado: *Você tem pensado em Física?* Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/historia/50anos.html.

desde 2010/1, o Bacharelado passou a ser composto por quatro habilitações: *Astrofísica; Física Computacional; Materiais e Nanotecnologia e Pesquisa Básica.*

Na tabela 2 são apresentadas as grades curriculares relativas aos períodos onde houve algum tipo de mudança nas disciplinas do primeiro semestre letivo do Curso de Bacharelado, no período de 1980/1 até 2010/1. Nas tabelas 3 e 4 são apresentadas, respectivamente, as súmulas das disciplinas da Matemática e da física introdutórias, em períodos de alteração curricular, de 1995/1 até 2010/1 [76].

Com relação à disciplina de Cálculo, observa-se em 1984/1 uma redução significativa na carga horária, de 120 horas para 90 horas. A disciplina de 90 horas que tratava dos tópicos da matemática elementar, presente no currículo em 1980/1, foi extinta em 1984/1 quando então é incluída, no currículo, a disciplina de Geometria Analítica, de 60 horas. Observa-se, com a extinção da disciplina de Geometria Analítica em 1997/1, a perda da abordagem introdutória dos conteúdos da *Álgebra Vetorial* do domínio da Matemática, ficando a *representação vetorial* sob a responsabilidade da disciplina FIS01156-Física I-B (ver tabelas 3 e 4). Atualmente, a disciplina de Cálculo mantém o conteúdo tradicional sobre diferenciação e integração de função escalar preservando, da geometria analítica, o *estudo sobre cônica* (ibid., tabela 3).

Interpretamos, através da análise destes currículos, a existência de problemas com a base matemática do Ensino Médio, nos momentos em que são incluídas novas disciplinas ou reformulados programas e cargas horárias do Cálculo na tentativa de resolver problemas de aprendizado na fase introdutória do Curso. Também é evidente a preocupação de que o currículo introdutório não seja carregado de disciplinas puramente matemáticas em detrimento das cadeiras específicas da Física.

Como já foi mencionado, o Instituto de Matemática da UFRGS incrementou o programa de extensão PRÉ-CÁLCULO como forma de solucionar problemas relacionados com a defasagem matemática oriunda do Ensino Médio. Contudo, é um Programa de caráter não obrigatório, disponibilizado aos alunos que, apesar de terem obtido aprovação no Concurso Vestibular, tiveram um desempenho insatisfatório na prova de Matemática.

[76] Dados obtidos em: http://www1.ufrgs.br/graduacao/xInformacoesAcademicas/curriculo.php?CodHabilitacao=42&CodCurriculo=127&CodCurso=330&sem=2010012

Com relação à disciplina de Física, observa-se que de 1980/1 até 1997/2 a parte experimental era separada da parte teórica. Em 1998/1 as duas fundem-se numa única disciplina de 135 horas. Em 2010/1 a disciplina passa a ser novamente dividida em física teórica e física experimental, observando que a carga horária da parte experimental é reduzida de 45 horas para 30 horas semestrais (ver tabela 2). Evidencia-se, em certo momento, a preocupação com o sincronismo que de fato deve haver, entre as atividades didáticas teóricas e experimentais. No entanto, os problemas que parecem surgir nesse contexto culminam numa nova separação, com o currículo de 2010/1. Atualmente são disciplinas autônomas, cada qual com um sistema de ensino e aprendizagem próprio, e que tentam articular, da melhor forma, teoria e prática.

A disciplina MAT01353 Cálculo e Geometria Analítica I A também é ofertada semestralmente, em seis horários distintos, para alunos das áreas das Engenharias, Computação, Matemática, Física, Química e Ciências Atuariais. Nas três disciplinas mencionadas há um professor regente, no entanto, como já foi descrito no primeiro capítulo da tese, reserva-se ao Cálculo um sistema de ensino unificado.

TABELA 2: DISPOSIÇÃO CURRICULAR DAS DISCIPLINAS INTRODUTÓRIAS DO CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA DA UFRGS: MUDANÇAS SIGNIFICATIVAS DE 1980/1 ATÉ 2010/2

1980/1	1984/1
MAT133 – Cálculo e Geometria Analítica I (120h); HUM464 – Estudo de Problemas Brasileiros I (30h); FIS157 – Física Experimental I (45h); FIS156 – Física I-B (90h); MAT170 – Tópicos de Matemática Elementar (90h);	MAT166 – Cálculo I (90h); HUM464 – Estudo de Problemas Brasileiros I (30h); FIS157 – Física Experimental I (45h); FIS156 – Física I-B (90h); MAT157 – Geometria Analítica (60h);
1994/1	1995/1
MAT166 – Cálculo I (90h); FIS157 – Física Experimental I (45h); FIS156 – Física I-B (90h); MAT157 – Geometria Analítica (60h);	MAT01166 – Cálculo I (90h); FIS01157 – Física Experimental I (45h); FIS01156 – Física I-B (90h); MAT01157 – Geometria Analítica (60h);

1997/1 MAT01353 Cálculo e Geometria Analítica I A (90h); FIS01157 – Física Experimental I (45h); FIS01156 – Física I-B (90h);	1998/1 MAT01353 – Cálculo e Geometria Analítica I A (90h); FIS01002 – Física Geral e Experimental I (135h); QUI01103 – Química Geral B (75h);
2000/1 MAT01353 – Cálculo e Geometria Analítica I A (90h); FIS01002 – Física Geral e Experimental I (135h); QUI01016 – Química para Físicos (60h);	2007/1 MAT01353 – Cálculo e Geometria Analítica I A (90h); FIS01200 – Física Geral e Experimental I (135h); QUI01016 – Química para Físicos (60h);
2008/1 MAT01353 – Cálculo e Geometria Analítica I A (90h); FIS01200 – Física Geral e Experimental I (135h); QUI01009 – Química Fundamental A (60h);	2010/1 (Hab. Materiais e Nanotecnologia) MAT01353 – Cálculo e Geometria Analítica I A (90h); FIS01257 – Física Geral I A (90h); FIS01258 – Física Experimental I A (30h); QUI01009 – Química Fundamental A (60h);

TABELA 3: SÚMULAS DAS DISCIPLINAS INTRODUTÓRIAS DA MATEMÁTICA PARA O CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA: MUDANÇAS SIGNIFICATIVAS DE 1995/1 ATÉ 2010/1.

Ano	Disciplinas da Matemática	Súmulas
1995/1	MAT01166 Cálculo I	Números reais. Funções de uma variável real. Cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real.
	MAT01157 Geometria Analítica	Matrizes. Determinantes. Sistemas lineares. Vetores, operações com vetores; distâncias, áreas e volumes. Sistemas de coordenadas. Estudo da reta e de curvas planas. Estudo da reta, do plano, de curvas e de superfícies no espaço.
1997/1	MAT01353 Cálculo e Geometria Analítica I A	Estudo da reta e de curvas planas. Cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real a valores reais.

TABELA 4: SÚMULAS DAS DISCIPLINAS INTRODUTÓRIAS DA FÍSICA PARA O CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA: MUDANÇAS SIGNIFICATIVAS DE 1995/1 ATÉ 2010/1.

Ano	Disciplinas da Física	Súmulas
1995/1	FIS01156 Física I-B	Introdução. Grandezas físicas. Representação vetorial. Sistemas de unidades. Movimento em uma e duas dimensões. Dinâmica da partícula. Trabalho e energia. Conservação de energia. "Momentum Linear". Cinemática e dinâmica de rotações.
	FIS01157 Física Experimental I	Experiências de laboratório versando sobre: medidas, estudo do movimento, leis de Newton, forças de atrito, trabalho de energia, colisões elásticas e inelásticas. Cinemática e dinâmica de rotação.
1998/1	FIS01002 Física Geral e Experimental I	Introdução: grandezas físicas. Representação vetorial. Sistemas de unidades. Movimento em uma e duas dimensões. Dinâmica da partícula. Trabalho e energia. Conservação de energia. Momentum linear. Cinemática e dinâmica de rotações. Experiências de laboratório versando sobre: medidas, estudo do movimento, leis de Newton, forças de atrito, trabalho e energia, colisões elásticas e inelásticas.
2007/1	FIS01200 Física Geral e Experimental I A	Introdução: grandezas físicas. Representação vetorial. Sistemas de unidades. Movimento em uma e duas dimensões. Dinâmica da partícula. Trabalho e energia. Conservação de energia. Momentum linear. Cinemática e dinâmica de rotações. Equilíbrio de corpos rígidos. Gravitação Universal. Experimentos semanais sobre estes tópicos.
2010/1	FIS01257 Física Geral I A	Grandezas físicas. Representação vetorial. Sistemas de unidades. Movimento em uma e duas dimensões. Dinâmica da partícula. Trabalho e energia. Conservação de energia.
	FIS01258 Física Experimental I A	Atividades experimentais envolvendo prioritariamente tópicos de cinemática, dinâmica e energia mecânica, objetivando o domínio de técnicas básicas de medida das grandezas relacionadas a esses tópicos e o desenvolvimento de boas práticas de laboratório. Introdução ao cálculo da incerteza em uma medição.

5.2. O Cálculo nas Aulas de Física da UFRGS

Conhecer como os conceitos matemáticos são transpostos nas aulas de Física torna-se uma importante meta de investigação quando o interesse do professor de Matemática é desenvolver estes conceitos a partir de situações que possam lhes dar significado, ou ainda, quando pretende direcionar estes conceitos para as aplicações físicas. O uso da linguagem e das notações da Matemática nas aulas de Física pode esclarecer o papel que a abstração deve exercer como instrumento facilitador da aprendizagem conceitual e experimental dos fenômenos físicos.

A riqueza de informações que podem ser obtidas através de uma investigação neste nível é fundamental para a elaboração de novas estratégias de ensino e de novos currículos que busquem a articulação da Matemática com a Física. Nesta seção apresenta-se a descrição fiel de algumas aulas, a fim de transcrever como se deu esse processo nas aulas da disciplina de física introdutória dos cursos de Graduação em Física da UFRGS, nos semestres de 2009/2 e 2010/1. O método utilizado foi uma *observação participante* cujos fundamentos teóricos já foram apresentados anteriormente.

5.2.1. A turma de 2009/2

Na turma de 2009/2 a disciplina observada foi FIS01200 Física Geral e Experimental I[77], ofertada para os Cursos de Física Bacharelado e Licenciatura, cuja carga horária e ementa estão descritas nas tabelas da seção anterior. Foram observadas 28 aulas teóricas e 15 aulas práticas, num total de 101 horas. A turma era constituída por 29 alunos ingressantes na Licenciatura em Física Noturna. As aulas teóricas eram ministradas no horário das 20h30min até 22h30min nas segundas-feiras, quartas-feiras e sextas-feiras. A parte prática era ministrada num laboratório de ensino de Física, no horário das 18h30min até 21h30min, nas terças-feiras.

O regente da disciplina era um Físico Experimental, que denominaremos *professor A.* As aulas teóricas foram sempre ministradas pelo *professor A* e as aulas no Laboratório foram divididas entre ele e uma professora da área da Física Teórica, que denominaremos *professora T.* Quinze alunos estavam sob o comando do *professor A* e os 15 restantes com a *professora T.*

A entrada no campo de observação deu-se através de contato via e-mail com o *professor A.* Depois de especificados os objetivos da pesquisa, o professor mostrou-se interessado em colaborar da forma que fosse preciso, e autorizou as observações nas suas aulas. Uma experiência inicial com gravações não foi bem sucedida de modo que se percebeu

[77] Plano de ensino e informações sobre a disciplina está disponível em: http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01200/.

certo constrangimento do professor e dos alunos diante do instrumento, motivo pelo qual optou-se pela transcrição dos eventos num diário de campo.

Naquele semestre as aulas estavam previstas para terem início no dia 02/08/09, mas devido ao surto de Gripe A em Porto Alegre e no interior do Estado do Rio Grande do Sul, as aulas começaram no dia 17/08/09, e as aulas de Laboratório iniciaram duas semanas após, no dia 01/09/09.

Como objetivo final na disciplina esperava-se que o aluno fosse capaz de descrever o movimento de uma partícula material em uma e duas dimensões, bem como a rotação e o rolamento de um corpo rígido, de utilizar corretamente as leis de Newton e de aplicar as leis de conservação do momento linear, da energia mecânica e do momento angular.

A previsão era que as aulas fossem de caráter teórico, com exposição do conteúdo programático pelo docente em 4 horas semanais e resolução de exercícios propostos em 2 horas semanais (optou-se pelas aulas de exercícios nas segundas-feiras). Nas aulas práticas deveriam ser realizados experimentos pelos discentes e o respectivo registro em caderno de laboratório. Os roteiros dos experimentos eram disponibilizados para os alunos com antecedência, no site da disciplina[78].

Os critérios de avaliação também estavam pré-determinados no primeiro dia de aula. Os discentes deveriam ter frequência mínima de 75%, tanto nas aulas teóricas como nas aulas práticas, para não reprovarem por frequência (conceito final FF). Aqueles com frequência seriam avaliados em quatro provas escritas a serem realizadas em datas pré-estabelecidas, ao final de cada unidade de ensino. As datas estavam previstas para 16/09/09 (unidade 1), 14/10/09 (unidade 2), 18/11/09 (unidade 3) e 16/12/09 (unidade 4). Para fins de aprovação, todas as notas deveriam ser $\geq 3{,}0$ e a média aritmética simples, tanto nas provas escritas (T) quanto nas atividades de laboratório (L), deveria ser $\geq 6{,}0$. A nota final (N) conferida ao aluno estava prevista pela média aritmética ponderada de T (peso 3) e L (peso 1): $N = (3T + L)/4$. Um conceito final seria atribuído a partir de N da seguinte forma: A: $\mathrm{N} \geq 9{,}0$; B: $7{,}5 \leq N < 9{,}0$; C: $6{,}0 \leq N < 7{,}5$; D: $0 \leq N < 6{,}0$. Estava prevista uma atividade de recuperação em 06/01/2010, onde cada discente poderia realizar uma quinta prova escrita, cuja nota substituiria, para efeito de cálculo das médias, a nota obtida em uma das quatro

[78] http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01200.

primeiras provas. A quinta prova deveria tratar do mesmo conteúdo da prova cuja nota o discente desejasse substituir.

Tanto nas aulas teóricas como nas práticas foram anotados fielmente os conteúdos transcritos na lousa, os comentários dos professores (CP) e dos alunos (CA), e comentários do observador (CO) que pudessem contribuir com os objetivos da pesquisa. Nas aulas práticas repetia-se a mesma sistemática, incluindo-se os procedimentos experimentais realizados pelos grupos de alunos, intercalando-se um grupo distinto a cada aula. A grande extensão deste material se torna indevida para ser apresentada neste documento. Contudo, apresentam-se nas tabelas 5 e 6 os registros feitos nas primeiras aulas teóricas e experimentais, respectivamente, a fim de que o leitor possa fazer parte do processo de análise e interpretação dos resultados apresentados.

TABELA 5: REGISTRO DOS DADOS DAS TRÊS PRIMEIRAS AULAS TEÓRICAS DA DISCIPLINA FIS01200 FÍSICA GERAL E EXPERIMENTAL I A

AULA DO DIA 17/08/09
ASSUNTO ABORDADO: Medições; o que é a ciência Física; exemplos de grandezas físicas; grandezas físicas fundamentais e derivadas; unidades no SI; conversão de unidades; dois exemplos de conversões de unidades; padrões (comprimento, tempo e massa); um exercício de conversão de unidades para ser feito em casa. COMENTÁRIOS DO PROFESSOR (CP), DOS ALUNOS (CA) E DO OBSERVADOR (CO): (CP) O curso de física da UFRGS é um dos melhores do país; (CP) O curso tem uma vida, uma história dentro da universidade e é assim que funciona; (CP) Não recomendo retirar sempre o livro da biblioteca; arrumem um livro de Mecânica; (CP) Existem dificuldades em termos de monitoria para o horário noturno, mas é assim mesmo; (CP) Nem tudo é perfeito, tentamos fazer o possível; (CP) Não sabemos tudo, ninguém sabe tudo; (CP) Existem semestres em que 1/3 da turma nunca aparece nas aulas. Isto é sério e preocupante por ser uma universidade pública. É uma falta de respeito com quem aguarda vaga. O mínimo que se espera é que venha até o fim; (CP) Duas notas abaixo de 3,0 não há mais o que fazer, está reprovado; (CP) Física aprende-se pelo "braço", recomendo em média dois exercícios diários da lista de exercícios; (CP) Recomendo estudar diariamente; (CP) Física não é literatura (CP) Pensem no problema e montem o problema, é assim que se aprende Física; (CP) Física é a ciência que se ocupa da energia, da matéria e de suas interações; (CP) As Ciências são quantitativas, isto é um aspecto fundamental; (CP) A partir de hoje a vida de vocês nunca mais será a mesma, em "tudo" deverá aparecer unidade; (CP) Não trabalhem na base da "decoreba"; (CP) Vocês não vão sobreviver no "mundo" apenas com o caderno de Física I;

(CP) É conveniente usar a conversão de unidades em cadeia;

(CP) Uma das ferramentas é a calculadora, saibam como usá-la;

(CP) Ao longo do Curso vocês começam a pegar "velocidade";

AULA DO DIA 19/08/09

ASSUNTO ABORDADO: Rápida revisão da aula anterior; grandezas vetoriais e escalares; adição de vetores; interpretação geométrica da adição vetorial; propriedades e decomposição de vetores; adição analítica de vetores; multiplicação de vetores (por um escalar e por um vetor); interpretação do produto escalar (a componente de um dos vetores ao longo do outro); produto vetorial; Representação vetorial em termos dos vetores unitários em três dimensões.

COMENTÁRIOS DO PROFESSOR (CP), DOS ALUNOS (CA) E DO OBSERVADOR (CO):

(CP) Se alguém tiver alguma dúvida pode interromper;

(CP) A decomposição de vetores vem das relações trigonométricas e é básica ao longo da Mecânica;

(CP) Quando o ângulo está fora do intervalo $-\pi/2<\theta<\pi/2$ a calculadora não resolverá o $arctg\theta$.

(CP) Tenham cuidado com a diferença entre as notações $tg^{-1}\theta \neq 1/tg\theta$.

(CA) E se girar o sistema como fica a representação em três dimensões?

(CA) Como é a representação da hélice circular em três dimensões?

(CA**)** c_x (a componente escalar do vetor $\vec{C}$ na direção de x) não tem representação de vetor?

(CP) Não se pode igualar um vetor a um escalar.

(CP) Na multiplicação de um vetor por um escalar só muda o seu módulo.

(CA) Há representação gráfica para o produto de um vetor por um escalar?

(CO) O professor desenha na lousa o vetor $\vec{s}=2\vec{v}$.

(CO) Depois o professor representa um vetor na origem do sistema de coordenadas retangulares, e fora do sistema coloca um vetor com mesmo módulo, direção e sentido, perguntando aos alunos se são iguais. Um dos alunos responde que não.

(CO) O professor explica que o que caracteriza um vetor é o seu módulo, sua direção e deu sentido e não, sua "origem".

(CO) Após o professor colocar a fórmula para o cálculo do produto escalar entre dois vetores na lousa: $\vec{a}.\vec{b}=ab\cos\phi$ o aluno pergunta:

(CA) O lado direito da equação não é um vetor também?

(CP) Observem que dois vetores perpendiculares entre si têm produto escalar igual a zero.

(CA) Como fica a projeção do menor vetor sobre o maior?

(CP) O produto vetorial entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ resulta num terceiro vetor $\vec{c}$, perpendicular ao plano formado por ab . O sentido segue a regra da mão direita.

(CA) $\vec{c}$ troca de plano?

(CP) Um vetor sozinho não define um plano.

(CP) Sobre o exercício resolvido, não é copiar o exercícios, é tentar resolver até o fim sem olhar.

(CO) O professor propõe um exercício para decomposição de um vetor situado no terceiro quadrante, $\vec{a}$ situado a 250° no sentido anti-horário em relação a $\hat{i}$. O aluno pergunta:

(CA) Como fica a projeção no eixo x?

(CP) Resolvam na calculadora!

(CO) O professor justifica o sinal negativo da componente projetada na direção do eixo x pelo fato de apontar no sentido contrário ao de $\hat{i}$.

AULA DO DIA 21/08/09

ASSUNTO ABORDADO: Cinemática: movimento em uma dimensão; velocidade; aceleração; movimento unidimensional com aceleração constante; queda livre; aplicações.

COMENTÁRIOS DO PROFESSOR (CP), DOS ALUNOS (CA) E DO OBSERVADOR (CO):

(CP) A aula de segunda-feira será de exercícios e vocês devem saber usar a calculadora;

(CP) A Cinemática trata os movimentos sem se preocupar com suas causas e a Dinâmica explica por que algo se move;

(CP) Uma partícula é um corpo ideal, é algo bem definido, não tem tamanho, é um ponto no espaço, por isso tem apenas translação, não gira nem vibra;

(CP) Velocidade é a razão segundo a posição muda no tempo;

(CO**)** O professor faz o desenho de uma curva genérica no plano, define os vetores posição nos instantes t_1 e t_2, e define velocidade média como: $\vec{v}_{média} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, onde $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

(CA) Para fazer a soma de um vetor tem que pegar a origem de um e colocar na extremidade do outro?

(CP) $\vec{v}_{med}$ tem módulo $\left|\Delta\vec{r}/\Delta t\right|$ e, direção e sentido de $\Delta\vec{r}$;

(CP) Se a velocidade média é constante então temos um MRU, não muda nem em módulo, nem em direção e nem em sentido.

(CP) Para definir a velocidade instantânea vamos aproximar B de A na curva para obtermos: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

(CP) A Física sem o Cálculo perde a graça!

(CP) O módulo de $\vec{v}$ é a velocidade escalar instantânea. Sua direção é tangente à trajetória. Ser tangente significa passar de “raspão”;

(CP) A interpretação geométrica da derivada é *declividade;*

(CO) A aula aborda parte do conteúdo sobre funções vetoriais, específico da disciplina de Cálculo e Geometria Analítica II A;

(CP) Por enquanto vocês não farão cálculos de derivadas!

(CP) O mundo em uma dimensão é uma reta;

(CP) Precisamos de vetores para resolver os problemas físicos;

(CP) A aceleração é a razão da mudança da velocidade no tempo;

(CP) Definimos aceleração média como $\vec{a}_{med} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$;

(CP) No meio do semestre ainda tem gente calculando Δt errado!

(CP) Se a aceleração é nula, então a velocidade é constante;

(CP) Se mudar qualquer característica do vetor velocidade então muda a aceleração;

(CO) O professor define a aceleração instantânea como $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e então utiliza a anotação vetorial $\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} \;\Rightarrow\; \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$

(CP) Agora vamos obter as equações do movimento. Como resolver este problema sem utilizar o Cálculo?

(CP) 1ª equação: equação linear com x ausente: Se $\vec{a} = cte$ então $\vec{a} = \vec{a}_{med}$, e em uma dimensão temos: $a_x = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{x0}}{t - 0} \;\Rightarrow\; v_x = v_{x0} + a_x t$

(CP) x, v_x, a_x e t . A Cinemática são essas quatro coisas e nada mais!

(CP) 2ª equação: equação linear com a_x ausente: Se v_x varia uniformemente no tempo então $v_{x,med} = \frac{v_{x0} + v_x}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0}$. Logo $x = v_{x,med}t + x_0$, ou ainda $x = x_0 + \left(\frac{v_{x0} + v_x}{2}\right)t$

(CP) 3ª equação: equação quadrática com v_x ausente: Substituindo a primeira equação na segunda obtemos: $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

(CP) 4ª equação: equação linear com t ausente: Isolando t na primeira equação e substituindo na terceira equação

obtemos: $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - t_0)$
(CP) Estas são as quatro equações para o movimento retilíneo (1D) com aceleração constante. Um caso particular é a queda livre;

(CP) Em geral $a_y = -9{,}8 m/s^2$ e consideramos $y_0 = 0$;

(CP) Cuidado com o sinal! Se esquecê-lo as coisas vão para cima!
(CP) O passo zero para a resolução dos exercícios é definir o referencial!
(CA) Professor, tá bom ficar no Cálculo três vezes? A Física I seria boa se não tivesse o Cálculo junto!

<u>TABELA 6</u>: REGISTRO DOS DADOS NAS TRÊS PRIMEIRAS AULAS PRÁTICAS DA DISCIPLINA FIS01200 FÍSICA GERAL E EXPERIMENTAL I A

AULA DO DIA 01/09/09
<u>ASSUNTO ABORDADO:</u> Medições; <u>ATIVIDADE EXPERIMENTAL:</u> lance simultaneamente dois dados e registre a soma dos valores obtidos em cada um; repita pelo menos 49 vezes; construa um histograma para representar a distribuição dos resultados; calcule a média $\bar{x}$; calcule o desvio padrão σ_x; expresse o resultado desse experimento como $x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$. <u>COMENTÁRIOS DO PROFESSOR (CP), DOS ALUNOS (CA) E DO OBSERVADOR (CO):</u> (CO) O professor explica a forma como os alunos devem trabalhar no laboratório, fazendo todas as anotações no Caderno de Laboratório; (CP) Não fui eu que inventei a forma como deve se trabalhar no laboratório. Isto deve ser feito assim! É assim que é a Física de Laboratório; (CP) Quem sabe utilizar bem a calculadora tem vantagem, ganho de tempo; (CO) Estão presentes na aula 23 alunos. O professor inicia explicando o roteiro de funcionamento das aulas de laboratório. Fala sobre algarismos significativos, incerteza em medições, erros, precisão e exatidão, distribuição estatística de dados experimentais (ou “como determinar a incerteza em uma medida”). Tudo é descrito na lousa. Em seguida, divide a turma em grupos de dois ou três alunos para propor a primeira atividade experimental. Ao final, o professor recolhe todos os cadernos, independente da tarefa ter sido finalizada. Uma das dificuldades detectadas na observação dos grupos de trabalho foi com relação ao uso da calculadora, incluindo a utilização da memória e o uso das funções estatísticas. Também houve dificuldade com a montagem do histograma. Os alunos desconheciam este tipo de instrumento. O objetivo da tarefa experimental era praticar os procedimentos adequados em incerteza de medições. O professor salienta que no Caderno de Laboratório o aluno deverá descrever com suas palavras todos os passos do experimento.
AULA DO DIA 08/09/09
<u>ASSUNTO ABORDADO:</u> Cinemática da Translação; <u>ATIVIDADE EXPERIMENTAL:</u> O equipamento consiste em um trilho metálico inclinado sobre o qual rola um volante. Um faiscador temporizado, conectado a uma vela de carro, dispara várias vezes contra uma fita de papel termossensível que está atada ao volante. Conhecendo os intervalos de tempo entre os disparos, é possível descrever a distância D percorrida pelo volante em função do tempo de movimento t com o auxílio de uma régua. <u>COMENTÁRIOS DO PROFESSOR (CP), DOS ALUNOS (CA) E DO OBSERVADOR (CO):</u> (CO) O objetivo principal deste experimento era apresentar ao aluno algumas técnicas de análise gráfica usando como exemplo o movimento retilíneo acelerado. O *professor A* está sendo substituído por um aluno de Pós-Graduação que inicia a aula explicando sobre o experimento. A turma é dividida em grupos de quatro alunos. O instrutor chama os grupos individualmente para explicar o funcionamento do equipamento. Na parte 1 da tarefa os alunos devem calcular a distância $D(cm)$ em função do tempo de movimento $t(s)$ e completar uma tabela para t variando de 1 a 10 segundos. Na parte 2 da tarefa os alunos devem determinar a velocidade média do volante a cada intervalo de tempo com $\Delta t = 1s$ e completar nova tabela onde devem ser especificados $\Delta D(cm)$ e $V_m(cm/s)$. Na parte 3 da tarefa os alunos tinham que construir em papel milimetrado o gráfico $D\mathrm{x}t$ e concluir algo a respeito do gráfico. Percebe-se uma grande dificuldade, desde a escala que deveria ser utilizada até a escolha dos eixos coordenados. Os alunos achavam que deveriam aproximar os pontos experimentais por uma reta. A dificuldade se acentua na parte 4 da tarefa, quando têm que construir o gráfico $D\mathrm{x}t^2$. Percebe-se uma falta de entendimento do conceito de relação entre variáveis. Neste gráfico sim, deveriam obter uma reta aproximando os pontos

experimentais e calcular o coeficiente angular. Para esse cálculo, ao invés de tomarem pontos da reta aproximada, tomavam pontos experimentais, e a maioria deles não sabia como calcular a inclinação da reta. Para responder o que representa o número obtido no cálculo do coeficiente angular deveriam conhecer as equações do movimento retilíneo uniformemente acelerado. Muitos não conseguiam fazer essa transferência. Na parte 5 da tarefa os alunos tinham que construir o gráfico de Vxt, onde V é a velocidade instantânea do volante em função do tempo de movimento t e obter a declividade da reta, além de explicar o que representa. Para tanto deveriam considerar o que se sabe sobre a velocidade média em um $MRUV$. Além das dificuldades já comentadas com relação à construção dos gráficos e cálculo das inclinações, percebe-se uma dificuldade conceitual de que no movimento retilíneo uniformemente acelerado a velocidade média em determinado intervalo de tempo é igual à velocidade instantânea no ponto médio do intervalo.
AULA DO DIA 15/09/09
<u>ASSUNTO ABORDADO:</u> Composição de dois movimentos: trajetória de um projétil. <u>ATIVIDADE EXPERIMENTAL:</u> Na primeira parte da atividade o aluno deve utilizar a montagem ilustrada na figura 1 (esquematizada no roteiro) para determinar a trajetória de um projétil lançado horizontalmente. Na segunda parte da atividade o aluno deve medir a velocidade de lançamento do projétil com o auxílio de dois fotossensores colocados junto à boca do lançador (figura 2 do roteiro). <u>COMENTÁRIOS DO PROFESSOR (CP), DOS ALUNOS (CA) E DO OBSERVADOR (CO):</u> (CO) O professor A inicia a aula criticando os trabalhos individuais e em grupos da aula anterior; (CP) Velocidade média sem nenhuma explicação de como foi feito. Tudo que se escreve foi medido e calculado. Comenta que não é fácil ver que a curva obtida no primeiro gráfico é uma parábola. Não dá para concluir sem fazer algumas contas. Os pontos dos gráficos são tão pequenos que não dá para visualizá-los. O objetivo de vários pontos é tentar passar uma curva que melhor aproxime os pontos. No segundo gráfico, se é uma reta, tem que calcular a declividade! O resultado é da reta que foi ajustada. Qual o sentido físico da inclinação da reta? A declividade deve ser igual à metade da aceleração! A explicação de como a velocidade média transformou-se em velocidade instantânea faltou! Não esqueçam que ciência é quantitativa! Vocês devem ter concluído que as expressões do $MRUV$ descrevem adequadamente o experimento! Ciência é quantitativa! (CO) O professor comenta que o tempo de aula do Laboratório deve ser otimizado. Para o experimento os alunos terão de fazer um lançamento e registrar o alcance (com cinco disparos). O grupo observado, composto por cinco alunos, inicia a descrição do experimento preenchendo os dados no Caderno do Laboratório. Testam o equipamento e colocam o primo a 90° com a horizontal. Os cinco disparos caem quase todos muito próximos uns dos outros. A medida obtida pelo grupo é: 1,11m. A altura do lançamento calculada é: 85,6cm. Os alunos esforçam-se para realizar o experimento no tempo estipulado. O professor circula entre os grupos e tira as dúvidas. O grupo obtém as medidas sem muita dificuldade e constroem os gráficos, completando o Caderno de Laboratório em tempo hábil.

5.2.2. A turma de 2010/1

No semestre 2010/1 foram observadas as disciplinas FIS01257 – Física Geral I A e FIS01258 – Física Experimental I A, nas suas novas versões (parte teórica e parte prática separadas na forma de duas disciplinas, cujas ementas e carga horária constam nas tabelas 1 e 3).

A disciplina de Física Geral I A observada foi ofertada para 57 alunos dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura em Física Diurna, no horário das 8h30min às 10h10min (2ª feira, 4ª feira e 6ª feira). A disciplina de Física Experimental I A observada foi ofertada para 5 alunos dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura Noturna, no horário das 18h30min às 20h10min (3ª feira). Foram 92 horas observadas, 80 de teoria e 22 de práticas. A entrada em campo foi similar à do semestre anterior observado.

O regente da disciplina FIS01257 foi um físico teórico, que denominaremos *professor B.* O mesmo professor alternava as aulas práticas da disciplina FIS01258, do horário noturno, com a *professora D.*

As referências bibliográficas indicadas aos alunos eram as mesmas da turma observada no semestre anterior. Houve diferença nos critérios de avaliação apresentados, apenas três provas e uma quarta prova de recuperação, cujo objetivo era recuperar uma nota inferior a 3,0. O conteúdo programático foi reduzido em relação ao conteúdo da antiga disciplina. Os conteúdos sobre *dinâmica de rotações e gravitação* passaram a fazer parte do programa da disciplina Física Geral II. As aulas de laboratório passaram a ser desvinculadas das aulas práticas (disciplinas distintas), sendo sua avaliação baseada nos cadernos de laboratório de cada aluno e de sua participação e desempenho nas atividades experimentais.

Da mesma forma que foi feito nas tabelas 5 e 6, a tabela 7 apresenta as transcrições de algumas aulas, mantendo a sistemática de apontar os comentários do professor, dos alunos e do observador com as respectivas abreviações CP, CA e CO.

TABELA 7: REGISTRO DE DADOS DAS PRIMEIRAS AULAS DA DISCIPLINA FIS01257 - FÍSICA GERAL I A

AULA DO DIA 08/03/2010
Por questões de congestionamento no trânsito o observador atrasou-se uns 10 minutos até chegar à sala de aula. Neste semestre, os alunos do Curso de Física assistirão às aulas de Física Geral I e de Cálculo com Geometria Analítica I A no prédio 43324 (o prédio "novo" de salas de aula) do Campus Vale. As aulas de Física Geral I serão na sala 108 e as aulas de Cálculo com Geometria Analítica I A, na sala 106. O professor inicia a aula descrevendo o funcionamento da disciplina: (CO) O fato das aulas de Física Geral I e Cálculo com Geometria Analítica I A serem ministradas no mesmo prédio, durante toda a manhã é um fator favorecedor para o aluno calouro, que não precisa se deslocar por distâncias muito grandes no Campus Vale, num mesmo turno. É uma forma de favorecer os alunos com relação à adaptação e conhecimento do local no seu ingresso à Universidade. (CP) Pessoal, nossa disciplina é de seis horas/aula semanais, sendo que destas, quatro horas/semanais serão de teoria e 2 horas semanais serão de resolução de exercícios. Eu farei o papel de monitor, procurando sanar suas dúvidas. (CP) A Física Teórica aprende-se resolvendo muitos exercícios. Até lá vocês prestarão atenção às minhas explicações. (CP) A Física é uma ciência experimental, não é a mesma coisa que a Matemática. O objetivo da Física é aplicar os conceitos físicos para resolução dos problemas. (CP) Onde estudar? Consultem a página virtual da disciplina para obterem todas as informações necessárias: http://www.if.ufrgs.br, acessem o link Graduação e Disciplinas Virtuais. Ali vocês verão informações da antiga disciplina FIS1200 e da disciplina FIS1181, a Física para as Engenharias. Em termos de conteúdo, trata-se aproximadamente da mesma disciplina. Porém vocês, físicos, verão o conteúdo de uma forma mais aprofundada. (CO) Há uma preocupação por parte da COMGRAD do Curso de Física, que os alunos estudem mais detalhadamente os conteúdos iniciais da Mecânica, por isso foram retirados do programa de ensino os conteúdos

relacionados a rotações e gravitação, que passam a fazer parte da Física Geral II, a partir de 2010/1.

(CO) Até este momento não paravam de entrar alunos, havia um número aproximado de 55 alunos. Até que três alunos veteranos pediram licença para o professor a fim de conversarem com os calouros. São alunos do terceiro semestre do Curso, que chamam a atenção dos novatos para as tradicionais atividades de início de semestre. Dão-lhes boas vindas, avisam sobre um churrasco e sobre os dez reais de custo por pessoa. Também convidam a um encontro a ser realizado na quinta-feira próxima, no anfiteatro da Física. Chamam a atenção que será um encontro apenas para os alunos, professores não devem estar presentes, pois falarão sobre o funcionamento do Curso e darão suas dicas com relação a diversos assuntos relacionados ao Curso. Solicitam ainda, a paciência do professor para que os alunos possam responder a um questionário elaborado pelos veteranos. O professor permite a brincadeira. Os veteranos recolhem os questionários e agradecem ao professor, avisando os calouros que não deixem de trazer uma toalha grande nas próximas aulas. Assim o professor continua.

(CO) A disciplina de Física Geral I não é unificada (participam apenas alunos dos Cursos de Física), portanto a média de alunos nas turmas do diurno é de 50 alunos. Já a disciplina de Cálculo com Geometria Analítica I é unificada (alunos de Cursos distintos) e atendem alunos de todas as áreas das ciências exatas, com turmas de aproximadamente 70 alunos. O mesmo procedimento de turmas unificadas é utilizado para a Física Geral I dos cursos de Engenharia.

(CP) Deixo a escolha do livro que vocês vão utilizar bastante livre. Minhas aulas não são necessariamente a sequência de livros. Cada um de vocês estudará conforme suas necessidades. Na página virtual da antiga disciplina constam algumas referências consideradas importantes: Halliday, Tipler, Sears e Nussensveig.

(CP) A Física não é um conjunto de equações. A Matemática é a linguagem para resolver nossas situações físicas. Às vezes pode-se cometer o engano de dar muita ênfase à parte matemática da solução em detrimento dos conceitos físicos.

(CP) Não que a Matemática não seja importante, mas neste curso, estaremos interessados em aplicar os conceitos físicos para resolver problemas mais realistas.

(CP) Só recomendo a vocês adquirirem algum livro se tiverem certeza que será utilizado durante toda a faculdade. A ideia aqui é diferente da ideia do Ensino Médio, onde vocês tinham que adquirir todos os livros que os professores adotavam, do início ao fim do ano letivo.

(CP) É essencial que vocês leiam o conteúdo teórico antes das aulas de exercícios, para que não estejam presentes apenas para copiar as resoluções.

(CP) Vocês necessitarão bastante tempo para estudarem e tentarem resolver os exercícios sozinhos.

Após toda esta discussão o professor inicia então, o conteúdo que será abordado na disciplina, em meio ao silêncio e à atenção dos alunos.

(CP) A Física Geral I é basicamente uma parte da Mecânica. A Mecânica é dividida em: Cinemática, Dinâmica (forças) – Leis de Newton; Trabalho e Energia – Conservação da energia; Sistema de partículas, momento linear (quantidade de momento e conservação do momento linear).

(CP) Todo este conteúdo faz parte da Mecânica Clássica. Seus conceitos são muito antigos, desde o tempo de Galileu e Newton. Tudo foi muito testado através de experimentos.

(CO) O professor enfatiza a importância do resgate histórico com respeito ao surgimento do Cálculo através da Mecânica. Os alunos demonstram interesse pelo assunto. Não questionam, mas expressam surpresa diante da primeira nova informação que recebem. Este enfoque dado pelo professor pode ser um fator estimulante para o aprendizado dos conceitos físicos e da correspondente linguagem matemática necessária para dar conta das situações apresentadas.

(CP) A Física é uma ciência sempre em construção. Todas as leis são falseáveis. Novos experimentos podem reformular as leis existentes.

(CO) Questões epistemológicas parecem vir à tona na fala do professor. Nesta discussão, o professor salienta que a Física está diretamente relacionada com a Matemática. O professor esforça-se para estimular os alunos a conscientizarem-se da importância da linguagem Matemática na Física.

(CP) As Leis de Newton têm uma abrangência limitada. Descrevem o movimento em velocidades pequenas comparadas com a velocidade da luz. Não descrevem o mundo microscópico e não descrevem movimentos à velocidade da luz.

(CP) A Física não é Filosofia e não é Matemática. A Matemática é diferente. Os teoremas e axiomas são provados e valem para sempre.

(CP) A Matemática é uma importante linguagem para a Física. A Matemática deve extrair as coisas comuns de todos os experimentos.

(CP) Parte filosófica da Física: vamos sempre trabalhar com um modelo para as observações do real. Este modelo depende das observações; é simplificado; necessita uma linguagem matemática para descrevê-lo. Quando o modelo não for suficiente devemos buscar outros.

O professor continua, se referindo ao silêncio da turma:

(CP) Alguém tem algum comentário? Caso contrário, darei início ao conteúdo. A participação de vocês é importante. Se não houver interação entrarei no sistema do piloto automático!

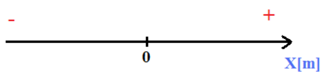
(CO) O professor tenta iniciar uma possível interação com os alunos. Instiga-os a perguntarem, a questionarem. Reitera que um ensino fundamentado no princípio do diálogo trará benefícios para o aprendizado.

(CP) Façam perguntas sobre o que não entenderem. Em quinze anos lecionando Física I percebo que os alunos apresentam sempre as mesmas dúvidas porque não perguntam em sala de aula.

O professor inicia o conteúdo.

CINEMÁTICA

(CP) Iniciaremos com o movimento retilíneo unidimensional (MRU em uma dimensão). Para tanto, necessita-se um sistema de referência.



(CO) O MRU é uma situação física que pode justificar a construção dos números reais sobre um eixo. Cronometrando o tempo podemos marcar distintas posições e explicar a representação gráfica dos pontos no plano. Pode-se discutir todo o sistema de coordenadas retangulares em cima de um exemplo fundamentado no MRU. Quando o professor fala em deslocamento negativo, ele apresenta uma situação física que justifica as propriedades de desigualdade dos números reais abordadas no Cálculo.

(CP) O espaço e o tempo são os conceitos mais básicos da Mecânica.

X[m] é a coordenada da posição, onde a unidade de medida é o metro (m).

Deslocamento: Sejam $X_1 = X(t_1)$ a posição da partícula no instante t_1 e $X_2 = X(t_2)$ a posição da partícula no instante t_2, definimos deslocamento por: $\Delta X = X_2 - X_1$. Se $\Delta X > 0$ o deslocamento é para a direita e, se $\Delta X < 0$ o deslocamento é para a esquerda.

Velocidade Escalar Média: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

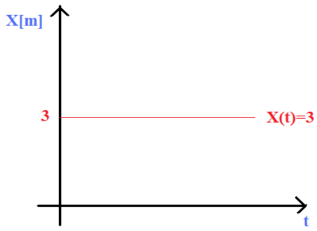
(CP) A velocidade escalar média representa a taxa de variação da posição com o tempo. Escalar está relacionado com uma dimensão (unidimensional).

(CO) No Cálculo esta equação é interpretada como a taxa de variação média para diferenciar da taxa de variação instantânea.

Interpretação Gráfica de $\bar{v}$: construção gráfica da posição em função do tempo.

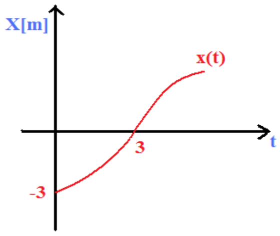
(CO) Percebe-se a importância do conhecimento sobre funções (especialmente a função linear). Para os físicos parece ser mais importante a interpretação gráfica de uma função do que a interpretação analítica. No Cálculo Diferencial e Integral I o conteúdo sobre funções é visto após o conteúdo sobre problemas de modelagem. Nesta etapa os alunos podem sentir a necessidade de transferir os significados matemáticos vistos no Cálculo para a interpretação e a resolução dos problemas físicos. Um fator que pode favorecer esta transferência de significados é o uso das mesmas notações no ensino do Cálculo e no ensino da Física Geral. Na Física, os alunos lidam com as funções posição, velocidade e aceleração, cuja variável independente sempre é o tempo. Na Matemática a notação é diferente, sendo a variável independente denotada, em geral, por x. Na Física Geral, costuma-se adotar a variável x como a variável posição dependente do tempo t. Outro detalhe importante que difere das aulas de Cálculo, é que as unidades passam a fazer parte da vida dos estudantes da Física, portanto o metro (m), o tempo (t), a velocidade (v) aparece na construção dos gráficos e na resolução analítica dos exercícios. O professor enfatiza que não há problema maior na questão do tempo negativo. Pode-se interpretar um tempo negativo como um tempo anterior ao início da cronometragem. Esta é uma situação real para os físicos.

Exemplo (1):



Este gráfico diz que em qualquer instante de tempo a posição da partícula é $x(t)=3m$, isto é, a função posição com o tempo é constante. Se considerarmos a posição de uma pessoa, neste caso ela está parada e, portanto, sua velocidade média é nula.

Exemplo (2):



(CP) Observem a partir do gráfico, que o deslocamento a partir de t=0 é sempre para a direita. Então como vamos calcular a velocidade média entre t=0 e t=3s?

(CO) Uma análise mais aprofundada da curva exemplificada pelo professor requer o entendimento de muitos conceitos do Cálculo que dizem respeito à análise gráfica. Dentre eles destacam-se: crescimento/decrescimento de funções; concavidade; pontos de inflexão; pontos críticos; máximos e mínimos locais e globais. Este conteúdo é abordado mais tarde no Cálculo. No entanto, para o objetivo do professor é suficiente verificar, no gráfico, que para todo $t_1 < t_2$ tem-se $x_1 < x_2$ (que é a definição de função crescente). Neste caso $\Delta x > 0$, o que fisicamente significa um deslocamento é para a direita.

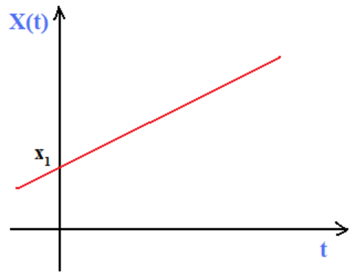
(CP) Vamos aplicar a fórmula dada acima para mostrar que a velocidade média neste intervalo de tempo é de 1m/s.

(CO) Neste momento, o professor ainda não faz comentários sobre a interpretação geométrica da velocidade média como inclinação da reta secante à curva nos pontos onde $t=0$ e $t=3s$. No Cálculo, a interpretação geométrica das taxas de variação média (velocidade média) e instantânea (velocidade instantânea) é vista anteriormente ao conceito de função derivada.

(CP) Para obtermos a velocidade instantânea, calcularemos a velocidade média em instantes menores.

OBS: $\bar{v}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1} \Leftrightarrow x_2-x_1=\bar{v}(t_2-t_1) \Leftrightarrow x_2=x_1+\bar{v}(t_2-t_1)$

Forma da equação de uma linha reta: $x(t)=x_1+\bar{v}\,t$



(CP) Como obtivemos uma reta se o movimento no gráfico anterior gerou uma curva? Devemos olha para a fórmula de $\bar{v}$ e observar no que ela implica.

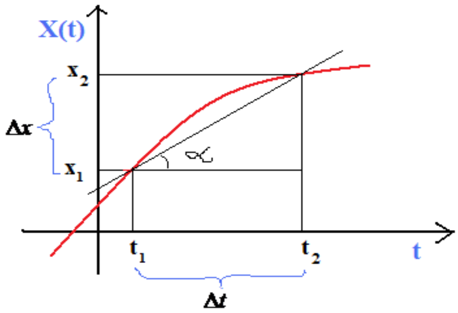
(CP) Vou encerrar a aula. Quanto à chamada, de vez em quando eu faço apenas com o objetivo de conhecer vocês. Mas vocês devem ter 75% da frequência.

(CO) O professor faz a chamada e encerra a aula.

AULA DO DIA 10/03/10

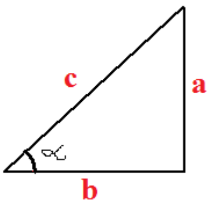
O professor retoma o conceito de velocidade média dado na aula anterior.

$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, onde $\bar{v}$ representa graficamente a inclinação da linha que passa pelos pontos (x_1, t_1) e (x_2, t_2). Na equação, $x_1 = x(t_1)$ e $x_2 = x(t_2)$.



(CO) O professor enfatiza a importância de sempre se fazer um paralelo entre a equação e a análise gráfica. Como já foi dito, a análise gráfica é um dos tópicos do Cálculo abordado no final do segundo mês de aula. O professor instiga os alunos a perceberem que a velocidade média é a tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo horizontal. Percebe-se uma preocupação do professor em resgatar os conceitos matemáticos que são importantes à medida que o conteúdo físico é abordado, só que antecipadamente às aulas de Cálculo.

(CP) Este conceito vocês já devem conhecer. Também é importante relembrar as relações trigonométricas de um triângulo retângulo.



$$sen\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

$$v = tg\alpha$$

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = \bar{v}(t_2 - t_1) \Leftrightarrow x_2 = x_1 + \bar{v}(t_2 - t_1)$$

(CP) Se interpretarmos x_1 como uma condição inicial, podemos fazer o gráfico e obter x_2, se conhecermos $\bar{v}$.

(CP) De uma forma mais geral temos uma reta.

$x(t) = x_1 + \bar{v}(t - t_1)$, onde $\bar{v}$ é a inclinação da reta.

(CO) Esta é a equação de uma reta apresentada inicialmente na forma ponto-inclinação e após na forma reduzida. Neste caso são conhecidos a inclinação da reta e um ponto pertencente à reta. Uma dificuldade constatada no Cálculo é que dada a equação da reta na forma geral, é comum que os alunos não identifiquem o coeficiente angular ao colocá-la na forma reduzida. Um problema de deficiência na álgebra elementar.

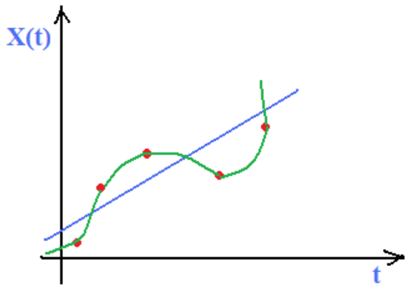
(CP) Esta equação descreve um movimento uniforme, com velocidade constante. Porém, a equação mais geral do movimento não é uma reta.

(CP) No laboratório vocês devem aproximar os pontos obtidos experimentalmente por uma reta. Então poderão concluir que o movimento é uniforme com velocidade constante. Para obterem a velocidade do *movimento deverão calcular a inclinação aproximada da reta obtida experimentalmente.*

(CO) Aqui, o professor mostra a real situação com que os alunos irão deparar-se nas aulas de laboratório. Saber aproximar os pontos experimentais por uma reta e calcular sua inclinação é a chave para obtenção da velocidade do movimento (caso o movimento seja uniforme). Comenta que em quinze anos lecionando Física Geral, observa um erro comum cometido pelos alunos: o cálculo da inclinação a partir de dois pontos experimentais e não de dois pontos sobre a reta aproximada. Para realizar esta tarefa no Laboratório, os alunos necessitam de régua e de papel milimetrado. É claro que as inclinações obtidas são valores aproximados, com algum erro nas aproximações. No entanto, constata-se que a preocupação do professor é verídica ao observar as aulas de Laboratório nos semestres 2009/2 e 2010/1. O enfoque dado no Cálculo é diferente, não é baseado na experimentação. As equações das retas são apresentadas na forma pronta. A tarefa do aluno é isolar a variável dependente e identificar a inclinação da reta como sendo a constante que precede a variável independente. Contudo, a ênfase maior no Cálculo é interpretar a inclinação da reta tangente à curva num dado ponto como sendo a inclinação da reta tangente à curva neste ponto. E esta inclinação é a função derivada substituída na abcissa do ponto. Um erro bastante comum dos alunos na construção da equação da reta tangente é substituir a inclinação pela função derivada e não pelo valor da função derivada no ponto x dado.

(CP) Necessitamos de um modelo matemático que melhor descreva nossos problemas físicos.

(CP) Uma questão importante é: dados os pontos experimentais, qual é a melhor curva que aproxima os pontos? Nem sempre será uma reta.



(CP) Alguma pergunta? Volto a dizer, qualquer dúvida levantem a mão e perguntem.

(CP) Necessitamos de bastante matemática. Por exemplo, trigonometria vocês devem ter aprendido no Ensino Médio. Apesar disso, tentarei rever a matemática necessária para o problema, quando necessário.

(CO) A preocupação do professor é a mesma da maioria dos docentes que ministram disciplinas no primeiro semestre dos Cursos das Ciências Exatas: os fundamentos matemáticos básicos necessários são tópicos do Ensino Médio e, no entanto, os alunos demonstram surpresa com alguns resultados.

Exercícios: Um motorista dirige um veículo numa rodovia retilínea a 70 km/h. Após rodar 8 km o veículo para por falta de gasolina. O motorista caminha 2 km até o posto de abastecimento mais próximo, em 27 min (0,45 h). Qual é a velocidade média do motorista desde a partida do veículo até chegar ao posto?

(CP) Observem que o deslocamento está dividido em duas partes.

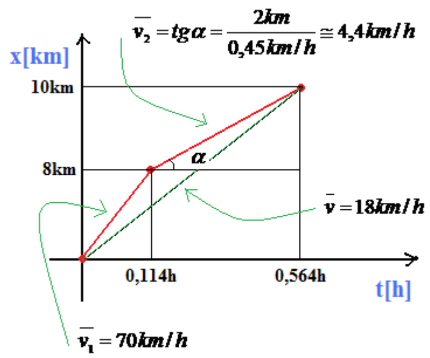
Solução:

$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$, onde Δx_1 é o deslocamento do motorista quando andou de carro até faltar gasolina e Δx_2 é o deslocamento do motorista quando caminhou até o posto. Como $\Delta x_1 = 8km$ e $\Delta x_2 = 2km$ temos que $\Delta x = 10km$. Da mesma forma devemos calcular Δt :

$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$. Para calcular Δt_1 usaremos o fato de que a velocidade é constante e igual a 70 km/h nos primeiros 8 km. Δt_2 representa o tempo de caminhada dado no problema.

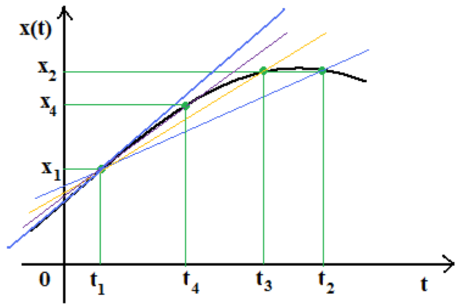
$\overline{v_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Leftrightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{\overline{v_1}} = \frac{8km}{70km/h} = 0{,}114h$, $\Delta t_2 = 0{,}45h$ Assim: $\Delta t = 0{,}114h + 0{,}45h = 0{,}564h$ e $\bar{v} = \frac{10km}{0{,}564h} \cong 18km/h$. A análise gráfica é feita abaixo:

(CO) Aqui, o professor enfatiza a questão das unidades nos gráficos dos deslocamentos. Seria importante que a disciplina de Cálculo pudesse adotar as mesmas notações. A situação apresentada no exercício justifica o conceito de funções definidas por partes, onde podemos incluir a função modular, se considerarmos, por exemplo, o motorista retornando ao posto de combustível mais próximo. A ênfase continua nas funções lineares e no cálculo de suas inclinações.



Após, o professor introduz a definição de velocidade instantânea.

<u>Velocidade Instantânea</u>: a velocidade instantânea é a velocidade num instante de tempo. Diferentemente da velocidade média, que é a velocidade num intervalo de tempo. A velocidade instantânea é obtida através do cálculo do limite de uma sequência de velocidades médias em intervalos cada vez menores.



(CP) Suponha que estejamos interessados na velocidade instantânea no instante t_t, a idéia básica é calcular a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores, nos quais t_2 se aproxime cada vez mais de t_t. À medida que isto acontece, a linha que passa pelos pontos t_1 e t_2 vai aumentando a inclinação até que se aproxima da linha tangente a curva posição no instante t_t.

(CO) A definição de velocidade instantânea pelo cálculo sucessivo de velocidades médias é a situação física que dá sentido ao conceito de limite e derivada abordados no Cálculo. Do ponto de vista do Cálculo, a velocidade instantânea é abordada de forma muito superficial como uma aplicação da derivada.

(CP) Precisamos de uma notação para a velocidade instantânea em termos da velocidade média. Precisamos perceber que ao diminuir Δt diminui-se também Δx. O resultado esperado às vezes é finito, isto é, não diverge.

(CO) Importa, aqui, a noção intuitiva de limite. Por essa razão, a interpretação gráfica é imprescindível. Dado o gráfico da velocidade instantânea, pode-se estimular o aluno a analisar intuitivamente a convergência (existência) ou a divergência (não existência) de um limite.

Notação: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Problema: como calcular a velocidade instantânea?

(CA) Professor, esta forma de calcular já existia quando Newton descobriu as leis do movimento?

(CP) Newton necessitava desta fórmula para resolver as equações do movimento. Porém ele não foi o único. Existiram outros matemáticos que chegaram à mesma conclusão, dentre eles destaca-se Leibinitz. Hoje em dia muitos físicos-matemáticos são mais matemáticos do que físicos. Mais adiante Einstein contribuiu com a Ciência utilizando o Cálculo tensorial. A história da Matemática e da Física muitas vezes estão juntas.

(CO) Há sempre uma discussão entre os alunos da Física de quem descobriu o Cálculo Diferencial e Integral primeiro: Newton ou Leibnitz? É importante que os alunos possam conhecer a história do surgimento do Cálculo a partir do estudo do movimento. Dificilmente isto é enfatizado pelos professores nas aulas de Cálculo e/ou de Física.

(CP) A velocidade instantânea será a inclinação da reta tangente da linha que tangencia o ponto. A velocidade média é a tangente da linha que passa por dois pontos da curva posição.

(CP) Ainda que eu não saiba calcular analiticamente v, experimentalmente calculo a inclinação da reta que tangencia o ponto.

(CO) A situação física apresentada dá sentido aos conceitos de taxa de variação média e taxa de variação instantânea e de suas aplicações nas áreas das Ciências.

(CP) Graficamente a velocidade instantânea em um ponto (x_1, t_1) corresponde à inclinação da reta tangente à curva $x(t)$ no ponto (x_1, t_1) .

(CO) Neste momento, o professor usa a definição formal de derivada para calcular o limite. No Cálculo, a função derivada é trabalhada após as técnicas de cálculo de limites.

(CP) A velocidade instantânea tem o nome de derivada no Cálculo Diferencial.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} x(t)$$

(CA) O senhor vai usar integrais nas aulas de Física?

(CP) Sim, daqui a pouco, quando falar em aceleração.

(CP) Como calcular $v(t)$?

Exemplo: Experimentalmente, cronometramos o tempo e obtivemos os pontos. Vimos que a curva que melhor aproxima os pontos é um polinômio de grau 2, dado por: $x(t) = 5t^2 + 8t - 1$. Vamos calcular $v(t)$ analiticamente:

$$x(t+\Delta t) = 5(t+\Delta t)^2 + 8(t+\Delta t) - 1$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(t+\Delta t)^2 + 8(t+\Delta t) - 1 - 5t^2 - 8t + 1}{\Delta t} \Leftrightarrow v(t) = 10t + 8$$

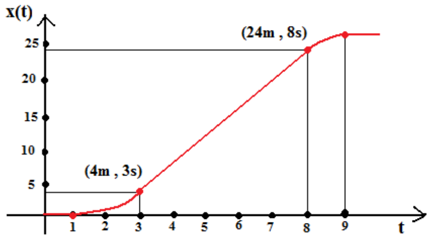
(CO) Ao simplificar a expressão obtida com o cálculo da expressão $[x(t+\Delta t) - x(t)]/\Delta t$, estamos, na verdade, obtendo uma nova expressão (estamos obtendo uma nova função) que tem o mesmo comportamento da expressão original quando Δt tende a zero. É importante que o aluno entenda intuitivamente o que está sendo feito no cálculo do limite.

AULA DO DIA 12/03/10

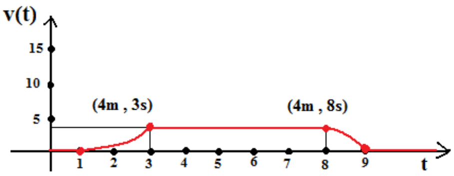
O professor retoma a definição de velocidade instantânea dada na aula anterior, inclusive refazendo o gráfico e explicando a noção intuitiva de limite.

(CP) Graficamente, determinar a velocidade instantânea é um processo mais delicado. Se tangenciarmos graficamente um ponto, sempre cometeremos um erro de precisão, a não ser que usemos um recurso gráfico computacional. Portanto o cálculo analítico é necessário.

Exemplo: O professor sugere que os alunos construam o gráfico do movimento e da velocidade de um elevador que se encontra em repouso no primeiro segundo, de 1s até 3s o elevador acelera, de 3s até 8s o elevador mantém a velocidade constante. De 8s até 9s ele vai parando e a partir de 9s mantém-se parado.



A construção de um gráfico aproximado para a velocidade:



(CO) Nesta etapa inicial do semestre, o aluno ainda não tem informações no Cálculo a respeito da concavidade da curva. Como saber se é côncava convexa? Mesmo assim, o professor procura esboçar o gráfico da velocidade instigando os alunos a raciocinarem a respeito do crescimento e/ou decrescimentos das tangentes à curva da função posição. Este é um resultado muito importante, abordado na parte de análise de gráficos, na disciplina de Cálculo. No entanto esta informação, sem muitos detalhes, está à frente no curso de Física Geral, sem o formalismo matemático exigido nas disciplinas específicas de Cálculo. Os alunos são obrigados a aplicar, no contexto da Física, resultados que ainda não foram vistos no Cálculo. Isto é, em instantes diferentes, com o uso de notações diferentes, e com objetivos diferentes.

O professor novamente enfatiza:

(CP) A Física é uma ciência experimental, necessitamos de um laboratório de pontos experimentais para graficarmos e obtermos as informações necessárias.

(CA) Se o gráfico é uma reta, a velocidade não é constante? Entre t=1s e t=3s a velocidade não deveria ser instantânea?

(CP) O gráfico da posição entre t=1s e t=3s não é uma reta, portanto a velocidade não pode ser constante neste intervalo. Desconhecemos a equação que representa a curva posição entre estes instantes, porém observamos bem que não é uma reta. Se fosse, a velocidade seria constante.

O professor retoma o argumento de que devemos aprender a calcular analiticamente $v(t)$:

Exercícios: Calcule analiticamente $v(t)$ sabendo que $x(t) = at^2 + bt + c$, onde $a, b,$ e c são constantes numéricas:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t+\Delta t)^2 + b(t+\Delta t) + c - at^2 - bt - c}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2at + \Delta t + b) = 2at + b$$

(CP) Observem que basta fazer $\Delta t = 0$ na expressão numérica final para obtermos o valor do limite.

(CO) Existem várias propriedades de limites vistas no Cálculo que justificam estas passagens. Ao se trabalhar com funções polinomiais do segundo grau, esta conta não se torna tão complexa, ficando fácil de resolver analiticamente. No entanto, a noção de limite é um dos conceitos mais complexos do Cálculo.

(CA) Professor, esta seria a equação da reta tangente?

(CO) Esta dúvida é bastante comum entre os alunos que estão iniciando o curso de Cálculo. Na verdade a equação obtida é uma reta. Porém quando substituímos t por algum valor numérico nesta equação, obtemos a inclinação da reta tangente à curva no ponto t (velocidade instantânea no ponto t).

(CP) Não exatamente. Isto é a velocidade instantânea, ou ainda, a inclinação da reta tangente em cada ponto t.

(CP) Quando a curva posição é uma parábola, a velocidade é linear. No exemplo anterior, se entre 1s e 3s tivéssemos *uma parábola no gráfico da posição, então no gráfico da velocidade teríamos uma reta.*

O professor faz menção ao conceito de derivada:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad \Longrightarrow \text{ derivada de } x(t) \text{ respeito a } t$$

(CP) Mais adiante vocês aprenderão as regras de derivação no curso de Cálculo. Aqui veremos as regras que serão mais necessárias para o nosso curso. Com estas regras o cálculo do limite não precisará ser efetuado, apenas aplicaremos as regras de derivação.

(CO) Nas aulas de Cálculo muitas vezes os alunos da Física reclamam: "Por que não aprendemos a derivar antes de aprendermos a resolver os limites? Poderíamos aplicar a regra de L'Hôpital e tudo seria mais fácil". O interesse maior no Cálculo é que os alunos entendam que o cálculo do limite é o que justifica as regras de derivação que são utilizadas. Afinal, a derivada é um limite. Alguns alunos da Física reclamam quando têm que efetuar contas algébricas e simplificações.

Algumas regras de derivação:

(CP) As funções mais comuns na Física são os polinômios.

1) Derivada da Potência: $f(t) = t^n \Leftrightarrow \frac{df}{dt} = nt^{n-1}$

2) A constante não é afetada na derivação: $\frac{d}{dt}[af(t)] = a\frac{df}{dt}$

3) A derivada de uma soma é a soma das derivadas: $\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}$

4) A derivada de uma constante é zero: $\frac{d}{dt}[a] = 0$

O professor retorna ao exemplo anterior para mostrar que fica mais fácil calcular $v(t)$ pelas regras de derivação do que pelo cálculo analítico do limite. $\frac{d}{dt}[at^2 + bt + c] = \frac{d}{dt}[at^2] + \frac{d}{dt}[bt] + \frac{d}{dt}[c] = a\frac{d}{dt}[t^2]b\frac{dt}{dt} + 0 = 2at + b$

$v(t) = 2at + b$

(CP) A velocidade é uma derivada. Não podemos fugir disto. O ideal é que os alunos fizessem a disciplina de Física Geral já sabendo calcular limites e derivadas. Alguns físicos acham que no primeiro semestre deveria haver só Matemática. Eu sou totalmente contra. Acho que não tem sentido um aluno de Física não ter nenhuma disciplina de Física no primeiro semestre. Alguns autores não gostam de iniciar a Física com a Cinemática porque tem que induzir muito a Matemática. Então iniciam com uma discussão em torno das leis de Newton.

(CP) Podemos fazer as coisas em paralelo. Aliar conceitos físicos com os conceitos matemáticos. Toda a Física está fundamentada no Cálculo Diferencial e Integral. Portanto, procurem interpretar as coisas do Cálculo, principalmente os gráficos, não apenas fazer contas. Assim vocês conseguirão fazer uma conexão interessante. Procurem entender as coisas. Vocês têm que aprenderem a gostar disto.

(CO) Ao mesmo tempo em que defende o ensino da Física no primeiro semestre do Curso, o professor salienta a importância do Cálculo para o aprendizado dos conceitos físicos, e chama a atenção dos alunos para o fato de que o Cálculo fundamenta a Física. Neste discurso percebe-se a possibilidade de um diálogo muito rico entre a Física e o Cálculo.

Exercício: A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x é dada por:

$x(t) = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3$

(a) Qual é a velocidade em t=3,5s?

(b) A velocidade é constante ou está variando?

O professor resolve o exercício e comenta a respeito das unidades que estão subentendidas nas constantes da equação.

$x[m]=7{,}8[m]+9{,}2[m/s][s]-2{,}1[m/s^3][s^3]$

O professor questiona:

(CP) O que representaria uma velocidade negativa fisicamente?

(CA) A partícula está parando.

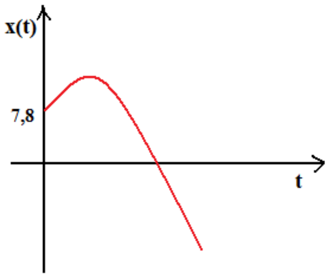
(CP) Não necessariamente.

(CA) A partícula está se deslocando para a esquerda.

(CP) Exatamente. Velocidade negativa significa que o corpo está andando para a esquerda.

(CO) Se a velocidade é negativa, quer dizer que a derivada da posição é negativa, isto implica que o gráfico da posição é decrescente. Fisicamente a partícula está se deslocando para a esquerda. Este resultado se deve a um teorema do Cálculo que nos permite calcular os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função contínua e diferenciável num dado intervalo. A Física básica trabalha com funções polinomiais, que satisfazem estas condições, sem muito rigorismo matemático.

(CP) Podemos tentar graficar esta situação física.



Para esboçar o gráfico o professor analisa o que acontece com a imagem da função para tempos grandes. O termo em t^3 prevalecerá sobre os outros termos.

(CO) Esta é a noção intuitiva de limites de polinômios no infinito.

(CP) Vocês têm que aprender a raciocinar a respeito dos gráficos. Devem fazer uma análise qualitativa.

(CA) Onde ficaria o ponto t=3,5s no gráfico?

(CP) Olhando para a resposta certamente ele fica do pico do gráfico para a direita.

(CA) O negativo na velocidade também indica que a inclinação da reta tangente é negativa?

(CP) Bom comentário. Sim! Em particular, o gráfico da velocidade será uma parábola.

No final da aula, alguns alunos procuram o professor para perguntarem sobre a posição do ponto t=3,5s no gráfico.

AULA DO DIA 15/03/10

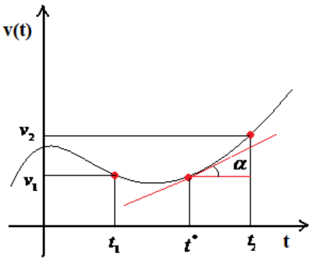
O professor inicia a aula dando as coordenadas para a resolução das listas de exercícios.

(CO) www.if.ufrgs.br – graduação – disciplinas – FIS01181.

(CP) Resolver os exercícios é a parta mais difícil. Não é como assistir as aulas. Nós comentaremos os exercícios nas aulas de sexta-feira. Porém, se vocês só estiverem aqui para olhar a resolução dos problemas não ajudará vocês em nada. Estudar em grupo é importante, porém haverá um momento em que vocês terão de tentar resolver os exercícios sozinhos. Uma grande deficiência no ensino da Física Geral I era de não haver uma aula de exercícios. Agora, no novo sistema vamos ver se vocês se adaptam. Para complementarmos o conceito de velocidade demos de definir aceleração.

Aceleração Média: a existência de uma aceleração está vinculada ao fato da velocidade poder mudar no tempo.

$$\bar{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

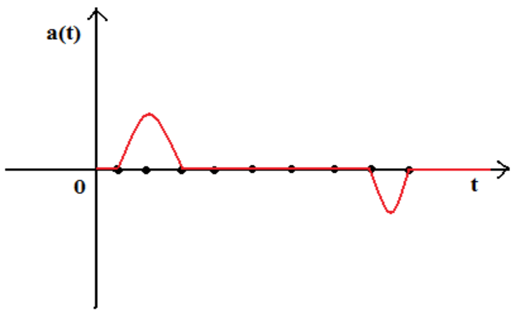


Aceleração Instantânea: Para obtermos a aceleração instantânea adotaremos o mesmo processo utilizado para a obtenção da velocidade instantânea. O limite das acelerações médias em intervalos de tempo cada vez menores. A interpretação gráfica da derivada é a inclinação da reta tangente à curva velocidade num ponto específico. Observe que esta inclinação varia a cada ponto.

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad a(t) = \frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{a}(\mathrm{t}^*) = \mathrm{tg}\,\alpha$$

O professor volta ao exemplo do movimento de um elevador, o qual no primeiro segundo encontra-se em repouso, entre t=1s e t=3s o elevador acelera, de t=3s e t=8s o elevador mentem-se à velocidade constante, de t=8s à t=9s o elevador desacelera e vai parando, e a partir de t=9s volta a ficar em repouso. Então o professor esboça o gráfico da aceleração no tempo. Neste processo estaremos interessados em fazer uma análise qualitativa de como varia a velocidade com o tempo.

(CO) No Cálculo I esta análise qualitativa é fundamentada nos teoremas equivalentes ao *teste da primeira derivada* e *teste da segunda derivada* para análise gráfica. Para isto, são importantes os conceitos de ponto crítico, ponto de inflexão, tangentes verticais e cúspides. Diante desta situação pode-se, também, conceituar os pontos de não diferenciabilidade (quebras e "bicos" nos gráficos). O professor não dá muita ênfase para a aceleração instantânea como a derivada de segunda ordem da posição. Constrói o gráfico intuitivamente, analisando os sinais das inclinações das retas tangentes. Os alunos permanecem em silêncio. Não questionam. O professor pergunta se há alguma dúvida entre eles.



Exemplo: A posição de uma partícula é dada por $x(t) = 4 - 27t + t^3$, onde x é medido em metros (m) e t em segundos (s). Calcule $v(t)$ e $a(t)$ e faça uma análise do movimento:

(CO) Uma maneira de conhecer se o aluno está conseguindo transferir os conhecimentos do Cálculo para a Física ou vice-versa, é propondo uma situação nova, para que faça a interpretação física e matemática. Pode-se abordar a questão do domínio contextual do problema. O professor denomina este tipo de solução de análise qualitativa (uma análise sem muitos detalhes).

Solução: o professor soluciona o problema utilizando as regras de derivação vistas na aula anterior.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[4 - 27t + t^3] = -27 + 3t^2 \;\Leftrightarrow\; v(t) = -27 + 3t^2$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}[-27+3t^2]=6t \Leftrightarrow a(t)=6t \qquad \begin{cases} x(t=0)=4m & x(t=3s)=-50m \\ v(t=0)=-27m/s & v(t=3s)=0 \\ a(t=0)=0 & a(t=3s)=18m/s^2 \end{cases}$$

(CA) Como você elimina o divisor dt na derivada do termo t^3?

(CO) Este tipo de dúvida é muito comum no Cálculo; alguns alunos apresentam dificuldades em entender como o operador diferencial opera sobre uma função; acreditam que, por apresentar-se na forma de quociente, o numerador e o denominador podem ser simplificados.

(CP) Não significa que no segundo termo você corta dt de cima com dt de baixo. A operação derivada não é um quociente. Nós aplicamos a regra de derivação da função potência.

(CA) Entendi professor. Se tivéssemos $2t^3$, a derivada seria $6t^2$?

(CP) Sim, pois sempre que tivermos uma constante multiplicando uma função, a derivada não afeta a constante.

(CP) Como tarefa, façam os gráficos e observem o que acontece.

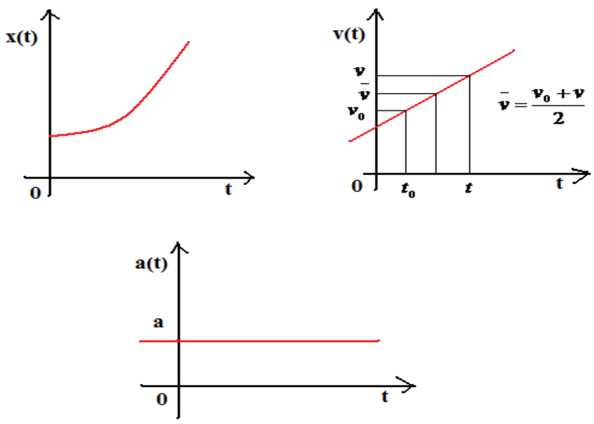
(CP) Isto é Cinemática! Saber as relações entre posição, velocidade e aceleração. O problema da Cinemática é observar como estão se movimentando as coisas. Sempre que fazemos medições da natureza obtemos curvas matemáticas conhecidas. Na Cinemática não nos preocupamos com o que originou o movimento. A Física Clássica ainda tem muitos problemas interessantes que ainda não foram resolvidos. Por exemplo: o estudo da formação de uma nuvem (formação de moléculas). Este problema pode ser abordado a partir das Leis de Newton. O problema do movimento dos terremotos também pode ser abordado como um problema da Física Clássica. O problema do caos é um problema da Mecânica Clássica.

(CO) De uma forma bastante sábia, o professor salienta a importância da Mecânica Clássica discutindo exemplos atuais.

(CP) Tentem tornar interessantes os problemas mais simples que estão sendo vistos. Isto dependerá da motivação de cada um de vocês.

<u>Movimento Uniformemente Acelerado</u>: MRUV

(CP) O MRUV é um exemplo de movimento que está associado a forças constantes. Sua maior importância é histórica. $a(t)=cte$. O professor faz os gráficos a partir da informação de que a aceleração é constante.



(CP) O cálculo feito para $\bar{v}$ como a média aritmética das velocidades inicial e final vale apenas para variações lineares.

(CO) Estes cálculos são vistos com mais detalhes utilizando o Teorema do Valor Médio para Integrais.

$$\bar{a}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\text{, fazendo } t_2=t, t_1=t_0, v_2=\text{v e } v_1=\text{v}_0 \text{ e sabendo que } \bar{a}=a\text{, temos:}$$

$$a(t) = \frac{v - v_0}{t - t_0} = a \Leftrightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \text{ fazendo } x_2 = x \text{ e } x_1 = x_0 \text{ e sabendo que } \bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \text{ temos:}$$

$$x(t) = x_0 + \bar{v}(t - t_0) \Leftrightarrow x(t) = x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)(t - t_0), \text{ fazendo } t = 0, \text{ obtemos:}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

(CP) Esta construção faz parte de um processo histórico. Newton trabalhou com a queda dos corpos, através de estudos antecipados por Galileu. Provou-se que este tipo de movimento ocorre quando a aceleração é aproximadamente constante.

Quando o professor fala em fazer a chamada, os alunos veteranos pedem licença para falar com os calouros sobre um churrasco que haverá na sexta-feira. Eles pedem que os calouros procurem se entrosar no curso uns com os outros, já que eles (veteranos) não receberam este tipo de tratamento dos seus veteranos. O professor diz que vai deixar a chamada para a próxima aula. Estão presentes aproximadamente 53 alunos.

5.3. Síntese da análise das observações

Os comentários apresentados partem da análise das transcrições das aulas observadas e dos relatos de estudantes e professores, coletados ao longo da investigação. Soma-se a esta análise, a larga experiência da investigadora com o ensino de Cálculo em dois diferentes contextos, na Universidade Federal de Santa Maria[79] (UFSM) e na Universidade Federal do Rio Grande do Sul[80] (UFRGS). A partir desta análise foram identificadas dez categorias: *Formação de Excelência, Metodologia de Ensino, Relações entre a Matemática e a Física, Bagagem do Ensino Médio, Desarticulação no Ensino, Dificuldades de Aprendizagem, Cálculo versus Física, Formas de Aprendizagem, Atendimento Extraclasse, Aulas no Laboratório de Ensino,* descritas ao longo do texto.

5.3.1. Formação de Excelência

O Instituto de Física da UFRGS têm a tradição de formar bons pesquisadores, através do Curso de Pós-Graduação em Física, muito bem conceituado junto à comunidade científica. Observa-se uma grande preocupação, por parte dos professores, em preservar um elevado nível de preparação para este fim, já imposto desde o ingresso dos estudantes, nos Cursos de

[79] Instituição onde a investigadora mantém vínculo empregatício desde 1996.

[80] Instituição onde a investigadora manteve vínculo provisório de 2006 até 2009.

Graduação. Prima-se pela autossuficiência do aluno frente ao currículo apresentado. Para os alunos, de maneira geral, o principal objetivo é obter os melhores conceitos.

<u>Aluno 1</u> *(2009/2, Licenciatura em Física Noturna): "Eu não estou acostumado a ser autodidata nas disciplinas de Cálculo e de Física, no resto eu sou. No meu trabalho eu sou autodidata, sou músico. Então, como essa Universidade é para autodidatas, fato narrado por conhecidos meus que se formaram aqui... Isto é muito bom, pois alguém que vai contratar um aluno daqui vai pensar: este cara se formou sozinho, ninguém o ensinou. Ou então eu tenho tamanha falta de embasamento que acabo achando que não está sendo ensinada a matéria que está sendo colocada. Estas são as duas possibilidades à que atribuo meu mau desempenho".*

5.3.2. Metodologias de Ensino

As aulas de ambas as disciplinas, Cálculo I e Física I são expositivas, sem a utilização de recursos audiovisuais ou computacionais, e sem uma relação mais próxima com as atividades de laboratório. Particularmente nas salas de aula teóricas em que realizamos as observações não há suporte para o uso de recursos audiovisuais e tecnológicos, tampouco espaço para o desenvolvimento de atividades experimentais. Estas parecem ser atividades exclusivas dos laboratórios de ensino. Nas aulas de Física I observadas não era adotada uma bibliografia específica, apesar de serem referenciadas no plano de ensino oficial da disciplina. As listas de exercícios, elaboradas por docentes do próprio Instituto de Física, ficavam disponíveis para os alunos na *home page* do Curso. Já na disciplina de Cálculo I, adota-se um livro específico, com exercícios recomendados.

<u>Aluno 2</u> *(2011/2, Licenciatura em Física Noturna): "Professora, era importante que pudéssemos visualizar experimentalmente ou através de animações computacionais, o movimento do bloco, no sistema bloco-mola".*

<u>Aluno 3</u> *(2010/1, Bacharelado em Física): "Creio que as aulas de Física experimental deveriam ser com o mesmo professor da teórica, pois assim haveria uma melhor aprendizagem nos experimentos".*

5.3.3. Relações entre a Matemática e a Física

Por um lado alguns alunos parecem conceber a Matemática como em empecilho para o aprendizado da Física, chegando a considerar as duas disciplinas como uma única. Por outro lado, trazem consigo a crença de que a Matemática pode ser ensinada de forma isolada das áreas correlatas. Quando afirmam que não é necessário conhecer Física para aprender Matemática parecem desconhecer a importante integração que se faz necessária entre as duas áreas, para o desenvolvimento científico, já que a Física é o principal campo de aplicações da Matemática. No entanto, os alunos reproduzem aquilo que recebem, e parece ser muito fácil convencê-los nesta etapa de suas vidas acadêmicas. Nas turmas observadas, percebeu-se uma intensa preocupação dos professores de Física em valorizar a importância da Matemática ao longo das atividades. Percebe-se que os professores das disciplinas introdutórias dos Cursos exercem uma grande influência sobre os alunos, que aceitam passivamente (sem muita participação ou discussões) as informações que recebem. Os alunos do Curso de Licenciatura em Física noturna parecem ser mais críticos e participativos, apesar do aproveitamento ser inferior ao dos Cursos diurnos.

<u>Professor 1</u> *(2011/1, FIS01257 Física Geral I A): "Na resolução dos problemas, indique claramente todas as passagens matemáticas feitas até chegar nas respostas. Sem isso, mesmo que esteja certa, sua resposta valerá praticamente nada".*

<u>Aluno 4</u> *(2011/1, Bacharelado em Física, UFRGS):* "A *Matemática é apenas a ferramenta para a Física, e nada mais do que isto".*

<u>Aluno 5</u> *(2011/1, Bacharelado em Física, UFRGS): "A Física é pura Matemática".*

5.3.4. Bagagem do Ensino Médio

Os professores, tanto de Cálculo como de Física, ensinam os conteúdos pressupondo que os alunos têm os conhecimentos prévios necessários, num nível elevado de abstração[81]. Especificamente no Cálculo, os professores contam com conhecimentos prévios que os alunos possam ter adquirido no Curso Pré-Cálculo. Todos os docentes observados procuram manter

[81] Além dos conceitos de derivada e integral de funções escalares, abordam-se também, na disciplina da Física I, os fundamentos da Análise Vetorial, incluindo a revisão da teoria de vetores. Estes são conceitos desenvolvidos detalhadamente na disciplina do Cálculo II, no segundo semestre letivo dos Cursos de Física.

um relacionamento de interação com os alunos, questionando-os e instigando-os a fazerem perguntas relativas ao conteúdo.

Aluno 6 *(2011/2, Licenciatura em Física): "Acho um desperdício que professores de Física tão gabaritados, sejam designados para ministrar as aulas de Física básica, quando deveriam lecionar as disciplinas mais avançadas do Curso. A maioria deles dão as aulas da mesma forma que o conteúdo é apresentado no Halliday, supondo que os alunos já sabem tudo".*

Aluna 7 *(2010/2, Bacharelado em Física): "Fiz Cálculo I duas vezes. Na primeira vez reprovei por não ter estudado o suficiente. Estava acostumada com o ritmo de estudos do Ensino Médio. Não atribuo minha reprovação a professora, que era muito boa. Como estava ingressando na Universidade achava que estudar nas vésperas das provas era suficiente".*

Aluno 8 *(2010/1, Licenciatura em Física Noturna): "Aprendi no Ensino Médio todos os conteúdos matemáticos importantes para a Universidade, porém a cobrança lá é bem diferente de como esses conhecimentos são cobrados aqui".*

Aluno 9 *(2010/2, Bacharelado em Física): "Basicamente não tive Matemática no Ensino Médio, pois conclui em Escola Supletivo. E no Supletivo praticamente se "compra" o diploma".*

Aluno 10 *(2010/2, Licenciatura em Física, UFRGS): "Aprendi toda a Matemática básica e de nível intermediário na escola, mas devido à falta de interesse e comprometimento, não aproveitei toda a estrutura proporcionada pelo professor. Logo acabei por ter um conhecimento muito básico".*

Aluno 11 *(2010/2, Bacharelado em Física, UFRGS): "Deveria haver introdução aos tópicos abordados no Cálculo I no Ensino Médio, pois é assustadora a quantidade de conteúdo apresentada e que deve ser ministrada em um semestre".*

5.3.5. Desarticulação no Ensino

Pudemos constatar, dentre as aulas teóricas observadas que o primeiro professor *(professor A)* não desenvolveu, ao longo do conteúdo sobre Cinemática, os conceitos matemáticos de *derivação e integração de funções escalares.* Apenas definiu para o movimento unidimensional e bidimensional, *velocidade e aceleração instantâneas como derivada da posição e da velocidade* respectivamente, e não retomou estas definições ao longo da

Dinâmica. O professor apresentou as *equações cinemáticas para o movimento unidimensional* "contornando" o uso do *processo da integração de uma função escalar constante* (o livro texto adotado indica esta, uma forma alternativa para a apresentação das equações do movimento). No entanto, o livro texto faz uso de um forte resultado do Cálculo, o teorema do valor médio para integrais, quando parte da seguinte hipótese: *se a aceleração é constante num determinado intervalo do tempo então ela é igual à aceleração média naquele intervalo.* No contexto da disciplina de Cálculo esta implicação imediata não é enfatizada.

O tópico matemático sobre *vetores* foi apresentado *pelo professor A*, logo após o conteúdo inicial sobre *medições,* numa fase imediatamente anterior à dedução das *equações cinemáticas para o movimento unidimensional.* A forma desta apresentação foi tão geral e abrangente que pudemos interpretar, na concepção de Ausubel (1963, 2000), que pode tratar-se de uma espécie de *organizador prévio da Matemática para a Física*, no sentido que pode servir de ponte entre o conhecimento matemático prévio do aprendiz e o conhecimento matemático que deverá saber para dar conta das situações físicas.

O segundo professor observado nas aulas teóricas *(professor B)* desenvolveu os conceitos de *derivada e de integral*, na primeira semana de aula, e apresentou algumas regras básicas de derivação, juntamente com o conteúdo sobre Cinemática unidimensional. Também trabalhou com gráficos, realizando análises qualitativas do comportamento das curvas a partir de situações-problema clássicas da Cinemática quando os estudantes ainda não dispunham dos conceitos de *crescimento/decrescimento de curvas, teste da primeira derivada e teste da segunda derivada* para uma análise mais completa de esboços de gráficos.

O conteúdo sobre *vetores* foi introduzido numa fase anterior ao desenvolvimento da teoria sobre movimento bidimensional, sendo retomado no ensino dos conceitos dinâmicos de *trabalho e torque*. Isto é, o conteúdo matemático sobre vetores foi sendo apresentado ao longo do desenvolvimento da disciplina, na medida em que era necessário para a interpretação e resolução das situações-problema.

As listas de exercícios propostas em ambos os semestres observados são listas disponibilizadas no site geral da disciplina (estão disponibilizadas também para os alunos das Engenharias), e podem ser resolvidas apenas com aplicações de fórmulas matemáticas sem uma exigência maior em termos do entendimento dos seus significados no contexto da Física.

Apesar da ênfase dada pelo *professor B* em introduzir o conceito de *derivada e integral* no contexto da disciplina, notamos que poucos exercícios propostos na lista fazem menção à interpretação destes conceitos para serem resolvidos. Na grande maioria dos exercícios, estes conceitos são contornados, de forma a não serem necessários para a resolução.

Ambos os professor observados possuem um notável conhecimento Físico e Matemático. No entanto, pudemos observar que *a forma com que a Matemática é apresentada na disciplina de Física é distinta da forma como a Matemática é apresentada na disciplina de Cálculo*, parecendo, inclusive, que não se trata da mesma Matemática. Este fato corrobora nossa hipótese inicial de que, na forma como os sistemas de ensino das disciplinas de Cálculo e de Física estão estruturados, os conceitos matemáticos do Cálculo não são (e não podem ser) sincronizados, caracterizando, assim, um ensino desarticulado.

A postura dos professores de Física com relação à Matemática é semelhante à postura dos professores da Matemática com relação à Física. No contexto da Física a Matemática é subordinada à *física conceitual*, e no contexto da Matemática prevalece o enfoque da resolução técnica dos problemas sem a ênfase nos seus significados para situações das áreas científicas. O relato que segue vem ao encontro das nossas interpretações.

<u>Aluno 12</u> *(2010/2, Licenciatura em Física Noturna, UFRGS): "Gostaria de comentar acerca da contribuição da Matemática (disciplina de Cálculo I) para a aprendizagem da Física (disciplina de Física I). As duas disciplinas apresentam objetivos muito distintos: O Cálculo I é apresentado aos alunos de forma global, ou seja, todos os assuntos possíveis de serem trabalhados durante o semestre são apresentados sem, ou com pouca preocupação em estabelecer ligações com a Física. O Cálculo I apresenta novas ferramentas matemáticas importantes, coerentes com o que se espera no nível universitário, porém a proposta restringe ao raciocínio matemático puro. Até mesmo as aplicações se furtam a aproximar o conteúdo da disciplina de Física I. A Física I, por sua vez, evita trabalhar seu conteúdo utilizando-se das ferramentas apresentadas pelo Cálculo I. Ocorre que, em Física I, o raciocínio matemático vai um pouco além daquele trabalhado no Ensino Médio. Isto demonstra a falta de interação entre as duas disciplinas. E isto pode ser causado pela nítida falta de ação de uma coordenação pedagógica, de nível superior, para o estabelecimento de objetivos "reais" para o Curso de Física (Licenciatura ou Bacharelado). O professor não*

deve ser completamente "livre" nem "engessado", deve ser orientado a contribuir para o estabelecimento de propostas "factíveis"".

5.3.6. Dificuldades de Aprendizagem

Tanto as aulas da Física Teórica como da Física Experimental apresentam, constantemente, situações que requerem o uso de conceitos matemáticos para serem solucionadas. No laboratório, em muitas ocasiões percebemos que os alunos esbarraram na parte *operacional matemática* para dar conta destas situações. Dentre as dificuldades identificadas destacam-se a *falta de habilidade no esboço e na interpretação dos gráficos, e confusão no significado das relações entre grandezas físicas.* Os alunos sentem necessidade de uma orientação matemática, tanto nas aulas teóricas como nas aulas experimentais.

<u>Aluno 13</u> *(2010/1, Bacharelado em Física): "Penso na Matemática como uma ferramenta para a Física, portanto acho que a revisão da Matemática tem que ser feita na Física e não na Matemática".*

<u>Aluno 14</u> *(2009/2, Licenciatura em Física Noturna): "Professora permitimos que a senhora observe nosso grupo experimental desde que nos auxilie no esboço dos gráficos".*

5.3.7. Cálculo versus Física

Em geral, os estudantes da Física apreciam mais a Física do que o Cálculo. Contudo, as duas disciplinas competem muito em termos de avaliação e quantidade de exercícios propostos. O atual sistema de avaliação da disciplina do Cálculo (testes aplicados ao longo do semestre) parece manter os alunos mais envolvidos com o Cálculo do que com a Física.

5.3.8. Formas de Aprendizagem

Em geral, os professores de Cálculo I não abordam o conteúdo de forma contextualizada com a área de formação dos estudantes. Costumam desenvolver o conteúdo no domínio exclusivo da Matemática, com o uso de linguagem e notações exclusivas desta área. Os alunos que se destacam nas disciplinas de Cálculo e de Física conseguem realizar mecanicamente todas as tarefas propostas. Alguns preferem aprender antes a técnica, para depois aprender o conceito.

<u>Aluna 15</u> *(2010/2, Laboratório de Supercondutividade e Magnetismo): "Quando ingressei na Universidade o Cálculo era ensinado naquela "mesmice" que se conhece. Mecânica*

Quântica, por exemplo, é a resolução de Equações Diferenciais. Os professores de Cálculo e de Física não sabem fazer o "link" necessário entre as duas áreas".

Aluno 16 *(2010/1, Bacharelado em Física, UFRGS): "No primeiro semestre do Curso notei um "automatismo" nas aulas de Cálculo e poucas referências, nas aulas de Física, em relação aos cálculos empregados nos problemas".*

Aluna 17 *(2010/2, Laboratório de Supercondutividade e Magnetismo): "Acho o Cálculo muito fácil. É bastante mecânico, mas prefiro que seja assim. Aprendo primeiro a técnica de resolução do exercício e depois tento entender o porquê das coisas".*

Aluno 18 *(2010/2, Laboratório de Supercondutividade e Magnetismo): "Não acho que o Cálculo seja tão fácil assim. Faço parte do grupo dos "alunos revoltados da Física". Nossa maior queixa com relação às disciplinas da Matemática é que são mecânicas, na forma como são ensinadas. Quando quiser concorrer a uma vaga na Pós-Graduação meu currículo terá que reproduzir um verdadeiro aprendizado, e não um aprendizado baseado na "decoreba"".*

5.3.9. Atendimento extraclasse

Há pouca procura pela monitoria das disciplinas de Cálculo I e de Física I. Em geral, os alunos ingressantes buscam atendimento nas vésperas das provas. Pesquisam provas de semestres anteriores e listas de exercícios já resolvidas por outros colegas veteranos, como forma de garantir um bom desempenho nas avaliações. Na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica I A, as provas não são devolvidas aos alunos. Alguns professores costumam não devolver a prova alegando que os alunos acabam estudando apenas pelas provas. Na disciplina de Física Geral I A as provas são devolvidas.

Professora 2 *(2010/2, Matemática Aplicada II): "O aprendizado da Matemática se mecanizou. As ações dos estudantes reduziram-se a decorar provas de semestres anteriores na tentativa de obterem aprovação. Eles questionam porque na minha disciplina eu não repito as provas, como acontece em outras disciplinas".*

Aluna 19*: "Passei no Cálculo e na Física Geral com conceito B. Não fiquei muito satisfeita com o conceito, mas foi meu primeiro semestre e os conteúdos eram novos para mim. Muitos colegas reprovaram, pois não estudavam, não procuravam atendimento, e não resolviam as listas de exercícios. Acho que não estavam acostumados com o ritmo de estudos de uma universidade".*

5.3.10. Aulas no Laboratório de ensino

Quanto às aulas experimentais, a desarticulação sugerida entre os ensinos do Cálculo e da Física parece estender-se para o contexto teoria-prática. Em 2009/2 os alunos ainda estavam vinculados a roteiros para atividades experimentais pré-estabelecidos, sendo induzidos a obterem as leis, fórmulas e regras que regem os fenômenos naturais. Atualmente, desde 2010/1 a disciplina experimental é separada da disciplina teórica; tem um planejamento próprio de avaliação do ensino; visa estimular o estudante à nova concepção de que é a partir dos dados experimentais que se deve refletir sobre os modelos físicos. Os alunos adaptam-se facilmente às aulas experimentais, demonstrando um grande interesse por este campo da Física.

<u>Professora D</u> *(2010/1, FIS01258 Física Experimental I A): "O* que se quer das novas aulas de laboratório é que os alunos desenvolvam uma metodologia que os levem aos modelos teóricos a partir dos resultados, e não chegarem ao laboratório com o modelo já formulado na mente".

<u>Aluno 20</u> *(2010/1, Licenciatura em Física Noturna): "Entendo muito mais a Física nas aulas experimentais do que nas aulas teóricas".*

5.4. Concepções de um professor de Física I

Apresenta-se a transcrição de uma entrevista semiestruturada[82], realizada com um dos professores das turmas observadas *(professor B).* O professor entrevistado é um físico teórico do Instituto de Física da UFRGS. Solicitamos que discorresse sobre os tópicos listados abaixo.

<u>Matemática na Física</u>: "*O físico sente necessidade de ter a Matemática como linguagem no seu dia-a-dia. A linguagem matemática dá à Física uma estética, além de permitir aprofundar o conhecimento e gerar novas predições para novas teorias e novas conclusões. A Matemática permite extrapolar para um contínuo".*

<u>Desempenho dos Alunos</u>: *"Dos 57 alunos matriculados na disciplina este semestre, 49% obtiveram aprovação, sendo que nenhum com conceito A (média final de 9,0 até 10,0). 23,5% aprovaram com conceito B (médias finais de 7,5 até 9,0) e 25,5% aprovaram com conceito C*

[82] As questões foram formuladas de forma a permitir que o sujeito discorra e verbalize seus pensamentos, tendências e reflexões sobre os temas apresentados (Rosa e Arnoldi, 2006).

(média final de 6,0 até 7,5). 45% dos alunos reprovaram com conceito D (média final inferior a 6,0) e 6% reprovaram com conceito FF (reprovados por frequência). Este desempenho é comum entre alunos ingressantes no Curso de Física da UFRGS. Estou satisfeito, levando em consideração a realidade dos alunos ingressantes no Curso. Muitos optam no concurso vestibular pelo Curso de Física desconhecendo a especificidade do Curso e por saberem que a média de acertos exigida para a aprovação no Vestibular não é alta".

<u>Ensino nas Universidades:</u> *"Gradativamente o desempenho dos alunos ingressantes no Curso de Física está cada vez mais baixo. Esta é uma realidade diferente daquela que vivenciamos a 20 ou 30 anos atrás, quando o ensino era privilégio de poucos. Hoje o ensino está se democratizando. Todos podem ter acesso. Isto é muito positivo, já que a educação não pode ser privilégio de apenas alguns. No entanto é preciso tempo para a adaptação das novas medidas governamentais[83]. A realidade dos professores de terceiro grau hoje é uma carga horária de trabalho cada vez maior e maiores exigências quanto a atualizações nas questões do ensino. Os professores são mais cobrados pelos resultados do ensino agora do que antigamente. Esta é uma característica do Ensino Público".*

<u>Papel da Instituição na Melhoria do Ensino:</u> *"A Instituição somos nós. Nossas responsabilidades individuais somam-se às responsabilidades individuais de todos os outros docentes que nos cercam. Temos pontos de vista diferentes e as coisas podem não funcionar. No entanto devemos nos questionar sobre o que estamos fazendo para mudar esta situação. Acredito que qualquer mudança depende de todos, e não de decisões individuais. Se não participamos não podemos nos queixar. Podemos ficar isolados em nossos gabinetes sem nos envolvermos com os problemas, no entanto ficaremos estagnados e alheios. O Instituto de Física da UFRGS prima por estas questões. Todos procuram envolver-se com o trabalho visando melhorias no ensino e na pesquisa. Vários Projetos Institucionais estão sendo desenvolvidos com este fim".*

<u>FIS 01257: FÍSICA GERAL I-A[84]</u>: *"Quando os conteúdos de Rotações e Gravitação estavam presentes no programa, havia muito conteúdo para ser vencido e não sobrava tempo para*

---

[83] Entendemos com o posicionamento do professor que o aumento do número de vagas nas Universidades públicas gerou consequente aumento na demanda de recursos humanos e de políticas voltadas para a inclusão desta nova demanda. Significa reestruturar os papéis do ensino, da pesquisa e da extensão nas Universidades diante desta nova realidade.

[84] A partir de 2010/1 estes conteúdos de Rotações e Gravitação fazem parte da Física Geral II A, na grade curricular dos alunos dos Cursos de Física.

fazer exercícios com os alunos. Neste novo sistema sinto-me mais aliviado e com mais tempo para aprofundar os conceitos, além de ter observado uma maior participação dos alunos. Para a Física Geral II ficaram então os conteúdos de Rotações, Gravitação, Termodinâmica e Ondas. O básico da Física Geral I passa a ser as Leis de Newton e suas aplicações: a conservação da energia e a conservação do momento linear".

<u>Relações entre a Física I e o Cálculo I</u>: *"Esta relação está presente apenas na primeira parte. Quando se fala em grandezas da Mecânica, acho necessário o Cálculo Diferencial e Integral. É fundamental. Embora os alunos estejam na correria que caracteriza o primeiro semestre letivo em termos de exigência de estudos e de adaptação, e pensem que poderiam aprender apenas Física I sem o Cálculo I, eles certamente não poderão avançar na sua formação. O Cálculo I é a linguagem da Mecânica. Com ele é possível uma compreensão mais profunda".*

<u>Cálculo I e Física I na Grade Curricular:</u> *"Concordo com a atual disposição. Ambas devem ser vistas no primeiro semestre, quando o aluno ingressa no Curso. A Física conceitual básica o aluno traz do Ensino Médio, portanto deve estudar os conceitos mais aprofundados na Física Geral I, até porque entra no Curso querendo estudar Física. Na Faculdade ele deve dar um salto qualitativo, por isso deve cursar também o Cálculo I, para ir se acostumando com a linguagem Matemática. Mesmo que o aluno não visualize num primeiro momento a utilidade do Cálculo I para a sua formação, com certeza sentirá esta necessidade no transcorrer do Curso[85]. O efeito maior da aprendizagem do Cálculo I será detectado no Curso de Física Geral III, onde os alunos aprenderão sobre Eletromagnetismo".*

<u>Cálculo I articulado com a Física I</u>: *"Acho difícil, pois são duas áreas distintas. Levá-las em paralelo seria muito difícil! O Cálculo I não é estritamente necessário para o aprendizado da Física Geral I. Necessário é ter aprendido bem o Cálculo Diferencial e Integral para etapas posteriores. Têm coisas no Cálculo I que são usadas na Física I (como os conceitos de cinemática, por exemplo), outras serão aproveitadas posteriormente. Penso que não é possível sincronizar sempre".*

<u>Dificuldades dos Alunos</u>: *"A organização nas provas melhorou bastante até a terceira área. Depois do desastre da primeira prova os alunos se deram conta da importância de resolver uma prova de maneira organizada. No entanto este é um problema cada vez mais sério entre*

[85] Os conceitos matemáticos abordados no Cálculo I constituirão o conhecimento prévio dos alunos nos semestres posteriores.

os alunos ingressantes. Em média, os alunos são muito desorganizados. O mais crítico é a base matemática. Desta turma, em particular, muito fraca. Percebe-se isto na organização de um cálculo algébrico. Os conceitos matemáticos estão mal incorporados. Por outro lado houve uma evolução na parte da Física conceitual. Evolução até nas atitudes dos alunos. O mau desempenho na primeira prova (que tratou da parte da cinemática[86]*) é resultado da cultura que os alunos trazem do Ensino Médio, onde a cobrança não é tão rigorosa*[87]*. Em suma, atribuo o mau desempenho na primeira prova à falta de estudo suficiente".*

<u>Ensino e a Aprendizagem:</u> *"Não existe um único caminho de aprendizado para todos. A diversidade está muito presente na sala de aula. Temos alunos com uma base*[88] *muito boa e outros com uma base muito ruim. Por isso, não existe um único método de ensino que possa ser aplicado visando o aprendizado. Não existe uma aprendizagem uniforme entre os alunos. Mas acho muito interessante que sejam feitos ajustes que possam produzir novos métodos de ensino, com o objetivo de amenizar estes problemas".*

5.5. Considerações

Este capítulo descreveu os resultados de um estudo exploratório, do tipo etnográfico, fundamentado nas concepções da pesquisa qualitativa ou naturalista, defendida por Bogdan e Biklen (1994) e por André (1988; 2005). Utilizando a técnica da observação participante, inicialmente foi possível identificar possíveis links que podem ser construídos entre os campos conceituais da Mecânica e os campos conceituais do Cálculo. Ao longo das transcrições das aulas são apresentadas situações físicas que podem ser trabalhadas no ensino, como significantes dos conceitos matemáticos desenvolvidos no Cálculo. Destacam-se: *situações que envolvem os conceitos de velocidade e aceleração; situações que envolvem os conceitos de força, trabalho e energia e momentum linear; situações que envolvem análise e interpretação de gráficos da cinemática e situações que envolvem conceitos básicos da trigonometria e da álgebra vetorial.*

Os resultados indicam serem necessárias, e bem vindas, formas alternativas de abordagens dos conceitos matemáticos do Cálculo para estudantes da Física introdutória,

[86] Esta é justamente a parte que requer os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral I.

[87] O bom desempenho estaria relacionado com uma cobrança rígida no método de avaliação.

[88] O mau desempenho dos alunos estaria relacionado à falta de embasamento do Ensino Médio.

pautadas na articulação que se supõe necessária entre as duas áreas. O material instrucional, que denominaremos *Módulos Matemáticos do Cálculo para a Física* será constituído de três partes: *Módulo 1: Vetores e Trigonometria; Módulo 2: Noções do Cálculo Diferencial; Módulo 3: Noções do Cálculo Integral*. O desenvolvimento destes módulos deve respeitar os pressupostos básicos dos referenciais teóricos adotados na pesquisa.

Paralelamente foi apresentada uma análise histórica da formação do Curso de Física no contexto investigado e algumas concepções identificadas nos relatos dos sujeitos, no campo de investigação. Estas transcrições permitem refletir sobre o processo de enculturação que se forma no ambiente de ensino e de aprendizagem investigado, com relação ao tema desenvolvido na pesquisa. Os dados foram coletados através de questionários, entrevistas não gravadas, e anotações de diário de campo[89]. Os questionários aplicados aos alunos são apresentados nos apêndices A e B, respectivamente. Algumas respostas às questões abertas destes questionários são transcritas ao longo da descrição das categorias.

Atribui-se a importância deste estudo ao rigor metodológico adotado, onde questões gerais observadas corroboram aquelas já apresentados na literatura científica, com a utilização de outros métodos de pesquisa. Por outro lado, o texto foi desenvolvido a fim de fazer com que o leitor também possa refletir sobre o tema investigado, a partir da análise descritiva apresentada. Considera-se de extrema relevância para os resultados da investigação a inserção da investigadora (professora de Cálculo) no domínio exclusivo da Física.

[89] Os questionários foram validados pelo pesquisador e pelos docentes das disciplinas observadas. As entrevistas são semiestruturadas e não gravadas, por opção dos entrevistados.

Capítulo 6

MODULOS MATEMÁTICOS DO CÁLCULO PARA A FÍSICA

Em 2011/1 iniciou-se a segunda fase da pesquisa: *a elaboração do material instrucional supostamente potencialmente significativo, baseado na integração pretendida entre as áreas do Cálculo e da Física*. Neste estudo conseguimos avançar um pouco mais na forma de observação participante. Com a autorização do professor *(professor C)* de uma das turmas da disciplina de Física Geral I A, da UFRGS, desenvolvemos e apresentamos aos estudantes uma primeira versão deste material, que denominamos *Módulos Matemáticos do Cálculo para a Física Básica*. Seu desenvolvimento se deu a partir dos resultados do *Estudo Exploratório* e a partir das observações e interpretações das aulas do *professor C*, com ênfase na significação dos conceitos matemáticos a partir das situações físicas.

Na perspectiva de Vergnaud (1990) nossa intenção inicial ao elaborar este material foi apresentar uma variada gama de situações-problemas da Mecânica, contempladas em ambos os domínios: *do Cálculo e da Física.* Procuramos, nos livros de Cálculo recomendados no contexto investigado (Anton, Bivens e Davis, 2007), aquelas situações-problema que em geral não são trabalhadas no Cálculo, em sistemas de ensino compartimentados. Na tese são apresentadas apenas algumas destas situações-problema.

Outra intenção inicial, conforme pressupostos de Ausubel (1963, 2000) e de Moreira (2006a) é que estes módulos matemáticos pudessem ser interpretados de duas formas: *ou como pseudo-organizadores prévios,* isto é, *como materiais introdutórios utilizados para facilitar a aprendizagem dos tópicos da Mecânica*, ou *como materiais que pudessem auxiliar os estudantes na construção de conceitos subsunçores necessários para a aprendizagem do conteúdo desenvolvido ao longo da disciplina de Física.*

Nossa preocupação com este material não foi especificamente enfatizar o *rigor matemático dos conceitos,* e sim fazer transparecer a *concepção de integração* sugerida nos propósitos da pesquisa, oportunizando o aluno ao entendimento dos diferentes significados dos conceitos.

Em determinados momentos, na descrição deste material, há mais um direcionamento para o que pode ser proposto ao estudante, do que propriamente definições dos conceitos (as quais podem facilmente ser reproduzidas numa aula de Cálculo). Todo o material discutido nestes módulos encontra-se nos livros-texto das disciplinas de Cálculo e da Física. A intenção é que cada professor possa dar a sua interpretação para os diferentes significados da matéria abordada, nos diferentes contextos em que sua aprendizagem se faz necessária. Neste estudo, os módulos foram apresentados ao longo do desenvolvimento da disciplina, conforme autorização do professor.

Paralelamente, procuramos investigar as implicações ou influências que possam ter ocorrido no sistema de ensino com relação a esta tentativa inicial de integração sugerida, bem como relações mais específicas entre as duas áreas do ensino, em termos de conteúdo, que surgem no texto logo após a interpretação das aulas do professor, na forma de categorias analisadas.

Na primeira avaliação da disciplina, proposta pelo professor, foi incluída uma questão que exigia articulação entre as duas áreas para ser respondida. Ainda que os processos de esquematização externados pelos estudantes para a resolução da questão proposta não constitua o foco principal nesta fase da pesquisa, procuramos refletir sobre as possíveis implicações do método do ensino adotado, a partir destes esquemas.

Apesar da nossa rápida intervenção didática[90] pudemos constatar por parte dos alunos, curiosidade e surpresa pela abordagem dos conteúdos físicos integrados com os conteúdos matemáticos, e pela presença de um professor de Matemática nas aulas de Física. Alguns procuravam, ao final das aulas, sanar as dúvidas relacionadas à parte Matemática com a observadora (professora de Matemática) muitas vezes comparando o que aprenderam nas aulas da disciplina de Física com o que haviam aprendido nas aulas da disciplina de Cálculo. O professor de Física contribuía com as discussões demonstrando um notável conhecimento matemático e físico, promovendo um ambiente de interação e sempre chamando a atenção dos alunos para a importância da Matemática para sua formação acadêmica.

O trabalho é de teor descritivo e interpretativo, mantendo os fundamentos da pesquisa qualitativa e buscando relações com os pressupostos de Ausubel (1963, 2000) e de Vergnaud (1990). Devido à grande extensão do material coletado (contido num caderno onde as aulas

[90] Para cada módulo desenvolvido: v*etores e trigonometria*, n*oções do Cálculo Diferencial e noções do Cálculo Integral* foi reservado um encontro, totalizando três encontros, além de dois encontros para resolução de exercícios.

foram registradas) nos detemos naquelas partes em que encontramos as maiores relações entre a Matemática e a Física, procurando manter a fidedignidade dos registros.

Inicialmente apresentamos os módulos matemáticos, na forma de tabelas, bem como a forma com que foram inseridos no contexto da disciplina investigada. Após apresentamos as descrições das aulas, seguidas de nossas análises interpretativas. Estas análises são distribuídas em dezesseis categorias, cada uma tendo implicações diretas para a estruturação de material instrucional do Cálculo para estudantes da Física. A tabela 8 sintetiza a forma como o material instrucional foi apresentado e analisado a partir do desenvolvimento do conteúdo pelo professor, e em que momentos os módulos matemáticos foram inseridos. Discute-se a potencialidade significativa deste material.

Ao final, apresentamos uma breve reflexão em torno da forma como alguns estudantes operacionalizam e exteriorizam seus conhecimentos matemáticos a fim de darem conta da situação-problema específica da prova, proposta pelo professor por sugestão nossa, a qual exige conhecimentos matemáticos e físicos para ser resolvida. Possíveis vinculações destas formas de esquematização com o método de ensino desenvolvido são discutidas.

6.1. Sobre os Módulos Matemáticos

TABELA 8: UNIDADE 1: VETORES E TRIGONOMETRIA

Todo o conteúdo brevemente discutido encontra-se de forma detalhada em diversos livros texto de ambas as disciplinas de Cálculo e de Física. Os livros texto apresentam inúmeras situações-problema físicas, tanto com um enfoque físico de resolução como com um enfoque matemático. Entretanto o valor desta discussão encontra-se no fato de apontar algumas situações físicas observadas onde tais conteúdos são diretamente aplicados. Cabe a cada professor, individualmente, e de acordo com o contexto da turma, elaborar seu próprio material de apoio. No nosso caso, a ênfase é no processo integrado do ensino da Física e do Cálculo, mesmo que não seja num mesmo ambiente de ensino. *Quais são os conteúdos matemáticos que podem ser desenvolvidos a partir desta metodologia?* Vetores e trigonometria; noções do Cálculo Diferencial; noções do Cálculo Integral; Noções da Análise vetorial. *O que é importante para um estudante de Física saber sobre vetores?* Inicialmente, entender que um vetor é um símbolo matemático utilizado para representar o módulo, a direção e o sentido de uma grandeza física vetorial. No contexto da Física fala-se em intensidade e orientação de uma grandeza vetorial. *No domínio da Mecânica Newtoniana quais são as principais grandezas vetoriais?* No contexto da Cinemática as mais básicas são *deslocamento, velocidade e aceleração*. No contexto da Dinâmica as mais básicas são *força e momentum linear*.

O que é importante saber sobre as grandezas vetoriais mais básicas da Mecânica? O *vetor deslocamento* $\vec{r}$ de um ponto *A* até um ponto B (conforme figura 1) é uma seta com a "cauda" no primeiro ponto e a "ponta" no segundo. A *magnitude* ou módulo do vetor de deslocamento é a distância entre os pontos e é dada pelo comprimento da flecha. A *orientação* (direção e sentido) do vetor de deslocamento é a orientação da flecha. O vetor de deslocamento representa a mudança de posição de um objeto móvel, independentemente da sua trajetória.

O vetor velocidade $\vec{v}$ de um objeto que se move é um vetor cujo módulo indica a velocidade escalar (rapidez) do objeto e cuja orientação é a orientação do movimento. O *vetor força* $\vec{F}$ pode representar intuitivamente um "empurrão" ou um "puxão" com determinada orientação.

Considerando o exemplo da figura 3, as notações alternativas para um vetor são: $\vec{r}$, $\mathbf{r}$, $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$. Seu módulo (tamanho) é denotado por: $r = \|\vec{r}\|$

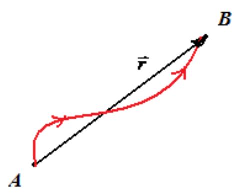


Figura 7: Vetor deslocamento

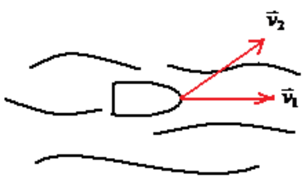


Figura 8: Vetor velocidade

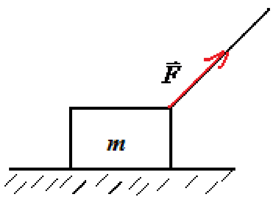


Figura 9: Vetor força

Quando dois vetores são iguais? Dois vetores são considerados iguais (ou equivalentes) se tiverem o mesmo módulo e a mesma orientação, isto é, se forem um a translação do outro. Este conceito é muito importante no contexto da Física, pois frente à construção de um diagrama de forças todos os vetores podem ser transladados de forma que suas "caudas" (pontos iniciais) coincidam, numa mesma origem.

Em que situações podemos ter um vetor nulo? Um vetor será nulo quando seu ponto inicial coincidir com o seu ponto final. Uma situação bastante conhecida é aquela que diz respeito à condição para o equilíbrio estático. Neste caso, a soma resultante de todas as forças aplicadas sobre o sistema é nula ($\vec{0}$).

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

É importante especificar que o lado direito da equação é um vetor nulo, muito embora alguns estudantes acabem representando-o como um escalar nulo. Não há sentido em igualar um vetor à um escalar.

Como operar geometricamente com vetores? A *soma* de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é o vetor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ tem origem no ponto inicial de $\vec{a}$ e extremidade no ponto final de $\vec{b}$, quando os vetores estiverem posicionados de tal forma que o ponto final de $\vec{a}$ é o ponto inicial de $\vec{b}$.

Figura 10: O vetor soma de dois vetores.

Podemos observar que vale a propriedade *comutativa da soma* para somas vetoriais, isto é, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Neste caso, o vetor soma terá a origem no ponto inicial de $\vec{b}$ e extremidade no ponto final de $\vec{a}$, quando os vetores estiverem posicionados de tal forma que o ponto final de $\vec{b}$ é o ponto inicial de $\vec{a}$.

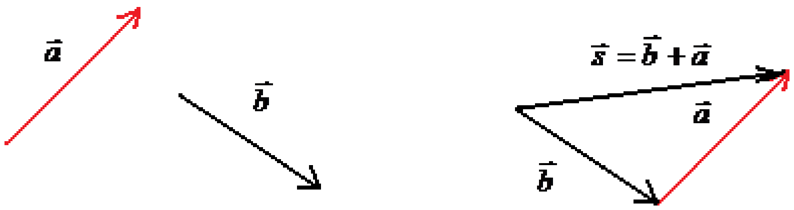


Figura 11: A mesma soma anterior, comutando os vetores.

E se os dois vetores forem posicionados na mesma origem, como se dá a soma entre eles? Neste caso, o vetor soma irá representar a diagonal do paralelogramo de lados $\vec{a}$ e $\vec{b}$ adjacentes. Esta regra é conhecida como *regra do paralelogramo*.

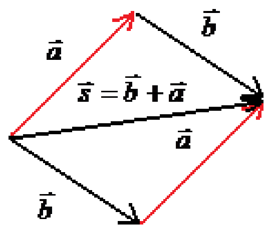


Figura 12: a regra do paralelogramo.

A *subtração* de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é o vetor diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ que pode ser interpretado como o vetor soma $\vec{a} + (-\vec{b})$, onde ($-\vec{b}$) é o vetor de mesmo módulo e direção que $\vec{b}$, mas com sentido contrário.

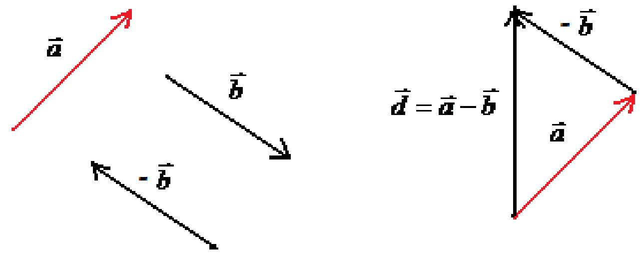


Figura 13: O vetor diferença.

Em quais tipos de situações físicas nos deparamos com um vetor diferença? Por exemplo, quando temos que calcular o vetor de deslocamento de uma partícula entre os instantes t_1 e t_2. Seja $\vec{r}_1$ o vetor posição da partícula no instante t_1 e $\vec{r}_2$ seu vetor posição no instante t_2. Se definirmos $\vec{u}$ como o vetor deslocamento de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$, então pela regra da soma de vetores: $\vec{r}_1 + \vec{u} = \vec{r}_2 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

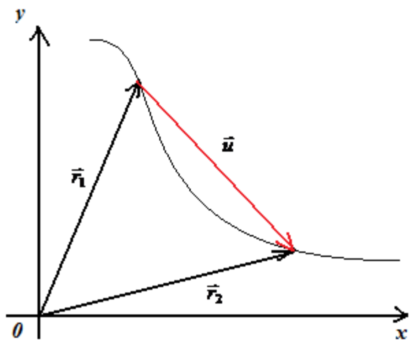


Figura 14: O vetor deslocamento como uma subtração de dois vetores.

Quais são as propriedades das somas vetoriais? Na soma valem a *associatividade*, a existência do *elemento inverso* e a existência do *elemento neutro*. Dado, por exemplo, três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, podemos somá-los primeiro somando $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e o resultado obtido somar com o vetor $\vec{c}$. O mesmo resultado será obtido se somarmos $\vec{b}$ e $\vec{c}$, e o resultado obtido somar com o vetor $\vec{a}$. Isto é possível devido à propriedade associativa da soma: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

A propriedade do elemento inverso da soma nos garante que existe um vetor inverso ao vetor $\vec{a}$, denotado por $-\vec{a}$ tal que se somá-los vamos obter o vetor nulo: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. A propriedade do elemento neutro nos indica que se somarmos um dado vetor $\vec{a}$ com o vetor nulo obteremos o próprio vetor $\vec{a}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. Além da interpretação geométrica destas propriedades das somas vetoriais, elas são muito aplicadas na sua forma analítica na resolução de problemas físicos.

Onde estas propriedades podem ser aplicadas no contexto da Física? Observamos ao longo da etnografia realizada no contexto da Física, que a leis de Newton são o cerne da Mecânica. A representação matemática da 2ª lei de Newton é uma equação vetorial que para ser resolvida requer somas vetoriais, diferenças vetoriais, multiplicações de vetores por escalares, vetores nulos, vetores simétricos, etc. Uma interpretação física importante relacionada às somas de grandezas vetoriais, por exemplo, é o fato de que várias forças aplicadas sobre um objeto têm o mesmo efeito do que uma única força resultante, igual à soma de todas as outras, aplicada sobre o mesmo objeto. Isto nem sempre é bem entendido pelos estudantes.

E a multiplicação de vetores por escalares? Dizemos que, dado um escalar λ e um vetor $\vec{a}$, então o vetor $\lambda\vec{a}$ é um múltiplo escalar de $\vec{a}$ cujo módulo é dado por $|\lambda|\|\vec{a}\|$ e o sentido é o mesmo de $\vec{a}$ se $\lambda > 0$ e contrário a $\vec{a}$ se $\lambda < 0$. Um dos principais exemplos dentro da Mecânica é o já referenciado vetor momentum linear $\vec{p}$, que pode ser interpretado como um múltiplo escalar do vetor velocidade $\vec{v}$. Fisicamente não podemos comparar as grandezas momentum linear e velocidade. No entanto, podemos pensar nos vetores múltiplos escalares como vetores cujos tamanhos aumentam, diminuem ou invertem os sentidos, dependo do múltiplo escalar considerado.

Outro resultado importante a ser considerado é que, conhecido o módulo de dois vetores e o ângulo entre eles, é possível obter o módulo e a orientação do vetor resultante da soma. Obter a orientação física de um vetor significa calcular o ângulo que este forma com a direção horizontal. Situações-problema desta natureza vão requerer outros resultados da trigonometria como a lei dos senos e a lei dos cossenos.

Existe outra forma de lidar com vetores sem fixar-se apenas na sua representação geométrica? Outra importante representação de vetores está na sua forma analítica, em termos dos vetores unitários. No contexto da Mecânica trabalha-se com *sistemas de coordenadas destrógiros*, onde os três eixos sofrem a mesma rotação, qualquer que ela seja. Os vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ indicam os sentidos positivos dos eixos x, y e z respectivamente. Vetores unitários são aqueles que têm o módulo igual a um. No caso, dizemos que: $\|\hat{i}\| = \|\hat{j}\| = \|\hat{k}\| = 1$.

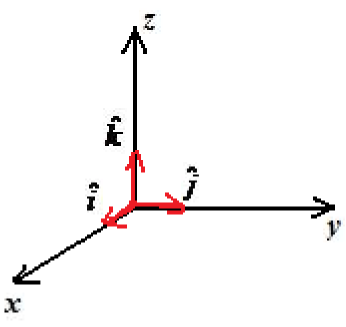


Figura 15: O sistema destrógiro.

O que é importante neste tipo de questão é que o estudante saiba representar um vetor na sua forma analítica sendo conhecido o seu módulo e o ângulo de orientação. Ou, conhecido o vetor na sua forma analítica, saiba como obter seu módulo e seu ângulo de orientação.

Como decompor um vetor em termos de suas componentes?

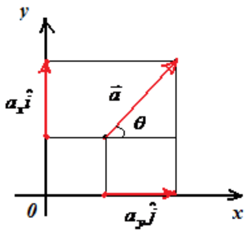


Figura 16: Componentes escalares de um vetor.

Notação: $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ onde $a_x\hat{i}$ e $a_y\hat{j}$ são componentes vetoriais do vetor $\vec{a}$, e a_x e a_y são as componentes escalares de $\vec{a}$. θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e o eixo horizontal, no sentido anti-horário.

Pela trigonometria do triângulo retângulo temos:

$$a_x = \|\vec{a}\|\cos\theta = a\cos\theta \text{ e } a_y = \|\vec{a}\| sen\theta = asen\theta$$

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} \text{ e } tg\theta = \frac{a_y}{a_x} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\frac{a_y}{a_x}$$

Observamos na situação apresentada que o próprio vetor $\vec{a}$ pode ser interpretado como a soma de outros dois vetores: $a_x\hat{i}$ e $a_y\hat{j}$. Também é importante entender que qualquer vetor pode ser representado em termos dos vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.

Como se dá a soma de vetores conhecidas suas formas analíticas?

Dados os vetores $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ e $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$ para somá-los procedemos da seguinte maneira:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j}) + (b_x\hat{i} + b_y\hat{j}) = (a_x\hat{i} + b_x\hat{i}) + (a_y\hat{j} + b_y\hat{j}) = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)$$

$$\vec{c} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}$$

Algumas situações-problema propostas para serem trabalhadas em aula:

(1) Suponha que duas forças sejam aplicadas numa argola conforme a figura. Determine a magnitude da resultante e o ângulo θ que ela faz com o eixo x positivo (Anton, Bivens e Davis, 2007, p.800):

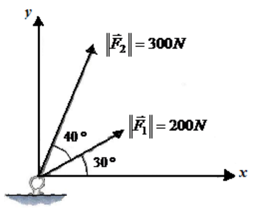


Figura17: Duas forças aplicadas numa argola (ibid. 2007).

(2) Determine as tensões nos cabos mostrados na figura abaixo se o bloco estiver em equilíbrio estático (Anton, Bivens e Davis, 2007, p.803):

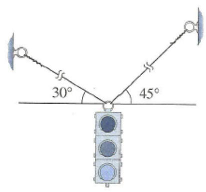


Figura 18: Um semáforo preso por dois cabos (ibid. 2007).

(3) Suponha que a NASA ordena a um robô em Marte que se mova 75m na direção leste e depois 50m na direção nordeste. Onde vai parar o robô (McCallum et. al., 1997, p. 35)?

(4) Uma corda é amarrada num bloco de 100 lb sobre uma rampa que tem uma inclinação de 30° em relação ao solo. Qual é a força que o bloco exerce contra a rampa, e qual é a força que deve ser aplicada à corda na direção paralela à rampa para evitar que o bloco deslize? (Suponha que a rampa seja lisa, isto é, não há força de atrito) (Anton, Bivens e Davis, 2007, p.808).

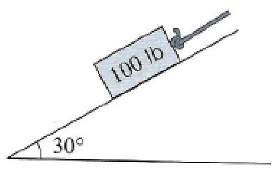


Figura 19: Bloco sobre a rampa (ibid. 2007).

TABELA 9: MÓDULOS MATEMÁTICOS DO CÁLCULO PARA A FÍSICA

UNIDADE 2 – NOÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL

O Cálculo Diferencial e a Física do Movimento: (1) Movimento Unidimensional: Para que os alunos entendam o conceito de velocidade instantânea é essencial que tenha entendido o conceito de velocidade média. Partindo da função posição $x(t)$ no instante t de um objeto que se move em linha reta, define-se a função *velocidade média* do objeto no intervalo de tempo $[t, t+\Delta t]$ por:

$$v_m(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Podemos interpretar a velocidade média no intervalo considerado como a taxa de variação média da função posição no intervalo de tempo dado. Graficamente esta razão incremental representa o coeficiente angular de uma reta secante *s* à curva da função posição contra o tempo, passando pelos pontos $P(t, x(t))$ e

$Q(t+\Delta t, x(t+\Delta t))$, conforme figura 20.

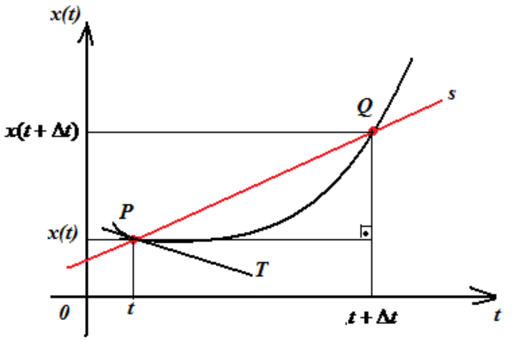


Figura20: Reta secante *s* à curva por *P* e *Q* e reta tangente *T* à curva no ponto *P*.

O que acontece nesta situação gráfica se o incremento Δt *ficar cada vez mais próximo de zero?* Nesta condição o ponto Q se deslocará sobre a curva $x(t)$ até ficar muito próximo do ponto *P*. Isto significa que a reta secante *s* se movimentará até tender à reta tangente à curva $x(t)$ no ponto *P*. Este processo de "tendência" é o que caracteriza o conceito de *limite*. Matematicamente não nos interessa o que acontece com a função $x(t)$ quando $x=t$, isto é, a função não precisa estar definida em $x=t$ para que exista o limite quando $\Delta t \to 0$. Fisicamente não há descontinuidades nas curvas posição, velocidade e aceleração em função do tempo. Podemos pensar na velocidade média num determinado intervalo de tempo e, fazer este intervalo diminuir cada vez mais (a partir do seu extremo direito), calculando novos valores das velocidades médias. Com isto, estaremos construindo uma sequência de valores que se aproxima cada vez mais do valor da velocidade do objeto no instante *t*.

Num curso de Cálculo avançado, ou num curso de Análise, a existência deste limite pode ser provada em termos de ε e δ. Nem mesmo no curso de Cálculo introdutório esta definição é ainda abordada, a não ser com uma visão geométrica da situação.

Assim podemos apresentar aos estudantes a definição de velocidade instantânea (ou taxa da variação instantânea da posição no instante *t*), enfatizando as diferentes notações possíveis.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad Notação: v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

Importante definir para os alunos a notação "delta". Por exemplo, Δx significa a variação da partícula no intervalo de tempo $[t \ , \ t+\Delta t]$. Consideramos que uma situação-problema muito interessante a ser apresentada aos estudantes nesta parte do conteúdo é a partir de uma função posição polinomial, solicitar que os estudantes calculem a velocidade média de um objeto que se move em linha reta em diferentes intervalos de tempo que vão diminuindo pelo extremo esquerdo e pelo extremo direito e são simétricos em relação ao instante central dos intervalos. Conhecendo os valores das diferentes velocidades médias, os estudantes podem ser questionados a indicarem qual será a velocidade instantânea do objeto no instante central do intervalo. Para a função polinomial escolhida (de grau três, por exemplo), pode-se mostrar analiticamente como calcular o valor desta velocidade instantânea pelo processo de limite, utilizando as regras matemáticas do Cálculo. Ambos os livros texto de Cálculo e de Física, no contexto investigado, são ricos em problemas desta natureza.

O mesmo raciocínio pode ser utilizado para os conceitos de aceleração média e aceleração instantânea, sendo que a ênfase é na função velocidade, e não mais na função posição. Assim definimos a aceleração média e a aceleração instantânea respectivamente por:

$$a_{méd}(t) = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}\ ;\ a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}\ ;\ a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = v'(t) = x''(t)$$

Pode-se mostrar para o estudante, através de uma função posição que torna a razão incremental mais difícil de ser resolvida pelo processo de limite, que torna-se importante conhecer algumas regras de derivação para o cálculo da velocidade instantânea ou, alternativamente, para facilitar o cálculo da aceleração instantânea. As regras mais básicas de derivação são *a derivada da constante*, *a derivada da soma de duas funções*, *a derivada da potência*, *as regras do produto e do quociente para derivadas*. Já que estamos trabalhando no contexto da Física é interessante que estas funções sejam apresentadas com o parâmetro t como variável independente.

Sejam as funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$, e seja a constante c, definimos:

1) Derivada da soma e da diferença de duas funções:

$$\frac{d}{dt}[f(t) \pm g(t)] = \frac{d}{dt}[f(t)] \pm \frac{d}{dt}[g(t)]$$

2) Derivada do produto de um escalar por uma função: $\frac{d}{dt}[cf(t)] = c\frac{d}{dt}[f(t)]$, $c \in \Re$

3) Derivada do produto de duas funções: $\frac{d}{dt}[f(t).g(t)] = \frac{d}{dt}[f(t)].g(t) + f(t).\frac{d}{dt}[g(t)]$

4) Derivada do quociente de duas funções: $\frac{d}{dt}\left[\frac{f(t)}{g(t)}\right] = \frac{g(t).\frac{d}{dt}[f(t)] - f(t).\frac{d}{dt}[g(t)]}{[g(t)]^2}$, $g(t) \neq 0$

5) Derivada de uma constante: $\frac{d}{dt}[c] = 0$

6) Derivada de uma potência: $\frac{d}{dt}[t^n] = nt^{n-1}$, $n \in \Re$

Outro tema importante para ser abordado nesta etapa é o entendimento do esboço do gráfico da função polinomial a partir *dos testes da primeira e da segunda derivadas*, mostrando aos alunos quando temos uma curva crescente, decrescente, côncava para cima ou côncava para baixo. É essencial que possam fazer as relações entre intervalos de crescimento e decrescimento e o sinal da derivada de primeira ordem, assim como relacionar a concavidade da curva com o sinal da segunda derivada. Pontos de máximo ou de mínimo ou pontos de inflexão surgem naturalmente num problema deste nível. Logicamente os alunos estarão relacionando os sinais das velocidades com os intervalos de crescimento ou decrescimento da função posição. Da mesma forma estarão relacionando os sinais da aceleração com a concavidade do gráfico da função posição. Esta interpretação é um processo complexo que requer o manuseio de vários tipos de situações.

(2) Movimento Bidimensional: neste caso as funções posição, velocidade e aceleração são grandezas vetoriais. Então se torna importante que o aluno entenda que o que acontece no caso unidimensional se repete para cada componente escalar das funções vetoriais. Duas situações-problema básicas para serem trabalhadas nesta parte são: *movimento de projéteis e movimento circular uniforme.*

Os princípios físicos que regem estes tipos de movimento como a independência dos movimentos horizontal e vertical no caso do movimento de projéteis ou o fato da velocidade escalar (ou magnitude do vetor velocidade) e o módulo da aceleração se manter constante no caso do movimento circular uniforme devem ser enfatizados, numa aula de Física, antes mesmo da apresentação das expressões matemáticas.

Um importante exercício mostrado aos estudantes foi, com base nas equações paramétricas do movimento de projéteis, reconstruí-lo na sua forma vetorial, a fim de dar sentido ao conteúdo sobre funções vetoriais, identificando conjuntos domínio e imagem, e enfatizando a diferença desta análise com a análise dos domínios naturais no contexto da Matemática. A partir do isolamento do parâmetro t na equação da componente x da posição e substituindo o resultado na equação da componente y da posição podemos mostrar que, de fato, a curva da função y contra x é uma curva parabólica. Pode ser feito um paralelo com o estudo sobre cônicas (especificamente parábolas) para relacionar conceitos matemáticos importantes. Outro importante paralelo a ser feito é com o experimento de projéteis desenvolvido no laboratório de ensino de física, onde os estudantes traçam retas que aproximam pontos experimentais no esboço do gráfico da posição contra o quadrado do parâmetro t.

Pode-se novamente utilizar a análise gráfica do Cálculo para encontrar as expressões matemáticas *para a altura máxima do projétil, para o seu alcance máximo e para o instante de tempo em que esta altura máxima é obtida*.

No caso do movimento circular uniforme, pode-se deduzir matematicamente a equação da função posição de uma partícula em torno de uma circunferência, aplicar a derivada de primeira ordem para obter o vetor velocidade, mostrar geometricamente como se representa este vetor. Da mesma forma pode-se deduzir a equação da aceleração vetorial derivando o vetor velocidade, inclusive apresentá-la em termos das suas componentes tangencial e radial.

Para mostrar aos estudantes como funcionam as regras de derivação pode-se, a partir da equação posição para um objeto em movimento retilíneo uniformemente acelerado, derivá-la, aplicando passo a passo as propriedades da derivada, e mostrar a expressão resultante para a velocidade.

Outra interpretação muito importante do conceito de derivada é a que se refere ao coeficiente angular da reta tangente à curva apresentada. Então, conhecida a função posição de uma partícula em movimento retilíneo, pode-se calcular sua velocidade instantânea num instante qualquer, esboçar o gráfico da curva representativa da função posição e mostrar aos estudantes que a velocidade obtida representa o coeficiente angular da reta tangente à curva posição no ponto específico da curva.

No Cálculo, é comum que os estudantes obtenham a equação da reta tangente a uma dada curva, sendo fornecidos o ponto e a função. Assim, se $y = f(x)$ e o ponto pertencente à curva é $P(a, f(a))$, definimos a equação da reta tangente à curva no ponto dado por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Se transferirmos este resultado para o contexto da Cinemática teremos uma função posição $x = x(t)$ e o ponto $P(a, x(a))$. Temos que: $x - x(a) = x'(a)(t - a)$. Considerando que $v = x'(t)$ é a função velocidade para a partícula, o valor $x'(a) = v_a$ representa a velocidade da partícula no instante $t = a$. Considerando que $x(a) = x_a$ é a posição da partícula no instante $t = a$, obtemos a seguinte equação:

$$x - x_a = v_a(t - a) \Leftrightarrow x = x_a - v_a a + v_a t$$

Podemos mostrar aos estudantes que no ponto $P(0, x(0))$ a equação da reta tangente se transforma em: $x = x_0 + v_0 t$, a qual representa a função posição de uma partícula em movimento retilíneo uniforme, dada sua posição inicial x_0 e sua velocidade inicial v_0. No entanto, para movimentos retilíneos mais genéricos, esta é a equação da reta tangente à curva posição contra o tempo no instante qualquer considerado.

São exercícios que podem ser feitos no sentido de mostrar aos estudantes as relações entre a Matemática e a Física, e como os conceitos matemáticos são importantes para a operacionalidade de tais situações físicas.

A partir destas discussões apresentamos aos alunos as equações cinemáticas para objetos que se movem ao longo de uma curva no plano:

Vetor posição (ou raio vetor): $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

Vetor deslocamento do ponto P para o ponto Q: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

Quando o ponto *Q* tende ao ponto *P* ao longo da curva, o vetor $\Delta\vec{r}$ tende ao vetor tangente à curva (trajetória) no ponto *P*. Definimos:

Velocidade: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j}$ $\Leftrightarrow$ *Notações:* $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t)$

Aceleração: $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = v'_x(t)\hat{i} + v'_y(t)\hat{j}$ *ou* $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = x''(t)\hat{i} + y''(t)\hat{j}$ $\Leftrightarrow$ *Notações:* $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Velocidade Escalar (rapidez): $v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$

Situações-problema apresentadas: As situações-problema indicadas procuram refletir as diferentes notações e linguagens adotadas nos dois domínios: da Física e do Cálculo, respectivamente, para um mesmo conceito. Esta estratégia busca auxiliar o estudante na construção, diferenciação e elaboração dos conceitos subsunçores, de forma integrada.

Segundo Novak (2000) a organização hierárquica do conhecimento na estrutura cognitiva do estudante depende do contexto em causa, e uma característica extraordinária do intelecto humano é que pode utilizar os mesmos conceitos em muitos contextos e hierarquias diferentes (ibid. p.20).

1) A posição de uma partícula movendo-se ao longo do eixo *x* é dada por $x(t) = 9{,}75 + 1{,}50t^3$ onde t é dado em segundos. Tome x em centímetros. Calcule a velocidade média nos seguintes intervalos de tempo (simétricos em relação à $t = 3{,}00s$): (a) *2,00s a 4,00s*; (b) *2,50s a 3,50s*; (c) *2,75s a 3,25s*; (d) *2,90s a 3,10s;* e (e) *2,95s a 3,05s.* (f) Mostre que, para esta partícula, a velocidade instantânea (em *cm/s*) é dada por $v = 4{,}50t^2$. Calcule a velocidade instantânea para $t = 3{,}00s$. (g) Agora, considere uma partícula movendo-se em movimento retilíneo uniformemente variado, segundo a equação $x = 9{,}75 + 1{,}50t^2$ e determine a velocidade média nos intervalos de tempo *2,00s a 4,00s* e (h) *2,50s a 3,50s;* (i) Calcule também a velocidade instantânea para $t = 3{,}00s$; (j) Calcule ainda, para este caso, a média das velocidades instantâneas para $t = 2{,}00s$ e para $t = 4{,}00s$. Quais são as conclusões que você pode tirar dos resultados[91]?

2) Sob hipóteses apropriadas, a função posição de um objeto largado do alto do Empire State Building, de uma altura de 1250 pés acima do nível da rua, pode ser modelada pela função posição $s = f(t) = 1250 - 16t^2$. Aqui, $f(t)$ é medido em pés acima do nível da rua e t, em segundos depois de ser largado o objeto (Anton, Bivens e Davis, 2007, p.181): (a) Encontre a função velocidade do objeto pelo processo do limite; (b) Enconte o intervalo de tempo ao longo do qual vale a função velocidade; (c) Qual é a velocidade do objeto ao atingir o nível da rua?

[91] Exercício encontrado em: http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01200/exercicios-pre-fisica.pdf.

TABELA 10: UNIDADE 3 – NOÇÕES DO CÁLCULO INTEGRAL

Começamos falando na *integral indefinida*, explicando aos estudantes que a *integração* é o processo de encontrar *antiderivadas*, também conhecido como *antiderivação* ou *antidiferenciação*. Procuramos fazer isto utilizando notações do contexto da física, basicamente considerando o parâmetro tempo *t* como a variável independente nas funções escalares consideradas.

O pressuposto fundamental no processo da antidiferenciação é que: uma dada função $F(t)$ será uma antiderivada da função $f(t)$ num dado intervalo se $F'(t) = f(t)$ para cada *t* no intervalo considerado. No contexto da Mecânica, em geral, trabalhamos com funções escalares contínuas dentro dos reais, o que facilita a aplicação de resultados do Cálculo.

De forma simples podemos perguntar aos estudantes: qual é a função que quando derivamos resulta, por exemplo, em $f(t) = t^3$ *? Em geral eles não têm dificuldades em indicar antiderivadas de funções que representam uma potência de* t.

Podemos mostrar, então, que $F(t) = \frac{1}{4}t^4$ é uma antiderivada de $f(t) = t^3$, pois $F'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4}t^4\right] = \frac{1}{4}4t^{4-1} = t^3 = f(t)$.

O que é mais difícil para o estudante perceber num primeiro momento é que esta não é a única antiderivada da função $f(t)$. Para qualquer constante $C \in \Re$, a função $G(t) = F(t) + C$ é uma "*família de antiderivadas*" da função $f(t)$, pois quando derivamos a função $G(t)$ obtemos a função $f(t)$.

Observamos que a operação da antidiferenciação (ou integração) é a operação inversa da diferenciação. Denotamos isto da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}[F(t)] = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

No contexto da Cinemática, resultados fundamentais surgem.

$$\frac{d}{dt}[x(t)] = v(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int v(t)dt = x(t) + C$$

$$\frac{d}{dt}[v(t)] = a(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int a(t)dt = v(t) + C$$

Isto é, conhecida a função posição e uma condição inicial para a função velocidade pode-se obter a função velocidade pelo método da diferenciação. Ou, alternativamente, conhecida a função velocidade e uma condição inicial para a função posição podemos obter a função posição pelo método da integração.

Torna-se importante salientar aos estudantes que, desde que conhecidas algumas regras básicas de diferenciação, facilmente pode-se obter as regras equivalentes de integração. As mais básicas são:

1) $\frac{d}{dt}[t] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int 1dt = \int dt = t + C$

2) $\frac{d}{dt} = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right] = t^n \quad \Leftrightarrow \quad \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \text{ para } n \neq -1$

3) $\frac{d}{dt}[e^t] = e^t \quad \Leftrightarrow \quad \int e^t dt = e^t + C$

4) $\frac{d}{dt}[sent] = \cos t \quad \Leftrightarrow \quad \int \cos t dt = sent + C$

5) $\frac{d}{dt}[-\cos t] = sent \quad \Leftrightarrow \quad \int sentdt = -\cos t + C$

Algumas propriedades consideradas básicas:

6) $\int kf(t)dt = k\int f(t)dt = kF(t) + C$

7) $\int [f(t) \pm g(t)]dt = \int f(t)dt \pm \int g(t)dt = F(t) \pm G(t) + C$

Outro tópico muito importante dentro da teoria da integração diz respeito ao ponto de vista das equações diferenciais, em *problemas de valores iniciais:* conhecida a função $f(t)$ e o valor da função $y = F(t)$ no instante t_0, isto é, $y(t_0) = y_0$, queremos encontrar a função $y = F(t)$. Isto é: *dada a derivada de uma função queremos obter a função, a partir de* *condições iniciais.*

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \text{ onde } y(t_0) = y_0$$

Uma importante abordagem da teoria da integração é para o cálculo da função velocidade e da posição de uma partícula em movimento uniformemente acelerado, desde que se conheça o valor constante da aceleração e condições iniciais para a velocidade e a posição num dado instante.

Geralmente os livros texto de Física apresentam esta abordagem como alternativa, o que é facilmente justificado, já que, em geral, os alunos não dispõem dos conhecimentos prévios na área do Cálculo Diferencial e Integral.

Senão vejamos no *movimento retilíneo uniformemente variado a aceleração é constante,* denotada por a. Suponha que no instante $t = 0s$ temos que a posição inicial é x_0 e a velocidade inicial é v_0. Então, pelo método da integração:

$v(t) = \int a(t)dt = \int adt = a\int dt = at + C_1$. Como em $t = 0s$ temos que:

$$v(0) = a(0) + C_1 = v_0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = v_0 \quad \Leftrightarrow \quad v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (v_0 + at)dt = \int v_0 dt + \int atdt = v_0 \int dt + a\int tdt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C_2$$

$$x(0) = 0 + 0 + C_2 = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Segue outro exemplo de problema de valor inicial para o contexto da Física apresentado (e pouco desenvolvido pelos professores) nos livro-texto de Cálculo. Apesar de não ser uma situação específica da Mecânica é um ótimo exemplo para ser desenvolvido com os estudantes.

Situação-problema: A velocidade do som no ar a *0°C* (*273k*, na escala Kelvin) é *1087 pés por segundo,* mas a velocidade *v* aumenta à medida que a temperatura *T* sobe. Experimentos mostraram que a taxa de variação de *v* em relação a *T* é dada pela expressão (Anton, Bivens e Davis, 2007, p.365)*:*

$$\frac{dv}{dT} = \frac{1087}{2\sqrt{273}} T^{-1/2}$$

Encontre a fórmula que expresse *v* como função de *T* sabendo que *v* está em *pés/s* e T em Kelvin (k).

O próximo passo do módulo da integração é definir *a integral definida* de uma função $f(t)$ no intervalo de $t = a$ até $t = b$ como o *limite de uma soma de Riemann*:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f({t_k}^*)\Delta t_k$$

É essencial que esse processo de limite possa ser explicado graficamente para o estudante em termos da partição do intervalo em subintervalos menores, e da construção da Soma de Riemann correspondente à partição. No entanto, a meta mais importante para o contexto da Física neste momento (anterior ao caso do *trabalho de uma força variável*) talvez seja a interpretação geométrica da integral definida como a *área líquida com sinal* da região limitada superiormente pelo gráfico da função $f(t)$, abaixo pelo eixo t, e lateralmente pelas retas $t = a$ e $t = b$. O processo da partição do intervalo pode ser retomado no conceito físico de *trabalho*.

Esta *área com sinal* significa que vamos fazer uma diferença entre áreas: a soma das áreas das regiões que estão acima do eixo das abscissas menos a soma das áreas das regiões que estão abaixo do eixo das abscissas. Neste caso podemos obter um valor negativo, desde que tenhamos a maior região abaixo do eixo das abscissas. O valor nulo será obtido quando as regiões acima e abaixo do eixo das abscissas são simétricas.

No contexto da Cinemática, quando calculamos a integral definida de $t = a$ até $t = b$ da função velocidade de uma partícula em movimento retilíneo, por exemplo, obtemos o deslocamento da partícula no intervalo dado. Se calcularmos a integral definida do módulo da função velocidade, vamos obter a distância total percorrida pela partícula.

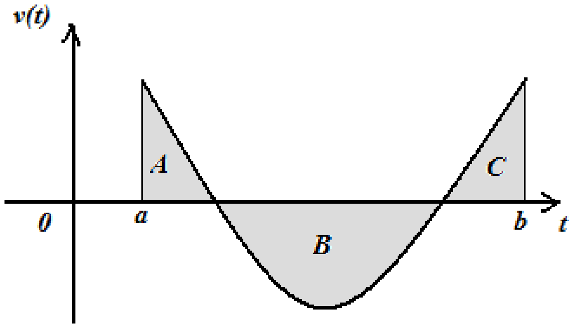


Figura 21: Regiões limitadas pela curva velocidade.

$$\textit{Deslocamento de} \quad t = a \ \text{até} \ t = b: \ \Delta x = \int_a^b v(t)dt = (\text{área A} + \text{área C}) - \text{área B}$$

$$\textit{Distância percorrida de} \ t = a \ \text{até} \ t = b: \ d = \int_a^b |v(t)|dt = \text{área A} + \text{área B} + \text{área C}.$$

A resolução analítica de uma integral definida se dá através do *teorema fundamental do cálculo* que nos diz*: a integral definida de uma função num dado intervalo é igual a sua antiderivada aplicada no extremo superior do intervalo menos a sua derivada aplicada no extremo inferior do intervalo.* Denotamos por:

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Outro ponto interessante a ser tratado é com relação às diferenças entre uma *integral indefinida* e uma *integral definida*. Na integral indefinida obtemos como resultado a função antiderivada acrescida de uma constante de integração. Na integral definida obtemos como resultado um valor constante (um número real). No entanto, existe uma forte relação entre elas. Podemos dizer que:

$$\left[\int f(t)dt\right]_a^b = \int_a^b f(t)dt$$

Para os casos bidimensional ou tridimensional as integrais de funções vetoriais são realizadas componente a componente, onde o resultado também são funções vetoriais. Por exemplo:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}(t)] = \vec{v}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int \vec{v}(t)dt = \vec{r}(t) + \vec{c}$$

Uma situação-problema interessante foi proposta a partir do livro texto de Física:

Situação-problema: Dada a função aceleração de uma partícula em movimento bidimensional, $\vec{a}(t) = (3t)\hat{i} + (4t)\hat{j}$, e sabendo que em $t = 0$ a posição da partícula é dada por $\vec{r}_0 = 20\hat{i} + 40\hat{j}$ e sua velocidade é $\vec{v}_0 = 5{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j}$, obtenha a posição da partícula no instante $t = 4{,}0s$. A posição é dada em metros, o tempo em segundos e a velocidade em metros por segundo (Halliday, Resnick e Walker, 2008, p.85). Neste caso:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt = \int [(3t)\hat{i} + (4t)\hat{j}]dt = \left(\int 3tdt\right)\hat{i} + \left(\int 4tdt\right)\hat{j} = \left(\frac{3}{2}t^2\right)\hat{i} + \left(2t^2\right)\hat{j} + \vec{c}$$

$$\vec{v}(0) = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \vec{c} = 5{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c} = 5{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + 5{,}0\right)\hat{i} + \left(2t^2 + 2{,}0\right)\hat{j}$$

Obtida a função velocidade podemos repetir o processo para obter a função posição e responder à questão do problema.

Outra situação-problema muito interessante a ser discutida com os alunos é que, dado o gráfico da função velocidade, por exemplo, cuja região é limitada por uma poligonal (os contornos são retas) pode-se obter o valor da função posição em diferentes instantes de tempo, com base no cálculo da área líquida com sinal sob o gráfico da curva. Quando a região é poligonal não é difícil obter o valor da área.

Outra importante situação a ser discutida é um problema de valor inicial, especificamente para uma bola lançada para cima com uma dada velocidade inicial, a partir de uma altura inicial. Pode-se encontrar a função posição que representa a altura em função do tempo. Também se pode calcular o instante em que a bola atinge o solo.

A fim de recapitular propriedades fundamentais do movimento circular uniforme podemos mostrar aos alunos como determinar a velocidade vetorial escalar e a aceleração vetorial escalar de uma partícula em movimento, conhecidas as coordenadas horizontal e vertical da sua posição. O objetivo é mostrar que os vetores velocidade e aceleração são perpendiculares entre si. No contexto da Matemática isto implica num produto escalar nulo entre os dois vetores. No contexto da Física este resultado tem fortes implicações para o conceito de força centrípeta e para a dinâmica de movimentos circulares.

6.2. Sobre o contexto investigado:

A disciplina: Física Geral I A - (2011/1), turma: B; horários: 2ª, 4ª e 6ª das 15h30min até 17h30min.

Objetivo da disciplina: estudar a Mecânica Newtoniana de partículas ou corpos rígidos sob a ação de forças.

Livro texto recomendado: Halliday/Resnick/Walker – Fundamentos de Física – LTC; 8ª edição.

Conteúdo Programático: Unidade I: dinâmica, estática, cinemática do movimento de translação (capítulo 1 até 6); Unidade II: energia, trabalho e leis de conservação (capítulos 7, 8 e 9); Unidade III: movimento de rotação e princípio de conservação do momento linear (capítulos 10 e 11).

Sistema avaliativo: baseado nas notas de três provas, uma para cada área de ensino. A nota final é a média aritmética das três. Em cada área o aluno terá que ter nota mínima 3,0 na prova. Se tiver mais de uma nota 3,0 será considerado reprovado. O aluno poderá recuperar a menor nota entre as três, através de uma prova realizada ao final do semestre, desde que tenha a frequência mínima exigida em aula (75%). Os conceitos finais serão definidos da seguinte maneira: *A* para notas maiores ou iguais a 9,0; *B* para notas maiores ou iguais a 7,5 e menores do que 9,0; *C* para notas maiores ou iguais a 6,0 e menores do que 7,5; *D* para notas menores do que 6,0 (reprovação); e, *FF* se a reprovação for por frequência.

Um questionário aplicado: A fim de obter informações sobre os conhecimentos prévias dos estudantes, o professor aplica, no primeiro dia de aula, um questionário com as seguintes questões: *nome; e-mail; já cursou esta cadeira? Se sim, em que semestres? Qual o seu curso na UFRGS? Indique quais dos seguintes conceitos ou tópicos da Mecânica você estudou no Ensino Médio: força resultante, diagrama de forças, 2ª lei de Newton do movimento, força normal, força peso, força de atrito, força centrípeta, momentum linear; Você prefere começar a Mecânica com a Cinemática (tradicional) ou, alternativamente, com as leis de Newton (Dinâmica)? Indique pelo menos um período de uma hora que você disporia para* *comparecer ao Campus para porventura, aulas extras; você tem algum impedimento para estar no Campus em segundas ou quartas, entre 17h30min e 18h30min?*

O levantamento do questionário: 35 alunos responderam o questionário. Destes, 31 nunca cursaram a cadeira; três cursaram duas vezes na UFRGS, um cursou uma vez na UFRGS e duas vezes em outra Instituição particular de Ensino. Dentre os cursos: um é da Licenciatura em Física Noturna, quatro são da Licenciatura em Física, dez são da Física Computacional, cinco são da Astrofísica, nove são da Física Teórica, um é das Ciências Econômicas e seis do Bacharelado em Materiais e Nanotecnologia.

Conhecimentos prévios dos alunos: Como já discutimos no referencial teórico da pesquisa, na perspectiva de Ausubel (1963, 2000) os conhecimentos prévios são essenciais para o processo da aprendizagem significativa. Nesta "bagagem cognitiva" estará contido aquele conhecimento relevante (também denominado "conceito subsunçor") que funcionará como um "ancoradouro" para a aprendizagem dos novos conteúdos, num processo de interação entre estes novos conteúdos e o conhecimento já contido na estrutura cognitiva. Neste sentido, os conhecimentos prévios indicados pelo professor no questionário são necessários para a aprendizagem significativa dos novos conceitos da disciplina. "Conhecer o que o aluno já sabe" é bastante difícil, especialmente em ensinos tradicionais, com turmas "massivas". Moreira (2006) se refere "um mapeamento cognitivo" como forma de decifrar este conhecimento. No entanto, o questionário elaborado pelo professor é uma válida tentativa de sondar o nível de conhecimentos anteriores dos estudantes.

Dentre os respondentes, trinta já conheciam o conceito de força resultante, dezesseis sabiam o que é um diagrama de forças, vinte e sete conheciam a 2ª lei de Newton do movimento, trinta conheciam o conceito de força normal, trinta e um o conceito de força peso, trinta tinham noção do que se trata a força de atrito, vinte e dois conheciam o conceito de força centrípeta e dezoito sabiam o que é o momentum linear (quantidade de movimento). Observamos que menos da metade dos alunos sabem o que é um diagrama de forças, e apenas a metade deles sabem o que é o momentum linear.

Temos enfatizado, ao longo da tese, que no caso do aluno não dispor de conceitos subsunçores para a aprendizagem dos novos conceitos, uma alternativa é ajudá-los a construir estes conceitos. Essa parece ser a intenção do professor e uma boa medida para um ensino direcionado para uma aprendizagem significativa.

A participação dos alunos na escolha do método: Outro ponto importante a ser discutido é a participação dos alunos quanto ao tema a ser introduzido inicialmente nas aulas: a *Cinemática* ou *Dinâmica*. Percebemos que, na sua fala, o professor motiva os alunos a optarem pela Dinâmica, sendo que vinte e dois concordam com ele, contra treze alunos que preferem iniciar pela Cinemática.

Com relação à opção entre iniciar pela Cinemática ou pela Dinâmica o professor comenta, ao entregar o questionário aos alunos: *"A Cinemática não contém muita Física, pois não se importa com as causas do movimento. O centro da Dinâmica são as leis de Newton".* Também explica: "*Ainda não temos monitor para a disciplina"*.

Observa-se no contexto investigado um forte debate entre professores e estudantes quanto à ênfase exagerada da Cinemática, nas aulas de Física introdutória. Eis alguns relatos: *"Talvez a Cinemática devesse ser trabalhada no contexto da disciplina do Cálculo, já que é a pura descrição matemática do movimento. Assim sobraria mais tempo para discutir a Física (aluno de pós-graduação em Ensino de Física)"; "Não é necessário perder muito tempo nas aulas com o desenvolvimento dos conteúdos sobre vetores e Cinemática que já foram trabalhados no Ensino Médio. Quanto à articulação entre o Cálculo e a Física, nem sempre é possível, apenas em algumas partes do conteúdo (professor do Instituto de Física)".*

Hewitt (2002) afirma: *"Com muita frequência, a Cinemática domina a "parte do leão" de um curso introdutório de Física, constituindo-se no "buraco negro" do ensino de Física; gasta-se muito tempo para obter-se muito pouco. Para um curso que busca a compreensão dos conceitos, isso é um absurdo, pois os conceitos de rapidez, velocidade e aceleração dificilmente são o que há de mais excitante a oferecer no seu curso (ibid. p.xv)".*

Neste sentido, começar um curso introdutório de Mecânica pela Cinemática pode sobrecarregar a disciplina com conceitos matemáticos que não devem ser introduzidos anteriormente aos conceitos físicos. No contexto da Física, a Matemática deve exercer um papel de subordinação, de representação simbólica e abstrata frente às situações físicas. Isto é, o papel da Matemática fica evidente quando o estudante tem que operacionalizar os conceitos físicos com que se depara quando tem que lidar com uma situação-problema.

6.3. Sobre a forma como os módulos matemáticos foram inseridos

TABELA 11: Síntese do conteúdo desenvolvido e das categorias analisadas

Conteúdo desenvolvido	Categorias analisadas
- Introdução à Mecânica: definição de movimento, definição de Mecânica, classificação da Mecânica dentro da Física.	(1) A *Mecânica Clássica* e a linguagem do Cálculo.
- Definições: partícula, corpo, densidade, corpo rígido, referencial, sistema de coordenadas, sistema mecânico e vizinhança. – Tipos de movimentos de corpos rígidos: translação pura, rotação pura, movimento combinado de rotação e translação (rolamento).	(2) A Abstração Matemática do *Modelo da Partícula*.
- Sistemas de unidades: grandezas dimensionais, grandezas adimensionais, unidades básicas do sistema internacional, conversão de unidades, homogeneidade dimensional das equações físicas.	(3) O significado das equações físicas.
- Definições das grandezas básicas da Mecânica: posição, deslocamento, velocidade e aceleração (grandezas Cinemáticas); massa, momentum linear, força, força resultante, força centrípeta (grandezas Dinâmicas).	(4) As primeiras noções de funções vetoriais.
- Definição do conceito de velocidade: na sua forma intuitiva, velocidade média, velocidade escalar média, velocidade instantânea (em 1 e 2 dimensões), aceleração média, aceleração instantânea.	(5) As primeiras noções da derivada.
- Momentum linear ou quantidade de movimento de translação, leis de força: força gravitacional, força norma, força centrípeta, força de atrito de escorregamento, tração ou tensão, 1ª lei de Newton.	(6) Os princípios que regem a Dinâmica.
- Força resultante, 2ª lei de Newton, 3ª lei de Newton.	(7) O processo do limite através do Cálculo Diferencial.
- Equilíbrio estático e dinâmico.	(8) Derivadas nulas no contexto da Mecânica.
- 1º Modulo Matemático para a Física: Vetores e Trigonometria. Vetores no contexto da Física; representação gráfica e analítica; operações de multiplicação por escalar; soma e subtração pelo método gráfico e analítico; decomposição de vetores; cálculo do módulo e do ângulo de orientação; resolução de exercícios.	
- Forma geral da 2ª lei de Newton, considerando a massa variável e considerando a massa constante.	(9) Do geral para o específico.
- 2º Módulo Matemático para a Física: Noções do Cálculo Diferencial para funções escalares e funções vetoriais. O Cálculo Diferencial e a Física do Movimento; movimento unidimensional: da interpretação geométrica do conceito de velocidade instantânea a partir do conceito de velocidade média até a construção da definição envolvendo o processo do limite; as regras mais básicas de derivação; noções básicas para o movimento bidimensional; interpretação geométrica dos vetores posição, velocidade e aceleração; ilustrações através dos exemplos do movimento de projéteis e do movimento circular uniforme; discussão em torno dos valores máximos e mínimos das curvas representativas de grandezas físicas; resoluções de exercícios.	
- Primeiro esquema geral da Mecânica Newtoniana apresentado pelo professor; equação da trajetória da	(10) Da Física para o Cálculo e do Cálculo para a Física

curva parametrizada pelo tempo;	
- Cinco movimentos simples, mas notáveis: o movimento retilíneo uniforme (MRU); o movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV); o movimento balístico; movimento circular uniforme (MCU); movimento circular uniformemente variado (MCUV).	(11) Análise do movimento a partir da Dinâmica.
- Força de arraste; interpretação física e cálculo da velocidade terminal; movimento relativo.	(12) Equações Diferenciais no contexto da Mecânica.
- 3º Módulo Matemático para a Física: Noções do Cálculo Integral para funções escalares e funções vetoriais. A antidiferenciação como processo inverso da diferenciação; integral indefinida; resultados fundamentais para a Cinemática; "família" de antiderivadas; problemas de valores iniciais; propriedades; interpretação geométrica (distância total percorrida e deslocamento); construção das equações do movimento retilíneo uniformemente variado pelo método da integração; a integral definida, interpretação geométrica como "área com sinal"; o teorema fundamental do Cálculo para integrais; integração de funções vetoriais.	
- Trabalho e energia cinética: **definição do produto escalar** entre dois vetores, *trabalho* realizado por uma força constante, trabalho realizado por uma força variável, força elástica da mola; teorema do trabalho e energia cinética.	(13) O processo do limite através do Cálculo Integral.
- Potência média e potência instantânea; 2º esquema da Mecânica Newtoniana apresentado pelo professor.	(14) Funções compostas no contexto da Mecânica.
- Energia potencial e conservação da energia; forças conservativas; o sistema massa mola.	(15) Valores Máximos e Mínimos no contexto da Mecânica.
- Centro de Massa; dinâmica do centro de massa; impulso; momentum; teorema do impulso-momentum; colisões; **definição de produto vetorial**; dinâmica da rotação; momento de inércia; Dinâmica da rotação.	(16) Integrais Múltiplas no contexto da Mecânica.

6.4. Análise das Relações entre o Cálculo I e a Física I

Aula do dia 11/03/2011: O professor dá uma introdução à Mecânica, definindo-a como a parte da Física que estuda o movimento dos corpos. Define *movimento* como a mudança de posição no espaço. Apresenta a divisão da Mecânica em: *Mecânica de Aristóteles* (intuitiva, baseada na observação direta dos fatos), *Mecânica Clássica* (começou com Galileu e Newton) e *Mecânica Quântica* (do século XX, mecânica dos objetos microscópicos – de nível atômico). Dentro da Mecânica Clássica temos a *versão não relativística* (século XVII – versão Newtoniana 'vetorial', versão Lagrangeana, versão Hamiltoniana e versão de Hamilton-Jacobi) e a *versão relativística* (teoria da Relatividade de Einsten). Dentro da Mecânica Quântica temos a *versão de Heisenberg* (1925), a *versão de Schrödinger* (1926 'mecânica ondulatória'), e *versão de Dirac* (1929).

6.4.1. A Mecânica Clássica e a linguagem do Cálculo

A classificação fornecida pelo professor torna-se essencial para contextualizar o assunto físico abordado na disciplina historicamente. Particularmente quando cita as versões não relativísticas da Mecânica Clássica, onde os conceitos do Cálculo podem ser enfatizados.

Após esta classificação o professor define alguns conceitos considerados básicos: *partícula:* ponto material, onde ponto representa um conceito matemático – sem dimensão – com volume zero, e material significa que é dotado de massa (na prática é uma idealização); *corpo:* massa ocupando um volume finito do espaço; *densidade de um corpo:* conceito associado ao conceito de corpo; *corpo rígido:* corpo cujo volume e forma não mudam no transcorrer do tempo; *referencial:* um corpo qualquer escolhido como referência; *sistema de coordenadas ou sistema de referência:* conjunto de variáveis (coordenadas) que representa a posição do corpo ou partícula em relação a um referencial escolhido, exemplos: sistema de coordenadas cartesianas e sistemas de coordenadas esféricas (neste caso o professor exemplifica calculando os ângulos referentes à latitude e longitude de nós mesmos, situados na cidade de Porto Alegre, em relação ao centro da Terra); *sistema mecânico:* conjunto de *N* corpos e/ou partículas que foi arbitrariamente definido; *vizinhança:* é tudo que não pertence ao sistema definido e interage com ele.

O professor classifica três tipos de movimentos de corpos rígidos: *translação pura:* todos os pontos do corpo rígido realizam deslocamentos idênticos em um mesmo intervalo de tempo (o exemplo é o de uma chapa de aço num formato retangular que se desloca num intervalo de tempo qualquer); *rotação pura:* todos os pontos do corpo rígido realizam um mesmo giro em um dado intervalo de tempo (mesmo ângulo de giro – a mesma chapa gira em torno de um eixo fixado num dos seus vértices) em um dado tempo; *movimento combinado de translação e rotação:* (o professor exemplifica com a “cicloide”).

6.4.2. A abstração matemática do modelo da partícula

As primeiras relações entre o Cálculo e a Física começam a surgir a partir da idealização de uma partícula como um ponto material dotado de massa. Corpos rígidos, num primeiro momento, serão tratados como partículas (quando não estivermos interessados no movimento de partículas internas ao corpo). A partir desta idealização de uma situação real, podemos abstrair matematicamente a localização desse ponto no espaço em sistemas de coordenadas que possam ser considerados ideais para cada situação considerada. Para alunos ingressantes o sistema conhecido é o sistema de coordenadas cartesianas. Em geral, sistemas de coordenadas esféricas, polares ou cilíndricas serão enfatizados na segunda etapa dos seus cursos de graduação. A análise do movimento sempre será feita em relação a outro ponto material onde, supostamente, a origem do sistema estará fixada.

A primeira relação funcional que surge é o *conceito de movimento* como a mudança da posição no tempo. Temos então a posição (uma grandeza vetorial) que depende do tempo (uma grandeza escalar). Esta é outra diferença básica entre a Matemática e a Física. Enquanto na Matemática relacionamos variáveis como entidades puramente matemáticas, no contexto da Física, devemos atribuir-lhes um significado. No caso, variáveis são grandezas físicas, denotadas por um número e uma unidade (se forem grandezas escalares) ou por um vetor e uma unidade (se forem grandezas vetoriais). *Vetor* é um conceito matemático ao qual está relacionado um módulo, uma direção e um sentido para que possa ser caracterizado. No contexto da Física tais caracterizações são extremamente importantes por definirem a intensidade de uma grandeza vetorial e sua orientação no espaço. Uma implicação básica para o ensino do Cálculo para físicos é apresentar, no contexto da análise vetorial, vetores como entidades físicas, considerando o caso de vetores cujas componentes são constantes como uma particularidade de um caso mais geral, onde as componentes podem variar com o tempo.

<u>*Aula do dia 16/03/2011:*</u> O professor inicia o primeiro capítulo falando sobre sistemas de unidades. *Grandezas dimensionais* são representadas por um número seguido de uma unidade; *grandezas adimensionais* são representadas apenas por número, sem unidade.

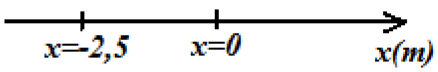
No sistema internacional de unidades (SI) as unidades básicas são: *tempo (1 s), massa (1 kg), comprimento (1 m)* (estas são grandezas do subsistema de unidades mecânicas); *corrente elétrica (1 A - ampère), temperatura absoluta (1 K - kelvin), quantidade de substância (mol) e intensidade luminosa: cd (candela).* As principais unidades derivadas são: *velocidade (m/s), aceleração* (m/s^2), *densidade* (kg/m^3). Após, o professor define *segundo, quilograma e metro.* Fala em *notação científica e nos prefixos* utilizados na apresentação de resultados numéricos. Alguns exercícios são para *conversão de unidades* e a *homogeneidade dimensional das equações da Física* é enfatizada: em toda equação física, os dois lados da igualdade, assim como cada termo aditivo ou subtrativo em qualquer um dos lados, devem ter a mesma unidade.

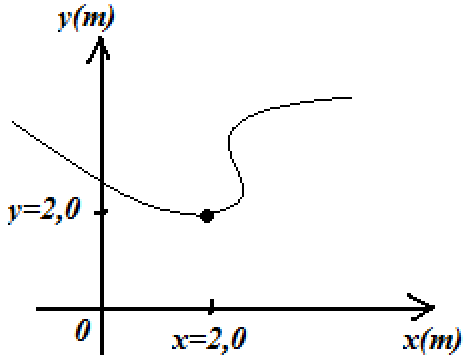
6.4.3. O significado das equações físicas

A partir da interpretação do significado de variáveis, grandezas escalares e grandezas vetoriais no contexto da Física, outra importante forma de apresentação da Matemática no contexto da Física são as equações físicas. Enquanto que no contexto da Matemática elas são apenas expressões que relacionam variáveis de forma explícita ou implícita, no contexto da Física, além de relacionar grandezas físicas de forma explícita ou implícita, cada lado da igualdade deve preservar a mesma unidade. Assim, termos constantes ou constantes que antecedem grandezas físicas numa equação, subentendem unidades físicas, que quando manipulada devem preservar a unidade principal. Isto requer uma análise minuciosa da expressão. Na disciplina de Cálculo para físicos isto pode ser enfatizado ao serem apresentadas, como exemplo de funções, relações físicas básicas como: a lei da gravitação universal de Newton, a equação da posição de uma partícula em queda livre, etc.

<u>*Aula do dia 18/03/2011*</u>*:* O professor define as grandezas básicas da Mecânica Newtoniana: *posição*, *deslocamento*, *velocidade e aceleração* (grandezas Cinemáticas). *Massa, momentum linear, força, força resultante, força centrípeta* serão definidas como as grandezas mais básicas da Dinâmica. Na tabela 12 segue a forma como os conceitos de posição e deslocamento foram apresentados aos estudantes.

<u>TABELA 12</u>: REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICA E ANALÍTICA DOS CONCEITOS DE POSIÇÃO E DESLOCAMENTO PROPOSTOS PELO PROFESSOR.

POSIÇÃO	
No movimento unidimensional (1D) *Notação:* $x(t)$ é a posição instantânea da partícula. Ex: $x(t=1s)=-2{,}5m$ 	*No movimento bidimensional (2D)* *Notação:* $(x(t), y(t))$ é a posição instantânea da partícula, também denominada raio vetor ou vetor posição da partícula no instante t, representado por $\vec{r}(t)=(x(t), y(t))$. Ex: $(x(t=1s), y(t=1s))=(2{,}0m\,, 2{,}0m)$

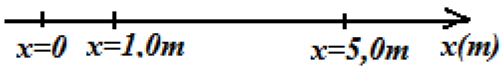
<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESLOCAMENTO</td></tr>
<tr><td>

No movimento unidimensional (1D)

Notação: $\Delta x(t_1,t_2)=x(t_2)-x(t_1)$ é a variação da posição da partícula entre os instantes t_1 e t_2.

Ex:

$\Delta x(t_1,t_2)=x(t_2)-x(t_1)=5{,}0m-1{,}0m=4{,}0m$



</td><td>

No movimento bidimensional (2D)

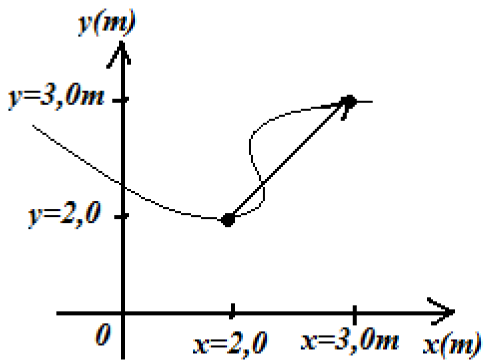
Notação:

$\Delta\vec{r}=(x(t_2),y(t_2))-(x(t_1),y(t_1))$ ou

$\Delta\vec{r}(t_1,t_2)=\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)$

Ex:

$\Delta\vec{r}=(3{,}0m\,,3{,}0m)-(2{,}0m\,,2{,}0m)=(1{,}0m\,,1{,}0$



</td></tr>
</table>

6.4.4. As primeiras noções de funções vetoriais

Observa-se que mesmo dando início ao conteúdo por alguns conceitos mais gerais da disciplina o professor apresenta os conceitos básicos da Cinemática para posteriormente resgatá-los, a partir das situações da Dinâmica. Torna-se importante, nesta parte do conteúdo, noções do conteúdo sobre funções vetoriais. No questionário aplicado aos estudantes não foram incluídas questões relacionadas aos seus conhecimentos matemáticos prévios, por não ser o interesse maior no contexto da disciplina de Física. No entanto, num sistema de ensino integrado esta verificação torna-se essencial.

No Ensino Médio, supostamente os alunos têm um contato com a forma de representação de um vetor no plano, sua representação geométrica, operações com vetores, cálculo do módulo e cálculo do ângulo de orientação. No entanto, a exemplo daquele contexto, vetores são entidades matemáticas que, no movimento de translação, não variam com o tempo. Força, velocidade e aceleração são vetores constantes.

No Ensino Superior estas grandezas vetoriais começam a ser interpretadas de forma mais abrangente, como funções vetoriais. Continuam necessitando de módulo e orientação para terem um significado no contexto da Cinemática. No entanto, cada componente da função vetorial passa a ser uma função escalar, onde todo o conhecimento sobre “funções de uma variável real a valores reais” deve ser aplicado. É bastante complexo adentrar nestas questões pela imensa gama de conteúdos matemáticos prévios necessários. No entanto, percebe-se que, na disciplina de Física tais conceitos são inicialmente definidos para serem resgatados posteriormente ao longo da disciplina, e em disciplinas mais avançadas do curso. Particularmente neste estudo eles são retomados em várias situações.

Ausubel (2000) se refere ao fato da repetição de conteúdos como uma espécie de redundância, benéfica para a retenção de conhecimentos na mente do aprendiz. Segundo ele, determinada ideia fica fortalecida ao máximo na memória, caso seja discutida nos contextos em que for relevante, em vez de receber uma consideração apenas na primeira vez em que surge no texto (p.xvi). Justifica-se a busca pelo entendimento dos conceitos da disciplina do Cálculo a partir dos seus significados físicos, especialmente se a disciplina é direcionada para estudantes da Física.

6.4.5. As primeiras noções da derivada

Dando continuidade às definições de posição e deslocamento o professor define *velocidade* como a taxa de variação da posição com relação ao tempo. Dentre os vários tipos de *velocidade* destaca-se a *velocidade na sua forma intuitiva* como a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la, também denominada *velocidade escalar média* (denotada por $\bar{v}_e$ e também conhecida como *rapidez*). A *Velocidade Média* se refere à velocidade num intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ e é denotada por $\bar{v}(t_1, t_2)$. Suas definições nos espaços unidimensional e bidimensional são dadas por:

$$1D: \quad \bar{v}(t_1, t_2) = \frac{\Delta x(t_1, t_2)}{\Delta t} \qquad\qquad 2D: \quad \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

O professor faz uma representação gráfica da situação bidimensional (figura 22), esboçando as formas geométricas dos vetores envolvidos na definição. Um aluno então pergunta se $\Delta \vec{r}$ é uma *"corda"*. O professor explica que é uma *"secante".* O vetor velocidade média é um vetor múltiplo escalar do vetor deslocamento. No caso, tem a mesma orientação do vetor deslocamento, mas com um "tamanho menor", já que seu módulo resulta do módulo do vetor deslocamento dividido pelo intervalo de tempo.

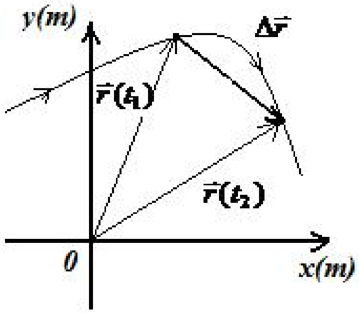


Figura 22: representação geométrica do deslocamento.

O professor define *velocidade instantânea* denotada por $v(t)$ no espaço unidimensional ou $\vec{v}(t)$ no espaço bidimensional, e enfatiza que o vetor velocidade deve ser tangente à trajetória.

$$1D: \quad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{dx}{dt} \qquad\qquad 2D: \quad \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Observamos que são apresentadas as definições de *velocidade* como *taxa de variação instantânea da posição em relação ao tempo* no caso escalar e no caso vetorial, respectivamente, muito embora o conceito de derivada a partir do processo de limite de uma razão incremental provavelmente ainda seja desconhecido para o estudante. Da mesma forma é definida a *aceleração* como *taxa de variação da velocidade com relação ao tempo*. Primeiramente a *aceleração média,* dada por:

$$1D:\ \bar{a}(t_1,t_2) = \frac{\Delta v(t_1,t_2)}{\Delta t} = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{\Delta t}$$

$$2D:\ \vec{a}_{med}(t_1,t_2) = \frac{\Delta \vec{v}(t_1,t_2)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2)-\vec{v}(t_1)}{\Delta t}$$

Depois, a *aceleração instantânea* definida também como a derivada de segunda ordem da posição com relação ao tempo.

$$1D:\ a(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad 2D:\ \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

O professor comenta: *"só estou falando em derivada e não usando".* Esta parece ser uma forma de tranquilizar os alunos quanto ao grau de dificuldade que seria ter de manusear com o conceito de derivada num momento em que eles não têm os conhecimentos prévios necessários. O que parece é que há por parte dos professores de Física uma preocupação em justificar aos alunos que os conceitos de velocidade e aceleração, embora sejam definidos em termos dos conceitos matemáticos *limite* e *derivada* não serão cobrados neste nível ao longo do desenvolvimento do conteúdo.

Cabe ressaltar aqui que o tipo mais básico de aprendizagem significativa é a *aprendizagem representacional* que envolve a atribuição de significados a determinados símbolos (tipicamente palavras) (Moreira, 2006, p.25). Nessa forma de aprendizagem significativa o estudante reconhece uma palavra, sinal ou símbolo como um rótulo para um objeto ou acontecimento específico, ou categorias de acontecimentos e objetos (Novak, 2000, p.37).

Por exemplo, no contexto investigado o aluno pode aprender que o símbolo $x'(t)$ representa a derivada da função $x(t)$ ou a taxa de variação instantânea da função $x(t)$, que é definida como o limite de uma razão incremental quando o incremento tende a zero, isto é, pode aprender a definição do conceito derivada. Também pode ser eficiente em rotular todo tipo de definição que envolva um limite de uma razão incremental quando o incremento tende a zero como uma derivada. No entanto, é a capacidade de percepção da regularidade dos *atributos criteriais* deste conceito em diferentes eventos, situações ou contextos que fará com que o aluno adquira o *significado do conceito derivada,* através da *aprendizagem conceitual* (o segundo tipo de aprendizagem significativa), e isto e um fator progressivo, que pode levar muito tempo.

Necessariamente a aprendizagem conceitual do conceito derivada requer a aprendizagem conceitual de dois outros conceitos, interligados: *limite e razão incremental*, que formam uma proposição. Este é o caso da *aprendizagem proposicional* (terceiro tipo de aprendizagem significativa) onde a tarefa é aprender o significado de ideias em forma de proposições (Moreira, 2006, p. 26).

Portanto, ao menos para *uma aprendizagem representacional* é importante que a definição do conceito derivada seja apresentada repetidas vezes, em distintos contextos. Segundo Vigotsky (1962), mesmo que esta aquisição seja por memorização pode servir para facilitar a *aprendizagem conceitual* (apud Novak, p. 37).

Dando continuidade à apresentação do professor, é feito um esboço de uma situação gráfica para mostrar que o vetor velocidade tangencia a curva e o vetor aceleração aponta para 'dentro' da curva. Também é mostra-se como obter geometricamente o vetor $\Delta\vec{v}$, a variação da velocidade no intervalo de tempo entre t_1 e t_2. Ele diz: *"Não se preocupem, pois vamos retomando estes conceitos aos poucos".*

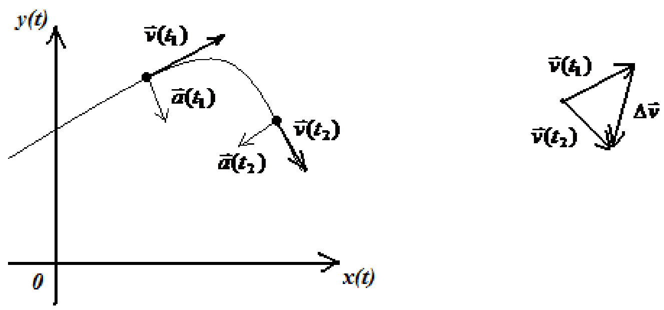


Figura 23: interpretação geométrica dos vetores velocidade, aceleração e variação da velocidade.

Percebe-se que o professor não dá muita ênfase à representação analítica destas grandezas, pois o conteúdo sobre vetores ainda não foi apresentado (ou revisado). Também não faz nenhuma relação mais profunda quanto ao cálculo de limites ou derivadas, o que acarretaria uma maior demanda de tempo, e desviaria o foco principal da disciplina. No entanto, dispõe de muita clareza quanto à representação matemática dos conceitos físicos da Cinemática.

6.4.6. Os princípios que regem a Dinâmica

O próximo conceito a ser definido é o conceito de *momentum linear* ou *quantidade de movimento de translação:*

$$1D: \quad p = mv \qquad\qquad 2D: \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

Um aluno diz: *"tem a ver com energia o momentum linear?"* O professor responde: *"tem a ver, mas não é a energia". "Existe uma relação entre a energia cinética e o momentum linear".*

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2$$

Na definição de momentum linear, na sua forma vetorial, o professor enfatiza que os vetores velocidade e momentum linear ($\vec{p}$ e $\vec{v}$) são paralelos (no contexto da Matemática escreve-se $\vec{p} \mathbin{//} \vec{v}$). Como a massa é uma grandeza positiva ($m > 0$) ambos os vetores têm a mesma orientação. Ao longo de cada definição, ele vai especificando as unidades das grandezas, definidas no sistema internacional de unidades. Para a posição e o deslocamento a unidade é o metro (m), para a velocidade, nas suas diferentes apresentações ($\mathrm{m/s}$), para as acelerações ($\mathrm{(m/s)/s}$ ou $\mathrm{m/s^2}$), para a massa (m) e para o momentum linear ($\mathrm{kg.m/s}$).

A *massa* é definida como a medida de *inércia* de um corpo. Por sua vez, *inércia* é definida como a resistência que a matéria oferece a mudanças em seu estado de movimento, ao que o professor denomina de propriedade qualitativa.

<u>*A 1ª Lei de Newton: Lei da Inércia*</u>*:* se a força resultante exercida sobre um corpo for nula, ele estará, por inércia, em movimento retilíneo uniforme (MRU) ou em repouso. *Força* é a ação que produz sobre um corpo qualquer: ou *alteração do movimento* (de $\vec{p}$) ou *deformação* (conteúdo do capítulo 12). A *força resultante* denotada por $\vec{F}_R$ é a soma de todas as forças exercidas sobre um corpo.

Novo comentário do professor: *"se as forças forem unidimensionais podemos encarar a força vetorial como escalar, isto é, somando algebricamente".* Neste momento, observamos que o professor lida com as questões vetoriais e com as questões do Cálculo sem muito formalismo ou rigor matemático. Ao contrário, particularizando o caso geral de um vetor de duas ou três dimensões para o caso específico de um vetor com uma única dimensão, ele parece evitar o grau de complexidade matemática nesta fase inicial da matéria. No entanto visa explorar posteriormente as relações entre as três dimensões vetoriais dentro do contexto da disciplina, após o módulo matemático sobre vetores.

Este método vai ao encontro dos princípios programáticos da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora, propostos por Ausubel (2000) como facilitadores da organização do ensino dentro dos pressupostos da teoria da aprendizagem significativa.

> Na diferenciação progressiva as ideias mais gerais e inclusivas da matéria de ensino são apresentadas no início da instrução e progressivamente diferenciadas ao longo da instrução. Na reconciliação integrativa a instrução deve explorar relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças importantes e reconciliar discrepâncias reais ou aparentes (Moreira, 2006, p. 174).

<u>Aula do dia 21/03/2011</u>: Começam a serem definidas algumas *leis de forças* especiais. *Leis de força* podem ser interpretadas como *enunciados* ou *relações* que especificam a força exercida por uma dada vizinhança sobre um corpo. *<u>Força Gravitacional</u> ($\vec{F}_G$):* força de atração da Terra inteira sobre um objeto. Seu módulo é dado por: $F_G = mg$ onde m é a massa do corpo e g a aceleração local da gravidade. Sua direção é vertical e o sentido para baixo (normalmente costuma-se considerar este sentido negativo no contexto da Física); *<u>Força Normal</u> ($\vec{N}$):* força de contato entre um objeto rígido (sólido) e uma superfície sólida que o sustenta. Seu módulo é variável ($0 \le N \le N_{máx}$), sua direção é perpendicular à superfície e seu sentido é da superfície para o objeto. Forças de contato são de origem eletromagnética. O professor enfatiza: *"o peso não é a mesma coisa que a força gravitacional. O peso é o valor da força normal da balança que o sustenta"; <u>Tração</u> ($\vec{T}$):* ocorre em cordas, cabos ou barbantes. A direção é ao longo do barbante e o módulo é variável, $0 \le T \le T_{máx}$ onde $T = 0$ significa "barbante frouxo", não tracionado, não esticado, e $T_{máx}$ é o valor máximo de tração ao qual o barbante resiste. Se $T > T_{máx}$ ocorre o rompimento do barbante; *<u>Força de atrito de escorregamento</u>:* força de contato entre um par de superfícies sólidas em contato que se opõe ao movimento relativo entre as duas. Existem dois tipos: *atrito cinético ($\vec{f}_c$):* ocorre quando existe movimento. Se módulo é dado por $f_c = \mu_c N$ onde N é o módulo da força normal e μ_c é o coeficiente de atrito cinético (adimensional). Sua direção é a direção do movimento e o seu sentido é contrário ao sentido do movimento. Pode-se dizer que é uma força de resistência

ao movimento. O *atrito estático* ($\vec{f}_e$): quando ainda não existe movimento, mas existe tendência ao movimento, isto é, ele ocorreria não fosse à presença do atrito. Seu módulo é variável, definido por: $0 < f_e < f_{e,máx} = \mu_e N$ onde μ_e é o coeficiente de atrito estático (adimensional). Sua direção é aquela da tendência em que haveria movimento e o sentido é contrário a esta tendência.

<u>*A 2ª Lei de Newton para um corpo ou uma partícula:*</u> O professor define força resultante de duas formas: primeiro considerando o caso geral, onde a massa não é constante, depois considerando o caso particular para o qual a massa é constante.

$$\text{Caso Geral:} \qquad 1D: \quad F_R = \frac{dp}{dt} \qquad 2D: \quad \vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\text{Caso Particular:} \qquad 1D: \quad F_R = ma \qquad 2D: \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\text{onde } m \text{ é a massa e } \vec{p} = m\vec{v} \text{ é o momentum linear.}$$

6.4.7. O processo do limite através do Cálculo Diferencial

Observamos um básico resultado do Cálculo quanto ao uso de propriedades de limites (ou de derivadas), antes mesmo de serem apresentadas nos módulos matemáticos. A representação matemática utilizada por ele é a seguinte:

$$F_R = \frac{dp}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \to 0} \left(m \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = m \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = ma \quad \Leftrightarrow \quad F_R = ma$$

Talvez esta seja uma excelente oportunidade para construir, juntamente com os estudantes, o conceito de velocidade instantânea ou de aceleração instantânea pelo processo do cálculo diferencial. Para o caso da *velocidade instantânea*, por exemplo, isto pode ser feito a partir do gráfico da função posição contra o tempo no intervalo de tempo $[t; t + \Delta t]$. A velocidade média neste intervalo de tempo representa, geometricamente, o coeficiente angular da reta secante à curva $x(t)$ nos pontos extremos do intervalo considerado.

Tomando o limite quando o incremento Δt tende à zero a reta secante à curva tenderá à reta tangente no ponto extremo esquerdo do intervalo, representando, geometricamente, o coeficiente angular desta nova reta tangente. O mesmo procedimento pode ser feito para a interpretação geométrica da *aceleração instantânea,* considerando o gráfico da função velocidade contra o tempo, no mesmo intervalo de tempo indicado.

Uma situação importante para ser apresentada no contexto de um ensino integrado é calcular as velocidades médias em diferentes intervalos de tempo, simétricos em relação a um determinado instante de tempo, diminuindo estes intervalos dos seus extremos para o centro. Com isso uma sequência de valores pode ser construída para que os estudantes possam ser instigados a interpretarem que os valores obtidos nesta sequência estão tendendo ao valor da velocidade instantânea da partícula no instante de tempo central do intervalo considerado.

A 3ª Lei de Newton: Lei da ação e reação: O professor introduz o princípio da ação e reação exemplificando com a seguinte situação: um caixote em repouso sobre o tampo de uma mesa. Então ele pede aos alunos que identifiquem as forças exercidas sobre o caixote e suas naturezas. Depois pede que os alunos identifiquem dois pares conjugados de forças associados ao caixote. A confusão percebida é que alguns alunos consideram a normal da superfície da mesa sobre o caixote e a força gravitacional da Terra sobre o caixote como pares conjugados de forças. O professor explica que os pares conjugados de forças devem ser *de mesma natureza*. Levando em consideração os conceitos iniciais da disciplina o processo da identificação de forças requer o seguinte procedimento: *isolar o objeto em estudo; definir sua vizinhança; definir todas as forças externas que atuam sobre o objeto; representar através de um diagrama de corpo livre a situação; representar matematicamente o sistema de coordenadas cartesianas cuja origem coincide com o objeto (na forma de partícula) e esboçar todos os vetores representativos das forças, partindo da mesma origem; obter o vetor força resultante; aplicar as leis de Newton.* No exemplo apresentado pelo professor não há aceleração já que o objeto (o livro) está em repouso. A decomposição vetorial em termos dos eixos coordenados exigirá, necessariamente, noções da trigonometria do triângulo retângulo e, por vezes, o cálculo de ângulos a partir dos valores de funções trigonométricas inversas.

Este é um conteúdo que pode ser apresentado aos estudantes no nível do Pré-Cálculo e do Pré-Física, sempre com o intuito de integrar as duas áreas.

O professor apresenta a segunda lei de Newton para um sistema geral de partículas:

$$1D: \quad F_R^{ext} = \frac{dp}{dt}^{sistema} \qquad\qquad 2D: \quad \vec{F}_R^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}^{sistema}$$

Onde $p_{sistema}$ é o momentum linear total do sistema, F_R^{ext} é a força resultante de origem externa (soma das forças externas exercidas sobre o sistema), e força externa é a força cujo agente não pertence ao sistema. Voltando ao exemplo anterior, poderíamos considerar a mesa e o livro como um sistema de objetos (partícula) e, então, definir a partir deste sistema a vizinhança e a força externa que age sobre o sistema. Neste caso, a força resultante das atrações gravitacionais da Terra sobre a mesa e da Terra sobre o livro. As forças internas seriam a normal da mesa sobre o livro e a normal do livro sobre a mesa (um par conjugado de ação e reação).

A partir destas definições, são resolvidos alguns exercícios envolvendo identificação das forças exercidas sobre o corpo e da construção de diagramas de corpo livre (ou diagramas de forças) para cada corpo do sistema, cálculo da aceleração, cálculo dos valores das forças que agem sobre os corpos e sobre sistema de corpos (todos considerados como partículas). Em todos os problemas a decomposição vetorial envolve vetores onde uma das dimensões é nula, sendo considerados unidimensionais para fins de cálculos (como o professor havia sugerido, podem ser considerados como escalares a partir da definição de um sistema de referências adequado).

O professor também discute a *Máquina de Atwood*, problemas envolvendo *atrito estático e cinético* entre a superfície de dois corpos bem como problemas da parte da Cinemática, todos propostos do livro recomendado no primeiro dia de aula.

<u>Aula do dia 23/03/2011</u>: É proposta a primeira lista de exercícios com questões referentes aos capítulos dois, cinco e seis do livro-texto recomendado. Houve um cuidado em selecionar problemas que pudessem ser solucionados com os conteúdos que foram abordados em sala de aula. Para os problemas resolvidos em aula, vetores sempre podiam ser interpretados como escalares.

Num dos problemas os estudantes tinham que realizar cálculos sobre a velocidade média, velocidade escalar media e o gráfico da posição contra o tempo, o professor diz: *"gráficos serão trabalhados mais adiante".*

Destacamos alguns problemas importantes resolvidos pelo professor. No primeiro dois blocos estão encostados um no outro sobre uma superfície sem atrito. Os blocos têm massas diferentes. Uma força é aplicada ao bloco de maior massa. Devem ser obtidos os valores da aceleração e das normais entre os blocos. O professor analisa cada bloco separadamente e sua vizinhança para identificar as forças atuantes em cada bloco. Após, os blocos são analisados como parte de um sistema de partículas e o problema é refeito, de forma a mostrar que os resultados obtidos nos dois métodos são os mesmos.

Outro problema resolvido, considerado pelo professor um dos mais difíceis da lista é o problema do homem sentado numa gaiola presa por um cabo e uma roldana no teto. O homem puxa com as mãos a outra ponta do cabo movimentando-se, para cima, em movimento retilíneo uniforme. Deve ser obtida a tensão no cabo sendo dada a massa do homem e a massa da gaiola. O professor salienta: *"adotamos um modelo: corda de massa desprezível e polia ideal (de massa desprezível e sem atrito) e as cordas são sempre verticais".* Em cada problema resolvido o professor enfatiza o sistema de referência e a construção do diagrama de corpo livre.

6.4.8. Derivadas nulas no contexto da Mecânica

O *equilíbrio estático* de um objeto considerado como uma partícula se dá quando está em repouso, isto é, quando sua aceleração é nula. É bastante comum entre os estudantes a ideia de que quando a força resultante sobre o sistema é nula, o sistema estará em repouso, portanto não haverá movimento. No entanto, no contexto da Física esta não é a única situação que implica uma aceleração nula. Se a partícula estiver se movimentando de forma a percorrer distâncias iguais em tempos iguais, também terá a aceleração nula, e estará em *equilíbrio dinâmico* até que alguma força passe a atuar sobre ela.

No contexto do Cálculo sempre afirmamos aos alunos que se a derivada de uma dada função for nula em determinado intervalo, significa que esta função é constante no intervalo. No entanto, nas representações geométricas nunca consideramos que esta constante possa ser igual à zero. Um bom exercício é considerar as duas condições de equilíbrio mecânico e suas implicações frente às situações físicas. Curvas integrais são exemplos de antiderivadas que diferem apenas por uma constante. Dentre elas, a partir de condições iniciais podemos identificar uma antiderivada específica.

Aula do dia 25/03/2011: Nesta aula pude lecionar o primeiro módulo matemático para a Física introdutória: ***Vetores e Trigonometria*** (tabela 8). Os conteúdos apresentados foram analisados a partir de livros texto de Cálculo e de Física, recomendados no contexto investigado, e a partir das observações das aulas na etapa anterior. Na elaboração deste material procuramos relacionar conceitos matemáticos e físicos a partir das situações físicas da Mecânica. Conforme solicitado pelo professor operações relacionadas ao produto escalar e ao produto vetorial entre dois vetores foram abordadas posteriormente, quando foram trabalhados os conceitos de *trabalho e torque*.

<u>*Aula do dia 28/03/2011:*</u> O professor propõe uma segunda lista de exercícios referentes aos capítulos 5 e 6 do livro de Física recomendado (Halliday, Resnick e Walker, 2009). Então retoma as formas vetoriais da 2ª lei de Newton: para qualquer sistema formado por um corpo só, a 2ª lei de Newton pode assumir as seguintes formas dependendo do tipo de sistema considerado. *O caso (a) é considerado o caso mais geral:*

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ onde } \vec{p} = m\vec{v}$$

No caso (b) o corpo tem massa não constante:

$\vec{F}_R = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v} = m\vec{a} + \left(\frac{dm}{dt}\right)\vec{v}$, onde $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ é a aceleração do corpo e $\frac{dm}{dt}$ é a taxa de variação instantânea da massa. *No caso (c) m é constante: Então* $\frac{dm}{dt} = 0$ *e* $\vec{F} = m\vec{a}$.

6.4.9. Do geral para o específico

Observamos que o professor apresenta a segunda lei de Newton do seu caso mais geral para o caso mais específico, caracterizando novamente o princípio da diferenciação progressiva. Para demonstrar o caso onde a massa é variável ele aplica a regra da derivada do produto para funções vetoriais. Ainda utiliza um importante resultado do Cálculo com relação à taxa de variação instantânea de uma função constante, que é nula.

A representação matemática da segunda lei de Newton na forma vetorial também pode ser considerada mais geral e inclusiva, já que, a partir de um vetor em três dimensões pode-se especificar a mesma lei no caso bidimensional e unidimensional.

As condições para o *equilíbrio de translação* de um corpo são apresentadas.

$$\vec{F}_R = \vec{0} = \begin{cases} (0,0,0) & \text{em 3D} \\ (0,0) & \text{em 2D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{Rx} = 0;\ F_{Ry} = 0 \text{ e } F_{Rz} = 0 & \text{em 2D} \\ F_{Rx} = 0 \text{ e } F_{Ry} = 0 & \text{em 2D} \end{cases}$$

Assim, após a apresentação do primeiro Módulo Matemático sobre vetores e trigonometria o professor começa a resolver situações-problema onde as forças já não são necessariamente paralelas ou antiparalelas à direção do movimento. Situações onde é necessária a decomposição de forças em relação aos eixos coordenados, incluindo problemas envolvendo atrito estático e cinético. Durante a resolução de um exercício, após os alunos responderem de forma incorreta a um questionamento feito, o professor diz? *"Não quero Física intuitiva. Quero Física racional! Na época de Newton a Mecânica clássica era chamada Mecânica Racional".* Vários exercícios são discutidos em sala de aula.

<u>Aula do dia 04/04/2011</u>: Nesta aula realizei a segunda intervenção, lecionando o módulo sobre ***noções do Cálculo Diferencial*** para funções escalares e vetoriais (tabela 9). O objetivo: dar significado aos conceitos matemáticos a partir das situações físicas. As definições de velocidade e aceleração instantâneas, básicas do campo conceitual da Cinemática, o professor já havia apresentado. Nossa intenção com o material elaborado foi acrescentar a noção geométrica dos limites envolvidos nestas definições, mostrando como as notações matemáticas podem ser utilizadas de forma alternativa àquela apresentada pelo professor no contexto da Física. Começamos a construção do conceito a partir do conceito de velocidade média, inicialmente para o caso escalar e, após, para o caso vetorial.

<u>Aula do dia 06/04/2011:</u> O professor apresenta seu primeiro esquema geral da Mecânica Newtoniana (figura 24). Ele diz aos alunos: *"As leis de Newton são como o cérebro da teoria, como a 'CPU' do computador; alimentamos estas leis com a massa, com o sistema de coordenadas e com as leis de força para analisarmos o movimento".*

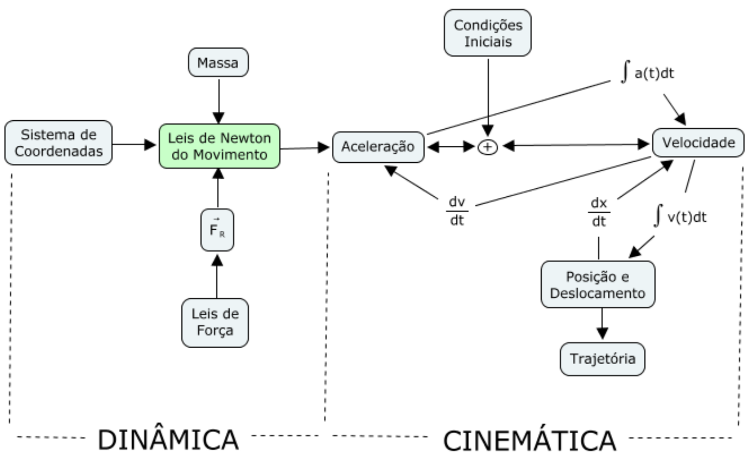


Figura 24: Esquema inicial para a Mecânica Newtoniana proposto pelo professor.

6.4.10. Da Física para o Cálculo e do Cálculo para a Física

Observa-se no esquema proposto pelo professor a forma como os conceitos matemáticos do Cálculo são utilizados no contexto da Mecânica. Fazendo uma leitura da esquerda para a direita, a partir de um sistema de coordenadas bem definido, identificam-se a força resultante aplicada sobre um sistema mecânico e a massa corresponde para que possa ser obtida a aceleração deste sistema. A partir da aceleração, conhecidas a velocidade e a posição iniciais do sistema em movimento, pode-se obter a função velocidade, a função posição e o deslocamento pelo processo da integração. Assim fica determinada a trajetória do sistema considerado.

Por outro lado, da direita para a esquerda, a partir do conhecimento das posições e deslocamentos do sistema mecânico considerado pode-se, com base no processo da diferenciação, obter-se a velocidade e a aceleração do sistema. Alimentando-se o sistema com a massa e conhecida sua aceleração pode-se obter a força resultante que atua sobre este sistema. Estes caminhos de ida e de volta caracterizam, de forma bastante clara, os *significados* dos conceitos de *diferenciação e de integração no contexto da Mecânica*.

Na disciplina de Cálculo, podemos considerar que toda a matemática elementar pode ser reformulada através da utilização do processo de limite. Neste contexto, a "CPU" do computador é o processo de limite de funções escalares nas formas de diferenciação e de integração.

Larson et. al. (1998) se referem à "máquina de limites" que gera fórmulas novas a partir das antigas. Pode-se considerar que a disciplina de Cálculo envolve três estágios: o *pré-cálculo,* o *processo de limite,* e *as novas formulações com o Cálculo* (ibid. p.ix). Algumas clássicas situações onde este processo ocorre são apresentadas na tabela 11.

TABELA 13: O PROCESSO DE LIMITE (adaptado de Larson et. al. (1998)).

Sem Cálculo	Com Cálculo Diferencial
- Valor de $f(x)$ quando $x = c$;	- Limite de $f(x)$ quando x tende a c;
- Inclinação de uma reta;	- Inclinação de uma curva;
- Reta secante a uma curva;	- Reta tangente a uma curva;
- Taxa de variação média entre $t = a$ e $t = b$;	- Taxa de variação instantânea em $t = c$;
- Curvatura de um círculo;	- Curvatura de uma curva;

- Altura de uma curva quando $x = c$; - Plano tangente a uma esfera; - Sentido do movimento ao longo de uma linha reta.	- Altura máxima de uma curva em um intervalo; - Plano tangente a uma superfície; - Direção e sentido do movimento ao longo de uma linha curva.
Sem Cálculo	Com Cálculo Integral
- Área de um retângulo; - Trabalho realizado por uma força constante; - Centro de um retângulo; - Comprimento de um segmento de reta; - Área superficial de um cilindro; - Massa de um sólido de densidade constante; - Volume de um sólido retangular; - Soma de um número finito de termos.	- Área sob uma curva; - Trabalho realizado por uma força variável; - Centróide de uma região; - Comprimento de um arco de curva; - Área superficial de um sólido de revolução; - Massa de um sólido de densidade variável; - Volume de uma região sob uma superfície; - Soma de um número infinito de termos.

Observa-se dentre os tópicos citados aqueles referentes ao contexto da Mecânica: *no nível do Pré-Cálculo:* taxa de variação média entre os instantes $t = a$ e $t = b$; sentido do movimento ao longo de uma linha reta; trabalho realizado por uma força constante, e massa de um sólido de densidade constante. *No nível do Cálculo*, após o processo de limite, os mesmos tópicos transformam-se, respectivamente, em: taxa de variação instantânea em $t = c$; direção e sentido do movimento ao longo de uma linha curva; trabalho realizado por uma força variável, e massa de um sólido com densidade variável. Através da teoria de diferenciação e integração de funções de uma variável real a valores reais, estes tópicos são vistos como importantes aplicações matemáticas na Física.

Dando continuidade à aula, o professor fala em *equações paramétricas* da seguinte forma: dadas as curvas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ isolando o parâmetro t na primeira equação e substituindo na segunda obtemos $t = f^{-1}(x) \Rightarrow y = g(f^{-1}(x))$. Obtém-se, assim, a equação da trajetória da curva parametrizada pelo tempo.

Ele destaca cinco movimentos que denomina como *"simples, mas notáveis"* em ordem crescente de nível de complexidade: *o movimento retilíneo uniforme (MRU)*; *o movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV);* o *movimento balístico; movimento circular uniforme (MCU); movimento circular uniformemente variado (MCUV).*

Para cada caso, o professor caracteriza o movimento, indica as equações paramétricas da aceleração, da velocidade e da posição, e indica sua representação gráfica.

6.4.11. Análise do movimento a partir da Dinâmica

Vejamos como o professor utiliza conceitos do Cálculo em algumas situações de movimento:

(1) <u>Movimento retilíneo uniforme:</u>

Características:

$$\vec{F}_R = (0{,}0{,}0) \Rightarrow \vec{a} = (0{,}0{,}0) \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ (equação parmétrica da aceleração)}$$

$$\mathrm{a} = 0 \quad \Rightarrow v = cte \quad \text{(equação paramétrica da velocidade)}$$

Mas: $v = \dfrac{dx}{dt} = cte = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow v = \dfrac{x - x_0}{t} \Rightarrow x = x_0 + vt$ (equação paramétrica da posição).

O professor salienta que t_0 é o momento que o cronômetro é acionado ($t_0 = 0$) e começa-se a observar o movimento.

(2) <u>Movimento retilíneo uniformemente variado</u>:

Características: $\vec{F}_R = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \vec{a} = (0, a_y, 0)$

"Como a taxa instantânea é constante então a taxa instantânea é igual à taxa média".

$a_y = cte = \dfrac{dv_y}{dt} = \overline{a_y} = \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t} = \dfrac{v_y - v_{0y}}{t - t_0} = \dfrac{v_y - v_{0y}}{t} \Rightarrow v_y = v_{0y} + a_y t$ (equação paramétrica da velocidade na direção de y).

"Para este tipo especial de movimento a velocidade média num dado intervalo de tempo é igual à média das velocidades nos extremos do intervalo".

$$\overline{v_y} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{v_{0y} + v_y}{2} = \frac{v_{0y} + (v_{0y} + a_y t)}{2} = v_{0y} + \frac{1}{2} a_y t \qquad \Leftrightarrow \qquad y = y_0 + v_{0y} + \frac{1}{2} a_y t^2$$

(equação paramétrica da posição na direção de y).

Fazendo-se $a_y = -g$, $v_{0y} = 0$ e $y_0 = h$ tem-se o caso da *queda livre* onde g é o módulo da aceleração da gravidade e h é a altura inicial do objeto em queda livre, cuja equação posição é dada por: $y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$.

Observa-se que dois importantes resultados indicados pelo professor podem ser mostrados pelo uso do *teorema do valor médio para integrais*. Seja a função aceleração $a = f(t)$ contínua no intervalo de tempo de $t = a$ e $t = b$. Pelo teorema do valor médio para integrais, existe pelo menos um valor t entre $t = a$ e $t = b$ tal que:

$$a_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b a(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad a_m (b - a) = \int_a^b a(t) dt$$

A interpretação geométrica do teorema nos diz que sob as hipóteses consideradas a área sob o gráfico da função $a = f(t)$ é igual à área do retângulo de dimensões ($b - a$) e $f(c)$. Se a função $a = f(t)$ é constante no intervalo dado é fácil observar graficamente que o valor médio da função em qualquer instante de tempo no intervalo é igual ao valor da própria função.

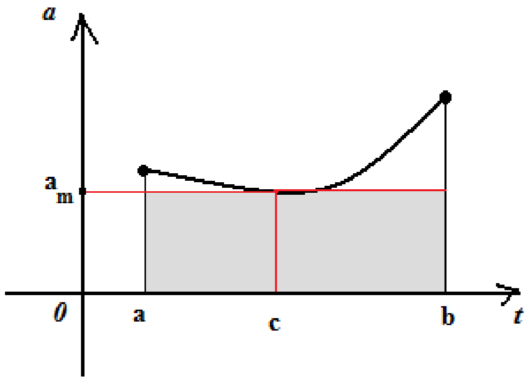


Figura 25: Interpretação geométrica do teorema do valor médio para integrais.

Para o caso da velocidade média, se a função velocidade for linear $v = v_0 + At$, temos que:

$$v_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b (v_0 + At)dt = \frac{1}{b-a}\left[v_0 t + \frac{1}{2}At^2\right]_{t=a}^{t=b} = \frac{v_0(b-a) + \frac{1}{2}A(b^2 - a^2)}{b-a}$$

$$v_m = v_0 + \frac{1}{2}A(a+b) = \frac{2v_0 + Aa + Ab}{2} = \frac{(v_0 + Aa) + (v_0 + Ab)}{2} = \frac{v(a) + v(b)}{2}$$

Isto é, para o caso de uma *função do integrando ser linear* o valor médio desta função num dado intervalo é igual à média dos valores da função nos extremos do intervalo. No entanto isto só pode ser apresentado aos estudantes após o desenvolvimento do módulo que trata das noções do cálculo integral.

(3) <u>Movimento Balístico:</u>

Características: $\vec{F}_R = \overrightarrow{cte} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = (0,-g,0)$. Neste caso $\overrightarrow{v_0} \neq \vec{0}$ e não paralelo a $\overrightarrow{F_R}$

Observa-se um *movimento retilíneo uniforme* na horizontal e um *movimento retilíneo uniformemente variado na vertical,* pois $a_x = 0$ e $a_y = -g$, respectivamente. Então:

Equações paramétricas do movimento na direção horizontal:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = v_{0x} \\ x = x_0 + v_{0x}t \end{cases}$$

Equações paramétricas do movimento na direção vertical:

$$\begin{cases} a_y = -g \\ v_y = v_{0y} - gt \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

O vetor velocidade inicial $\vec{v}_0$ depende do ângulo de lançamento inicial do projétil (θ_0), e é denotado por:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} = v_0\cos\theta_0\hat{i} + v_0 sen\theta_0\hat{j}$$

<u>*Aula do dia 08/04/2011:*</u> O professor caracteriza o movimento circular uniforme.

(4) <u>Movimento Circular Uniforme:</u>

Características: Trajetória circular com $r = \|\vec{r}\| = cte$ e $v = \|\vec{v}\| = cte$. A aceleração é centrípeta e aponta para o centro do círculo.

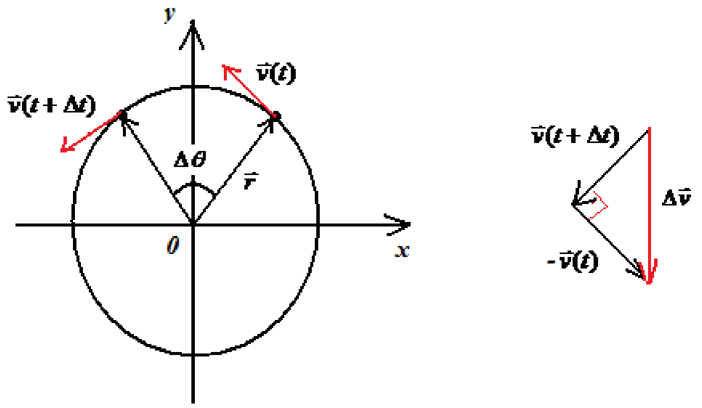


Figura 26: No MCU a orientação do vetor aceleração é a mesma do vetor variação da velocidade.

Então: $\vec{a}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad a = \|\vec{a}\| = \left\| \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \right\| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left\| \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \right\| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\|\Delta\vec{v}\|}{\Delta t}$

Pela figura 26 vemos que $\|\Delta\vec{v}\| = 2v sen\dfrac{\Delta\theta}{2}$ e $\Delta t = \dfrac{arco}{velocidade} = \dfrac{r\Delta\theta}{v}$ desde que o ângulo seja dado em radianos.

Então: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left[\dfrac{2v sen\left(\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)}{\dfrac{r\Delta\theta}{v}} \right] = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v^2}{r} \left[\dfrac{sen\left(\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} \right] \Leftrightarrow a = \dfrac{v^2}{r}$

Observa-se o método utilizado pelo professor indica uma mudança de variáveis no cálculo do limite. Quando $\Delta t \to 0$ então $\Delta\theta \to 0$ e recaímos no *limite trigonométrico fundamental:* $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{senu}{u} = 1$.

A expressão obtida é o módulo da aceleração centrípeta no movimento circular uniforme, ou seja, a força resultante é constante em módulo e está sempre apontando para o centro, sendo perpendicular à velocidade: *força centrípeta.*

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_{centrípeta} \quad \Leftrightarrow \quad F_R^{centrípeta} = \frac{mv^2}{r}$$

Observa-se que uma maneira alternativa de apresentar a expressão para a aceleração centrípeta é através da função posição vetorial de uma circunferência centrada na origem do sistema de coordenadas retangulares, com raio *r:*

$$\vec{r}(t) = (r\cos\theta)\hat{i} + (rsen\theta)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\vec{r}(t)) = \frac{d}{dt}(r\cos\theta)\hat{i} + \frac{d}{dt}(rsen\theta)\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = \left(-rsen\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{i} + \left(r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = (-rwsen\theta)\hat{i} + (rw\cos\theta)\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \left(-rw\cos\theta\frac{d\theta}{dt} - rsen\theta\frac{dw}{dt}\right)\hat{i} + \left(-rwsen\theta\frac{d\theta}{dt} + r\cos\theta\frac{dw}{dt}\right)\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \left(-rw^2\cos\theta - r\alpha sen\theta\right)\hat{i} + \left(-rw^2 sen\theta + r\alpha\cos\theta\right)\hat{j}$$

Para este procedimento devem ser definidas, inicialmente, as variáveis cinemáticas para o movimento circular: *posição angular:* $\theta = \theta(t)$, *deslocamento angular:* $\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$, *velocidade angular:* $w = \theta'(t)$ e *aceleração angular:* $\alpha = w'(t)$.

O vetor aceleração para o caso do movimento circular pode ser representado como a soma de dois vetores múltiplos escalares do vetor posição e do vetor velocidade, respectivamente. Isto é, para um movimento circular mais geral o vetor aceleração tem duas componentes, uma na direção do raio descrito pelo círculo (denominada aceleração radial ou centrípeta) e outra na direção do vetor velocidade, tangenciando o círculo (denominada aceleração tangencial).

$$\vec{a}(t) = -w^2\vec{r}(t) + \frac{\alpha}{w}\vec{v}(t)$$

Se o movimento circular for uniforme, isto é, se a partícula que se move sobre o círculo, no sentido anti-horário, descrever deslocamentos angulares iguais em intervalos de tempos iguais, então sua aceleração angular será nula, visto que a velocidade angular é constante.

Assim, nosso vetor aceleração terá uma única componente, na direção do raio e sentido apontando para o centro do círculo. O módulo deste vetor aceleração resultará na aceleração centrípeta da partícula.

$\vec{a}(t) = -w^2\vec{r}(t) \quad \Rightarrow \quad a = rw^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{r}$ onde $v = rw$ (equação que relaciona a velocidade linear da partícula à sua velocidade angular – pode ser obtida através do cálculo do módulo do vetor velocidade indicado acima).

Esta seria uma forma de partir do movimento circular uniforme no seu caso mais geral para o caso específico, onde a aceleração angular é nula, preservando o princípio de diferenciação progressiva.

Aula do dia 11/04/2011: Nesta aula o professor define *velocidade angular* w como a razão entre a variação da posição angular e a variação do tempo.

$w = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (unidade: rad/s)

O período T é o tempo gasto para completar uma volta (unidade: s); a frequência f é o número de voltas completas por unidade de tempo:

$f = \frac{1}{T}$ (unidade: 1/s = hertz = s^{-1})

(5) Movimento Circular Uniformemente Variado:

Aqui o professor vai diferenciar alguns conceitos que propomos que fossem apresentados ao demonstrar a equação para a aceleração centrípeta.

As características do movimento são: trajetória circular: $r = \|\vec{r}\| = cte$; $v = \|\vec{v}\|$ uniformemente variável e $v = rw$.

A aceleração é definida como: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_L$ onde $\vec{a}_r$ é a componente radial ou componente centrípeta da aceleração (relacionada com a variação da orientação de $\vec{v}$); $\vec{a}_L$ é a componente longitudinal (a $\vec{v}$) de $\vec{a}$, também chamada de aceleração tangencial (à trajetória) relacionada com a variação de $\vec{v}$.

Logo: $a_r = \frac{v^2}{r} = rw^2$

Se a_L é responsável pela variação de $v = \|\vec{v}\|$, então podemos escrever: $a_L = \frac{d}{dt}\|\vec{v}\|$.

Obs: $\frac{d}{dt}\|\vec{v}\| \neq \left\|\frac{d\vec{v}}{dt}\right\|$; $\quad a_L = \frac{d}{dt}\|\vec{v}\| = cte = \frac{d}{dt}(rw) = r\frac{dw}{dt} = r\alpha \quad ; \quad a_L = r\alpha$

onde α é a aceleração angular.

Para obter as equações paramétricas neste caso, o professor considera como se a circunferência fosse cortada e esticada (ficando o caso análogo ao caso do movimento retilíneo uniformemente variado) obtendo:

$v = v_0 + a_L t \qquad v^2 = v_0{}^2 + 2a_L\Delta s \quad \Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}a_L t^2$, onde Δs é o arco descrito durante um tempo t.

Dividindo a equação da velocidade por r temos que: $\frac{v}{r} = \frac{v_0}{r} + \frac{a_L}{r}t \iff w = w_0 + \alpha t$.

Dividindo a equação da velocidade por r^2 temos que: $\frac{v^2}{r^2} = \frac{v_0{}^2}{r^2} + 2\frac{a_L}{r^2}\Delta s \iff$ $w^2 = w_0{}^2 + 2\frac{a_L}{r}\frac{\Delta s}{r} \iff w^2 = w_0{}^2 + 2\alpha\Delta\theta$.

Dividindo a equação Δs por r temos que: $\frac{\Delta s}{r} = \frac{v_0}{r}t + \frac{1}{2}\frac{a_L}{r}t^2 \iff \Delta\theta = w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

<u>*Nas aulas dos dias 13/04/2011 e 15/04/2011*</u> o professor resolve uma série de exercícios propostos do livro texto, incluindo exercícios do capítulo 4 que trata do movimento em mais de uma dimensão, incluindo o movimento balístico e movimento circular uniforme. Também dá continuidade aos exercícios dos capítulos 5 e 6 que tratam das leis de Newton.

<u>*Aula do dia 18/04/2011*</u>: O professor apresenta mais uma lei de força, a *força de arraste*, denotada por $\vec{F}_a$, definida como a força de resistência ao movimento que um meio fluido (gás ou líquido) exerce sobre um corpo sólido em movimento com velocidade $\vec{v}$ em relação ao meio.

Lei de força: $\vec{F}_a = -\frac{1}{2}c\rho_{meio}A\|\vec{v}\|\vec{v}$ $\qquad$ Intensidade: $F_a = \|\vec{F}_a\| = \frac{1}{2}c\rho_{meio}Av^2$

O termo ρ_{meio} representa a densidade (ou massa específica) do meio fluido, A é a área efetiva da seção transversal (ao movimento) do objeto, e c é o coeficiente de arraste (adimensional).

Uma importante consequência é que sob a ação de uma força $\vec{F}$ constante (em módulo e orientação) o objeto terminará por atingir uma velocidade limite (assintótica, para $t \to \infty$), a *velocidade terminal,* denotada por $\vec{v}_t$.

Para um objeto em queda livre partindo do repouso a intensidade desta velocidade é dada por:

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{cA\rho_{meio}}}$$

O professor propõe um clássico exercício sobre *as gotas de chuva esféricas que partem do repouso em uma nuvem muito alta, de modo que todas chegam ao solo com suas velocidades terminais.*

6.4.12. Equações Diferenciais no contexto da Mecânica

Uma importante aplicação do Cálculo integral observada, que surgiu como dúvida de uma aluna numa fase posterior da pesquisa foi: *"Professora, em quanto tempo a gota da chuva atinge sua velocidade terminal".* Na ocasião, alguns alunos sugeriram que bastaria calcular a média aritmética entre o tempo inicial e o tempo relativo ao instante que a gota atingiu a velocidade terminal.

*O que acontece com a força resultante imediatamente antes de atingir sua velocidade terminal?*A força resultante que age sobre a gota é dada por:

$$F_R = mg - \frac{1}{2}\rho c A v^2 = ma = m\frac{dv}{dt}.$$

Esta é uma *equação diferencial ordinária* que pode ser resolvida pelo método da integração. Ou seja:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - \frac{1}{2}\rho c A v^2}{m} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_0^{v(t)} \frac{m}{mg - \frac{1}{2}\rho c v^2}\,dv = \int_0^t dt$$

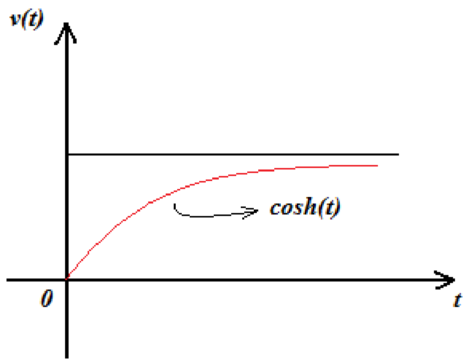


Figura 27: A velocidade assintótica

O próximo conteúdo abordado pelo professor foi *o movimento relativo unidimensional e bidimensional: transformações de Galileu.* A partir da equação que relaciona as posições de uma partícula com relação a dois sistemas de coordenadas cartesianas, utiliza-se o processo de derivação para que seja obtida a equação que relaciona as velocidades da partícula nos dois sistemas. Ao derivar novamente a equação das velocidades mostra-se que a aceleração da partícula é a mesma nos dois sistemas. Isto é: *"posição e velocidade são relativas (depende do observador), porém todo e qualquer observador mede a mesma aceleração (absoluta)".* Quatro exercícios são realizados em aula.

Aula do dia 02/05/2011: O professor introduz o conteúdo relacionado ao capítulo 7 do livro texto: *trabalho e energia cinética.* Uma força realiza *trabalho* no sentido que esta palavra tem no contexto da Física, quando ela é exercida enquanto existe deslocamento.

As notações e unidades são apresentadas juntamente com o primeiro caso explicado pelo professor. *No caso (1)* considera-se a trajetória retilínea e todas as forças exercidas na direção do movimento e constantes (em módulo). Neste caso a força resultante também é constante e paralela (trabalho positivo) ou antiparalela (trabalho negativo) ao movimento. No contexto da Física, paralela e antiparalela significam mesmo sentido do movimento e sentido contrário ao do movimento, respectivamente.

$$W_F = F\Delta x$$

Antes de passar para o segundo caso, o professor dá continuidade à teoria sobre vetores apresentando outra operação básica: o *produto escalar de dois vetores.*

Para o produto escalar de vetores são apresentadas a definição e duas notações alternativas:

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$, onde $A = \|\vec{A}\|$, $B = \|\vec{B}\|$ e ϕ é o menor ângulo formado entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$, ou seja, $0° \le \phi \le 180°$.

Dados os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ na sua forma analítica: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ e $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$ o produto vetorial é definido como:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) = (A_xB_x)(\hat{i}\cdot\hat{i}) + (A_xB_y)(\hat{i}\cdot\hat{j}) + (A_yB_x)(\hat{j}\cdot\hat{i}) + (A_yB_y)(\hat{j}\cdot\hat{j})$$

Os vetores unitários que formam ângulo de 90° entre si têm produto escalar nulo enquanto que o produto escalar de um vetor unitário por ele mesmo é igual a um. Assim:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$$

Talvez a maior dificuldade que os estudantes tenham com relação ao produto escalar é entender que o resultado obtido é um escalar, e não um vetor.

Continuando a discussão sobre o *trabalho realizado por uma força para deslocar um objeto* o professor apresenta o *caso (2)* onde a trajetória continua sendo retilínea (na direção de x); $\vec{F}_R$ é constante e paralela ou antiparalela ao deslocamento, mas a $\vec{F}_R$ é formada por forças que formam ângulo não nulo com o deslocamento. Neste caso, o trabalho de uma força $\vec{F}$ aplicada sobre um objeto para movê-lo por um deslocamento $\Delta\vec{r}$ é dado por: $W_F = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$.

Para resolvê-lo é necessário conhecer a intensidade da força, o módulo do deslocamento e o menor ângulo formado entre estes dois vetores. Caso sejam conhecidos estes vetores na sua forma analítica resolve-se da forma demonstrada acima.

Então, o professor começa a resolver situações-problema onde o objeto move-se sobre um plano inclinado inicialmente sem atrito. Em seguida vai aumentando a complexidade das situações, acrescentando o atrito. O trabalho resultante sobre o objeto é a soma do trabalho realizado por cada força, individualmente, sobre o objeto. Lembrando que estamos sempre considerando forças constantes ao longo do deslocamento.

<u>Aula do dia 04/05/2011</u>: A fim de introduzir o *trabalho realizado por forças variáveis*, o professor solicita que apliquemos o terceiro módulo matemático (tabela 10), com as *noções básicas do Cálculo Integral.*

Após o desenvolvimento dos *três módulos de integração* apresentamos aos estudantes dois quadros gerais (tabela 14 e 15) com um resumo das equações mais básicas da cinemática.

TABELA 14: VARIÁVEIS CINEMÁTICAS DO MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO.

Movimento de Translação		
	Caso Unidimensional (1D)	*Caso Bidimensional (2D)*
Posição	$x = x(t)$	$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$
Deslocamento	$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$	$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$
Velocidade Média	$v_{méd} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$	$\vec{v}_{méd} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
Velocidade Instantânea	$v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{d}{dt}[x(t)]$	$\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d}{dt}[\vec{r}(t)]$ $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$
Rapidez	$v = \lvert v(t)\rvert$	$v = \lVert\vec{v}(t)\rVert = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$
Aceleração Média	$a_{méd} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$	$\vec{a}_{méd} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
Aceleração Instantânea	$a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{d}{dt}[v(t)]$	$\vec{a}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d}{dt}[\vec{v}(t)]$ $\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j}$

TABELA 15: VARIÁVEIS CINEMÁTICAS DA ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO

Movimento de Rotação (em torno de um eixo fixo)	
Posição Angular	$\theta = \theta(t)$ (θ em radianos)
Deslocamento Angular	$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$
Velocidade Angular Média	$w_{méd} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Velocidade Angular Instantânea	$w(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{d}{dt}[\theta(t)]$
Rapidez Angular	$w = \lvert w(t) \rvert$
Aceleração Angular Média	$\alpha_{méd} = \frac{\Delta w}{\Delta t}$
Aceleração Angular Instantânea	$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{d}{dt}[w(t)]$

O professor retoma a definição de *trabalho* reapresentando o primeiro caso: *trajetória retilínea, vetor força resultante constante ao longo da trajetória e formado por forças paralelas ou antiparalelas ao movimento.*

Desta vez ele apresenta a *versão infinitesimal* para o cálculo do trabalho. Ele pergunta e responde: *"O que é uma coisa infinitesimal? É algo infinitamente pequeno, que está tendendo à zero".*

De uma forma geral, a *quantidade de trabalho infinitesimal* que uma força $\vec{F}$ realiza na direção do vetor deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$ é denotada por:

$$dW_F = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para o caso unidimensional (movimento na direção horizontal e força horizontal, por exemplo) temos que: $\vec{F} = F_x \hat{i}$ e $d\vec{r} = dx\hat{i}$, o que indica que o trabalho será dado por: $dW_F = F_x dx$. Para obter o trabalho W_F devemos aplicar o processo da integração dos dois lados da equação no intervalo do deslocamento considerado, de $x = a$ até $x = b$.

$$W_F = \int_a^b F_x dx$$

6.4.13. O processo do limite através do Cálculo Integral

Se a força F_x é constante esta integral resulta no caso mais simples de *trabalho*: obtido multiplicando a força pelo deslocamento no intervalo considerado. Se a força variar com a posição podemos aplicar o teorema fundamental do Cálculo para obter o resultado da integral definida. No entanto, esta é uma excelente oportunidade para que o estudante possa entender a integral definida a partir do processo de limite aplicado sobre uma soma de Riemann.

Para o caso unidimensional: Começamos esboçando o gráfico genérico de uma força em função da posição num determinado intervalo de $x = a$ até $x = b$. Após, dividimos o intervalo $[a;b]$ em n subintervalos. Estes subintervalos podem ser de mesmo tamanho (uma partição regular) ou de diferentes tamanhos (uma partição irregular). Para cada subintervalo, construímos um retângulo de dimensões Δx_i para a base e $F(x_i^*)$ para a altura, sendo x_i^* um elemento pertencente ao i-ésimo intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Com isto, estaremos considerando a função força aproximadamente constante nos subintervalos considerados.

O próximo passo é construir a soma de Riemann a partir da soma das áreas de todos os retângulos contruídos nos n subintervalos:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i$$

O trabalho realizado pela força para deslocar um objeto no intervalo considerado será aproximadamente igual ao valor obtido com a soma de Riemann.

$$W_F \cong \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i$$

Tomando o limite da soma de Riemann quando o número de subintervalos n tender ao infinito termos o valor do trabalho realizado pela força sobre o intervalo total considerado. No entanto, fazer $n \to \infty$ é equivalente a fazer o maior dos subintervalos da partição tender a zero, $máx\Delta x_i \to o$. Denotamos isto da seguinte forma:

$$W_F = \lim_{máx\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i *)\Delta x_i \quad \Rightarrow \quad W_F = \int_a^b F(x)dx$$

Neste processo o limite da soma de Riemann se transforma na integral definida da função força em relação à posição do objeto no intervalo de $x = a$ até $x = b$.

Para o caso bidimensional ou tridimensional a complexidade da representação matemática é maior. No entanto os estudantes já tiveram o primeiro contato com as noções de integração, sendo que podemos apresentar o novo processo a fim de que seus *conceitos* *subsunçores* possam ser diferenciados e elaborados a partir da nova informação. Senão vejamos, considerando a força $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ e o vetor deslocamento $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$, temos que:

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x, F_y, F_z) \cdot (dx, dy, dz) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ para deslocar um objeto no espaço tridimensional da posição inicial $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ para a posição final $\vec{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$ será dado por:

$$W_{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} dW_{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$W_{\vec{F}} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

O caso mais básico na Mecânica é aquele onde a força aplicada sobre o objeto é a *força elástica* (variável e contrária ao sentido do movimento). Considerando o movimento horizontal e a força elástica antiparalela ao movimento. A lei de Hooke nos diz que: $F_x = -kx$ onde k representa a constante elástica. Este é um bom exemplo que requer o cálculo de uma integral definida para que seja obtido o *trabalho realizado pela força elástica* para deslocar um objeto de uma posição inicial até uma posição final.

Na continuação da aula o professor critica o desempenho dos alunos na primeira prova. Comenta que dos quarenta e cinco alunos matriculados dez não fizeram a prova, oito nunca vieram na aula. Dos trinta e cinco que fizeram a prova 57% deles obtiveram uma nota entre zero e três. A média geral da turma foi 3,2. *"Acho que o problema é que vocês só estudam para os testes da disciplina de Cálculo". "A notação de vocês na prova foi um lixo". "A resposta numérica é o que menos interessa, mas o raciocínio tem que estar impecável."*

<u>Aula do dia 11/05/2011:</u> Está sendo substituída por outro professor. Seu objetivo é apresentar o *teorema do trabalho e energia cinética.*

Considera-se o movimento retilíneo uniformemente variado, onde a aceleração é constante. A partir da equação de Torricelli tem-se que:

$$v_f^{\ 2} = v_i^{\ 2} + 2a\Delta x \Leftrightarrow a = \frac{v_f^{\ 2} - v_i^{\ 2}}{2\Delta x}$$

Substituindo o valor obtido na segunda lei de Newton:

$$F = ma = m\left(\frac{v_f^{\ 2} - v_i^{\ 2}}{2\Delta x}\right)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por Δx obtém-se:

$F\Delta x = \frac{1}{2}mv_f^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_i^{\ 2} = K_f - K_i = \Delta K$, onde ΔK é a variação da energia cinética do sistema.

Teorema Trabalho-Energia Cinética: O trabalho total realizado sobre um sistema é igual à variação da energia cinética deste sistema entre os instantes inicial e final. Denota-se por:

$$W_{TOT} = W_{\vec{F}_1} + W_{\vec{F}_2} + \cdots + W_{\vec{F}_N} = \Delta K$$

Um resultado físico importante diz respeito ao aumento da energia cinética do sistema comprovado quando o trabalho líquido sobre o sistema é positivo (neste caso há aumento da velocidade). Alguns exercícios são resolvidos.

Aula do dia 13/05/2011: Novamente a aula está sendo substituída por outro professor que retoma o teorema da aula anterior e introduz as equações matemáticas para o *trabalho da força gravitacional e o trabalho da força elástica*. No entanto, ele faz isto partindo diretamente para a relação entre o trabalho e a energia potencial.

$$W_{\vec{F}_g} = -\Delta U_g = -(mgy - mgy_0) \text{ e } W_S = -\frac{1}{2}k(x^2 - x_0^{\ 2})2$$

No primeiro caso, como a força gravitacional é constante, basta resolver o produto escalar entre os vetores força gravitacional e deslocamento. O ângulo formado entre os dois vetores é 180°, por isso trata-se de um trabalho negativo. No segundo caso, a força elástica é variável, portanto o trabalho deve ser calculado via integral definida. È uma boa situação para rever o conceito de integral definida:

$$W_{\vec{F}_g} = \int_{x_0}^{x} -kx dx = -k \int_{x_0}^{x} x dx = -k \left. \frac{x^2}{2} \right]_{x_0}^{x} = -\frac{k}{2}(x^2 - x_0{}^2)$$

Outro importante conceito da Mecânica que pode requerer a utilização dos processos da diferenciação e da integração é o conceito de *potência instantânea* definida como a taxa de *variação instantânea do "trabalho".* A representação matemática deste conceito parte da definição de taxa de variação média, como nas equações cinemáticas.

Define-se a *potência* média como: $\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

Tomando-se o limite quando $\Delta t \to 0$ da potência média obtemos a *potência instantânea*:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

6.4.14. Funções compostas no contexto da Mecânica

Um fato importante a ser observado com os alunos é que, se a força aplicada sobre um objeto é variável e unidimensional, paralela ou antiparalela à direção do movimento, então a força depende inicialmente da posição e a posição, por sua vez, depende do tempo. No Cálculo isto é uma importante aplicação de função composta:

$$F = f(x(t))$$

Para derivá-la aplica-se a regra da cadeia (derivada da função composta):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx}v$$

Assim, como a potência instantânea é a taxa de variação do trabalho temos que:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int F(x)dx\right) = \int \frac{d}{dt}[F(x)]dx = \int \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt}dx = \int v dF = vF$$

$$P = Fv$$

A potência também pode ser apresentada como o produto da força pela velocidade.

<u>Aula do dia 15/05/2011:</u> O professor apresenta uma atualização do mapa conceitual da Mecânica, conforme figura 21, onde acrescenta às leis de Newton uma nova forma para auxiliar os problemas da Mecânica, com base no conteúdo sobre trabalho e energia.

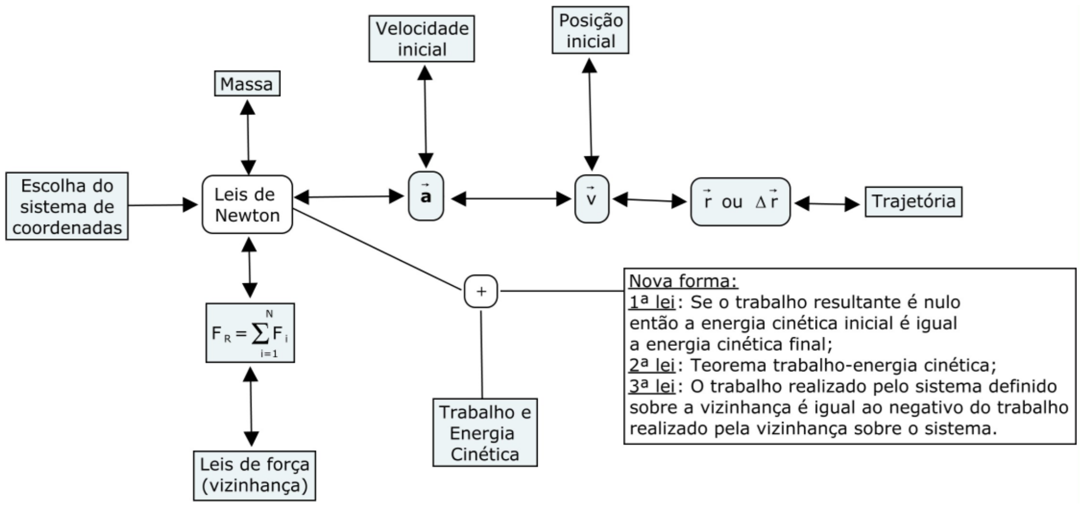


Figura 28: Atualização do Mapa Conceitual para a Mecânica feito pelo professor da disciplina.

Outra importante apresentação feita pelo professor nesta aula foi uma demonstração do teorema que relaciona *trabalho com energia cinética* para os casos unidimensional e bidimensional via processo de integração, considerando a força variável. Foi importante no sentido de que os alunos puderam ter um primeiro contato com o método da integração, principalmente quando se tem que integrar o produto escalar do vetor força pelo vetor deslocamento em duas dimensões. É um processo que pode, num primeiro momento, parecer mecânico, mas que, com a prática, acaba fazendo sentido para o aluno.

Caso unidimensional:

$$W_R = \int_{x_i}^{x_f} F_R(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} madx = m\int_{x_i}^{x_f} \frac{dv}{dt}dx = m\int_{v_i}^{v_f} vdv = \frac{1}{2}mv^2\Big]_{v_i}^{v_f} = \frac{1}{2}m(v_f{}^2 - v_i{}^2) = \frac{1}{2}mv_f{}^2 - \frac{1}{2}mv_i{}^2$$

$$W_R = \Delta K$$

Caso bidimensional:

$$W_R = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_R d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\vec{a}d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \frac{d\vec{r}}{dt}d\vec{v} = m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v}d\vec{v} = m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} (v_x, v_y)(dv_x, dv_y) =$$

$$= m\int_{v_{xi}}^{v_{xf}} v_x dv_x + m\int_{v_{yi}}^{v_{yf}} v_y dv_y = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_f\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{v}_i\|^2$$

$$W_R = \frac{1}{2}mv_f{}^2 - \frac{1}{2}mv_i{}^2 \qquad \Rightarrow \qquad W_R = \Delta K$$

<u>*Aula do dia 20/05/2011:*</u> É introduzido o capítulo 8 do livro texto recomendado: *energia potencial e conservação da energia.*

O professor introduz a aula com o conceito de *força conservativa* como aquela cujo trabalho é *independente da trajetória*, dependendo apenas das posições final e inicial. Este fato abrevia muitos os cálculos de *trabalhos* sobre trajetórias complexas. Se a força que atua sobre o sistema é conservativa qualquer caminho mais simples pode ser utilizado para o cálculo, independentemente da trajetória seguida pelo objeto.

Em geral: $W_F = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe da trajetória (caminho) se $\vec{F}$ for conservativa.

Os exemplos mais básicos de forças conservativas são: a força da gravidade e a força elástica da mola. O clássico exemplo de força não conservativa é o caso do atrito cinético (força dissipativa). O professor explica em que condições é possível que a integral do trabalho tenha o mesmo valor para diferentes caminhos: quando $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ não for apenas uma quantidade infinitesimal, mas uma diferencial de uma função posição.

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} df(x, y, z) \\ -dU(x, y, z) \end{cases}$$

Segundo o professor, a primeira notação é preferida dos matemáticos enquanto a segunda é preferida dos físicos.

Assim: $W_F = -\int_i^f dU(x, y, z) = -U\big]_i^f = -[U(x_f, y_f, z_f) - U(x_i, y_i, z_i)] = -\Delta U \quad \Rightarrow$

$W_F = -\Delta U$

Um sistema é dito conservativo se sobre ele atuam somente forças conservativas. Pelo teorema trabalho-energia cinética temos que: $W_R = \Delta K$.

Se a força resultante que atua sobre o sistema é a soma de N forças conservativas, temos que:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$$

Então: $\Delta K = W_{F_1} + W_{F_2} + \cdots + W_{F_N} = (-\Delta U_1) + (-\Delta U_2) + \cdots + (-\Delta U_N) = -\Delta U_{total}$

Assim, para sistemas conservativos vale que: $\Delta K = -\Delta U_{total}$.

$$\Delta K + \Delta U_{total} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(K + U_{total}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{mec} = K + U_{total} = cte$$

6.4.15. Valores máximos e mínimos no contexto da Mecânica

Uma aplicação interessante de valores máximos e mínimos de uma função escalar diz respeito à análise de *curvas de energia potencial para sistemas conservativos*.

Sabe-se que, para o caso unidimensional o trabalho realizado por uma força sobre um objeto para deslocá-lo dx unidades de comprimento é dado por:

$$W_F = \int F_x dx \quad \Leftrightarrow \quad dW_F = F_x dx$$

Por outro lado, sabe-se que se a força é conservativa o trabalho realizado por ela sobre o objeto também pode ser representada pelo negativo da variação da energia potencial. Na forma diferencial podemos representá-la como:

$$dW_F = F_x dx = -dU \quad \Leftrightarrow \quad F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Isto quer dizer que toda força conservativa pode ser derivada de uma função energia potencial. Consideramos a energia potencial total como o somatório de todas as energias potenciais que atuam no sistema denotando-a como:

$$U_{total} = \sum_{i=1}^{N} U_i = f(x)$$

Como isto funciona na prática?

Considere o sistema massa-mola (oscilador harmônico simples), conforme a situação ilustrada na figura 26, sendo a mola ideal e a superfície sem atrito.

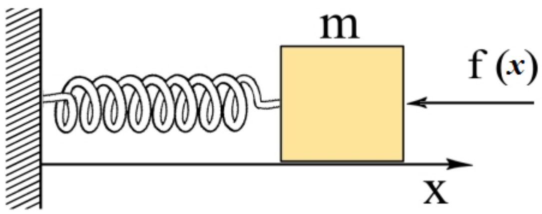


Figura 29: Sistema massa-mola.

As forças que atuam sobre o bloco de massa *m* são a força gravitacional e a força elástica devido à mola. Como são forças conservativas o sistema é conservativo e, sua energia mecânica se conserva.

$$U(x) + K(x) = E_{mec}$$

$U(x)$: energia potencial total do sistema (relacionada à sua configuração);

$K(x)$: energia cinética do sistema em função da sua posição;

E_{mec}: energia mecânica do sistema (constante).

Para o sistema massa-mola indicado a energia potencial é a soma da energia potencial gravitacional com a energia potencial elástica. Na expressão que segue k representa a constante elástica da mola.

$$U(x) = U_g(x) + U_s(x) = cte + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{mec} = cte$$

A figura 30 apresenta um esboço das curvas relativas à energia potencial e a energia mecânica num mesmo sistema de coordenadas cartesianas. No gráfico a energia cinética (em vermelho) indica a diferença entre a energia mecânica e a energia potencial do sistema.

$$K(x) = E_{mec} - \left(cte + \frac{1}{2}kx^2 \right)$$

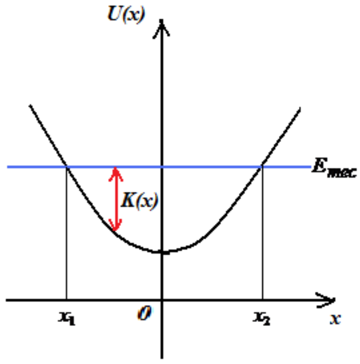


Figura 30: Gráfico da energia potencial do sistema massa-mola em função da sua posição.

Observa-se que nos pontos x_1 e x_2 a energia cinética é nula, o que indica que estes pontos são *pontos de retorno* no movimento harmônico simples. Fazendo uma leitura no gráfico no sentido de x_2 para x_1, vemos que a energia cinética vai aumentando, até que em $x = 0$ atinge seu valor máximo. Neste ponto não há força atuando sobre o sistema, já que:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{x} = 0$$

Dentre as aplicações básicas de análise de gráficos, vista no Cálculo I, os pontos onde a derivada da função é nula (aqueles que admitem uma reta tangente horizontal à curva) são chamados *pontos críticos estacionários.* No contexto da Mecânica, o ponto onde ocorre este valor mínimo para a energia potencial é denominado *ponto de equilíbrio estável. Equilíbrio estável* no sentido que, se empurrarmos o objeto em questão ligeiramente para a esquerda ou para a direita, surge uma força restauradora que faz com que o objeto retorne para a posição em que estava. Neste sentido, pode-se concluir que se o ponto crítico estacionário é um ponto de máximo na curva energia potencial, então será um *ponto de equilíbrio instável*.

Voltando para o contexto do Cálculo, nos pontos de mínimo a função passa de decrescente para crescente nesta posição. Ou ainda, a curva tem concavidade voltada para cima, isto é, a derivada segunda da função energia potencial é positiva em $x = 0$.

Outra interpretação importante no contexto da Mecânica é que em posição menores do que x_1 ou maiores do que x_2 a função energia cinética (dependente da posição) passa a assumir valores negativos, já que a energia potencial passa a ser maior do que o valor constante da energia mecânica. Não há significado físico para esta situação, pois a energia cinética é sempre positiva. Diferentemente do contexto do Cálculo, no contexto da Física a análise se restringe ao intervalo entre x_1 e x_2.

<u>*Aula do dia 30/05/2011:*</u> Nesta aula o professor introduz o capítulo nove do livro recomendado, que trata dos assuntos relacionados ao *centro de massa de um sistema de partículas*, e ao *princípio de conservação do momentum linear*.

6.4.16. Integrais múltiplas no contexto da Mecânica

O conceito central do capítulo 9 desenvolvido pelo professor é o conceito de *centro de massa*: ponto em torno do qual a massa total de um sistema está igualmente distribuída. Os dois tipos básicos de distribuição de massa são o *caso discreto* e o *caso contínuo*. No *caso discreto* supõe-se que só existe massa em certos pontos do espaço. Ou seja, o sistema é formado por um número *N* de partículas.

No *caso contínuo* supõe-se que a massa está distribuída de forma contínua sobre uma linha (quando a distribuição de massa é linear), sobre uma superfície (quando a distribuição de massa é superficial), e sobre um volume (quando a distribuição de massa é volumétrica).

Para o *caso discreto* define-se o *vetor posição do centro de massa* (CM) como:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$\vec{r}_i$ é o vetor posição da i-ésima partícula de massa m_i, e *M* é a soma das massas de todas as partículas que constituem o sistema: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

Uma notação alternativa para o vetor posição do centro de massa é: $\vec{r}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$ onde:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \quad , \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \quad \text{e} \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

A partir do vetor posição do centro de massa é possível obter os vetores velocidade do centro de massa e aceleração do centro de massa, derivando o vetor posição e o vetor velocidade, respectivamente. Lembrando que o processo de derivação de uma função vetorial resulta em outra função vetorial cujas componentes escalares são derivadas das funções escalares anteriores. Assim, para o caso discreto:

$\vec{v}_{CM} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$ e $\vec{a}_{CM} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$, onde $\vec{v}_i$ e $\vec{a}_i$ são os vetores velocidade e aceleração da i-ésima partícula, respectivamente.

O *caso contínuo* é uma situação idealizada para *corpos rígidos*. Neste caso considera-se o corpo rígido como sendo uma distribuição contínua de massa, formada por massas puntiformes (massas infinitesimais) de valores denotados por *dm*, cuja posição é dada por um vetor $\vec{r} = (x, y, z)$ e que ocupam um volume infinitesimal *dv*. Assim:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Na forma da notação alternativa, considerando *M* a massa do corpo rígido:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad , \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad \text{e} \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Estas integrais são muito complexas de serem realizadas para a maioria dos objetos do dia-a-dia. Para facilitar a compreensão do significado destas integrais consideram-se *corpos rígidos uniformes,* para os quais as massas específicas são uniformes. Neste caso, para *dV* (volume ocupado por um elemento de massa *dm),* temos que:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \quad \Rightarrow \quad dm = \frac{M}{V}dV$$

Assim, as componentes do vetor centro de massa para o caso contínuo são dadas por:

$$x_{CM} = \frac{1}{V}\int x\,dV \quad , \quad y_{CM} = \frac{1}{V}\int y\,dV \quad \text{e} \quad z_{CM} = \frac{1}{V}\int z\,dV$$

As integrais de volume indicadas são *integrais triplas*, desenvolvidas no Cálculo de funções de várias variáveis, que requerem as técnicas de integração básicas para serem resolvidas, e que os estudantes ingressantes no Curso de Física desconhecem.

Este problema é contornado no contexto da Física introdutória por um método específico de resolução que consiste em determinar as posições dos centros de massa dos corpos rígidos que, juntos, constituem o corpo rígido todo. Depois basta substituir cada uma das partes por uma massa M_i e determinar sua correspondente posição:

$$\vec{r}_{(CM)_i} = (x_i, y_i, z_i)$$

Finalmente determina-se a posição do centro de massa do corpo rígido todo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} M_i} \sum_{i=1}^{N} M_i \vec{r}_{(CM)_i}$$

Conhecidas as formas de se obterem as posições dos centros de massas de corpos rígidos nos casos discretos e contínuos o professor apresenta o processo da *dinâmica do movimento do centro de massa (CM).* Inicialmente ele mostra que o movimento de translação do sistema como um todo é representado pelo movimento de translação do seu centro de massa.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_{sistema}$$

Ou seja:

$$\vec{p}_{CM} = \vec{p}_{sistema}$$

O lado esquerdo da equação indica a quantidade de movimento de translação associado ao centro de massa e o lado direito representa a quantidade de movimento de translação do sistema como um todo.

Após o professor mostra outro resultado importante que indica que o centro de massa é um ponto que se move como se ele possuísse toda a massa do sistema, influenciado tão somente pela resultante de origem externa. Só forças externas são capazes de alterar o movimento de um centro de massa.

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \quad \Rightarrow \quad M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{R_i} = \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix}\text{forças com} \\ \text{origem interna}\end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix}\text{forças com} \\ \text{origem externa}\end{pmatrix}$$

Pela terceira lei de Newton as forças com origem interna se anulam no somatório indicado, ficando:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_R^{ext}$$

Uma consequência direta é o princípio da conservação do momentum linear de um sistema isolado, onde não há força resultante externa. Neste caso:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_R^{ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad M\vec{a}_{CM} = M\,\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{R_i} = \vec{0} = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \frac{d}{dt}(\vec{p}_{sistema})$$

Se $\frac{d}{dt}(\vec{p}_{sistema}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{sistema} = \overrightarrow{cte} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{sist,i} = \vec{p}_{sist,f}$

Para um *sistema isolado* vale o princípio da *conservação do momentum linear*.

<u>Aula do dia 03/06/2011:</u> Outra importante aplicação do processo da integração é visto nesta aula: *impulso dado por uma força* $\vec{F}$ *durante um intervalo* $\Delta t = t_f - t_i$, denotado por $\vec{J}_F$ e definido por:

$$\vec{J}_F = \begin{cases} \vec{F}\Delta t, & \text{se } \vec{F} \text{ é um vetor constante (caso particular)} \\ \int_{t_i}^{t_f}\vec{F}dt, & \text{se } \vec{F} \text{ é um vetor variável com o tempo (caso geral)} \end{cases}$$

Conhecido o gráfico da função $\vec{F}$ com respeito ao tempo, na direção de x, por exemplo, sabe-se que a área da região situada entre o gráfico da função força e o eixo dos tempos, limitada lateralmente pelas retas verticais $t = t_i$ e $t = t_f$ representa o impulso dado pela componente horizontal da força no intervalo de tempo considerado.

Com uma simples demonstração através do uso da integral mostra-se o *teorema do impulso-momentum:* o impulso dado pela força resultante sobre o sistema é igual à variação da quantidade de movimento do sistema.

Após vem o conteúdo sobre *colisões elásticas, inelásticas e perfeitamente inelásticas*. São resolvidas situações-problema onde podem ser utilizados os teoremas da conservação do momentum linear e conservação da energia cinética.

<u>Aula do dia 15/06/2011:</u> É nesta aula, após a segunda prova do semestre que o professor dá continuidade ao conteúdo sobre vetores, apresentando a definição de *produto vetorial* entre

dois vetores. Particularmente para poder lidar com conceitos do conteúdo que trata do *movimento de rotação.*

O produto vetorial de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, nesta ordem, primeiro $\vec{A}$ e depois $\vec{B}$ é denotado por $\vec{A}X\vec{B}$.

Módulo: $\|\vec{A}X\vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| sen\phi$, onde ϕ é o menor ângulo formado entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ ($0 \le \phi \le 180°$ de modo que $sen\phi \ge 0$).

Orientação: perpendicular ao plano que contém os dois vetores, com o sentido dado pela regra da mão direita.

Representação analítica:

$$\vec{A}X\vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

Onde $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ e $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

Algumas aplicações:

1) *Torque* produzido pela força $\vec{F}$ em relação a algum eixo de rotação escolhido:

$$\vec{\tau} = \vec{r}X\vec{F}$$

2) *Momentum angular* ou quantidade de movimento de rotação de uma partícula em torno de um eixo de rotação escolhido:

$$\vec{L} = \vec{r}x\vec{p}$$

<u>*Aula do dia 17/06/2011:*</u> O professor apresenta as equações cinemáticas da rotação. As principais variáveis de interesse são:

$\vec{w} = d\vec{\theta}/dt$ é o vetor velocidade angular cuja orientação é a mesma do eixo de rotação considerado, com o sentido dado pela regra da mão direita. Seu módulo é dado por $w = d\theta/dt$, e no movimento circular uniforme vale que: $w = 2\pi f = 2\pi/T$.

$\vec{\alpha} = d\vec{w}/dt$ é o vetor aceleração angular cuja orientação é a mesma do eixo de rotação considerado, com o sentido dado pela regra da mão direita. Neste contexto valem os seguintes conceitos: *energia cinética de rotação, momentum angular de rotação e inércia de rotação de sistemas mecânicos rígidos.*

Energia Cinética de Rotação:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I w^2 \text{ onde } I = \begin{cases} mr^2 & \text{para uma partícula;} \\ \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^{\,2} & \text{para um sistema rígido de partículas;} \\ \int \mathrm{r}^2 dm & \text{para um corpo rígido.} \end{cases}$$

I é denominado o momento de inércia do sistema.

O *momentum angular em torno de um eixo que passa pelo centro de massa também depende do momento de inércia, e é denotado pela expressão:*

$$\vec{L} = I\vec{w}$$

O professor diz aos alunos: *"Vocês não vão resolver integral nenhuma".*

Como no caso das coordenadas do centro de massa, o cálculo do momento de inércia para um corpo rígido requer o manuseio de integrais iteradas que podem se tornar muito complexas. Nos livros texto de Física o momento de inércia para corpos com simetrias clássicas são fornecidos aos estudantes, assim como é fornecida tabela de integrais, ficando claro que neste contexto o mais importante é o entendimento conceitual de momento de inércia do que os seus cálculos propriamente ditos. Para casos mais simples é possível realizar os cálculos matemáticos, atitude que pode preserva o vínculo entre as duas áreas. No entanto, tal articulação não será preservada se a mesma atitude não partir do contexto da disciplina de Cálculo.

<u>*Aula do dia 22/06/2011:*</u> O professor começa a fazer as analogias entre os movimentos de translação e rotação para sistemas rígidos.

Para o movimento de rotação a 2ª lei de Newton indica que a força resultante que atua sobre o sistema rígido é o produto entre sua massa total e a aceleração do seu centro de massa.

$$\vec{F}_R = M\vec{a}_{CM}$$

O análogo rotacional (conforme expressam os físicos) da força resultante nos diz que o torque resultante exercido sobre um sistema rígido em rotação em torno de um dado eixo é o produto do momento de Inércia do corpo em relação ao eixo de rotação considerado, pela aceleração angular do sistema.

$\vec{\tau}_R = I\vec{\alpha}$

Podemos generalizar o teorema Tabalho-Energia Cinética incluindo o termo referente à energia cinética de rotação:

$W_R = \Delta K_{translação} + \Delta K_{rotação}$

Onde $K_{translação} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$ e $K_{rotação} = \frac{1}{2} I w^2$

Também define-se o *trabalho de rotação* realizado por um torque $\vec{\tau}$ como:

$W_\tau = \int_i^f \vec{\tau} d\vec{\theta}$ onde $d\vec{\theta} = \vec{w}dt$

A potência de rotação instantânea de um torque $\vec{\tau}$ é dada por:

$P = \vec{\tau} \cdot \vec{w}$

O professor diz aos alunos: *"Muitas fórmulas podem ser concluídas por analogia"*.

A energia mecânica será igual à soma das energias cinéticas de translação e de rotação com a energia potencial total. Para sistemas rígidos, conservativos e isolados a energia mecânica é constante.

$E_{mec} = K_{rotação} + K_{translação} + U_{total}$

O professor finaliza o semestre com o conteúdo sobre *movimento de rolamento*, um dos principais movimentos envolvendo translação e rotação ao mesmo tempo, apresentando os vínculos de velocidade e aceleração. O movimento de rolamento é uma combinação de translação de rolamento do centro de massa de um sistema rígido com uma rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa.

Considerando dx_{CM} o deslocamento do centro de massa do sistema, $d\theta$ o arco infinitesimal descrito pela periferia que entra em contato com o piso durante um intervalo de tempo infinitesimal dt, temos para o vínculo de velocidade:

$$dx_{CM} = Rd\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_{CM}}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = Rw$$

Derivando a expressão novamente em relação ao tempo obtemos o vínculo de aceleração:

$$\frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{dw}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = R\alpha$$

Diversos exercícios relacionados ao desenvolvimento dos últimos capítulos são resolvidos.

6.5. Esquemas de resolução para uma situação-problema articulada

Nesta seção transcrevemos e comentamos algumas das formas de resolução de uma situação-problema proposta aos alunos na primeira prova. Por questões éticas os nomes dos alunos são fictícios.

Nas três provas aplicadas ao longo do semestre o professor enfatiza: ***Atenção:*** *na resolução dos problemas, indique claramente todas as passagens matemáticas feitas até chegar às respostas. Sem isso, mesmo que esteja certa, sua resposta valerá praticamente nada.*

A situação-problema proposta: A figura 31 mostra a vista superior de um disco de *0,0250 kg* sobre uma mesa sem atrito e duas das três forças que agem sobre o disco. A força $\vec{F}_1$ tem um módulo de *6,00 N* e um ângulo θ_1 = 30,0°. A força $\vec{F}_2$ tem um módulo de *7,00 N* e um ângulo θ_2 = 30,0°. Em termos dos vetores unitários, qual é a terceira força se o disco (a) está em repouso; (b) tem uma velocidade constante $\vec{v} = (13{,}0\hat{i} - 14{,}0\hat{j})m/s$ e (c) tem uma velocidade variável $\vec{v} = (13{,}0\,t\,\hat{i} - 14{,}0\,t\,\hat{j})m/s$, onde *t* é o tempo?

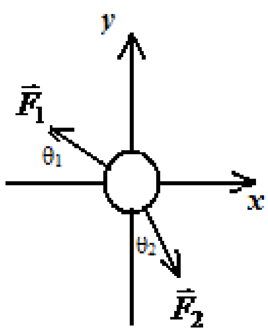
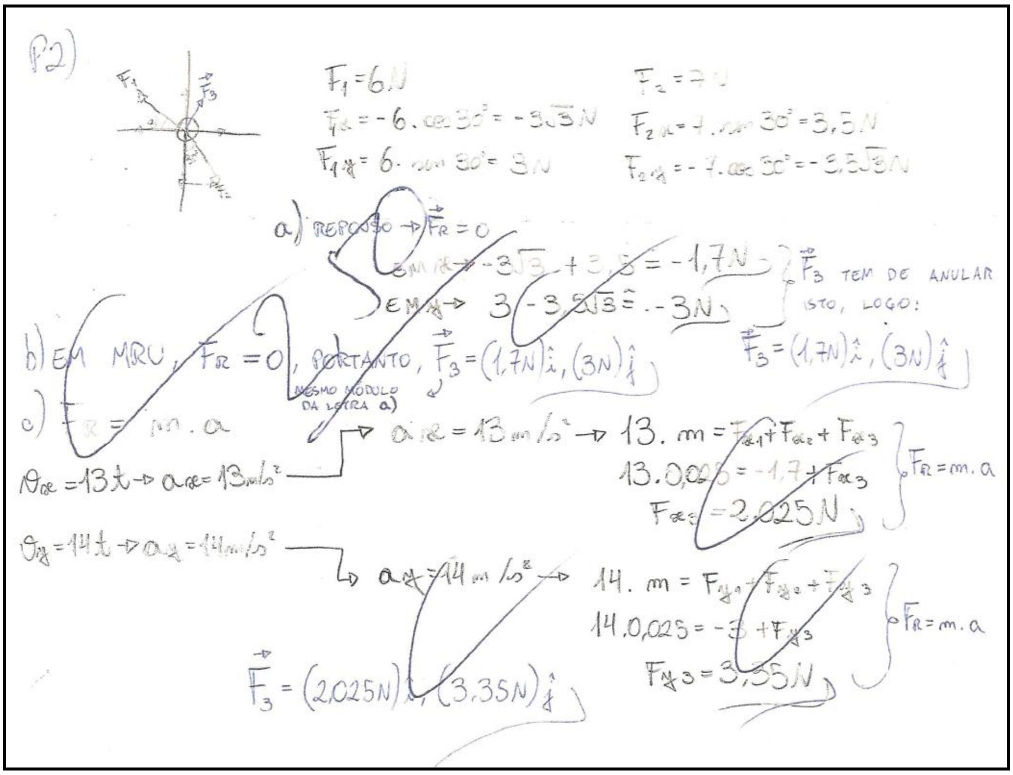


Figura 31: A vista superior de um disco (Halliday, Resnick e Walker, 2008, p.119).

Quadro 1: O esquema de resolução do João.



João inicia a resolução pela decomposição dos vetores força, encontrando as componentes escalares destes vetores (quadro 1). Diferentemente do que foi definido em aula: $F_{1x} = F_1 \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre o eixo x e o vetor força $\vec{F}_1$, medido a partir do eixo x, no sentido anti-horário, ele considera o ângulo complementar a este, respeitando o sinal do cosseno no segundo quadrante. Na perspectiva de Vergnaud (1990) dois importantes *teoremas em ação* implícitos nesta operação são:

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$
$$sen(\pi - \theta) = sen\theta$$

Na forma *predicativa* (ou *proposicional*): *o cosseno de um ângulo é igual ao negativo do cosseno do seu ângulo complementar* e *o seno de um ângulo é igual ao seno do seu ângulo complementar*.

Para responder o item (a) João calcula a soma das componentes horizontais e verticais dos vetores $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Novo teorema em ação implícito na sua operação: para *N* forças atuando sobre um objeto vale o *princípio da superposição de forças*.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Expresso em palavras, a força resultante que atua sobre um objeto é igual ao somatório de todas as forças que atuam individualmente sobre ele.

João explicita que $\vec{F}_R = 0$ cometendo um engano em termos da *simbologia* apresentada quando iguala um vetor a um escalar (este tipo de erro é bastante comum no contexto da disciplina de Física observada). Ele quer dizer que, para que o disco esteja em repouso é necessário que a força resultante que atua sobre ela deve ser nula. Dois teoremas em ação novamente implícitos nesta afirmação. Um deles diz respeito à segunda lei de Newton e outro diz respeito às condições para que um objeto esteja em repouso (considerando o movimento de translação de uma partícula).

Pela segunda lei de Newton: $\vec{F}_R = m\vec{a}$

Se a partícula está em repouso $\vec{a} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}_R = \vec{0}$

Quando obtém o resultado das somas das componentes, João escreve: *"$\vec{F}_3$ tem que anular isto".*

Em linguagem da Física isto quer dizer que a terceira força procurada deve "equilibrar" a soma das outras duas (esta é uma forma de linguagem bastante utilizada no contexto investigado).

Em linguagem da Matemática João traz implícito o seguinte fato:

Se $\vec{F}_R = \vec{0}$ então $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$

Em outras palavras, a terceira força tem que ter mesma direção, porém sentido contrário ao vetor resultante da soma das outras duas forças. João expressa este fato diretamente acrescentando o sinal negativo nas componentes do vetor obtido com a soma das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. O aluno comete novo engano quanto à representação matemática do vetor correspondente a terceira força. Um erro bastante comum no contexto investigado é representar um vetor da forma como João representou.

$$\vec{F}_3 = (1{,}7N)\,\hat{i}\,,(3N)\,\hat{j}$$

Este erro está relacionado ao não entendimento da representação de um vetor em termos da soma de dois vetores múltiplos escalares dos vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$. Por outro lado, o engano pode estar relacionado ao não entendimento da representação de um vetor como a diferença entre o ponto final (da "flecha" do vetor) menos o ponto inicial (da "cauda" do vetor). No caso de João o vetor que representa a terceira força poderia ser representado então das seguintes formas:

$$\vec{F}_3 = (1{,}7N \ , \ 3N) - (0 \ , \ 0) = (1{,}7N \ , \ 3N) \quad \text{ou} \quad \vec{F}_3 = (1{,}7N)\,\hat{i} + (3N)\,\hat{j}$$

O aluno continua mantendo a notação errônea até o final da resolução do problema. No entanto, isto não foi considerado, pelo professor, motivo de desconto na questão.

Outra proposição explicitada pelo aluno no item (b) é o fato de que no Movimento Retilíneo Uniforme a força resultante atuando sobre o disco também é nula. Implícito está uma passagem intermediária que afirma que a partícula não está acelerada. Assim o terceiro vetor força terá a mesma representação matemática do item anterior.

Já no item (c) João explicita mecanicamente que:

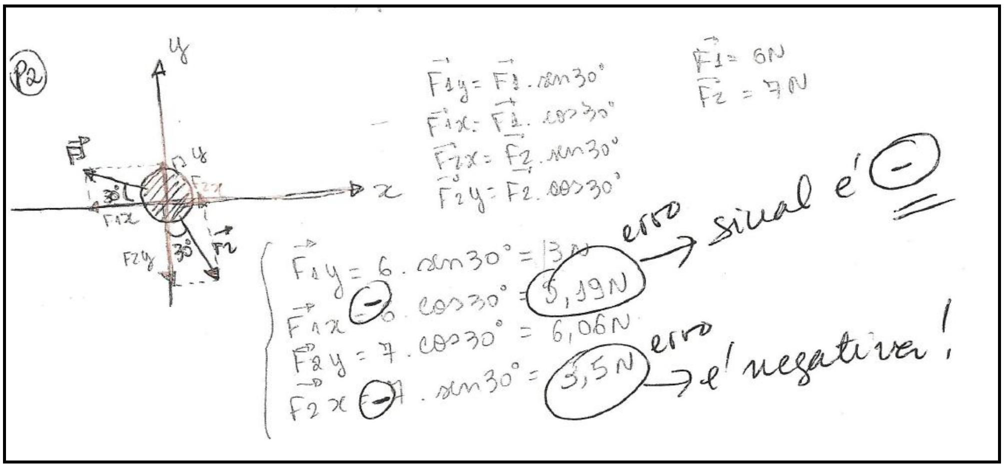
Se $v_x = 13t$ então $a_x = 13m/s^2$. Da mesma forma, se $v_y = 14t$ então $a_y = 14m/s^2$.

Ele substitui os valores das acelerações obtidas nas equações da segunda lei de Newton para obter as componentes horizontal e vertical do vetor força procurado.

As definições de aceleração como derivada da velocidade bem como a técnica de derivada de uma potência parecem estar claras na mente do estudante. No entanto isto não implica que o conceito de aceleração a partir do processo do limite de uma razão incremental tenha ficado clara para o aluno, já que não foi explicitado por ele. Isto pode ser consequência do fato que a situação-problema proposta não remete o estudante à necessidade de formular novos esquemas que necessitem a construção de uma razão incremental para o cálculo do limite. O teorema em ação implícito nesta operação que justifica a "passagem" realizada pelo estudante nos afirma que:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Quadro 2: Esquema de resolução da Maria.



Maria inicia a resolução do problema pela parte operacional matemática (quadro 2), calculando os valores das componentes escalares dos vetores força fornecidos. No entanto, com a notação matemática utilizada demonstra uma confusão entre *componente escalar de um vetor* e *componente vetorial de um vetor*. A intensidade fornecida para os vetores é representada também de forma equivocada, quando iguala um vetor a um escalar. A ênfase na correção do professor é nos *sinais da função seno e cosseno* nos segundo e quarto quadrantes e não especificamente na representação simbólica do vetor.

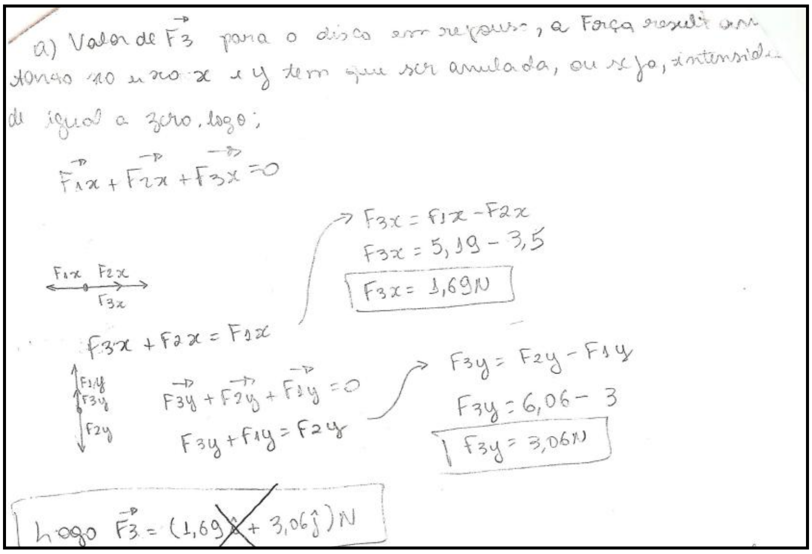
Continuando conforme o quadro 3, vemos que Maria explicita no item (a), um forte teorema em ação que garante as condições para o repouso da partícula, acrescentando o conceito de *intensidade de uma força* (no caso ela deve ser nula).

Interessante observar que em sua esquematização a aluna parte da soma das componentes vetoriais dos vetores $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ em relação aos dois eixos, indicando que deve ser nula. Entendemos que ela está falando em vetores pelo esboço das componentes horizontais vetoriais das forças que ela explicita (simbologia matemática). O seguinte teorema em ação está implícito nesta operação.

$$\vec{F}_R = \vec{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{F}_{Rx} = \vec{0} \\ \vec{F}_{Ry} = \vec{0} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x} = \vec{0} \\ \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{3y} = \vec{0} \end{cases}$$

Partindo do pressuposto que o vetor força $\vec{F}_3$ pertence ao primeiro quadrante, Maria afirma que: $F_{3x} + F_{2x} = F_{1x}$ e $F_{3y} + F_{1y} = F_{2y}$.

Quadro 3: Novos esquemas de Maria para a resolução do problema.



a) Valor de $\vec{F_3}$ para o disco em repouso, a Força resultante ao longo no eixo x e y tem que ser anulada, ou seja, intensidade igual a zero. logo;

$\vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x} = 0$

F_{1x} F_{2x} F_{3x}

$F_{3x} + F_{2x} = F_{1x}$

$F_{3x} = F_{1x} - F_{2x}$

$F_{3x} = 5,19 - 3,5$

$\boxed{F_{3x} = 1,69N}$

F_{1y} F_{3y} F_{2y}

$\vec{F}_{3y} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{1y} = 0$

$F_{3y} + F_{1y} = F_{2y}$

$F_{3y} = F_{2y} - F_{1y}$

$F_{3y} = 6,06 - 3$

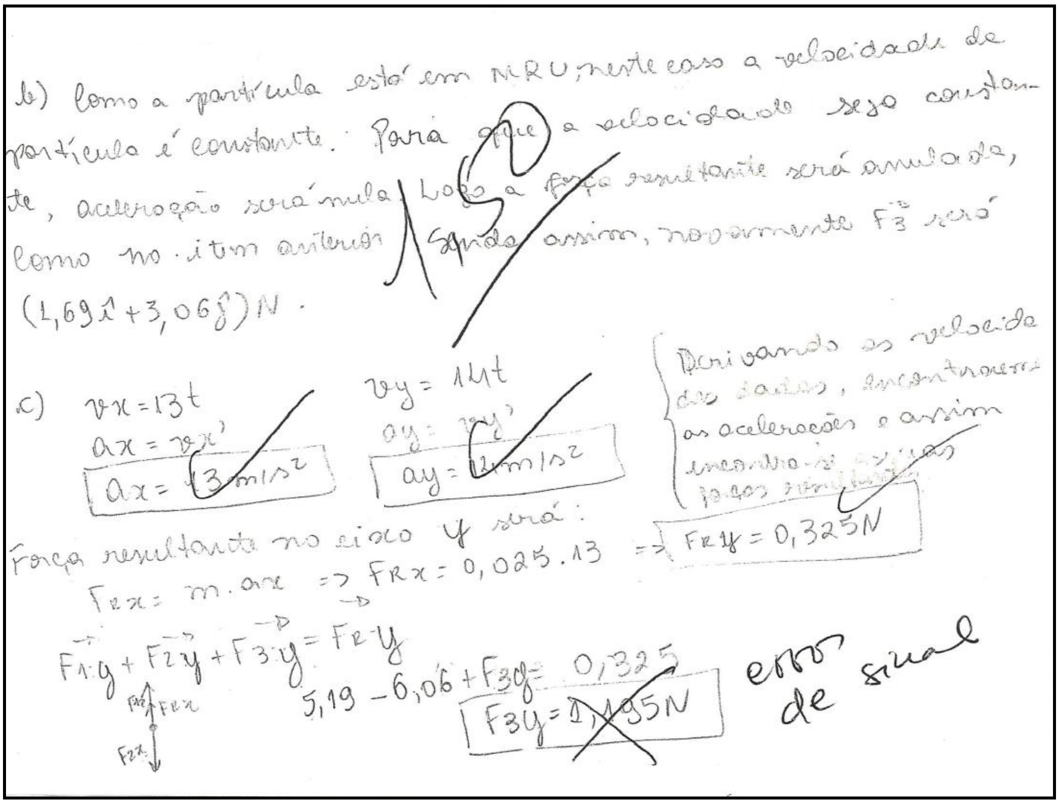
$\boxed{F_{3y} = 3,06N}$

$\boxed{\text{Logo } \vec{F_3} = (1,69\hat{i} + 3,06\hat{j})N}$

Por meio de equações matemáticas ela está dizendo que a soma das componentes escalares horizontais dos vetores força $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ tem o mesmo valor do que a componente escalar horizontal do vetor força $\vec{F}_1$, o que não está cientificamente correto já que os vetores $\vec{F}_2 + \vec{F}_3$ e $\vec{F}_1$ devem sim ter o mesmo módulo, mas sentidos contrários (sinais contrários). Da mesma forma, o módulo da soma das componentes verticais dos vetores força $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ é o igual ao módulo componente escalar vertical do vetor força $\vec{F}_2$, mas os sentidos são contrários. Para isto ela parte do pressuposto que o vetor força $\vec{F}_3$ pertence ao primeiro quadrante.

Já no item (b) (quadro 4) Maria explicita, na forma escrita, o importante teorema em ação que relaciona a aceleração com a derivada da velocidade. Calcula as componentes escalares do vetor aceleração enganando-se novamente com os sinais das componentes dos vetores força.

Quadro 4: Continuação do esquema de resolução da Maria.


b) Como a partícula está em MRU, neste caso a velocidade de partícula é constante. Para que a velocidade seja constante, aceleração será nula. Logo a força resultante será anulada, como no item anterior. Sendo assim, novamente $\vec{F_3}$ será $(1{,}69\hat{i} + 3{,}06\hat{j})\,N$.

c) $v_x = 13t$
$a_x = v_x'$
$\boxed{a_x = 13\,m/s^2}$

$v_y = 14t$
$a_y = v_y'$
$\boxed{a_y = 14\,m/s^2}$

Derivando as velocidades dadas, encontramos as acelerações e assim encontrei as forças resultantes.

Força resultante no eixo y será:
$F_{Rx} = m.a_x \Rightarrow F_{Rx} = 0{,}025.13 \Rightarrow \boxed{F_{Ry} = 0{,}325N}$

$\vec{F_1}_y + \vec{F_2}_y + \vec{F_3}_y = \vec{F_R}_y$
$5{,}19 - 6{,}06 + F_{3y} = 0{,}325$
$\boxed{F_{3y} = 1{,}195N}$

erro de sinal

Nos quadros 5 e 6 temos o esquema de resolução do aluno Tiago para a situação-problema apresentada. Em relação aos outros, Tiago explicita novos conceitos em ação pertinentes para a resolução. A componente horizontal do vetor força $\vec{F}_1$ é negativa, as componentes horizontal e vertical do vetor força $\vec{F}_2$ têm sinais positivo e negativo, respectivamente.

Outro diferencial acrescentado por Tiago diz respeito ao cálculo das componentes vertical e horizontal do vetor força $\vec{F}_2$ considerando o ângulo entre o eixo x e o vetor no sentido horário (denotado como o sentido negativo). O teorema em ação implícito utilizado por ele subentende duas importantes propriedades das funções seno e cosseno.

$$sen(-\theta) = -sen\theta \quad e \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

Isto é, as funções seno e cosseno são ímpares e pares, respectivamente.

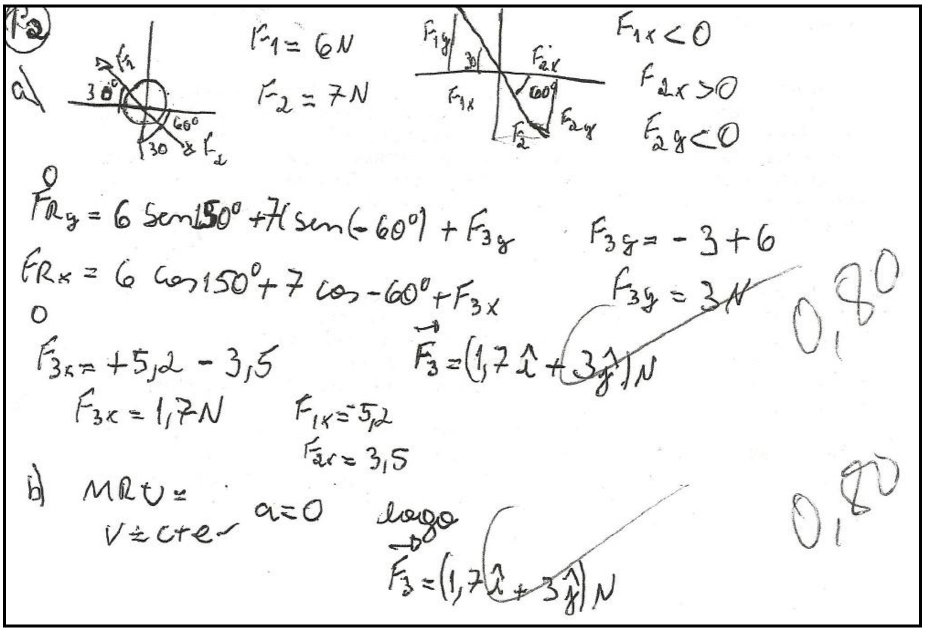
No item (b) Tiago apenas transcreve as características de um movimento retilíneo uniforme, cuja velocidade é constante e a aceleração é nula, para concluir que a resposta é a mesma do item anterior.

Para responder o item (c) (quadro 6), Tiago utiliza a notação de Leibniz para afirmar que derivada da velocidade com respeito ao tempo é a aceleração, e aplica a regra da derivada de uma potência para calculá-la. Após, utiliza o teorema em ação seguinte.

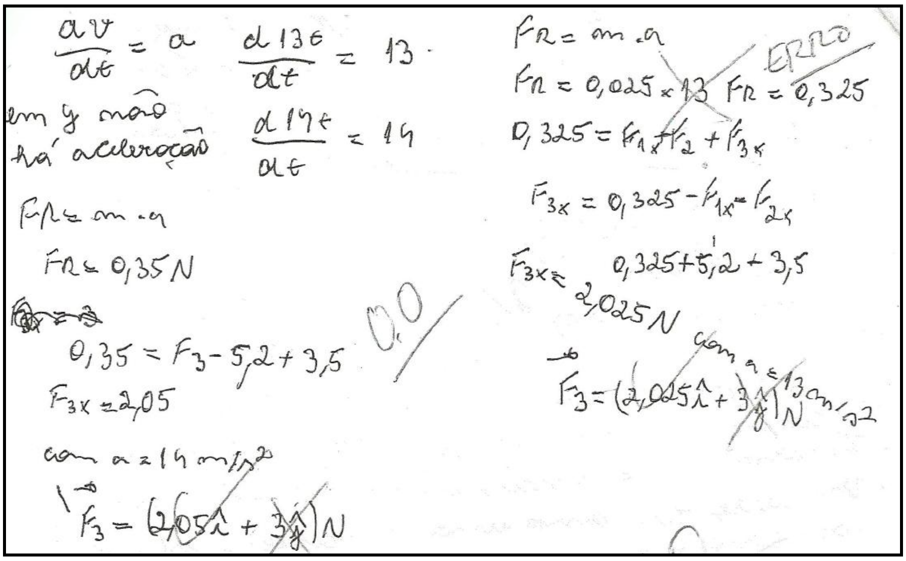
$$\vec{F}_R = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{Rx} = ma_x \\ F_{Ry} = ma_y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = ma_x \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = ma_y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{3x} = ma_x - F_{1x} - F_{2x} \\ F_{3y} = ma_y - F_{1y} - F_{2y} \end{cases}$$

Inicialmente, Tiago opta por calcular o valor da força resultante em relação ao eixo *x* multiplicando a massa do disco pela aceleração com respeito à *x* obtida. Então substitui o valor obtido na equação que iguala a soma das componentes das três forças em relação à *x*. A mesma forma operacional ele utiliza para os cálculos em relação ao eixo *y*, mas comete um engano ao considerar que na direção vertical não há aceleração (apesar de ter mostrado que ela existe quando derivou a velocidade com respeito ao tempo na direção do eixo *y*).

Quadro 5: Esquema de resolução do Tiago.



Quadro 6: Continuação da esquematização de Tiago.



$\frac{dv}{dt} = a$ $\quad \frac{d\,13t}{dt} = 13$

em y não há aceleração $\quad \frac{d\,14t}{dt} = 14$

$F_R = m \cdot a$

$F_R = 0,35N$

$0,35 = F_3 - 5,2 + 3,5$

$F_{3x} = 2,05$

com $a = 14\ m/s^2$

$\vec{F}_3 = (2,05\hat{i} + 3\hat{j})N$

0,0

$F_R = m.a$

$F_R = 0,025 \times 13$ $\quad F_R = 0,325$ ERRO

$0,325 = F_{1x} + F_2 + F_{3x}$

$F_{3x} = 0,325 - F_{1x} - F_{2x}$

$F_{3x} = 0,325 + 5,2 + 3,5$

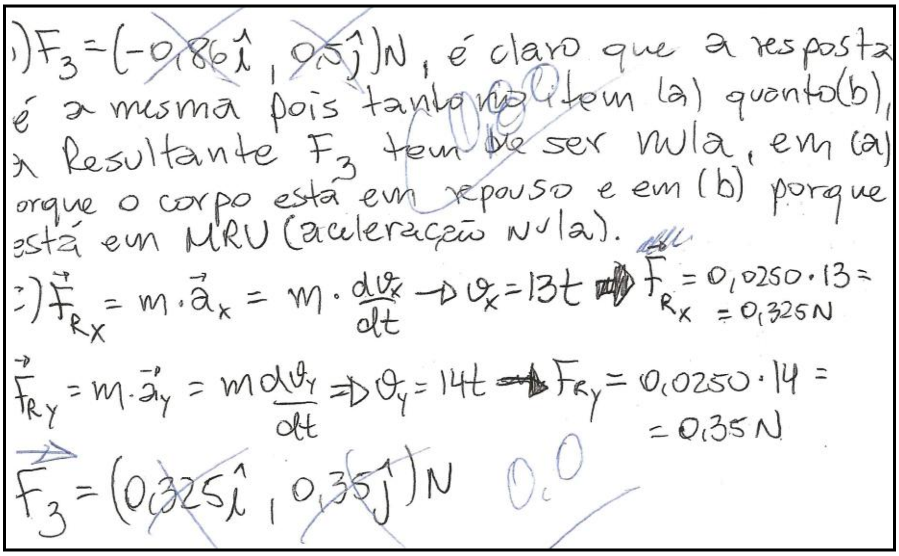
$2,025N$

com $a = 13\ m/s^2$

$\vec{F}_3 = (2,025\hat{i} + 3\hat{j})N$

No quadro 7 vemos a resolução do item (c), feita pelo aluno José. Ele faz menção à definição da aceleração como a derivada da velocidade, inclusive utilizando a notação de Leibniz. No entanto não se atenta para a notação de vetor, apresentando um misto das duas formas de representação apresentadas em aula.

Quadro 7: A esquematização de José.



b) $F_3 = (-0,86\hat{i}, 0,5\hat{j})N$, é claro que a resposta é a mesma pois tanto no item (a) quanto (b), a Resultante F_3 tem de ser nula, em (a) porque o corpo está em repouso e em (b) porque está em MRU (aceleração nula).

c) $\vec{F}_{R_x} = m \cdot \vec{a}_x = m \cdot \frac{dv_x}{dt} \rightarrow v_x = 13t \Rightarrow F_{R_x} = 0,0250 \cdot 13 = 0,325N$

$\vec{F}_{R_y} = m \cdot \vec{a}_y = m \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = 14t \Rightarrow F_{R_y} = 0,0250 \cdot 14 = 0,35N$

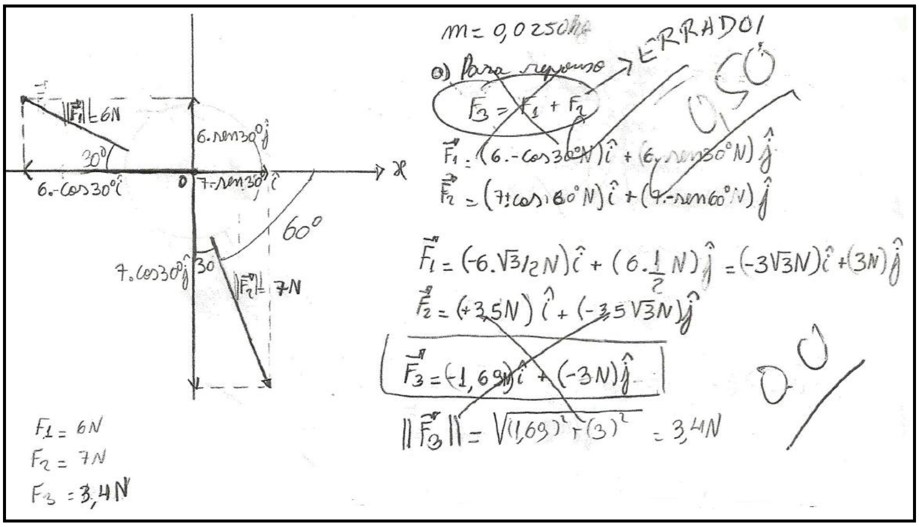
$\vec{F}_3 = (0,325\hat{i}, 0,35\hat{j})N$ $\quad$ 0,0

José também comete um erro quando não considera a soma das componentes escalares dos três vetores como sendo igual ao resultado obtido com o produto da massa pela aceleração.

No quadro 8 observamos como uma notação matemática errada pode prejudicar o estudante. Marcos quer dizer que a terceira força procurada deve equilibrar a soma das outras duas. No entanto, explicita isto de forma contraditória, afirmando que a componente escalar da terceira força iguala a soma das componentes escalares das outras duas forças fornecidas. Isto é, ele “pensa” de uma forma e “externaliza o que pensou”, de outra forma.

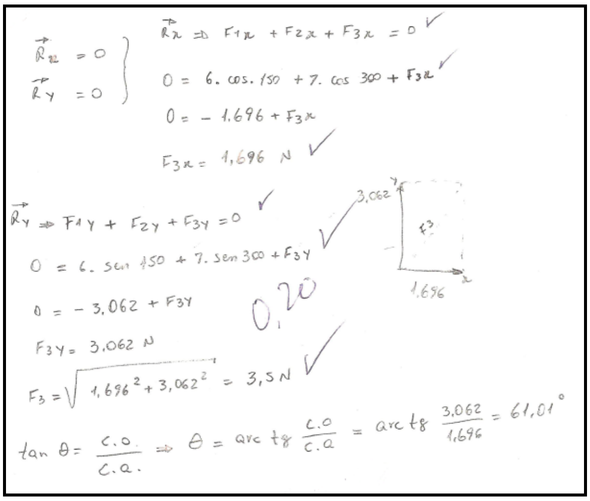
Interessante observar que ao representar graficamente os vetores fornecidos no problema o aluno preocupa-se em considerar o disco em toda sua extensão, e não na forma pontual (como uma partícula). Quando o corpo é idealizado como uma partícula, todos os vetores envolvidos no problema partem da mesma origem no sistema de coordenadas retangulares. O aluno calcula a intensidade do vetor que representa a terceira força mostrando coerência com relação à notação de módulo apresentada em sala de aula.

Quadro 8: A representação gráfica de vetores feita pelo Marcos.



No quadro 9 vemos a esquematização representada por Pedro, para a resolução do problema. Assim como outros colegas ele iguala um vetor a um escalar. O algoritmo apresentado dá conta de calcular as componentes escalares do vetor força $\vec{F}_3$. O aluno aplica a definição apresentada em aula para a decomposição das componentes escalares. Vai mais além do que o solicitado, quando calcula a intensidade e a orientação do vetor, apresentando o ângulo entre o vetor força obtido e o eixo *x*. Pedro representa geometricamente o vetor força $\vec{F}_3$. Os demais itens não foram resolvidos por ele.

Quadro 9: O esquema representado pelo aluno Pedro.



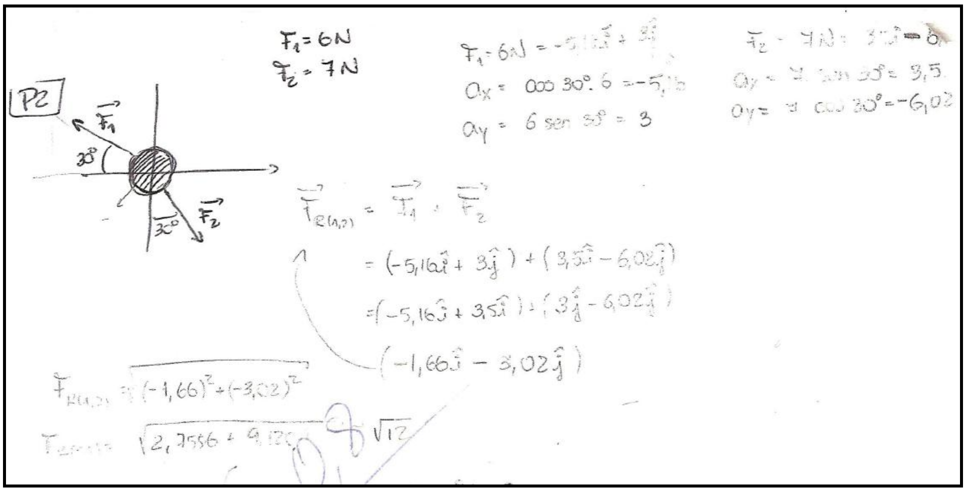
No quadro 10 observamos que a aluna Patrícia calcula as componentes escalares dos vetores força $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ através das componentes escalares do vetor aceleração. No entanto, nesta operação, a aluna não divide os valores obtidos pelo valor da massa do disco. O teorema em ação implícito que levou Patrícia a externalizar parte deste raciocínio é o seguinte:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = m\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 = m\vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{F}_1 / m \\ \vec{a}_2 = \vec{F}_2 / m \end{cases}$$

O vetor força é um múltiplo escalar do vetor aceleração, e como a massa é positiva a força e a aceleração tem a mesma orientação. Se a massa fornecida para o disco fosse de *1,00 kg* poderíamos afirmar que além de terem a mesma orientação, a aceleração e a força têm a mesma intensidade.

Na resposta ao item (a) Patrícia explicita os valores obtidos, mas passa a denominá-los as componentes escalares do vetor força.

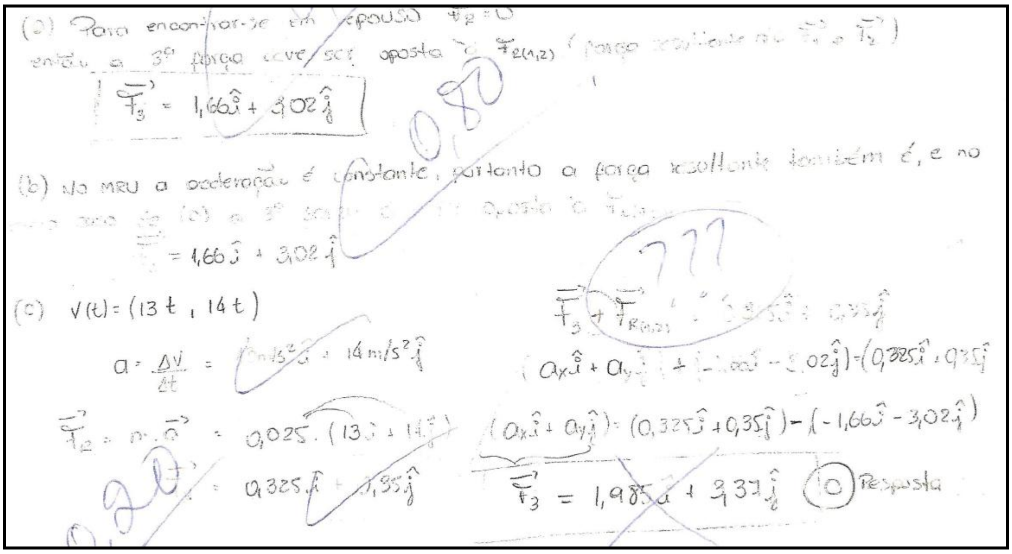
Quadro 10: A forma esquematizada por Patrícia.



No item (c) (quadro 11) a aluna apresenta o vetor velocidade, e logo abaixo apresenta o vetor aceleração com seus valores finais a partir da derivada do vetor velocidade. Observa-se que Patrícia denota a aceleração instantânea como se fosse uma aceleração média (variação da velocidade com relação ao tempo). Um importante teorema em ação que pode dar conta da representação utilizada pela aluna afirma que: *se a aceleração em qualquer instante de tempo num dado intervalo é constante, então ela é igual à aceleração média no intervalo considerado ou em qualquer subintervalo contido neste intervalo.*

Ao final a aluna explicita novamente o vetor força com o vetor aceleração quando indica que: $\vec{F}_3 = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$

Quadro 11: Continuando na resolução de Patrícia.



6.6. Considerações

Ao longo da análise descritiva e interpretativa apresentada na seção 6.2 (tabela 7) identificamos dezesseis categorias que indicam as relações (em termos de conteúdos, notações e linguagens) entre as disciplinas do Cálculo I e da Física I, que fornecem os fundamentos para a reelaboração de Módulos Matemáticos do Cálculo para a Física. Considera-se que, a partir da análise de cada uma das categorias apresentadas, um professor de Cálculo pode pautar a construção de um currículo para o ensino da disciplina de Cálculo específica para os estudantes da Física.

Dentro do contexto investigado constatamos que o método de ensino adotado pelo professor, aliado à forma como os módulos matemáticos foram introduzidos ao longo do desenvolvimento da disciplina é coerente com pressupostos básicos das teorias dos campos conceituais e da aprendizagem significativa, especificamente no que se refere à potencialidade significativa do material instrucional na forma geral ("como um todo") com que foi desenvolvido, e na apresentação de diferentes situações físicas e matemáticas, que convergem para o entendimento de um mesmo conceito.

Os princípios da *diferenciação progressiva* e da *reconciliação integrativa* estão presentes em diversas circunstâncias descritas. Por exemplo, na transcrição das aulas observadas, grandezas cinemáticas básicas são representadas, inicialmente, na sua forma vetorial. Com a apresentação dos módulos matemáticos procurou-se diferenciar e ao mesmo tempo relacionar grandezas vetoriais e grandezas escalares. Em termos matemáticos podemos dizer que *noções de funções vetoriais são apresentadas anteriormente às noções de funções escalares,* o que caracteriza o enfoque "do geral para o específico", defendido por Ausubel (1963 e 2000). Estes conceitos são retomados ao longo do desenvolvimento da disciplina. Notamos que isto só foi possível devido à forma como o professor conduziu a disciplina, ao iniciar o conteúdo pela parte Dinâmica do estudo do movimento.

Ausubel (2000) defende o princípio da *diferenciação progressiva* para programar a matéria de ensino com vistas à aprendizagem significativa. Segundo ele, as ideias mais gerais e inclusivas da disciplina devem ser apresentadas em primeiro lugar, para depois serem progressivamente diferenciadas em termos de pormenores e de especificidade. O autor argumenta que: (1) é menos difícil para os seres humanos apreenderem os aspectos diferenciados de um todo, anteriormente apreendido e mais inclusivo, do que formular o todo inclusivo a partir das partes diferenciadas anteriormente apreendidas; (2) a organização que o indivíduo faz do conteúdo de uma determinada disciplina no próprio intelecto consiste numa estrutura hierárquica, onde as ideias mais inclusivas ocupam uma posição no vértice da estrutura e *subsumem*, progressivamente, às proposições, conceitos e dados factuais menos inclusivos e mais diferenciados (ibid. p.166).

Houve, nos módulos matemáticos apresentados, uma preocupação com relação ao auxílio no processo de construção de *conceitos subsunçores* essenciais no campo conceitual da Mecânica, de forma integrada. Percebemos, através da análise das provas realizadas pelos estudantes que: *grande parte deles não dispõem dos conceitos subsunçores necessários para uma aprendizagem significativa dos conteúdos abordados na Mecânica universitária. Mesmo aqueles que dispõem destes subsunçores (específicos para a aprendizagem dos conceitos físicos e matemáticos) esquematizam estes conhecimentos de forma compartimentada, sem a ênfase na articulação entre as duas áreas. Este fato pode ser reflexo de duas possíveis causas: a primeira refere-se ao processo de aprendizagem mecânica anterior, tanto dos conceitos matemáticos como dos conceitos físicos. A segunda refere-se a sistemas de ensino isolados entre as duas áreas, que se mantém em toda a fase escolar do estudante, independentemente de existirem vestígios de uma aprendizagem significativa, em determinadas circunstâncias, de conceitos isolados.*

Os módulos matemáticos apresentados procuraram acrescentar situações do domínio da disciplina do Cálculo oportunizando aos estudantes um primeiro contato com as diferentes notações e linguagem de um mesmo conceito em diferentes contextos. Isto vai ao encontro do pressuposto básico de Vergnaud (1993) de que a formação de um conceito na estrutura cognitiva do estudante depende de uma grande variedade de situações-problemas através das quais o aluno possa perceber regularidades em termos dos atributos criteriais deste conceito. Este processo pode caracterizar uma aprendizagem significativa conceitual. O ideal para o contexto da Física é que possam ser integradas também situações-problema do contexto da Física experimental que necessitam dos mesmos conceitos do Cálculo e da Física Teórica para serem solucionadas, que foge do âmbito deste trabalho.

Entretanto, a forma de ensino adotada pode ser revista no que se refere: *à possibilidade de permitir uma participação mais efetiva e ativa dos alunos no processo do ensino, e no que se refere a formas alternativas de atividades que permitam um mapeamento* *cognitivo mais profundo dos conhecimentos prévios dos estudantes e das formas com que elaboram seus esquemas para dar conta das situações trabalhadas em sala de aula.* Este resultado é essencial para a próxima fase, que analisará como se dá o processo da aprendizagem a partir do material elaborado, considerando no processo do ensino, estas modificações.

Um fato muito importante a ser discutido é que os módulos matemáticos do Cálculo para a Física, elaborados nas concepções propostas para a pesquisa, só terão sentido quando introduzidos "integradamente" e "articuladamente" com o desenvolvimento do conteúdo da Mecânica, e não de forma isolada e compartimentada, como tópicos introdutórios à disciplina. Como vimos os conceitos matemáticos foram introduzidos "ao longo do desenvolvimento da disciplina" muitas vezes com o auxílio do próprio professor, através de seu notável conhecimento matemático e físico, e de sua grande experiência com o ensino da Mecânica. Este resultado nos remete a uma importante implicação para o ensino das disciplinas de Cálculo para a Física: *um diálogo com a área da Física quanto a formas de ensino que propiciem o desenvolvimento de materiais instrucionais pautados nas articulações necessárias. Não defendemos que isto seja feito, necessariamente, num mesmo ambiente. Mas, no mínimo, deve haver um consenso que busque sincronismos (quando for possível).*

O material instrucional apresentado neste estudo indica algumas vertentes para este desenvolvimento, principalmente no que se refere à construção do processo do limite por intermédio do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral, importantes campos conceituais da disciplina de Cálculo que devem ser articulados com o campo conceitual da Mecânica em situações específicas como: o conceito de velocidade instantânea, o conceito de aceleração, o conceito de trabalho, e todas as situações físicas que requerem a operacionalização matemática com uso de conceitos e procedimentos do Cálculo. Percebemos esta preocupação nas aulas observadas do *professor B*, na etapa anterior da pesquisa.

É importante destacar que o atual sistema de ensino da disciplina de Física não fornece possibilidades de grandes inovações didáticas. O currículo é bastante extenso e a expectativa dos professores de Física com relação à forma como a Matemática deve ser utilizada no contexto da Física é diferente da expectativa dos professores de Matemática com relação à forma como a Matemática deva ser desenvolvida no contexto da disciplina de Cálculo. Tanto que algumas situações propostas nos módulos matemáticos não puderam ser desenvolvidas de forma detalhada. Nestas condições, a presença de um professor de Matemática nas aulas de Física, lecionando módulos matemáticos para a Física, pode se tornar um obstáculo para a aprendizagem da Física conceitual. No entanto, levando em consideração os objetivos propostos, neste estudo houve um grande avanço com relação à identificação da forma como os conteúdos matemáticos da disciplina de Cálculo podem ser desenvolvidos para os estudantes da Física.

Percebe-se uma grande receptividade e interesse por parte dos professores de Física (nos três semestres em que observamos aulas) quanto à importância de pesquisas que procuram discutir e buscar soluções para o problema da aprendizagem significativa da Matemática no contexto da Física.

Outra consideração nesta etapa, menos relevante do que a elaboração do próprio material de apoio, mas não menos importante no que se refere à análise do processo do desenvolvimento cognitivo dos estudantes, diz respeito às interpretações apresentada na seção 6.3 referentes aos esquemas utilizados por alguns deles para darem conta de uma situação-problema proposta na primeira prova. Quando foi aplicada a primeira prova já haviam sido apresentados os dois módulos matemáticos iniciais: vetores e trigonometria e noções do Cálculo Diferencial.

Dentre as provas elegemos aleatoriamente algumas para discutir a forma como os estudantes esquematizaram e operacionalizaram a situação-proposta. Vergnaud (1993, p. 2) *chama de esquema a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada.* Também se refere ao esquema como *uma totalidade dinâmica organizadora da ação do sujeito para uma classe de situações específicas* (ibid. p. 6).

Nossa intenção com a análise foi identificar e transcrever a forma como os estudantes operacionalizam e representam matematicamente os conceitos necessários para dar conta da situação-problema proposta. Foi possível identificar alguns dos conhecimentos contidos nos esquemas de alguns estudantes, os quais Vergnaud (ibid. p.4) denomina, de forma global, *invariantes operatórias.* Estas invariantes operatórias podem ser teoremas em ação e/ou conceitos em ação. Também foi possível identificar as representações simbólicas, linguísticas e gráficas que estes estudantes utilizaram para representar seus invariantes. Constatamos que alguns deles respondem de *forma algorítmica e mecânica* à resolução da situação-problema, inserindo, inclusive, mais informações do que necessariamente o exercício requer.

Observamos, também, grande quantidade de estudantes denotando erroneamente símbolos matemáticos no contexto da Física. No entanto, no contexto investigado isto parece não ser o fator mais importante, o que nos leva a refletir sobre formas distintas de valorização das representações matemáticas nos dois diferentes contextos: do Cálculo e da Física.

Resultados mais conclusivos exigem no ensino uma maior variedade de situações-problemas, atividades colaborativas que permitam a negociação de significados e a externalização de invariantes operatórios implícitos. A continuidade desta análise se dará na próxima etapa da pesquisa.

No entanto, já podemos indentificar, a partir dos erros cometidos pelos estudantes no que se refere à conceitualização matemática, que as especificidades dos conceitos matemáticos devem ser melhores diferenciadas no contexto da disciplina do Cálculo. Cabe exclusivamente às disciplinas Matemáticas afins ao curso de Física proporcionar situações que favoreçam o entendimento destes conceitos de forma articulada, significativa para o contexto da Física.

Capítulo 7

INTEGRAÇÃO DO ENSINO E INVESTIGAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Dando continuidade à investigação adentramos na sua etapa final. No estudo anterior conseguimos elaborar e lecionar uma primeira versão do que denominamos *Módulos Matemáticos do Cálculo para a Física* especificando, através de um estudo etnográfico, as fases do currículo da disciplina que podem ser importantes para a operacionalidade de conceitos matemáticos do Cálculo, com ênfase na sua integração com conceitos físicos da Mecânica Newtoniana.

Se analisado a partir dos currículos das disciplinas Matemáticas este material deve apresentar fundamentos básicos que vão desde o Pré-Cálculo até a Análise vetorial, passando pelas noções do Cálculo Diferencial e Integral e de Equações Diferenciais Ordinárias. No entanto, concluímos que *tal material só terá potencialidade significativa se for introduzido ao longo do desenvolvimento da disciplina de Física Básica, e não de forma compartimentada ou dessincronizada à apresentação do conteúdo da referida disciplina*.

Sabemos que o significado lógico do material (sua potencialidade significativa) não é condição suficiente para a ocorrência da aprendizagem significativa. É necessário que este material instrucional tenha significado para o aprendiz, em níveis psicológicos. Em outras palavras, é preciso que o aprendiz tenha pré-disposição cognitiva para a apreensão deste material e tenha interesse em apreender o material de forma significativa, e não de forma mecânica.

A averiguação da pré-disposição cognitiva do aprendiz, do seu interesse e de sua motivação para aprendizagem esbarra na necessidade de uma investigação mais aprofundada com relação às formas de pensamento e procedimentos adotados por estes estudantes frente às situações que lhe são propostas.

Como vimos nos referenciais teóricos Vergnaud (1993, p. 2) chama de *esquema* a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada. Designam-se pelas expressões *conceito-em-ação* e *teorema-em-ação* os conhecimentos contidos nos esquemas. Pode-se também designá-los pela expressão mais global *invariantes operatórias* (ibid. p. 4).

Por isso, nesta etapa do trabalho, *um dos objetivos foi incrementar o sistema de ensino vigente na disciplina de Física Básica com estratégias que pudessem favorecer a participação mais ativa dos estudantes, de forma que fossem capazes de externalizar informações pertinentes para os propósitos da pesquisa.* Particularmente, investimos em atividades colaborativas (trabalhos em grupos) e no incentivo ao diálogo aberto em sala de aula, referente aos temas estudados, mantendo os critérios avaliativos oficiais exigidos para a aprovação na disciplina.

Procuramos registrar qualquer tipo de participação vinda dos estudantes, que pudessem elucidar esquemas e procedimentos frente às situações apresentadas em sala de aula. *Outro importante objetivo foi analisar a forma como a Matemática era utilizada neste processo, especialmente analisar como os estudantes realizam (se é que realizam) algum tipo de articulação entre conceitos matemáticos e físicos a partir do método de ensino integrado proposto.*

Ainda mantendo as concepções de pesquisa qualitativa, descritiva e interpretativa, consideramos que o diferencial da investigação desta etapa para as anteriores foi o duplo papel assumido, de *professora-pesquisadora*. Como docente da disciplina de Cálculo não possuía a experiência com o ensino da Física. No entanto lecionar a disciplina de Física foi fator crucial para a investigação porque nos proporcionou: *sentir como se dá a construção do processo do ensino e da aprendizagem da disciplina de Física Básica com a visão de um professor de Cálculo. Ao mesmo tempo colocar-me numa posição externa aos acontecimentos consequentes de minhas ações docentes e das ações discentes, e analisar criticamente este processo, com a visão de uma pesquisadora em ensino de Física.*

Como nas etapas anteriores, a quantidade de registros de dados coletada é muito extensa, especialmente no que diz respeito à descrição das aulas, sendo inviável a apresentação na sua totalidade. Por isso procuramos nos deter nos recortes mais relevantes para os propósitos da pesquisa.

7.1. O contexto da investigação

O estudo foi desenvolvido ao longo de três semestres letivos consecutivos: 2011/2, 2012/1 e 2012/2 quando ministramos a disciplina introdutória Física Geral I A para estudantes dos Cursos de Física, na UFRGS, na condição de docência orientada. Os três estudos específicos foram realizados através da *etnografia em sala de aula*, sendo que cada um deles traz particularidades próprias das turmas que foram investigadas e das diferentes situações com as quais tivemos que lidar na docência da Física. Informações gerais das três turmas investigadas são relacionadas na tabela 16.

TABELA 16: Síntese geral dos três contextos investigados: 2011/2, 2012/1 e 2012/2

	Turma de 2011/2	Turma de 2012/1	Turma de 2012/2
Horários	Turma noturna; 90 horas de aulas teóricas; três encontros semanais de duas horas: das 20h30min até 22h10min.	Turma diurna; 90 horas de aulas teóricas; três encontros semanais de duas horas: das 15h30min até 17h10min.	Turma noturna; 90 horas de aulas teóricas; três encontros semanais de duas horas: das 20h30min até 22h10min.
Nº de alunos matriculados por curso	35 alunos: - Licenciatura Noturna: 33; - Pesquisa Básica: 1 - Materiais e Nano. : 1	35 alunos: - Licenciatura em Física: 17; - Física Computacional: 11; - Astrofísica: 1 - Materiais e Nano. : 3 - Física Básica: 3	31 alunos: - Licenciatura Noturna: 28 - Pesquisa Básica: 1 - Licenciatura Diurna: 1 - Aluno Especial: 1 (Biólogo).
Aproveitamento geral dos alunos	- Reprovação frequência: 13 (4 abandonaram após a primeira avaliação e 9 nunca compareceram) - Reprovação: 5 - Aprovações: 17 (4 conceitos A, 5 conceitos B e 8 conceitos C)	- Reprovação frequência: 9 (por abandono após a primeira avaliação) - Reprovação: 10 - Aprovações: 16 (3 conceitos A, 6 conceitos B e 7 conceitos C).	- Reprovação frequência: 7 (2 desistiram do curso, 2 desistiram da disciplina e 3 nunca compareceram) - Reprovação: 8 (não compareceram nem na terceira prova e nem na prova de recuperação) - Aprovações: 16 (3 conceitos A, 3 conceitos B e 10 conceitos C)

7.2. Inserção no campo da investigação

No final de 2011/1 havia sido planejado um Plano de Ensino proposto para a disciplina de Física Geral I A em comum acordo com o coordenador da disciplina *(professor c),* com o qual estava interagindo há dois semestres e, com o orientador do doutorado *(professor e*). Este plano foi elaborado a partir dos resultados obtidos na fase exploratória da pesquisa e na fase da elaboração do material instrucional proposto. A intenção inicial era trabalhar novamente os denominados *Módulos Matemáticos do Cálculo para a Física básica*, que haviam sido ministrados nas aulas do *professor c*, no semestre anterior. Desta vez, tentando incrementar o ensino com as *concepções de integração entre as duas áreas*, pretendidas com a pesquisa.

O novo coordenador da disciplina *(professor f)* demonstrou grande preocupação quanto à forma como o conteúdo seria desenvolvido. Não poderia ser apresentado aos alunos um Plano de Ensino diferente do Plano oficial da disciplina. Em conversa anterior, o chefe do departamento e Física da UFRGS *(professor g)* já havia demonstrado esta preocupação. Apesar de aprovar o Plano específico para a pesquisa, salientou que os métodos de ensino adotados nas três turmas ofertadas semestralmente não poderiam diferir muito. Isso poderia acarretar, entre os alunos, a procura por métodos considerados mais facilitadores da aprovação. Sua sugestão era que minha pesquisa fosse aplicada em turmas da Licenciatura em Física ou em turmas da Licenciatura em Matemática, já que o projeto estava sendo desenvolvido na área do ensino do Cálculo para físicos. Enfim, após a regularização dos trâmites burocráticos e de maiores esclarecimentos quanto aos objetivos e métodos utilizados para a pesquisa tudo ficou estabelecido.

7.3. A proposta de ensino

A proposta de ensino apresentada teve o intuito de acrescentar ao sistema tradicional de ensino estratégias que pudessem facilitar a organização do ensino e a investigação da aprendizagem a partir da integração pretendida entre as áreas do Cálculo e da Física, sempre procurando manter as determinações exigidas pela Instituição. A tabela 17 indica como esta inserção foi feita.

TABELA 17: Síntese comparativa entre o plano de ensino oficial e o plano de ensino proposto para a disciplina FIS01257 – Física Geral I A.

	PLANO DE ENSINO OFICIAL	PLANO DE ENSINO PROPOSTO
OBJETIVOS	Ao final do semestre o aluno deverá ser capaz de descrever o movimento de uma partícula material em uma e duas dimensões, bem como a rotação e o rolamento de um corpo	Espera-se detectar, ao longo das etapas do processo do ensino, evidências de aprendizagem significativa dos conteúdos físicos relacionados à Mecânica básica, com ênfase, em cada tópico abordado, à

	rígido, de utilizar corretamente as leis de Newton e de aplicar as leis de conservação do momentum linear e da energia mecânica.	estruturação matemática necessária para a resolução das situações-problema propostas.
CONTEÚDO PROGRAMÁTICO	Unidade1: medições, movimento retilíneo e movimento em duas e três dimensões; dinâmica da partícula material; estática. Unidade2: trabalho e energia cinética; energia potencial e energia mecânica; leis da conservação da energia. Unidade3: movimento de rotação; impulso e momento linear; conservação do momento linear; colisões.	Inserção ao longo do desenvolvimento das três unidades propostas no plano oficial dos seguintes tópicos matemáticos: *vetores e trigonometria; noções do Cálculo Diferencial; Noções do Cálculo Integral e noções da Análise Vetorial; interpretações geométricas e físicas dos conceitos matemáticos abordados*.
ESTRATÉGIAS DE ENSINO	Turmas presenciais: aulas de caráter teórico, com exposição do conteúdo pelo professor e resolução de exercícios propostos.	Turmas presenciais: aulas de caráter teórico, com exposição do conteúdo pelo professor; fomento à discussão de opiniões e sugestões ao longo do desenvolvimento de situações-problema propostas; atividades de caráter colaborativo e participativo; trabalhos em grupo; apresentações dos trabalhos realizados; incentivo a autoavaliação, autocrítica e avaliação entre grupos.
SISTEMA AVALIATIVO	A nota final será a média aritmética de três provas, uma para cada unidade de ensino. Para aprovação, todas as notas devem ser superiores a 3,0 e a nota final deve ser igual ou maior a 6.0.	A avaliação em cada unidade de ensino será resultante da média aritmética da avaliação de uma atividade colaborativa (trabalhos em grupo ou trabalhos individuais) e de uma prova. A nota final será a média aritmética das notas obtidas nas três áreas.
ATIVIDADE DE RECUPERAÇÃO	Cada aluno poderá realizar uma prova de recuperação (escrita). Para efeito de cálculo da nota final, a nota obtida na prova de recuperação substituirá a nota da prova correspondente e os conteúdos serão os mesmos da prova que está sendo	O sistema avaliativo proposto implicará a participação ativa dos estudantes em atividades colaborativas ou individuais. Como proposto no plano oficial, ao final do semestre será permitida a recuperação de uma das notas das três áreas, caso os alunos optem por isso.

	recuperada.	
BIBLIOGRAFIA	Básica essencial: Halliday, D.; Resnick, R.; Walker, J. – Fundamentos de Física – Editora LTC. Básica: Knight, R. D. – Física – uma abordagem estratégica – Editora Bookman; Tipler, P. A.; Mosca, G. – Física I – Editora LTC (ISBN:85-216-1462-4). Complementar: Hewitt, P.G. – Física Conceitual – Editora Bookman . Outras Referências: Veit, E. e Mors, P.; Física Geral Universitária: Mecânica Interativa. 1. Ed. Belo Horizonte: UFMG, 2010 (Acompanha CD-ROM com software Modellus).	Bibliografias complementares: 1) Moreira, M. A. – A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula – Editora UnB; 2) Anton, H.; Bievens, I.; Davis, S. – Cálculo, volumes 1 e 2. Editora Bookman. Outras Referências: 1) Rex, A.; Jackson, M. – Integrated Physics and Calculus. Addison-Wesley; 2) Davidson, R. C.; Marion, J. B. – Mathematical Methods for Introductory Physics with Calculus. Saunders Golden Sunburst Series; 3) MacCallum, W. G.; Hughes-Hallett D.; Gleason, A. M. – Cálculo de várias variáveis – Editora Edgard Blücher LTDA.

7.4. Descrição e interpretação das aulas ministradas

7.4.1. A turma de 2011/2

Aula do dia 08/08/2011: Apresentei o programa de ensino proposto e comentei sobre os propósitos da pesquisa de doutorado em Ensino de Física. Uma aluna argumentou que *o sistema de avaliação adotado costumeiramente na disciplina deveria ser revisto*. Para ela, *o atual sistema apresenta muitos problemas, e os critérios de avaliação deveriam ser discutidos conjuntamente com os alunos.* Respondi que, com base na minha experiência, a área do ensino tem gradativamente ganhado espaço nas universidades e que, *uma coordenação da disciplina, planos de ensino oficiais e sistemas avaliativos pré-definidos têm a intenção de manter a organização do sistema.*

Perguntei aos alunos como eles definem a Física, e por que eles haviam optado pelo curso de Física. Algumas respostas foram: *a Física explica todos os fenômenos, por isso escolhi o curso; tenho curiosidade em saber como funcionam as coisas; meu trabalho está relacionado com conhecimentos físicos*.

Apresentei uma definição para *Física* e a classificação das suas áreas[92], especificando o lugar da Mecânica. Falei nas ideias básicas e intuitivas de Aristóteles e como elas diferenciam das ideias de Galileu e Newton[93].

Para falar de *grandezas físicas*, apresentei a equação que representa a *lei da gravitação universal*, fazendo um paralelo entre *leis físicas, grandezas físicas e variáveis matemáticas*. O mesmo exemplo foi utilizado para falar em *homegeneidade dimensional de uma equação física*. Ao final foi feito um exercício sobre conversão de unidades, adotando o método da *conversão em cadeia*.

<u>*Aula do dia 10/08/2011:*</u> Foram resolvidos mais alguns exemplos sobre transformação de unidades e definidos os padrões de unidade para o *comprimento, tempo e massa*. Lembramos como a *notação científica* pode facilitar respostas numéricas em termos de suas *ordens de grandezas.* Também discutimos a relação entre *números reais* e resultados numéricos obtidos a partir de *medições físicas*, ou a partir do uso das calculadoras, respeitando os *algarismos significativos.*

Foram definidos alguns conceitos básicos da Dinâmica: *Mecânica; Partícula; Corpo; Densidade de um Corpo; Corpo Rígido; Referencial; Sistema de Coordenadas ou Sistema de Referência; Sistema Mecânico; Vizinhança; Tipos Básicos de Movimento de Corpos Rígidos.*

Um aluno lança a seguinte pergunta: *Uma garrafa com um pouco de água dentro, colocada a rodar, é considerada um corpo rígido?*

Voltei à definição e tentei refletir com eles: *um corpo rígido é um corpo que não muda a forma e nem o volume no tempo. Pode se tratar de um sistema mecânico...* Neste momento começou uma polêmica na aula. Alguns alunos diziam: *se a água tiver congelada, então é um*

---

[92] Apresentada a partir do livro Física 1 – Mecânica de Alberto Gaspar. (2000).

[93] As ideias básicas de Aristóteles, Galileu e Newton foram abordados a partir do livro *Física Conceitual*, de Paul G. Hewitt (2008).

corpo rígido; tira a água da garrafa que fica mais fácil; depende do referencial que está sendo considerado.

Continuei pensando alto: *A água muda de forma com o movimento, então pode não ser um corpo rígido...* Outro aluno comenta: *Mas porque a água não pode ficar com a mesma forma durante o movimento?* Deixei a questão "em aberto" afirmando que ao longo do desenvolvimento da disciplina este conceito seria *progressivamente diferenciado*.

Percebi o motivo pelo qual os livros didáticos iniciam o conteúdo pelo *modelo da partícula*. Num primeiro momento *corpos rígidos* são idealizados como *partículas* dotadas de massa. Não falar em *corpo rígido* pode não gerar a polêmica identificada, tampouco não gera a reflexão dos alunos com relação ao tema. No contexto da Física, é a partir da *idealização de um corpo rígido como uma partícula dotada de massa* que vamos poder operacionalizar matematicamente as características e as causas do seu movimento, e não a partir da *operacionalização matemática de um ponto apreender o conceito de corpo rígido.* Assim, entrei em contato com três colegas com formação puramente física para discutir a questão do aluno.

A primeira disse que responderia ao aluno que dependia do referencial: se o observador estiver fora da garrafa, então enxergará um corpo rígido. Contudo se o observador estiver dentro da garrafa, enxergará um fluido. *A segunda* responderia que uma garrafa com um pouco de água não é um corpo rígido. O líquido em repouso assume o formato do recipiente e sua superfície permanece horizontal, paralela ao fundo. Mas, se a garrafa é posta a rotar deitada horizontalmente, por exemplo, o líquido experimenta forças e sua superfície deixa de ser paralela ao fundo da garrafa (ou chão). *A terceira* afirmou que em corpo rígido a distância entre as partículas do sistema permanecem constantes, o que implica que o centro de massa do corpo não se altera. Se o movimento da garrafa com um pouco de água dentro for com velocidade constante ou com aceleração constante, pode-se considerar como um corpo rígido. Imagine esta garrafa em movimento circular na horizontal, por exemplo. Uma vez mantida a velocidade constante ou variando a velocidade, mas com aceleração constante, o centro de massa não muda. Se o movimento circular é na direção vertical, a aceleração varia, pois no topo a força peso soma-se com a força centrípeta e na base subtrai-se. Assim, ela responderia ao estudante que depende do movimento[94].

Aula do dia 12/08/2011: Retomei a aula anterior voltando ao questionamento do aluno, discutindo a questão a partir das respostas sugeridas pelas colegas, argumentando que no contexto da Mecânica introdutória os objetos de análise seriam idealizados como corpos rígidos. Todos ouviram atentamente e não fizeram nenhum comentário. Ressaltei que seus questionamentos eram muito pertinentes e que no nosso ambiente eu também estaria aprendendo com suas experiências[95].

Iniciei o *movimento unidimensional,* definindo a *função posição* da partícula na sua forma analítica, representando graficamente sua posição em dois instantes de tempo distintos. A partir do gráfico defini a *velocidade média* no intervalo de tempo cujos extremos são os instantes representados na situação anterior. Diferenciei *velocidade média de velocidade escalar média.* Em linguagem matemática enfatizei o significado gráfico da *velocidade média como o coeficiente angular da reta secante à curva representativa da função posição da partícula*, por dois pontos distintos. Ou ainda, como a tangente do ângulo de inclinação entre a reta secante pelos dois pontos distintos e o *eixo dos tempos*.

A partir daí apresentei a representação gráfica da função *velocidade instantânea*, como inclinação da reta tangente à curva da função posição num ponto qualquer. Mostrei-lhes que para obter a velocidade instantânea num ponto específico do intervalo de tempo basta para isto fazer sucessivas diminuições no intervalo, em torno do ponto de interesse, e recalcular as velocidades médias para cada novo intervalo. A sequência numérica de valores obtidos tenderá ao valor da velocidade instantânea no ponto específico de interesse. Os alunos parecem ter entendido a noção gráfica da velocidade instantânea. Então falei na notação matemática para a definição de *velocidade instantânea* em termos do limite de uma razão incremental quando o intervalo de tempo tende a se anular, e da sua unidade no SI. Apresentei

---

[94] Pude entender que uma questão física pode ter distintas interpretações, dependendo do contexto em que está sendo abordada, diferentemente de uma questão matemática, que apresenta uma única resposta, mesmo que por caminhos distintos.

[95] Para os propósitos da pesquisa era muito importante que os estudantes continuassem externalizando suas concepções a respeito dos assuntos discutidos.

a definição também em termos da *derivada da função posição com respeito ao tempo,* utilizando a notação matemática de Leibniz[96].

Falei em algumas regras básicas de derivação. Então, um aluno perguntou-me: *o que devemos fazer com isto?* Respondi-lhe que eram só algumas propriedades que poderiam ser aplicadas nos problemas de diferenciação. Ele disse: *achei que fosse algum exercício que teríamos que resolver.*

Aula do dia 15/08/2011: Da mesma forma que defini os conceitos de velocidade média e velocidade instantânea, defini os conceitos de *aceleração média* e *aceleração instantânea* de uma partícula em movimento unidimensional. Desta vez partindo de um gráfico genérico da função velocidade contra o tempo.

O objetivo era apresentar as equações para o movimento unidimensional com aceleração constante e diferenciar o caso do movimento unidimensional com aceleração nula. Da mesma forma apresentada no livro texto foram deduzidas as equações matemáticas para a *posição* e para a *velocidade* da partícula, partindo da *suposição inicial de que se a aceleração é constante, então a aceleração instantânea é igual à aceleração média*. O método da *velocidade como integral da aceleração* e da *posição como integral da velocidade* é apresentado como método alternativo no livro-texto. Comentamos com os alunos sobre este método alternativo, explicando que em outro momento seria elaborado e diferenciado com base nos conceito matemático de *integração*. As equações obtidas para a posição e para a velocidade a partir da aceleração constante caracterizam o *movimento retilíneo uniformemente variado,* sendo que se a aceleração for nula, então estaremos no caso do *movimento retilíneo uniforme*[97].

A partir disto foram deduzidas e apresentadas as equações para uma partícula em queda livre, chamando bastante a atenção para o sinal da *aceleração da gravidade* adotado na

[96] A forma de abordagem do conteúdo utilizada, iniciando pela Cinemática, me fez observar que dentre os módulos matemáticos desenvolvidos no semestre anterior, estávamos abordando as noções do Cálculo Diferencial anteriormente ao módulo sobre Vetores e Trigonometria. No entanto, desta forma estávamos mais próximos dos conteúdos iniciais desenvolvidos na disciplina do Cálculo: *números reais, funções, limites e derivadas.*

[97] Esta é uma forma alternativa utilizada por livros texto de Física para contornar o problema da falta de conhecimentos prévios que os estudantes podem apresentar com relação aos conteúdos sobre diferenciação e integração de funções escalares. No entanto, as hipóteses consideradas na dedução anterior são: 1) se a aceleração é constante então ela é igual a aceleração média; 2) se a velocidade é linear então a velocidade média num determinado intervalo de tempo é igual a média das velocidades nos extremos dos intervalos. Matematicamente estas hipóteses podem ser comprovadas através do *teorema do valor médio para integrais*.

fórmula, a partir do *sistema de referência* considerado. O conceito de módulo de um número real tem fortes implicações para justificar o sinal negativo do termo referente ao quadrado do tempo, na equação posição de um objeto em queda livre[98].

Discutimos então o clássico problema do elevador que, partindo do repouso, acelera por um determinado intervalo de tempo, mantém velocidade constante em outro intervalo de tempo, e desacelera no mesmo tempo em que acelerou inicialmente até terminar o movimento.

Um aluno disse: *Surgiu uma discussão aqui atrás. A colega está afirmando que quando um elevador despenca lá de cima, uma pessoa dentro do elevador irá experimentar, na queda, a gravidade zero. Eu disse a ela que acho que não. O que acontece?*

Refleti com eles: *A gravidade, na superfície da Terra, é aproximadamente 9,8 metros por segundo ao quadrado. Apenas a sensação é de gravidade zero!*

Outro aluno disse: *é a mesma sensação que se tem dentro de um avião que está caindo.* O aluno que levantou o questionamento completou: *amanhã vou entrar num elevador que estiver caindo e experimentar a sensação.* Houve risos. Eu disse que isto tinha a ver com a sensação de *peso aparente*, um conceito que voltaria a ser discutido[99].

Iniciei a discutir o *movimento bidimensional*, argumentando que necessitaríamos trabalhar com vetores, já que a *velocidade, a posição, o deslocamento e a aceleração* são *grandezas vetoriais*, as quais necessitam módulo, direção e sentido (ou módulo e orientação) para serem determinadas. Observei que o número de alunos em sala de aula havia diminuído, e a aluna que havia, no primeiro dia de aula, questionado o sistema avaliativo, não estava presente. Nesta aula ficou decidido que eu enviaria por e-mail as listas de exercícios que estavam no site da antiga disciplina FIS01257, usada para os alunos das Engenharias e para os alunos da Física.

---

[98] Se $g < 0$ então $|g| = -g$.

[99] Percebi que os conceitos dinâmicos vão sendo necessários ao longo do desenvolvimento da Cinemática, sendo importante que pudessem ser apresentados em sincronia. Esta poderia ser uma oportunidade de introduzir o conceito dinâmico de *peso aparente*. Optei por não fazê-lo, e deixar para apresentá-lo ao falarmos nas causas do movimento. *Peso aparente* pode ser definido como a força que equilibra nosso peso. Quando não existem forças para equilibrar o peso, como na queda livre, o peso aparente é igual à zero. Esta condição, a da *imponderabilidade*, é a dos astronautas nos satélites em órbita (Tipler, 1990, p. 83).

Aula do dia 17/08/2011: Nesta aula introduzi o módulo matemático sobre *vetores e trigonometria*. Falei no significado do conceito matemático de vetor no contexto da Física, na sua representação gráfica e na sua representação analítica em termos dos vetores unitários, definidos num *sistema de coordenadas dextrógiro*[100].

Enfatizei a notação utilizada na Matemática e a notação utilizada na Física (quando as unidades de grandeza vetorial têm de ser incluídas em cada componente do vetor ou fora da representação do vetor, que deve estar entre parênteses). Ao apresentar um vetor na sua forma analítica uma aluna perguntou: *Então eu tenho que somar o primeiro termo com o segundo?* Observei que ela queria somar $\hat{i}$ com $\hat{j}$ como se fossem dois escalares, e voltei a explicar a representação do vetor. Fiz dois exercícios propostos do livro texto, explicando como deveriam ser calculadas a orientação do vetor e seu módulo. Não falei nem no *produto escalar* e nem no *produto vetorial*, deixando para a parte do cálculo de *trabalho* e de *torque*, conforme havia sido abordado no semestre anterior.

Da mesma forma que aconteceu no semestre anterior, não pude resolver muitos exemplos propostos no *módulo sobre vetores*. Devido a grande quantidade de conteúdo não havia tempo suficiente para discutir muitas situações-problema, assim procurei uma abordagem mais parecida com aquela adotada no livro texto.

Um dos alunos não havia entendido a representação a partir dos vetores unitários, e então eu caminhei pela sala de aula, dando tantos passos numa direção e num sentido, e outros tantos passos em outra direção e em outro sentido. Então representei em termos dos vetores unitários os passos que havia dado. O aluno parece ter entendido, a partir do exemplo.

Ao explicar, nos exemplos feitos em aula, como deveriam calcular o ângulo que especifica a orientação do vetor, conhecido o valor de sua tangente, mostrei-lhes como utilizarem a calculadora para isto. Parece não terem ficado surpresos com a forma de resolução. No final da aula entreguei-lhes uma lista de exercícios sobre vetores (Anexo 1) para resolverem em casa, contendo três exercícios selecionados do livro texto.

---

[100] Num sistema de coordenadas dextrógiro os vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, os quais indicam as orientações positivas dos eixos x, y e z, formam 90° entre si. O sistema permanece dextrógiro quando os três eixos sofrem a mesma rotação, qualquer que ela seja (Halliday, 2009, p. 49).

Aula do dia 19/08/2011: Estendi os conceitos de *deslocamento, velocidade e aceleração* trabalhados no caso unidimensional, para os casos bi e tridimensionais. Apresentei a notação matemática para derivada de um vetor mostrando que, em termos operacionais, basta derivar cada componente do vetor. Os alunos não questionaram, apenas copiavam. Fiz o gráfico da trajetória de uma partícula genérica, para o caso bidimensional e, mostrei como representar geometricamente os *vetores posição, deslocamento, velocidade e aceleração,* no mesmo sistema de coordenadas dextrógiro. Então resolvi alguns exercícios propostos no livro. Escolhi aqueles exercícios em que os alunos deveriam derivar as componentes do vetor posição para calcular o vetor velocidade em tempos específicos. As funções a serem derivadas eram simples, sempre funções polinomiais de graus não superiores a três. Ao final da aula, *um aluno disse-me que estava com algumas dúvidas na lista que eu havia entregado na aula anterior.* Propus-lhe que comentássemos na próxima aula, e ele concordou. Estava preocupada com o tempo em que deveria expor o conteúdo sobre Cinemática. Sempre que eu chegava à sala de aula, a lousa estava repleta com as anotações do professor que ministrava a mesma disciplina, para as turmas da engenharia, num horário anterior ao meu. Percebia o avanço no conteúdo com relação à minha exposição (aparentemente mais lenta).

Aula do dia 22/08/2011: Dei início ao conceito de *movimento de projéteis (ou movimento balístico).* Iniciei discutindo a questão da independência dos movimentos vertical (uniformemente acelerado) e horizontal (uniforme). Como o movimento retilíneo para acelerações constantes e nulas já havia sido abordado foram apresentadas as equações do movimento balístico nas suas formas paramétricas.

De maneira diferente daquela abordada na disciplina de Cálculo II, indiquei a equação vetorial da posição do projétil a partir de suas equações paramétricas[101]. Desenhei o *vetor gravidade* orientado para baixo, e deduzi as equações considerando o sentido positivo do eixo *y* apontado para cima, como se costuma fazer. Eram 21h30min quando pedi que se reunissem em grupos para resolver quatro questões sobre movimento de projéteis, elaboradas a partir dos exercícios do livro texto que estava adotando.

[101] Entendemos que, desta forma, o processo de *reconciliação integrativa* pode ser atingido. O conceito: *equação paramétrica* é mais especifico frente ao conceito mais geral e inclusivo: *função vetorial*. Conforme Moreira (2006, p. 37), neste processo novas informações são adquiridas e elementos existentes na estrutura cognitiva podem se reorganizar e adquirir novos significados.

Um dos alunos perguntou-me: *a senhora quer que resolvamos o exercício a partir do roteiro que a senhora nos apresentou?* Lembrei-me do tão temido *ensino tecnicista* e, prontamente, respondi-lhes que deveriam resolver os exercícios a partir de seus próprios esquemas, utilizando seus conhecimentos prévios, ou da forma que resolveriam no Ensino Médio. Percebi que alguns poucos alunos teriam preferido fazer os exercícios sozinhos. Enquanto discutiam as resoluções, alguns grupos solicitavam minha presença para tirar dúvidas. Todos tentavam fazer os exercícios de alguma forma, o que me deixou bastante satisfeita. No entanto, percebi que as quatro questões eram extensas para serem resolvidas em pouco tempo, já que a aula encerrava 10h10min. Mesmo assim, alguns grupos permaneceram até às 10h20min para tentar resolvê-las.

Algumas das formas de resolução do primeiro problema são apresentadas e discutidas (os nomes dos sujeitos investigados são fictícios).

<u>Situação-problema (1):</u> Um projétil é disparado horizontalmente de uma arma que está 45,0 m acima de um terreno plano, emergindo da arma com uma velocidade de 250 m/s. (a) Por quanto tempo o projétil permanece no ar? (b) A que distância horizontal do ponto de disparo ele se choca com o solo? (c) Qual é o módulo da componente vertical da velocidade quando o projétil se choca com o solo?

Observamos, no quadro 12, a resolução do problema de forma automatizada, uma aplicação direta nas fórmulas das equações do movimento de projéteis. Paula representa simbolicamente, através de um gráfico, a curva parabólica do movimento. A aluna demonstra conhecer todas as fórmulas matemáticas e inclusive substitui corretamente as informações do problema para calcular o que se pede. Um interessante invariante operacional da Matemática contido na sua resolução diz respeito ao sinal negativo do escalar Δy, na equação de Torricelli.

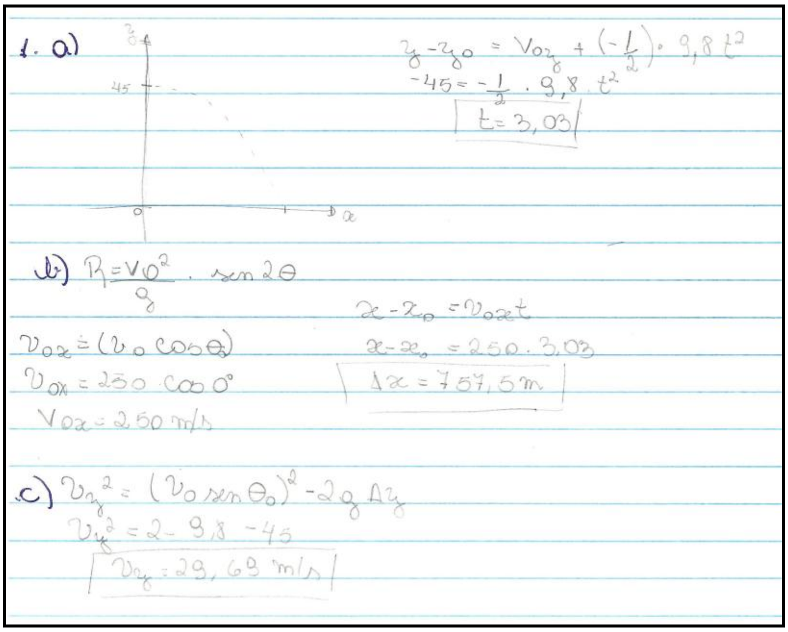
$$y < y_0 \quad \Leftrightarrow \quad y - y_0 < 0$$

Para obter o módulo da componente vertical da velocidade quando o projétil atinge o solo, a aluna utiliza a equação de Torricelli que fornece diretamente o escalar positivo. Outro invariante operacional importante para a questão do módulo é a que segue.

$$|v_y|^2 = v_y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{|\mathrm{v_y}|^2} = \sqrt{v_y^2} \quad \Leftrightarrow \quad |v_y| = \sqrt{v_y^2}$$

A aluna apresenta a fórmula para o alcance do projétil. No entanto a equação apresentada não fornece a distância horizontal percorrida pelo projétil quando a altura final é diferente da altura e lançamento. Ela percebe que esta equação não resulta no alcance procurado quando o ângulo de lançamento $\theta_0 = 0°$. Então parte para a equação da posição no movimento retilíneo uniforme.

Quadro 12: Esquema de resolução da Paula.

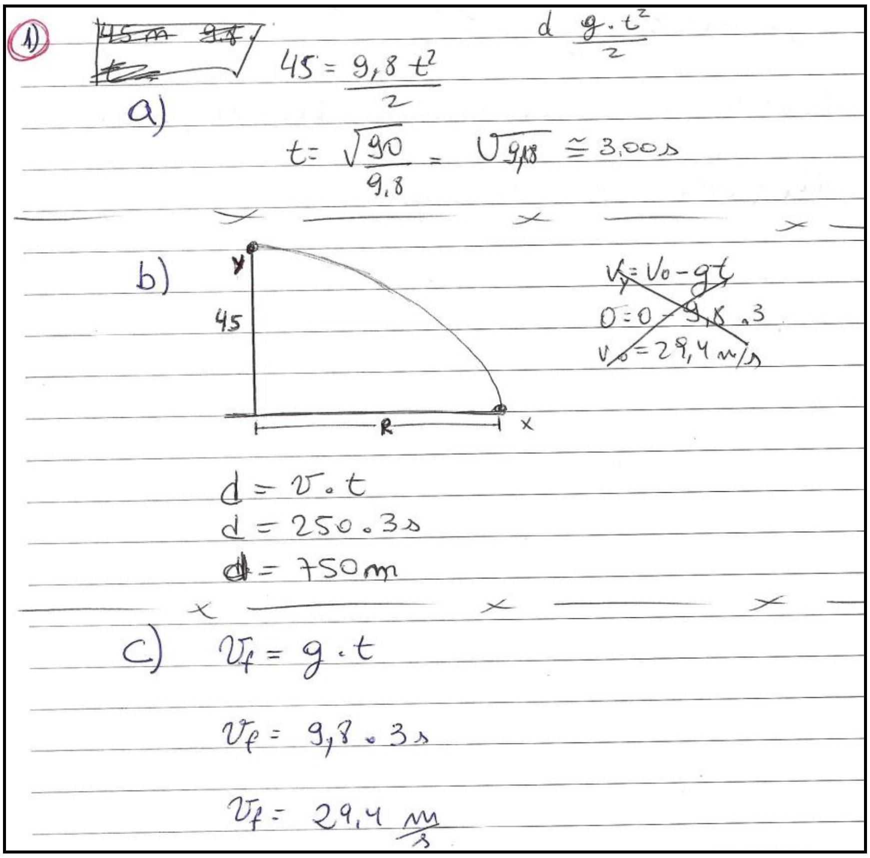


Vitor (quadro 13) e mais quatro estudantes, no item (a), fazem uso direto da equação da distância para um objeto em queda livre, partindo do repouso, na perspectiva proposta por Galileu, comprovada nos experimentos do plano inclinado, considerando acelerações constantes (ibid. Hewitt, p. 641). O teorema em ação que justifica esta passagem é o seguinte:

Para um movimento acelerado a velocidade em um instante qualquer é dada simplesmente por: *velocidade = aceleração x tempo*

Por outro lado, se quisermos conhecer a distância percorrida por um objeto que se movimenta com aceleração constante no mesmo intervalo de tempo basta que calculemos *distância percorrida = velocidade média x tempo*. Mas se a aceleração é constante, então a velocidade é linear, e a velocidade média no intervalo de tempo é a média das velocidades instantâneas nos extremos do intervalo. Assim:

Quadro 13: Esquema de resolução do Vitor.



Distância percorrida = [(velocidade inicial + velocidade final) / 2] x tempo

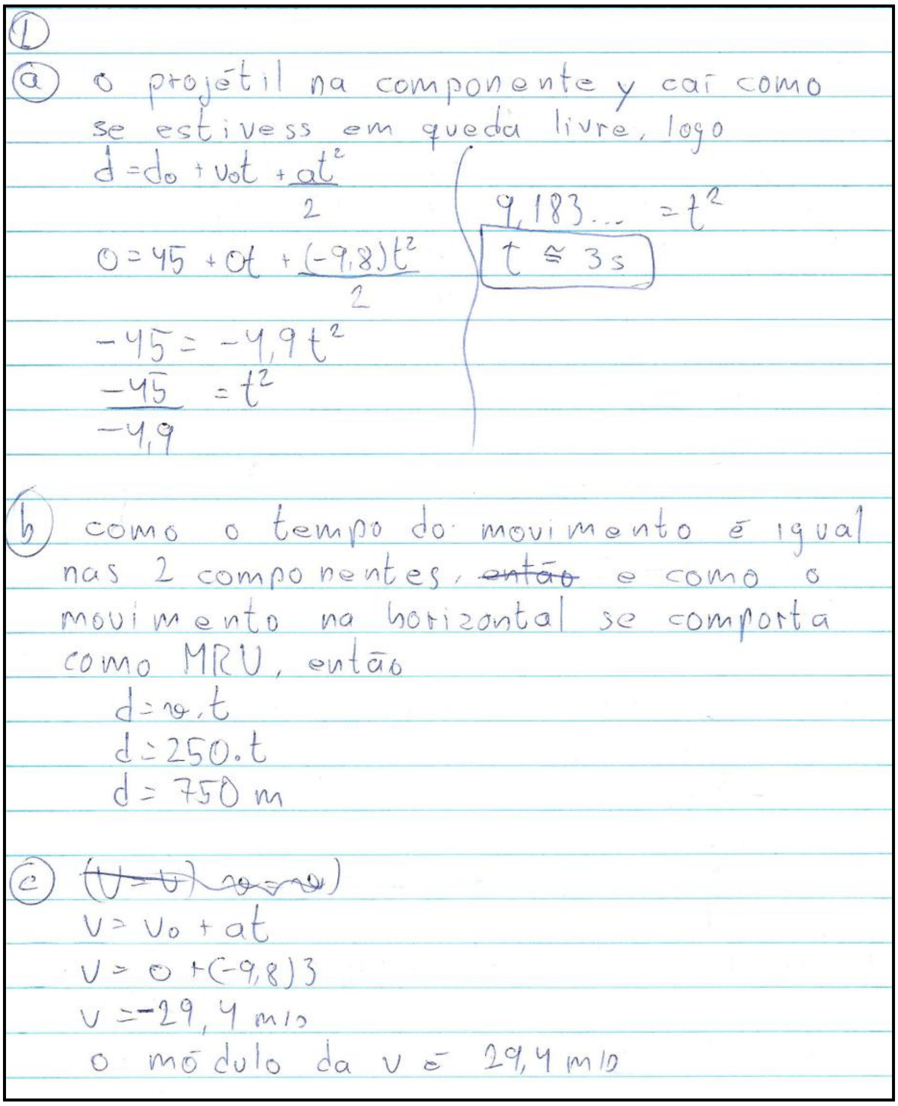
Como o objeto parte do repouso sua velocidade inicial é nula. Então

Distância percorrida = (aceleração x tempo x tempo) / 2.

Em linguagem matemática do Cálculo a função $d = \frac{1}{2}gt^2$ é uma antiderivada de $v = gt$ (para o caso em que o objeto parte do repouso).

No quadro 14 observamos que o aluno inicialmente caracteriza os movimentos horizontal e vertical como um movimento retilíneo uniforme e uma queda livre, respectivamente.

Quadro 14: O esquema de resolução do Ricardo.



1

a) o projétil na componente y cai como se estivess em queda livre, logo

$d = d_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$

$0 = 45 + 0t + \frac{(-9{,}8)t^2}{2}$

$-45 = -4{,}9t^2$

$\frac{-45}{-4{,}9} = t^2$

$9{,}183... = t^2$

$\boxed{t \cong 3s}$

b) como o tempo do movimento é igual nas 2 componentes, ~~então~~ e como o movimento na horizontal se comporta como MRU, então

$d = v.t$

$d = 250.t$

$d = 750\ m$

c) ~~$(V = v)$~~ ~~$v_0 = v$~~)

$V = V_0 + at$

$V = 0 + (-9{,}8)3$

$V = -29{,}4\ m/s$

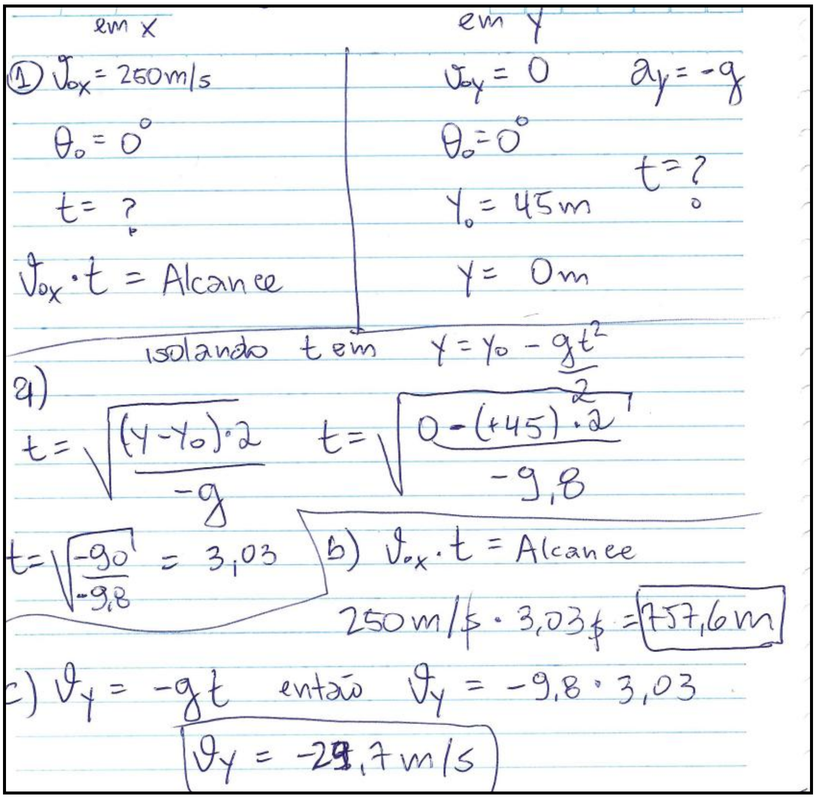
o módulo da v é 29,4 m/s

Não há a especificação de um sistema de referência ou a representação simbólica do movimento do projétil. Ricardo demonstra que possui subsunçores bem elaborados, apreendidos significativamente, com relação aos conceitos de movimento retilíneo uniforme e movimento de queda livre, respectivamente. Inclusive, percebe que a velocidade da componente *y* procurada é negativa, e especifica o valor do seu módulo.

No quadro 15 observa-se que o aluno parte da equação que relaciona a posição *y* do objeto com o quadrado do tempo que o objeto leva para atingir esta altura. Ele opta por isolar o parâmetro *t* na equação, antes da substituição de valores numéricos. Este procedimento facilita a análise da equação que corresponde ao tempo procurado, além de poder ser obtida uma expressão geral, que só tem sentido se $y < y_0$. Flávio dá prioridade ao abstrato sobre o concreto.

$$t = \sqrt{\frac{2(y - y_0)}{-g}}$$

Quadro 15: Esquema de resolução de Flávio.


em x | em y

① $v_{0x} = 250 m/s$ | $v_{0y} = 0$ | $a_y = -g$

$\theta_0 = 0^\circ$ | $\theta_0 = 0^\circ$

$t = ?$ | $y_0 = 45 m$ | $t = ?$

$v_{0x} \cdot t$ = Alcance | $y = 0 m$

isolando t em $y = y_0 - \frac{gt^2}{2}$

a) $t = \sqrt{\frac{(y - y_0) \cdot 2}{-g}}$ $t = \sqrt{\frac{0 - (+45) \cdot 2}{-9,8}}$

$t = \sqrt{\frac{-90}{-9,8}} = 3,03$

b) $v_{0x} \cdot t$ = Alcance

$250 m/s \cdot 3,03 s = \boxed{757,6 m}$

c) $v_y = -gt$ então $v_y = -9,8 \cdot 3,03$

$\boxed{v_y = -29,7 m/s}$

Aula do dia 24/08/2011: Resolvi retomar os exercícios propostos na aula anterior e resolvê-los. Todos anotavam a resolução. Então um aluno disse: *a senhora já corrigiu as questões? Gostaria de ver o que eu acertei e o que eu errei.* Respondi-lhe que ainda não tinha corrigido as questões, mas que faria assim que fosse possível.

Num dos exercícios deveria ser apresentado como resposta o módulo de um vetor velocidade, cuja componente vertical era negativa. Apliquei a fórmula matemática para o cálculo da rapidez $v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$. Uma aluna perguntou: *mas a componente y da velocidade não é negativa, como ficou positiva?* Então, devolvi-lhe a pergunta: *porque você acha que o termo ficou positivo?* Ela insistiu que não sabia, e queria a resposta. Voltei na resolução passo a passo, mostrando para ela que a componente foi elevada ao quadrado. Então ela concordou.

Outro aluno falou: *mas então, estes problemas são apenas aplicações de fórmulas? E a Física disto, onde está?Por que o vetor ficou positivo?* Respondi-lhe que *o módulo de um vetor é sempre positivo, na Física, na Matemática, na Biologia.* Houve risos.

Ao final da aula conversei com aqueles que ficaram presentes. Alguns já haviam ido embora. Percebi que muitos dependiam do horário de ônibus, além do que, havia um guarda no prédio que apenas nos esperava sair para fechar todas as salas de aula e a porta do prédio. Ele disse que quando houvesse prova deveria ser avisado, para aguardar a saída de todos[102].

Expressei aos alunos minha preocupação com o fato de que muitos saíam da aula, ou não compareciam. Disse-lhes que não deveriam ficar presos apenas ao que estava sendo ensinado em sala de aula. A Física é uma Ciência muito complexa, com muitos problemas a serem resolvidos, e eles deveriam estudar muito, individualmente. Disse-lhes que não conseguiria tocar a matéria sem parar para fazer exercícios. Queria que eles expusessem suas opiniões, ou até sugerissem alguma modificação no método de ensino. Falei-lhes das grandes tendências das Instituições em lotarem anfiteatros com muitos alunos, para que as aulas sejam ministradas para uma grande massa, com ênfase no ensino tecnicista[103]. Então um dos alunos respondeu: *hoje, quando a senhora resolveu os exercícios de projéteis, deu uma luz. Há vários. Tem muitos nas listas que não sei nem como iniciar*[104].

<u>Aula do dia 26/08/2011</u>: Faltava, para encerrar o conteúdo sobre Cinemática, *movimento relativo em uma e duas dimensões*. Então, enfatizei que o fundamental desta aula seria o fato de que, um mesmo objeto em movimento, observado a partir de dois referenciais distintos, deveria apresentar a mesma aceleração com relação aos dois referenciais. Para isto, era necessário que os referenciais estivessem se movimentando com velocidade constante um em

---

[102] A disciplina de Física, justamente aquela específica do curso de Física, no semestre de ingresso dos estudantes do Curso Licenciatura Noturna é ofertada nos últimos horários, quando os alunos já não têm o mesmo rendimento, comparativamente, ao rendimento dos alunos dos Cursos diurnos.

[103] Na área das Ciências Exatas e Naturais, o ensino tecnicista não dá ênfase à aprendizagem dos significados dos conceitos. No contexto da disciplina de Cálculo seria como transmitir todo o ferramental matemático de forma apenas algorítmica, sem levar em conta as implicações dos seus conceitos em diferentes contextos.

[104] Pude perceber como é importante discutir os modelos matemáticos necessários para a resolução dos problemas. No entanto, alguns alunos consideram esta outra forma de resolver um problema físico. Não diferenciam um modelo matemático de um modelo físico.

relação ao outro. *Citei o exemplo do livro*: o caso da multa de trânsito, onde a velocidade é apresentada em relação ao referencial Terra (ou solo). Mas certamente, diferente daquela velocidade detectada a partir do referencial *policial rodoviário*, o qual se move com velocidade constante em relação ao referencial *Terra.*

A dedução matemática para esta afirmação é apresentada de forma bastante didática no livro: encontra-se a equação que relaciona a posição da partícula em termos dos dois referenciais, deriva-se a equação em relação ao tempo para obter a relação entre suas respectivas velocidades. Finalmente, supondo que a velocidade entre os dois referenciais é constante, ao derivar novamente a expressão da velocidade em relação ao tempo, encontra-se a relação entre as acelerações da partícula, iguais nos dois referenciais, sendo que a aceleração de um referencial em relação ao outro se anula, já que a velocidade, neste caso, é constante. Estendi o conceito para dois referenciais bidimensionais, considerando as mesmas hipóteses, apresentando as equações na sua forma vetorial.

Refiz os exemplos apresentados no livro, passo a passo (ibid. Halliday, p. 80 e 81). Então um aluno disse-me: *Não consegui entender, a partir de sua dedução, porque a aceleração entre os dois referenciais é nula.* Tentei me reportar ao exemplo do guarda rodoviário, citado anteriormente, dizendo-lhe que não há aceleração no referencial do guarda em relação ao referencial da Terra. Ele, então, complementou que entenderia a questão da seguinte maneira: *Como não há força externa atuando sobre o guarda, ele não estará acelerado.* Concordei com o aluno dizendo-lhe que ele estava justificando a resposta com o uso das leis de Newton, as quais seriam enunciadas[105].

Então falei: n*a aula passada houve um questionamento sobre a Física que está por trás da Cinemática. A Matemática apresentada para dar conta dos problemas da Cinemática deve-se ao pai de vocês.* Os alunos riram. Continuei: *Newton é o pai da Física. Ele formulou todo este ferramental matemático para dar conta das situações do movimento. Então, se em algum momento vocês não entenderam a Matemática como uma linguagem operacional para situações físicas é porque eu não apresentei suas justificativas da melhor maneira.*

Um aluno disse: *mas não foi Newton sozinho que desenvolveu toda esta teoria, foi junto com o Leibniz, não é professora?* Confirmei sua resposta dizendo: *Leibniz desenvolveu*

[105] Novamente percebe-se a necessidade de alguns estudantes em tentar entender os conceitos da Cinemática a partir dos conceitos da Dinâmica.

o Cálculo a partir de outro contexto. Criou uma nomenclatura elegante para os conceitos matemáticos.

Outro aluno perguntou: *estudaremos o movimento de projéteis considerando a resistência do ar*. Disse-lhe que a resistência do ar seria considerada na forma de *força de arrasto,* juntamente com a apresentação das principais leis de força. Com relação aos exemplos refeitos do livro, alguns acompanharam a resolução do próprio livro, sem se preocuparem em copiar, outros copiaram passo a passo.

Ao final da aula os alunos apresentaram uma folha com o nome dos presentes, já que nunca havia tempo para fazer a chamada. Observei que o nome de dois alunos constava na lista, sendo que não estavam presentes[106].

Outro aluno perguntou: *professora, a primeira prova que a senhora marcou não está muito longe?* Falei que a intenção é poder cobrar um pouco da Dinâmica, além da Cinemática. Disse-lhes: p*odemos rever esta data se vocês quiserem.* Ninguém fez comentários. Outro aluno perguntou: *é a senhora que vai elaborar as provas?* Respondi que sim[107].

Aula do dia 29/08/2011: Os alunos haviam feito o primeiro teste de cálculo, e estavam chegando aos poucos. Perguntei-lhes se gostariam de antecipar a primeira prova de Física, que está marcada para o dia 23 de setembro. Disseram que se mantivesse assim.

Nas aulas observadas ao longo da pesquisa verifiquei que as provas de Física em geral são marcadas em períodos posteriores às provas e testes da disciplina de Cálculo. Uma consequência é que os alunos acabam se dedicando mais à disciplina do Cálculo.

Recapitulei tudo que já havíamos discutido na aula anterior e iniciei o conteúdo sobre Dinâmica. Comecei lembrando os conceitos da Cinemática que já haviam sido abordados e acrescentando os principais conceitos da Dinâmica: *força, força resultante, massa, momentum linear*. O momentum linear é o conteúdo do capítulo 8 do Halliday, contudo achei que deveria antecipá-lo, a fim de deduzir a segunda lei de Newton a partir da derivação da equação do

[106] Pude perceber que há uma preocupação com o registro da presença, mesmo que seja através de outros colegas, já que é a exigência básica para aprovação na disciplina. Muitos estudantes justificam frequentemente suas faltas devido a questões profissionais (de trabalho). Esta é uma questão bastante polêmica com relação aos Cursos noturnos. O Curso de Física da UFRGS tem ofertado, semestralmente, cursos semipresenciais. Não há um feedback com relação à esta iniciativa, a qual foge aos objetivos desta pesquisa.

[107] Independentemente de ter marcado um trabalho avaliativo por área desenvolvida, pude perceber que alguns alunos sentem necessidade de serem avaliados em períodos mais curtos. Na disciplina de Cálculo eles realizam pelo menos seis testes ao longo do semestre letivo, além de duas provas de área.

momentum, fazendo a relação com o Cálculo. Comecei perguntando-lhes *o que aconteceria se deslizasse um corpo no chão da sala.* Eles responderam que *o corpo de deslocaria até parar devido ao atrito entre o chão e a superfície do objeto.* Então perguntei *o que aconteceria se a superfície do chão da sala fosse totalmente lisa.* Eles responderam que o corpo continuaria deslizando indefinidamente. Ressaltei-lhes que esta era a diferença básica entre o pensamento aristotélico e a formulação da mecânica newtoniana, lembrando as ideias básicas do Aristóteles, explicadas no livro de Física Conceitual (Hewitt, 2022), com relação ao movimento, dividido em duas classes: *natural e violento*. O *movimento natural* é decorrente da "natureza do objeto", dependendo de qual combinação dos quatro elementos, terra, água, ar e fogo, ele fosse feito (ibid. p. 44). O *movimento violento* resultava de forças que empurravam ou puxavam, era o movimento imposto (ibid. p.44).

Para Aristóteles os objetos deveriam cair com rapidez proporcional a seus pesos, enquanto Galileu comprovou que uma pedra duas vezes mais pesada do que outra não caía realmente duas vezes mais rápida. Exceto pelo pequeno efeito da resistência do ar, Galileu descobriu que objetos de vários pesos, soltos ao mesmo tempo, caíam juntos e atingiam o chão ao mesmo tempo (ibid. p. 46).

Então falei no *caráter vetorial da força*, colocando na lousa o desenho de um bloco com duas forças aplicadas sobre ele, uma horizontal para a direita e outra vertical para cima. Expliquei-lhes que uma única força, resultante da soma vetorial das outras duas, teria o mesmo efeito sobre o bloco.

Então falei sobre as condições de aplicabilidade para as leis de Newton*: velocidades inferiores à velocidade da luz e dimensões do corpo maiores do que dimensões atômicas (dos elétrons, por exemplo).* Também falei em *referencial inercial*, lembrando o exemplo dos referenciais utilizados no conteúdo de movimento relativo.

Ao falar do conceito de *massa*, disse-lhes que a massa é *sentida*, a partir do nosso contato com o objeto. Citei o exemplo de uma pessoa chutando duas bolas, uma de futebol e outra de boliche. Expliquei-lhes que uma mesma força aplicada no chute, implicaria acelerações diferentes nos dois corpos, devido à diferença das massas.

Fui definindo na lousa todos os conceitos que expliquei, acrescentando o conceito de *inércia,* exemplificando. Falei do caso dos pratos permanecerem sob uma mesa ao ser retirada rapidamente a toalha debaixo deles. Falei do exemplo de uma vassoura solta do cabo, quando batido o cabo contra o chão, a vassoura se adapta ao cabo. Então um aluno acrescentou: *professora, então uma pessoa obesa não é gorda, apenas se mantém no seu estado inicial (inércia).* Houve risos.

Após enunciar as duas primeiras *leis da mecânica newtoniana*, descrevi as principais *leis de força*: *a força gravitacional, a força normal, a tensão ou tração, a força de atrito, e a força peso,* especificando a nomenclatura utilizada para cada uma delas. Houve uma discussão quando falei na força peso, já que peso é diferente de massa. Também houve uma discussão entre o peso ser escalar ou vetor. Um aluno lembrou: *a gravidade não é a mesma em todos os pontos da superfície Terrestre.* Havia muitas contribuições dos alunos, nas aulas.

As discussões maiores foram com relação aos conceitos de *atrito estático e atrito cinético.* O exemplo dado foi de uma pessoa tentando empurrar um bloco sobre uma superfície plana, sem conseguir movê-lo, até que num determinado ponto ele passa a mover-se. Identifiquei, então, a diferença entre as duas forças, uma anterior ao movimento, atingindo um valor máximo no momento em que o objeto inicia o movimento, e outra que surge após o movimento. Então um aluno afirmou: *a força de atrito cinético é constante, basta olhar para a fórmula do cálculo do módulo da força, o coeficiente de atrito vezes a normal*. Disse-lhe que dependeria da superfície em que o objeto estivesse sendo empurrado. Houve uma polêmica, alguns alunos achavam que era constante e outros não.

Outra discussão foi com relação ao valor máximo da força normal. Tentei explicar retomando o exemplo do elevador, que quando é inicialmente acelerado, sentimos um contato maior dos nossos pés com o piso do elevador (a força normal do elevador sobre nossos pés é maior do que a força gravitacional com que a Terra nos puxa para baixo), e quando ele é desacelerado, a sensação é contrária, o contato não é tão grande (a força com que a Terra nos puxa para baixo é maior do que a força normal que o elevador exerce sobre nossos pés). Então um aluno disse: *mas então podemos afundar no elevador?* Outro aluno afirma: *o valor máximo da normal é, na verdade, o peso da pessoa*.

Um terceiro aluno questiona o fato de o atrito surgir apenas entre corpos sólidos, como o livro aborda. Disse-lhe que estávamos fazendo uma idealização das situações diversas onde pode ser aplicado, no nível da Mecânica de corpos rígidos.

Então, para encerrar a aula, fiz um exercício do livro, onde eram dadas as duas forças exercidas sobre o objeto, na sua forma vetorial, em termos dos vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$, e os alunos deveriam achar o valor do vetor aceleração.

Conversando com três alunos ao final da aula, perguntei-lhes a respeito de suas expectativas com relação ao curso. Lembrei-lhes que a Física é uma matéria bastante complexa e que necessita ser muito discutida. A resolução de um único problema poderia acarretar uma aula inteira. Um deles fez um comparativo com as aulas de Cálculo, onde o conteúdo era ministrado numa velocidade muito grande, não dando chance para o aluno pensar, já na aula de Física, isto era possível[108].

Os outros dois alunos não fizeram comentários, um deles apenas me disse que achava que o aluno que afirmou que a força de atrito cinético é constante estava certo. Disse-lhe que voltaríamos a discutir esta questão. O outro aluno, que estava junto, exemplificou o caso do atrito cinético com a frenagem de um carro.

Aula do dia 31/08/2011: Iniciei a aula voltando à discussão sobre o atrito cinético. Ressaltei minha hipótese de que o atrito cinético depende da superfície de contato, sendo que podemos considerá-lo *aproximadamente constante no movimento*. Mostrei-lhes o gráfico representativo dos dois atritos, enfatizando que o atrito estático atinge um valor máximo até quando inicia o movimento, e o atrito passa a ser cinético. Na realidade o atrito cinético difere de um ponto ao outro da superfície, mas *idealizando uma superfície lisa* podemos considerá-lo constante. Também esclareci a dúvida do aluno que perguntou sobre o atrito na água ou no ar. Falei que também abordaremos a força de *arraste*, força de resistência de fluidos sobre objetos que se movem sobre a água ou sobre o ar.

Voltei a discutir a *força peso* conforme o conceito abordado no livro texto: *o peso P de um corpo é o módulo da força necessária para impedir que o corpo caia livremente medido em relação ao solo*. *O peso do corpo é igual ao módulo da força gravitacional que age sobre o corpo.* Disse-lhes que na superfície terrestre, nosso referencial inercial considerado, o peso é exatamente igual à força gravitacional. Contudo, se estivermos livre de gravidade, o peso será

[108] Em sistemas de ensino com grande quantidade de conteúdos, ou permitimos que os alunos discutam em aula, correndo o risco de não vencermos o programa de ensino, ou apresentamos os conteúdos rapidamente, sem discutir os significados dos conceitos, correndo o risco de propiciarmos uma aprendizagem mecânica.

aparentemente pequeno quanto menor for o valor da gravidade. Dei o exemplo de que um bloco de concreto, flutuando em gravidade zero: não tem peso, mas sua massa mantém-se igual. O aluno que questionou porque não afundamos no elevador afirmou: *ainda continuo com a mesma dúvida, mas vou estudar um pouco mais no livro esta questão.*

Apresentei a terceira lei de Newton: *o princípio da ação e reação,* colocando um exemplo desenhado na lousa. O exemplo era uma mesa com um objeto em cima. Perguntei-lhes quais eram as forças exercidas sobre o objeto acima da mesa e quem eram seus pares de reação. Ao identificar a força normal que a mesa exerce sobre o objeto, *o aluno afirmou que a reação seria a força gravitacional com que a Terra puxa o objeto para baixo*. Salientei que os pares de ação e reação não devem ocorrer no mesmo corpo. A reação correspondente é a normal exercida pelo objeto sobre a mesa. Representei os vetores correspondentes aplicados sobre o objeto e sobre a mesa. Expliquei que poderia também ser feito um diagrama de corpo livre, representativo do objeto e da mesa, já identificando as coordenadas cartesianas, com os semieixos positivo e negativo escolhidos para a resolução do problema[109].

Então um aluno pediu para contribuir com a aula, dizendo que outro professor havia dado, em semestres anteriores, uma explicação muito boa para esta questão: *os pares de ação e reação devem ser forças de mesma natureza.* Concordei, ressaltando novamente que: *os pares de ação e reação atuam em corpos diferentes.* Assim, aquele aluno que apresentou dúvida, concordou e disse ter entendido a questão.

Resolvi uma *primeira situação-problema*: havia dois blocos de massas distintas unidos por uma corda. Estes blocos, inicialmente em repouso, seriam puxados para a direita, com uma força cujo módulo era fornecido no problema. As massas e os coeficientes de atrito cinético e estático também eram fornecidos. Perguntei-lhes: *haverá movimento, Qual será a aceleração do sistema?*

[109] Pude observar, com relação à representação simbólica dos pares de vetores de ação e reação, que os alunos interpretam que eles partem do mesmo corpo, considerando que para isto basta que tenham sentidos contrários. Esta interpretação têm fortes implicações no desenvolvimento do conceito de vetor, principalmente com relação ao seu ponto de partida (ponto inicial situado na cauda). Os estudantes não entendem que um vetor é sempre igual se transladado no espaço, desde que mantenha seu módulo, sua direção e o seu sentido.

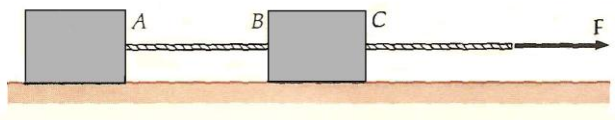


Figura 32: Dois blocos unidos por uma corda e puxados por uma força (Tipler, 1990, p.113).

Iniciei a discussão do problema desenhando um diagrama de forças para ambos os blocos separadamente, colocando a força retardadora ao movimento como força de atrito cinético. Um aluno perguntou-me: *não devemos testar a presença do movimento antes?* Eu disse que sim. Faríamos os diagramas de corpo livre, e após calcularíamos o valor da força de atrito estática máxima. Fiz o cálculo, explicando que para haver movimento no sistema, a força de atrito estática máxima resultante deveria ser menor do que a força que estava sendo aplicada. Resolvi o problema construindo um sistema onde eram encontrados dois valores para a aceleração a_1 e a_2, que deveriam ser iguais para os dois blocos, já que eles moviam-se com a mesma velocidade. Partindo deste pressuposto, as duas equações para a aceleração foram igualadas, ficando uma expressão dependente da *tensão na corda*. Achada a tensão, calculou-se a *aceleração*.

A mesma situação foi resolvida considerando um único sistema com duas partículas, explicando que a força resultante seria de caráter externo ao sistema. As forças internas se cancelariam (tratam-se da ação e reação da corda sobre o bloco e do bloco sobre a corda, as quais pela terceira lei de Newton são iguais em módulo, mas com sentidos contrários). Não havia apresentado ainda a fórmula Matemática da segunda lei de Newton para um sistema de partículas. Aproveite este momento para descrevê-la. O problema fica mais fácil de ser resolvido em termos do cálculo da aceleração. Mas para calcular a tensão, novamente necessitamos da análise isolada dos corpos. Ressaltei a importância na identificação do sistema composto pelos corpos e sua vizinhança, bem como as forças externa atuantes sobre o sistema, por agentes da vizinhança. Estes conceitos haviam sido apresentados na primeira semana de aula. Fiz o desenho do diagrama de corpo livre para o sistema de partículas. No entanto, quando representei na lousa as duas forças de atrito cinético, as duas forças normais e as duas forças gravitacionais, desenhei todos os vetores partindo da mesma origem no sistema de coordenadas cartesianas.

Então, um aluno afirmou que *o desenho delas não poderia ser daquela forma*. De fato, deveria calcular as resultantes da normal, da força gravitacional e das forças de atrito para representá-las no diagrama. Ao final da resolução um aluno afirmou que *o problema resolvido seria o análogo de colocar um objeto sobre o outro*. Perguntei-lhe por que, e propus que ele resolvesse a nova situação que havia proposto, para confirmarmos sua afirmação[110].

A segunda situação-problema discutida foi a *Máquina de Atwood*. Dois blocos estão ligados por uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia sem atrito, também de massa desprezível. São fornecidas as massas dos blocos e pede-se o módulo da aceleração dos blocos e a tensão na corda (Halliday, 2008, p. 121). Perguntei aos alunos o que o problema quer dizer com a *hipótese da polia ser considerada leve e sem atrito*. Sem atrito parecia estar claro nas hipóteses, mas ser considerado leve, não. Um aluno sugeriu que *ser leve* estaria relacionado com o fato de que *o movimento de rotação da polia poderia ser desprezado*. Confirmei sua resposta complementando que neste caso a massa da polia poderia ser desprezada. Partimos para a operacionalização da situação. No entanto, optei por uma abordagem inicial abstrata, sem a substituição inicial de valores numéricos, a fim de discutir o significado da expressão obtida.

Notei alguma dúvida por parte dos estudantes com relação ao sinal dos termos das expressões matemáticas, logo após a aplicação da segunda lei de Newton. Pude perceber que esta dificuldade deve-se à escolha do referencial e ao entendimento da decomposição dos vetores em relação ao referencial escolhido. Sugeri aos alunos que considerassem o sentido do movimento como sentido positivo. Na situação trabalhada a massa m_1 estaria se movendo para cima (sendo positivo este sentido), e a massa m_2 estaria se movendo para baixo (sendo positivo este sentido). Então um aluno argumentou: *mas não devemos considerar positivo sempre o sentido para cima?* Respondi que sim desde que ele mantivesse a coerência ao fazer a decomposição dos vetores força.

A partir da expressão obtida para a aceleração fiz uma análise qualitativa do seu significado, observando que se as massas são iguais, a aceleração será nula, o que implicaria um sistema em repouso e uma tensão da corda igual ao produto da massa pela aceleração da gravidade. Se $m_2 >> m_1$ então a aceleração assume o valor aproximado da aceleração da gravidade com o mesmo sentido dela (para baixo), com uma tensão dobrada da corda sobre a

[110] Notei um forte indício de motivação para o processo da aprendizagem significativa, já que o estudante necessitou, por vontade própria, partir para uma nova situação e compará-la com a que discutimos em sala de aula.

massa m_2. Se $m_1 >> m_2$ a aceleração terá o valor aproximado da aceleração da gravidade, mas com o sentido contrário (para cima), com uma tensão que vale o dobro da tensão da corda sobre a massa m_1. Alguns alunos argumentaram que entenderam muito bem a situação física a partir da análise da expressão matemática obtida.

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \qquad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

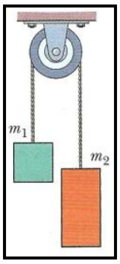


Figura 33 A Máquina de Atwood (ibid. p. 121).

A aula já estava encerrando, faltava apenas dez minutos. Para aqueles que permaneceram propus uma *terceira situação-problema*: um quadro, cuja massa era fornecida, pendurado por dois fios cujas tensões deveriam ser calculadas (figura 34).

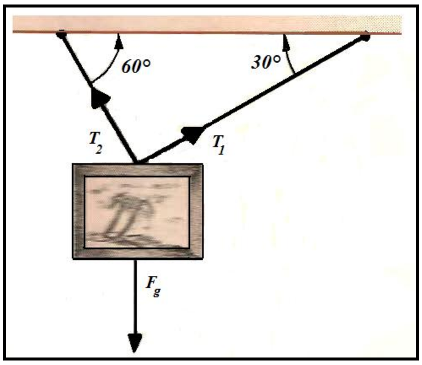


Figura 34: Um quadro pendurado por dois fios (Tipler, 1990, p.94)

Eram dados os ângulos que a corda faz com a horizontal e a massa do objeto. Então, *um aluno questionou o fato de ser um problema de estática, diferente dos outros dois*. Disse-lhe que o objetivo era selecionar diferentes situações, e esta seria uma oportunidade de descrevermos o conceito de *equilíbrio estático*, para posteriormente diferenciá-lo do *equilíbrio dinâmico*.

Percebi que alguns alunos procuravam as páginas devidas às situações abordadas. Avisei que alguns exemplos trabalhados em sala de aula eram distintos daqueles apresentados no livro do Halliday. Chamei a atenção deles para a segunda lista que havia enviado por e-mail. Agora deveriam resolver a primeira lista da segunda área. Quando percebi que não haveria tempo suficiente para discutir o problema, propus continuar na próxima aula.

Aula do dia 02/09/2011: Ao invés de começar a aula pelo problema proposto na aula anterior, iniciei retomando o conceito de *equilíbrio dinâmico*. A condição básica é que a força resultante atuando sobre o sistema seja nula. No entanto, diferentemente do que se costuma pensar, esta situação não ocorre apenas em corpos em repouso, mas também em corpos que seguem uma trajetória retilínea com velocidade constante, como é o caso dos aviões comerciais a jato (que tomei como exemplo).

Então retomei o exercício proposto (figura 34), onde um quadro estava preso por dois fios fixos no teto. Era solicitado o cálculo das tensões das cordas. Uma delas fazia um ângulo de 30° com a direção horizontal, e a outra um ângulo de 60° com a direção horizontal. Fixando o sistema no quadro, perguntei aos estudantes quais eram os ângulos formados entre as duas tensões e o eixo horizontal. Prontamente responderam que o ângulo entre o eixo horizontal, no sentido anti-horário e a tensão T_2 é 60°, e o ângulo entre o eixo horizontal, no sentido horário e a tensão T_1 é 30. Um importante teorema em ação implícito neste problema é a questão da igualdade dos ângulos alternos e internos, na geometria plana. Considerando o sentido positivo horizontal para a direita e o sentido positivo vertical para cima, apresentei as equações representativas para a situação em repouso, com aceleração nula. Optei por resolver a questão explicitando todas as passagens matemáticas necessárias, desde a equação vetorial, até sua forma final, decomposta.

Um aluno argumentou: *se fosse uma massa presa por um fio suspenso em outro fio haveria três tensões?* Respondi que sim e ele continuou: *onde estaria a origem do sistema?* Respondi que poderia estar no encontro das três tensões. Ele argumentou: *mas eu poderia colocar a origem do sistema na massa suspensa?* Disse que sim, que ele escolhe a origem do seu sistema. Então propus que ele resolvesse esta nova situação, verificando as diferenças básicas da situação que estávamos resolvendo.

Então continuei fazendo os cálculos até apresentar os resultados finais, que era o valor das duas tensões. Os cálculos exigiam a resolução de um sistema, que optei por solucionar multiplicando ambas as equações por duas expressões distintas, de forma a ser possível eliminar um dos termos, na soma. Fiz isto sem substituir os valores numéricos nas equações.

Era uma equação literal, que exigia, na sua forma final, o conhecimento da identidade trigonométrica $sen(a+b)$.

Então uma aluna questionou: *poderia antes ter resolvido os valores dos senos e dos cossenos dos ângulos?* Respondi que sim, mas que depois disto ela teria de multiplicar as expressões pelos valores numéricos para eliminar um dos termos. Percebi que ela havia achado difícil a resolução do sistema da forma que fiz e procurava uma maneira talvez mais rápida e mais fácil de ser resolvido, sem a utilização de identidades trigonométricas[111]. Então lhes disse que poderiam ter resolvido de outra forma, poderiam ter isolado uma das variáveis na primeira equação e substituído na segunda. As expressões literais obtidas para as tensões comprovaram que a tensão do segundo cordão sobre o quadro é maior do que a tensão do primeiro cordão sobre o quadro. Um aluno questionou: *não entendo como a tensão do segundo cordão pode ser maior do que a do primeiro cordão?* Respondi: *acabamos de mostrar matematicamente que isto acontece.* O aluno continuou: *mas não entendi fisicamente!* Disse: *se você puder sentir experimentalmente esta situação observará que a segunda tensão é maior.*

$$T_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}mg \quad \text{e} \quad T_2 = mg$$

Passei para outra situação: *o plano inclinado* (figura 35), onde um bloco desliza numa superfície sem atrito. Não havia força nenhuma puxando o bloco. Era fornecida a massa *m* do bloco e o ângulo de inclinação da rampa. Deveria ser calculada a aceleração do bloco e a força que o plano exerce sobre o bloco.

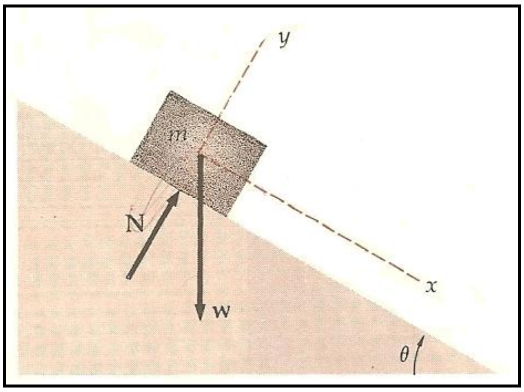


Figura 35: um plano inclinado desprovido de atrito (Tipler, 1990, p.93).

[111] Em geral os estudantes da Física tendem a pensar de forma concreta, procurando fugir da abstração.

Identifiquei o sistema de referência com o sentido positivo do eixo x coincidindo com o sentido da rampa, e o sentido positivo do eixo y como sendo para cima, perpendicular à rampa. Perguntei aos alunos quais forças estavam atuando sobre o bloco. Eles responderam que seria a *força peso* (ou força gravitacional) e a *força normal*. Expliquei que a normal é uma força de contato entre a superfície da rampa e a superfície do bloco e, é a força que a rampa exerce sobre o bloco, sendo perpendicular à superfície de contato. Alguns alunos achavam que a força peso também deveria ser perpendicular à rampa. Então lembrei aos alunos que a força gravitacional é a força com que a Terra "puxa" o bloco para baixo, e é sempre vertical para baixo.

A primeira tentativa de alguns estudantes foi imaginar a força normal apontando para cima e a força peso para baixo. No entanto, não sabiam identificar o ângulo θ. Então passei a explicar quem era o ângulo teta na situação inicialmente considerada. Desenhei novamente a rampa e coloquei um ponto sobre ela. Então tracei duas perpendiculares, uma em relação à rampa, e outra em relação à base da rampa, a linha horizontal. Tentei mostrar-lhes, através da semelhança de triângulos que *o ângulo entre o encontro das duas perpendiculares é o mesmo ângulo de inclinação da rampa.* Na figura 36 os triângulos retângulos *AOB* e *APO* são semelhantes. Eles pensaram um pouco, e concordaram.

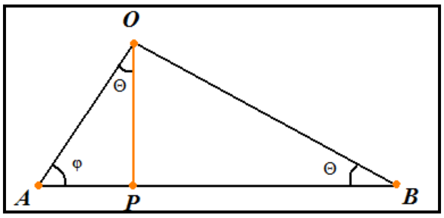


Figura 36: semelhança de triângulos.

Um aluno sugeriu: *podemos imaginar um retângulo, onde a rampa é a diagonal*. Perguntei-lhe: *como você identificaria o ângulo teta a partir deste retângulo?* Ele ficou pensativo e não respondeu. Argumentei que *cada um poderia tentar identificar o ângulo a partir de representações diferentes, desde que tenha sentido*. Certamente existiam formas geométricas distintas para mostrar o ângulo, porém optei por não estender muito o assunto[112].

[112] Pude notar como é difícil explicar o problema proposto buscando ferramentas matemáticas, corre-se o risco de perder uma aula inteira para uma única explicação. Não há tempo para trabalhar da forma que seria necessária para lidar com a integração pretendida. Isto tem fortes implicações para os atuais sistemas de ensino das disciplinas de Cálculo e de Física. Percebi que naturalmente estava contornando as demonstrações matemáticas, por achar que não era a questão mais importante naquele contexto.

No final, ao apresentar as expressões matemáticas para o cálculo da aceleração e força normal da rampa sobre o bloco, fiz uma análise qualitativa do resultado, mostrando que ele estava coerente com a situação física. Quanto mais íngreme a rampa (quanto maior for o ângulo de inclinação) maior será a aceleração do bloco deslizando sobre ela e menor será a força normal exercida sobre o bloco (esta conclusão é diretamente dependente do sinal das funções seno e cosseno no primeiro quadrante). Para o caso do ângulo $\theta = 0°$ e $\theta = 90°$ não temos uma rampa, neste caso o bloco estará em repouso sobre uma superfície horizontal ou estará em queda livre, respectivamente.

$$a = gsen\theta \quad \text{e} \quad N = mg\cos\theta$$

A outra situação problema apresentada era de *um bloco com uma determinada massa m, apoiado num piso horizontal,* onde era fornecido o coeficiente de atrito estático μ_e entre o bloco e o piso. No problema eles teriam que encontrar o valor da força horizontal máxima F que poderia ser aplicada ao bloco, de forma que ele permanecesse parado. Os alunos prontamente responderam que teríamos que calcular a força de atrito estático máxima.

No entanto há uma consideração que em geral os estudantes não levam em conta. Sabe-se que a força de atrito estático deve assumir um valor menor ou igual à força de atrito estático máximo, isto é: $f_e \leq f_{e,máx} = \mu_e N$. Na figura 37 observamos que à medida que vamos aplicando a força horizontal, a força de atrito estático vai aumentando e equilibrando a força aplicada até um valor máximo, onde passará a haver movimento, e o atrito passará a ser cinético. A *desigualdade matemática simultânea* tem forte representação nesta situação, pois:

$$0 \leq f_e \leq f_{e,máx}$$

Assim, para a situação analisada teremos: $F - f_e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = f_e \leq \mu_e N$.

Portanto, para qualquer valor da força aplicada menor ou igual ao produto do coeficiente de atrito estático pela normal que a superfície exerce sobre o bloco, manterá o sistema mecânico em repouso.

$$F \leq \mu_e mg$$

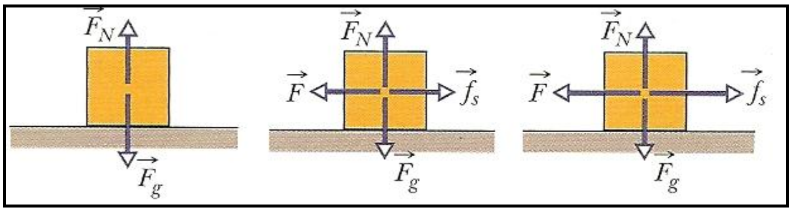


Figura 37: Três situações onde não há movimento (Halliday, 2009, p.127).

Passamos, então, para uma nova situação, onde a força não era mais horizontal, mas fazia um determinado ângulo com a horizontal. Da mesma forma os alunos tinham que obter *o valor máximo da força para que o bloco se mantivesse em repouso.*

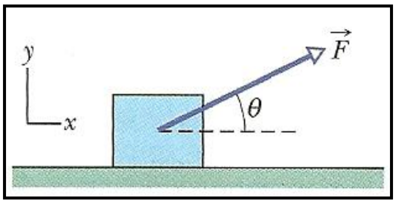


Figura 38: Uma força que forma um ângulo com a horizontal (Halliday, 2009, p. 143).

Um deles disse: *é só pegar o resultado obtido para a força no exercício anterior, e dividir pelo cosseno do ângulo dado.* Trata-se de um aluno muito rápido nas suas afirmações. Então outro aluno afirmou: *não, a força normal não será mais a mesma.* Respondi que devemos ter cuidado, pois agora haverá uma componente da força aplicada que será acrescida à força normal.

Fazendo os cálculos observamos que, de fato, a expressão final não era tão direta assim.

$$F \leq \frac{\mu_e mg}{\cos\theta + \mu_e sen\theta}$$

Disse aos alunos que estava mesclando os exemplos dados. Não eram exatamente os exemplos do Halliday, mas encontrariam situações semelhantes no livro. Também falei que já havia antecipado problemas envolvendo atrito, que estão presentes no capítulo 6 do livro, sendo que estamos finalizando o capítulo 5. Ressaltei que deveriam deter-se na lista enviada por e-mail, que foi combinado assim diante do fato de que muitos alunos não poderiam adquirir o livro. Alguns estavam com edições mais antigas para poderem estudar a parte teórica. Um aluno disse *professora, estou percebendo que a disciplina de Cálculo deveria ser vista anteriormente à de Física.* Respondi que esta era uma questão muito antiga, discutida entre os alunos. No entanto, qualquer mudança que pudesse haver no Curso deveria partir deles, como alunos. Falei: *vocês é que têm possibilidades de realizar grandes mudanças.*

Observei que alguns poucos não copiam a matéria passada na lousa, apenas prestam a atenção às explicações. Situei aos alunos o que falta para terminar esta parte das leis de forças, *a força de arraste e a força centrípeta* que serão vistas na próxima aula.

No final da aula, outro aluno me perguntou sobre a questão do *equilíbrio estático do quadro*, realizada no início. Para ele a tensão referente ao menor ângulo de inclinação com a horizontal deveria ser fisicamente maior. Não questionou a resolução matemática, mas se surpreendeu com o resultado, pois esperava que fosse outro. Então disse para ele que é justamente o contrário, a tensão cuja corda faz um ângulo maior com a horizontal deveria ser a maior. O questionamento do aluno me surpreendeu. Eu não havia discutido a situação física real do problema[113].

Então, o colega que senta ao lado desenhou uma situação onde um dos ângulos era de noventa graus, onde o aluno que lançou o problema entendeu, a partir da explicação do colega que a tensão seria maior, na corda vertical.

<u>*Aula do dia 05/09/2011:*</u> Iniciei a aula falando na *força de arraste. Quando um corpo se desloca através de um fluido, como o ar ou a água, o fluido exerce uma força retardadora, ou de arraste* $\vec{D}$*, que tende a reduzir a velocidade escalar do corpo. Esta força de arraste depende da forma do corpo, das propriedades do fluido e da velocidade escalar do corpo em relação ao fluido (Tipler, 1990, p. 138).* A força na sua forma vetorial, e o seu respectivo módulo é dada por:

$$\vec{D} = -\frac{1}{2} C \rho_{meio} A v \vec{v} \qquad \text{e} \qquad D = \frac{1}{2} C \rho_{meio} A v^2$$

Na expressão, C é o coeficiente de arraste (determinado experimentalmente), ρ_{meio} é a massa específica do fluido (massa por unidade de volume), A é área da secção reta efetiva do corpo e v é a velocidade escalar do corpo.

---

[113] Notei que a resolução matemática com a apresentação do resultado não é suficientemente esclarecedora para algumas situações apresentadas. A operacionalidade dos conceitos envolvidos na situação é necessária, mas não suficiente para o processo de aprendizagem deste conceito. E necessário que a situação tenha sentido para o aluno.

Também falei na *velocidade terminal atingida por um objeto que está sob a ação de uma força constante*. No caso de um objeto em queda livre no ar, a força gravitacional (constante) que age sobre o objeto contraria a força de arraste, e vai aumentando seu módulo até equilibrar a força gravitacional. Exatamente neste instante de equilíbrio o objeto atingirá sua velocidade terminal, dada por:

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho_{meio}A}} \quad \Leftrightarrow \quad v_t = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho_{meio}A}}$$

Uma aluna comentou sobre a situação dos paraquedistas que podem plainar no ar, com roupas especiais. Falou deste exemplo quando comentei, a partir da equação da velocidade terminal obtida, que quanto maior a área da seção transversal do objeto que está sendo analisado, menor será a sua velocidade terminal. E quanto menor a área, maior será a sua velocidade terminal. Isto explica, por exemplo, diferentes formas assumidas por um competidor de velocidade no gelo, quando almeja diminuir ou aumentar sua velocidade.

Segundo Sears & Zemansky (2008, p. 156) a expressão para a velocidade terminal explica por que um objeto mais pesado tende a cair com uma velocidade maior do que a de um objeto mais leve. Dois objetos que possuem a mesma forma, porém massas diferentes possuem o mesmo valor para o coeficiente de arraste, para a massa específica do meio e para a área da secção transversal, mas possuem diferentes valores de massa *m*.

Então, fiz um exercício aplicado. Gotas que caem de uma nuvem alta, idealizadas como esferas. Em um dos itens da questão os alunos tinham que responder qual das gotas chegavam ao solo antes, as de maior raio ou as de menor raio. Um dos alunos respondeu: *as de menor raio vão chegar antes.* Então eu disse que não, faríamos os cálculos para mostrar que era ao contrário da sua intuição. Calculando em termos do volume e da área da seção transversal, obtemos para a velocidade terminal uma função da raiz quadrada do raio. *Um dos alunos não havia entendido o volume da gota esférica e da área da seção transversal.* Voltei à explicação e disse que eram fórmulas matemáticas substituídas na expressão da velocidade terminal. Percebi que ao mesmo tempo em que eu explicava ao aluno, seu colega do lado também queria dar-lhe uma explicação. As aulas estavam mantendo-se sempre assim, bastante discutidas e polemizadas.

$$v_t = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{g}{C}\frac{\rho_{água}}{\rho_{ar}}R}$$

Diante do resultado matemático obtido afirmei: *vejam, quanto maior o raio maior será a velocidade terminal, portanto as gotas de maiores chegarão ao solo antes.*

O mesmo aluno argumentou: *professora, acabamos de concluir no início que quanto menor a área da seção maior será a velocidade, no caso do paraquedista. Então, penso que as gotas menores chegarão antes.* Respondi que: *a massa do objeto também deve ser levada em conta. Gotas maiores têm maior massa, portanto caem com maior rapidez*. *Estávamos tratando do exemplo de gotas com massas específicas iguais, mas com massas com massas diferentes*.

Ele lembrou o exemplo do paraquedista, discutido no início da aula. Disse que poderíamos estender o raciocínio considerando vários paraquedistas com diferentes áreas de seções. Então disse: *preciso pensar melhor na questão.*

Também falei na força de arraste citando o exemplo de um barco motorizado, desenhando na lousa a representação das duas forças de arraste, devida ao ar e devida à água, cuja resultante era uma única força de arraste. Lembrei-os da situação dos dois blocos sendo puxados por uma corda, numa superfície com atrito. Quando consideramos os dois blocos como um único sistema, as somas das duas forças de atrito estático nos dois blocos resultam numa única força de atrito estático.

Passamos a abordar o conteúdo sobre *força centrípeta*, relacionando-o ao contexto do *movimento circular uniforme*. Uma força centrípeta acelera o corpo modificando a direção da velocidade do corpo sem mudar a velocidade escalar. Aponta para o centro, podendo ser uma força gravitacional, uma força de tração ou mesmo uma força de atrito. No movimento circular uniforme o módulo da velocidade *v* é constante, a aceleração centrípeta a_c é dada pela razão entre o quadrado da velocidade v^2 e o raio da trajetória circular *R*.

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad F_R^{\,centrípeta} = ma_c \quad \Leftrightarrow \quad F_R^{\,centrípeta} = m\frac{v^2}{R}$$

O período para uma revolução completa é dado por: $T = \frac{2\pi R}{v}$

A primeira situação-problema trabalhada foi a do *pêndulo cônico* (figura 39). Uma partícula de massa m está suspensa num fio de comprimento L e desloca-se com a velocidade escalar constante v num círculo horizontal de raio r. O fio faz um ângulo θ com a vertical. Os estudantes tinham que determinar a tensão T no fio e a velocidade escalar da partícula.

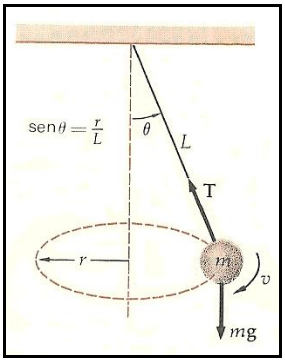


Figura 39: O pêndulo cônico (Tipler, 1990, p. 130).

Neste caso *a força centrípeta é a componente horizontal da tensão do fio*. Aplicando as leis de Newton para a partícula obtemos as seguintes expressões para a tensão e a velocidade:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

Enquanto explicava, um aluno folheava o livro procurando o exemplo, e perguntou em que página estava. Respondi que era um exemplo de outro livro[114]. Após ter obtido as expressões matemáticas procurei discutir qualitativamente seu significado no contexto abordado. Observamos que se θ é igual a 0° temos a tensão máxima do fio, e não há velocidade da partícula, já que não estará em movimento circular, mas parada. À medida que o ângulo θ aumenta a tensão no fio deve diminuir, aumentando a velocidade da partícula. A tensão é indefinida para θ igual a 90°. Um dos alunos disse: *pude entender a situação física a partir da sua análise.*

No final, três alunos permaneceram na aula. Um deles era aquele que havia ficado com dúvida no exemplo da gota. Desculpei-me pelo fato da aula não ter sido tão esclarecedora para eles, prometendo que analisaria outros exemplos que pudessem acrescentar subsídios. Então ele respondeu: *professora, a aula estava muito boa.*

[114] Percebi que os estudantes esperam encontrar o conteúdo trabalhado, no livro recomendado no plano oficial. A existência de um material instrucional seguido fielmente nas aulas parece ser importante para eles.

Os dois foram embora e o terceiro aluno, que havia sido meu aluno de Cálculo em 2009/2 disse: *uma sugestão para seu trabalho de doutorado deveria ser aplicar todos os exemplos trabalhados em sala de aula como experimentos no Laboratório, pela necessidade que sentimos de que os exemplos sejam mostrados experimentalmente*. Achei muito interessante a sua ideia e um bom tema para ser trabalhado posteriormente.

Perguntei se ele estava entendendo as aulas. Ele disse: *em termos de didática meu caderno de aula está completo para estudar.* Continuou: *às vezes eu fico com pena da senhora. Quando a senhora lecionava o Cálculo, colocava tudo no quadro e explicava com muita facilidade. Agora, quando a senhora coloca as coisas no quadro, fica pensando como podem ser explicadas. Percebe-se que a senhora está trocando as áreas e isso não é fácil, não é?* Então lhe respondi: *certamente, ensinar Matemática é diferente de ensinar Física. A Física é bastante complexa, e como você mesmo disse, necessita de resultados experimentais para ser entendida. No entanto, faço questão que vocês exteriorizem seus pensamentos.*

<u>*Aula do dia 09/09/2011:*</u> A próxima situação-problema abordada era a de um carro trafegando numa estrada plana na forma de um círculo. Foram dados o raio *r* do círculo e o coeficiente de atrito estático μ_e. Os estudantes deveriam calcular a velocidade com que o carro poderia trafegar sem risco de derrapar.

Coforme Halliday (p.129) se as rodas do carro ficam "travadas" (impedidas de girar) durante uma frenagem de emergência, o carro desliza na pista. Pedaços de borracha arrancados dos pneus e pequenos trechos de asfalto fundido formam as "marcas de derrapagem" que revelam a ocorrência de soldagem a frio.

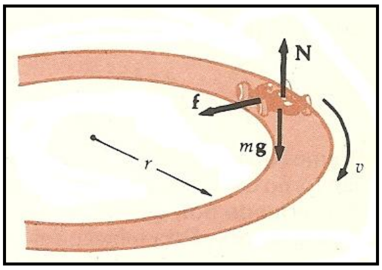


Figura 40: Carro trafegando num círculo horizontal (Tipler, 1990, p. 131).

Após este comentário, expliquei que no caso proposto a força que aponta para o centro é a própria força de atrito estático, no seu valor máximo. Esta é a força necessária para que não haja derrapagem. Mostrei pela expressão matemática obtida que a velocidade máxima procurada independia da massa do carro.

$$v_{máx} = \sqrt{\mu_e g r}$$

Observei com os alunos que quanto maior o raio da trajetória circular (quanto mais "aberta" for a curva) maior será a rapidez máxima permitida para o carro fazer a curva sem derrapar. Então, ao final do problema chamei a atenção para o problema de pistas construídas neste modelo, que dificultam manter uma velocidade constante supostamente alta numa viagem. Os alunos entenderam o problema. Um deles perguntou: *por que não consideramos a resistência do ar?* Disse que a situação era idealizada sem a resistência do ar.

A situação-problema seguinte solicitava o ângulo mínimo de declive de uma pista de rolamento com raio de curvatura fornecido, para que o carro pudesse percorrê-la com uma velocidade também fornecida, sem que houvesse atrito lateral entre os pneus e a pista de rolamento.

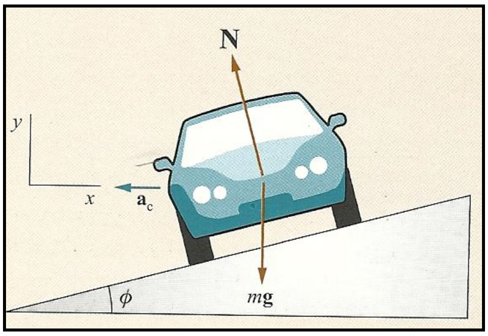


Figura 41: Uma pista de rolamento inclinada (Chaves e Sampaio, 2007, p.118).

Neste caso é a força normal da pista sobre o carro que fornece a este a força centrípeta necessária para que sua velocidade mude de direção. Aplicando as leis de Newton obtemos:

$$\begin{cases} ma_x = -m\dfrac{v^2}{r} = -Nsen\phi \\ ma_y = 0 = N\cos\phi - mg \end{cases} \Rightarrow \quad \tan\phi = \frac{v^2}{gr} \quad \Rightarrow \quad \phi = \arctan\frac{v^2}{gr}$$

Usei o mesmo raciocínio para mostrar que o ângulo entre as perpendiculares à base da rampa e ao plano da rampa era o mesmo ângulo de elevação da rampa. Os cálculos apresentaram um resultado razoável com o que os alunos estavam pensando. No entanto, um aluno argumentou: *não entendi o que representaria um ângulo maior ou menor do que este obtido? Haveria derrapagem para um ângulo maior, e menor?* Disse que para a velocidade e o raio de curvatura fornecido o resultado obtido era o ângulo necessário para que não houvesse atrito lateral entre os pneus e a pista, como o problema estava pedindo.

Não adiantou, ele continuou com dúvida. Então, alguns colegas, como de costume, começaram a intervir com várias opiniões. O aluno disse: *quero ouvir a explicação da professora, já que ouvi duas respostas diferentes entre os colegas, na aula.* Confirmei o que já havia dito, e percebi que o aluno não havia ficado satisfeito.

Então continuei, apresentando nova situação-problema (figura 42): a do balde com água sendo girado, em movimento circular. Os alunos tinham que obter a velocidade mínima do balde no topo da trajetória para que a água não se desprendesse do fundo, e a força exercida pelo balde sobre a água. Era fornecido o raio *r* do círculo vertical e a velocidade escalar *v* no topo do círculo.

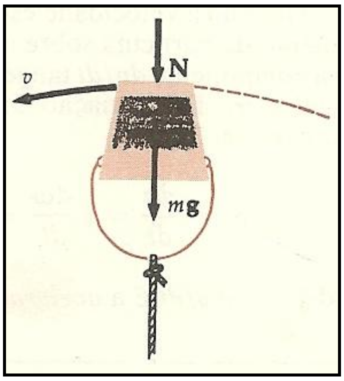


Figura 42: Balde de água que gira num círculo vertical (Tipler, 1990, p. 130).

Expliquei que naquela posição, a velocidade mínima seria obtida quando a normal do balde sobre a água fosse nula. A força resultante apontando para o centro do movimento é obtida a partir da soma da força normal do balde sobre a água e da força gravitacional da Terra sobre a água. Esta soma representa a força centrípeta no movimento.

$$N + mg = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad N = m\frac{v^2}{r} - mg$$

Quando não força normal do balde sobre a água é nula obtemos a velocidade mínima no topo para que a água permaneça no balde.

$$v_{mín} = \sqrt{gr}$$

Observei com os estudantes que esta velocidade mínima independe da massa da água dentro do balde. Comentei que este seria um exemplo de um recipiente com água dentro que se comporta, de forma idealizada, como um corpo rígido. Podemos aplicar as leis de Newton neste sistema mecânico. Falei aos alunos que a situação apresentada era semelhante àquela no exemplo do ciclista contornando um loop, numa pista circular, num circo. O raciocínio seria o mesmo. Um aluno afirmou: *caso não houvesse o fundo do balde, naquela situação do topo a água sairia em movimento retilíneo*. À medida que ia resolvendo os problemas, alguns alunos sempre procuravam participar.

Então, passei para os exercícios da lista. Decidi começar pela lista sobre forças. Resolvi primeiro o problema das três polias acopladas, mantendo um peso em equilíbrio estático quando uma força F é aplicada para baixo. Resolvi o problema dividindo a tensão de cima em duas partes iguais, para baixo. Raciocinei assim em todas as polias e, então obtivemos o valor da força F. Os alunos não expressaram dúvidas maiores.

O próximo problema era mais difícil, e havia sido resolvido numa das aulas observadas, no semestre anterior. Um homem, sentado num elevador ligado a uma polia por uma corda. O próprio homem puxa a corda em duas situações, uma com velocidade constante e outra com uma aceleração constante. O problema pede para calcular o valor da tensão da corda para os dois casos. No primeiro caso a força resultante é numa, pois se a velocidade é constante então não há aceleração. No segundo caso a força resultante não é nula, já que a aceleração é constante. Ao decompor as forças aplicadas sobre o homem, e depois sobre a rampa, separadamente, obtemos para o primeiro caso e segundo caso, respectivamente:

$$2T = (m+M)g \quad \text{e} \quad 2T = (m+M)(a+g)$$

Resolvi também considerando o homem e o elevador um sistema de partículas. Neste caso as forças atuantes sobre o sistema são: a tensão T exercida pela corda sobre o homem, a tensão T exercida pela corda sobre o elevador, a força gravitacional sobre o homem, e a força gravitacional sobre o elevador. Obtemos a mesma expressão anterior.

No entanto, não consegui fazê-los entender que o peso total resultante da soma do peso do homem e do peso do elevador era compensado pelo dobro do valor da tensão exercida pela corda sobre o elevador, pois ela também é exercida sobre o homem. Ficamos imaginando várias situações, e os alunos davam palpites. Então, percebi que aquele aluno que havia ficado com dúvida no valor do ângulo de inclinação da rampa, levantou-se e foi embora.

Senti que neste último problema não havia convencido os alunos fisicamente. Um deles disse: *entendo a resolução do problema com a velocidade constante implicar uma aceleração nula, mas apesar disto não concebo intuitivamente esta situação.*

Outro aluno também não havia se dado conta que uma velocidade constante implicava um sistema não acelerado. Até que disse: *mas o problema não é o mesmo que a senhora resolveu anteriormente, com as três polias acopladas.* Concordei com o aluno dizendo: *certamente não, no problema anterior o equilíbrio era estático, agora o equilíbrio é dinâmico*[115].

Encerrei a aula pedindo que eles pensassem novamente no problema e, tentassem solucioná-lo de outra maneira. Percebi que muitos estavam preocupados que eu enviasse a lista de exercícios que valerá nota por e-mail, para que pudessem resolvê-la. Fiz uma brincadeira de que meus desenhos eram muito feios na lousa, que eles me dariam nota zero no final do semestre. Então um aluno disse: *depende da nota que a senhora nos der na prova.* Estavam preocupados com a prova[116].

<u>*Aula do dia 12/09/2011:*</u> Nesta aula retomei duas questões discutidas na aula anterior. Uma delas era para calcular o ângulo de inclinação para que não houvesse atrito lateral entre o carro e o asfalto. Expliquei a questão analisando qualitativamente o resultado, em termos do que aconteceria se o ângulo obtido, a partir da velocidade fornecida, fosse maior ou menor. O carro derraparia. A outra questão foi aquela onde um homem sentado num elevador de obras, puxa uma corda com a mão, aplicando uma força dada. O problema pedia para calcular a tensão da corda. Desta vez resolvi a questão construindo o diagrama de corpo livre para os dois corpos separadamente. Os alunos não demonstraram nenhuma surpresa, e copiavam as questões.

---

[115] No contexto da disciplina do Cálculo costumamos nos referir ao fato de que se uma função é constante num determinado intervalo fechado então sua função derivada é nula neste intervalo aberto. No entanto, não há muito sentido em trabalhar com a função nula. Porém, no contexto da disciplina de Física há dois tipos de equilíbrio: *estático* (quando a velocidade é um escalar nulo) e *dinâmico* (quando a velocidade é um escalar não nulo). Em ambos os casos a aceleração (derivada da velocidade) é nula.

[116] A questão da avaliação era preocupante. Como avaliá-los no contexto da Física? De que forma a operacionalidade matemática deve ser avaliada diante de uma situação física proposta? Na disciplina de Cálculo um erro matemático inicial deve ser descontado, mas a coerência nos cálculos restantes pode ser considerada. No entanto, na disciplina de Física se a linguagem matemática não for abstraída corretamente a partir da situação física proposta, então ela não terá sentido, mesmo que todos os cálculos matemáticos estejam corretos. A Matemática por si só não resolve os problemas físicos.

Passei então para um problema solicitado por um aluno. Uma esfera encostada numa parede presa por uma corda. Eram fornecidos dados literais para o problema. O peso, o raio da esfera e a distância entre o ponto onde a corda estava presa e o centro da esfera, verticalmente. Os alunos tinham que obter uma expressão geral para o valor da tensão da corda[117].

Outro problema foi solicitado pelo mesmo aluno. Era um problema do livro, que não estava na lista proposta. Eram dadas as coordenadas da função posição de um corpo, no plano, e o problema pedia para calcular o módulo do vetor força no instante $t = 5{,}0s$. Também deveria ser calculado o ângulo que o vetor velocidade faz com o sentido positivo do eixo x. Lembrei o aluno que era uma questão onde, para obter a função vetorial correspondente a velocidade, bastaria derivar cada componente com respeito ao tempo. A fim de calcular o valor do vetor velocidade no instante solicitado, bastaria substituir na função velocidade vetorial o valor do tempo. Finalmente poderiam ser aplicadas as fórmulas para o cálculo do módulo do vetor obtido, assim como o ângulo solicitado[118].

Outro aluno solicitou que resolvesse o primeiro problema. Trata-se de um carro atolado, onde o dono amarra a ponta de uma corda na para choques e a outra ponta num poste situado a uma dada distância. Então ele puxa a corda, exatamente em meia posição por 30 cm, com uma força fornecida. O problema pede para calcular a tensão na corda.

Fiz a decomposição dos vetores envolvidos, e expliquei que a força resultante atuando sobre o carro deveria ser nula. Percebi que estava me detendo apenas em problemas de estática. Sugeri que escolhessem outros da lista.

A outra questão trabalhada era sobre uma placa com massa fornecida, colocada sobre um assoalho, sem atrito. Um bloco, de massa também fornecida, é posto em cima da placa. Neste caso há atrito entre a superfície da placa e a superfície do bloco. Os dois coeficientes de atrito, estático e cinético, são fornecidos. Há uma força atuando sobre o bloco, também fornecida. O problema solicita as acelerações resultantes do bloco e da placa.

---

[117] Observei que, para este tipo de questão, onde as respostas são expressões matemática gerais, sem dados concretos, os alunos tentam manipular sua forma de resolução tentando, a partir da resposta, achar alguma coerência na montagem do problema. Isto é, partem da resposta para as hipóteses iniciais, e não das hipóteses iniciais para a resposta.

[118] Os invariantes operacionais matemáticos necessários para a resolução deste problema são as noções de *função vetorial* (diferenciada do que seja um vetor constante). No entanto tal entendimento só é possível quando o conceito de *função escalar* puder ancorar na mente do aluno o novo conceito.

Expliquei para os alunos que o cerne desta questão está no fato de que a força de atrito cinético que a superfície da placa exerce sobre o bloco tem uma reação, uma força de mesmo módulo e sentido contrário, de resistência, do bloco sobre a placa. Um aluno disse: *Na verdade, é esta força que move a placa.* Os alunos não se mostraram muito surpresos com as resoluções. Então raciocinei junto com eles sobre o que deveria acontecer para que a placa, juntamente com o bloco, se movimentasse. Percebi que os alunos entenderam bem a questão do atrito.

Resolvemos, então, a questão do caixote sobre uma rampa, onde era aplicada uma força horizontal sobre o caixote para que se movesse com velocidade constante. Salientei que velocidade constante consiste em aceleração nula, *uma forma de equilíbrio em movimento*. Ainda havia algumas dúvidas com relação à identificação do ângulo de inclinação da rampa no diagrama de corpo livre. Expliquei novamente, da forma como observei que os professores de física explicavam.

A última questão resolvida foi sobre um brinquedo dos parques de diversões, consistindo de um cilindro giratório. Uma pessoa ficava posicionada encostada na superfície interior do cilindro enquanto ele girava. Um aluno no fundo da sala disse: *a legítima máquina de lavar roupas.* Houve risos. Era fornecido o atrito estático entre as roupas e a superfície do cilindro e o problema pedia para calcular o número de voltas por segundo que o brinquedo poderia dar, de forma a manter a pessoa sem cair, já que o brinquedo soltava a parte inferior do cilindro. Para resolver este problema revisei com eles o conceito de aceleração centrípeta como função da velocidade escalar e do raio e inclui a fórmula da velocidade angular, que não havia trabalhado com eles, como a razão entre a velocidade v e o raio r do movimento circular. A sensação é de que tinha resolvido muito mecanicamente o exercício. Então, um aluno afirmou: *esta velocidade v é a velocidade tangencial do problema, professora. Eu havia lhe dito na aula passada.* Afirmei para o aluno que não quis entrar muito em detalhes no conteúdo relacionado, pois isto seria feito no momento em que trabalharmos com o conceito de *rotação.*

Um dos alunos começou a raciocinar sobre o que aconteceria se o atrito estático fosse alterado de alguma forma, caso uma das pessoas se sentisse mal no brinquedo. Então a pessoa deslizaria para fora do brinquedo. Novamente houve risos, mas eles estavam pensando em Física. No final da aula o mesmo aluno que falou na velocidade tangencial trouxe a primeira edição do livro Halliday. Ofereceu-me para que pudesse identificar quais as diferenças das edições mais recentes. Pediu que ficasse com ele até o final do semestre. Agradeci e propus-me revisá-lo, quando possível.

Aula do dia 14/09/2011: Nesta aula começamos a discutir a lista 1 sobre Cinemática, desde o primeiro exercício, lembrando como se calcula a *velocidade média* e a *velocidade escalar média (ou rapidez média).* Lembrei que a velocidade média representa geometricamente a inclinação da reta secante à curva da função posição da partícula, entre os dois pontos extremos do intervalo do tempo. Também recordei como calcular geometricamente a velocidade instantânea, conhecendo o gráfico da função posição, e lembrando que o sinal da inclinação indica se a velocidade é positiva ou negativa[119].

Depois resolvi o problema dos dois trens se deslocando com a mesma velocidade em sentidos contrários. Um pássaro voa entre os dois trens em direção a um e a outro consecutivamente. Foi dada a velocidade do pássaro. O problema pedia que eles calculassem a distância total de viagem do pássaro e o número de viagens que ele fará. Os alunos prontamente responderam que a distância total de viagem do pássaro será atingida quando os trens colidirem. A dificuldade mostrou-se quando afirmei que a quantidade de viagens do pássaro era infinita. Representei um sistema de coordenada inicial para mostrar que na primeira viagem o pássaro levaria dois terços de hora partindo de um dos trens, para atingir o outro. Depois, diante da nova situação, desenhei outro sistema de coordenadas para mostrar que na segunda viagem o pássaro levaria dois nonos de hora para voltar ao trem de onde partiu. Então, na terceira viagem, repetindo o raciocínio, o pássaro levaria dois vinte sete avos de hora para completá-la. Tentei mostrar-lhes que a quantidade de tempo levada pelo pássaro, no total, era uma soma geométrica de razão igual a um terço, convergente. O termo de convergência era um. Disse-lhes que séries infinitas seriam estudadas no Cálculo II, e que talvez houvesse outra forma de resolver o exercício. Um aluno afirmou *não ser intuitivo pensar que o pássaro fará infinitas viagens antes da colisão.* E, de fato não era. Houve um comentário de que uma questão assim levaria a aula inteira para ser resolvida, caso fosse pedido numa prova.

[119] Com isto estava retomando os conceitos do módulo matemático relacionado às noções de diferenciação. Desta vez, levando em consideração os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa poderia especificá-los ainda mais e relacioná-los com os conceitos físicos.

A próxima questão foi para lembrar-lhes que dada uma função posição de uma partícula dependente do tempo poderíamos obter a função velocidade derivando a função posição, e a função aceleração derivando a função velocidade. Com estas informações, os alunos podem calcular a velocidade escalar da partícula em intervalos de tempo cada vez menores em torno de um ponto central, para mostrarem que os valores estão ficando cada vez mais próximos do valor da velocidade instantânea no ponto central. Aplicando uma regra de derivação, se poderia confirmar que o valor da velocidade instantânea no ponto era realmente aquele à que tendia o valor da velocidade média, calculada inúmeras vezes. Lembrei-lhes que para o caso do movimento retilíneo uniformemente variado vale a regra de que a média das velocidades nos extremos do intervalo de tempo é igual à velocidade média naquele intervalo. Esta propriedade vale para gráficos de velocidade lineares. Afirmei que havia um experimento feito no laboratório onde estas propriedades eram utilizadas. *Um aluno disse que esse experimento ainda não havia sido trabalhado*[120].

Após passei para a lista 1 da área dois. Comecei pelo problema número dezessete onde haviam dois corpos ligados por uma corda através de uma polia de massa desprezível. Um deles estava sob a superfície de uma rampa inclinada em 45º com a horizontal, e o outro estava pendurado pela polia. Havia atrito cinético entre o bloco e a rampa. Os alunos deveriam calcular a tensão da corda, a aceleração do sistema, a força resultante sobre o bloco dois, e a força resultante que o corpo um exerce sobre a rampa. Houve dúvida com relação ao último item. Os alunos sugeriam respostas, que fiquei de comentar na próxima aula.

O exercício 21 era um pouco mais complexo. Um bloco sobre uma mesa, outro bloco em cima do primeiro bloco. O bloco menor era ligado ao bloco de baixo por uma corda ligada por uma polia de massa desprezível, e os dois blocos eram ligados por outra polia que pendurava um terceiro bloco. As situações estavam ficando mais complexas, no entanto afirmei para eles que se soubessem identificar, num diagrama de corpo livre, todas as forças atuantes sobre o sistema, não haveria forma de errarem a questão. Resolvendo junto com os alunos, observei um erro de sinal nas minhas contas devido ao princípio da ação e reação. Corrigi juntamente com os alunos. Era importante resolver toda a questão para que eles percebessem o grau de dificuldade. Conversei com eles sobre a prova, que me surpreendia com alunos que costumam, nos outros semestres, responderem todas as questões e, na hora da

[120] Pude perceber como é importante que as aulas experimentais pudessem ser sincronizadas com as aulas teóricas. Precisamos direcionar as aplicações dos conceitos físicos para os experimentos de laboratório.

prova, tinham um desempenho muito fraco. Não entendia por que isto acontecia. Pedi que eles estudassem, e disse que me sentia muito a vontade para cobrar questões semelhantes na prova. Um aluno disse: *certamente a senhora pode cobrar professora.*

Ao encerrar a aula, uma aluna me disse que tinha provas de semestres anteriores, de outros professores, se eu quisesse me basear em alguma questão. Disse-me: *professora, a senhora está fazendo um bom trabalho, principalmente quando permite que os alunos discutam. A turma é muito boa, todos dão sugestões para as situações discutidas.*

<u>*Aula do dia 16/09/2011:*</u> Para definir o conceito de *trabalho* realizado por uma força constante para deslocar um objeto num determinado percurso foi preciso retomar o módulo matemático sobre *vetores e trigonometria*. Desta vez definindo o conceito de produto escalar entre dois vetores. No contexto da Física o *trabalho W* realizado por uma força $\vec{F}$ constante para deslocar um objeto por um deslocamento $\vec{d}$ é definido pelo produto escalar dos vetores, e denotado por:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \qquad \Leftrightarrow \qquad W = Fd\cos\phi$$

Onde ϕ é o menor ângulo entre os dois vetores ($0 \le \phi \le 180°$).

Conforme Halliday (p.155) o *trabalho* é a energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o objeto. Quando a energia é transferida para o objeto, o trabalho é positivo; quando a energia é transferida do objeto, o trabalho é negativo.

Para representar os dois vetores, força e deslocamento na lousa, expliquei como poderia ser representado seu comprimento utilizando uma régua. Disse *se quisermos representar geometricamente o produto escalar dos vetores força e deslocamento devemos manter equivalentes as unidades de medida dos dois vetores.* Então um aluno respondeu: *mas não podemos comparar dois vetores de origens diferentes. Como vamos comparar a unidade em Newton com a unidade em metros?* Respondi: *o que quis dizer é que temos que fazer uma mudança de escalas a fim de desenhar os vetores. Por exemplo, para cada unidade Newton podemos fazer corresponder 1 cm da régua, e para cada unidade metro, também 1 cm da régua.* O aluno respondeu: *agora sim entendi.*

Deduzi o *teorema Trabalho-Energia Cinética* encontrando, inicialmente, uma expressão para o trabalho a partir da segunda lei de Newton (com base na situação da figura

43), e após mostrando sua relação com a variação da energia cinética, utilizando as equações da cinemática.

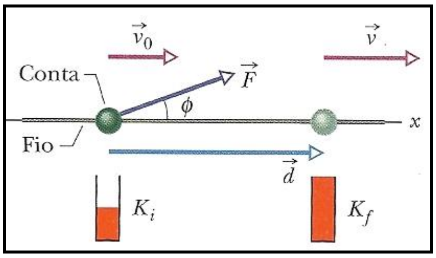


Figura 43: Relação trabalho e variação de energia cinética (Halliday, p. 155).

Concluímos que *o trabalho total (trabalho resultante* W_R*) realizado por várias forças sobre um objeto de massa m é igual à variação da energia cinética da partícula (energia associada ao movimento da partícula).*

$$W_R = \Delta K \qquad \text{onde} \qquad K = \frac{1}{2}mv^2$$

A primeira situação-problema discutida nesta parte do conteúdo foi a de um próton num acelerador de partículas (Halliday, p. 173). Era fornecida a massa do próton, sua velocidade inicial e seu deslocamento enquanto era acelerado. Os estudantes tinham que obter sua velocidade final (após o deslocamento) e o aumento na sua energia cinética.

Uma aluna disse: *professora, a senhora não pode nos levar no Laboratório onde pudéssemos ver como funciona um acelerador de partículas?* Disse: *vou me informar com a coordenação do Curso a respeito desta possibilidade.*

O mesmo aluno que questionou o fato de comparar dois vetores com unidades diferentes, perguntou: *o que acontece se aplicarmos uma força para deslocar um objeto com a mesma velocidade sempre?* Respondi: *não há trabalho efetuado pela força sobre o objeto*. Ele não entendeu. Como já havia definido o trabalho líquido sobre a partícula como a variação da energia cinética, usei esta equação para mostrar-lhes que velocidades iguais no trajeto acarretariam uma variação de energia cinética nula. Portanto o trabalho também seria nulo. Podemos pensar também como uma força resultante nula, pois se a velocidade é constante no trajeto, o objeto não está acelerado. Este é um ponto que parece não ter ficado muito claro para alguns alunos.

Resolvi um problema onde a força aplicada para deslocar horizontalmente um objeto fazia um ângulo não nulo com o sentido do movimento. Fiz a decomposição do vetor força na direção do movimento, afirmando para eles que esta era a única componente responsável pelo trabalho realizado sobre o objeto. Mesmo o problema não tendo solicitado, mostrei-lhes que os trabalhos realizados pelas forças da gravidade e normal da superfície sobre o objeto não realizam trabalho sobre o objeto.

Justifiquei mostrando que o ângulo entre estas forças e o deslocamento é de 90°. Já havia definido produto escalar entre dois vetores. Então um aluno perguntou: *há alguma situação onde a força normal realiza trabalho sobre o objeto?* Não sabia responder prontamente ao aluno. Disse: *deixe-me pensar em alguma situação*. Uma aluna afirmou: *mas a força normal é sempre perpendicular ao sentido do movimento.* Então o mesmo aluno argumentou sobre um objeto dentro de um elevador que se desloca para cima. Encerrei o assunto dizendo que pesquisaria um pouco mais sobre o assunto antes de responder-lhes. Para os casos do plano inclinado, do movimento horizontal e algumas situações envolvendo movimento vertical funcionaria, mas para outros tipos de movimento não sabemos!

Também houve uma discussão sobre o fato de um halterofilista não realizar trabalho se estiver apenas segurando o haltere parado, mas se deslocar o altere para cima e depois para baixo o trabalho líquido será nulo. Se estivermos empurrando uma parede, não estaremos realizando trabalho sobre a parede, pois ela não se desloca. *Um aluno questionou: neste caso estaríamos realizando trabalho sobre nossos músculos.* Concordei.

Anteriormente, ao explicar o produto escalar de dois vetores, usando a notação matemática em termos dos vetores unitários caso fossem dadas as componentes dos dois vetores (no caso bidimensional, por exemplo), disse que o produto escalar seria definido como a soma do produto das componentes em x e do produto das componentes em y dos dois vetores. Percebi que havia sido muito direta a passagem, já que deveria ter mostrado que o produto escalar dos vetores unitários obedece a seguinte regra: o produto escalar de um vetor unitário por ele mesmo é igual a 1, e o produto escalar de dois vetores unitários distintos é igual a 0.

Ressaltei que trabalho positivo significa transferência de energia para o objeto e, trabalho negativo, significa que o objeto está transferindo energia para quem está produzindo a força. Prometi, então, resolver mais situações nas aulas que seguirão a prova. Conversei novamente com eles sobre a prova dizendo que meu objetivo não era de prejudicar-lhes, mas me sentia no direito de cobrar alguma coisa. Um aluno disse: *a dificuldade maior é entender os conceitos de aceleração e de velocidade. Quando a senhora nos falou sobre estes conceitos não havíamos estudado no Cálculo. Agora é que nós estamos vendo lá, e agora sim estamos em condições de entender*.

Outra aluna disse*: não entendo porque a senhora está tão preocupada com a prova. A única diferença entre os conceitos que vimos aqui e os conceitos que vimos no Ensino Médio são os conceitos de aceleração e velocidade instantâneas*

No final da aula um aluno mostrou-me um livro de Cálculo II onde estava definido produto escalar e produto vetorial de uma forma bastante aprofundada. Ele só havia entendido o conceito agora que estava fazendo o Cálculo II. Perguntou-me sobre a interpretação geométrica do vetor gradiente, e afirmou: *os conceitos do Cálculo deveriam ser vistos anteriormente aos conceitos da Física. A senhora não é culpada da confusão que se mantém na cabeça dos alunos. Os sistemas de ensino de ambas as disciplinas é que estão com muitos problemas*[121].

Aula do dia 19/09/2011: Poucos alunos estavam presentes, apenas doze. O feriado do dia 20/09 deve ter sido a causa. No entanto, um dos alunos comentou que teve aula de Cálculo I. Não adiantaria que e não tivesse dado aula. Disse-lhes que neste dia não precisavam ter se preocupado com a presença, apenas tiraria dúvidas. Um deles respondeu que estava presente não pela presença, mas porque não havia resolvido ainda as listas de exercícios.

Comecei a discutir a lista de exercícios da área de Cinemática, pois achava que estava muito longe do contexto em que foi trabalhada. Resolvi o exercício número 12, sobre o *tempo de reação de um motorista.* Matematicamente, com os dados fornecidos, era possível construir um sistema de duas equações a duas incógnitas. Pedia-se o tempo de reação do motorista e a aceleração com que o carro para, a partir de uma dada velocidade. Houve uma discussão sobre como obter um ou outro primeiro.

Passei então para o problema 19, sobre *movimento bidimensional*. Duas partículas deslocando-se, uma na direção horizontal, da esquerda para a direita com velocidade

[121] Fiquei me questionando porque aquele aluno estava repetindo a cadeira de Física, já que demonstrava ter bastante conhecimento na disciplina. Sua sugestão em antecipar o Cálculo à Física é bastante criticada na comunidade Física. Os professores alegam que o estudante de Física ingressa no Curso para aprender Física. Cadeiras iniciais puramente matemáticas desestimulariam por completo as metas do aluno.

constante, e outra, inicia seu movimento, a partir da origem do sistema, no momento em que a primeira intercepta o eixo vertical, com aceleração constante. O problema solicita o valor do ângulo entre o vetor aceleração da segunda partícula e o eixo vertical, para que as duas partículas entrem em colisão. Com os dados fornecidos era possível obter as equações das posições das duas partículas. Comecei o problema relembrando as formas das equações vetoriais da posição. Então passei para as componentes *x* e *y*, para cada partícula. Haveria uma colisão entre as duas no momento que suas funções posição fossem iguais. O problema não era tão direto, os alunos tinham que calcular o ângulo entre o vetor aceleração e o eixo vertical, para a segunda partícula. Recaíamos numa equação de segundo grau onde a variável era a função cosseno de teta. Os alunos copiavam a resolução. Poucos observavam a explicação, sem nada copiarem.

O terceiro problema resolvido foi o número 25 da lista. *Um canhão que dispara um projétil de alto de um platô.* Na planície abaixo está um tanque que, ao avistar o canhão, segue com aceleração constante. O problema solicita o tempo de espera do atirador do canhão para que o projétil disparado possa atingir o tanque. Um aluno não entendeu porque o tempo de permanência do projétil no ar era calculado fazendo a coordenada *y* do projétil igual à zero. Expliquei novamente. O raciocínio para a resposta não era tão direto. Então outro aluno disse em tom de brincadeira que o tanque deveria ter ficado parado para não ser atingido pelo projétil. O aluno que tinha ficado em dúvida disse ter ficado envergonhado, todos os colegas olhavam para ele quando perguntou. Afirmei que o problema não era nada trivial, e que sabia que muitos outros tinham as mesmas dúvidas. Então outro aluno disse: *eu estou olhando a resolução, não significa que esteja entendendo.* Percebi que eles não haviam resolvidos às listas.

Então passei para os problemas de *movimento relativo*. Lembrei-os da parte teórica, dizendo que no movimento relativo os referenciais inerciais deslocam-se com velocidades constante um em relação ao outro, portanto a aceleração da partícula deve ser a mesma em relação aos dois sistemas. A situação do problema 29 era de uma calçada rolante num corredor de um terminal do aeroporto de Genebra. Três pessoas percorriam o corredor; a primeira andava no corredor com uma dada velocidade, sem utilizar a calçada rolante. A segunda percorria o corredor por intermédio da calçada rolante, estando parada em relação a esta. A terceira, não só usava a calçada rolante como andava sobre ela, com a mesma velocidade da primeira pessoa andando apenas sobre o corredor. Tínhamos que obter o tempo em que a terceira pessoa levava para percorrer a distância do corredor, tendo sido dados os tempos em que as duas primeiras pessoas faziam o mesmo trajeto. Os alunos não demonstravam nenhuma surpresa, apenas copiavam a resolução.

O último problema resolvido era de *movimento relativo em duas dimensões*, o problema 32. A chuva caía verticalmente com uma dada velocidade em relação ao solo. O motorista de um carro viajava horizontalmente, com uma velocidade também fornecida. O problema perguntava com que ângulo em relação ao eixo vertical as gotas da chuva caíam, em direção ao motorista. Então especifiquei a equação vetorial que mostrava que a velocidade da chuva com relação ao motorista era a soma vetorial das velocidades da chuva em relação ao solo e do motorista em relação ao solo. Um aluno não concordou com a equação que escrevi. Então especifiquei quais eram os sistemas de referência escolhidos, considerando a chuva como a partícula. *O aluno não entendia como eu podia afirmar que o vetor velocidade da chuva em relação ao motorista era a soma vetorial dos outros dois, já que era nossa incógnita*. Disse-lhe que esta era nossa hipótese. Então encerrei a aula de exercícios, não houve comentários maiores.

Aula do dia 21/09/2011: Esta aula é da véspera da prova, portanto achei que não era conveniente retomar os conceitos de *trabalho e energia cinética*. Fiz uma aula de dúvidas. Na verdade resolvi algumas questões de provas anteriores e das listas. No início da aula um aluno me disse que não estava muito bem, porque não havia feito todos os exercícios da lista. Disse que estava atrasado tanto em Cálculo como em Física. Respondi que deveria fazer o que fosse possível.

Observei que a professora do horário anterior estava terminando de aplicar um teste. Ela disse que são feitos seis testes, elaborados pelo professor, e duas provas no semestre, para as turmas da Engenharia. Um aluno da minha turma disse achar interessante este método, já que diminui a quantidade de matéria para a prova. Ele e outro colega comentaram que o conteúdo para a prova de Física era bastante extenso.

Então resolvi o primeiro problema de provas anteriores. *Um bloco em equilíbrio numa parede* por uma força aplicada sobre ele, fazendo um determinado ângulo com a horizontal. O atrito era estático. Fiz o diagrama de corpo livre e salientei que era importante saber fazê-lo na prova, dada qualquer situação. Então chamei a atenção para o fato de bloco estar em equilíbrio estático, o que implicaria uma força resultante nula. Ao resolver o problema fui relembrando as notações de vetor e de escalar, diferenciando ambos. Também revisei com eles as situações onde a aceleração é nula.

O segundo problema de provas anteriores era o mesmo proposto na lista. *Um corpo de massa fornecida no problema, preso a um cordão que gira, sem atrito, num círculo de raio também dado sobre uma mesa horizontal.* O cordão passa por uma abertura no centro da mesa e sustenta uma massa fornecida no problema. Salientei que nesta situação a tensão no barbante fazia o papel da força centrípeta no movimento circular. Então calculamos o valor da tensão e a velocidade escalar do corpo sobre a mesa. Um aluno perguntou: *o que acontece se a velocidade aumenta?* Olhando para a equação da velocidade, afirmei-lhe que a tensão aumentaria. Então ele retrucou: *aumentando a velocidade o raio do cordão sobre a mesa diminui.* Perguntei-lhe se queria fazer fixa a tensão ou fixo o raio na equação; a análise dependeria da variável que ele estivesse fixando. Ele ficou discutindo a questão com um colega sentado à sua frente. Então afirmei que para aquela situação o aumento da velocidade implicaria o aumento da tensão. Depois observei que o que o aluno estava querendo dizer é que a tensão permanecia a mesma, pois ela equilibrava o peso do corpo suspenso.

Então permiti que eles perguntassem algum exercício das listas. Outro aluno perguntou-me justamente dois problemas que já haviam sido resolvidos na lousa. No entanto resolvi novamente, e percebi que todos copiavam. Foi quando um aluno sentado no fundo perguntou se os exercícios que eu estava resolvendo seriam os mesmos da prova. Todos riram. Disse-lhes que estava resolvendo aqueles exercícios apenas para lembrar os conceitos, mas que não significava que seriam os mesmos. Ele retrucou que então seriam semelhantes, apenas mudaria os dados dos problemas. Todos riram novamente, e eu continuei resolvendo as questões.

Encerrei a aula dez minutos antes do término, pois não daria tempo para resolver outro problema. Então ao final um aluno veio me agradecer pelas aulas e pedir desculpas por gerar polêmica nas aulas. Disse-lhe que não deveria se desculpar por isso. Também disse que esperava um bom desempenho da turma. Então outro aluno sorriu: *também esperamos uma prova com questões acessíveis.*

A prova já havia sido elaborada, mas comecei a repensar a possibilidade de formular outras questões. Talvez, inconscientemente, estivesse seguindo os métodos tradicionais que tanto critiquei ao longo da pesquisa.

Aula do dia 23/09/2011: Nesta aula foi aplicada a primeira prova, na qual compareceram 26 alunos. Já nos dias 24 e 25 fiz a correção, surpreendendo-me com a média aritmética da turma, que foi 4,6. As fórmulas básicas foram fornecidas. Meu objetivo nesta primeira prova foi observar a escolha dos referenciais e a coerência na decomposição dos vetores força, a partir de alguma representação simbólica como diagramas de corpo livre, esboços de gráficos, expressões matemáticas. Enfim, evidências que pudessem confirmar uma boa operacionalidade ou não dos conceitos matemáticos desenvolvidos nos módulos matemáticos trabalhados. Também busquei observar o processo de passagem do modelo físico para o modelo matemático utilizado pelos estudantes frente às situações problema propostas.

As questões apresentadas foram:

QUESTÃO 1: O bloco da figura 44 parte do repouso e desliza sobre uma rampa sem atrito, a partir de uma altura $h = 10m$, onde $\phi = 30°$. (a) **(1.0)** Qual é a aceleração do bloco? (c) **(0.5)** Quanto tempo ele leva para atingir a base da rampa? (d) **(0.5)** Qual é sua velocidade final?

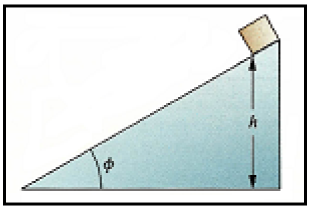


Figura 44: Bloco deslizando numa rampa sem atrito (Chaves e Sampaio, p. 131).

QUESTÃO 2: Conforme a figura 45, dois corpos apoiados sobre uma superfície horizontal sem atrito são empurrados por um agente externo. As massas dos dois corpos são $2kg$ e $1kg$. A força exercida pelo agente externo sobre o corpo de $2kg$ é $5N$. (a) **(0.5)** Qual é a aceleração do sistema? (b) **(0.5)** Qual é a força exercida sobre o corpo de $1kg$ pelo corpo de $2kg$? (c) **(1.0)** Qual é a força resultante que atua sobre o corpo de $2kg$?

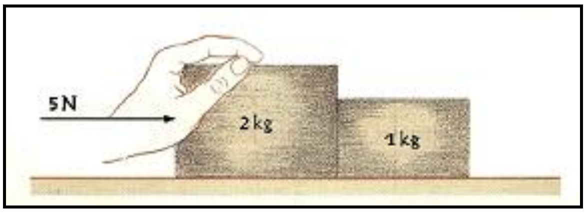


Figura 45: Dois corpos apoiados sobre uma superfície horizontal (Tipler, 1990, p. 108).

QUESTÃO 3: Um corpo de $10\,kg$ está sujeito à ação de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, conforme figura 46. (a) **(1.0)** Determinar o vetor aceleração do corpo; (b) **(1.0)** Uma terceira força $\vec{F}_3$ é aplicada no corpo de modo a provocar o equilíbrio estático. Quais são as componentes escalares da força $\vec{F}_3$?

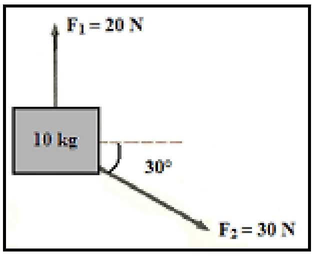


Figura 46: Um corpo sujeito à ação de duas forças (Tipler, 1990, p.109).

QUESTÃO 4: **(2.0)** Qual é o menor raio de uma curva sem compensação (plana) que permite que um ciclista a $29km/h$ faça a curva sem derrapar se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é de $0{,}32$?

QUESTÃO 5: **(2.0)** O esquema da figura 47 é o de uma *máquina de Atwood*, usada para medir a aceleração da gravidade g por intermédio da aceleração impressa aos dois corpos. Admitindo que o fio que liga os corpos tenha massa desprezível, e que o suporte superior não exerça atrito, mostrar que o módulo da aceleração de qualquer dos corpos e a tensão no fio são dados por: $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$ e $T = \dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$

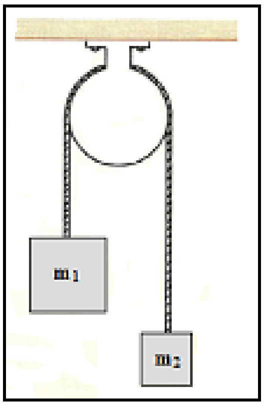
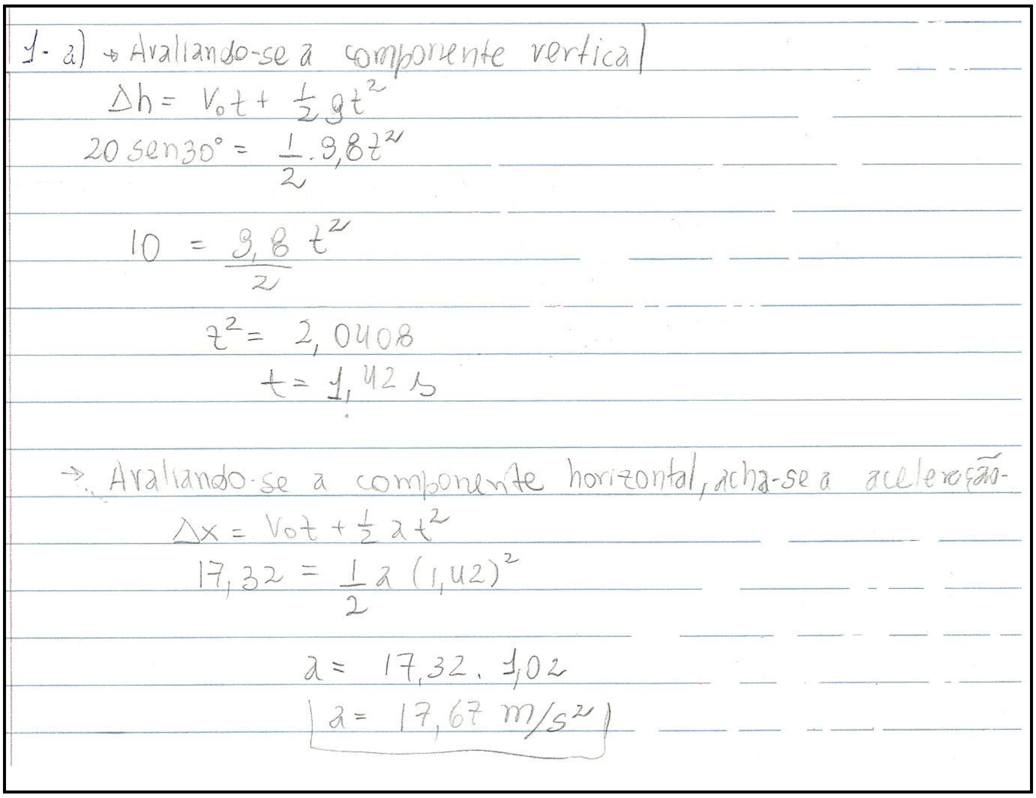


Figura 47: A Máquina de Atwood (Tipler, 1990, p.111).

Considerações a respeito das questões propostas

No quadro 16 vemos o esquema de resolução da primeira questão apresentado pelo aluno Carlos. Ele não utiliza nenhum conceito da Dinâmica, tampouco define algum sistema de referência. Sua ênfase foi nas equações da Cinemática, as quais não foram suficientes para a solução correta do problema. Para ele, calcular o tempo de descida do bloco sobre a rampa é equivalente a calcular o tempo de queda livre deste objeto, ao longo do cateto oposto ao ângulo de inclinação da rampa. Da mesma forma obtém a aceleração do bloco como se estivesse em movimento ao longo do cateto adjacente ao ângulo de inclinação da rampa. Isto é, *transforma o movimento no plano inclinado em dois movimentos unidimensionais com aceleração constante*. No entanto, demonstra o conhecimento matemático em torno da trigonometria do triângulo retângulo, quando calcula corretamente os valores da hipotenusa do triângulo retângulo (o comprimento da rampa) e o cateto adjacente ao ângulo de inclinação.

Quadro 16: Esquema de resolução de Carlos para a primeira questão.



1- a) → Avaliando-se a componente vertical

$$\Delta h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$20 \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} . 9{,}8 t^2$$

$$10 = \frac{9{,}8}{2} t^2$$

$$t^2 = 2{,}0408$$

$$t = 1{,}42 \, s$$

→ Avaliando-se a componente horizontal, acha-se a aceleração-

$$\Delta x = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

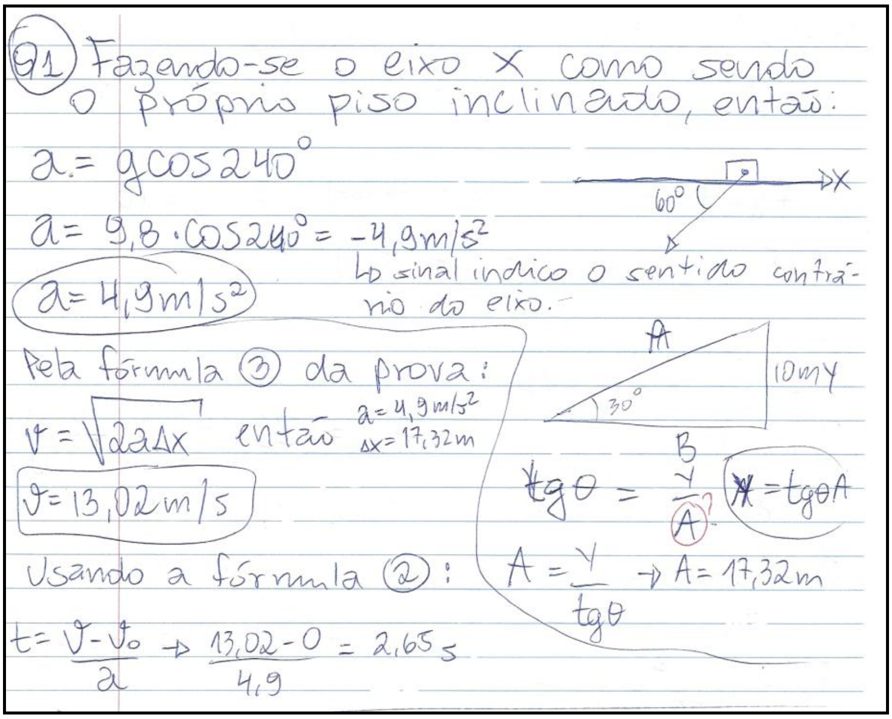
$$17{,}32 = \frac{1}{2} a (1{,}42)^2$$

$$a = 17{,}32 . 1{,}02$$

$$\boxed{a = 17{,}67 \, m/s^2}$$

No quadro l7 observamos que o aluno Tales define bem o sistema de referência adotado, e identifica corretamente o ângulo entre o vetor força gravitacional e o sentido positivo do eixo considerado, inclusive justificando a obtenção de uma aceleração negativa. O aluno apresenta a equação da aceleração já na sua forma final, deixando implícita a apresentação da segunda lei de Newton que leva a uma expressão independente da massa do objeto. Um equívoco no cálculo do comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo representado simbolicamente o leva a uma velocidade do objeto diferente da esperada. Mantendo a coerência com o erro cometido calcula o suposto tempo de decida do bloco. Diferentemente do caso do aluno Eduardo, seu erro foi devido ao engano na representação matemática.

Quadro 17: Esquema de resolução de Tales para a primeira questão.



Q1) Fazendo-se o eixo X como sendo o próprio piso inclinado, então:

$a = g\cos 240^\circ$

$a = 9{,}8 \cdot \cos 240^\circ = -4{,}9\,m/s^2$

↳ o sinal indica o sentido contrário do eixo.

$a = 4{,}9\,m/s^2$

Pela fórmula ③ da prova:

$v = \sqrt{2a\Delta x}$ então $a = 4{,}9\,m/s^2$, $\Delta x = 17{,}32\,m$

$v = 13{,}02\,m/s$

Usando a fórmula ②:

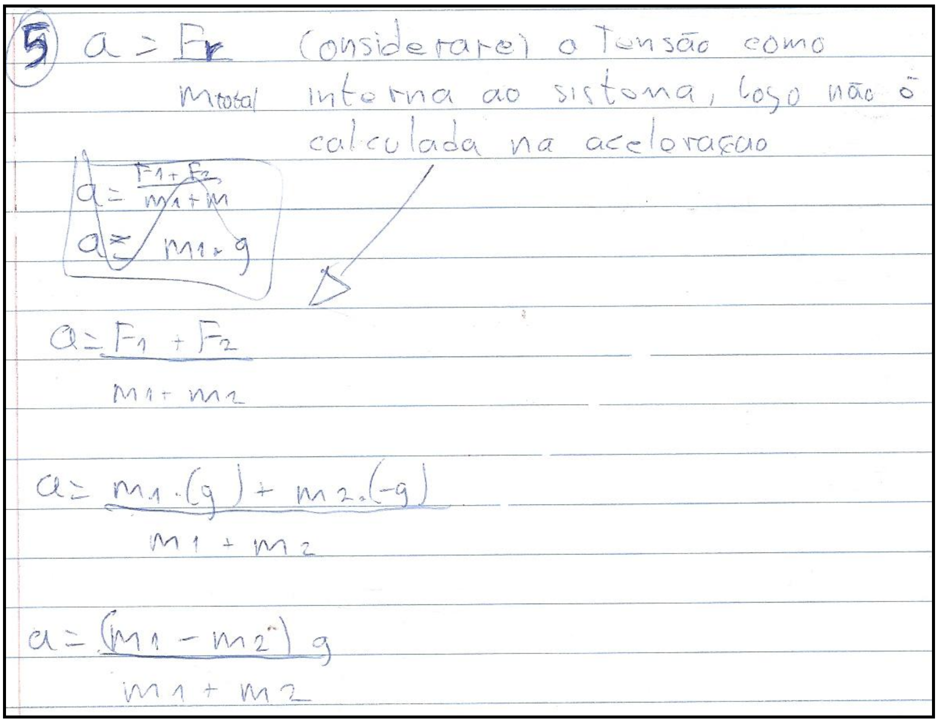
$t = \frac{v - v_0}{a} \rightarrow \frac{13{,}02 - 0}{4{,}9} = 2{,}65\,s$

$tg\theta = \frac{Y}{A}$? $Y = tg\theta A$

$A = \frac{Y}{tg\theta} \rightarrow A = 17{,}32\,m$

No quadro 18 temos o esquema de resolução de Vagner para a questão da *Máquina de Atwood.* O aluno aborda a situação como um sistema constituído por duas partículas, considerando, pela segunda lei de Newton, que a força resultante externa que age sobre o sistema é o produto da massa total do sistema pela sua aceleração. Vários invariantes operacionais estão implícitos na sua resolução, dentre eles o princípio da ação e reação que justifica que as tensões internas ao sistema se cancelem no somatório de todas as forças que agem sobre o sistema, e o fato de que, sob as hipóteses consideradas, as acelerações dos dois blocos são iguais. Também internalizada está a representação do sistema escolhido pelo estudante que se movimenta da direita para a esquerda. Supostamente ele considera a massa do primeiro bloco maior do que a massa do segundo bloco. No entanto, não está claro que o seu entendimento do sistema de referência, já que não justificou a expressão apresentada no problema para a tensão na corda, a partir deste sistema.

Quadro 18: Esquema de resolução de Vagner para a questão cinco.



5) $a = \frac{F_r}{M_{total}}$ (considerarei a Tensão como interna ao sistema, logo não é calculada na aceleração)

$a = \frac{F_1 + F_2}{m_1 + m_1}$

$a = m_1 \cdot g$

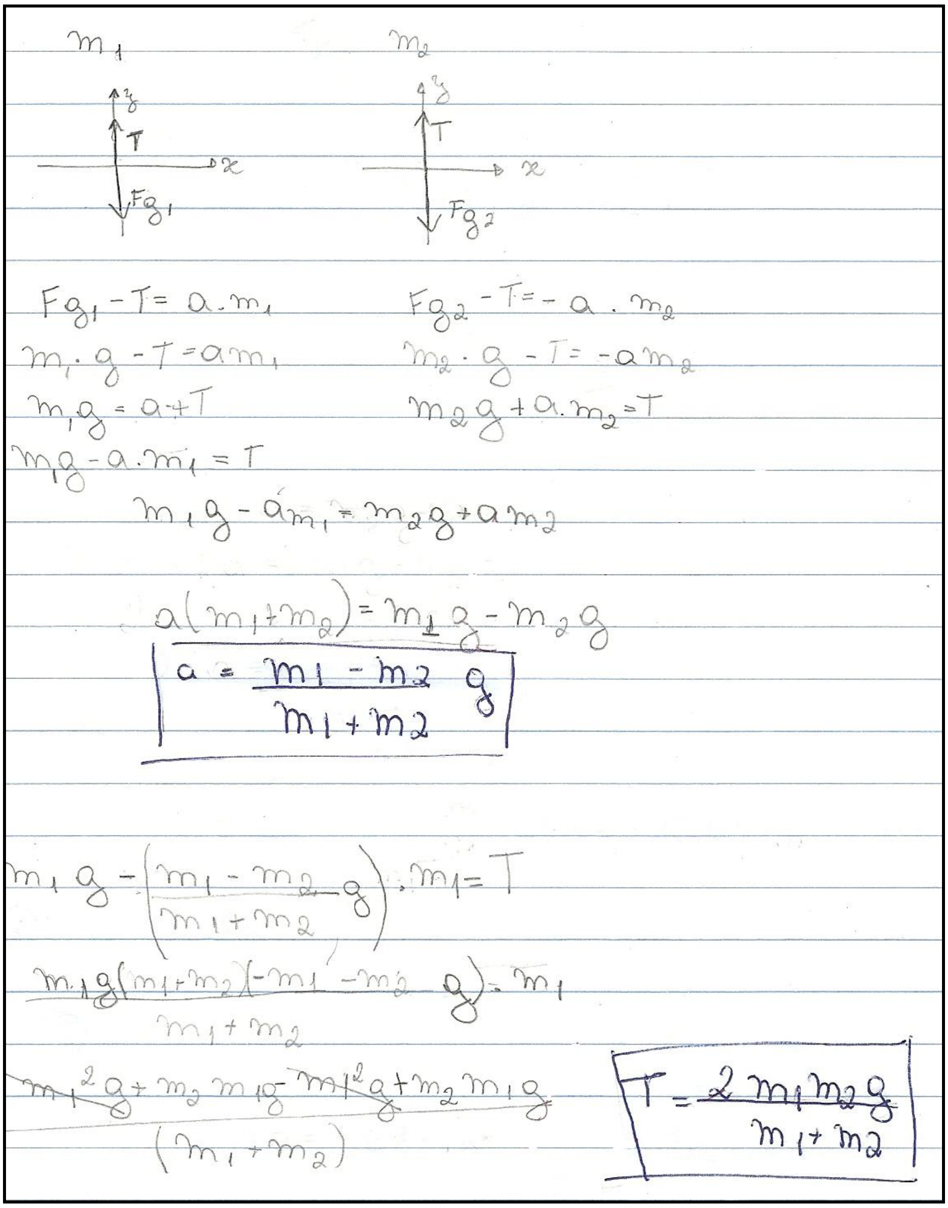
$a = \frac{F_1 + F_2}{m_1 + m_2}$

$a = \frac{m_1 \cdot (g) + m_2 \cdot (-g)}{m_1 + m_2}$

$a = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2}$

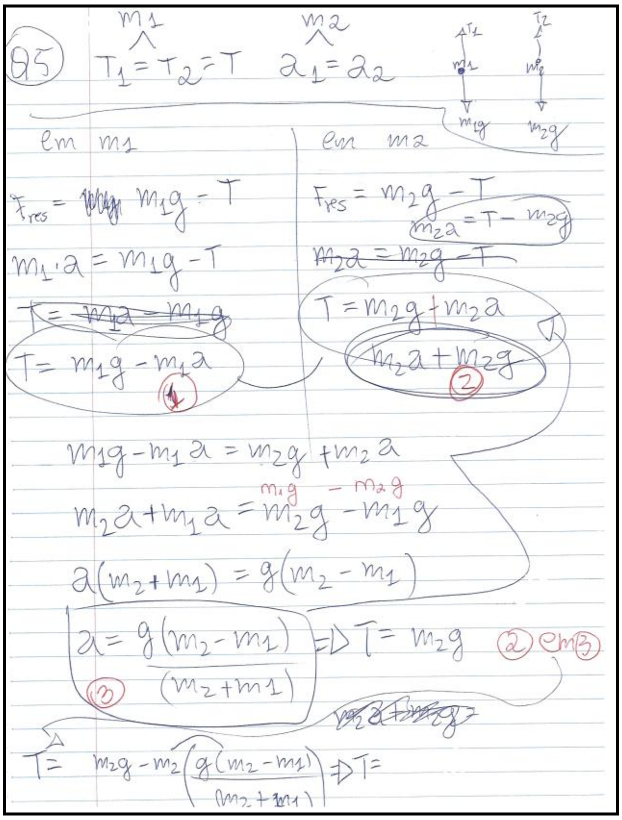
Observamos no quadro 19 uma perfeita representação matemática para a situação proposta, gráficos referenciais bem elaborados, expressões matemáticas de acordo com a escolha do referencial, e excelente explicitação das variáveis físicas nas expressões. No entanto, não há nenhuma referência quanto ao significado físico dos conceitos. A propósito, não só no esquema de Marília, mas da maioria dos alunos, não nenhuma menção à interpretação física do problema. Nas situações propostas em sala de aula sempre procuramos motivar e analisar qualitativamente seus significados físicos. Talvez a forma como a questão tenha sido apresentada e proposta na prova, não tenha proporcionado uma motivação maior para este tipo de abordagem. Talvez, se tivesse sido acrescentados itens como: justifique porque as tensões são iguais ou porque as acelerações são iguais, os alunos tivessem externado um pouco mais seu conhecimento físico. Considero a resolução da Lívia uma boa *operacionalização matemática* da situação proposta.

Quadro 19: Esquema de resolução de Marília.



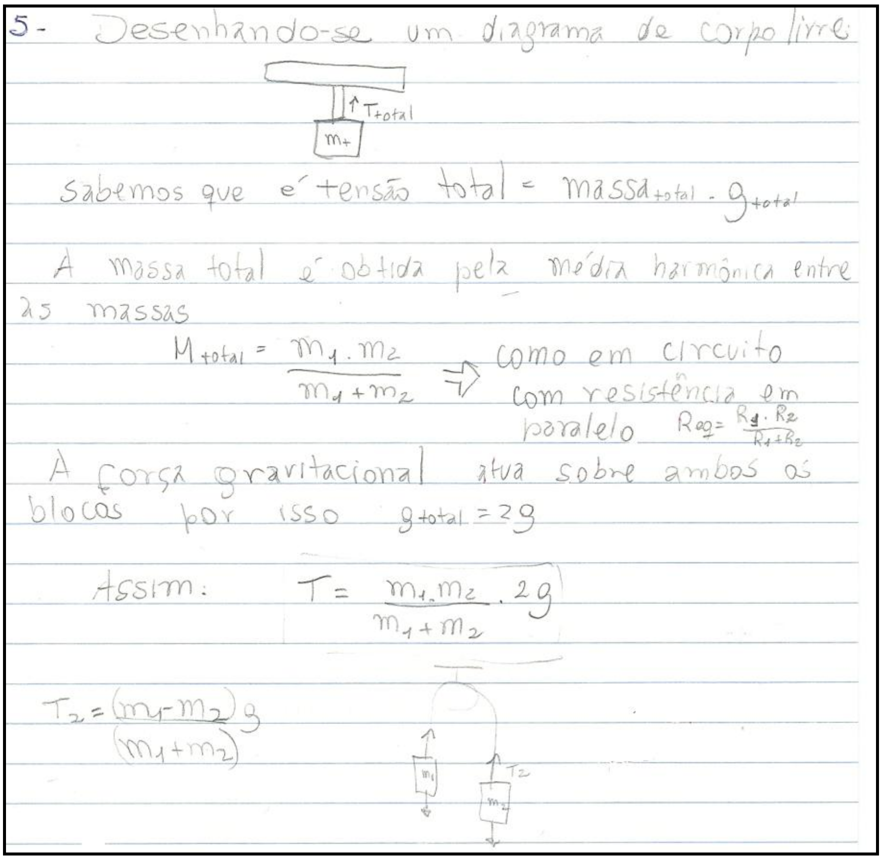
Na resolução apresentada por Tales (quadro 20) percebe-se uma falha no esquema inicial da escolha do sistema de referência. Primeiramente ele considera o eixo vertical apontando para baixo, para as duas massas. No entanto, se dá conta de que a segunda massa sobe, e corrige o esquema seu esquema inicial. Comete um engano na troca de sinal quando muda o lado da equação para um dos termos, e chega ao resultado com os sinais trocados para a aceleração do sistema. O aluno representa, em termos de uma igualdade matemática, o conhecimento físico de que as tensões nos dois lados da corda são iguais assim como são iguais às acelerações dos dois corpos. Ele não dá continuidade à resolução da questão por não ver mais sentido nisto, já que basta substituir o valor obtido para a aceleração na tensão, além do que, sem perceber o erro de sinal cometido verifica superficialmente que sua resposta não será a mesma daquela apresentada na questão.

Quadro 20: Esquema de resolução de Tales.



No quadro 21 o aluno Cristiano relaciona a constante que multiplica a gravidade g na expressão matemática para a tensão com a média harmônica, que ele traz como conhecimento prévio também presente na expressão para um circuito com resistências R_1 *e* R_2, em paralelo. Está errado em considerar a massa total do sistema como a média harmônica das massas dos dois blocos, quando a massa total é o quociente entre a força externa e a aceleração do sistema. Através da representação simbólica de um diagrama de corpo livre acrescenta este conhecimento ao fato de que duas tensões vão requerer duas vezes a gravidade. Isto é, para dar conta da situação proposta o aluno cria dois teoremas em ação, não científicos, um com respeito à massa total do sistema, outro com respeito à tensão total do sistema, e outro com respeito à gravidade total sobre o sistema.

Quadro 21: A “média harmônica” de Cristiano.



5- Desenhando-se um diagrama de corpo livre:

Sabemos que é tensão total = $massa_{total} \cdot g_{total}$

A massa total é obtida pela média harmônica entre as massas

$$M_{total} = \frac{m_1 . m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$ como em circuito com resistência em paralelo $R_{eq} = \frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2}$

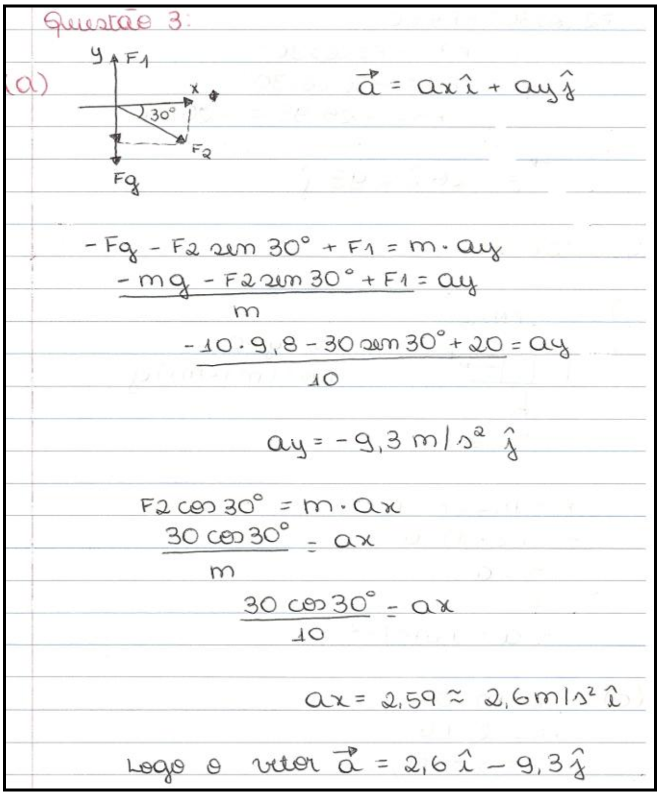
A força gravitacional atua sobre ambos os blocos por isso $g_{total} = 2g$

Assim: $$T = \frac{m_1 . m_2}{m_1 + m_2} . 2g$$

$$T_2 = \frac{(m_1 - m_2) g}{(m_1 + m_2)}$$

Outro aspecto interessante a ser considerado é o esquema apresentado pela aluna Luiza para a resolução da questão 3 (quadro 22). O problema apresenta um corpo (supostamente visto de cima), e afirma que existem duas forças atuando sobre ele. Na sua representação gráfica a aluna considera que a primeira força fornecida aponta para cima (na perspectiva do problema esta força estaria “saindo” do plano do papel). Assim a segunda força fornecida estaria apontando na direção sudeste. Então, a partir do seu esquema ela deve considerar também a força gravitacional apontando para baixo. A aluna manteria a coerência a partir de sua representação se tivesse apresentado também a força normal da superfície sob o bloco, apontando para cima, já que ela está visualizando o bloco “de lado”, e “não de cima”. Então, ela obteria uma resposta coerente com a sua forma de representação gráfica. Considero, como avaliadora, que esta questão trouxe problema no sentido de que não ficou clara apresentação do desenho da situação, o que deixou margem para outro entendimento.

Quadro 22: A “perspectiva espacial” de Luiza.



$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$

$-F_g - F_2 \text{ sen } 30° + F_1 = m \cdot a_y$

$\dfrac{-mg - F_2 \text{ sen } 30° + F_1}{m} = a_y$

$\dfrac{-10 \cdot 9{,}8 - 30 \text{ sen } 30° + 20}{10} = a_y$

$a_y = -9{,}3 \text{ m/s}^2 \, \hat{j}$

$F_2 \cos 30° = m \cdot a_x$

$\dfrac{30 \cos 30°}{m} = a_x$

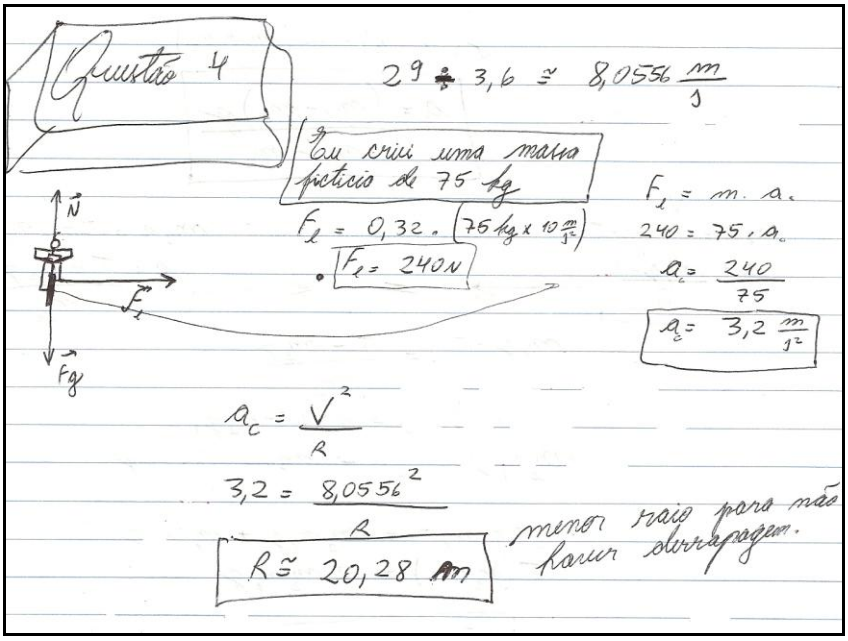
$\dfrac{30 \cos 30°}{10} = a_x$

$a_x = 2{,}59 \approx 2{,}6 \text{ m/s}^2 \, \hat{i}$

Logo o vetor $\vec{a} = 2{,}6\hat{i} - 9{,}3\hat{j}$

Com relação à questão 4 vale comentar o esquema proposto pelo aluno Pietro, representado no quadro da figura 23. O cálculo do menor raio procurado independe da massa do objeto que está fazendo a curva (no caso o ciclista). O aluno particulariza um valor coerente para a massa do ciclista e calcula corretamente a força de atrito estático. Com base no resultado calcula o valor da aceleração dividindo o valor obtido para a força de atrito pela massa considerada. Ele sabe que a aceleração obtida é centrípeta, dirigida para o centro do movimento, e obtém um valor coerente para o menor raio procurado. Contudo não está explícito que o aluno tenha conhecimento de que a massa não interfere no resultado. Convém ressaltar a tendência que os estudantes de Física têm em atribuir valores numéricos a questões que são puramente abstratas ou literais. Outro ponto observado nas provas é a não utilização da desigualdade que requer que o valor da força de atrito estático deve ser menor ou igual ao valor máximo da força de atrito estático. Isto tem importante implicação para a resposta já que o raio poderá ser maior ou igual ao valor mínimo procurado. Qualquer raio maior do que o mínimo obtido permitirá que o ciclista faça a curva sem derrapar.

Quadro 23: A “particularização” no esquema de Pietro.



<u>*Aula do dia 26/09/2011:*</u> Os alunos surpreenderam-se quando disse que já havia corrigido a prova, e que a entregaria nos momentos finais da aula. Estava em dúvida se daria uma abordagem ao conteúdo conforme o professor do semestre anterior, quando observei as aulas, ou se adotaria a sequência do livro texto. Dei início ao desenvolvimento do capítulo 8 do Halliday, cujo assunto refere-se à Trabalho e Energia Cinética. Adotei exatamente os passos da bibliografia, não muito contente com a forma de apresentação. Nas aulas escreve-se muito texto na lousa, ao contrário das aulas de Cálculo, onde são apresentadas definições e exemplos. Então senti que o conteúdo estava indo devagar.

Achei importante retomar conceitos do capítulo 7 que haviam sido trabalhados nas vésperas da prova, portanto poderiam estar muito distantes para os alunos. Retomei o conceito de *Energia Cinética*, falando da sua unidade no sistema internacional. Logo após, recapitulei *trabalho* no seu sentido físico, como a *energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o objeto.* Fiz a interpretação física do significado de um valor positivo ou negativo para o trabalho. Então falei das suas unidades no sistema internacional, chamando a atenção para o fato de ser a mesma unidade da energia cinética, definida anteriormente. Relembrei a relação entre o trabalho e a energia cinética, principalmente redefinindo expressão matemática para o cálculo do trabalho em termos do produto escalar dos vetores força e deslocamento $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

Salientei como poderia ser usada a notação matemática de vetores para este fim. Disse-lhes que são duas situações, a primeira é quando conhecemos a intensidade dos vetores força e deslocamento, e o ângulo entre eles. Então o produto escalar se resume na definição: $W = Fd\cos\phi$. A segunda situação é aquela onde são conhecidas as componentes dos vetores força e deslocamento em termos dos vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. Então, relembrei a equação do teorema trabalho e energia cinética $W_R = \Delta K$.

No final, mostrei-lhes as provas pedindo-lhes que me devolvessem ao final da aula, alegando que costumo revisá-las ao final do semestre. Alguns alunos reclamaram da correção. Dois deles estavam realmente errados na resolução, mas outro aluno tentou me convencer que sabia, mas não escreveu totalmente o que era pedido na prova. Prometi rever a correção.

Na saída da aula, um dos alunos, que já havia feito à disciplina no semestre anterior, na turma que eu estava observando, veio falar comigo. Parabenizei-o por ter tirado nota dez. Disse ter sido importante que ele tenha visto o conteúdo no semestre passado. O aluno disse-me que eu é que estava de parabéns, já que no semestre anterior ele não havia entendido nada da matéria. O professor da disciplina, segundo ele, é uma sumidade em termos de conhecimento de Física, mas não tem paciência para lidar com os alunos ingressantes da Faculdade. O aluno comparou o professor ao livro do Halliday: *ele supõe que nós já sabemos tudo!* O que eu entendi da fala do aluno é que professores com muita titulação não dedicam todo o seu tempo para o esclarecimento das dúvidas, ou então o nível cobrado na UFRGS tem que ser bastante elevado. *O aluno afirmou que é um desperdício que um professor como aquele não seja aproveitado nas disciplinas mais avançadas do curso! Complementou dizendo que os colegas não tinham nada a reclamar com relação às minhas aulas, já que fiquei vários dias resolvendo exercícios em aula, e toda a matéria tinha sido dada, inclusive com a chance de discussões em sala de aula.*

<u>*Aula do dia 28/09/2011:*</u> Resolvi propor uma situação-problema do elevador com um bloco de queijo sobre o piso, sendo puxado para cima, através de um cabo. As massas do elevador e do bloco são fornecidas, assim como dois descolamentos sofridos pelo elevador, d_1 e d_2. O problema pede para calcular o trabalho realizado pela tensão do cabo para o

deslocamento d_1, supondo quando a força normal exercida pelo elevador sobre o queijo é fornecida.

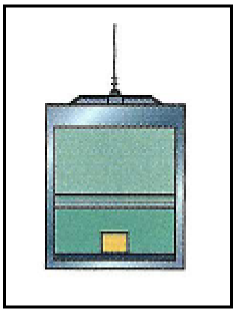


Figura 48: Um elevador sendo deslocado por um cabo (Halliday, 2008, p. 175).

Procurei mostrar através de dois diagramas de corpo livre, um para o queijo e outro para o elevador, que a tensão do cabo depende diretamente da força normal que o piso do elevador exerce sobre o queijo, sendo que vai influenciar o trabalho do cabo sobre o elevador. Também queria esclarecer a ideia de que forças normais são sempre perpendiculares ao sentido do movimento. Este era um contra exemplo. Considerando T a tensão que o cabo exerce sobre o elevador, m a massa do queijo, M a massa do elevador, N o módulo da normal que o piso do elevador exerce sobre o queijo ou o módulo da normal que o queijo exerce sobre o piso do elevador, o sistema obtido é:

$$\begin{cases} N - mg = ma \\ T - N - Mg = Ma \end{cases}$$

Isolando a aceleração a do sistema na primeira equação e substituindo na segunda equação obtemos para a tensão do cabo a expressão:

$$T = \left(\frac{m+M}{m}\right)N$$

Assim, o trabalho realizado pela tensão do cabo para deslocar o elevador é dada por:

$$W_T = \vec{T} \cdot \vec{d}_1 \quad \Leftrightarrow \quad W_T = Td_1 \cos 0° \quad \Leftrightarrow \quad W_T = \left(\frac{m+M}{m}\right)Nd_1$$

Vimos através da resolução de um sistema de equações, que a força normal exerce um papel importante no cálculo do trabalho, sendo esta uma resposta fisicamente aceitável. Quanto maior for a normal que o piso do elevador exerce sobre o queijo, maior será a tensão do cabo sobre o elevador. Consequentemente, maior o trabalho necessário para deslocá-lo.

Partimos para a segunda situação-problema da aula: um corpo com a massa fornecida, inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal, sem atrito. O corpo é então puxado por uma corda com uma determinada força, que faz um dado ângulo com o sentido positivo do eixo *x,* onde sua intensidade era fornecida. O problema pede para calcular o trabalho realizado pela força da corda e a rapidez final do corpo depois de um dado deslocamento. O problema foi resolvido sem nenhum questionamento.

A terceira situação-problema proposta é sobre um bloco deslizando sobre uma rampa com atrito (figura 49). Dados numéricos não são fornecidos, e devemos calcular o *trabalho* realizado por cada uma das forças atuantes sobre o corpo ao longo do deslocamento. Também devemos calcular o trabalho líquido sobre o sistema e mostrar que ele é nulo quando o corpo desce com velocidade constante (o problema deve ser resolvido sem a utilização do *teorema trabalho e energia cinética*).

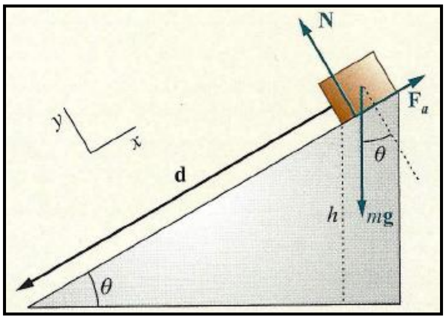


Figura 49: Um bloco deslizando sobre uma rampa com atrito (Chaves e Sampaio, 2007, p. 137).

Os alunos indicaram corretamente as forças que atuam sobre o bloco e realizam trabalho para deslocá-lo *d* unidades de comprimento, rampa abaixo: *a força de atrito e a componente horizontal da força gravitacional.* Um importante resultado pode ser utilizado: apenas a componente da força na direção do deslocamento realiza trabalho.

$$W_R = W_{F_g,x} + W_{F_a} \;\Leftrightarrow\; W_R = mgdsen\theta - \mu_C Nd \;\Leftrightarrow\; W_R = (mgsen\theta - \mu_C mg\cos\theta)d$$

Se o corpo desce com velocidade constante então a aceleração do sistema é nula sendo que, na direção do eixo *x:*

$$F_a - mgsen\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_C mg\cos\theta = mgsen\theta \quad \Rightarrow \quad W_R = 0$$

No final da aula um aluno pediu-me para resolver uma questão sobre medições presente no capítulo 1 do livro. O problema envolvia a medição do raio da Terra, a partir de seu movimento de rotação. Discutimos a resolução do problema via e-mail.

Lembrei aos alunos que eles deveriam definir seus grupos para realizar as atividades colaborativas combinadas no início do semestre.

Aula do dia 30/09/2011: Conversei particularmente com a aluna que havia questionado o fato da força normal ser sempre perpendicular ao sentido do movimento, dizendo que havíamos resolvido um exercício em aula (o movimento do elevador) envolvendo força normal paralela ao sentido do movimento. Ela pediu o número do exercício e a página do livro, dizendo que copiaria dos colegas a resolução.

Nesta aula falei sobre o trabalho exercido sobre um corpo pela força gravitacional, usando o exemplo do tomate sendo lançado para cima, com uma velocidade inicial. Durante a subida, o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o tomate é negativo, sendo que a força gravitacional remove uma energia mgh da energia cinética do corpo. Durante a descida, o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o tomate é positivo, sendo que a força gravitacional fornece uma energia mgh para a energia cinética do corpo. Isto é, ao longo do movimento de subida e descida do tomate o trabalho total realizado pela força gravitacional sobre o tomate é nula. Isto acontece quando a força que realiza trabalho é uma *força conservativa*, sendo que este conceito seria diferenciado ao longo do capítulo 8. Neste sentido podemos afirmar que o trabalho da força aplicada para levantar ou baixar o objeto é o negativo do trabalho realizado pela força gravitacional no movimento de subida ou no movimento de descida.

Discutimos um exemplo onde era dada a massa de um objeto levantado a velocidade constante, até uma altura fornecida no problema. Pedia-se para calcular o trabalho exercido pela força aplicada sobre o objeto pela Terra, e o trabalho líquido efetuado por todas as forças atuantes no sistema.

Logo após, discutimos a situação-problema relativa à figura 50. Sobre um baú estavam sendo exercidas três forças, provocando seu deslocamento para a esquerda. São fornecidos: o módulo do vetor deslocamento, os módulos das forças e o valor do ângulo de inclinação entre o sentido horizontal e a segunda força. O problema pede o *trabalho resultante sobre o baú*. O objetivo principal foi mostrar aos alunos que podiam calcular o trabalho exercido sobre o baú por cada força, separadamente, e depois somar os valores obtidos para obterem o trabalho resultante. Outra forma de resolver seria calcular a força resultante no sistema e, então, calcular o trabalho realizado por esta força sobre o baú. Os resultados deveriam ser iguais.

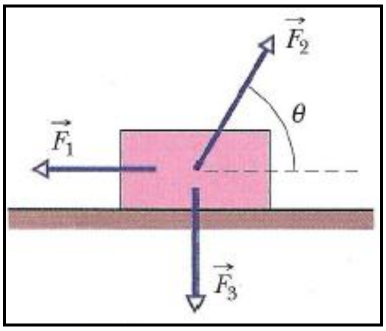


Figura 10: Três forças atuando sobre um baú (Halliday, 2008, p. 174).

O próximo problema é de um corpo, com massa fornecida, inicialmente em repouso, sobre uma mesa horizontal, com atrito. O coeficiente de atrito é fornecido. O corpo é impulsionado sobre a mesa e percorre uma distância fornecida, através de uma força aplicada horizontal, cuja intensidade também é fornecida. Os alunos têm que calcular *o trabalho realizado pela força aplicada, a variação da energia cinética do corpo*, durante o deslocamento, e *a velocidade do corpo depois de se deslocar por uma distância fornecida*.

Um aluno perguntou: *no produto escalar não podemos considerar o maior ângulo entre os dois vetores?* Expliquei que a situação é diferente quando definimos produto escalar, sendo que o ângulo deve variar entre 0° e 180°.

Ele estava confundindo o conceito trabalhado no início do semestre, quando tinham que obter as componentes de um vetor força, onde o ângulo dado por cada componente era o ângulo entre o vetor e o sentido positivo do eixo *x*. Neste caso, o ângulo poderia ser maior do que 180°. Esta parecia ser uma dúvida comum entre os alunos das aulas que foram observadas no semestre anterior.

O próximo assunto é o *cálculo do trabalho realizado sobre um corpo por forças não constantes*, particularmente o *trabalho da força elástica exercida por uma mola*. Para isto foi necessário definir *força elástica*, e rever suas características principais, apresentando a *Lei de Hooke.*

Conforme Halliday (2008, p. 162), como uma boa aproximação para muitas molas a força $\vec{F}_s$ de uma mola é proporcional ao deslocamento $\vec{d}$ da extremidade livre a partir da posição que ocupa quando a mola está no estado relaxado. A *força elástica* é dada por:

$\vec{F}_s = -k\vec{d}$ (Lei de Hooke)

A constante k é chamada de *constante da mola* (medida da rigidez da mola). O essencial a ser explicado para os estudantes é que se trata de uma força que atua sempre no sentido contrário ao sentido do movimento (o sinal negativo justifica esta afirmação). Os vetores *força elástica* e *deslocamento* apontam para sentidos contrários, e possuem a mesma direção. Seu módulo difere pelo módulo da constante elástica[122]. Apresentei a ilustração proposta no livro para o entendimento das diferentes situações apresentadas pela mola: *o estado relaxado, o estado comprimido e o estado distendido*, e do respectivo comportamento dos vetores *deslocamento e força elástica*, em cada caso.

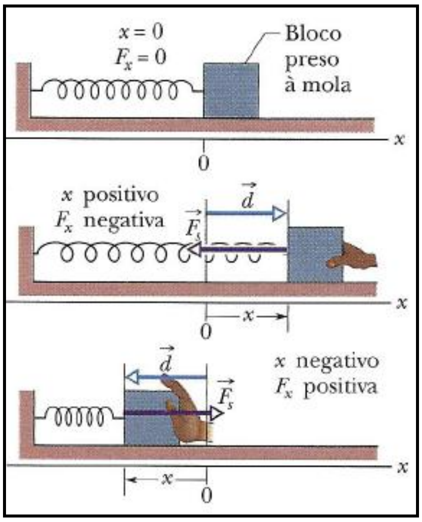


Figura 51: Uma mola no seu estado relaxado, distendido e comprimido (Halliday, 2008, p. 162).

Outro ponto muito importante abordado através *do módulo matemático sobre noções de integração de funções escalares e vetoriais* foi uma construção geométrica do conceito de *trabalho realizado por uma força variável genérica*, utilizando o conceito de *integral definida*. Dado o gráfico de uma função variável genérico, iniciamos o processo de construção do conceito particionando o intervalo de interesse para o cálculo do trabalho, de $x = a$ até

[122] Conceitos essenciais do módulo de vetores e trigonometria vão sendo diferenciados naturalmente ao longo do desenvolvimento do conteúdo. Pode-se mostrar, desta forma, seu significado físico.

$x = b$, em n subintervalos menores, de comprimentos Δx_i, para $x = 1, \cdots, n$. A partir desta partição construímos a Soma de Riemann correspondente:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i$$

$F(x_i^*)$ corresponde ao valor da força aplicada na posição x_i^* pertencente ao i-ésimo força aplicada cujos valores são sempre positivos no intervalo considerado, o valor obtido para esta Soma de Riemann corresponde à área de uma região poligonal constituída por *n* retângulos de altura $F(x_i^*)$ e base Δx_i, para $i = 1, \cdots, n$.

Em termos geométricos, a área real *S* da região limitada acima pela curva representativa da função escalar $F(x)$, abaixo pelo eixo *x*, e lateralmente pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, será obtida quando o número *n* de subintervalos da partição aumentar infinitamente. A notação matemática representativa da situação descrita é dada pela integral definida da função $F(x)$ em relação à variável *x*, no intervalo de integração de $x = a$ até $x = b$. O limite da Soma de Riemann se transforma numa *integral definida*.

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i \quad \Leftrightarrow \quad S = \int_a^b F(x)dx$$

Fisicamente esta *integral definida* representa *o trabalho realizado por uma força variável* $F(x)$ *para deslocar um objeto da posição* $x = a$ *até a posição* $x = b$.

Através da apresentação de algumas propriedades básicas das integrais indefinidas calculei o trabalho realizado pela força da mola num determinado intervalo, de uma posição *x* inicial até uma posição *x* final.

A situação-problema proposta aos alunos se refere à figura 52. Um bloco preso por uma mola, inicialmente em repouso (no estado relaxado da mola) é, posteriormente, puxado por uma força constante alongando a mola até o bloco parar. A constante elástica da mola é fornecida e o módulo da força aplicada também. O problema pede a posição atingida após o alongamento, o trabalho realizado pela força aplicada sobre o bloco, o trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica, a posição do bloco onde a energia cinética é máxima e o valor desta energia. É uma situação bastante propícia para a aplicação de *conceitos matemáticos do Cálculo,* especificamente o *cálculo do valor máximo* pelo teste da primeira e da segunda derivadas. O *teorema do trabalho energia cinética* pode ser utilizado. De acordo com a classificação do Halliday este é um exercício considerado difícil.

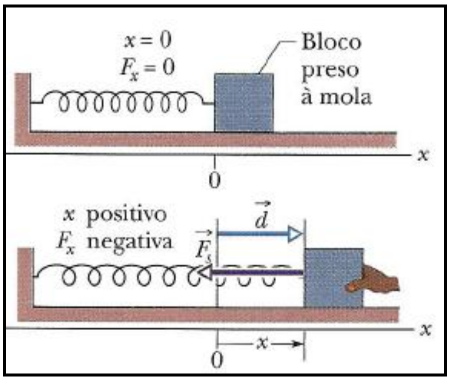


Figura 52: Um bloco preso a uma mola (Halliday, 2008, p. 162).

Para obtenção da posição de parada do bloco podemos utilizar o *teorema do trabalho e energia cinética* que nos afirma que a trabalho resultante sobre o bloco para deslocá-lo d unidades de comprimento para a direita é igual à variação da energia cinética do início ao fim do percurso. As forças que realizam trabalho sobre o bloco são a *força aplicada* e a *força elástica.* Como o bloco parte do repouso e para no final do deslocamento então suas velocidades na posição inicial e na posição final são nulas. Então temos que:

$$W_R = \Delta K \quad \Leftrightarrow \quad W_R = W_{ap} + W_s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - \frac{1}{2}kx^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(3 - \frac{1}{2}kx\right) = 0$$

Assim a posição *x* onde o bloco para novamente é dada por:

$$3 - 50x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0{,}12m$$

A partir desta informação podemos calcular o trabalho realizado pela força elástica e pela força aplicada durante o trajeto, lembrando que o trabalho realizado pela força elástica é dado por:

$$W_S = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

A dúvida maior dos estudantes se deu quando tinham que calcular a posição do percurso onde a energia cinética era máxima. Sugeri a construção de um diagrama de corpo livre onde obtemos a expressão:

$$F_{ap} - F_S = ma \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{m}(F_{ap} - F_S) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{m}(3 - 50x)$$

Assim obtemos uma expressão para a aceleração que depende da posição. A energia cinética será máxima na posição onde a velocidade será máxima. Então, podemos obter a função velocidade dependente da posição, integrando a função aceleração e, então, encontrar seus valores máximos.

$$v = \int_0^x a(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{m}\int_0^x (3 - 50x)dx \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{m}\left(3x - 25x^2\right)$$

Os valores críticos desta expressão são obtidos quando $v'(x) = 0$, isto é, $3 - 50x = 0$, ou ainda, $x = 0{,}06m$. Pelo teste da segunda derivada mostramos que este é um valor máximo da função velocidade, pois $v''(0{,}06) < 0$. O passo final é obter o valor da energia cinética máxima, a partir do valor obtido para a velocidade.

Outra possibilidade é obter a função velocidade novamente a partir do teorema do trabalho e energia cinética:

$$3x - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Onde o valor de *x* passa a ser a posição onde a velocidade é máxima. Isolando a variável velocidade nesta expressão, obtemos:

$$v = \sqrt{\frac{1}{m}(6x - 50x^2)}$$

Para verificar o valor de *x* para o qual a velocidade é máxima novamente devemos utilizar os artifícios do Cálculo, como fizemos anteriormente. No entanto, desta forma fica mais difícil derivar a função velocidade, que requer a regra da cadeia para derivadas de funções compostas. Expliquei aos alunos que se continuassem com os cálculos obteriam o mesmo resultado obtido anteriormente.

Então surgiu a dúvida de um aluno: *se na posição x final obtida eu fizer o diagrama de forças terei* $F_{ap} - F_s = 0$*, ou ainda,* $3 - 50x = 0$*, então o valor para x final não funciona.*

Não consegui responder ao aluno o motivo pelo qual isto não funcionava. Disse que pensaria melhor no problema e voltaríamos a discuti-lo na próxima aula[123].

Outro aluno sugeriu: *professora, se no lugar de x calcularmos a média aritmética entre o x inicial e o x final então chegaremos à resposta da posição onde a velocidade é máxima.* Respondi ao aluno que é verdade. O problema apresenta uma simetria que favorece esta conclusão. O gráfico da função velocidade contra a posição é uma parábola côncava para baixo que intercepta o eixo x nos pontos $x = 0$ e $x = 0{,}12m$. Outro raciocínio que eles podiam ter utilizado, sem o recurso do Cálculo, é obter o valor da abscissa do vértice para a parábola representativa da função velocidade.

Ao final da aula, um terceiro aluno perguntou: *existe algum site com simulações destas situações que estamos estudando em aula?* Disse que consultaria e traria em outra aula alguns endereços.

Aula do dia 03/10/2011: Achei que era importante retomar o exercício da mola, feito na aula anterior, ressaltando os resultados do Cálculo. O aluno que tirou nota dez na primeira prova, havia enviado vários e-mails dando sugestões sobre a resolução do problema. Então direcionei a discussão para o aluno que tinha sugerido a dúvida na aula anterior, *por que seu raciocínio não estava correto quando aplicava a condição de equilíbrio das duas forças no ponto de parada do bloco?* Expliquei ao aluno que a aceleração do sistema não é nula na posição final, apenas sua velocidade é nula. É como no caso de um lançamento vertical; no topo da trajetória a aceleração da gravidade continua atuando apesar da velocidade do objeto lançado se anular.

Perguntei ao aluno se ele havia entendido a questão. Ele respondeu: *mais ou menos.* Disse que acharia outra forma de explicar-lhe, já que com os argumentos do Cálculo não pude convencê-lo. Houve uma discussão na aula. Outro aluno disse: *quero entender a interpretação física do problema.* Então, o aluno que tirou nota dez respondeu: *não existe possibilidade de entender a interpretação física do problema sem o conhecimento das ferramentas do Cálculo.* No final da aula, este mesmo aluno afirmou: *a história dos alunos não aceitarem a formulação do Cálculo nas respostas dos exercícios tem que acabar.* Fiquei

[123] A aplicação matemática do cálculo era necessária, mas não havia sido suficiente para que os estudantes interpretassem o problema fisicamente.

pensativa a partir desta fala, já que minha intenção, na pesquisa de doutorado, é justamente articular o Cálculo com a Física.

Continuando o conteúdo, defini *potência instantânea*, explicando que se trata da *taxa de variação instantânea do trabalho efetuado pela força.* Procurei retomar a relação entre os conceitos matemáticos de taxa de variação média e taxa de variação instantânea, que novamente estavam sendo utilizados no contexto da Física. *A taxa de variação instantânea do trabalho efetuado pela força é igual ao limite quando o intervalo de tempo tende à zero da taxa de variação média do trabalho efetuado pela força.* Matematicamente denotamos por:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} P_{méd} \quad \Leftrightarrow \quad P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W(t+\Delta t) - W(t)}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{dW}{dt}$$

A implicação mais direta mostrada para os estudantes é a interpretação geométrica do conceito. Conhecendo o gráfico da função *trabalho realizado pela força contra o tempo*, a potência devida à força em determinado instante de tempo é o valor do coeficiente angular da reta tangente à curva potência neste instante.

Outra implicação mostrada aos estudantes é que conhecido o gráfico da função potência contra o tempo, se quisermos obter o valor do trabalho num determinado intervalo de tempo, a partir do gráfico, basta que calculemos a área com sinal da região limitada pelo gráfico da função potência no intervalo fornecido. As relações entre os processos da diferenciação e da antidiferenciação são diferenciados neste contexto.

$$P(t) = \frac{d}{dt}[W(t)] \quad \Leftrightarrow \quad W(t) = \int P(t)dt$$

Uma expressão para a potência bastante utilizada no contexto da Física envolve o produto escalar da força aplicada para gerar trabalho pela velocidade do objeto, para o caso da força constante. Podemos observar que a velocidade $\vec{v}$ do objeto têm a mesma direção e sentido do vetor deslocamento, e ϕ é o ângulo entre o vetor força e o vetor deslocamento ou o ângulo entre o vetor força e o vetor velocidade. Assim podemos retomar o conceito de *produto escalar* entre dois vetores.

$$P = \frac{d}{dt}[W] = \frac{d}{dt}[F\Delta x \cos\phi] = F\cos\phi \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad P = Fv\cos\phi \quad \Leftrightarrow \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Discutimos o exemplo feito no livro. A situação consiste de duas forças agindo sobre uma caixa enquanto ela desliza para a direita sobre um piso sem atrito. Uma das forças é antiparalela ao sentido do movimento e a outra forma um ângulo de 60° com o sentido positivo do eixo do deslocamento. A intensidade das duas forças e a rapidez do deslocamento num determinado instante é fornecida. O problema pede para calcular a potência desenvolvida por cada força, naquele instante, bem como a potência total. No resultado, a potência total é nula, o que quer dizer que a taxa total de transferência de energia é zero. Logo, a energia cinética da caixa não está variando. Ou seja, a potência desenvolvida por ambas as forças é constante. Através da equação da potência como derivada do trabalho realizado pela força, em relação ao tempo, utilizamos novamente um importante resultado do Cálculo: *se e a derivada da função é nula, então a função tem que ser constante*. Neste raciocínio, confirmava-se que o trabalho total realizado pelas forças era constante. Como o trabalho total é a variação da energia cinética, pode-se concluir que a variação da energia cinética também é constante. Os alunos não demonstraram grande interesse, e com relação a este exercício, não questionam nada.

Ao encerrar a aula, um aluno que senta no fundo disse: *professora, com relação às apresentações dos trabalhos, cada grupo vai avaliar os outros grupos. Então, a senhora estará avaliando a forma como eu vou avaliar?* Expliquei que a ideia das avaliações é colocá-los a par desta realidade. Disse que as avaliações serão levadas em conta, na hora de atribuir uma nota ao grupo, mas que eu também vou avaliar os grupos. No final, será feita uma média geral de todas as avaliações.

Os membros do grupo cinco, que falarão sobre *força de arraste e velocidade terminal*, pediram para formular uma questão mais interessante, já que a que eu havia sugerido era uma questão muito direta. Deixei-lhes livres para escolherem outra questão, de qualquer livro que quisessem.

Para encerrar a aula, revisei tudo o que tinha sido discutido no capítulo 7, de forma resumida, chamando-lhes a atenção que deveriam ler a matéria, e não apenas ficarem com o que estava sendo discutido em aula.

Um aluno perguntou se eu já estava resolvendo as listas sugeridas para a segunda prova e eu disse que estava meio atrasada, mas que poderia tirar alguma dúvida se quisesse. Ele trouxe as duas primeiras questões da primeira lista. Quando fui comentar como poderia ser feito, ele afirmou que era melhor eu resolver primeiro para depois discutir com ele, na próxima aula.

Aula do dia 05/10/2011: Para finalizar a discussão sobre a questão do bloco preso a uma mola, tentei mostrar para o aluno que ainda não havia entendido o que estava acontecendo fisicamente na situação: *na posição inicial, a mola está relaxada e o bloco está em repouso. Logo após aplicamos uma força para a direita, começando a distender a mola. Então surge a força elástica, no sentido contrário, que vai aumentando ao longo do percurso, e o movimento começa a ficar acelerado. Na metade do percurso, em* $x = 0{,}06m$*, mostramos que a velocidade do bloco é máxima. No entanto, podemos observar que nesta mesma posição a aceleração do sistema, com relação à posição, é nula. Aliás, podemos observar que esta função aceleração é positiva e decrescente para* $x \in [0\,; 0{,}06)$*. Em* $x = 0{,}06m$ *ela é nula, e a no intervalo* $x \in (0{,}06\,; 0{,}12]$ *ela continua decrescendo, mas passa a assumir valores negativos. Da metade até o fim do percurso a intensidade do vetor força elástica é maior do que a intensidade do vetor força aplicada.* Após esta explicação o aluno que estava com dúvida argumenta: *agora sim eu entendi a situação física, professora*[124].

Iniciamos novo conteúdo sobre *energia potencial e a lei da conservação da energia*. Definimos energia potencial *U* como aquela que pode ser associada à configuração (arranjo) de um sistema de objetos que exercem forças uns sobre os outros (Halliday, 2008, p. 181). Comentamos o exemplo do atleta de bongee-jump, cuja queda envolve três tipos de energia: *cinética, potencial gravitacional e potencial elástica*.

Ao explicar a *energia potencial gravitacional retomei* o exemplo do tomate sendo lançado para cima, lembrando que no movimento de subida a força gravitacional retira energia da energia cinética do tomate e converte-a em energia potencial. No movimento de descida do tomate, toda a energia cinética que foi convertida em potencial gravitacional é novamente transformada em energia cinética. A questão principal é que não houve perda de energia, o que acontece sempre que a força envolvida na configuração do sistema, exercida entre dois objetos, é *conservativa*.

[124] Como minha experiência maior era com o ensino de Cálculo não havia lidado ainda com este tipo de situação. Foi necessário um processo de construção, juntamente com os alunos, para obtermos uma interpretação física razoavelmente satisfatória do problema. No entanto, conceitos básicos do Cálculo formaram o alicerce para esta identificação.

Uma força é conservativa se o trabalho realizado por ela sobre um objeto, ao longo de um percurso fechado, é nulo. Neste caso, o trabalho realizado pela força conservativa para deslocar o objeto de um ponto ao outro independe do percurso escolhido. A *força gravitacional e a força elástica* são exemplos de forças conservativas. Uma força que não é conservativa é chamada *força dissipativa* (situações onde há dissipação de energia). A *força de atrito cinético* é um exemplo.

Ao tentar utilizar o polêmico exemplo anterior da mola presa a um objeto para o entendimento da energia potencial elástica uma aluna sugeriu: *podemos considerar o exemplo de uma mola presa na parede e lançarmos um bloco em direção a ela*. Achei muito interessante a proposta e adotei como exemplo.

Uma mola está presa numa parede, no seu estado relaxado. Um bloco é lançado horizontalmente em direção à mola com uma rapidez inicial v. Quando lançamos o bloco ele adquire uma energia cinética. Quando encontra a mola, uma força elástica restauradora passa a ser exercida sobre o bloco, convertendo sua *energia cinética inicial* em *energia potencial elástica*, até que o bloco entra momentaneamente em repouso. Então o bloco é lançado pela mola, no sentido contrário ao anterior, devolvendo à energia cinética da mola, a energia tomada no caminho inverso. Os alunos gostaram do exemplo e sugeriram que era bem mais fácil de ser entendido. *Parabenizei a aluna pela sugestão, eu tinha visto este exemplo no livro do Tipler, mas achei que deveria retomar o outro, da aula passada, o que novamente causou muita polêmica.*

Então iniciei a discussão em torno de que *o trabalho realizado por forças conservativas num caminho fechado é nulo*. Mostrei que são exatamente os casos anteriores descritos: *do tomate e da mola*. Também falei que por um lado, como já havíamos estudado, *o trabalho líquido exercido sobre um objeto para deslocá-lo é igual à variação da energia cinética do sistema.* Por outro lado, *o trabalho exercido por uma força conservativa para deslocar o objeto ao longo de uma trajetória qualquer é igual ao valor negativo da variação de energia potencial*. Em linguagem matemática:

$$W_R = \Delta K \qquad \text{e} \qquad W = -\Delta U$$

Mostramos que, neste caso, a energia mecânica do sistema se conserva ao longo do movimento, pois:

$$\Delta K = -\Delta U \quad \Leftrightarrow \quad \Delta K + \Delta U = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(K+U) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E_{mec} = 0$$

Um aluno disse: *mas a sessão que a senhora está abordando no capítulo 8 ainda não definiu energia mecânica.* Então defini *energia mecânica* E_{mec} de um sistema como a soma da *energia cinética K* e da *energia potencial U* do sistema.

$$E_{mec} = K + U$$

Ao encerrar a aula, prometi aos alunos que traria, na próxima aula (onde as apresentações dos trabalhos iniciariam), as planilhas para a avaliação. O aluno que tirou nota dez veio conversar sobre o problema da mola. Pedi desculpas a ele por insistir num assunto que gerou tanta polêmica. Ele disse: *o problema não é tão simples, e para mim é muito importante poder discuti-lo.*

<u>*Aula do dia 07/10/2011:*</u> Conforme combinado, os alunos iniciaram as apresentações. Receberam uma planilha onde deviam avaliar vários itens, *se os conceitos físicos e matemáticos ficaram claros na apresentação, uma nota geral para o grupo e a nota individual de cada participante do grupo.* Ainda foi necessário que cada grupo, ao apresentar seu trabalho, preenchesse a planilha na forma de autoavaliação.

Quatro grupos apresentaram os trabalhos neste dia. Todos participaram ativamente das apresentações. Em alguns grupos houve algumas divergências, não em público. Um dos alunos comentou a dificuldade dos estudantes do noturno se reunirem para fazerem o trabalho. A ideia foi apresentar aos alunos uma situação nova, *a elaboração e a apresentação de um trabalho*, e analisar como os alunos deram conta dessa situação. Os grupos eram aplaudidos após as apresentações. Foi dado um tempo de vinte minutos para as apresentações, e dez minutos para a discussão em torno das avaliações.

<u>*Aula do dia 10/10/2011:*</u> A continuidade dos trabalhos foi um pouco decepcionante. Alunos que haviam participado das avaliações nas aulas anteriores não compareceram para apresentar seus trabalhos nesta aula. Visivelmente, havia menos alunos em aula. Os que permaneceram argumentaram que achavam uma atitude egoísta faltar à continuidade dos trabalhos, já que a avaliação de todos os trabalhos era responsabilidade de todos os grupos. Percebi seriedade em vários grupos, tanto em termos de apresentação como em termos de avaliação. Não estavam presentes apenas para dar uma nota dez a todos os grupos. Então, percebi que dentro de todas as dificuldades, havia sido proveitosa a estratégia adotada. Decidi

não intervir nas avaliações, apenas nos trabalhos escritos. Prometi apresentar as notas das avaliações até a sexta-feira.

<u>Aula do dia 14/10/2011:</u> Retomei o capítulo 8, especificamente sobre a *interpretação de curvas de energia potencial e trabalho realizado por uma força externa sobre um sistema*. Havia poucos alunos em sala de aula, talvez pelo feriado da última quarta-feira.

A análise de curvas de energia potencial tem implicação direta com resultados da análise de gráficos na disciplina de Cálculo. Supondo uma partícula pertencente a um sistema no qual atua uma força conservativa, podemos obter muitas informações a respeito do movimento da partícula a partir do gráfico da energia potencial do sistema, $U(x)$ (Halliday, 2008, p. 190).

Para o movimento unidimensional, sabemos que o trabalho realizado por uma força que age sobre uma partícula quando a partícula percorre uma distância Δx é $W = F(x)\Delta x$. Assim podemos reescrever a equação que relaciona o trabalho à variação da energia potencial:

$$W = -\Delta U \quad \Leftrightarrow \quad \Delta U(x) = -W = -F(x)\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = -\frac{\Delta U(x)}{\Delta x}$$

Fazendo o acréscimo Δx tender a zero temos que:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Conhecido o gráfico da função energia potencial contra a posição, podemos obter o valor da função aplicada ao objeto em determinada posição através do valor negativo do coeficiente angular da reta tangente à curva $U(x)$ na posição solicitada.

Se as forças que atuam no sistema são conservativas vimos que a energia mecânica do sistema se conserva. Então temos que:

$$U(x) + K(x) = E_{mec} = cte \quad \Leftrightarrow \quad K(x) = E_{mec} - U(x)$$

Assim, dado os gráficos da função constante E_{mec} contra a posição da partícula e da função $U(x)$ também contra a posição, sendo que as duas curvas são representadas no mesmo sistema de coordenadas, podemos analisar o movimento da partícula, definindo seus *pontos de retorno e seus pontos de equilíbrio.* Discutimos a mesma situação gráfica apresentada no exemplo do livro (p. 191).

Aula do dia 17/10/2011: Após definirmos o *trabalho realizado por uma força externa sobre um sistema na ausência de atrito e na presença de atrito,* chegamos à lei de conservação de energia: *a energia total E de um sistema (a soma da energia mecânica e das energias internas, incluindo a energia térmica) só pode variar se certa quantidade de energia é transferida para o sistema ou retirada do sistema (Halliday, 2008, p-. 203).*

$$W = \Delta E = \Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{\text{int}}$$

Se o sistema é isolado então o trabalho realizado pelas forças externas é nulo, o que nos dá:

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

A primeira situação-problema discutida em aula foi a do floco de gelo caindo sobre uma superfície interna de uma taça em forma circular. O problema pede para calcular: o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o bloco para deslocá-lo até o fundo da taça; a variação de energia potencial do sistema floco-Terra durante a descida do floco; etc.

A segunda situação-problema discutida é do carrinho deslizando sobre uma montanha russa. O problema pede para calcular o trabalho realizado pelo carrinho pela força gravitacional entre um ponto considerado inicial e outros pontos identificados na figura da situação.

A terceira situação-problema discutida é da haste fina que gira em torno de uma das extremidades. Na outra extremidade da haste tem uma massa. Dentre as questões solicitadas o problema pede para calcular o trabalho realizado sobre a partícula pela força gravitacional. Todos os problemas foram resolvidos aplicando-se a *lei da conservação da energia*.

Aula do dia 19/10/2011: Um dos alunos que não compareceu para apresentar o trabalho com o grupo, comentou que teve que viajar, a trabalho. Propus que ele apresentasse algum exercício do livro na sexta-feira, dia 21, e ele aceitou. Perguntei se a turma concordava com isto, todos afirmaram que sim. Ficou então combinado. No restante da aula revisei o conteúdo e fiz alguns exercícios. Não houve muitos questionamentos, os alunos apenas copiavam os exercícios e não comentavam nada.

Aula do dia 21/10/2011: A apresentação individual do aluno foi um show. Ele mostrou um experimento que fez para o conteúdo sobre lançamento de projéteis. Alguns alunos filmaram o experimento. O aluno apresentou com muita desenvoltura e tomou todo o espaço da aula. Seu critério havia sido diferente dos outros. Pôde escolher o exercício, e escolheu justamente aquele que podia ser realizado experimentalmente. Foi fortemente aplaudido e todos preencheram sua avaliação.

Após, foi a divulgação das notas finais dos trabalhos, quando um dos alunos disse: *não acho justo a nota que ganhei, pois todos os trabalhos tiveram o mesmo nível.* Então disse que as avaliações foram feitas por eles mesmos, que eu havia participado apenas da nota do trabalho escrito, onde todos ganharam nota máxima. Então houve uma espécie de discussão. Outro aluno disse que sua avaliação foi rigorosa, e que achava que esta era a proposta do trabalho. Houve uma breve discussão, e o aluno que reclamou, saiu da aula. Outra aluna comentou que achava um tanto egoísta a posição do colega, já que a proposta do trabalho era justamente envolver-se com a avaliação e sentir a dificuldade da ação, como colegas[125].

Fiquei preocupada com a reação de alguns alunos, já que a intenção do trabalho foi fazê-los participar e colaborar na melhoria de suas notas individuais nas provas.

Aula do dia 24/10/2011: Nesta aula falei aos alunos da minha preocupação com a relação à discussão da aula anterior, já que a segunda prova estava próxima, dia 31/10. Sugeri que o conteúdo do capítulo nove, que ainda não havia sido iniciado, fosse transferido para a prova 3, juntamente com os capítulos 10 e 11. Os alunos sugeriram que a prova fosse adiada, mas que se mantivesse o capítulo 9. Então, numa votação, todos concordaram que a prova fosse prorrogada para o dia 09/11.

Iniciamos o capítulo nove, falando sobre de *centro de massa*. Segui as notas de aula do professor do semestre anterior, do qual observei as aulas. Para alguns objetos clássicos da Física os alunos souberam identificar o centro de massa, como a ferradura de um cavalo e um taco de beisebol, por exemplo. Todos concordaram que o centro de massa não está necessariamente no corpo. Apresentei a fórmula para o cálculo do *centro de massa* $\vec{r}_{CM}$ de um sistema constituído de *N* partículas de massas m_i para $i = 1, \cdots, N$, onde *M* é a soma de todas as massas, e $\vec{r}_i$ é a posição da i-ésima partícula.

---

[125] Percebi como é difícil para os estudantes dos Cursos de Licenciatura Noturna lidar com trabalhos colaborativos. Dentre os problemas encontram-se: a dificuldade de poderem se reunir para discutir o trabalho; a dificuldade em aceitar as críticas dos colegas; as dificuldades sobre quais critérios utilizarem para a avaliação; a imparcialidade diante do ato da avaliação.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

A partir da equação vetorial, identificamos as coordenadas x_{CM}, y_{CM} e z_{CM} do *vetor centro de massa*.

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

Os vetores velocidade do centro de massa $\vec{v}_{CM}$ e aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ são obtidos derivando a equação da posição do centro de massa $\vec{r}_{CM}$ e $\vec{v}_{CM}$, respectivamente, com respeito ao tempo.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad \vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

Para um sistema constituído de *N* partículas, observamos que:

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots + m_N\vec{a}_N \qquad M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$$

O lado direito da equação é composto por todas as forças que atuam externamente ao sistema e internamente ao sistema. No entanto, forças internas se cancelam mutuamente pela 3ª lei de Newton. Assim, podemos concluir que a força resultante externa que atua sobre o sistema de partícula é igual a massa total do sistema vezes a aceleração do centro de massa do sistema.

$$\vec{F}_{res} = Ma_{CM}$$

Resolvemos um exercício onde eram fornecidas as velocidades, massas e forças aplicadas sobre três partículas. Calculamos o centro de massa do sistema. O objetivo era mostrar que o movimento do sistema como um todo pode ser representado pelo movimento do centro de massa do sistema.

Ao sair do prédio encontrei o professor coordenador da disciplina de Física I para as turmas das Engenharias. Perguntei-lhe no que diferiam as turmas das Engenharias e as turmas da Física. Ele explicou que inicialmente, em termos de conteúdos, já que as turmas das engenharias tinham incluídos no seu programa, o movimento harmônico simples e o conteúdo sobre gravitação. São seis horas semanais sendo que duas são aulas de laboratório. Comentou que é bastante corrido, já que é muita matéria. Então, perguntei-lhe como ele acha que o conteúdo da disciplina de Cálculo estaria contribuindo para o aprendizado dos conceitos físicos. Ele respondeu que muitos alunos das engenharias já tinham tido os fundamentos do Cálculo ainda no Ensino Médio. Disse que os alunos sabem muito bem, mecanicamente, aplicar as ferramentas do Cálculo. No entanto, *não sabem o significado dos conceitos matemáticos que estão usando*. Por exemplo, todos sabem muito bem que o limite trigonométrico fundamental seno de teta dividido por teta, quando o ângulo teta tende à zero, vale um. No entanto, no conteúdo sobre *movimento harmônico simples*, quando eles têm que expandir em séries o seno de teta para ângulos pequenos, os alunos não sabem interpretar que o comprimento do arco é quase igual ao valor do seno, em módulo. Concluiu dizendo que o aprendizado dos conceitos do Cálculo é muito mecânico. Inclusive as provas aplicadas naquele contexto são muito padronizadas. Alega que apesar do sistema de ensino da Física ser unificado em outras épocas, procurava-se não padronizar as provas de um semestre para o outro. Acha que por isso os alunos reprovam mais em Física do que em Cálculo. O professor acha inviável que se apliquem técnicas visando à aprendizagem significativa nas turmas das engenharias, pois é muito conteúdo para ser vencido, e até onde ele conhece, a aprendizagem significativa é um processo de ida e volta, onde os conteúdos têm que ser retomados constantemente. Acha que isto é impraticável diante da forma como o sistema de ensino está estruturado. Pergunto como ele costuma dar as aulas de Física, e ele responde que começa tentando mostrar o experimento e, então, através de problemas propostos, explica a parte conceitual juntamente com os procedimentos matemáticos necessários. Coloca-se à disposição para maiores esclarecimentos.

<u>Aula do dia 26/10/2011:</u> Retomamos a *Dinâmica do centro de massa,* mostrando que o momentum linear do sistema como um todo era representado pelo momentum linear do centro de massa. Estava dando a aula praticamente baseada nas muitas equações matemáticas que descrevem o movimento. Retomei os conceitos de derivada, inclusive para funções vetoriais. Os alunos copiavam e não questionavam. A impressão é que eles não estavam entendendo as equações. Onze alunos estavam presentes. Havia faltado luz no Campus o dia inteiro, e alguns haviam ido embora por conta de acharem que a luz não voltaria.

Chamei a atenção dos alunos para o *conceito de integral múltipla*, no cálculo *do centro de massa de sistemas contínuos (corpos maciços).* Disse se tratar de integrais de volume, para corpos rígidos. Integrais múltiplas serão vistas na disciplina de Cálculo II. Um dos alunos que está fazendo o Cálculo II disse: *só agora que eu estou entendendo todo o conteúdo do Cálculo que deve ser aplicado aqui. Reprovei várias vezes, mas agora acho que me dei conta disso.*

Em corpos maciços as partículas se tornam elementos infinitesimais de massa dm, sendo que a soma sobre todas elas se tornam integrais. M representa a massa do corpo maciço considerado.

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int ydm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int zdm$$

A forma que o livro texto contorna o problema da resolução destas integrais iteradas (muito complexas se aplicadas em objetos do dia-a-dia) é supondo que os objetos são *uniformes*. Trata-se de objetos que possuem *massa específica (* ρ *) uniforme* (a mesma para todos os elementos do objeto e para o objeto como um todo). Considerando dV o elemento infinitesimal de volume de um elemento infinitesimal de massa dm do objeto, e considerando V o volume total do objeto vale a seguinte relação:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}$$

Nestas condições as coordenadas do centro de massa do objeto passam a ser dadas por:

$$x_{CM} = \frac{1}{V}\int xdV \qquad y_{CM} = \frac{1}{V}\int ydV \qquad z_{CM} = \frac{1}{V}\int zdV$$

O cálculo dessas integrais torna-se desnecessários para os objetivos da Física se o objeto em questão possui um ponto, uma reta ou um plano de simetria. Neste caso, o centro de massa estará situado no ponto, linha ou plano de simetria. Assim, uma bola de futebol teria seu centro de massa no centro, um cone teria seu centro de massa sobre a reta perpendicular que passa pelo centro da base do cone, e assim por diante[126].

[126] Percebe-se novamente um artifício adotado no contexto da Física para contornar os conceitos do Cálculo. Certamente, com raras exceções, os estudantes não teriam conceitos subsunçores formados para dar conta destas integrais duplas ou triplas. Uma representação matemática deste nível acarretaria uma reprodução mecânica da técnica de resolução. Isto tem forte implicação para a forma como a disciplina de Cálculo tem direcionado o ensino dos seus conceitos. No contexto da Física eles têm diferentes significados.

A primeira situação-problema propõe discutir a posição do centro de massa de uma placa plana uniforme cujas medidas são fornecidas através de um valor atribuído para um comprimento *L*, conforme figura 53.

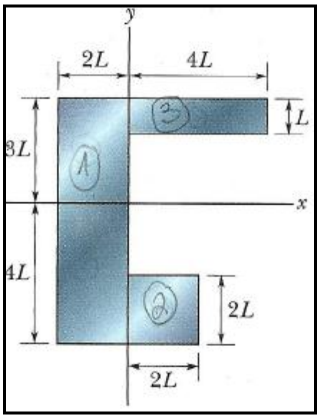


Figura 53: Uma placa uniforme (Halliday, 2008, p. 247).

A ideia é resolver o problema sem a utilização das integrais duplas iteradas, que no contexto da disciplina de Cálculo seriam necessárias para a obtenção da solução. No contexto da Física, como se trata de uma placa uniforme, podemos dividi-la em placas menores, e considerá-las como partículas, cujo centro de massa coincide com o centro geométrico das figuras. Para cada placa menor são atribuídas massas M_1, M_2 e M_3, respectivamente. Aplica-se o caso discreto para o cálculo do centro de massa, considerando três partículas. A dificuldade enfrentada pelos estudantes foi obter uma relação entre as massas para solucionar o problema. No caso proposto a massa específica de cada placa é dada pela razão entre sua massa e sua área e, para as três placas menores, esta razão é a mesma. Fazendo esta consideração é possível obter uma expressão que depende apenas do comprimento *L*, tanto para x_{CM} como para y_{CM}. Pelos recursos do Cálculo os estudantes teriam que obter o mesmo resultado por meio das integrais duplas[127].

$$x_{CM} = \frac{1}{A}\iint x dA \qquad y_{CM} = \frac{1}{A}\iint y dA$$

[127] De fato os estudantes obtêm a solução correta sem os artifícios do Cálculo. No entanto, com esta estratégia, perdem a oportunidade de vislumbrar o significado dos conceitos do Cálculo no contexto da Física. Isto é, seus conceitos subsunçores, que são formados de forma compartimentada desde o nível do Ensino Médio, continuam sendo elaborados e modificados em termos desta compartimentação. A ideia de que há sempre uma forma de contornar a utilização da Matemática esbarra no problema de não dar a devida importância à sequência necessária para a interpretação de uma situação física, que deve passar pelo entendimento do que seja um modelo físico idealizado e de como os modelos matemáticos devem ser aplicados na operacionalização dos conceitos físicos necessários para dar conta das situações.

Para abordar a questão da dinâmica do centro de massa propus uma segunda situação-problema (figura 54). Um projétil é lançado no ar, e no topo de sua trajetória sofre uma explosão e se separa em dois fragmentos de mesma massa. Um dos fragmentos cai perpendicularmente, em queda livre, a partir do repouso (situação idealizada). O outro inicia nova trajetória parabólica. O problema solicita a posição final deste segundo fragmento em relação ao canhão de lançamento do projétil.

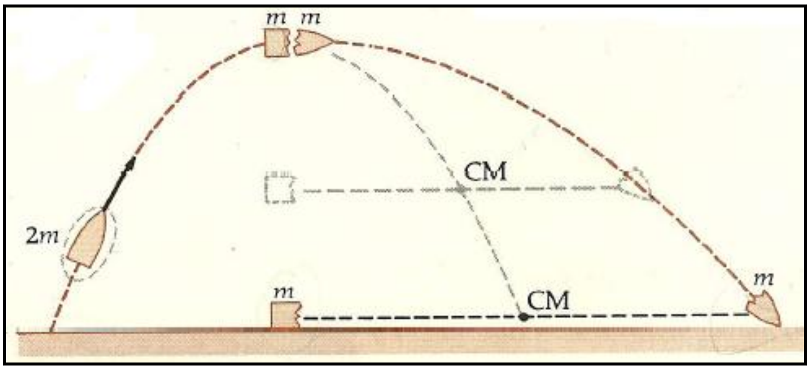


Figura 54: Um projétil que explode no ar (Tipler, 1990, p. 219).

Tentei mostrar aos alunos que o problema poderia ser resolvido pela Cinemática, considerando dois movimentos de projéteis, mas que pelas fórmulas do centro de massa, o problema se tornaria mais fácil e menos trabalhoso. Considerando o projétil como o sistema, observa-se que a única força externa que atua sobre o sistema é devida à gravidade. As forças devido à explosão são internas e não afetam o movimento do centro de massa o qual, após a explosão, continuará seguindo a primitiva trajetória parabólica. Como o centro de massa fica no meio do caminho entre as massas após a explosão fica fácil calcular a posição final da segunda partícula. Alguns estudantes demonstraram este conhecimento apenas em observar a figura apresentada da situação proposta.

O próximo assunto abordado foi sobre a *conservação do momento linear*, satisfeita quando a força resultante externa ao sistema de partículas é nula. Sistemas que satisfazem esta condição são considerados *sistemas isolados*. Neste tipo de sistema também há conservação da energia mecânica. Sistemas isolados são idealizações perfeitas para os propósitos da Mecânica básica. Mostrei que como a força externa resultante sobre o sistema é a taxa de variação instantânea do momentum linear do sistema como um todo, ou do momento linear do centro de massa do sistema então, teríamos uma derivada de função vetorial igual ao vetor nulo, o que requer que esta função vetorial seja constante. Sendo constante o momento linear do sistema, ele deve ser o mesmo em distintos instantes, isto é, a lei da conservação do momento linear.

Avisei os alunos que havia enviado um e-mail com as listas de exercícios, com a nova data da prova, com o conteúdo que cai na prova, com a relação das notas finais e freqüência na primeira área, por número de matrícula.

Aula do dia 28/10/2011: A aula de hoje é bastante importante. Deve ser dado um fechamento à matéria relativa à segunda unidade. Segui os ensinamentos conceituais do livro do Paul Hewitt, para o Ensino Médio. Retomei todos os conceitos trabalhados nas últimas aulas como forma de sintetizá-los. Comecei falando conceitualmente em *momentum linear* e sua relação com o *impulso* dado ao objeto durante um intervalo de tempo.

O exemplo comentado foi de um imenso navio com uma velocidade muito pequena, e uma bala disparada por uma arma, com uma velocidade muito grande e massa muito pequena. Nos dois exemplos o momentum dos dois corpos pode ser o mesmo, sendo que num deles a *massa* é grande ao passo que no outro a *velocidade* é grande. São as duas grandezas de que depende o momentum de um objeto em movimento. Também falei que se trata da i*nércia em movimento,* uma propriedade intrínseca de corpos em movimento. Falei nos exemplos de um carro desgovernado que vai bater contra uma parede ou alternativamente contra um monte de feno. Falei no soco levado pelo boxeador numa luta oficial de boxe, e falei na forma como os atletas quebram uma pilha de tijolos, tentando relacionar a força de impacto com o tempo gasto para aplicar esta força. Para cada caso o impulso pode ser o mesmo, mas as consequências são diferentes em cada situação. O boxeador que leva o soco procura prolongar o tempo, a fim de tornar a força de impacto menos intensa. Já o atleta que quebra uma pilha de tijolos, aplica uma intensa força num curto intervalo de tempo.

Após estas explicações, falei no *conceito de colisão*, também adotada no livro do Paul Hewitt. Um aluno perguntou: *nestas colisões há conservação de momentum?* Então expliquei que nas situações em que não forças externas atuando sobre o sistema de partículas, há conservação de momentum linear. Isto pode ser justificado da seguinte maneira:

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Onde $\vec{P}$ é o momentum linear do sistema de partículas, como um todo. Se não há força

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

Isto é, o momentum linear do sistema de partículas é constante ao longo do movimento (se conserva).

Apresentei o *teorema variação do momentum e impulso*, através da mesma equação. Supondo o quociente de duas diferenciais, a diferencial do momentum dividida pela diferencial do tempo, mostra-se que a integral da diferencial da velocidade multiplicada pela massa do objeto (supostamente constante) é igual a integral da força em relação ao tempo, que é a definição de *impulso*.

$$d\vec{P} = \vec{F}(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{t_i}^{t_f} d\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P}_f - \vec{P}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$$

No lado esquerdo da equação temos a variação do *momentum linear* $\Delta\vec{P}$. O lado direito, definimos como impulso: a medida tanto da intensidade quanto da duração da força da colisão.

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$$

Assim apresentamos o *teorema do momentum linear e impulso*.

$$\Delta\vec{P} = \vec{J}$$

Novamente a questão da interpretação geométrica da relação entre impulso e força foi diferenciada. Considerando o caso unidimensional, conhecido o gráfico da força aplicada sobre o objeto em função do tempo, o impulso devido à força aplicada num determinado intervalo de tempo poderá ser calculado a partir da área com sinal da região limitada pelo gráfico e pelo eixo dos tempos. Esta "área com sinal" também representará a variação da energia cinética do objeto no intervalo de tempo considerado.

O próximo passo foi discutir os três tipos básicos de colisões: *elásticas:* aquelas onde não há deformação permanente no objeto e onde há conservação de energia cinética; *inelásticas*: aquelas onde há deformação no objeto e não há conservação de energia cinética; *perfeitamente inelásticas*: onde os objetos se "grudam" de alguma forma, durante a colisão.

Houve dúvida de um aluno: *o taco de golfe numa bola de golfe deforma a bola, mas não de maneira permanente. Que colisão há neste caso?* Respondi: *colisão inelástica. Colisões elásticas podem ser relacionadas às colisões de duas bolas maciças, como bolas de bilhar, por exemplo.* A dúvida permaneceu. Afirmei que retomaríamos o conceito.

A primeira situação-problema apresentada na parte de colisões foi o *pêndulo balístico* (figura 55), um exemplo clássico de *colisão perfeitamente inelástica*, já que a bala fica alojada no bloco de madeira após a colisão. Como o bloco de madeira está inicialmente em equilíbrio, num instante imediatamente anterior à colisão, as tensões nos dois fios que sustentam o bloco de madeira equilibram o peso do bloco, sendo então nula a força resultante. O sistema é isolado, valendo com isto a conservação do momentum linear.

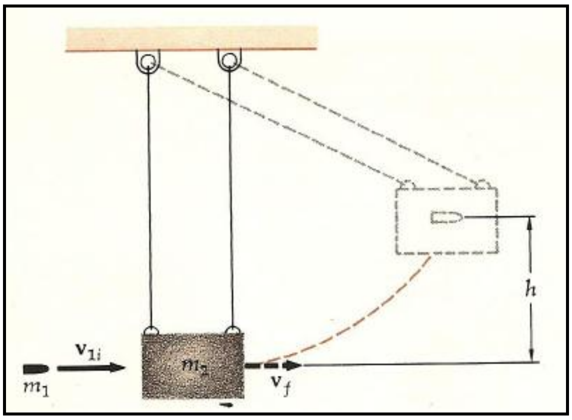


Figura 55: O pêndulo balístico (Tipler, 1990, p.232).

Não há conservação de energia cinética, pois a colisão é inelástica. Considerando a massa final após a colisão, como a soma das massas do bloco e do projétil, pode-se achar uma fórmula para a velocidade após a colisão. Ocorre que imediatamente após a colisão o bloco descreve um arco de círculo até uma altura h, onde durante este trajeto a energia mecânica se conserva, já que o sistema é isolado. Então usando o fato de que a energia cinética do novo sistema logo após a colisão (ponto mais baixo do referencial da energia potencial gravitacional) é igual à energia potencial gravitacional no ponto mais alto da trajetória obtém-se a velocidade inicial com que o projétil foi disparado.

Uma aluna disse: *professora, a senhora gosta muito desta matéria, não é?* Perguntei por que ela afirmava isto e ela respondeu: *por que a senhora explicou muito bem esta matéria, a aula foi muito boa.* Agradeci e disse que eles é que me incentivavam para estudar para entender os problemas.

<u>Aula do dia 31/10/2011:</u> Iniciei a aula retomando o conceito de *centro de massa*. Resolvi três problemas de cálculo de centro de massa com os alunos, a fim de esclarecer dúvidas que possam ter ficado pendentes.

No primeiro exercício o sistema de partículas (idealizado) era constituído pelo planeta Terra e pela Lua. Cada partícula, neste caso, é considerada como um corpo rígido, com densidade homogênea. Assim, a massa é igualmente distribuída em todos os pontos do espaço. Para objetos com esta característica seu centro de massa coincide com o centro seu centro geométrico; no exemplo, trata-se de esferas com simetria no ponto central. A representação em forma de desenho na lousa considerou o eixo *x* passando pelo centro dos dois corpos, Terra e Lua, com o sentido positivo apontando da esquerda para à direita, como é convencionado. Ao perguntar para os alunos onde poderia estar situado o centro de massa do sistema, responderam que mais próximo do planeta Terra, já que têm a maior concentração de massa. Então, posicionou-se o eixo *y* perpendicularmente ao eixo *x*, passando pelo suposto centro de massa do sistema. Considerou-se a distância do centro de massa até o centro da Terra como *D*, e a distância do centro da Terra até o centro da Lua como *d*. O problema fornecia as massas da Terra e da Lua e a distância *d*. Então aplicando as fórmulas das coordenadas *x* e *y* do centro de massa, para o caso discreto, obteve-se o valor da distância D, considerando que o centro de massa do sistema está na origem. No final mostrou-se que a distância calculada era 0,75 vezes o raio da Terra.

Um aluno argumentou*: professora, se o valor de D é 0,75 vezes o raio da terra então o centro de massa está dentro do planeta Terra, próximo à superfície terrestre, e não fora, como a senhora desenhou.*

Respondi*: é verdade. Corrijam o desenho.*

Outro aluno contra argumentou*: não é preciso corrigir o desenho professora. O que foi feito está correto. Chega-se a esta conclusão após ter feito o desenho, supondo-se que o centro de massa está sobre o eixo x, mais próximo da Terra*[128].

O segundo problema resolvido foi o cálculo do centro de massa do sistema composto por três barras de metal homogêneas, posicionadas na forma de um U virado de ponta-cabeça.

[128] De fato quando fizemos o desenho na lousa não imaginamos que o centro de massa estivesse no interior da Terra. Se tivéssemos feito assim, já estaríamos partindo da visualização correta. A intervenção do aluno pressupõe que a análise real do problema surge a partir dos cálculos matemáticos.

A origem do sistema de coordenadas coincidia com o extremo inferior da barra da esquerda, considerando que duas barras paralelas eram de mesmo comprimento L e de mesma massa M, ao passo que a barra paralela ao eixo *x*, na parte superior, unindo as outras duas pelas suas extremidades, também tinha comprimento L, porém a massa três vezes maior do que as massas das outras duas. O método utilizado é o mesmo do exemplo anterior. Calcula-se o centro geométrico das três barras e, então, aplicam-se os valores correspondentes na equação das posições *x* e *y* do centro de massa do sistema. Um aluno pergunta: *onde vai estar posicionado o centro de massa do sistema composto pelas três barras metálicas?* Outro aluno responde: n*o interior do U invertido, mais próximo da barra de massa 3M.* Um terceiro aluno também questiona*: se o sistema de coordenadas for outro, o centro de massa muda ou é o mesmo?*

Respondi: *o centro de massa vai apresentar novas componentes x e y em relação a outro sistema de referência. Porém, geometricamente, ele estará sempre na mesma posição em relação às três barras.*

Após, retomei os conceitos de *colisões elásticas, inelásticas e perfeitamente inelásticas*. Apresentei os exemplos relacionados à colisão de duas partículas. No primeiro caso, supus duas bolas de bilhar, no segundo supus o taco de golfe e a bola de golfe e, no terceiro caso, supus uma massa de modelar colidindo com uma bola de bilhar. Especificamente falei do caso da colisão elástica. Não transcrevi as fórmulas matemáticas para o cálculo das velocidades finais, após a colisão. Porém fui perguntando aos alunos o que achavam que iria acontecer primeiramente se as massas fossem iguais e a velocidade da segunda massa fosse nula. Após, se a massa projétil fosse muito maior do que a massa alvo e, por fim, se a massa projétil fosse muito menor do que a massa alvo. Os alunos pareciam estar cansados e, aos poucos, iam saindo da aula. Perguntei se queriam adiar a prova para o dia 11/11, já que faltam apenas duas aulas para a prova. Responderam que não.

No final da aula uma aluna pediu o e-mail do monitor da disciplina, já que nas vezes anteriores, procurou-o para dúvidas e não o encontrou nos horários definidos. Disse que mandaria um e-mail para ele. Enviei um e-mail para o monitor com cópia oculta para todos os alunos.

Aula do dia 04/11/2011 e 07/11/2011: Estas são as aulas que antecedem a prova do dia 09/11. Procurei me deter nas duas listas de exercícios propostas, sendo que a lista sobre centro de massa e colisões não tinha sido muito enfatizada nas aulas. Os alunos copiavam as resoluções sem muitos questionamentos.

Comecei pela dúvida de um aluno com o problema 12. Um bloco que cai sobre uma mola vertical. Foram dadas a massa do bloco e a constante elástica da mola. Também foi fornecido o comprimento máximo de compressão da mola. Foi pedido o trabalho realizado pela gravidade, pela mola, e a velocidade do bloco imediatamente antes dele se chocar com a mola. O aluno tinha dúvida com relação ao cálculo desta velocidade, onde se aplica a conservação da energia mecânica.

A segunda dúvida foi de outro aluno, no exercício 16. Um guincho puxa um bloco de granito para cima ao longo de um plano inclinado. Foi dada a massa do bloco, sua velocidade constante e o coeficiente de atrito cinético entre o plano e o bloco. O problema pede o trabalho realizado por todas as forças que atuam no bloco. A dúvida do aluno é com relação ao cálculo do trabalho da força da gravidade. Ele apresentou dificuldade no entendimento do ângulo formado entre a força da gravidade e o deslocamento, para que possa ser aplicada a equação do produto escalar entre dois vetores.

Foram resolvidos os problemas 21, sobre um bloco descendo uma rampa onde na parte inferior da rampa estava uma mola no seu estado natural. O problema 24 apresenta uma corda fixa horizontalmente, sendo que na ponta da corda está presa uma bola, que é solta formando uma trajetória circular. Na parte mais baixa do sistema a corda encontra um prego num ponto P e, realiza nova trajetória circular, agora com novo raio (menor que o anterior). Novamente os alunos deveriam resolver o problema conhecendo a decomposição de forças e a conservação da energia.

Na segunda lista resolvi um problema de colisão. Dois blocos se movendo para a direita. O primeiro bloco vai com uma velocidade menor do que o segundo (que segue logo atrás do primeiro). Na parte traseira do primeiro bloco está fixa uma mola. Quando o segundo bloco alcançar o primeiro vai colidir com ele, e vai comprimir a mola que está fixa neste. O problema pedia a velocidade final de cada bloco, afirmando que no momento de máxima compressão da mola os dois corpos podem ser considerados um só (colisão perfeitamente inelástica).

Comentei novamente sobre o pêndulo balístico e sobre a situação em que dois veículos movem-se perpendicularmente entre si, e vão se encontrar e colidir na origem de um sistema de referência. Como fica o momento final dos dois veículos. Novamente é uma colisão perfeitamente inelástica, porém bidimensional. Tentei explicar para os alunos que o vetor momento linear resultante antes da colisão tem que ser igual ao vetor resultante momento linear após a colisão. A soma vetorial passou a ter sentido através desta situação física.

Aula do dia 09/11/2011: Nesta aula foi aplicada a segunda prova semestral. 21 alunos estavam presentes. A prova foi corrigida no dia 10 para ser mostrada em aula no dia 11. Disponibilizei as notas na internet. A média geral da turma foi 4,3. As fórmulas básicas foram fornecdidas.

QUESTÃO 1: (**1.5**) Determinar as coordenadas do centro de massa da placa uniforme da figura 55.

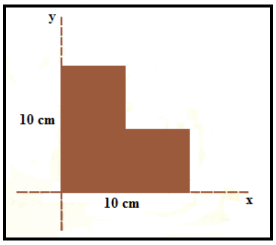


Figura 55: Uma placa com uniforme (Tipler, 1990, p. 246).

QUESTÃO 2: Um bloco, com $6kg$ de massa, escorrega por um plano inclinado abaixo, com atrito, partindo do repouso. O coeficiente de atrito é $0,2$ e o ângulo do plano $60°$. (a) **(1.5)** Represente, num diagrama de corpo livre, todas as forças que atuam sobre o bloco e determine o trabalho efetuado por elas, isoladamente, quando o bloco escorrega $2m$ medidos ao longo do plano.(b) **(0.5)** Qual é o trabalho resultante efetuado sobre o bloco? (c) **(1.0)** Qual é a velocidade do bloco depois de escorregar $2m$?

QUESTÃO 3: Na figura 56, um bloco de massa $2,5kg$ desliza de encontro a uma mola de constante elástica $320N/m$. O bloco pára após comprimir a mola $7,5cm$. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é $0,25$. Enquanto o bloco está em contato com a mola e sendo levado ao repouso, determine (a) **(1.0)** o trabalho realizado pela mola; (b) **(1.5)** o aumento de energia térmica do sistema bloco-piso; (c) **(1.0)** a velocidade do bloco imediatamente antes de chocar com a mola.

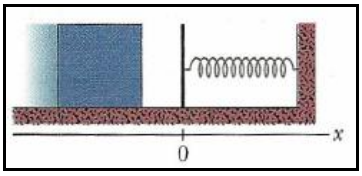


Figura 56 Um bloco que encontra uma mola (Halliday, 2008, p. 210).

QUESTÃO 4: Uma bola de aço (figura 57) de massa $0{,}500kg$ está presa em uma extremidade de uma corda de $70{,}0cm$ de comprimento. A outra extremidade está fixa. A bola é liberada quando a corda está na horizontal. Na parte mais baixa de trajetória a bola se choca com um bloco de metal de $2{,}50kg$, inicialmente em repouso, sobre uma superfície sem atrito, conforme figura ao lado. A colisão é elástica. Determine: (a) **(1.0)** a velocidade escalar da bola imediatamente após a colisão; (b) **(1.0)** a velocidade escalar do bloco imediatamente após a colisão.

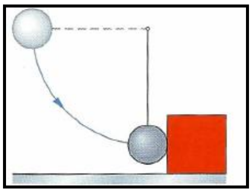


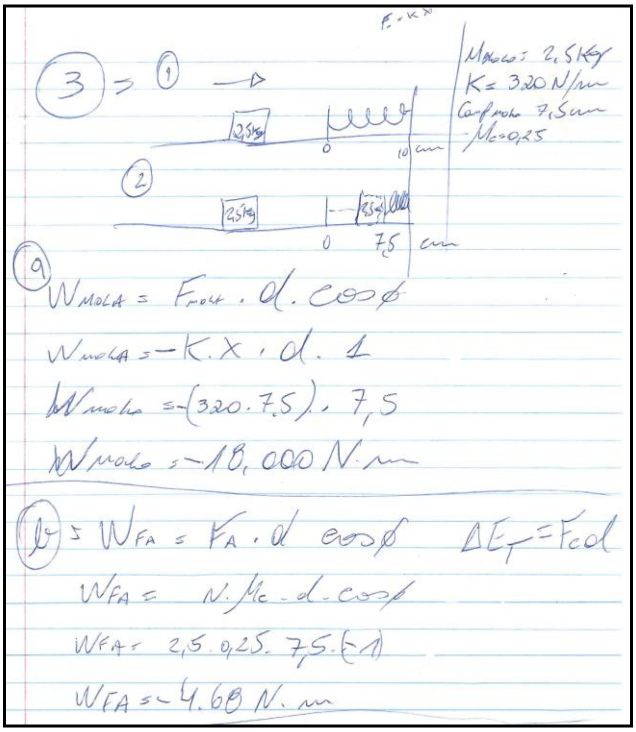
Figura 57: Uma bola de aço que colide com um bloco em repouso (Halliday, 2008, p. 253).

Análise das relações entre o Cálculo e a Física num nível cognitivo

Nesta parte vamos apresentar os esquemas utilizados pelos estudantes para a resolução da questão três da prova. Particularmente, a forma como os alunos representaram matematicamente o trabalho realizado pela força da mola.

Uma das formas de representação apresentadas nas provas segue no quadro 24. Para fins do cálculo do trabalho realizado pela força da mola sobre o bloco o estudante considera o produto escalar entre os vetores *força da mola e deslocamento*, um caso que só é permitido quando a força aplicada sobre o objeto é constante. Outros três alunos apresentaram a mesma forma de esquema para a resolução. Observa-se que estes alunos não explicitam nenhuma relação do conceito de trabalho de uma força variável, utilizando resultados do Cálculo (via integral).

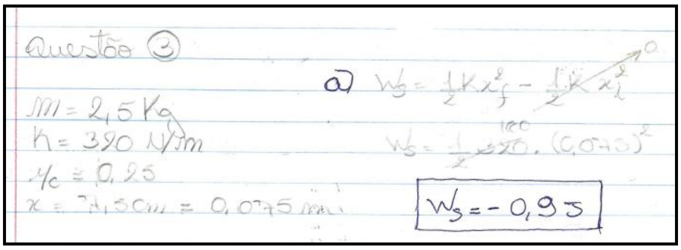
Quadro 24: Esquema de resolução do aluno Dante.



Outra forma de representação matemática apresentada na questão segue no quadro 25. O aluno apresenta a expressão para o trabalho da força elástica na sua forma final, sem apresentar o cálculo através da integral. Os sinais dos dois termos estão trocados na expressão, o que demonstra que não houve o entendimento da aplicação do teorema fundamental do Cálculo necessário para indicar os sinais corretos. O teorema em ação que dá conta desta situação é:

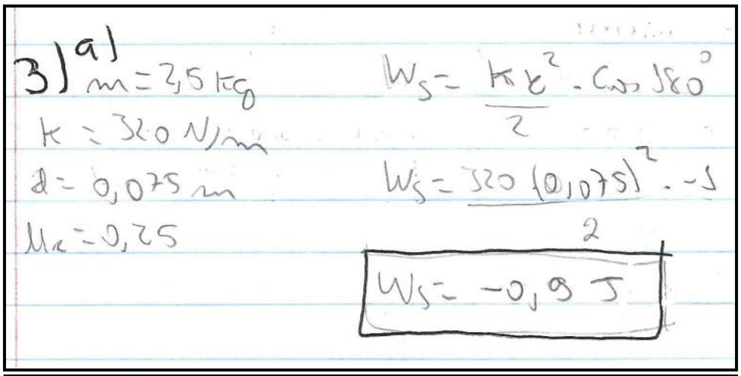
$$W_S = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big]_{x_i}^{x_f} = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right) = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Quadro 25: Esquema de resolução de Derik.



Um novo invariante operacional externalizado pelo aluno Eduardo é apresentado no quadro 26. O aluno considera que o trabalho realizado pela força elástica é uma antiderivada da função módulo da força elástica. Para obter o valor negativo na expressão o aluno multiplica a antiderivada pelo *cos180°*.

Quadro 26: Esquema de Eduardo.



3) a) $m = 2,5\ kg$

$k = 320\ N/m$

$d = 0,075\ m$

$\mu_c = 0,25$

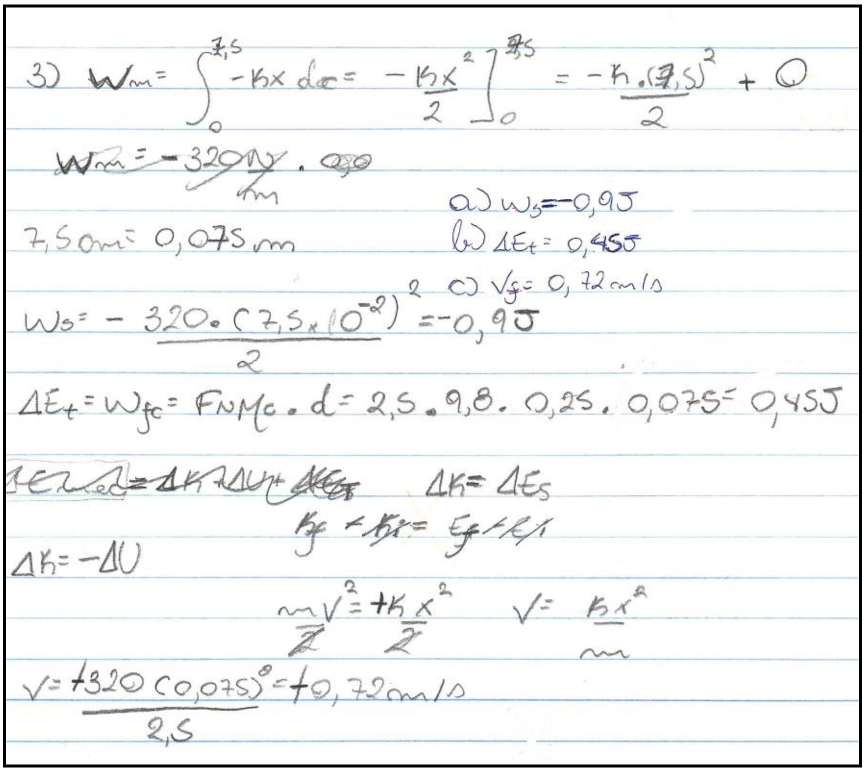
$W_s = \frac{kx^2}{2} \cdot \cos 180°$

$W_s = \frac{320\,(0,075)^2}{2} \cdot -1$

$\boxed{W_s = -0,9\ J}$

No esquema do quadro 27 o aluno representa matematicamente o cálculo do trabalho da força elástica através do uso da integral definida. Apenas dois estudantes apresentaram esta relação, sendo que um deles já havia passado pelo menos uma vez pela disciplina de Cálculo.

Esquema 27: A resolução de Hugo.



3) $W_m = \int_0^{7,5} -kx\,dx = -\frac{kx^2}{2}\Big]_0^{7,5} = -\frac{k.(7,5)^2}{2} + 0$

$7,5\ cm = 0,075\ m$

a) $W_s = -0,9\ J$

b) $\Delta E_t = 0,45\ J$

c) $V_f = 0,72\ m/s$

$W_s = -\frac{320 \cdot (7,5 \times 10^{-2})^2}{2} = -0,9\ J$

$\Delta E_t = W_{fc} = F_N \mu_c \cdot d = 2,5 \cdot 9,8 \cdot 0,25 \cdot 0,075 = 0,45\ J$

$\Delta K = \Delta E_s$

$\Delta K = -\Delta U$

$\frac{mv^2}{2} = +\frac{kx^2}{2}$ $\quad v = \frac{kx^2}{m}$

$v = +\frac{320\,(0,075)^2}{2,5} = +0,72\ m/s$

Aula do dia 11/11/2011: Quinze alunos estavam presentes. Antes de mostrar as provas fiz a correção das questões em aula. Um aluno perguntou: *porque a senhora não entrega as provas agora para acompanharmos o que erramos?* No entanto, já estava na correção da última questão, e decidi terminar antes de entregar. Os alunos olharam as provas e não questionaram nada do que tinha sido feito nas correções. Disse que nova atividade colaborativa seria proposta como forma de recuperar as notas, como foi feito na primeira área.

Iniciei o conteúdo da terceira área, os capítulos 10 e 11 do Halliday: *rotações, rolamento, torque e momentum angular.* As diferenças básicas entre movimento de translação pura e rotações puras bem como suas relações devem ficar claras nesta última área.

Houve nova discussão, assim como nas primeiras aulas do semestre, quanto aos tipos de movimento. Um aluno entendeu que *a rotação não era apenas um corpo girando em torno de um eixo fixo, mas também girando em torno dele mesmo*. De fato, os movimentos realísticos são bastante complexos. São translações e rotações ao mesmo tempo. Também surgiu a oportunidade de esclarecer a questão da garrafa com água, surgida no início do semestre. Na versão do Halliday, não é considerado um corpo rígido. Quando disse isso, todos ficaram surpresos.

Outro aluno novamente *perguntou sobre o movimento de um satélite orbitando em torno da terra.* Concluímos que aí estava o exemplo de dois movimentos de rotação ao mesmo tempo. O satélite rota em torno na Terra, e rota em torno do seu próprio eixo de rotação (que passa pelo centro de massa).

Reportei-me ao tempo dos discos de vinil para falar na *velocidade angular* e *velocidade linear* de uma partícula. Os alunos não demonstraram muita surpresa, parecia que já conheciam estes conceitos. Expliquei o significado do *radiano,* unidade adimensional da *posição angular da partícula*. O radiano unitário é obtido quando o raio do círculo tem a mesma medida do comprimento do arco do círculo correspondente ao ângulo de abertura (igual a um radiano). Mostrei algumas equivalências, como $2\pi rad = 360°$ e $\pi rad = 180º$. Salientei que o *radiano é uma medida adimensional*. Comecei a apresentar as *variáveis cinemáticas de rotação em paralelo com as variáveis cinemáticas da translação*, quando, então, encerrei a aula.

Um terceiro aluno argumentou: *professora, como os alunos podem faltar numa aula tão importante como esta? Os conceitos de translação e rotação são muito importantes!* Este é o aluno que tirou dez na primeira prova, no entanto, tirou 6,1 na prova 2. Preocupei-me, e perguntei-lhe se tinha visto a correção e o que tinha errado na prova. *Professora, se eu não discuti a correção quando tirei dez, não é agora que vou discutir a correção. Estive doente por duas semanas, então não pude me dedicar o suficiente*[129]. Este aluno era um aluno exemplar, que sempre participava das discussões tanto em aula como via e-mail. A questão polêmica da mola sendo puxada por uma força externa foi bastante discutida e trabalhada por ele. Calculou, inclusive, várias situações, considerando as constantes elásticas da mola com valores diferente. Agora estava um tanto distante, não tão participativo como nas aulas anteriores.

Na segunda-feira (14/11) computada como o feriado do dia 28/10 enviei, por e-mail, as três listas da área três do semestre, informando aos alunos os tópicos abordados no Halliday.

<u>*Aula do dia 16/11/2011:*</u> Retomei as variáveis Cinemáticas da rotação, agora fazendo um comparativo com as variáveis Cinemáticas da translação, considerando o caso da aceleração angular constante. Mostrei que as equações do movimento são análogas. Ao falar na aceleração radial e compará-la com a aceleração tangencial (em módulo), mostrei aos alunos que não é tão trivial obter os vetores correspondentes. Então, partindo do vetor posição de uma partícula P em movimento circular, em termos do ângulo teta, calculei o vetor velocidade linear, mostrando que seu módulo é, de fato, o valor obtido anteriormente. Os mesmos cálculos para a aceleração não são tão simples.

Propus uma primeira situação-problema onde era fornecida a velocidade angular inicial do eixo do motor de um carro, em ponto morto. Também era fornecida a velocidade angular do eixo das rodas, três segundos após. O problema solicitava o número de revoluções completadas pelo eixo das rodas ao final deste intervalo de tempo.

Resolvi o exercício primeiro fazendo a transformação de unidades de revoluções por minuto para radianos por segundo. Então três alunos *questionaram o fato da velocidade angular inicial do eixo das rodas ser nula, quando o carro está em ponto morto*. No entanto, o exercício considerou como se esta velocidade angular inicial fosse a velocidade angular

[129] Pude perceber que alguns alunos que foram muito bem na primeira prova diminuíram o desempenho na segunda prova. Será que isto estaria relacionado aos critérios de avaliação adotados na disciplina ou será que eles estariam se dedicando mais a outras disciplinas, já que tinham garantido uma boa nota na primeira prova? Como estaria a aprendizagem destes estudantes?

fornecida pelo eixo do motor. Afirmaram que, certamente, havia algum problema de tradução no exercício. Um dos alunos *disse que procuraria na internet o original do livro.*

Mostrei a questão para minha colega de doutorado, que leciona mecânica. Ela disse que, de fato, mesmo que a velocidade fosse transmitida do eixo do motor para o eixo das rodas, isto não é feito instantaneamente. Realmente, havia algum problema no exercício.

Aula do dia 18/11/2011: O aluno que se propôs a pesquisar o original do livro trouxe uma cópia da versão em inglês do exercício. Nela consta a palavra inglesa *crankshaft,* que significa *virabrequim,* em português. O exercício estava se referindo as velocidades angulares iniciais e finais, ao final dos três segundos, do *virabrequim,* e não do eixo das rodas[130].

No próximo tópico do conteúdo, expliquei aos alunos que os corpos rígidos rotam em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa. Resolvi um exemplo onde o sistema era composto por duas esferas, de massas diferentes, que giram em torno do seu centro de massa. Os alunos tinham que encontrar o centro de massa das duas esferas, cuja distância entre elas, unidas por uma haste sem massa, era fornecida. Após, tinham que calcular as velocidades lineares das duas esferas. Na avaliação final, tinham que interpretar que a esfera de menor massa, tinha que ter velocidade linear maior. Foi interessante, pois os alunos tiveram que recapitular o conceito de centro de massa.

O próximo passo foi introduzir o conceito de *energia cinética de rotação*. Desenhei um suposto corpo rígido. Um aluno argumentou: *professora, este corpo rígido parece com uma ameba!* Todos riram. Destaquei, no interior do corpo rígido, três massas, cujas distâncias ao eixo de rotação eram fornecidas.

A energia cinética rotacional, denotada por K_{rot}, é resultado da soma das energias cinéticas de todas as partículas do corpo rígido.

$$K_{rot} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_Nv_N^2 \quad \Leftrightarrow \quad K_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_iv_i^2$$

[130] Pude perceber como é importante o entendimento da situação física do problema antes da operacionalização direta com as equações matemáticas necessárias. No entanto, os livros didáticos consultados podem trazer problemas de tradução, fato que aliado à falta de experiência do professor, pode trazer problemas para o aprendizado dos conceitos. Antes que o aluno pesquisasse a tradução correta do problema, resolvemos prontamente a parte matemática, sem que isto representasse a real situação física do problema proposto.

Utilizando a relação entre velocidade angular w e velocidade linear v: $v = wr$ temos que:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (wr_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i\right) w^2 \quad \Leftrightarrow \quad K_{rot} = \frac{1}{2} I w^2$$

Na expressão final a grandeza I é denominada *momento de inércia* do corpo em relação ao eixo de rotação.

Nesta parte comentei com os alunos tópicos abordados no livro *Física Conceitual* de Paul Hewitt, especialmente o exemplo do *equilibrista de circo*. A inércia da vara segurada pelo equilibrista é grande, pois a maior concentração de massa se encontra nas extremidades. Portanto, se o momento de inércia é grande, é mais difícil de fazer o objeto rotar. Ao contrário, quanto menor o momento de inércia, mais fácil de rotar o objeto.

Outro aluno disse: *quando eu era pequeno participava de corridas de carrinhos de "rolemã". Tinha um amigo cujo carrinho tinha uma das rodas maiores do que as outras. Ele sempre ganhava as corridas. A inércia do carrinho não deveria ser maior?* Respondi ao aluno que a inércia não estava relacionada apenas ao raio, isto é, a distância das partículas até o eixo de rotação, mas dependia, também, de suas massas e da forma como estas massas estão distribuídas em torno do eixo de rotação.

Uma aluna, no fundo da sala tinha dúvida com relação ao conceito de maior ou menor momento de inércia. Apresentei um exemplo de dois corpos rígidos rotando rampa abaixo, largados ao mesmo tempo. Os dois eram cilíndricos, com mesma massa. Um deles tinha a massa concentrada mais próxima ao eixo de giro (um disco maciço) e o outro tinha a massa concentrada nas bordas (um anel). O maior momento de inércia era do anel, sendo que seria mais difícil de rotar rampa abaixo. A aluna ouviu, mas nada argumentou.

Perguntei aos alunos o que eles entendiam pelo conceito de *inércia*. Um deles respondeu: *é a propriedade que o corpo tem de manter-se no seu estado de movimento ou parado. É relacionada com a primeira lei de Newton.* Então disse que o mesmo conceito de inércia aplicava-se no movimento rotacional. Discutimos a unidade de momentum de inércia.

Como observação, escrevi na lousa que se não houver forças dissipativas (atrito no eixo) e se nenhum trabalho for realizado por forças externas, então a energia mecânica do objeto será conservada.

A equação matemática relacionada é $E_{mec} = K_{rot} + U_g = \frac{1}{2} Iw^2 + MgY_{CM}$.

Um aluno perguntou: *nesta equação não consta a energia cinética de translação?* Respondi: *não, neste caso estamos considerando que existe apenas energia cinética de rotação. Mas, num movimento mais realístico, a energia cinética de translação deverá ser adicionada na equação, quando houver.*

No mesmo instante, outro aluno perguntou: *professora, quer dizer que se dois corpos caírem juntos, um rotando e outro não, a energia potencial gravitacional será repartida entre a energia cinética rotacional e a energia cinética de translação?* Respondi: *teu raciocínio está correto. Veremos se há algum exemplo semelhante no livro.*

Propus, então, um exercício do Knight, onde era apresentado um sistema constituído de três massas, duas delas unidas em ângulo reto com uma terceira, e em ângulo agudo uma com a outra. As distâncias das duas massas até a terceira massa eram fornecidas. O sistema iria rotar em torno de um eixo passando pelo centro de massa da terceira massa. O problema pedia o número de rotações por minuto que o sistema faria em torno deste eixo, para uma energia rotacional fornecida do sistema.

Dei um tempo para os alunos resolverem enquanto me dirigi a um aluno. Ele havia encontrado uma resposta para sua dúvida no próprio Halliday. Indicou a seção e leu para os colegas. Então, novamente destaquei que teria que ver algum problema relacionado para resolvê-lo em aula. Parece ter ficado um tanto decepcionado por não ter conseguido a resposta no mesmo momento. Avisei os alunos que na quarta-feira próxima faremos um trabalho avaliativo em aula, para computar na nota da área dois.

Comentei como o exercício poderia ser resolvido, quando ao final da aula, o mesmo aluno pediu para ver a correção das suas provas. Outro aluno veio justificar que precisava faltar bastante às aulas devido ao seu trabalho, e que havia tirado uma nota ruim na prova, pois perdeu muitas aulas relacionadas ao assunto. *Professora, eu enxergo muitas coisas que não enxergava nas aulas do professor do segundo semestre de 2009. A senhora lembra que nas aulas de Cálculo eu faltava bastante também?* A dificuldade enfrentada pelos alunos dos cursos noturnos é esta. Têm que trabalhar, e as aulas presenciais, na forma em que o sistema de ensino está montado, são essenciais.

Outra aluna disse *professora não vou poder comparecer à aula na segunda. Posso na quarta-feira pegar a explicação com a senhora?* Respondi: *claro que sim. Venho um pouco antes para te mostrar o que foi visto.*

<u>Aula do dia 21/11/2011:</u> Nesta aula retomei o conceito de *momento de inércia* de um corpo rígido, apresentando aos estudantes o conceito cuja representação é uma integral matemática. Novamente considera-se um elemento infinitesimal de massa dm cuja distância até o eixo de rotação é dada por r. Somamos sobre todas as porções da partição do corpo rígido, aumentando-as infinitamente.

$$I = \int r^2 dm$$

Da mesma forma que para o cálculo do centro de massa de corpos rígidos, procede-se para o cálculo do se momento de inércia, em relação ao eixo de rotação considerado. Podem tornar-se integrais muito complexas, de difícil resolução. Os professores de Física evitam estes cálculos. Por isto, no contexto da Física, os momentos de inércia de corpos homogêneos, com formas geométricas comuns são tabelados[131].

Apesar disto achei importante mostrar os cálculos, através do uso da integral, do momento de inércia de uma barra homogênea, em relação a um eixo perpendicular ao plano da barra e que passa por uma das extremidades. A operacionalização matemática para a resolução da integral é mostrada na figura 58.

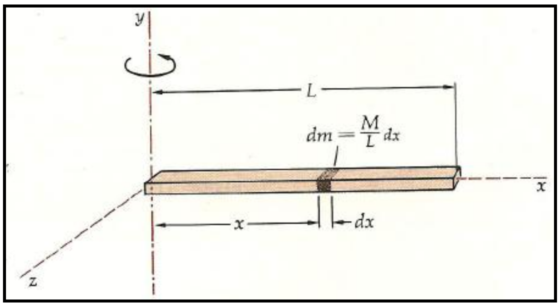


Figura 58: Momento de inércia de uma barra homogênea (Tipler, 1990, p. 269).

Neste caso a integral é dada por:

$$I_y = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx \qquad \Leftrightarrow \qquad I_y = \frac{1}{3} ML^2$$

[131] Corpos homogêneos têm a massa igualmente distribuída em torno do eixo de rotação.

Aproveitando ainda a barra homogênea, apresentei nova situação-problema, uma barra com comprimento e massa fornecida, presa a uma parede por uma junta móvel. A barra é mantida na horizontal e, depois, liberada. O problema pede o valor da velocidade da barra ao colidir com a parede. No modelo proposto a energia mecânica é conservada. As energias envolvidas no problema é a energia cinética de rotação e a energia potencial gravitacional.

Um aluno pergunta: *porque o y do centro de massa é zero na posição horizontal?* Porque escolhi meu sistema de referência considerando *y=0* na posição inicial. Quando a barra for solta, o y do centro de massa estará posicionado na metade do comprimento da barra, porém no sentido negativo.

Em seguida expliquei a diferença entre energia cinética de rotação pura, e energia cinética de translação pura. Quando as duas energias estiverem envolvidas, a energia cinética será composta pelas duas partes. Então expliquei o que acontece se um disco maciço está descendo uma rampa, sem deslizar. A energia potencial gravitacional será convertida em energia cinética de translação e energia cinética de rotação, pois o movimento envolve rotação e translação. No entanto, na energia cinética de translação passa a ser computada a velocidade do centro de massa e a massa total do corpo rígido. Este fato novamente será enfatizado no conteúdo sobre *rolamento.*

Retomando o assunto sobre momentum de inércia, salientei que um artifício bastante utilizado pelos professores de Física para o cálculo é o *teorema dos eixos paralelos*. Na expressão I é o momento de inércia em torno do eixo paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa, I_{CM} é o momento de inércia em torno do centro de massa, M é a massa da barra, e h é a distância entre os dois eixos de rotação.

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

Este teorema nos possibilita calcular o momento de inércia de corpos em torno de eixos paralelos aos eixos cujos momentos de inércia são conhecidos. Por exemplo, conhecendo o momento de inércia da barra homogênea, calculado anteriormente, é possível utilizar o teorema dos eixos paralelos para obter o momento de inércia da mesma barra homogênea, em torno de um eixo paralelo ao eixo *y*, que passa pelo centro de massa da barra.

Calcular o momento de inércia de um disco maciço rotando em torno de um eixo paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa. Falei para os alunos que deveriam imaginar como seria a rotação em torno dos dois eixos, um passando pelo centro de massa e outro passando por um ponto distante uma medida *h* do centro de massa, além de ser paralelo ao eixo do centro de massa.

Para finalizar a aula introduzimos o conceito de *torque* que surge em contrapartida à força aplicada sobre um sistema girante. Expliquei a situação através do movimento de rotação de uma porta. Disse aos alunos que o torque provocado pela força depende do raio (distância do ponto onde a força foi aplicada até o eixo de rotação), do ângulo formado entre os vetores raio e força, além da intensidade da força.

Fiz um desenho explicativo, e encerrei a aula mostrando que o módulo do torque pode ser calculado pelo produto dos módulos da menor distância do eixo até a linha de atuação da força (braço de alavanca) vezes a intensidade da força aplicada.

Avisei os alunos que na aula de quarta serão constituídos grupos de dois alunos, que farão um ou dois exercícios valendo nota. Disse que deveriam trazer as duas listas da segunda área, bem como material didático de apoio para consulta. Também expliquei rapidamente o que é um mapa conceitual e propus aos alunos que na aula onde resolvessem o exercício fizessem um mapa conceitual conectando todos os conceitos envolvidos na resolução do problema.

Aula do dia 23/11/2011: Nesta aula propus exercícios das listas da segunda área. Em grupos de dois ou três alunos, teriam que resolver quatro questões, duas de cada lista, juntamente com um mapa conceitual de algum assunto tratado durante o semestre. Aleatoriamente, selecionei quais exercícios poderiam ser resolvidos.

Durante a resolução dos exercícios, os grupos me procuravam para tirar dúvidas. Um dos exercícios que percebi, havia sido escolhido por mais de um grupo, tratava-se da *colisão de uma bola contra uma parede, formando um ângulo com a parede.* É um exercício de colisão bidimensional elástica, onde não havia deformação da bola. Após a colisão, ela mantinha a mesma velocidade inicial, porém numa direção e sentido diferentes. O problema pedia o impulso comunicado à bola durante a colisão e a força média exercida pela bola sobre a parede. Percebi que um dos grupos resolveu o exercício considerando que fosse uma colisão unidimensional. Não perceberam que, neste caso, o impulso era uma grandeza vetorial e deveria ser decomposta em duas componentes. Um segundo grupo resolveu de forma vetorial, contudo algumas conclusões foram tiradas baseadas na percepção visual dos alunos. No momento em que faziam as contas alguma coisa não dava certo. Até que, acharam a resposta fornecida pela lista. Eu não havia trabalhado em aula muitos exemplos envolvendo o cálculo de impulso.

Outro problema escolhido foi de uma *colisão perfeitamente inelástica entre dois pêndulos*. O primeiro pêndulo é solto de uma altura *h* em relação ao outro pêndulo que está parado, na posição vertical. O problema solicita a altura máxima do centro de massa do sistema após a colisão. Houve dúvida na aplicação da conservação da energia mecânica, no problema. Um dos grupos não entendia como calcular a velocidade final do sistema, após a colisão. *A ideia de velocidade imediatamente após a colisão* não tinha ficado entendida por muitos alunos.

Um terceiro grupo optou pelo problema da *colisão elástica entre uma bola com outras duas idênticas, inicialmente em contato*. Houve dificuldade na interpretação do problema. Como o aluno percebeu que eu não forneci a resposta imediatamente, logo propôs que mudaria de questão. O problema envolvia o fato de que na ausência de atrito, cada impulso estaria dirigido ao longo da linha dos centros das bolas, normal às superfícies. De fato, percebi que o problema não estava claro na sua formulação.

Um quarto grupo optou pela resolução do problema da *partícula deslizando sobre uma pista com as extremidades elevadas e uma parte plana central.* Há atrito na parte plana da pista, mas não nas extremidades. Eu havia resolvido este problema em aula pela conservação da energia, contudo o mesmo aluno que agora participava do grupo não havia concordado com minha resolução e, então, aproveitou a oportunidade do trabalho para resolver de outra forma.

Um quinto grupo optou pela resolução do *exercício da rampa inclinada, sem atrito, com uma mola presa na parte inferior*. O bloco seria solto, a partir do repouso, e parava após uma determinada compressão da mola. Vários itens eram perguntados na questão. Houve dúvida com relação ao cálculo da velocidade do bloco mo momento em que encontra a mola. Era necessário o conhecimento de trigonometria do triângulo retângulo para o cálculo de tal velocidade, e o grupo demonstrou dificuldade neste ponto.

Um aluno argumenta: *eu gosto de fazer este tipo de tarefa envolvendo mapas conceituais.* Eu havia explicado rapidamente o que seria um mapa conceitual. Poucos grupos entregaram em aula os exercícios, ficando definido que entregariam na aula de sexta-feira.

<u>Aula do dia 25/11/2011:</u> Nesta aula os alunos estavam anciosos. Parecia que a carga do final do semestre começava a pesar para eles. No dia 02/12 fariam prova de Cálculo.

Retomei o conceito de *torque,* desta vez de uma forma mais geral, utilizando o conceito matemático de *produto vetorial* entre dois vetores. Os livros apresentam inicialmente a fórmula matemática para o *conceito de torque* considerando o *eixo de rotação fixo*. Neste caso não é necessário uma definição de produto vetorial, num primeiro momento. No entanto, achei importante retomar o módulo matemático sobre vetores, e definir *torque* de forma mais geral, em termos do *produto vetorial* de dois vetores. Conforme a figura 59 o torque $\vec{\tau}$ que age sobre a partícula *A* em relação ao ponto fixo *O* é uma grandeza vetorial definida por $\vec{\tau} = \vec{r}\ x\ \vec{F}$.

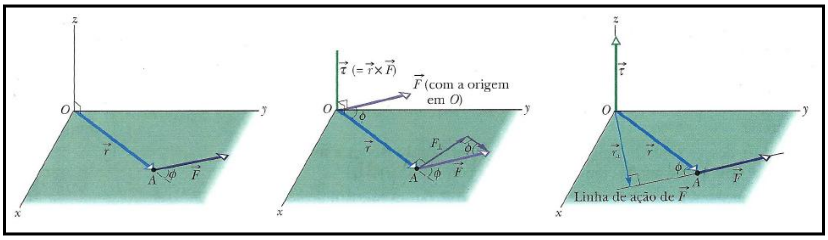


Figura 59: Representação geométrica do vetor torque (Halliday, 2008, p. 302).

A partir desta definição, aquela apresentada anteriormente nos livros didáticos de Física, representa o módulo da grandeza vetorial *torque*, dado por:

$$\tau = rFsen\phi$$

Onde r representa a distância do ponto *O* até o ponto *A* onde a força F é aplicada, e ϕ é o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ quando as origens dos vetores coincidem.

Após, falei da segunda lei de Newton para a dinâmica da rotação, e do torque resultante quando várias forças atuam sobre o corpo. Apresentei uma *situação-problema que pede para calcular a aceleração de um bloco, preso por uma corda que desliza em um disco uniforme com massa fornecida*. O foco central da questão era a compreensão de que a aceleração tangencial na extremidade do disco é a mesma aceleração do bloco no movimento de queda. Num diagrama de corpo livre mostrei a decomposição das forças sobre o bloco e a decomposição do torque resultante no disco. Relacionamos as variáveis de rotação e translação do problema e realizamos os cálculos. Lembrei que agora todas as roldanas cujas massas eram consideradas desprezíveis na área um e dois passariam a serem consideradas, quando se trata da *dinâmica de rotação*. Neste momento passamos a considerar o movimento de rotação da roldana.

Houve dúvidas sobre o que seria a *força do eixo*, citada no problema. Para onde ela estaria apontando? Alguns alunos sugeriram que seria para fora da lousa. Outros, que seria para cima ou para baixo. Disse que a força do eixo age no centro do disco. Portanto não há torque provocado por ela já que sua distância até o eixo de giro é nula.

Relacionei o torque nulo com a distância nula, na fórmula do torque. Outra dúvida que surgiu é que na dinâmica de translação, para problemas envolvendo blocos caindo, considerávamos sempre o sentido positivo como o sentido da queda do bloco. Assim, na decomposição de forças tínhamos *força da gravidade menos tensão igual à massa vezes a aceleração do sistema*. No entanto, o exercício resolvido no Halliday considera a tensão menos a força gravitacional. Expliquei aos estudantes que as respostas devem ser iguais independentemente do referencial que esteja sendo considerado, desde que mantida a coerência em termos de sinais.

Aula do dia 28/11/2011: Não houve aula devido ao exame de qualificação ao doutorado. Alguns alunos mostraram-se solidários enviando boa sorte, via e-mail.

Aula do dia 30/11/2011: Nesta aula ainda havia grupos de alunos entregando o último trabalho proposto. Resolvi, com eles, algumas situações-problema clássicas de dinâmica rotacional. Na primeira, intitulada *dando partida no motor de um aeroplano*, era solicitado o tempo que leva para a hélice do aeroplano atingir um número fornecido de rotações por minuto. A segunda, intitulada *um disco excêntrico,* tratava-se da parte de uma máquina, na forma de um disco, com um cabo vertical preso à borda e, com um pino, que inicialmente impedia o disco de girar. Após a retirada do pino os alunos deveriam calcular a aceleração angular inicial do disco. O eixo de rotação não estava situado no centro de massa, sendo que deveria ser utilizado o teorema dos eixos paralelos. Um aluno argumentou: *professora, esta peça é parte de um torno mecânico.*

A segunda situação-proposta se trata do *equilíbrio estático na rotação.* Expliquei aos alunos que agora é necessário não apenas que a força resultante sobre o sistema seja nula, mas que o torque resultante também seja nulo.

No exercício, duas pessoas estavam sobre uma tábua sob dois suportes. Eram fornecidas distâncias entre os suportes, entre o suporte e a primeira pessoa, no canto esquerdo da tábua, e o comprimento da tábua. A segunda pessoa deslocando-se para a direita provocaria o giro da tábua? Em que posição? O detalhe do entendimento estava no fato de que a força normal do primeiro suporte considerado (da esquerda para a direita), sobre a tábua, será nula no momento em que a tábua girar. Os alunos parecem ter compreendido facilmente. No entanto, quando disse que o resultado independe do suporte considerado, houve dúvidas. Propus que refizessem o exercício considerando esta outra possibilidade.

Finalizei a aula propondo que a prova da área três seria com consulta. Todos concordaram, mas queriam saber se haveria algum trabalho para esta área. Disse que poderia fazer, numa aula anterior à prova.

Aula do dia 02/12/2011: Nesta aula, forneci aos alunos um resumo geral das equações da cinemática da rotação e, um resumo geral das equações da dinâmica de rotação.

Pessoal, falta ainda completar o capítulo 11 do Halliday. Não enfocarei todo o capítulo, apenas comentarei com vocês alguns conceitos que ainda não foram comentados, como o momento angular, por exemplo. Então, tomando o resumo fornecido, fui relembrando todas as equações e falando naquelas que não haviam sido trabalhadas. Comentei, então, sobre o tratamento vetorial destas grandezas, argumentando que as representações matemáticas básicas para os propósitos da disciplina foram todas apresentadas e diferenciadas ao longo do desenvolvimento da disciplina.

Deduzi a equação de vínculo entre a velocidade do centro de massa e a velocidade angular, no rolamento de um objeto que não derrapa. Desenhei na lousa a situação de uma roda de bicicleta, salientando a curva *ciclóide,* definida pelo ponto na borda da roda.

Especifiquei o que seria a *energia cinética de um objeto em rolamento*, que envolve a energia cinética de rotação, calculada considerando o eixo de rotação passando pelo centro de massa do objeto, além da energia cinética de translação do centro de massa do objeto.

$$K_{rolamento} = K_{rotação} + K_{CM} \quad \Leftrightarrow \quad K_{rolamento} = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

Apresentei uma clássica situação-problema intitulada *a grande corrida ladeira abaixo,* para relembrar que, quanto maior a inércia, menor rapidez dos objetos considerados. A corrida se dá ao longo de uma rampa, onde são colocados nas mesmas posições, numa altura h de uma rampa, uma esfera, um cilindro e um arco circular, todos de massa *M* e raio *R*. Os três objetos são liberados do repouso e rolam rampa abaixo sem deslizar (não há atrito na rampa). Juntamente com eles é colocada uma partícula de massa *M*, que também desliza rampa abaixo sem atrito. Qual dos corpos ganhará a corrida com final na base da rampa?

Expliquei aos estudantes que a energia potencial inicial no topo da rampa é transformada em energia cinética na base da rampa. Há conservação de energia mecânica, sendo que a energia cinética é uma combinação da energia cinética de rotação com a energia cinética de translação, pois se trata de um movimento de rolamento.

$$K_f = U_i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 = Mgh$$

Num rolamento as velocidades de rotação e de translação se relacionam através da expressão:

$$wR = V_{CM}$$

Por outro lado, os momentos de inércia de objetos extensos são expressos genericamente na forma:

$$I_{CM} = cMR^2$$

Aqui *c* é uma constante que depende da geometria do corpo. Substituindo estas expressões na equação da conservação da energia obtemos para a velocidade do centro de massa:

$$V_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

Observamos que a velocidade de translação do centro de massa do objeto que rola independe da massa e do raio, mas depende da forma geométrica do objeto. Na situação proposta a partícula, com menor valor possível de *c*, terminaria como mais rápida, enquanto o aro circular, com o maior valor de *c* terminaria mais lento (Knight, 2009, p. 367).

<u>*Aula do dia 05/12/2011:*</u> Um aluno argumenta: *professora, eu e a Vitória não fizemos um mapa conceitual no trabalho. Fizemos um resumo explicando quais os principais conceitos que utilizamos na resolução dos problemas, a senhora aceita?* Respondi: c*laro que sim, vou*

avaliá-lo. Não podia cobrar que fosse um mapa conceitual, já que não havia trabalhado durante o semestre com este tipo de recurso.

Nesta aula comentei alguns exercícios das listas da terceira área. Os três primeiros eram sobre *cinemática da rotação*. Um tratava-se de aplicações diretas de fórmulas, com o cuidado na transformação de unidades, em determinados momentos, da velocidade angular. O segundo, um problema clássico, onde se quer lançar uma flecha, em direção paralela ao eixo de rotação de uma roda, composta por oito aros internos. A ideia é que a flecha não intercepte nenhum dos aros. No terceiro problema, duas rodas de raios distintos, estão unidas através de uma roldana. O ponto central para a resolução partia da hipótese que as acelerações tangenciais nas duas rodas são iguais.

A maior polêmica surgiu quando resolvi um exercício de cálculo de momento de inércia. Eram fornecidas as massas e as posições x e y de quatro partículas. Os alunos tinham que calcular o momento de inércia do sistema de partículas em relação aos três eixos coordenados.

Um aluno argumentou: *professora, para mim as distâncias das partículas até o eixo z são nulas.* Desenhei os três eixos, na lousa, colocando um disco centrado na origem, contido no plano xy. Então posicionei as partículas sobre o disco, para tentar mostrar que a distância entre elas e a origem do disco não eram nulas. A visualização geométrica do problema não estava clara para o aluno.

Ele novamente se pronunciou: *não entendi porque em relação aos eixos x e y a senhora não calculou às distâncias até a origem.* Expliquei que quando o problema solicita calcular a distância de um ponto até um eixo, temos que calcular a menor distância. Ela é obtida quando baixamos uma perpendicular do ponto até o eixo considerado. Do contrário, não será a menor distância. No caso da distância ao eixo z, estamos calculando a distância de pontos até a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Ele contra argumentou*: então se eu tiver quatro partículas de mesma massa, posicionadas a uma mesma distância acima do eixo, sua inércia é a mesma que se eu colocar duas das partículas à mesma distância abaixo do eixo?* Expliquei que sim.

Ele respondeu*: Matematicamente eu compreendo isto, mas fisicamente o que significa?* Tentei explicar com exemplos fornecidos pelo livro do Hewitt, mas não convenci o aluno. Então outro aluno do lado do aluno que estava com dúvida e deu-lhe alguma explicação que eu não estava ouvindo. Chegando perto, percebi que desenhou no papel um círculo, onde inicialmente estava uma única partícula com massa *m*. Depois, dividiu a massa *m* em duas massas m/2, posicionadas nas extremidades do diâmetro da roda. Conversaram em baixo tom, enquanto eu continuava com os cálculos na lousa.

O aluno com dúvida se pronunciou: *agora eu entendi, pela explicação do colega. Este sim está no curso certo! Eu não estou fazendo Física para aprender Matemática. Caso contrário estaria fazendo Matemática. Para mim, temos que entender fisicamente o problema e, depois, comprová-lo matematicamente. É para isto que a Matemática, a meu ver, serve.* Disse ao aluno que era muito importante seu ponto de vista e solicitei que expusessem suas opiniões na avaliação final da disciplina, no portal do aluno. Expliquei que para mim era muito importante que eles criticassem e apontassem sugestões para o melhoramento do ensino da disciplina. Então perguntei à turma o que eles acham do livro texto recomendado no plano oficial da disciplina. O mesmo aluno respondeu: *é horrível. Se entendermos o livro, saberemos fazer todas as contas, mas não saberemos Física*[132]*!*

Ainda argumentando o aluno disse: *mas porque professora? Porque a aprendizagem significativa não pode ser detectada via provas? Não vejo problemas nisto.* Respondi que penso que o conteúdo deve ser ordenado de forma diferente daquela apresentada no livro, só assim podemos pensar num sistema de avaliação coerente. Então, encerrei a aula de dúvidas para a terceira prova.

Aula do dia 08/12/2011: Nesta aula foi aplicada a terceira prova. Estiveram presentes 20 alunos.

7.4.2. A turma de 2012/1

Na segunda intervenção desta fase da pesquisa, a turma para a qual ministramos aulas era composta por estudantes dos cursos de Física Bacharelado e Licenciatura em Física diurna. Desta vez procuramos desenvolver os conceitos da disciplina a partir das situações físicas propícias para este fim.

[132] Senti que não pude aplicar as técnicas propostas para a pesquisa de doutorado da forma como eu almejava. O sistema de ensino vigente, principalmente a aplicação de provas, parece barrar um pouco as possibilidades, quando se trata de direcionar o ensino para uma aprendizagem significativa.

Iniciamos o conteúdo da mesma forma que fizemos no semestre anterior, definindo alguns conceitos básicos da Mecânica, na forma de uma Introdução à Mecânica. No entanto, aprofundamos inicialmente os conceitos da Cinemática através das seguintes situações-problema.

Situação-problema (1): a fim de trabalhar com os conceitos de *velocidade média* e de *velocidade escalar média* introduzimos a questão: Um automóvel viaja uma estrada retilínea por 40 km a 30 km/h. Em seguida, continuando no mesmo sentido, percorre outros 40 km a 60 km/h. (a) Qual é a velocidade média do carro durante este percurso de 80 km? (suponha que o carro se move no sentido positivo do eixo x); (b) Qual é a velocidade escalar média? (c) Trace o gráfico de x em função de t e mostre como calcular a velocidade média a partir do gráfico.

Iniciamos a resolução citando o tipo de movimento relacionado e suas características básicas. Definimos a posição da partícula no instante t, e representamos as posições fornecidas pelo problema num eixo horizontal. Então, definimos o deslocamento da partícula num determinado intervalo de tempo, especificando ambos os deslocamentos fornecidos no problema. Definimos a velocidade média e a velocidade escalar média, e construímos o gráfico da função posição contra o tempo.

Com isto, para o movimento retilíneo uniforme, pudemos relacionar conceitos matemáticos do Cálculo como: função linear, taxa de variação média, esboço do gráfico de funções lineares, e a notação de uma função definida por partes, restringindo o domínio natural da função posição.

Situação-problema (2): Uma corredora cobre 100 m em 10,0 s e depois retorna andando 50 m, em direção ao ponto de partida, em 30,0 s. Qual é a sua velocidade escalar média e a sua velocidade média durante todo o evento? Represente graficamente este movimento.

Nesta segunda situação proposta deixamos os alunos resolverem individualmente enquanto passávamos entre suas classes observando como haviam esboçado o gráfico. A maioria deles estava com um esboço de gráfico coerente com a situação. No entanto, uma aluna interpretou o retorno da corredora em direção ao ponto de partida como uma reta com declividade negativa que interceptava o eixo dos tempos e continuava descendo até um determinado ponto. Perguntei-lhe? *Porque, no seu gráfico, a curva posição assume valores negativos para a posição?* A aluna responde: *porque a corredora retorna em direção ao* *ponto de partida.* Para a aluna, o termo “retorno” estava associado a valores negativos para a posição, independentemente da corredora não ter chegado até o ponto de partida. Alguns poucos alunos construíram, como na situação anterior, a função definida por partes, relacionada à situação proposta.

O próximo passo foi proporcionar aos estudantes uma situação-problema que lhes permitissem calcular valores da função posição em instantes de tempo específicos e aplicar os conceitos de deslocamento, velocidade média e esboço de gráfico, fornecido a função posição da partícula.

<u>*Situação-problema (3):*</u> A posição de um objeto que se move ao longo de um eixo x é dada por $x(t) = 3t - 4t^2 + t^3$, onde x é dado em metros e t em segundos. Determine a posição do objeto para os seguintes valores de t: (a) $t = 1s$; (b) $t = 2s$; (c) $t = 3s$; (d) $t = 4s$; (e) Qual é o deslocamento do objeto entre os instantes $t = 0$ e $t = 4s$? (f) Qual é a velocidade média para o intervalo de tempo de $t = 2s$ à $t = 4s$? (g) Faça o gráfico de x em função de t para $0 \leq t \leq 4s$ e indique como a resposta do item (f) pode ser determinada a partir do gráfico.

A intenção de propor esta situação aos estudantes foi de inserir métodos para o esboço de gráficos encontrando os interceptos com os eixos das ordenadas, das abscissas, o sinal da função no intervalo solicitado. Não introduzimos, neste momento, os testes da primeira e da segunda derivada para esboço de gráfico por não termos desenvolvido ainda o conceito de derivada da função posição e da função velocidade. No entanto, construímos o gráfico mostrando a interpretação geométrica da velocidade média.

A próxima situação apresentada teve o objetivo de proporcionar o desenvolvimento o conceito de derivada como o limite das velocidades médias de vários intervalos tendendo à zero. Era importante que isso pudesse ser feito a partir do conceito de velocidade média e de sua interpretação geométrica, isto é, partindo do gráfico da função posição fornecida. Com relação ao gráfico foi importante para mostrar aos estudantes como podemos obter gráficos diversos a partir de um gráfico conhecido, aplicando sobre ele translações, deslocamentos verticais, deslocamentos horizontais, alongamentos e compressões.

<u>*Situação-problema (4):*</u> (a) A posição de uma partícula movendo-se ao longo do eixo x é dada por $x(t) = 9{,}75 + 1{,}50t^3$, onde t é dado em segundos. Tome x em centímetros. Calcule a velocidade média nos seguintes intervalos de tempo (simétricos em relação à $t = 3{,}00s$): (a)

$2{,}00s$ à $4{,}00s$; (b) $2{,}50s$ à $3{,}50s$; (c) $2{,}75s$ à $3{,}25s$; (d) $2{,}90s$ à $3{,}10s$; (e) $2{,}95s$ à $3{,}05s$; (f) Pode-se mostrar que a velocidade instantânea (em cm/s) é dada por $4{,}50t^2$. Calcule a velocidade instantânea para $t = 3{,}00s$.

Situação-problema (5): (a) Se a posição de uma partícula é dada por $x(t) = 4 - 12t + 3t^2$ (onde t está em segundos e x em metros): (a) qual é a velocidade da partícula em $t = 1s$? (b) o movimento neste instante é no sentido positivo ou negativo de x? (c) Qual é a velocidade escalar da partícula neste instante? (d) a velocidade escalar está aumentando ou diminuindo neste instante? (e) existe algum instante no qual a velocidade se anula? (f) existe algum instante após $t = 3s$ no qual a partícula está se movendo no sentido negativo de x?

Com esta situação pudemos avançar um pouco mais no contexto do Cálculo, mostrando como calcular o limite da razão incremental sugerida para o cálculo da função velocidade e, após, obter seu valor no instante solicitado. Também pudemos mostrar um pouco da análise de sinais da função derivada e suas relações com a função original. O significado geométrico de derivadas nulas foi explicado.

Para a obtenção das equações do movimento retilíneo com aceleração constante procuramos manter o método adotado nos semestres em que observamos as aulas dos professores. Consideramos que se a aceleração é constante ela é igual à aceleração média. Também enfatizamos que se a velocidade é uma função linear então a velocidade média é igual à média das velocidades nos extremos do intervalo de tempo considerado. O movimento da queda livre foi descrito como principal aplicação para o caso das equações deduzidas.

Situação-problema (5): Uma partícula move-se sobre uma linha reta de tal modo que, depois de t horas, está a $x(t) = 3t^2 + t$ km de sua posição inicial. (a) Encontre a velocidade média sobre o intervalo de tempo [1s, 3s]; (b) Encontre a velocidade instantânea em $t = 1s$; (c) Qual é a representação gráfica dos valores obtidos em (a) e (b)?

Esta situação-problema proporciona aos estudantes relacionarem os conceitos matemáticos de taxa de variação média e instantânea de uma função num dado intervalo com os conceitos físicos de velocidade média e velocidade instantânea de uma partícula em movimento retilíneo com aceleração constante.

Após as definições de aceleração média e aceleração constante, procuramos enfatizar as notações físicas relacionando-as com as notações do Cálculo, com respeito à derivada de segunda ordem da função posição.

Na sequência introduzimos o módulo matemático sobre vetores e trigonometria desenvolvido na fase anterior da pesquisa. Desta vez desenvolvemos o módulo considerando inicialmente o vetor posição de uma partícula como uma função vetorial. Com isto pudemos abordar questões de domínio, imagem e curvas paramétricas. Desenvolvemos a seguinte situação-problema.

<u>*Situação-problema (6):*</u> Esboce a trajetória de um objeto que se move ao longo da curva plana dada por $\vec{r}(t) = [(t^2 - 4)\hat{i} + t\hat{j}]m$ e em seguida calcule os vetores velocidade e aceleração nos instantes $t = 0$ e $t = 2s$, representando-os geometricamente no gráfico da trajetória.

Ao longo do desenvolvimento da questão uma aluna argumentou: *este gráfico parece representar o movimento dos elétrons em torno do núcleo de um átomo.*

Observei que ela relacionou o movimento ao longo de uma curva parabólica com o movimento ao longo de uma elipse. Estes são conceitos importantes desenvolvidos na disciplina de Cálculo. Parábolas, elipses e hipérboles são curvas planas básicas que se aplicam ao estudo do movimento, na Física. Situação-problema semelhante foi proposta em uma atividade colaborativa, para um dos grupos de trabalho (grupo alpha), cujo esquema de resolução é apresentado na figura (1).

<u>***Situação-problema proposta para o grupo alpha:***</u> o vetor posição $\vec{r}(t) = [t^2\hat{i} + t\hat{j}]m$ descreve a trajetória de um objeto que se move no plano *xy.* (a) Esboce o gráfico da trajetória do objeto indicando o sentido do movimento; (b) esboce os vetores posição, velocidade e aceleração no ponto (4 , 2).

Observamos (quadro 28) que o grupo identificou corretamente as curvas paramétricas da função vetorial fornecida, inclusive considerando um domínio fisicamente aceitável, $t \geq 0$. O grupo não conseguiu identificar o valor do parâmetro t correspondente ao ponto de abscissa igual a quatro e ordenada igual a dois. Os invariantes operacionais contidos nos seus esquemas podem ser interpretados da seguinte maneira:

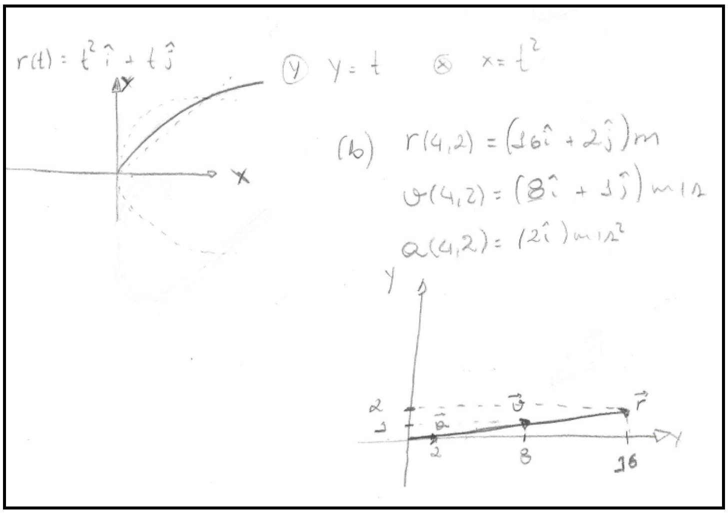
$$r(x,y) = x^2\hat{i} + y\hat{j} \qquad v(x,y) = 2x\hat{i} + \hat{j} \qquad a(x,y) = 2\hat{i}$$

Apesar do erro de notação utilizado, o processo de derivação da função vetorial a partir da derivada de suas componentes parece ter sido apreendido. No entanto, como não identificaram o valor do parâmetro t correspondente, fica implícito que não compreenderam o significado do conceito de funções de uma variável real a valores vetoriais. Outra observação importante é o fato do grupo ter esboçado os vetores pedidos num mesmo sistema de eixos coordenados, a partir de uma mesma origem, e não a partir do ponto de coordenadas (4,2) como exemplificado na situação em sala de aula. Desta forma não há como interpretar a direção e o sentido das variáveis cinemáticas no movimento proposto.

Com relação à forma de resolução da questão o grupo argumenta: *o gráfico foi feito a partir da atribuição de pontos.* Com relação ao trabalho em grupo dizem: *organizado... trabalham juntos... pensar o que está acontecendo e não só jogar as fórmulas... flexibilidade em aceitar a posição dos colegas.* Com relação ao método do ensino acrescentam: *a aula em si é muito boa. Não ficou claro o método avaliativo. O trabalho em grupo é importante, há troca de ideias. Seguir o livro não é produtivo. Cada professor tem seu estilo próprio de dar aulas, mas depende do individual do aluno. Existe uma preocupação excessiva com os alunos.*

Outra situação problema relacionada a funções vetoriais foi proposta ao grupo 7. Segue no quadro 29 o esquema de resolução representativo para a situação.

Quadro 28: Esquema de resolução do grupo alpha.



Situação-problema proposta para o grupo 7: A posição de uma partícula em função do tempo é dada por $\vec{r}(t) = [(5{,}0t^2)\hat{i} + (4{,}0t^2)\hat{j}]m$ onde t está em segundos. (a) Qual é a distância da partícula em relação à origem em $t = 0$, $t = 2s$ e $t = 5s$? (b) Obtenha uma expressão para a velocidade $\vec{v}$ da partícula em função do tempo; (c) qual é a rapidez da partícula em $t = 0$, $t = 2s$ e $t = 5s$?

Observamos que o grupo 7 explicita corretamente o cálculo dos vetores posição da partícula nos instantes propostos. Há uma confusão entre *posição e distância percorrida*. No entanto, não calculam as distâncias solicitadas que requer o seguinte teorema em ação para poder ser solucionado:

$$d = |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}(t) - \vec{r}(0)| = \left|(5{,}0)t^2\hat{i} + (4{,}0t^2)\hat{j}\right| = \sqrt{(25)t^4 + (16)t^4} = \sqrt{(41)t^4} = \sqrt{41}t^2$$

Outro fato observado é a representação simbólica do vetor velocidade como a razão entre o vetor posição e o tempo. Isto mostra que o grupo tentou solucionar o problema a partir do conceito subsunçor velocidade para o caso do movimento retilíneo uniforme. Para este grupo, o conceito subsunçor não diferenciado e nem reelaborado a partir da metodologia de ensino proposta, o que implica que não houve uma aprendizagem significativa do conceito de velocidade instantânea para o caso do movimento em duas dimensões. Neste caso, inserir antecipadamente o conteúdo sobre funções vetoriais não é produtivo para uma aprendizagem significativa. A situação proposta não tem sentido para os estudantes deste grupo.

Quadro 29: Esquema de resolução do grupo 7.

a) $\boxed{r(t) = (5{,}0t^2)\hat{i} + (4{,}0t^2)\hat{j}\ m}$

$r(0) = (5{,}0\times(0^2))\hat{i} + (4{,}0\times(0^2))\hat{j}$

$r(0) = (0m)\hat{i} + (0m)\hat{j}$

$r(2) = (5{,}0\times(2^2))\hat{i} + (4{,}0\times(2^2))\hat{j}$

$r(2) = (20m)\hat{i} + (16m)\hat{j}$

$r(5) = (5{,}0(5^2))\hat{i} + (4{,}0\times(5^2))\hat{j}$

$r(5) = (125m)\hat{i} + (100)\hat{j}$

b) $\vec{v} = \dfrac{\vec{r}}{t}$ $\quad \vec{v} = \dfrac{(5{,}0t^2)\hat{i}}{t} + \dfrac{(4{,}0t^2)\hat{j}}{t}$

$\vec{v} = (5{,}0t)\hat{i} + (4{,}0t)\hat{j}$

c) $v(0) = 0\hat{i} + 0\hat{j}$

$v(2) = (5{,}0.2)\hat{i} + (4{,}0.2)\hat{j}$

$v(2) = (10m/s)\hat{i} + (8m/s)\hat{j}$

$v(5) = (5{,}0.5)\hat{i} + (4{,}0.5)\hat{j}$

$v(5) = (25m/s)\hat{i} + (20m/s)\hat{j}$

A partir do vetor velocidade obtido novamente o grupo não explicita o cálculo da rapidez do objeto nos instantes solicitados. O conceito de rapidez está relacionado com o módulo ou intensidade do vetor velocidade. O teorema em ação que permite dar conta desta situação é:

$$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{100t^2 + 64t^2} = \sqrt{164t^2}$$

Com relação à situação proposta o grupo argumenta: *Função velocidade... para obtê-la deriva-se a posição...fica a fórmula meio tatuada no cérebro (tipo Deus vê tudo), tenta-se usar no início do problema...rapidez pela distância pelo tempo. A rapidez é um vetor? Inicialmente ficou a dúvida.* Com relação à metodologia adotada em aula afirmam: *bem mastigada. Conteúdo desmembrado, passado e fragmentado. Entrei na UFRGS e me surpreendi, pois o conteúdo é explicado. Pode parecer simples, mas não é trivial. No ensino Médio é "atirado". As listas utilizadas em aula não foram muito condizentes com as questões da primeira prova. Pode ter sido falta de exercitar, pode ter sido a fonte de estudo errada.*

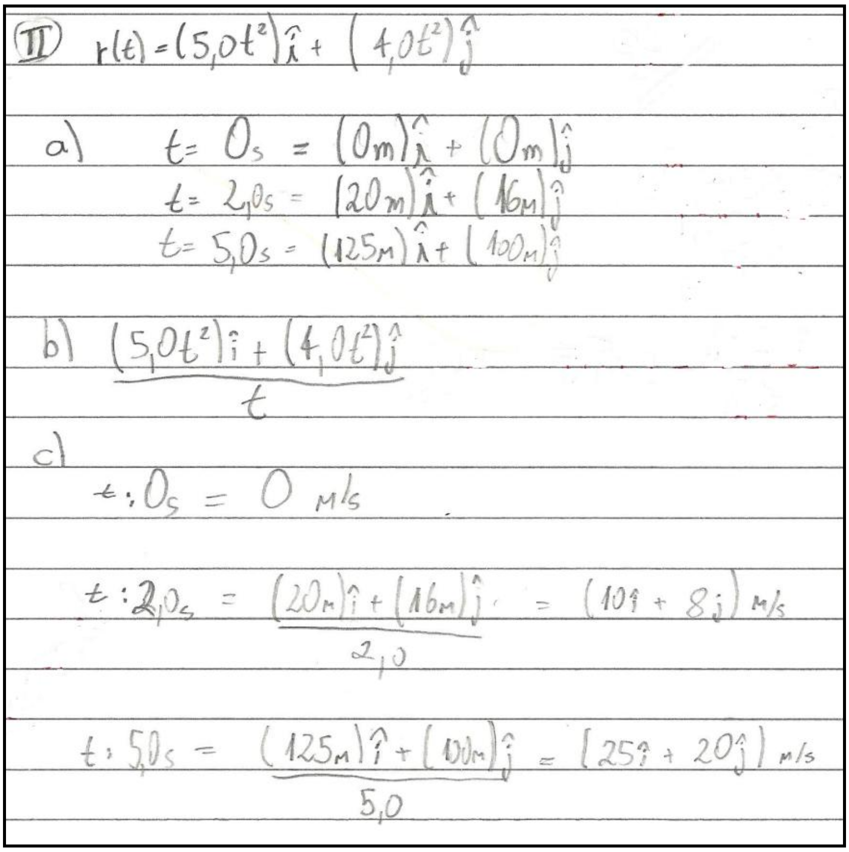
Situação-problema proposta para o grupo Quasares: A posição de uma partícula em função do tempo é dada por $\vec{r}(t) = [(5{,}0t^2)\hat{i} + (4{,}0t^2)\hat{j}]m$ onde t está em segundos. (a) Qual é a distância da partícula em relação à origem em $t = 0\,, t = 2s\; e\; t = 5s$? (b) Obtenha uma expressão para a velocidade $\vec{v}$ da partícula em função do tempo; (c) qual é a rapidez da partícula em $t = 0\,, t = 2s\; e\; t = 5s$?

A mesma questão anterior foi proposta para um segundo grupo, cujo esquema de resolução é apresentado no quadro 30. Observamos as mesmas considerações com respeito ao esquema de resolução do grupo anterior. Algumas colocações do grupo Quasares referentes ao sistema de ensino adotado são: *O foco da aula está bem, o problema é a preparação dos alunos. O principal é que depende de cada um o aprendizado. Na faculdade o aluno tem que se preocupar com o que o professor acha. No Ensino Médio é o contrário. O Cálculo é "meio abatedor", o aluno é apenas um no meio do "bando" todo. Um ponto positivo nas aulas de Física é a relação professor-aluno. A motivação vem da nota. Muitos alunos pensam em sair do curso. A prova de Cálculo teve questões mais objetivas que a prova de Física, não tão assustadoras. A culpa pelo mau desempenho não é da faculdade, vem do Ensino Médio. Não tive geometria, trigonometria nem logaritmos.*

Continuando os argumentos: *A visão de integrar o Cálculo com a Física é legal, mas muita resolução matemática acaba dificultando o entendimento da Física. Deveria haver ma cadeira de filosofia da Física para dar noção dos conceitos físicos sem a linguagem da Matemática. Poderia ser em forma de palestras, com figuras aliadas à conceitos.*

Com relação ao que o trabalho acrescentou para o grupo: *a prova teve um outro "ar" do que o trabalho em grupo. A obrigação de entrega do trabalho obriga a estudar. A prova é muito apavorante e o trabalho propicia pesquisa e discussões. Provas são extensas e avaliam resistência e não conhecimento.*

Quadro 30: Esquema de resolução do grupo Quasares.



(II) $r(t) = (5,0t^2)\hat{i} + (4,0t^2)\hat{j}$

a) $t = 0s = (0m)\hat{i} + (0m)\hat{j}$

$t = 2,0s = (20m)\hat{i} + (16m)\hat{j}$

$t = 5,0s = (125m)\hat{i} + (100m)\hat{j}$

b) $\dfrac{(5,0t^2)\hat{i} + (4,0t^2)\hat{j}}{t}$

c)

$t: 0s = 0\ m/s$

$t: 2,0s = \dfrac{(20m)\hat{i} + (16m)\hat{j}}{2,0} = (10\hat{i} + 8\hat{j})\ m/s$

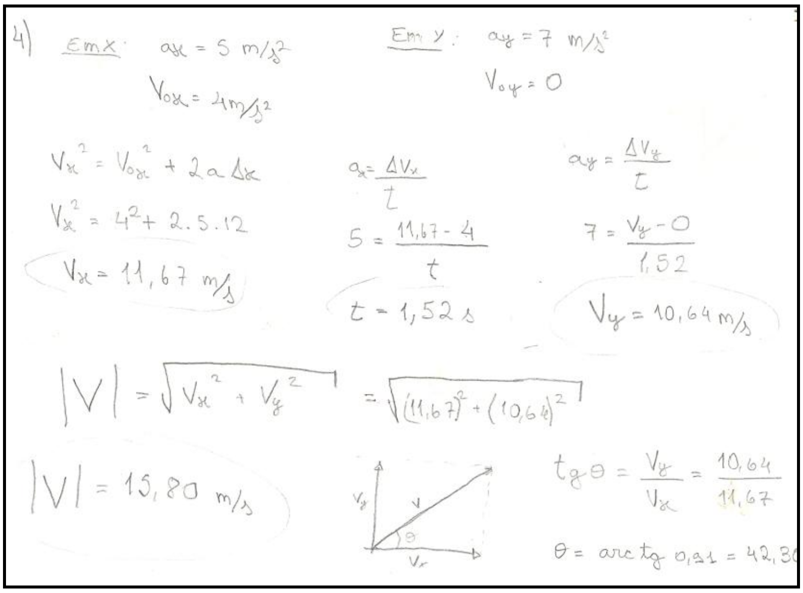
$t: 5,0s = \dfrac{(125m)\hat{i} + (100m)\hat{j}}{5,0} = (25\hat{i} + 20\hat{j})\ m/s$

<u>Situação-problema proposta para o grupo 1</u>: Um vento moderado acelera um seixo sobre um plano horizontal *xy* com uma aceleração constante $\vec{a}(t) = (5{,}00m/s^2)\hat{i} + (7{,}00m/s^2)\hat{j}$. No instante $t = 0$, a velocidade é $\vec{v}_0 = (4{,}00m/s)\hat{i}$. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo da velocidade do seixo após ter se deslocado $12{,}0m$ paralelamente ao eixo *x*?

O quadro 31 apresenta a forma de resolução do grupo 1, para a situação-problema problema proposta. O grupo interpreta o movimento bidimensional proposto como dois movimentos unidimensionais independentes, com acelerações constantes.

Isto demonstra a presença de conceitos subsunçores para o movimento unidimensional com aceleração constante. Neste processo há uma reconciliação integradora dos conceitos subsunçores pré-existentes para cada caso das componentes escalares de uma função vetorial. Um forte teorema em ação utilizado no esquema do grupo é a afirmação de que se a aceleração é constante num determinado intervalo de tempo, então a aceleração média num determinado intervalo de tempo é igual à aceleração instantânea em todos os pontos do intervalo. Não houve tentativa de solução do problema por meio do cálculo integral de funções vetoriais, pois se trata de um problema de valor inicial, comentado em sala de aula para o caso unidimensional. Não houve relação do Cálculo com a Física neste caso.

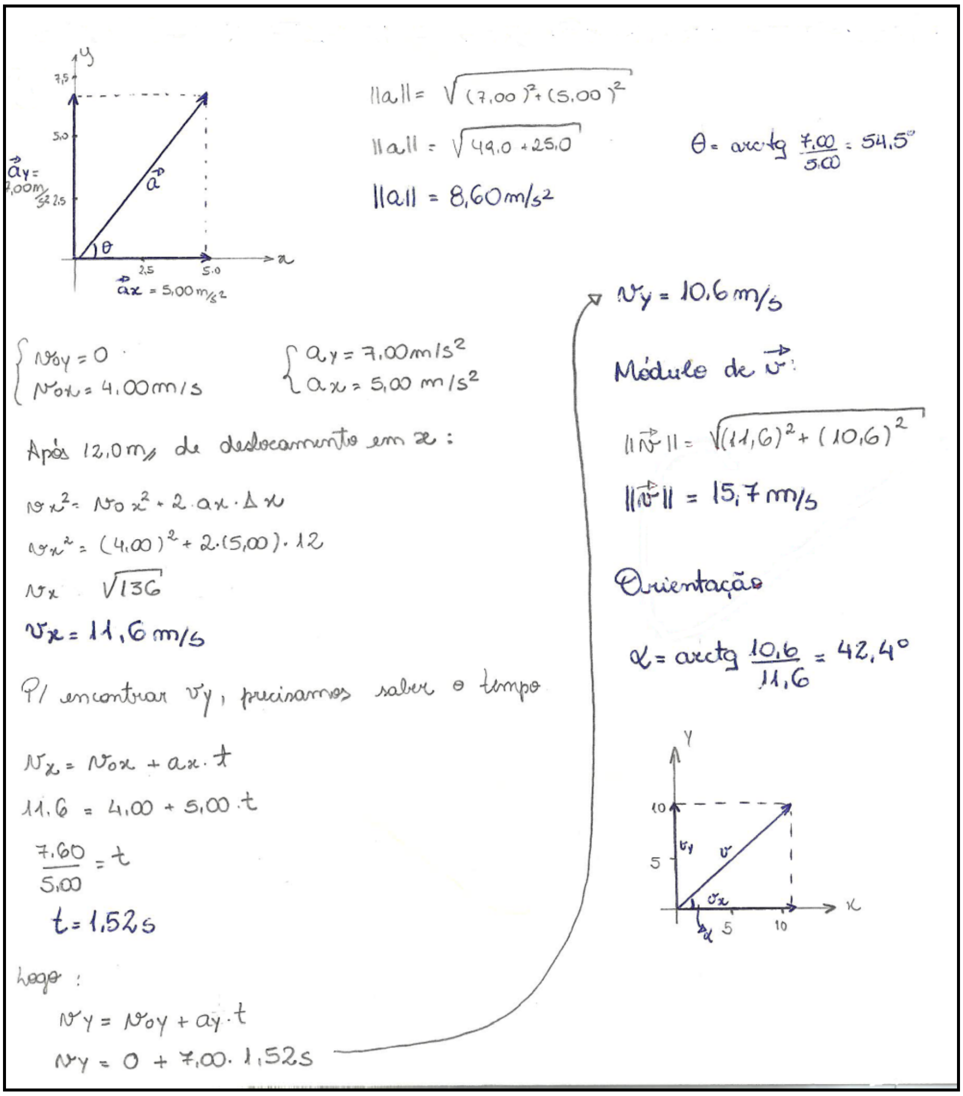
Quadro 31: Esquema de resolução do grupo 1.



Com relação à resolução do problema o grupo 1 argumenta: *foi o mais complicado de resolver da lista proposta.* O grupo acredita que as questões do trabalho devam auxiliar na intepretação da prova. Com relação à metodologia utilizada em aula dizem: *é explicativa o suficiente para o aprendizado. O problema é a interpretação da questão. Estamos aprendendo a construir o processo.*

A mesma situação-problema é proposta para três alunos do grupo AC2L (quadro 32). A aluna demonstra uma perfeita operacionalização matemática e esquematização de resolução do problema. As notações utilizadas são de considerável rigor matemático.

Quadro 32: Resolução do grupo AC2L.



$\|a\| = \sqrt{(7{,}00)^2 + (5{,}00)^2}$

$\|a\| = \sqrt{49{,}0 + 25{,}0}$

$\|a\| = 8{,}60\,m/s^2$

$\theta = \text{arctg}\,\frac{7{,}00}{5{,}00} = 54{,}5°$

$\begin{cases} v_{0y} = 0 \\ v_{0x} = 4{,}00\,m/s \end{cases}$ $\begin{cases} a_y = 7{,}00\,m/s^2 \\ a_x = 5{,}00\,m/s^2 \end{cases}$

Após 12,0 m de deslocamento em x:

$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2 \cdot a_x \cdot \Delta x$

$v_x^2 = (4{,}00)^2 + 2 \cdot (5{,}00) \cdot 12$

$v_x \quad \sqrt{136}$

$v_x = 11{,}6\,m/s$

P/ encontrar v_y, precisamos saber o tempo

$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$

$11{,}6 = 4{,}00 + 5{,}00 \cdot t$

$\frac{7{,}60}{5{,}00} = t$

$t = 1{,}52\,s$

Logo:

$v_y = v_{0y} + a_y \cdot t$

$v_y = 0 + 7{,}00 \cdot 1{,}52\,s$

$v_y = 10{,}6\,m/s$

Módulo de $\vec{v}$:

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(11{,}6)^2 + (10{,}6)^2}$

$\|\vec{v}\| = 15{,}7\,m/s$

Orientação

$\alpha = \text{arctg}\,\frac{10{,}6}{11{,}6} = 42{,}4°$

Ao entrevistar os membros do grupo identificamos as seguintes afirmações:

Aluna A: a metodologia usada em sala de aula é nota dez. A Matemática é muito importante. A dificuldade é de base matemática.

Aluno B: no meu caso, o mau desempenho na prova foi por falta de estudo. Tenho pouco tempo fora da aula.

Aluno C: comparando com outros semestres, saio da aula sabendo mais. Acho que a resolução de problemas ajuda muito.

Aluno D: mesmo que seja pouco conteúdo, que seja bem visto. Só me preocupo que os próximos professores do curso não sejam didáticos.

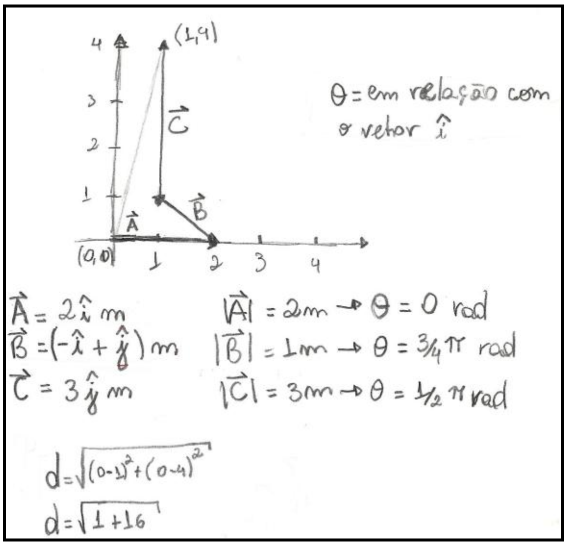
Aluno B: formar grupos de trabalho ajudou para fazer amizades, trocar opiniões e interagir com os colegas.

Situação-problema proposta para o grupo lamda: Uma excursionista começa a caminhar às 8 horas, num terreno plano. Às 9 horas está 2 km a leste da posição inicial; às 10 horas, está a 1 km a noroeste de onde estava as 9 horas; às 11 horas, está 3 km ao norte de onde se encontrava às 10 horas. (a) Faça um gráfico mostrando estes deslocamentos sucessivos, representando-os por vetores em sequência, a cauda de um começando na ponta do anterior; (b) Quais os módulos e as direções dos deslocamentos? (indique a direção dos vetores pelo ângulo que fazem com a direção leste); (c) A que distância do ponto de partida a excursionista está às 11 horas?

Esta situação foi proposta a fim de verificar a forma como os estudantes operacionalizam matematicamente questões referentes ao módulo e orientação de vetores deslocamento. Uma representação do grupo lambda segue no quadro 33.

O aluno apresenta um conhecimento prévio bem estruturado com relação à definição de módulo e com relação à identificação do ângulo de orientação dos três vetores propostos. Houve um engano com relação ao cálculo das componentes do segundo vetor. Para calcular a distância o aluno aplica a fórmula da distância entre dois pontos, ficando evidente que o aluno conseguiu reconciliar e integrar o conceito de distância entre dois pontos a partir do novo conceito apresentado em aula, referente ao módulo do deslocamento entre o ponto inicial e o ponto final. Fica visível que houve uma aprendizagem significativa dos conceitos que embasam a resolução da situação-problema proposta.

Quadro 33: Esquema de resolução do grupo lambda.



Ao entrevistar os componentes do grupo, algumas argumentações apresentadas por eles foram: *para resolver a situação proposta tive dificuldade no cálculo do módulo como distância entre dois pontos.*

Este argumento partiu de um dos membros do grupo deu apresentou o seguinte teorema em ação para o cálculo da distância entre os pontos inicial e final.

$$\Delta x_{total} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 2 - 1 + 3 = 4km$$

O sentido do conceito de distância percorrida em duas dimensões não ficou claro para o estudante. Não houve uma aprendizagem significativa do conceito.

Com relação à metodologia adotada em aula um dos alunos comentou: *as aulas são explicadas para quem nunca viu os conceitos, com bastante resolução de exercícios. Estou acostumado com uma metodologia diferente, com mais discussões e perguntas para os alunos. Não aprendi muito com suas aulas, pois já tinha cursado a disciplina de Física I. Seu método é bastante didático, o que é importante, principalmente porque a Física tem muitos detalhes. Suas aulas utilizam ao máximo a Matemática, mas os conceitos matemáticos não são o mais difícil da disciplina. Se o conceito físico é aprendido, depois podemos direcionar para a prática matemática. Se as aulas são sempre do mesmo jeito, sempre enfatizando a Matemática, tornam-se mecânicas.*

Outro membro do grupo complementou: *Física I deveria ser no segundo semestre (inclusive Física I e II pode ser no mesmo semestre). O problema maior é ter que lidar com conceitos do Cálculo antes de serem vistos no Cálculo. Por isso acho que a Física deve começar com a Dinâmica. A primeira prova proposta foi muito extensiva, com um nível de dificuldade alto, mesmo tendo feito todos os exercícios da lista. Particularmente, tenho uma base muito fraca em Física. Tive péssimos professores de Física no Ensino Médio. Deveríamos ter um curso de Pré-Física assim como é feito no Pré-Cálculo. Percebi que houve uma evolução ao longo das aulas (não há uma preocupação apenas com a aprovação, mas também com o aprendizado). Penso que seria bem mais fácil com o Cálculo.*

Situação-problema proposta ao grupo 42: Uma bola é lançada a partir do solo. Quando ela atinge uma altura de $9{,}1m$ sua velocidade é $\vec{v} = [7{,}6\hat{i} + 6{,}1\hat{j}]m/s$, com $\hat{i}$ horizontal e $\hat{j}$ para cima. (a) Qual é a altura máxima atingida pela bola? (b) Qual é a distância horizontal coberta pela bola?

A situação foi proposta com o objetivo de verificar de que forma os estudantes operacionalizam as equações matemáticas no movimento bidimensional.

Um dos membros do grupo, licenciado em Matemática e cursando o Bacharelado em Física, apresenta a seguinte resolução para o item (a), conforme o quadro 34. Os demais membros esquematizaram a resolução da mesma forma. Observa-se que eles lidam com a questão desmembrando o movimento bidimensional em dois movimentos unidimensionais, e aplicando as equações para o movimento retilíneo com aceleração constante.

No item (b) os alunos montam o seguinte esquema para o cálculo da distância coberta pela bola, primeiro, primeiramente aplicam a equação de Torricelli para obter a velocidade inicial em relação ao eixo *y*. Após, aplicam a equação da posição para um objeto em queda livre.

Quadro 34: A resolução do grupo 42.

② Em $y_0 = 9,1\,m$, temos $v = (7,6\hat{i} + 6,1\hat{j})\,m/s$

a) altura máxima:

$v_{0y} = 6,1\,m/s$ $\quad v_y = 0\,m/s \quad g = 9,8\,m/s^2$

$y_0 = 9,1\,m/s \quad y = h \quad \Delta y = y - y_0$

$v_y^2 = v_{0y} - 2.g\,\Delta y$

$0^2 = (6,1)^2 - 2.\ 9,8\,(h - 9,1)$

$0 = 37,2 - 19,6h + 178,4$

$0 = 215,6 - 19,6h$

$19,6h = 215.6$

$h = \frac{215,6}{19.6}$

$h = 11\,m$

A altura máxima atingida pela bola é 11m

Quadro 35: O item (b) do grupo 42.

b) Para calcular a distância coberta pela bola devemos encontrar o tempo que permaceu no ar, mas para isso temos que encontrar a sua velocidade inicial em relação ao eixo Y.

$v_{0y} = ? \quad v_y = 0 \quad g = 9,8\,m/s^2$

$y_0 = 0\,m \quad y = 11\,m \quad \Delta y = y - y_0 = 11 - 0 = 11\,m$

$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2.g.\Delta y$

$0^2 = v_{0y}^2 - 2.\ 9,8.11$

$0 = v_{0y}^2 - 215,6$

$v_{0y}^2 = 215,6$

$\boxed{v_{0y} = 14,7\,m/s}$

Agora encontrar o tempo que a bola ficou no ar.

$y = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = 14,7\,m/s$, $t = ?$, $g = 9,8\,m/s$

$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}g.t^2$

$0 = 0 + 14,7t - 4,9t^2$

$0 = 14,7t - 4,9t^2$

Não há, por parte do estudante, nenhuma menção às relações entre as equações cinemáticas apresentadas com os conceitos de derivada ou integral. Há um automatismo na forma de resolução apresentada pelo grupo, apesar de todos os passos propostos terem sido discutidos e externados.

Em entrevista realizada com o grupo, eles argumentaram:

Aluno 1: das quatro questões propostas no trabalho esta foi a que mais tive que pensar para resolver, a melhor questão. Com relação à metodologia apresentada nas aulas ele diz: *Gosto do estilo da aula (mais matemático). A bagagem que trago do Curso de Matemática é básica.*

Aluna 2: precisamos primeiro aprender os conceitos do Cálculo no Cálculo, para não confundir nas aulas de Física.

Aluno 3: a introdução de integral é suficiente. Na Física não precisa calcular a integral.

Aluna 2: o conceito de derivada visto na Física não contribui para o aprendizado do mesmo conceito na disciplina de Cálculo. Acho prematura a introdução de derivada na Física.

Aluno 3: a noção de derivada pode ser vista num Curso de Pré-Cálculo ou no Ensino Médio.

Aluna 4: assustei-me com a prova. Achei muito extensa. Sabia a matéria, mas fiquei nervosa. Deveria ser formulada com uma questão a menos, independentemente do tempo. As provas do Cálculo são mais objetivas.

Aluna 2: as aulas melhoraram bastante depois da prova. A matéria inicial (Cinemática) é relativamente fácil, já tivemos no Ensino Médio. Aprendi Cinemática no cursinho pré-vestibular. Às vezes não presto atenção na sua aula não por desrespeito, mas gosto de estudar por conta. Sempre aprendi sozinha a ser autodidata.

Aluno 3: a aula é bem Matemática. Gosto da aula mais teórica, falando dos conceitos físicos que posso usar.

Análise das relações do Cálculo com a Física a partir da resolução de uma situação-problema proposta na primeira prova de Física I

Nesta seção apresentamos as formas de operacionalização dos conceitos necessários para a resolução de uma situação-problema da Cinemática, proposta aos estudantes, a partir de uma metodologia de ensino que procurou integrar conceitos matemáticos do Cálculo nas aulas de Física I.

Situação-problema proposta*:* Duas partículas se movem ao longo do eixo *x*, cada uma tendo partido com velocidade inicial de 10 m/s em $t_0 = 0\,\text{s}$. Na figura 60, o gráfico para a partícula A é da posição *versus* tempo e o gráfico para a partícula B, da velocidade *versus* tempo. (a) **(0.5)** Obtenha a velocidade de cada partícula no instante $t = 7\,\text{s}$; (b) **(0.5)** Obtenha a aceleração de cada partícula no instante $t = 1s$; (c) **(0.5)** Obtenha a distância total percorrida por cada partícula no intervalo de $t = 0s$ até $t = 8s$; (d) **(0.5)** Obtenha o deslocamento de cada partícula no intervalo de $t = 2s$ até $t = 8s$. (Justifique as respostas).

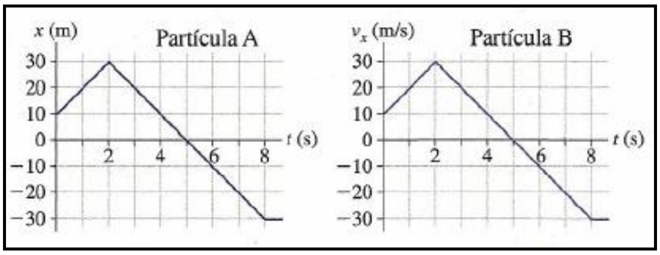


Figura 60: Fonte: Knight (2009).

Como em todo tipo de atividade proposta ao longo da pesquisa, nossa intenção foi verificar quais são os invariantes operacionais externados pelos estudantes na fase operatória da resolução do problema, além de verificar se existe algum tipo de relação entre os conceitos do Cálculo e os conceitos da Física neste processo.

Trinta estudantes realizaram a prova. No item (a) identificamos sete formas de resoluções distintas para o cálculo da velocidade da partícula A no instante solicitado, as quais foram categorizadas da seguinte forma:

Categoria (1): Cálculo da velocidade através do cálculo do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto solicitado: **cinco alunos** resolveram desta forma sendo que dois deles apresentaram um erro de sinal no valor obtido.

Categoria (2): Cálculo da velocidade através da razão entre a distância percorrida pelo tempo específico solicitado: **oito alunos** resolveram desta forma. Dois obtiveram o valor correto em módulo, por terem entendido que o que estava sendo solicitado era a rapidez. Cinco consideraram o quociente entre o valor da posição no instante solicitado, dividido pelo instante.

Categoria (3): Cálculo da velocidade pela aplicação da fórmula da velocidade média: **cinco estudantes** resolveram desta forma.

Categoria (4): **Seis estudantes** apresentaram um resultado final sem nenhuma justificativa em termos de *cálculo.*

Categoria (5): **Dois estudantes** consideraram a mesma velocidade da partícula B por tratarem-se dos "mesmos gráficos".

Categoria (6): **Seis alunos** não conseguiram externalizar nenhum esquema de resolução para o item.

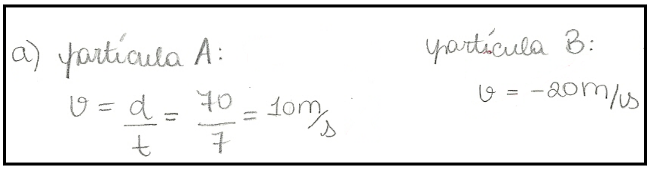
Categoria (7): **Um** aluno escreveu a equação matemática da reta na sua forma ponto-coeficiente angular para obter corretamente o valor

Para o cálculo do deslocamento e da distância percorrida pelo objeto B no intervalo solicitado apenas **dois estudantes** utilizaram a interpretação geométrica da integral definida como área com sinal da função velocidade. Um deles é um estudante Licenciado em Matemática pela mesma Instituição, cursando a faculdade de Licenciatura em Física.

Podemos concluir que não houve aprendizagem significativa da interpretação geométrica de integral definida, tampouco é significativo o número de estudante que relacionou o coeficiente angular da reta com a definição de velocidade média da partícula A.

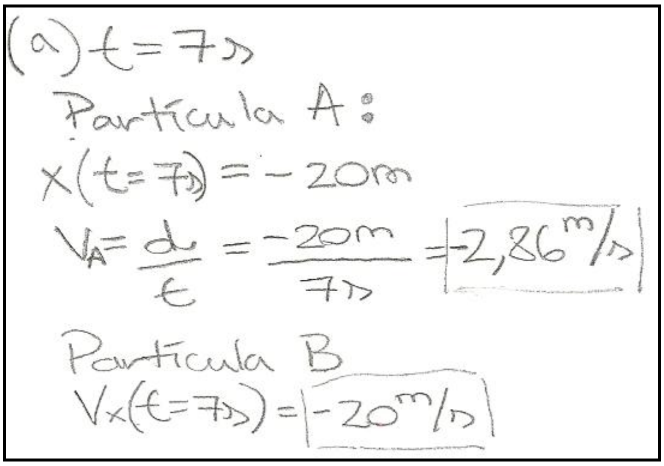
Algumas representações transpostas pelos estudantes são apresentadas. Os estudantes não tiveram dificuldades em identificar a velocidade da partícula B no instante solicitado. Para a velocidade da partícula A, alguns utilizaram o teorema em ação descrito na resolução do quadro 36, obtendo a rapidez da partícula, e não a velocidade (acompanhada do sinal negativo).

Quadro 36: Esquema de resolução da aluna A.



Outra forma de resolução apresentada por alguns estudantes está representada no quadro 37. O teorema em ação apresentado pelos alunos é o mesmo indicado na resolução do quadro 36. No entanto, alguns alunos relacionam a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo de $t = 0$ até $t = 7s$ sendo equivalente ao valor da posição no instante $t = 7s$. Isto demonstra que não diferenciam os conceitos de distância percorrida, deslocamento e posição da partícula num determinado instante. Não houve uma aprendizagem significativa destes conceitos.

Quadro 37: Esquema de resolução da aluna C.


(a) $t = 7s$

Partícula A:

$x(t=7s) = -20m$

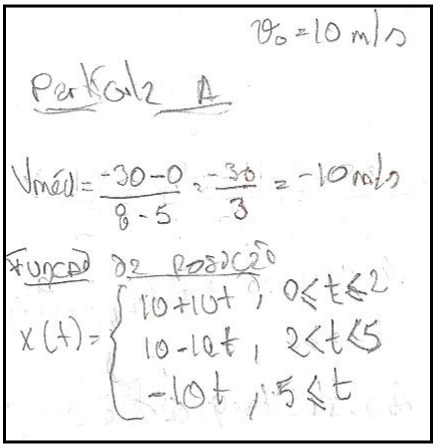
$V_A = \frac{d}{t} = \frac{-20m}{7s} = \boxed{-2,86 m/s}$

Partícula B

$V_x(t=7s) = \boxed{-20 m/s}$

Uma evidência de aprendizagem significativa do conceito matemático de *funções definidas por partes* é apresentada no esquema de resolução do aluno D (quadro 38). Para obter a velocidade da partícula A no instante $t = 7s$, o aluno aplica a fórmula da *velocidade média* no intervalo de tempo $t = 5s$ até $t = 8s$. A maioria dos estudantes que acertou esta questão apresentou esta forma de resolução. No entanto, o diferencial deste aluno é a apresentação da função posição representada graficamente, na sua forma analítica, definida por partes. Trata-se de um importante conceito desenvolvido na disciplina de Cálculo que foi comentado nas intervenções propostas nas aulas de Física.

Quadro 38: Outra categoria de resolução.


$v_0 = 10 m/s$

Partícula A

$V_{méd} = \frac{-30-0}{8-5} = \frac{-30}{3} = -10 m/s$

Função da posição

$$x(t) = \begin{cases} 10+10t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 10-10t, & 2 < t \leq 5 \\ -10t, & 5 \leq t \end{cases}$$

Nova evidência de aprendizagem significativa dos conceitos do Cálculo através da Mecânica é mostrada no quadro 39. O aluno explicita, na forma de proposição, uma forma alternativa para o cálculo da velocidade da partícula A, através do cálculo do coeficiente angular da reta tangente à curva posição no ponto solicitado. Ele indica a equação da reta tangente na sua forma ponto-coeficiente angular.

O objetivo dos itens (c) e (d) foi verificar se os estudantes utilizam a interpretação geométrica da integral definida como área líquida com sinal ou como área total para os cálculos da distância total percorrida e do deslocamento da partícula B. Apenas quatro estudantes tentaram, de forma efetiva, resolver a situação proposta.

Quadro 39: A equação da reta tangente no cálculo da velocidade.

a) Para a partícula "A" podemos determinar sua velocidade pela inclinação da reta tg. Logo

A

$y - y_0 = m_{tg}(x - x_0)$

$-20 - 0 = m_{tg}(7 - 5)$

$-20 = m_{tg}\,2$

$m_{tg} = -10$ logo... $v_a = -10\,m/s$

para part b observando o gráfico temos que:

$v_B = -20\,m/s$ em $t = 7\,s$

Nos quadros 40 e 41 estes teoremas em ação são externados perfeitamente para o cálculo da distância percorrida pela partícula B e do deslocamento da partícula B, indicando que houve aprendizagem significativa da interpretação geométrica do conceito de integral definida.

Quadro 40: A forma de resolução da aluna A.

c) $d_A = d_1 + d_2$

$d_A = 20 + 60 = \boxed{80m}$

$d_B = (A_1 + A_2) + A_3$ } Soma das Áreas

$d_B = (40 + 45) + 45$

$\boxed{d_B = 125m}$

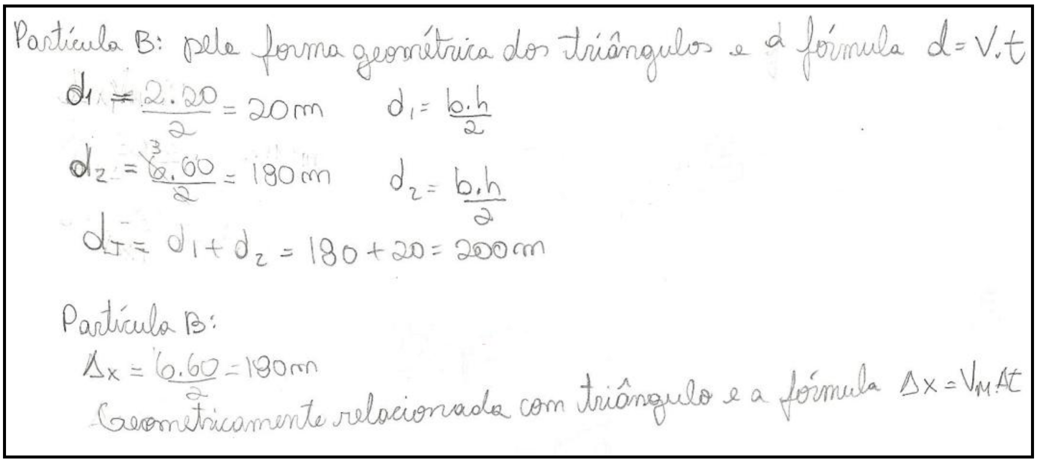
$A_1 = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(30+10)\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 40\,m$

$A_2 = \frac{b \times h}{2} = \frac{3 \times 30}{2} = \frac{90}{2} = 45\,m$

$A_3 = \frac{b \times h}{2} = \frac{3 \times 30}{2} = 45\,m$

No quadro 41 apresentamos a forma de resolução do aluno C para a distância percorrida e para o deslocamento da partícula B, respectivamente.

Quadro 41: Esquema de resolução do aluno C.



Partícula B: pela forma geométrica dos triângulos e a fórmula $d = V.t$

$d_1 = \frac{2.20}{2} = 20m$ $\quad d_1 = \frac{b.h}{2}$

$d_2 = \frac{6.60}{2} = 180m$ $\quad d_2 = \frac{b.h}{2}$

$d_T = d_1 + d_2 = 180 + 20 = 200m$

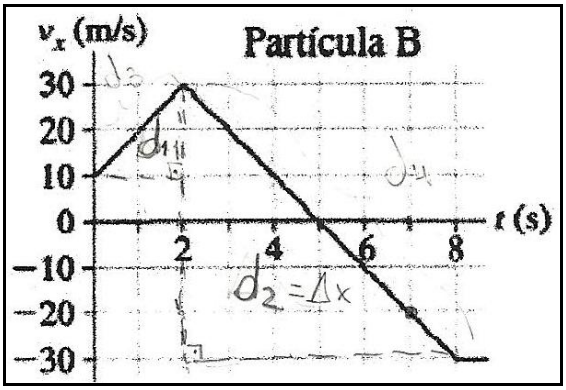
Partícula B:

$\Delta x = \frac{6.60}{2} = 180m$

Geometricamente relacionada com triângulo e a fórmula $\Delta x = V_M \Delta t$

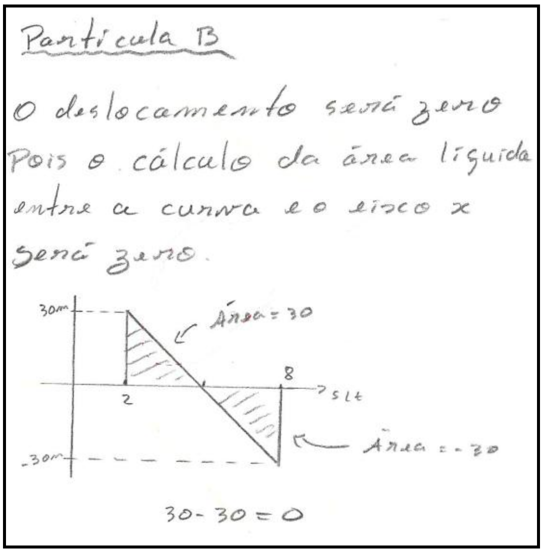
No quadro 42 observamos o esquema geométrico interpretado pelo aluno C para o cálculo das áreas, o que justifica o erro cometido na questão, apresentado no quadro 41. Não houve uma aprendizagem significativa da forma como delimitar, no gráfico da velocidade contra o tempo, as regiões, para o cálculo das áreas.

Quadro 42: Representação simbólica esquematizada pelo aluno C para o cálculo da área.

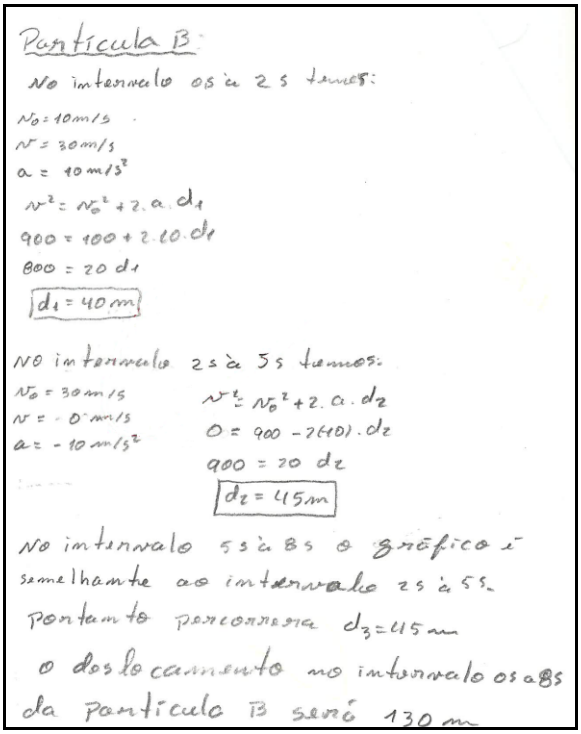


Nos quadros 43 e 44, mostramos outra evidência de aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos e físicos, pelo aluno E. Trata-se de um aluno egresso da Matemática, o que pode justificar a correta forma operacional matemática para o cálculo do deslocamento da partícula B (quadro 43). No entanto, no seu caso, o processo da aprendizagem significativa está mais visível quando externaliza, de forma coerente, as relações da Cinemática para resolver o cálculo da distância (quadro 44), apesar de cometer o engano de denominar novamente de deslocamento.

Quadro 43: A resolução do aluno E.



Quadro 44: Continuação da resolução do aluno E.


Partícula B:

No intervalo 0s à 2s temos:

$v_0 = 10 m/s$
$v = 30 m/s$
$a = 10 m/s^2$
$v^2 = v_0^2 + 2.a.d_1$
$900 = 100 + 2.10.d_1$
$800 = 20 d_1$
$\boxed{d_1 = 40m}$

No intervalo 2s à 5s temos:

$v_0 = 30 m/s$
$v = 0 m/s$
$a = -10 m/s^2$
$v^2 = v_0^2 + 2.a.d_2$
$0 = 900 - 2(10).d_2$
$900 = 20 d_2$
$\boxed{d_2 = 45m}$

No intervalo 5s à 8s o gráfico é semelhante ao intervalo 2s à 5s.
Portanto percorrerá $d_3 = 45m$
o deslocamento no intervalo 0s a 8s da partícula B será 130m

7.4.3. A turma de 2012/2

Uma das aplicações mais básicas dos conceitos do Cálculo no contexto da Física é a interpretação geométrica da integral definida como área com sinal da região limitada pelo gráfico da função e pelo eixo das abscissas num determinado intervalo. Nesta fase da investigação procuramos propor variadas situações que pudessem ser interpretadas desta forma.

Uma das mais básicas situações em que este conceito pode ser aplicado ocorre quando temos que calcular o trabalho realizado por uma força variável para deslocar um objeto de uma posição $x = a$ até uma posição $x = b$, considerando que o deslocamento seja unidimensional. Podemos resolver este tipo de problema através do cálculo da integral definida conhecendo a lei da função força, e aplicando o teorema fundamental do Cálculo. Este seria um enfoque mais voltado para o contexto da disciplina de Cálculo. No entanto, no contexto da Física, em geral, são fornecidos os gráficos das funções força dependendo da posição, onde a interpretação geométrica pode ser mais prática e útil para o cálculo da integral. Discutimos aqui a forma de resolução apresentada pelos estudantes quando uma situação deste tipo foi proposta na segunda prova da disciplina de Física.

***Situação-problema proposta na prova 2*:** Uma partícula de *500 g* que se move ao longo do eixo *x* experimenta uma única força cujo gráfico está representado na figura abaixo. A partícula passa de $v_x=0$ *m/s* em *x=0 m* para $v_x=6$ *m/s* em *x=2 m.* Determine o valor máximo da força ($F_{máx.}$) (Knight, 2009, p.330).

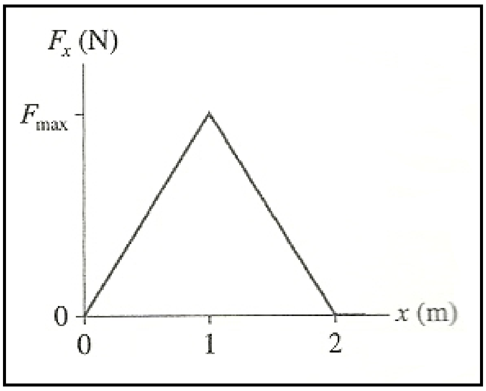
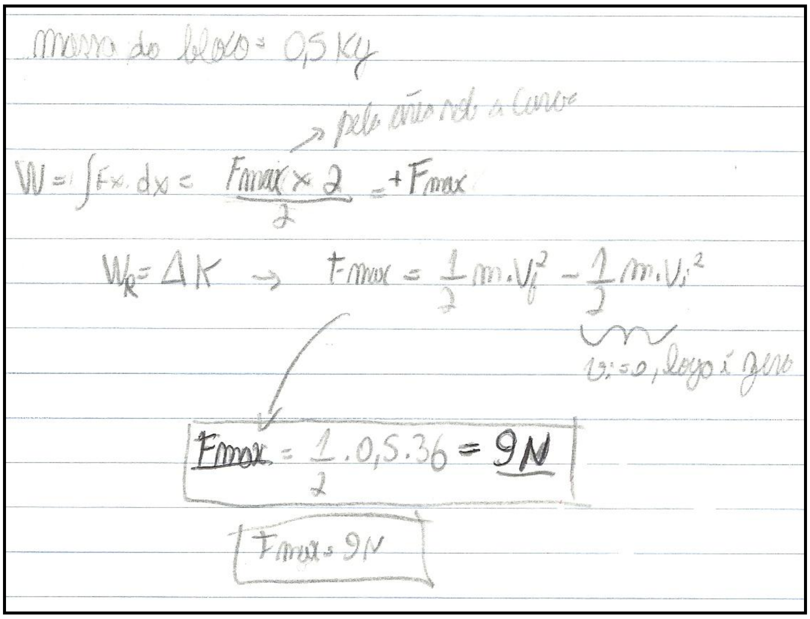


Figura 60: O gráfico da força contra a posição.

O conceito chave para a solução desta questão provém do teorema que envolve a relação entre o *trabalho* e a *variação da energia cinética*. A articulação entre o Cálculo e a Física fica evidente nesta situação proposta. Do ponto de vista do Cálculo os estudantes devem resolver a integral definida (de forma analítica ou geométrica) para obterem o trabalho realizado pela força resultante sobre a partícula. Do ponto de vista da Física os estudantes devem obter a variação da energia cinética no intervalo do deslocamento considerado.

Dezoito alunos resolveram individualmente a prova sendo que apenas dois alunos acertaram a resolução da questão proposta[133]. Segue anexo no quadro 45 seu esquema de resolução, mostrando que houve uma aprendizagem significativa do conceito de integral definida como área com sinal, além de uma aprendizagem significativa do teorema do trabalho e energia cinética. Observa-se um erro de notação no símbolo da integral, onde faltam os limites de integração considerados.

Quadro 45: O esquema de resolução do aluno.



Massa do bloco = 0,5 Kg

pela área sob a curva

$W = \int F_x . dx = \frac{F_{max} \times 2}{2} = +F_{max}$

$W_R = \Delta K \rightarrow F_{max} = \frac{1}{2} m.V_f^2 - \frac{1}{2} m.V_i^2$

$v_i = 0$, logo é zero

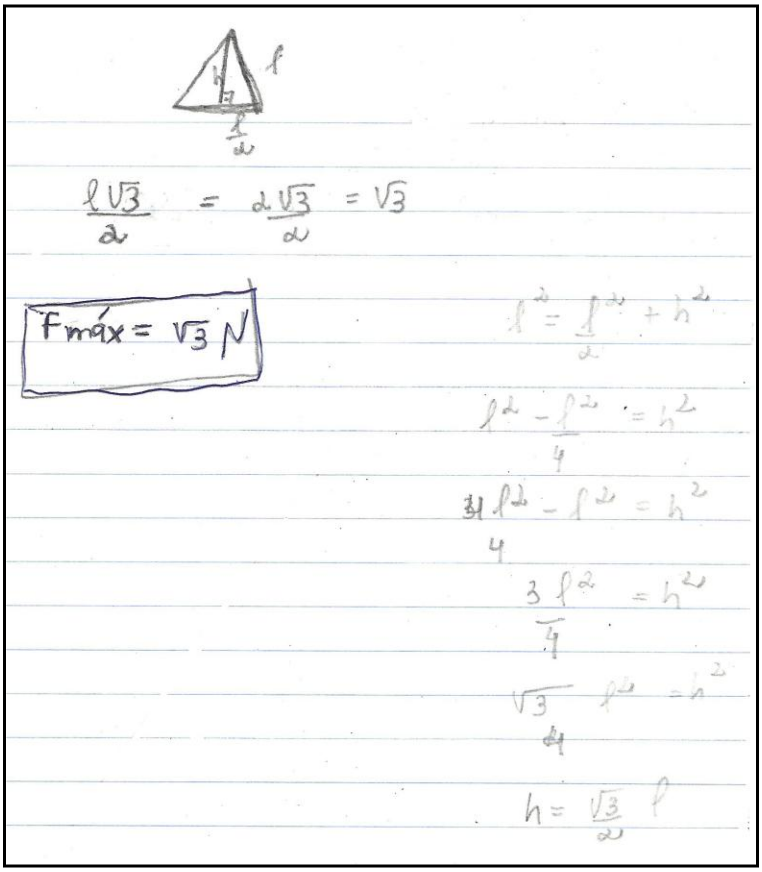
$\boxed{F_{max} = \frac{1}{2} . 0,5 . 36 = 9N}$

$\boxed{F_{max} = 9N}$

No esquema do quadro 46 vemos uma segunda forma de resolução apresentada. Neste caso, a aluna considera que a região triangular delimitada pelo gráfico da força e o eixo das abscissas é um triângulo equilátero (com os três lados iguais). Considerando que os lados deste triângulo medem l unidades, ela aplica o *teorema de Pitágoras* para calcular a altura do triângulo, com a qual obtém a área. O teorema em ação utilizado pela estudante considera que a força máxima aplicada sobre a partícula para deslocá-la é igual ao valor da área de um triângulo que supôs ser equilátero. Sua forma de esquematizar a resolução do problema demonstra que não houve aprendizagem significativa do conceito de *trabalho de uma força resultante variável*, e de sua relação com a variação da energia cinética. Apesar de tentar buscar uma relação com conceitos matemáticos, sua suposição inicial não é correta. No entanto, a aluna demonstra conhecimentos prévios trigonométricos bem elaborados.

[133] Um dos alunos é egresso do curso de Farmácia, tendo feito a disciplina de Cálculo naquele contexto. O outro estava estreando na disciplina de Cálculo e de Física.

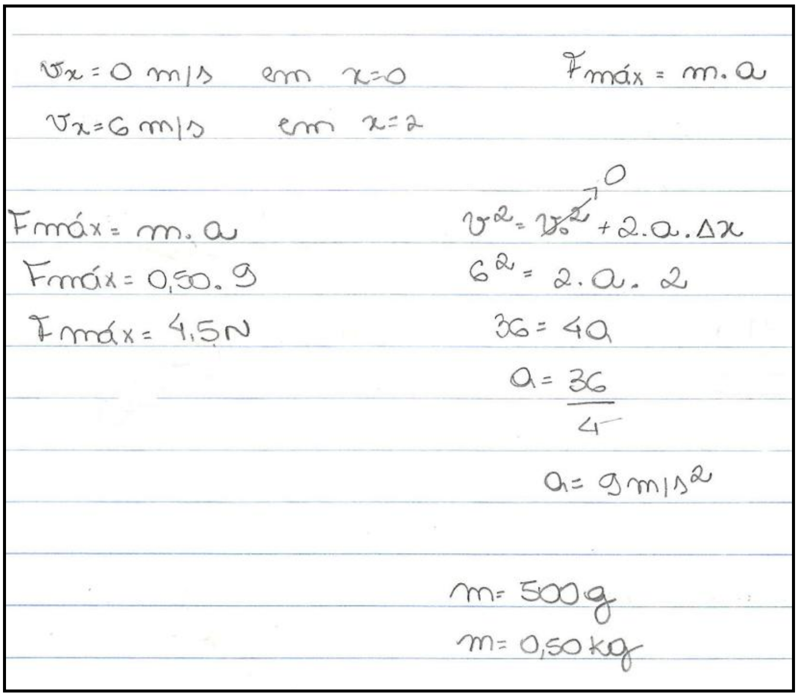
Quadro 46: Novo esquema de resolução.



Outra forma de resolução apresentada por alguns alunos não apresenta algum tipo de relação entre o Cálculo e a Física, sendo que procuram resolver a questão apenas com conceitos físicos. Contudo, consideram a aceleração do sistema constante no intervalo da posição apresentado. Este tipo de esquematização é representado no quadro 47.

O teorema em ação considerado neste caso relaciona a força máxima solicitada com a aceleração (supostamente constante) através da segunda lei de Newton. Evidentemente, como a força é variável, também é variável a aceleração. O conceito de aceleração constante (para o caso do movimento retilíneo uniformemente variado) é um conceito subsunçor que não pôde ser reestruturado e reelaborado para o caso da força variável. Também não houve nenhuma espécie de articulação com a interpretação geométrica de integral, o que não evidencia uma aprendizagem significativa para a situação proposta.

Quadro 47: Esquema de resolução de alguns estudantes.



$v_x = 0\ m/s$ em $x=0$

$v_x = 6\ m/s$ em $x=2$

$F_{máx} = m.a$

$F_{máx} = m.a$

$F_{máx} = 0{,}50.9$

$F_{máx} = 4{,}5N$

$v^2 = \cancel{v_0^2}^{\,0} + 2.a.\Delta x$

$6^2 = 2.a.2$

$36 = 4a$

$a = \frac{36}{4}$

$a = 9\ m/s^2$

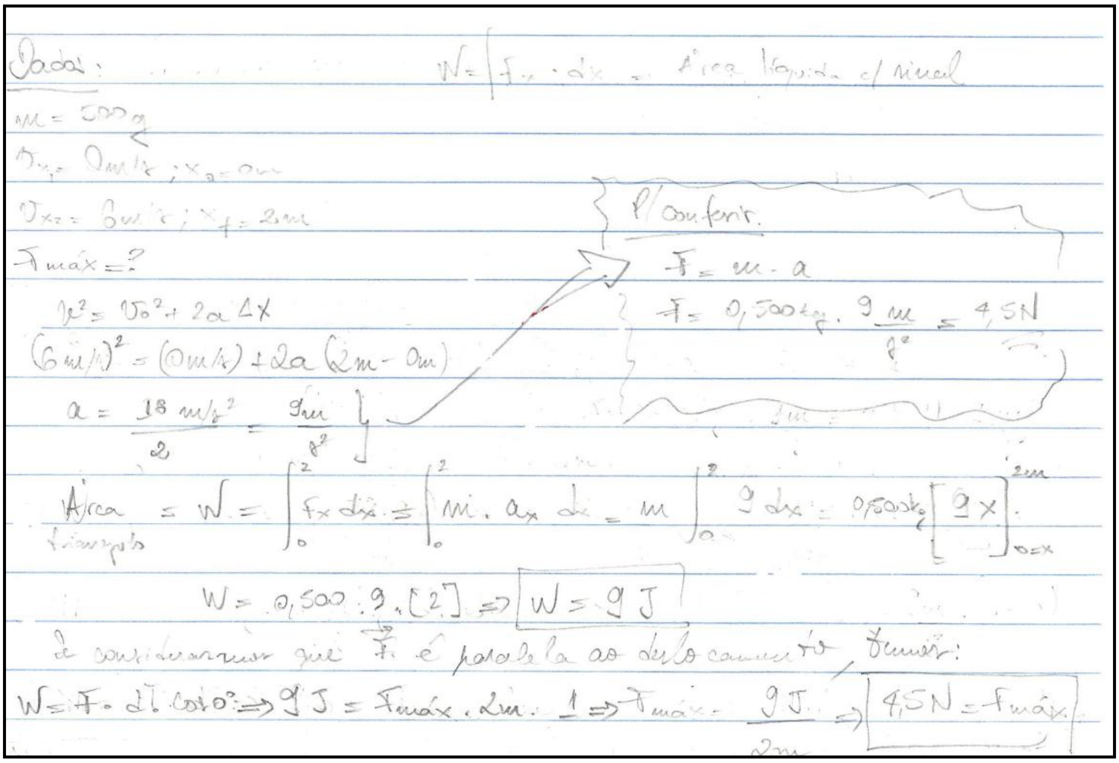
$m = 500g$

$m = 0{,}50\ kg$

No quadro 48 há uma tentativa de cálculo integral. O estudante externaliza a interpretação geométrica da integral como uma área com sinal. Os limites de integração não são considerados inicialmente. A tentativa de substituir a força pelo produto da massa pela aceleração não funciona, pois o aluno interpreta a aceleração como uma constante. Após a substituição do valor constante para a aceleração o aluno é coerente com o cálculo da integral resultante. Encontrando o valor da integral, o estudante o iguala ao trabalho resultante sobre a partícula.

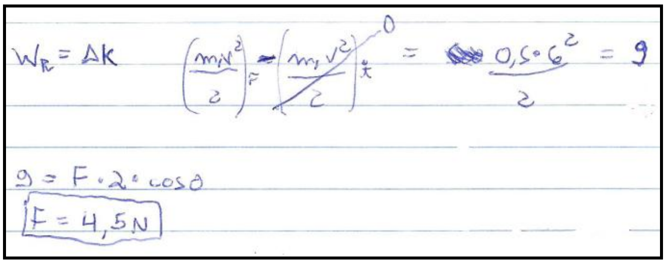
Após, o estudante considera o *trabalho* obtido como o produto escalar entre os vetores força máxima e deslocamento, contrariando o conceito de trabalho realizado por uma força variável. Seu esquema demonstra conceitos subsunçores bem elaborados no que se refere ao cálculo matemático de uma integral definida e na sua interpretação geométrica. Contudo não houve uma aprendizagem significativa do conceito de trabalho e de sua relação com a variação da energia cinética.

Quadro 48: A tentativa do cálculo integral.


Dados:
$m = 500\,g$
$v_{x_0} = 0\,m/s$; $x_0 = 0\,m$
$v_{x_f} = 6\,m/s$; $x_f = 2\,m$
$F_{máx} = ?$
$W = \int F_x \cdot dx$ = Área trapézio c/ nível
P/ conferir:
$F = m \cdot a$
$F = 0{,}500\,kg \cdot 9\,\frac{m}{s^2} = 4{,}5\,N$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$
$(6\,m/s)^2 = (0\,m/s) + 2a(2m - 0m)$
$a = \frac{18\,m/s^2}{2} = \frac{9\,m}{s^2}$
$$\text{Área triângulo} = W = \int_0^2 F_x\,dx = \int_0^2 m \cdot a_x\,dx = m\int_0^2 9\,dx = 0{,}500\,kg\,\left[9x\right]_{0=x}^{2m}$$
$$W = 0{,}500 \cdot 9 \cdot [2] \Rightarrow \boxed{W = 9\,J}$$
Se considerarmos que $\vec{F}$ é paralela ao deslocamento temos:
$$W = F \cdot d \cdot \cos 0° \Rightarrow 9\,J = F_{máx} \cdot 2m \cdot 1 \Rightarrow F_{máx} = \frac{9\,J}{2m} \Rightarrow \boxed{4{,}5\,N = F_{máx}}$$

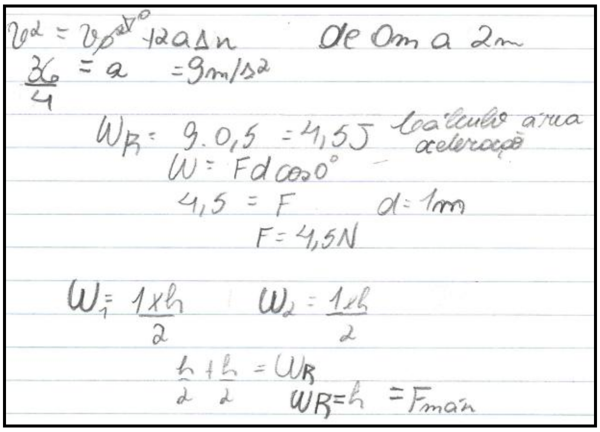
No quadro 49 temos novamente uma representação conceitual física equivocada sobre *trabalho realizado por uma força variável.* As equações matemáticas são perfeitamente resolvidas. No entanto não houve aprendizagem significativa do referido conceito, apesar da apresentação correta da relação deste conceito com o conceito de *variação da energia cinética* da partícula ao longo do deslocamento considerado. Não houve uma aprendizagem significativa do conceito de trabalho já que o aluno não pôde diferenciar entre os dois casos: quando a força resultante é constante e quando a força resultante é variável. Também não há nenhuma referência entre o cálculo de áreas e sua articulação na situação-problema proposta.

Quadro 49: Trabalho realizado por uma força variável.


$$W_R = \Delta K \quad \left(\frac{mv^2}{2}\right)_f - \cancel{\left(\frac{mv^2}{2}\right)_i}^{\,0} = \frac{0{,}5 \cdot 6^2}{2} = 9$$
$$9 = F \cdot 2 \cdot \cos 0$$
$$\boxed{F = 4{,}5\,N}$$

O esquema de resolução apresentado no quadro 50 também supõe que a aceleração do problema é constante. Um teorema em ação considerado pelo estudante, neste caso, é que *o* *trabalho resultante é igual ao produto da massa pela aceleração* (supostamente constante). Como em outros casos apresentados, o trabalho é calculado para o caso de uma força constante. O teorema em ação que se refere ao trabalho resultante sendo a área com sinal sob o gráfico da função força foi aplicado para a soma de duas regiões triangulares iguais.

Quadro 50: A interpretação da integral como área.


$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta n$ de 0m a 2m

$\frac{36}{4} = a = 9m/s^2$

$W_R = 9 \cdot 0,5 = 4,5J$ cálculo área aceleração

$W = Fd\cos 0°$

$4,5 = F$ $d = 1m$

$F = 4,5N$

$W_1 = \frac{1 \times h}{2}$ $W_2 = \frac{1 \times h}{2}$

$\frac{h}{2} + \frac{h}{2} = W_R$

$W_R = h = F_{max}$

A fórmula da área do triângulo é conhecida do estudante, o qual conclui que o trabalho resultante é igual à altura do triângulo, ou o valor da força máxima. Supomos que o aluno está considerando que a força máxima é o valor obtido nos cálculos das primeiras linhas. Há duas considerações equivocadas do estudante, o fato de que a aceleração é constante, quando não é, e o fato do trabalho resultante ser calculado como o produto escalar de dois vetores. Consideramos que não houve uma aprendizagem significativa dos conceitos envolvidos no problema.

Para a mesma turma, na terceira prova, propomos outro tipo de situação-problema que poderia ser resolvida usando resultados do Cálculo, como segue.

Situação-problema proposta na prova 3: O objeto da figura 61, de momento de inércia *I*, raio *R* e massa *M* está montado em um eixo sem atrito. Uma corda leve é enrolada em torno da borda do objeto, com um corpo de massa *m* suspenso em sua outra extremidade. **(a)** Obtenha uma relação para a aceleração do sistema, usando o princípio da conservação de energia. **(b)** Se o objeto for um disco uniforme de raio $R = 12\,cm$ e $M = 400\,g$, e se a massa suspensa for de $50\,g$, determine a velocidade de *m* após ter descido *50 cm* a partir do repouso.

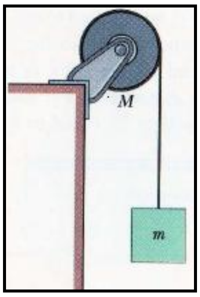


Figura 61: Adaptação do exemplo 10-9 (Halliday, 2008).

Os estudantes poderiam resolver a questão aplicando a segunda lei de Newton para uma rotação pura e para uma translação pura. Contudo esperava-se que, pela conservação da energia, fossem capazes de obter uma expressão dependente das grandezas velocidade e altura do objeto, para o caso unidimensional. A ideia era que derivassem os dois lados da equação com respeito ao tempo para obterem uma expressão para a aceleração do sistema dependente da massa do objeto, do momento de inércia e do raio do objeto.

Dentre os quinze estudantes que realizaram a avaliação, apenas quatro tentaram resolver a questão, sendo que nenhum deles derivou a expressão resultante com respeito ao tempo. Dois alunos tentaram resolver a questão pela dinâmica e dois pela conservação da energia (como era solicitado). Nenhum acertou totalmente a questão. Seguem anexas algumas representações apresentadas para os problemas.

Nos quadros 51 e 52 apresentamos o esquema de resolução de um aluno egresso do curso de Farmácia. O estudante utiliza corretamente a lei da conservação da energia, coerente com a configuração considerada do sistema. Ele tenta resolver o problema pelas equações da dinâmica, utilizando de forma correta as relações entre grandezas cinemáticas de translação e grandezas cinemáticas de rotação. No entanto, poderia ter subsituído o valor de y pela metade da aceleração tangencial multiplicada pelo quadrado do tempo. Assim, sua expressão para a aceleração não dependeria do tempo como aquele obtida por ele.

O aluno demonstra bom conhecimento físico, especialmente na área da dinâmica rotacional. Mas não faz nenhuma relação com o conceito de derivada visto no Cálculo. Alunos com esta potencialidade geralmente apresentam conceitos subsunçores compartimentados, e não transferem os conhecimentos entre as duas áreas: Física e Matemática. No entanto, podemos afirmar que é significativo o processo pelo qual pautou seus esquemas para dar conta da resolução solicitada.

Quadro 51: Usando a conservação da energia.

Energia potencial $= m.g.y$

$EP = K_{rot} + K_{cinet}$

$mgy = \frac{1}{2} I.W^2 + \frac{1}{2} m.V^2 \rightarrow \underline{a = a_t}$, mesma corda

$W = W_0 + \alpha.t$ (considero zero) $\quad W = \alpha.t \rightarrow$ sabendo que $\alpha = \frac{a_t}{R}$, logo

$W = \frac{a_t.t}{R} \rightarrow v = a_t.t$

$mgy = \frac{1}{2}.I.\left(\frac{a_t.t}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m.v^2$

$m.g.y = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + M.R^2\right).\left(\frac{a_t.t}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} m.(a_t.t)^2$

Quadro 52: Continuação da resolução esquematizada anteriormente.

Isolar o a_t:

$m.g.y = \frac{1}{2}(a_t.t)^2.\left(\frac{I_{tot}}{R^2} + m\right)$

$\sqrt{\frac{2.(m.g.y)}{\left(\frac{I_{tot}}{R^2} + m\right)}} = a_t.t \rightarrow \boxed{a_t = \frac{1}{t}.\sqrt{\frac{2(m.g.y)}{\left(\frac{I_{tot}}{R^2} + m\right)}}}$

resposta

$I_{tot} = I_{cm} + M.R^2$

$I_{tot} = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}M.R^2$

É importante enfatizar que, diferentemente das atividades individuais, as atividades colaborativas propostas em sala de aula ao longo de toda a investigação foram favorecedoras da aprendizagem significativa dos conceitos físicos e matemáticos de forma articulada, conforme propusemos.

Um trabalho sobre energia teve as mais variadas formas de apresentação, inclusive com a montagem de experimentos. Três dos oito grupos apresentaram relações entre a

Matemática e a Física. O primeiro aborda a Matemática como um modelo para a interpretação dos conceitos que fundamentam o conceito de energia. Um segundo grupo aborda de forma mais ampla o conceito de energia, enfatizando energia hidroelétrica e apresentando uma situação-problema contextualizada para a utilização da Matemática. Da mesma forma, um terceiro grupo também tenta solucionar uma situação-problema sobre Energia que necessita conceitos matemáticos para serem apreendido. As descrições das aulas desta etapa são apresentadas no apêndice, assim como todas as outras.

7.5. Considerações

Nesta etapa almejamos incrementar no ensino da disciplina de Física, de forma mais aprofundada, os conceitos Matemáticos do Cálculo, com a visão de um professor de Cálculo, e verificar qual a receptividade cognitiva dos estudantes com relação à articulação preterida. Algumas considerações devem ser enfatizadas.

- Esbarramos nas exigências oficiais do sistema de ensino da disciplina, que não nos permitiu desenvolver os módulos matemáticos do Cálculo para a Física da forma como pretendíamos, apesar de procurarmos sempre manter esta concepção no ensino. Em todas as situações-problema apresentadas no contexto da Mecânica, procuramos dar significado aos conceitos matemáticos do Cálculo;
- Os alunos da Física vão às aulas de Física querendo aprender Física. Quando inserimos a Matemática numa fase anterior à interpretação física do problema, ficam desmotivados. Primam pela física conceitual, filosófica, e acreditam que apenas as noções do Cálculo são necessárias nesta fase inicial da Mecânica;
- Via de regra, os estudantes investigados nesta etapa não apresentaram problemas com o desenvolvimento da Matemática Básica na resolução das situações-problemas propostas, mas muitos esbarram no significado deste desenvolvimento algébrico frente à situação física que estão resolvendo. Alguns parecem resolver mecanicamente os problemas;
- Com relação à aprendizagem significativa dos conceitos do Cálculo via conteúdos físicos, alguns estudantes argumentam que não existe esta possibilidade até que não sejam desenvolvidos no contexto da disciplina de Cálculo. Quando tentamos inserir as

noções do cálculo vetorial os estudantes demonstraram não haver significado para eles;

- Os estudantes que apresentam conceitos subsunçores para a resolução das situações propostas, demonstram que esta bagagem cognitiva encontra-se compartimentada, isto é, subsunçores específicos da Matemática e subsunçores específicos da Física, com raras exceções, não são articulados frente às situações;
- Os esquemas externalizados pelos estudantes são mais eficientes quando são debatidos e compartilhados ema atividades colaborativas, comparativamente à transcrição operacional individual em provas e testes avaliativos;
- Uma possível integração entre as duas áreas nos remete à estratégias de ensino coerentes com os aportes da teoria da aprendizagem significativa, sugeridas por Ausubel, Novak, Gowin e Moreira. Além disso, o ensino deve ser acompanhado de um rigor metodológico coerente com os fundamentos da Psicologia Cognitiva. Isto só é possível se estivermos muito próximos do aluno, sintonizados na externalização dos seus pensamentos e não apenas nas suas ações;
- Os alunos da Física gostam de discutir questões físicas em sala-de-aula. No contexto da Física, para que a Matemática tenha sentido, é após este momento de discussões que deve ser apresentada como ferramenta operacional imprescindível para o entendimento do conceito físico. No entanto isto não será suficiente. No contexto da disciplina de Cálculo é necessário que o professor dê a contrapartida, direcionando este “ferramental matemático” para o contexto da Física;
- Quando a Mecânica é ensinada a partir da Cinemática, há a necessidade de ser complementada com conceitos Dinâmicos. Quando é ensinada a partir da Mecânica, há a necessidade de que sejam resgatados conceitos da Cinemática. Iniciar o conteúdo pela Cinemática vai propirciar que os conceitos matemáticos de derivada e de integral sejam vistos inicialmente, para que depois, sejam resgatados de forma mais abrangente, no nível da análise vetorial. Neste caso, na visão de Ausubel (1963, 2000) partimos do específico para o geral. Quando observamos as aulas onde o professor iniciou pela Dinâmica, os conceitos matemáticos do Cálculo puderam ser resgatados num maior número de vezes, caracterizando um sentido do geral para o específico.

Segundo Ausubel (1963, 2000) este fato é mais propício para uma aprendizagem significativa;

- O conteúdo da Cinemática é fundamentado em conceitos do Cálculo que vão desde as noções Matemáticas Básicas até as noções de análise vetorial, o que pode ser perfeitamente desenvolvido no contexto de uma disciplina de Cálculo específica para estudantes da Física;
- A integração preterida entre as duas áreas necessita de tempo, uma vez que demanda a apresentação do material instrucional para atividades colaborativas em sala-de-aula e para discussão das questões apresentadas. Currículos tradicionais de ensino não permitem esta inovação;
- Num outro extremo, situam-se os estudantes que não apresentam os conceitos subsunçores básicos para novas aprendizagens, ou que estão há muitos anos longe dos bancos escolares. Isto demanda um tempo ainda maior para auxiliar os estudantes na construção destes subsunçores;
- A avaliação do ensino proposta num sistema integrado não pode resultar apenas do desempenho em atividades colaborativas. Deve haver pelo menos uma prova para cada área ensinada, posto que o maior papel das atividades colaborativas é o de favorecer o processo de externalização dos esquemas por parte dos alunos, quando interagem uns com os outros e também com os docentes;
- Direcionar o ensino para uma aprendizagem significativa demanda bastante trabalho e dedicação do professor, seja elaborando o material instrucional, seja dialogando com outros professores de áreas afins; investigando as dificuldades do aluno e avaliando seu esforço, conhecimento e dedicação. Cremos que, além do conhecimento, a especialização exigida à figura do professor esbarra na boa vontade e no compromisso com o processo do ensino e da aprendizagem.

Capítulo 8

CONCLUSÕES

Ao longo dos quatro anos de desenvolvimento desta tese pudemos rastrear, interpretar e documentar relações entre os conteúdos das disciplinas de Cálculo e Física, na etapa inicial dos cursos de graduação em Física da UFRGS, nos níveis do ensino e da aprendizagem. Também pudemos analisar, através de revisão bibliográfica, questões teóricas, metodológicas e epistemológicas que permeiam as fronteiras entre a Matemática e a Física, bem como suas implicações para um sistema de ensino supostamente integrado entre as duas áreas.

Como professora de Cálculo para alunos dos cursos de Física da UFSM, meu objetivo inicial foi investigar e desenvolver formas alternativas de abordagem dos conteúdos matemáticos do Cálculo específicos para aquele público, com vistas à aprendizagem significativa dos conteúdos físicos da Mecânica. Considero que fui além destes objetivos quando pude constatar, através do rigor metodológico empregado, que a Matemática desenvolvida na disciplina de Cálculo I não é a mesma Matemática desenvolvida na disciplina de Física I, tamanha é a desarticulação existente entre as duas áreas, no nível do ensino.

A larga experiência com o ensino do Cálculo nos fez perceber que, naquele contexto, os conteúdos são apresentados como ferramentas matemáticas úteis para as áreas científicas, sem a ênfase nos seus significados para estas áreas. Em sistemas de ensino considerados tradicionais e compartimentados, dificilmente um professor de Cálculo estará predisposto a “mergulhar no mundo” das aplicações físicas para dar sentido aos conceitos matemáticos apresentados.

O estudo do tipo etnográfico realizado ao longo dose quatro anos de investigação nos mostrou que, no contexto da Física I, os conceitos do Cálculo ora são contornados, ora são desenvolvidos antecipadamente, com linguagem e notações diferentes daquelas utilizadas no Cálculo, ora são apresentados num nível elevado de abstração.

De fato, tais conteúdos não exigem um entendimento conceitual significativo para que possam ser empregados na resolução das situações-problema propostas na disciplina de Física I. Não é esta a expectativa dos docentes de Física com relação ao conteúdo matemático necessário para o entendimento da Física.

O ensino da Física exige primeiramente o entendimento de como determinado fenômeno natural (no caso investigado, o *movimento de corpos rígidos*) pode ser idealizado através de um modelo Físico (no caso investigado, o *modelo da partícula*), e como este modelo pode ser abstraído em linguagem matemática.

Nas nossas intervenções, constatamos que muitos estudantes não possuem *conceitos subsunçores matemáticos e físicos* apropriados para a aprendizagem significativa da Física. Os invariantes operacionais externalizados pelos estudantes nas atividades individuais são explicitados de forma compartimentada nas situações propostas na disciplina de Física. Poucos relacionam conceitos do Cálculo no contexto da Física. Porém, em atividades colaborativas, estes conceitos são debatidos e compartilhados e até aplicados em experimentos realizados pelos estudantes em sala de aula. Sob estas condições, concepções relacionadas à articulação entre as duas áreas são mais evidentes.

Os alunos que dispõem de conhecimentos matemáticos muitas vezes não sabem como moldar este conhecimento para o entendimento satisfatório das situações-físicas apresentadas. Resolvem mecanicamente os cálculos sem se deterem na interpretação física do resultados obtido.

Os conceitos do Cálculo mostraram ser de extrema importância para a *descrição do movimento*, a partir de questionamento dos alunos, e a partir das aulas observadas. Esta descrição passa necessariamente pela construção de conceitos matemáticos que vão desde o Cálculo Elementar até a Análise Vetorial. Dificilmente os professores de Física estarão dispostos a aprofundar estes conceitos numa aula de Física. Tais conteúdos estão distribuídos em disciplinas específicas da Matemática ao longo do Curso de Graduação, e são apresentados aos estudantes numa etapa posterior ao ensino da Física Básica, de forma compartimentada, como já enfatizamos.

Nas nossas intervenções, em geral, os estudantes não foram capazes de transferir estes conhecimentos, com raras exceções. Tais conceitos, quando estão disponíveis no cognitivo do estudante, em geral se apresentam também de forma compartimentada. Sugerimos que este fato se deve ao sistema de ensino com que se depararam, desde o início da sua formação escolar.

Quando tentamos, no segundo semestre em que lecionamos a Física, aprofundar um pouco mais os conceitos do Cálculo, introduzindo noções do Cálculo Vetorial, não houve resposta significativa por parte dos estudantes, com raras exceções. Os conceitos subsunçores necessários para uma aprendizagem significativa em muitas situações não estavam presentes. Alguns estudantes mostravam-se desmotivados, pois esperavam aprender os conceitos dinâmicos da Mecânica. Acreditavam fortemente que possuíam o conhecimento básico necessário para aplicar resultados da cinemática nos problemas da Dinâmica.

Constatamos que o material instrucional da Matemática para a Física concebido ao longo da investigação só tem potencialidade significativa quando desenvolvido juntamente com os conceitos Físicos da Dinâmica. Este fato tem sérias implicações para o ensino de Cálculo para estudantes de Física, que colocam em discussão o fato do curso de Física necessitar de uma disciplina Matemática introdutória que possa direcionar os estudantes para as reais necessidades dos conceitos Matemáticos frente às situações-problema que terão que enfrentar. Isto quer dizer que, para os estudantes da Física, não importa que estejamos no contexto do Cálculo preocupando-nos apenas com técnicas de diferenciação e integração. Se estes conceitos não forem desenvolvidos de forma articulada (pelo menos nas partes em que isto for possível) com o ensino da Física, dificilmente haverá entendimento dos seus significados, bem como haverá transferência de conhecimentos entre as duas áreas.

Algumas reflexões surgem a partir da investigação: *(1) A elaboração de uma disciplina de Cálculo específica para os estudantes da Física, que possa contemplar conteúdos que vão desde noções da análise vetorial até noções de funções de uma variável real a valores reais, caracterizando a apresentação dos conceitos da forma geral para a forma mais específica. Nesta fase do curso de Física, esta disciplina daria ênfase à descrição matemática do movimento (Cinemática); (2) A implementação no currículo dos cursos de Física (ou em currículos de cursos que contenham as disciplinas de Física e de Cálculo), de seminários intermediadores entre as duas áreas, onde, a cada semestre, possam ser articulados temas relacionados.*

No capítulo 6 da tese identificamos, através do estudo etnográfico, situações físicas importantes que podem dar sentido ao processo de limites adotado no Cálculo, via diferenciação ou via integração, além de suas interpretações geométricas, as quais fornecem diretrizes, em termos de conteúdo, para a construção de um sistema de ensino articulado.

No capítulo 7 transcrevemos e interpretamos importantes formas de representações matemáticas operacionalizadas pelos estudantes frente às situações físicas com as quais se deparavam. Esta análise traz fortes implicações no que diz respeito a maneira com que temos que lidar com o ensino, para mediar o processo de conceitualização pelo estudante da Física, no domínio da Matemática.

Consideramos que o grande valor do nosso estudo está no rigor metodológico empregado ao longo da pesquisa, através da etnografia e das análises descritivas e interpretativas dos registros. Pudemos constatar o quanto a questão investigada é complexa e o quanto necessita de estudos relacionados, em diferentes contextos, para que possa ser compreendida. Nossos resultados são uma simples contribuição que documenta a dura realidade com que se deparam os estudantes da Física quando ingressam nos cursos de Física, o que de fato, não é uma novidade para a comunidade Física e Matemática.

Mas o que faremos efetivamente, com os resultados do referido estudo na sua forma mais ampla? Ora, vislumbramos que convém lecionar a disciplina de Cálculo específica para a área de formação do aluno, expondo situações-problema que possam dar sentido aos conceitos matemáticos utilizados. E o ganho desta abordagem é evidente. Não há dúvidas de que os alunos das áreas afins se interessam mais pela temática quando apresentada a partir de situações por eles mesmos vivenciadas ao longo da sua formação. A motivação do aluno gera a predisposição para o aprendizado: se o aluno está predisposto a aprender e as aulas são dinâmicas, consegue externalizar seus conhecimentos prévios. Conhecendo as dificuldades prévias dos alunos, poderemos mediar a construção e aperfeiçoamento dos conceitos subsunçores necessários para uma aprendizagem significativa. Nesta pesquisa, o processo foi realizado procurando integrar Física e Matemática. Estudos futuros poderiam reaplicar o método de ensino integrado proposto, no contexto da disciplina de Cálculo para físicos, e verificar qual o impacto deste processo de ensino para uma aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALWIS, T. (1994). Classroom notes on projectile motion with Mathematica. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(5), p.749* ± 797.

ANDRÉ, M. E. D. A. (1988). *Etnografia da Prática Escolar.* São Paulo: Papirus Editora.

ANDRÉ, M. E. D. A. (2005). *Estudo de Caso em Pesquisa e Avaliação Educacional.* Brasília/DF: Liber Livro Editora Ltda.

ANGELL, C.; KIND, P. M.; HENRIKSEN, E. K.; GUTTERSRUD, O. (2008). An empirical-mathematical modeling approach to upper secondary physics. *Phisics Education, 43(3), p.256-264.*

ANTHONY, G. (2000). Factors influencing first-year students' success in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v*ol. 31, nº 1, pp. 3-14.

ANTON, H.; BIEVENS, I.; DAVIS, S. (2007). *Cálculo.* Vol. 1 e Vol. 2. Editora Bookman, Porto Alegre, RS.

ARAÚJO, I. S.; VEIT, E. A.; MOREIRA, M. A. (2004). Atividades de Modelagem Computacional no Auxílio à Interpretação de Gráficos da Cinemática. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 26, nº2, p. 179-184.

ÁVILA, G. (1985). Evolução dos Conceitos de Função e de Integral. *Revista Matemática Universitária*, nº1. Sociedade Brasileira de Matemática.

ÁVILA, G. (2006). Limites e Derivadas no Ensino Médio? *Revista do Professor de Matemática*, 2º quadrimestre, nº 60. Sociedade Brasileira de Matemática.

ARTIGUE, M. (1995). *La Enseñanza de los Princípios del Cálculo: Problemas Epistemológicos, Cognitivos y Didácticos.* Em Gómez, P. (ed). Ingeniería Didáctica em Educación Matemática: um Esquema para la Investigación y la Innovación em la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, pp. 97-140. Méjico DC: Iberoamérica.

ARTIGUE, M. (1986). *The notion of differential for undergraduate Students in Science*, en Proceedings of the Xth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations, Londres, 229-234.

ARTIGUE, M.; VIENNOT, L. (1987). *Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials*, en Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Cornell (vol. III), Cornell University, Ithaca (USA).

ARTIGUE, M.; MENIGAUX, J.; VIENNOT, L. (1990). Some aspects of student's conceptions and difficulties about differentials. *European Journal of Physics, 11(5).*

AUSUBEL, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning.* New York: Grune and Stratton. 685p.

AUSUBEL, D. P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 212p.

AVILA, G. (2006). Limites e Derivadas no Ensino Médio? Sociedade Brasileira de Matematica. *Revista do Professor de Matemática*, 2º quadrimestre, nº 60.

BACHELARD, G. (1983). *Epistemologia.* Zahar Editores S.A. 2ª edição. Rio de Janeiro, RJ.

BASSON, I. (2002). Physics and Mathematics as interrelated fields of thought development using acceleration as example. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 33(5), p.679-690.*

BERICAT, E. (1998). *La Integración de los Métodos Cuantitativo y Cualitativo em La Investigación Social: Significado y Medida.* Barcelona: Editora Ariel S.A.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. *Diretrizes Curriculares para os Cursos de Física* (2001). http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES1304.pdf

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. *Reestruturação e Expansão das Universidades Federais.* (2007). http://portal.mec.gov.br/sesu/arquivos/pdf/diretrizesreuni.pdf

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos.* Coleção Ciências da Educação. Portugal: Porto Editora LDA.

BRYAN, J. A.; FENNELL, B. D. (2009). Wave modeling: a lesson illustrating the integration of mathematics, science and technology through multiple representations. *Physics Education, 44(4).*

BUNGE, M. (1980). *Epistemología.* Editorial Ariel S.A. Barcelona, España.

BUTELER, L.; COLEONI, E. (2012). El conocimiento físico intuitivo, la resolución de problemas em Física y el lugar de las ecuaciones matemáticas. *Investigações em Ensino de Ciências, 17(2), p.435-452.*

CARNEIRO, V. C. G. (2005). Engenharia Didática: Um Referencial para Ação Investigativa e para Formação de Professores de Matemática. *Zetetike, v.* 13, nº 23, pp. 85-118.

CHAVES, A.; SAMPAIO, J. F. (2007). *Física Básica: Mecânica.* Editora LTC, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

COSTA, I. M.; SALVADOR, J. A. (2004). *Ensino de cálculo diferencial e integral: experiências no DM – UFSCar*. In: anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática (EPEM). USP, São Paulo.

COSTA, V. A.; DOMENICANTONIO, R. M. Di; PRODANOFF, F.; TOLOSA, E.; GUARAPERI, V. (2008). *Acciones interdisciplinarias entre matemática y física para mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo vectorial.* Livro Digital do VI CAEDI: Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería, Salta, Argentina.

COUTO, M. I. M. F. S. (2007). *Contributos Para a Interdisciplinaridade no Ensino da Física e da Matemática.* Dissertação de Mestrado. Departamento de Física. Faculdade de Ciências. Universidade do Porto. 95p.

COX, W. (2001). On expectations of the mathematical knowledge of first-year undergraduates. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 32, nº 6, pp. 847-861.

CHRISTENSEN, W. M; THOMPSON, J. R. (2012). Investigating graphical representations of slope and derivative without a physics context. *Physical Review Special Topics – Physical Education Research, 8, 023101.*

CROUCH, R.; HAINES, C. (2004). Mathematical modeling: transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Methematical Education in Science and Technology, 35(2), p.197-206.*

CUI, L. (2006). *Assessing College Students' Retention and Transfer from Calculus to Physics.* PhD Thesis. Kansas States University, College of Arts and Science. Department of Physics. 187p.

CURY, H. N. (2000). *Criação de ambientes de aprendizagem para o Cálculo Diferencial e Integral.* In: atas do I Congresso Sul-Brasileiro de Informática na Educação- Área de Exatas.

DELORS, J. (1998). *Educação: um tesouro a descobrir.* Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI. Cortez Editora. Brasília, DF.

DiSESSA, A. (1993). Toward na epistemology of physics. *Cognition and Instruction, 10, p.105-225.*

DUNN, J. W.; BARBANEL, J. (2000). One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics. *American Journal of Physics, 68(8), p.749-757.*

ELLERMEIJER, T.; HECK, A. (2001). Differences between the use of mathematical entities in mathematics and physics and the consequences for an integrated learning environment. In: Michelini, M. and Cobal, M. (Eds.). 1º Girep: *Developing formal thinking in Physics, (pp.52-72).* Udine: University of Udine.

ESPINOZA, L.; AZCÁRATE, D. (2000). Organizaciones Matemáticas y Didácticas em Torno Al objeto de "Límite del Función": Uma Propuesta Metodológica para El Análisis. *Enseñanza de las Ciencias.* 18(3), 355-368.

EYSENCK, M. M.; KEANE, M. T. (2007). *Manual da Psicologia Cognitiva.* Artmed Editora S.A. São Paulo, SP, Brasil.

FEYNMAN, R.; GOTTLIEB, M. A.; LEIGHTON, R. (2008). *Dicas de Física: suplemento para a resolução de problemas do Lectures on Physics.* Bookman.

FERREYRA, A.; GONZÁLEZ, E. M. (2000). Reflexiones Sobre La Enseñanza de La Física Univesitaria. Enseñanza de lãs Ciencias. 18(2), 189-199.

FRANCHI, A. (1999). Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais. In Alcântara Machado, S.D. et al. *Educação Matemática: uma Introdução.* São Paulo. EDUC. Pp. 155-195.

FREIRE, P. (2008). *Pedagogia da autonomia. Saberes necessários à prática educativa.* Editora Paz e Terra. São Paulo, SP, Brasil.

GAISMAN, M. T. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. *Revista Mexicana del Investigación Educativa, 11(31), p.1207-1240.*

GARBER, E. (1999). *The Language of Physics: The Calculus and the Development of Theoretical Physics in Europe, 1750 – 1914.* Birkhäuser Boston.

GARCÍA, G. S. M.; BLANCO, M. G.; SALVADOR, L. C. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de Las Ciencias*, 24(1), pp. 85-98.

GARCÍA, P. V.; CUDMANI, L. C. (2005). Una metodología que facilitó la evaluación del aprendizaje de un curso universitário masivo de Cálculo Básico. *Investigações em Ensino de Ciências.* v.10 (1), pp. 47-61.

GASPAR, A. (2000). *Física: Mecânica 1.* Editora Ática.

GRAHAM, T.; ROWLANDS, S. (2000). Using computer software in the teaching of mechanics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(4), p.479*±493.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. (2002). Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics. *Science and Education, 86(1), p.106-121.*

GREF – Grupo de Reelaboração do Ensino da Física (2002). *Física I: Mecânica.* EDUSP.

HALLIDAY, D; RESNICK, R.; WALKER, J. (2008). *Fundamentos de Física, Volume 1: Mecânica.* Livros Técnicos e Científicos Ltda, Rio de Janeiro, RJ.

HAZARI, Z.; TAI, R. H.; SADLER, P. M. (2007). Gender Differences in Introductory University Physics Performance: The influence of High School Physics Preparation and Affective Fctors. *Science Education.* http://www.interscience.wiley.com.

HEWITT, P. G. (2002). *Física Conceitual.* Bookman.

HOYLES, C.; NEWMAN, K.; NOSS, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 32(6), p.829-845.*

IZSÁK, A. (2004). Students' coordination of knowledge when learning to model physical situations. *Cognition and Instruction, 22(1), p.81-128.*

JOHNSON-LAIRD, P. N. (1983). *Mental Models.* Cambridge University Press.

KEYNES, H. B.; ANDREA, O. M. (2000). Redesigning the calculus sequence at a research university: issues, implementation, and objectives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(1), p.71-82.*

KNIGHT, R. D. (2009). *Física: uma abordagem estratégica.* Volume 1: Mecânica Newtoniana, Gravitação, Oscilações e ondas. Bookman, 2ª Ed.

LARSON, R. E.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. (1998). *Cálculo com Geometria Analítica.* Vol. 1, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.: Rio de Janeiro.

LOPES, A. (1999). Algumas Reflexões Sobre a Questão do Alto Índice de Reprovação nos Cursos de Cálculo da UFRGS. *Matemática Universitária*, nº 26/27, pp. 123-146. Sociedade Brasileira de Matemática.

LÓPEZ-GAY, R.; TORREGROSA, M.; MARTÍ, J. G. (2002). Análisis de la utilización y comprensión del cálculo diferencial en la enseñanza de la física. *In: Educación abierta. Aspectos didácticos de física y química (física), 10, p.113-157.* ICE de la Universidad de Zaragoza.

LÓPEZ-GAY, R.; TORREGROSA, J. M. (2005). ¿ Qué hacen y qué entienden los estudiantes y profesores de Física cuando usan expresiones diferenciales? *Enseñanza de las Ciencias,* 23(3), 321-334.

LUK, H. S. (2005). The Gap Between Secondary School and University Mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 36, nº 2-3.

MACIEL, A. (1987). *A História do Instituto de Física.* Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física, Biblioteca. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/historia/50anos.html.

MARTÍNIZ-TORREGROSA, J.; LÓPEZ-GAY, R.; GRAS-MARTÍ, A. (2006). Mathematics in physics education: scanning historical evolution of the differential to find a more appropriate model for teaching differential calculus in physics. *Science&Education, 15(5), p.447-462.*

MASSONI, N. T. (2010). *A Epistemologia Contemporânea e suas contribuições em diferentes níveis de ensino de Física: A questão da mudança epistemológica.* Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS, Brasil. 412p.

McDERMOTT, R. (1976). *Kids make sense: Na ethnographic account of the interacional management of success and failure in one first grade classroom.* Unpublished doctoral dissertation, Stanford University.

McDERMOTT, L. C.; ROSENQUIST, M. L; VAN ZEE, E. H. (1987). Student Difficulties in Connecting Graphs and Physics: Examples from Kinematics. *American Journal of Physics*, vol. 55, issue 6, pp. 503-513. 24.

MOREIRA, M. A. (2005). *Aprendizagem Significativa Crítica.* Porto Alegre, RS. 47p.

MOREIRA, M. A. (2006a). *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.* Brasília. Editora UnB.

MOREIRA, M. A. (2004a). *A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a investigação nesta área.* Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física. Porto Alegre, RS.

MOREIRA, M. A. (2004b). Pesquisa Básica em Educação em Ciências: uma visão pessoal. *Revista Chilena de Educação Científica*, 3(1): pp. 10-17.

MOREIRA, M. A. (2006b). *Mapas Conceituais & Diagramas V.* Porto Alegre, RS.

MOREIRA, M. A. (2008). Conceptos en la educación científica: ignorados y subestimados. *Revista Qurriculum, 21, p.9-26.*

MOREIRA, M. A. (2011). *Metodologias de Pesquisa em Ensino.* Editora Livraria da Física, 242p.

MOREIRA, M. A. (2003). *Avaliação da Aprendizagem.* Texto preparado para a disciplina de Pós-Graduação Bases teóricas e Metodológicas para o Ensino Superior. Instituto de Física da UFRGS. Porto Alegre, RS, Brasil.

MOREIRA, M. A. (1999). *Teorias de Aprendizagem.* Editora Pedagógica Universitária LTDA. São Paulo, SP, Brasil.

MUNBY, H. (1984). A Qualitative Approach to the Study of a Teacher's Beliefs. *Journal of Research in Science Teaching*, vol. 21, nº 1, pp. 27-38.

NOVAK, J. D. e GOWIN, D. B. (1996). *Aprender a aprender.* Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

NOVAK, J. D. (2000). *Aprender, criar e utilizar o conhecimento.* Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

NOVAK, J. D. (1977). *A Theory of Education.* Ithaca: Cornell University Press.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. (1984). *Learning how to learn.* Nova York: Cambridge University Press.

OSTERMANN, F. e REZENDE, F. (2009). Projetos de Desenvolvimento e de Pesquisa na área do Ensino de Ciências e Matemática: Uma Reflexão sobre os Mestrados Profissionais. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 26, nº 1, pp. 66-80.

PAGLIOLI, E. (1952). *Universidade Federal do Rio Grande do Sul: Uma Fase em sua História, 1952 – 1964.* Relatório do Reitorado do Profº Elyseu Paglioli. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/historia/50anos.html.

PATY, M. (1995). *A matéria roubada.* São Paulo: Edusp.

PEREIRA, V. M. C. (2009). *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade.* Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Rio de Janeiro, RJ.

PIAGET, J.; GARCÍA, R. (1983, 1989). *Picogénesis e historia de la ciência.* México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo XXI.

PIETROCOLA, M. (2002). A matemática como estruturante do conhecimento físico. Caderno *Catarinense de Ensino de Física, 19(1), p.88-108.*

QUALE, A. (2011). On the role of mathematics in physics: a constructivist epistemic perspective. *Science&Education, 20(3-4), p.359-372.*

REDISH, E. F.; STEIBERG, R. N. (1999). Teaching Physics: Figuring Out What Works. *Physics Today*, January, pp. 24-30.

REX, A. F.; JACKSON, M. (2001). Integrated Physics and Calculus. *American Journal of Physics, 69(3), pp. 396 – 397.*

REX, A. F.; JACKSON, M. (1999). *Integrated Physics and Calculus.* Addison-Wesley, vol. I e II.

REZENDE, W. M. (2003). *O ensino do Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.* Tese de Doutorado em Educação – Área de Ciências e Matemática. Faculdade de Educação da USP. São Paulo, SP, Brasil.

ROSA, M. V. F. P. C.; ARNOLDI, M. A. G. C. (2006). *A entrevista na pesquisa qualitativa: mecanismos para validação dos resultados.* Editora Autêntica. Belo Horizonte, MG, Brasil.

SADLER, P. M.; TAI, R. H. (2001). *Success in Introductory College Physics: The Role of High School Preparation.* John Wiley & Sons. Inc.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. (2008). La comprensión de la Derivada como Object of Investigacion em Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa*. 11(2): 267-296.

SANTAROSA, M. C. P.; MOREIRA, M. A. (2011). O Cálculo nas aulas de Física da UFRGS: um estudo exploratório. *Investigações em Ensino de Ciências, 16(2), p.317-351.*

SANTOS, C. A. P. (2010). *O Ensino da Física na Formação do Professor de Matemática.* São Paulo. Universidade Cruzeiro do Sul. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências. Tese de Doutorado, 189p.

SANTOS, R. M. e NETO, H. B. (2005). Avaliação do Desempenho no Processo de Ensino Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral (O Caso da UFC). http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/artigos.

SHERIN, B. L. (2001). How Students Understand Physics Equations. *Cognition and Instruction, 19(4), pp. 479-541.*

SHERIN, B. L. (2006). Common sense clarified: the role of intuitive knowledge in physics problem solving. *Journal of Research in Science Teaching, 43(6), p.535-555.*

SIMPSON, G.; HOYLES, C.; NOSS, R. (2006). Exploring the mathematics of motion through construction and collaboration. *Journal of Computer Assisted Learning, 22, p.114-136.*

SOKOLOWSKI, A; YALVAC, B; LOVING, C. (2011). Science modeling in pre-calculus: how to make mathematics problems contextually meaningful. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.*

SPRADLEY, J. P. (1980). *Participant Observation.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

SZYDLIK, J. E. (2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function. *Journal for Research in Mathematics Educations, v*ol 31, nº 3, pp. 258-276.

TALL, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Volume 11. Kluwer Academic Publishers. The Language of Science. The Netherlands.

THWAITES, B. (1972). *SMP: The First Tem Years.* London: Cambridge University Press.

TIPLER, P. A. (1990). *Física: Volume 1a.* Editora Guanabara Koogan S.A., Rio de Janeiro, RJ.

TODOROV, T. D. (2001). Back to Classics: teaching limits throught infinitesimals. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*., vol. 32, nº 1, 1-20.

TRIVIÑOS, A. N. S. (2008). *Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: A Pesquisa Qualitativa em Educação – O Positivismo, A Fenomenologia e O Marxismo.* São Paulo: Editora Atlas S.A.

UHDEN, O; KARAM, R.; PIETROCOLA, M.; POSPIECH, G. (2012). Modelling Mathematical reasoning in Physics Education. *Science & Education, 21(4), p.485-506.*

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Instituto de Física. *Projeto Inova Física.* 2007.

VALADARES, J.; GRAÇA, M. (1998). *Avaliando para melhorar a aprendizagem.* Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

VEIT, E. A.; MORS, P. M.; TEODORO, V. D. (2002). Ilustrando a Segunda Lei de Newton no Século XXI. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 24(2), pp. 176-184.*

VEIT, E. A. e MORS, P. (2010). *Física Geral Universitária: Mecânica Interativa.* Belo Horizonte. Universidade Federal de Minas Gerais. Editora UFMG. 255p. + CD-ROM.

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative structures. In: Hiebert, H. e M. Behr (Eds.), *Research agenda in mathematics education. Number concepts and operations in the middle grades.* Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, p. 141-161.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(23), p.133-170.*

VERGNAUD, G. (1993). Teoria dos Campos Conceituais. In Nasser, L. (Ed.). *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*, pp. 1-26.

VERGNAUD, G. (1994). Multiplicative conceptual Field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Albany, N.Y.: State University of New Yourk Press, pp. 41-59.

VERGNAUD, G. (1996). A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista GEMPA,* Porto Alegre, nº 4: 9-19.

VERGNAUD, G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of Mathematics Education*, 17 (2), pp. 167-181.

VERGNAUD, G. (2007). ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *Investigações em Ensino de Ciências* – V12(2), pp.285-302.

WILLIAMS, S.R. (2001). Predications of the Limit Concept: an application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 32, nº 4, pp. 343-367.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. (2008). *Sears & Zemansky – Física I – Mecânica.* Editora Pearson – Addison Wesley, São Paulo, SP.

APÊNDICE A

Questionário investigativo

Física&Cálculo: uma integração possível no ensino?

Prezado (a) aluno (a):

Este questionário tem como objetivo coletar dados para a pesquisa de Doutorado em Ensino de Física, cujo tema trata da possível *integração entre as situações físicas e os conceitos matemáticos como estratégia de ensino facilitadora da aprendizagem.* Sua colaboração é de extrema importância, como principal sujeito no processo do ensino e da aprendizagem. Para tanto, leia com atenção as questões e assinale com um **X** a alternativa que melhor expresse sua opinião.

Agradecemos sua participação.

Questões Propostas:

1) Como você avalia seu conhecimento matemático básico quando ingressou na Universidade?
( ) muito; ( ) algum; ( ) pouco; ( ) nenhum; ( ) sem opinião.

2) Como você avalia seu conhecimento físico básico quando ingressou na Universidade?
( ) muito; ( ) algum; ( ) pouco; ( ) nenhum; ( ) sem opinião.

3) Como foi sua dedicação e esforço quando cursou a disciplina de Física I?
( ) muito; ( ) algum; ( ) pouco; ( ) nenhum; ( ) sem opinião.

4) Como foi sua dedicação e esforço quando cursou a disciplina de Cálculo I?
( ) muito; ( ) algum; ( ) pouco; ( ) nenhum; ( ) sem opinião.

5) Qual a importância da Matemática para a aprendizagem da Fìsica?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

6) Qual a importância da Física para a aprendizagem da Matemática?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

7) Qual a necessidade de utilizar as ferramentas do Cálculo I na resolução dos problemas da Física I?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

8) Qual a necessidade de visualizar exemplos da Física I na disciplina de Cálculo I?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

9) Houve algum tipo de relação entre o Cálculo I e a Física I, nas aulas de Física I?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

10) Houve algum tipo de relação entre o Cálculo I e a Física I, nas aulas de Cálculo I?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

11) Houve algum tipo de relação entre as atividades de Laboratório e as aulas de Física I?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

12) Classifique a deficiência nos fundamentos matemáticos como fator causador da dificuldade de aprendizagem na Física I:
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

13) Classifique a deficiência nos fundamentos físicos como fator causador da dificuldade de aprendizagem na Física I:
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

14) Classifique a dificuldade de transição ente o Ensino Médio e o Ensino Superior:
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

15) Classifique a revisão prévia da matemática básica proporcionada pelo seu Curso:
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

16) Classifique a revisão prévia da física básica proporcionada pelo seu Curso:
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

17) Qual a compatibilidade entre o sistema avaliativo e o sistema de ensino adotado na disciplina do Cálculo I?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

18) Qual a compatibilidade entre o sistema avaliativo e o sistema de ensino adotado na disciplina de Física I?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

19) O Cálculo I desenvolveu em você algum tipo de análise crítico-reflexiva sobre sua formação acadêmica?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

20) A Física I desenvolveu em você algum tipo de análise crítico-reflexiva sobre sua formação acadêmica?
( ) muita; ( ) alguma; ( ) pouca; ( ) nenhuma; ( ) sem opinião.

Questão aberta: Este espaço é reservado para observações adicionais que possam contribuir para a pesquisa: ____

APÊNDICE B
<u>Questionário de opiniões</u>
<u>Física e Cálculo: uma integração possível no ensino?</u>

Prezado (a) aluno(a):

Este questionário tem como objetivo coletar dados para uma pesquisa de Doutorado em Ensino de Física, cujo tema trata da possível *integração entre situações físicas e conceitos matemáticos como estratégia de ensino facilitadora da aprendizagem na Física Geral I.* Sua colaboração é de extrema importância, como principal sujeito no processo do ensino e da aprendizagem. Para tanto, leia com atenção as questões e assinale com um **X** a alternativa que melhor expresse sua opinião.

Não é necessária a identificação.

Agradecemos sua participação.

<u>Questões Propostas</u>

1) Qual a habilitação do seu curso de Graduação em Física?
( ) Bacharelado; ( ) Licenciatura.

2) Em que semestre e ano você ingressou no Curso? ___________________

3) Você participou de alguma atividade de revisão da matemática básica quando ingressou na Universidade?
( ) Sim. Especifique: ____________
( ) Não.

4) Você participou de alguma atividade de revisão da física básica quando ingressou na Universidade?
( ) Sim. Especifique:_____________
( ) Não.

5) Como você avalia seu conhecimento matemático básico quando ingressou na Universidade?
( ) Muito bom; ( ) Bom; ( ) Regular; ( ) Fraco; ( ) Sem opinião.

6) Como você avalia seu conhecimento físico básico quando ingressou na Universidade?

( ) Muito bom; ( ) Bom; ( ) Regular; ( ) Fraco; ( ) Sem opinião.

7) Como você avalia sua dificuldade de transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior?
( ) Muito grande; ( ) Grande; ( ) Pouca; ( ) Nenhuma; ( ) Sem opinião.

8) Como foi seu desempenho quando cursou a disciplina de Cálculo I pela primeira vez?
( ) Muito bom; ( ) Bom; ( ) Regular; ( ) Fraco; ( ) Sem opinião.

9) Como você classifica hoje seu grau de conhecimento em Cálculo I?
( ) Muito bom; ( ) Bom; ( ) Regular; ( ) Fraco; ( ) Sem opinião.

10) Como foi seu desempenho quando cursou a disciplina de Física Geral I pela primeira vez?
( ) Muito bom; ( ) Bom; ( ) Regular; ( ) Fraco; ( ) Sem opinião.

11) Como você classifica hoje seu grau de conhecimento em Física Geral I?
( ) Muito bom; ( ) Bom; ( ) Regular; ( ) Fraco; ( ) Sem opinião.

12) Como você avalia a importância da Matemática para a aprendizagem na Física?
( ) Muito grande; ( ) Grande; ( ) Pouca; ( ) Nenhuma; ( ) Sem opinião.

13) Como você avalia importância da Física para a aprendizagem na Matemática?
( ) Muito grande; ( ) Grande; ( ) Pouca; ( ) Nenhuma; ( ) Sem opinião.

14) Qual a importância de utilizar as ferramentas do Cálculo I na resolução dos problemas da Física Geral I?
( ) Muito grande; ( ) Grande; ( ) Pouca; ( ) Nenhuma; ( ) Sem opinião.

15) Qual a importância de visualizar exemplos da Física Geral I na disciplina de Cálculo I?
( ) Muito Grande; ( ) Grande; ( ) Pouca; ( ) Nenhuma; ( ) Sem opinião.

Questões abertas: Expresse livremente sua opinião nos espaços que seguem

16) Que conteúdos da Matemática você considera importantes para aprender Física básica universitária?
____
____

17) Que conteúdos da Matemática você não aprendeu no Ensino Médio, mas acha que são importantes na Universidade? ____-
____

18) Que conteúdos da disciplina de Física Geral I apresentaram-lhe mais dificuldade de aprendizado?____
____