

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Método dos Elementos Finitos Aplicado às Equações de Águas Rasas

por

Márleson Rôndiner dos Santos Ferreira

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Profa. Dra. Carolina Cardoso Manica
Orientadora

Porto Alegre, Setembro de 2013.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Ferreira, Márleson Rôndiner dos Santos

Método dos Elementos Finitos Aplicado às Equações de Águas Rasas / Márleson Rôndiner dos Santos Ferreira.—
Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2013.

94 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2013.

Orientadora: Manica, Carolina Cardoso

Dissertação: Matemática Aplicada
Águas Rasas, Elementos Finitos

Método dos Elementos Finitos Aplicado às Equações de Águas Rasas

por

Márleson Rôndiner dos Santos Ferreira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Numérica; Computação Científica.

Orientadora: Profa. Dra. Carolina Cardoso Manica

Banca examinadora:

Prof. Dr. Dagoberto Adriano Rizzotto Justo
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
UNIFAP

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino
PPGMAT/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
04/09/2013.

Maria Cristina Varriale
Coordenadora

AGRADECIMENTO

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por fortalecer minha fé nos momentos mais difíceis.

Agradeço a toda minha família pela torcida, por todo incentivo e suporte que sempre me forneceram durante a vida. Principalmente aos meus pais, *Geraldo Lamarão Ferreira* e *Áurea Sueli dos Santos Ferreira*, que mesmo na dificuldade sempre incentivaram os meus estudos e dos meus irmãos.

Agradeço aos amigos amapaenses que mesmo de longe torceram e torcem pelo meu sucesso.

Agradeço ao *Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco* e ao *Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil*, por todo o incentivo e apoio empenhados para que eu continuasse no ambiente acadêmico, através da pós-graduação.

Agradeço muito a *Dona Alzira Peglow* e a *Dona Eliânia Neves*, duas pessoas especiais, que me acolheram em Porto Alegre e forneceram abrigo e amizade.

Agradeço aos amigos que encontrei na pós-graduação, por todo o companheirismo durante essa difícil jornada. Inclusive ao amigo *Igor Oliveira Monteiro*, por seus conhecimentos compartilhados para a realização desta dissertação.

Agradeço à minha orientadora *Profa. Dra. Carolina Cardoso Manica*, pelo acompanhamento contínuo, pela experiência, contribuições dedicadas a este trabalho e paciência durante todo o processo.

Por último, agradeço a CAPES pela concessão da bolsa de mestrado e apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Minha sincera gratidão a todos!

— Quando trabalhava no comércio eu tinha dois “algarismos”. Em um deles M era 1, ...

— disse meu avô.

— Ah, tá! Então 11 era MM. — respondi rapidamente.

— Isso. — confirmou sorrindo.

(Em memória de Benedito C. dos Santos.)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xii
RESUMO	xiii
ABSTRACT	xiv
1 CONCEITOS PRELIMINARES	22
1.1 Definições e Notações	22
1.2 Descrição do Movimento de Fluidos	23
1.2.1 Descrição Lagrangeana	23
1.2.2 Descrição Euleriana	23
1.3 Conceitos relacionados à geofísica	24
1.3.1 O número de Rossby	24
1.3.2 Força de Coriolis	25
1.3.3 Ondas de Gravidade	27
1.3.4 Ondas de Rossby	28
1.3.5 Plano Beta	28
2 AS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS	31
2.1 Equação da Continuidade	31

2.2	Equação de Momento	32
2.3	Equação de Momento em um Sistema de Referência em Rotação	32
2.4	O modelo de Águas Rasas	35
2.4.1	Equações Linearizadas	41
3	SOLUÇÃO ANALÍTICA E LEIS DE CONSERVAÇÃO	42
3.1	Solução analítica da Equação de Águas Rasas para o caso $f = 0$	42
3.2	Conservação de Massa e Energia	45
4	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS	47
4.1	Discretização das Equações Lineares	47
4.1.1	Semi-discretização	47
4.1.1.1	Método dos elementos finitos	48
4.1.2	Discretização temporal	50
5	PARES DE ELEMENTOS FINITOS	51
5.1	O Par de Elementos P_1-P_1	51
5.2	O Par de Elementos P_2-P_1	55
5.3	O Par de Elementos RT_0-P_0	57
5.4	Técnicas de Estabilização	61
5.4.1	Modos Espúrios para a Elevação	62
5.4.2	Modos Espúrios para a Velocidade	63

6	RESULTADOS	64
6.1	Onda de Gravidade em um domínio circular	65
6.2	Propagação de ondas de gravidade inerciais e Conservação de Massa	73
6.3	Perturbação no balanço geostrófico	79
6.4	Propagação de uma Onda Rossby	85
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	88
	APÊNDICE A	
	CÓDIGO COMPUTACIONAL	91
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93

LISTA DE FIGURAS

1.1	Efeito da força de Coriolis em uma partícula de fluido.	25
1.2	Sistema de coordenadas locais, para uma latitude (θ) e longitude (λ) fixas, onde a é o raio da Terra.	26
2.1	Aceleração centrífuga, $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$	34
2.2	A profundidade total $h(x, y, t)$ é definida como a soma da profundidade de referência, H , e a flutuação η : $h(x, y, t) = H(x, y) + \eta(x, y, t)$	35
5.1	Os símbolos “●” e “○” indicam os nós de velocidade e elevação, respectivamente. A parte sombreada representa o suporte compacto do nó 1.	51
5.2	Nó da velocidade i e nós da elevação, ao redor, para o par P_1 - P_1	52
5.3	Triângulo de referência para o cálculo das funções base locais.	52
5.4	Os símbolos “●” e “○” indicam os nós onde são calculadas a velocidade e a elevação, respectivamente. A parte sombreada representa o suporte compacto do nó 1.	55
5.5	Notação para RT_0 - P_0	58
5.6	Suporte compacto do nó i . Os símbolos “◇” e “○” indicam os nós de velocidade normal e elevação, respectivamente, para o par de elementos RT_0 - P_0	58
6.1	Malha circular não-estruturada.	65

6.2	Erro entre o máximo da solução analítica (η_a) e o máximo da solução calculada (η_c) para cada par de elementos nos diferentes estágios.	66
6.3	Erro entre mínimo da solução analítica (η_a) e o mínimo da solução calculada (η_c) para cada par de elementos nos diferentes estágios.	67
6.4	Isolinhas da solução e corte vertical da elevação da superfície, usando o par de elementos P_1-P_1	68
6.5	Isolinhas da solução e corte vertical da elevação da superfície, usando o par de elementos P_1-P_1 estabilizado.	69
6.6	Isolinhas da solução e corte vertical da elevação da superfície, usando o par de elementos P_2-P_1	70
6.7	Isolinhas da solução e corte vertical da elevação da superfície, usando o par de elementos RT_0-P_0	71
6.8	Malha não-estruturada usada na simulação da onda de gravidade.	74
6.9	Isolinhas da elevação da superfície em diferentes estágios para o par de elementos P_1-P_1 . A elevação é plotada com 18 isolinhas.	74
6.10	Isolinhas da elevação da superfície em diferentes estágios para o par de elementos P_1-P_1 estabilizado. A elevação é plotada com 18 isolinhas.	75
6.11	Isolinhas da elevação da superfície em diferentes estágios para o par de elementos P_2-P_1 . A elevação é plotada com 18 isolinhas.	75
6.12	Isolinhas da elevação da superfície em diferentes estágios para o par de elementos RT_0-P_0 . A elevação é plotada com 18 isolinhas.	76

6.13	Massa e energia para os pares de elementos P_1-P_1 , P_1-P_1 estabilizado, P_2-P_1 e RT_0-P_0	77
6.14	Malha estruturada (à esquerda) e não-estruturada (à direita) utilizadas nas simulações.	79
6.15	Norma da velocidade para o par de elementos P_1-P_1 e P_1-P_1 estabilizado ($\alpha = 1,5 \times 10^5$). As soluções são plotadas com 20 isolinhas.	81
6.16	Norma da velocidade para o par de elementos P_2-P_1 e RT_0-P_0 . As soluções são plotadas com 20 isolinhas.	82
6.17	Geometria do Golfo do México via Google Earth	83
6.18	Elevação da superfície (à esquerda) e norma da velocidade (à direita) no tempo inicial	85
6.19	Isolinhas do campo de elevação (à esquerda) e da norma da velocidade (à direita) para o par de elementos P_1-P_1 e P_1-P_1 estabilizado ($\alpha = 1,5 \times 10^5$), P_2-P_1 e RT_0-P_0 . As figuras são plotadas com 20 isolinhas.	86

LISTA DE TABELAS

6.1	Comparação entre o valor de máximo exato e os valores de máximo para cada elemento, em diferentes passos de tempo.	66
6.2	Comparação entre o valor de mínimo exato e os valores de mínimo para cada elemento, em diferentes passos de tempo.	67

RESUMO

Este trabalho aborda a solução numérica das equações lineares de águas rasas. O método dos elementos finitos é utilizado para a discretização espacial das equações que modelam o problema, e para a discretização temporal, o esquema semi-implícito de Crank-Nicolson é empregado. Além de alguns conceitos comuns quando se trabalha com escoamentos geofísicos, são descritas também a formulação das equações de águas rasas, sua linearização e uma solução analítica para um caso onde o parâmetro de Coriolis é nulo. A escolha adequada de pares de elementos finitos é a principal dificuldade quando se trabalha com esse método para a resolução da equação de águas rasas. Assim, é discutido o uso de quatro pares de elementos finitos e técnicas de estabilização para contornar o surgimento de modos espúrios na solução discreta. Os resultados numéricos são realizados com auxílio do software FreeFem++, onde se pode notar a capacidade dos pares de elementos de reproduzirem o escoamento, através da solução discreta, além das propriedades de conservação de massa e energia de cada discretização.

Palavras-Chave: Equação de Águas Rasas, Método dos Elementos Finitos, Técnicas de Estabilização, FreeFem++.

ABSTRACT

This work is about the numerical solution of the linear shallow water equations. The finite element method is used for spatial discretization of the equations that model the problem and for the time discretization the semi-implicit Crank-Nicolson scheme is used. Besides the concepts related to geophysical flows, the formulation of the shallow water equations, their linearization and an analytical solution for a case where the Coriolis parameter is zero are also described. The appropriate choice of a pair of finite elements is the main difficulty when working with this method for solving the shallow water equations. The use of four pairs of finite elements and stabilization techniques to circumvent the appearance of spurious modes in the discrete solution are discussed. The numerical results are performed using the software FreeFem++, where one can notice the ability of the elements to represent the discrete solution and mass and energy conservation of each discretization.

Keywords: Shallow Water Equations, Finite Element Methods, Stabilization Techniques, FreeFem++.

INTRODUÇÃO

O estudo de escoamentos geofísicos preocupa-se com a compreensão dos conceitos fundamentais de dinâmica que são essenciais para o entendimento da atmosfera e dos oceanos (Pedlosky, 1986). A princípio, a dinâmica de fluidos geofísicos trata com todos os movimentos de fluido ocorridos naturalmente. Esses movimentos ocorrem em uma escala espacial e temporal de longo alcance, desde a rápida e mais suave brisa até as fortes correntes atmosféricas e oceânicas.

Dentre os escoamentos geofísicos com superfície livre, os modelos de águas rasas são comumente usados, desde que as dimensões verticais sejam muito menores que as dimensões horizontais. Isso faz com que a componente vertical da velocidade seja desprezada diante das componentes horizontais.

As equações de águas rasas são obtidas a partir de simplificações nas equações de momento e continuidade (Pedlosky, 1986). Apesar de ser relativamente simples para comportamento do escoamento de águas pouco profundas, permitem estudar, por exemplo, rios, barragens, as interações entre água doce e salgada, a dispersão de poluentes, como o petróleo, como a propagação de ondas de gravidade, etc.

Uma das ferramentas disponíveis para o tratamento numérico é o método dos elementos finitos. Este método, com origem na engenharia aeronáutica e civil, consiste em encontrar uma versão mais fraca do problema original, a chamada formulação variacional, que é depois aproximada num espaço de dimensão finita com uma base de funções adequada (com suporte compacto), intimamente ligada à discretização do domínio do problema (Johnson, 1987). Esse método é atualmente bastante usado para a resolução de problemas em áreas como engenharia civil, eletromagnetismo e dinâmica de fluidos, justificando sua escolha para aproximar as equações de águas rasas.

A viabilidade do uso do método dos elementos finitos para modelos oceânicos foi primeiramente estudada por Fix (1975), usando um modelo quase-geostrófico. Esse modelo é obtido a partir das equações de águas rasas através de uma expansão assintótica do campo de velocidades para diferentes ordens do número de Rossby e representa as oscilações em torno do balanço geostrófico. O balanço geostrófico é de importância fundamental quando se trabalha com escoamentos geofísicos, pois relaciona o equilíbrio entre a força do gradiente de pressão e a força devido a rotação da Terra.

O método dos elementos finitos apresenta grandes vantagens no seu uso, como por exemplo a capacidade de trabalhar com malhas não-estruturadas. Esse tipo de malha permite representar domínios complexos com mais facilidade. Isso é muito atrativo do ponto de vista oceanográfico, onde o número de costas irregulares, assim como estreitos e ilhas, é grande. O uso de uma malha não-estruturada permite alcançar alta resolução graças à possibilidade de refinamento local. Assim, pode-se concentrar o esforço computacional na região de maior interesse. Além do mais, o método dos elementos finitos tem uma rigorosa estrutura matemática que facilita a definição de noções como o erro, taxas de convergência e condições de estabilidade. Condições de contorno do tipo Neumann são facilmente aplicadas quando se obtém a formulação variacional, sem a necessidade de imposições ou aproximações.

Apesar das vantagens do método, a principal dificuldade é encontrar um par de elementos adequado para a velocidade e elevação, para simular a solução numérica. Esses elementos devem representar o fluxo geofísico corretamente e conservar a massa para que possam ser usados em um longo tempo de simulação. Eles também não podem permitir modos espúrios, seja para a velocidade, seja para a elevação. Os modos espúrios são pequenas oscilações na solução discreta introduzidas pelo esquema de discretização espacial. Esses modos espúrios ocorrem tanto para formulações com elementos finitos, quanto para diferenças finitas (Roux et al.,

1998). Se os modos espúrios não são levados em conta na discretização do problema, eles podem deixar certos ruídos na solução numérica.

Muitos trabalhos têm estudos direcionados na obtenção do melhor par de elementos finitos que consiga reproduzir a solução de águas rasas. Em trabalhos como o de Roux et al. (1998), diversos pares de elementos são testados avaliando sua capacidade de reproduzir a equação que modela o balanço geostrófico. Isso é feito através de uma análise de Fourier dos elementos, mostrando qual deles apresenta melhor amplitude quando calculado em determinado nós, além de simulações em tipos diferentes de malhas, estruturadas e não-estruturadas. Um par de elementos não muito conhecido e pouco usual, cuja função base da velocidade é linear em cada um dos sub-triângulos (obtidos do refinamento de cada elemento da triangulação em quatro subelementos) e constante para a elevação com três nós internos é escolhido como o melhor candidato para realização de testes computacionais com uma equação linear de águas rasas.

No trabalho de Hanert et al. (2009), um elemento de Raviart-Thomas e um elemento linear não-conforme são utilizados em análises como as de taxas de convergência e propriedades de conservação. Esses elementos não possuem modos espúrios para a elevação e possuem baixo custo computacional por serem elementos de baixa ordem; por isso são considerados promissores para o uso na solução da equação de águas rasas.

Na literatura, pode ser visto que alguns pares de elementos, usualmente descartados pela presença de modos espúrios, recebem um tratamento diferenciado para que se tornem aptos em simulações de equações de águas rasas. Assim, no trabalho de Hanert et al. (2002) são empregadas técnicas de estabilização, como a formulação de mínimos quadrados de Petrov-Galerkin. Essa consiste em adicionar termos na equação da continuidade (obtidos através da equação de momento), multiplicados por uma constante de difusividade, a fim de garantir um esquema estabilizado.

Hanert e Legat (2006) também verificaram que a imposição da condição de contorno de impenetrabilidade nas formas fraca (como tipicamente condições de contorno naturais são impostas) ou forte (adicionando a restrição no espaço funcional) tem grande influência no surgimento de modos espúrios na solução. Desse modo, a atribuição de condição de contorno fraca ou forte pode eliminar o problema dos modos espúrios de certos pares de elementos e assim torná-los capazes de realizar simulações com modelos de águas rasas.

O estudo do controle de modos espúrios na solução discreta já era realizado anteriormente para esquemas de diferenças finitas na discretização espacial. No trabalho de Batteen e Han (1981) esse estudo foi realizado a partir das equações lineares de águas rasas, com o uso técnicas analíticas e numéricas para identificar os tipos de modos espúrios presentes em cada tipo malha apresentada. Através da análise da relação de dispersão, eles obtiveram a frequência exata e a frequência para cada um dos esquemas de diferenças finitas. As simulações realizadas mostraram a maneira que cada esquema de diferenças finitas distorce a frequência exata. Esse trabalho também motivou o artigo de Hanert et al. (2002) que relaciona os resultados das malhas de diferenças finitas com os respectivos pares de elementos finitos equivalentes.

Em trabalhos com equações de águas rasas não-lineares, o uso de esquemas semi-lagrangeanos para a discretização da derivada total é bastante comum. O esquema semi-lagrangeano combina simultaneamente a facilidade do uso das malhas regulares dos métodos eulerianos com a aprimorada estabilidade dos métodos lagrangeanos e permite o uso de grandes passos de tempo permitidos pelo critério de estabilidade Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Isso permite que, em geral, esquemas semi-lagrangeanos tenham melhores resultados que esquemas eulerianos e lagrangeanos (Roux et al., 2000).

Um esquema euleriano eficiente para as equações não-lineares é abordado por Hanert et al. (2005). Em seu trabalho é realizada a simulação de um an-

ticiclone no golfo do México. Para isso, é utilizado um elemento não-conforme para a velocidade e linear para a elevação, onde para a discretização temporal utilizou-se o esquema semi-implícito de Crank-Nicolson para a equação de movimento e o esquema leap-frog para a equação da continuidade. Os resultados apresentados são comparados com outros esquemas semi-lagrangeanos, mostrando a eficácia dessa discretização euleriana.

Para comparar os pares de elementos utilizados neste trabalho, o caso linear das equações de águas rasas é utilizado. Essas equações são um problema teste tradicional para escolher discretizações espaciais apropriadas. O modelo de águas rasas é também o modelo geofísico mais simples que permite a existência de ondas de gravidade inerciais (Hanert et al., 2002).

As equações lineares de águas rasas também são um modelo simples e ainda numericamente prático para descrever a propagação de tsunamis. Elas são a forma mais simples das equações de propagação de tsunamis que não contém termos convectivos não-lineares. No trabalho de Liu et al. (2009), as equações lineares e não-lineares (com atrito no fundo) de águas rasas descrevendo tsunamis são comparadas em uma simulação no mar da China, a fim de prever o risco potencial de tsunamis na costa chinesa. O resultados indicaram que o uso da teoria linear consegue modelar com precisão suficiente a parte sul do mar da China, mas na parte leste os termos não-lineares devem ser levados em conta, isso porque o fundo do mar é muito mais raso na parte leste (cerca de 300 m) do que na parte sul (mais de 1000 m). As simulações com equações lineares de águas rasas são frequentemente utilizadas, visto que elas apresentam um baixo custo computacional. Na realização de simulações, o uso de um modelo não-linear levaria cerca de quatro a cinco vezes mais tempo computacional que um modelo linear para conseguir resultados precisos. Segundo Liu et al. (2009), com a agilidade dos modelos lineares, a previsão da propagação de tsunamis na costa da China permitiriam um alerta de tsunami muito mais precoce.

No capítulo 1 deste trabalho, introduzem-se algumas notações de produto interno e norma de espaço de funções, assim como conceitos da descrição do movimento de fluidos. São abordados também outros conceitos que estão relacionados ao comportamento de escoamentos geofísicos, como número de Rossby, força de Coriolis, aproximação do plano beta e alguns tipos de onda.

No capítulo 2 realiza-se a dedução das equações de águas rasas, como sendo um sistema físico constituído de um fluido homogêneo, incompressível, com profundidade média H , movimentando-se sobre uma superfície plana. Além disso, faz-se a linearização das equações para obter a expressão que governa o problema abordado neste trabalho.

No capítulo 3 é apresentada uma solução analítica para a equação linear de águas rasas para um caso simplificado, onde o parâmetro de Coriolis é nulo, cuja resolução é realizada via separação de variáveis. As equações de conservação de massa e energia também são obtidas a partir das equações lineares.

No capítulo 4 é obtida a formulação variacional das equações que modelam o problema, a fim de realizar a discretização espacial pelo método dos elementos finitos, a discretização temporal pelo esquema de Crank-Nicolson e suas propriedades de conservação de energia.

No capítulo 5 é realizada uma abordagem sobre os tipos de pares de elementos que serão empregados para calcular a solução numérica. Verifica-se principalmente a deficiência que esses pares de elementos apresentam ao gerar ruído na solução discreta, assim como o uso de técnicas de estabilização para contornar alguns desses problemas.

No capítulo 6 são apresentados resultados de simulações com as equações de águas rasas, realizadas com FreeFem++. Os testes computacionais simulam ondas de gravidade, ondas de gravidade inerciais e ondas de Rossby e avaliam a capacidade desses elementos em representar a solução geofísica, com os diferentes pares

de elementos abordados neste trabalho e o efeito do uso das técnicas de estabilização para controlar ruídos na solução numérica.

No capítulo 7 apresentam-se finalmente as considerações finais do trabalho e as perspectivas futuras.

1 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo, após a definição de alguns conceitos relacionados a movimento de fluidos, alguns conceitos básicos envolvendo escoamentos geofísicos, como número de Rossby, força de Coriolis e plano beta também são apresentados, a fim de estabelecer os resultados preliminares que serão usados neste trabalho.

1.1 Definições e Notações

Considere $L^2(\Omega)$ o espaço de funções mensuráveis de quadrado integrável em Ω , um subdomínio limitado de \mathbb{R}^2 . Para um inteiro $m \geq 0$, denota-se $H^m(\Omega)$ o espaço de Hilbert de ordem m sobre Ω , contendo funções v em $L^2(\Omega)$ tais que suas m -derivadas fracas, estejam em $L^2(\Omega)$, isto é,

$$H^m = \{v \in L^2(\Omega); D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}, \text{ onde} \quad (1.1)$$

$$D^\alpha(\cdot) := \frac{\partial^{|\alpha|}(\cdot)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (1.2)$$

e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ é um vetor de inteiros não-negativos. O produto interno em H^m e sua norma são definidos por

$$\langle v, w \rangle_m := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha v D^\alpha w d\Omega, \quad \|v\|_m = \langle v, v \rangle_m^{1/2}. \quad (1.3)$$

Especificamente, o espaço $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ tem sua norma, $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|$, e produto interno denotado por

$$\langle v, w \rangle := \int_{\Omega} v w d\Omega, \quad \|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}. \quad (1.4)$$

1.2 Descrição do Movimento de Fluidos

1.2.1 Descrição Lagrangeana

O objeto do estudo é o movimento de uma partícula de fluido (ou elemento) ocupando uma certa região no espaço.

Na descrição lagrangeana, o movimento de cada partícula é descrito acompanhando-se a sua trajetória total. Pode-se imaginar que um observador estuda o movimento da partícula deslocando-se simultaneamente com ela e assim medindo a taxa de variação total de suas propriedades (Lemes e Moura, 2002).

1.2.2 Descrição Euleriana

A ideia da descrição euleriana consiste em fixar o tempo e estudar o movimento das partículas que passam por um volume de controle ou uma região fixa no espaço. Repetindo esse procedimento para instantes de tempo diferentes, pode-se ter um entendimento do comportamento do escoamento ao longo do tempo.

Em meteorologia, por exemplo, o escoamento do ar, em geral, é estudado utilizando descrições eulerianas. As estações meteorológicas regulamentadas pela OMM (Organização Meteorológica Mundial) fazem medições das variáveis que caracterizam o estado do fluido, tais como: temperatura, pressão, vento, umidade do ar, etc., que irão descrever as características do escoamento atmosférico (Lemes e Moura, 2002).

1.3 Conceitos relacionados à geofísica

Quando se trabalha com escoamentos geofísicos, existem conceitos que são de comum conhecimento tanto nos modelos atmosféricos quanto nos oceanográficos. A seguir são abordados alguns desses conceitos.

1.3.1 O número de Rossby

Ao trabalhar com escoamentos geofísicos, muitas vezes depara-se com movimentos em grande escala. Esses movimentos são aqueles que são significativamente influenciados pela rotação da Terra. Uma medida importante para analisar se um movimento é de grande escala e a influência da rotação da Terra em um fenômeno particular é o número de Rossby.

Considere L um comprimento de escala característico e U uma velocidade horizontal característica do movimento. Assim, o tempo que um elemento de fluido com velocidade U leva para percorrer uma distância L é L/U .

Para que a rotação da Terra seja importante para o fenômeno em questão deve-se ter

$$\frac{L}{U} \geq \Omega^{-1}, \quad (1.5)$$

onde Ω é a velocidade angular de rotação da Terra, comumente dada por $\Omega = 7,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Caso contrário, se o período de tempo for muito menor que o período de rotação da Terra, o fluido pode mal sentir o efeito da rotação para tal escala de tempo do movimento.

A equação (1.5) pode ser escrita em uma forma equivalente:

$$R_o = \frac{U}{2\Omega L} \leq 1. \quad (1.6)$$

O parâmetro R_o é o número adimensional conhecido como *número de Rossby*. Através desse adimensional, define-se um escoamento de grande escala como sendo

aquele cujo comprimento de escala L é grande o suficiente para tornar R_o de ordem 1 ou menor.

1.3.2 Força de Coriolis

A força de Coriolis é uma *força aparente* que resulta da rotação diária da Terra. Essa força é denominada aparente devido ao fato de existir somente em referenciais em rotação. Na forma vetorial, a força de Coriolis por unidade de massa é expressa por

$$\mathbf{F}_C = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (1.7)$$

A velocidade de uma partícula de fluido é perpendicular à força de Coriolis. Por esse motivo, a força de Coriolis somente é capaz de alterar a direção e não a magnitude do vetor velocidade (Marshall e Plumb, 2007), ou seja,

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.8)$$

Desse modo, essa força tende a desviar o movimento de uma parcela de fluido para a direita, no hemisfério norte, e para a esquerda no hemisfério sul, como visto na Figura 1.1.

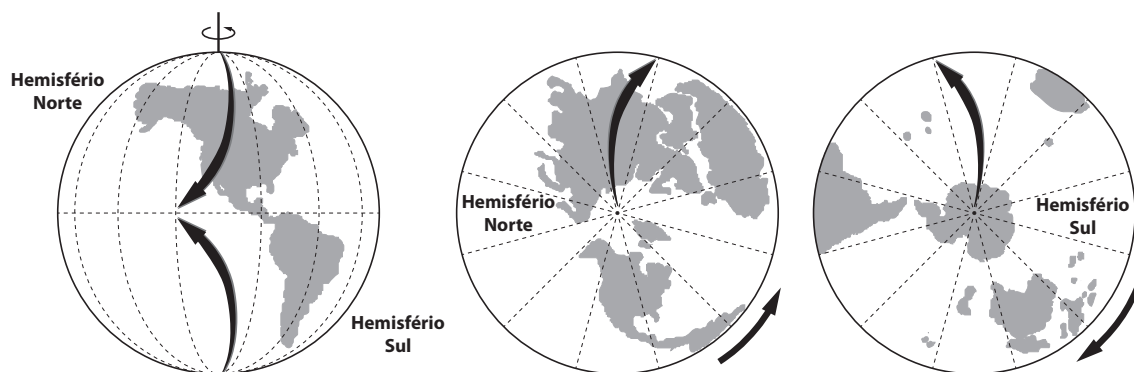


Figura 1.1: Efeito da força de Coriolis em uma partícula de fluido.

Para os propósitos deste trabalho, utiliza-se um sistema local de coordenadas cartesianas para representar a força de Coriolis, negligenciando a curvatura da Terra.

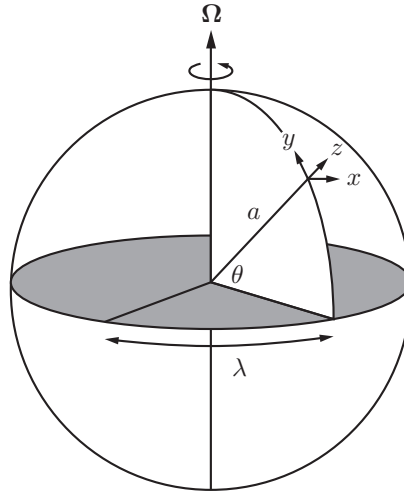


Figura 1.2: Sistema de coordenadas locais, para uma latitude (θ) e longitude (λ) fixas, onde a é o raio da Terra.

Conforme a Figura 1.2, na latitude θ , define-se um sistema de coordenadas locais, tal que as três coordenadas nas direções x , y e z , apontam na direções leste, norte e vertical, respectivamente. As componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ nesse sistema de coordenadas são $(0, \Omega \cos \theta, \Omega \sin \theta)$. Assim,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} &= (0, \Omega \cos \theta, \Omega \sin \theta) \times (u, v, w) \\ &= (\Omega w \cos \theta - \Omega v \sin \theta, \Omega u \sin \theta, -\Omega u \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.9)$$

A partir da equação anterior, é possível fazer algumas simplificações. Primeiramente, pode-se desprezar a componente vertical da equação (1.9), considerando $\Omega u \ll g$. Essa relação frequentemente é satisfeita para a atmosfera e oceano. Em seguida, devido a pequena espessura da camada atmosférica e oceânica, as velocidades verticais (tipicamente $\leq 1 \text{ cm/s}$) são muito menores que as velocidades horizontais. Assim, é possível desprezar o termo envolvendo w , na componente x , em $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$. Logo, o

termo de Coriolis é escrito como:

$$\begin{aligned} -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} &\simeq (2\Omega v \sin \theta, -2\Omega u \sin \theta, 0) \\ &= -f\mathbf{k} \times \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

onde \mathbf{k} é o vetor unitário na direção z (vertical) e $f = 2\Omega \sin \theta$ é definido como o *parâmetro de Coriolis*.

A força de Coriolis depende da velocidade do corpo em relação ao referencial em rotação e é nula, por definição, no caso de um corpo imóvel em relação a esse referencial. A componente vertical da força de Coriolis é muito menor que a gravidade, deste modo ela pouco afeta os movimentos verticais.

1.3.3 Ondas de Gravidade

Ondas de gravidade são ondas geradas em um meio fluido, ou na interface entre dois meios (por exemplo, entre a atmosfera e o oceano), que ocorrem devido à interação de duas forças: o empuxo (que tende a fazer com que matéria no meio flutue) e a gravidade (que puxa a matéria em direção à superfície terrestre).

Ondas de gravidade com escalas horizontais maiores que a algumas centenas de quilômetros e períodos maiores que algumas horas são influenciadas pelo efeito de Coriolis. Essas ondas, afetadas pela rotação da Terra, são denominadas *ondas de gravidade inerciais* (Holton, 2004).

Uma forma de perceber a influência da rotação da Terra no escoamento é o *raio de deformação de Rossby*, $R_d = \sqrt{gH}/f$, onde g é a gravidade e H é a profundidade média do escoamento. Esse parâmetro determina quando os efeitos da rotação tornam-se tão importantes quanto o empuxo ou a gravidade. Por exemplo, para uma latitude de $45^\circ N$ o parâmetro de Coriolis é $f = 10^{-4} s^{-1}$. Considerando um escoamento com profundidade $H = 4 km$, têm-se o raio de deformação $R_d = 2000 km$, para $H = 40 m$ tem-se $R_d = 200 km$. Assim, para que o escoamento sinta

a influência da rotação da Terra ele deve ter um comprimento horizontal maior do que os raios mostrados anteriormente, com suas respectivas profundidades.

1.3.4 Ondas de Rossby

As ondas de Rossby, também conhecidas como ondas planetárias, são fenômenos naturais intrigantes. Elas são facilmente observadas na atmosfera, mas sua existência nos oceanos foi primeiramente estudada por *Carl-Gustav Arvid Rossby*, na década de 1930, e indiretamente comprovada antes mesmo da chegada de satélites oceanográficos.

Essas ondas são difíceis de serem observadas, o que é causado pela grande diferença entre as escalas horizontal e vertical. A escala horizontal dessas ondas é da ordem de centenas de quilômetros, enquanto que a amplitude de oscilação (escala vertical) na superfície do mar é de poucos centímetros.

Outra característica é que elas deslocam-se do leste para o oeste e não viajam rapidamente, sua velocidade é da ordem de poucos cm/s variam com a latitude e aumentam no equador. Isso quer dizer que elas podem levar meses, ou até anos para atravessar inteiramente uma bacia oceânica. Além disso, a existência das ondas de Rossby está associada a variação do parâmetro de Coriolis com a latitude.

1.3.5 Plano Beta

Uma aproximação na qual o parâmetro de Coriolis, f , varia linearmente no espaço é chamada aproximação do *plano beta*. Essa aproximação consiste em tratar uma região da superfície da Terra como sendo localmente achatada. Para isso, faz-se uma expansão em série de Taylor do parâmetro de Coriolis sobre uma latitude de referência, θ_0 , da região de interesse.

Seja Y a distância de latitude que é zero no equador, aumenta para o norte e diminui para o sul. Pode-se escrever,

$$Y = r_0\theta, \quad (1.11)$$

onde r_0 é o raio da Terra e θ é a latitude. A variação de f em relação a uma latitude de referência θ_0 é:

$$\Delta f = f - f_0. \quad (1.12)$$

Expandindo f em série de Taylor, em torno de θ_0 , e desprezando o termo de segunda ordem, tem-se

$$f = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial Y} Y, \quad (1.13)$$

e pela equação (1.12) e a regra da cadeia,

$$\Delta f = \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial Y} Y. \quad (1.14)$$

Note que, pela equação (1.11) tem-se $\partial\theta/\partial Y = 1/r_0$, de onde segue que

$$\Delta f = \frac{1}{r_0} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} Y. \quad (1.15)$$

Com $f = 2\Omega \sin(\theta)$, tem-se

$$\frac{\partial f_0}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta_0) = 2\Omega \cos(\theta_0). \quad (1.16)$$

Como o interesse está relacionado na aproximação em um plano, xy , a partir de latitude de referência, θ_0 , pode-se escrever a aproximação do parâmetro de Coriolis por

$$f \sim f_0 + \beta_0 y, \quad \beta_0 y \ll f_0, \quad (1.17)$$

onde

$$f_0 = 2\Omega \sin(\theta_0), \quad (1.18)$$

$$\beta_0 = \frac{2\Omega}{r_0} \cos(\theta_0). \quad (1.19)$$

O fato da aproximação do plano beta permitir a variação do parâmetro de Coriolis com a latitude possibilita o estudo de fenômenos como as ondas de Rossby, descritas na seção anterior. O uso dessa aproximação é ilustrado na Seção 6.4 através da análise do comportamento de ondas de Rossby em um domínio quadrado.

2 AS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

No estudo de geofísica, é muito comum deparar-se com situações em que o comprimento da onda é muito maior que o comprimento da camada de fluido considerada, fazendo com que a componente vertical da velocidade seja desprezada diante das componentes horizontais.

Neste trabalho o interesse está voltado para essas situações, governadas pelos modelos de águas rasas, onde a profundidade H é muito menor que o comprimento de onda ou comprimento característico do corpo de água L , $H \ll L$.

Ao fazer a dedução das equações, algumas hipóteses são feitas implicitamente:

- o fluido é incompressível;
- o fluido está disposto sobre uma superfície plana;
- o atrito entre o fluido e o fundo é desprezado;
- o fluido está em equilíbrio hidrostático (há um balanço de forças entre o gradiente de pressão e o campo gravitacional).

Antes de realizar a derivação das equações de águas rasas introduz-se algumas equações básicas da mecânica de fluidos.

2.1 Equação da Continuidade

Na ausência de fontes ou sumidouros dentro do fluido, a condição da conservação de massa é dada pela equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.1)$$

A equação (2.1) indica que um crescimento local de densidade com o tempo deve ser balanceado por uma divergência do fluxo de massa $\rho\mathbf{u}$. Essa equação pode também ser reescrita, por

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

onde

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (2.3)$$

é a *derivada total*¹ com respeito ao tempo.

2.2 Equação de Momento

A equação de momento vem da segunda lei de Newton, trata das forças que atuam sobre um elemento de fluido. Essa equação é dada por

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\nabla\phi + \mathcal{F}(\mathbf{u}), \quad (2.4)$$

ou seja, a massa por unidade de volume vezes a aceleração é igual a soma do gradiente de pressão, a força de corpo $\rho\nabla\phi$ e a força $\mathcal{F}(\mathbf{u})$, onde ϕ é o potencial pelo qual forças de corpo conservativas como a gravidade podem ser representadas. A força $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ é, a princípio, qualquer força não-conservativa, mas no nosso caso $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ é a força de fricção no fluido.

2.3 Equação de Momento em um Sistema de Referência em Rotação

No trabalho com escoamentos geofísicos deve-se ter preocupação com a influência da rotação da Terra no escoamento. Desta forma, a equação (2.4) precisa considerar o efeito dessa rotação (Kalnay, 2003).

¹Também conhecida como derivada material ou substancial.

Em um sistema de referência em rotação com referencial localizado no centro da Terra, a velocidade vista em uma estrutura inercial, \mathbf{u}_I , é dada pela velocidade na estrutura em rotação, \mathbf{u}_R , mais a velocidade devido ao efeito da rotação com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$, ou seja,

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.5)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição de uma partícula de fluido arbitrária, os índices I e R representam a velocidade em uma estrutura inercial e uma estrutura em rotação, respectivamente. A velocidade \mathbf{u}_I também é conhecida como velocidade absoluta e \mathbf{u}_R , como velocidade relativa.

Na verdade, a equação (2.5) é o caso particular da fórmula geral relacionando a derivada total no tempo de um vetor qualquer, \mathbf{A} , em uma estrutura em rotação à sua derivada total em uma estrutura inercial, ou seja,

$$\left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right)_I = \left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (2.6)$$

Uma derivação completa da equação (2.6) pode ser vista em Pedlosky (1986, pág. 14-17).

Aplicando a equação (2.6) a \mathbf{u}_I tem-se,

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt} \right)_I = \left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt} \right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I \quad (2.7)$$

e substituindo (2.5) em (2.7) pode-se notar que a aceleração em uma estrutura inercial e uma estrutura em rotação está relacionada por

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt} \right)_I &= \left(\frac{D\mathbf{u}_R}{Dt} \right)_R + \frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \\ \left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt} \right)_I &= \left(\frac{D\mathbf{u}_R}{Dt} \right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A diferença existente entre estruturas em rotação e a inercial fornece os três termos adicionais no lado direito da equação (2.8). Eles são a aceleração de Coriolis

(segundo termo), a aceleração centrífuga (terceiro termo) e a aceleração devido a variação na própria taxa de rotação (quarto termo). Neste trabalho, $\boldsymbol{\Omega}$ é considerado uma constante, assim o último termo do lado direito de (2.8) é desprezado. Note que lado esquerdo da equação (2.8) foi descrito anteriormente através da equação (2.4). Portanto, em uma estrutura em rotação movendo-se com a Terra, a aceleração aparente é dada por

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_R}{Dt}\right)_R = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\phi - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{\rho}\mathcal{F}. \quad (2.9)$$

A aceleração centrífuga pode ser reescrita em termos de \mathbf{r}_\perp , ou seja,

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_\perp), \quad (2.10)$$

onde \mathbf{r}_\perp é definido como o vetor de distância perpendicular do eixo de rotação à posição do elemento de fluido em \mathbf{r} , conforme Figura 2.1.

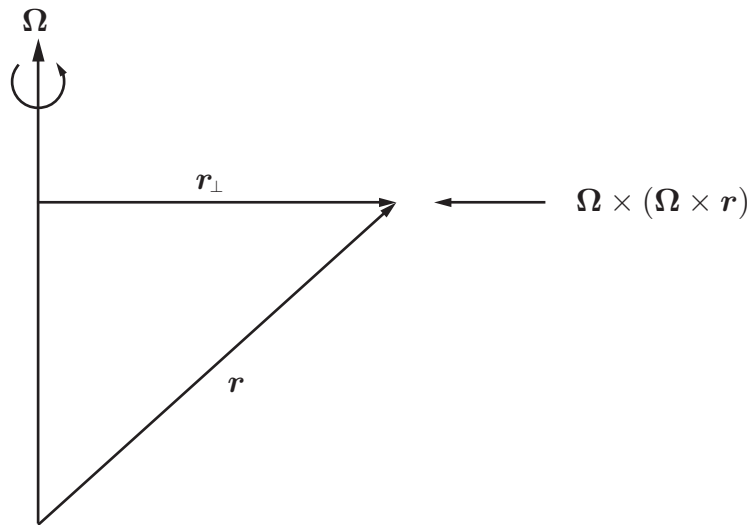


Figura 2.1: Aceleração centrífuga, $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$

Como consequência, obtém-se a equação

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -|\boldsymbol{\Omega}|^2 \mathbf{r}_\perp, \quad (2.11)$$

com o auxílio da fórmula do triplo produto vetorial, dada por

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (2.12)$$

Desse modo, pode-se escrever a força centrífuga como uma função potencial, ϕ_c , já que,

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla\phi_c, \quad (2.13)$$

e assim definir o potencial total $\Phi = \phi + \phi_c$, onde

$$\phi_c = \frac{|\boldsymbol{\Omega}|^2 |\mathbf{r}_\perp|^2}{2} = \frac{|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2}{2}. \quad (2.14)$$

Logo, a equação do momento para um observador em um sistema de coordenadas em rotação é

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\Phi - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\mathcal{F}, \quad (2.15)$$

onde \mathbf{u} é a velocidade vista em um sistema em rotação.

2.4 O modelo de Águas Rasas

Considere uma camada de fluido com densidade constante, como mostrado na Figura 2.2. A altura da camada de fluido, partindo de $z = 0$, é $h(x, y, t)$.

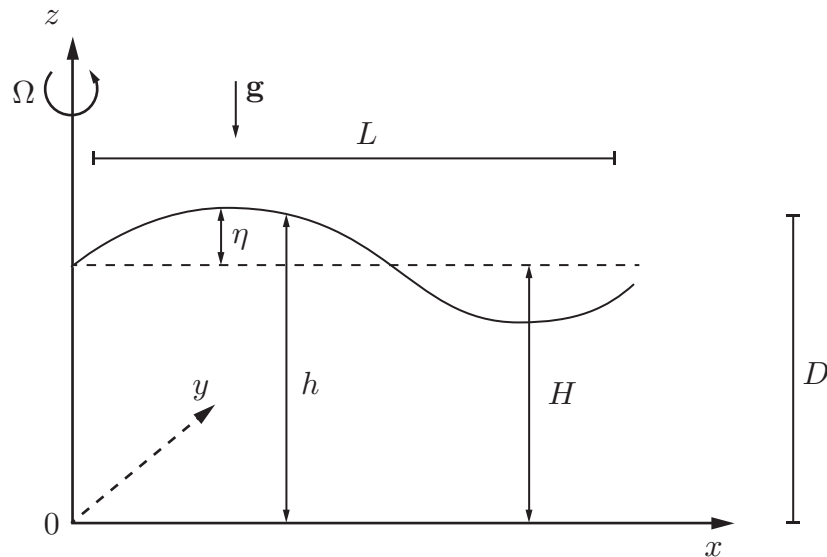


Figura 2.2: A profundidade total $h(x, y, t)$ é definida como a soma da profundidade de referência, H , e a flutuação η : $h(x, y, t) = H(x, y) + \eta(x, y, t)$

A força de corpo que decorre do potencial Φ é modelada como o vetor gravidade, $\mathbf{g} = -\mathbf{k}g$, perpendicular ao plano xy , ou seja, $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. O eixo de rotação é o mesmo que o eixo z , i.e., $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{k}\Omega$. Dessa forma pode-se simplificar o parâmetro de Coriolis, escrevendo $f = 2\Omega$. O fundo da camada de fluido é definido pela superfície $z = 0$. Denota-se u, v e w as componentes da velocidade paralelas aos eixos x, y e z , respectivamente. Finalmente, despreza-se os movimentos cuja viscosidade não é importante.

Além disso, pode-se escolher escalas características para a profundidade do fluido e para o comprimento horizontal denotadas por D e L , respectivamente. A partir dessas escalas pode-se caracterizar a condição paramétrica fundamental para escoamentos em águas rasas, ou seja,

$$\delta = \frac{D}{L} \ll 1. \quad (2.16)$$

Como a densidade ρ é contante, a partir da equação (2.1), tem-se a condição de incompressibilidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.17)$$

Os dois primeiros termos da equação (2.17) são $O(U/L)$, onde U é a escala característica para a velocidade horizontal². Para a velocidade vertical, a escala característica é denota por W , logo

$$\frac{W}{D} \sim O(U/L) \quad (2.18)$$

e por (2.16),

$$W \sim O(\delta U). \quad (2.19)$$

Para estimar os termos da equação de momento, escreve-se na forma de componentes a equação (2.15), com suas respectivas ordens de magnitude, considerando a equação sem viscosidade. Tem-se:

²O símbolo $O()$ denota a ordem do termo entre parênteses e é usado para quantificá-lo.

Na direção x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}, \quad (2.20)$$

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{UW}{D} \quad fU = \frac{P}{\rho L}, \quad (2.21)$$

Na direção y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}, \quad (2.22)$$

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{UW}{D} \quad fU = \frac{P}{\rho L}, \quad (2.23)$$

Na direção z :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}, \quad (2.24)$$

$$\frac{W}{T} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{WW}{D} = \frac{P}{\rho D}, \quad (2.25)$$

onde T denota a escala característica para o tempo, enquanto que P é a escala característica para o campo da pressão. Note que, na equação de momento, a pressão total foi definida como

$$p(x, y, z, t) = \rho g z + \tilde{p}(x, y, z, t). \quad (2.26)$$

Observe que por (2.19),

$$\frac{UW}{D} \sim \frac{U}{D} O(\delta U) \sim \frac{U}{D} O\left(\frac{DU}{L}\right), \quad (2.27)$$

assim,

$$\frac{UW}{D} \sim O\left(\frac{U^2}{L}\right). \quad (2.28)$$

Desse modo, pode-se obter a escala característica para pressão a fim de que o gradiente de pressão seja importante na equação de balanço de momento horizontal. Em (2.21) ou (2.23) faz-se

$$P = \rho L \left[\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{UW}{D} \quad fU \right], \quad (2.29)$$

usando (2.28), tem-se

$$P = \rho L \left[\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad fU \right], \quad (2.30)$$

$$P = \rho U \left[\frac{L}{T} \quad U \quad U \quad U \quad fL \right], \quad (2.31)$$

$$P = \rho U \left[\frac{L}{T}, U, fL \right]_{\max}, \quad (2.32)$$

ou seja, a escala para a pressão depende de ρU e do maior de um dos três termos entre colchetes. Por sua vez, a razão entre os termos do lado esquerdo de (2.24) e a componente vertical do gradiente de pressão resulta em

$$O \left(\rho \frac{Dw/Dt}{\partial \tilde{p}/\partial z} \right) \sim \frac{\rho [W/T \quad UW/L \quad UW/L \quad WW/D]}{P/D}, \quad (2.33)$$

$$O \left(\rho \frac{Dw/Dt}{\partial \tilde{p}/\partial z} \right) \sim \frac{\rho [W/T \quad UW/L \quad UW/L \quad W/T]}{P/D}, \quad (2.34)$$

note que $W/D = 1/T$, na equação anterior, dessa forma essa razão é limitada pelo máximo dentre os termos no lado direito de (2.34), ou seja,

$$O \left(\rho \frac{Dw/Dt}{\partial \tilde{p}/\partial z} \right) \sim \frac{\rho [W/T, UW/L]_{\max}}{P/D}, \quad (2.35)$$

ou usando (2.32),

$$\rho \frac{Dw/Dt}{\partial \tilde{p}/\partial z} = \frac{\rho [W/T, UW/L]_{\max}}{\rho U [L/T, U, fL]_{\max} / D} = \frac{D [W/T, UW/L]_{\max}}{U [L/T, U, fL]_{\max}} \quad (2.36)$$

$$= \frac{DW [1/T, U/L]_{\max}}{UL [1/T, U/L, f]_{\max}} = \delta \frac{W [1/T, U/L]_{\max}}{U [1/T, U/L, f]_{\max}}. \quad (2.37)$$

Note que com $W = D/T$ e $U = L/T$ podemos reescrever a última expressão,

$$\rho \frac{Dw/Dt}{\partial \tilde{p}/\partial z} = \delta \frac{D/T [1/T, U/L]_{\max}}{L/T [1/T, U/L, f]_{\max}}. \quad (2.38)$$

Assim,

$$\rho \frac{Dw/Dt}{\partial \tilde{p}/\partial z} = \delta^2 \frac{[1/T, U/L]_{\max}}{[1/T, U/L, f]_{\max}}. \quad (2.39)$$

Pode-se ainda olhar (2.39) de outra maneira multiplicando numerador e denominador por $1/f$. Tem-se,

$$\rho \frac{Dw/Dt}{\partial \tilde{p}/\partial z} = \delta^2 \frac{[1/fT, U/fL]_{\max}}{[1/fT, U/fL, 1]_{\max}}. \quad (2.40)$$

Desse modo, pode-se analisar a estimativa (2.40) de duas maneiras. Se o número de Rossby é $O(1)$ ou maior, a estimativa resulta em $O(\delta^2)$. Se o número de Rossby é pequeno, a estimativa é $O(\delta^2 [1/fT, U/fL]_{\max})$, que para Rossby pequeno é ainda menor que $O(\delta^2)$. Assim,

$$\rho \frac{Dw}{Dt} \sim O(\delta^2) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}. \quad (2.41)$$

Como por hipótese $\delta \ll 1$, então δ^2 é ainda muito menor. Portanto o termo $O(\delta^2) \partial \tilde{p} / \partial z$ é negligenciável e a equação (2.24) pode ser ignorada. Isso significa que em termos da pressão total tem-se

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + O(\delta^2) \quad (2.42)$$

que é a aproximação do equilíbrio hidrostático.

Como o segundo termo na equação (2.42) é desprezado, pode-se fazer uma integração e obter

$$p = -\rho g z + A(x, y, t). \quad (2.43)$$

Como condição de contorno na superfície usa-se a pressão atmosférica, p_0 , ou seja

$$p(x, y, h) = p_0. \quad (2.44)$$

Desse modo, $A(x, y, t) = p_0 + \rho g h$ e obtemos

$$p = \rho g(h - z) + p_0. \quad (2.45)$$

Pode-se notar também que o gradiente de pressão horizontal independe de z , i.e.,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (2.47)$$

e a aceleração horizontal deve ser independente de z . Portanto, temos apenas a equação de momento no plano dada na forma de componentes por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -g \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (2.49)$$

A condição que u e v independem de z permite integrar verticalmente a equação (2.17) de $z = 0$ a $z = h$. Assim,

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = - \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz, \quad (2.50)$$

$$w|_{z=h} - w|_{z=0} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.51)$$

Na superfície, a velocidade vertical é a derivada material da posição de um elemento de fluido em particular. Mas, a posição do fluido na superfície é h , assim:

$$w|_{z=h} = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (2.52)$$

Similarmente, a ausência de escoamento no fundo da camada de fluido, $z = 0$, na direção normal, fornece $w|_{z=0} = 0$. Desse modo, substituindo em (2.51), tem-se

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.53)$$

Assim, a equação (2.53) resulta em

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0. \quad (2.54)$$

Nos casos estudados neste trabalho, as equações são modeladas sobre um fundo plano e considerando uma camada de fluido com ausência de movimento, onde essa camada, H , está a uma profundidade constante. Assim, pode-se definir uma profundidade total

$$h(x, y, t) = H + \eta(x, y, t), \quad (2.55)$$

onde η é a variação da altura do fluido na superfície.

Portanto, as equações de águas rasas (2.48)-(2.49) e (2.54) na forma vetorial são

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta = 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot ((H + \eta) \mathbf{u}) = 0, \quad (2.57)$$

onde, por simplicidade, a partir deste ponto adota-se $\mathbf{u} = [u, v]$ como o vetor velocidade no plano, f é o parâmetro de Coriolis e \mathbf{k} é um vetor unitário na direção vertical.

2.4.1 Equações Linearizadas

O estudo das equações linearizadas de águas rasas é motivado pela análise de movimentos de pequena amplitude, que permitem a linearização das equações de movimento.

Para obter as equações lineares, considera-se a definição de profundidade total dada pela equação (2.55). A condição que a amplitude é pequena implica que $\eta \ll H$. Além disso, supõe-se que \mathbf{u} é pequeno o suficiente tal que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \gg \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (2.58)$$

Portanto, a forma linearizada das equações (2.56)-(2.57), ignorando todos os termos quadráticos nas variáveis \mathbf{u} e η com respeito aos termos lineares, são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f\mathbf{k} \times \mathbf{u} + g\nabla\eta = 0, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.60)$$

As equações lineares de águas rasas permitem analisar mecanismos fundamentais que ocorrem em situações mais complicadas. Desse modo, as equações lineares descritas nesta seção, serão utilizadas no decorrer de todo o trabalho a fim de diagnosticar possíveis problemas que surgiriam com o uso de diferentes esquemas de discretização espacial. Esse entendimento é importante para que o esquema discreto esteja apto para resolver problemas mais complexos como, por exemplo, equações não-lineares.

3 SOLUÇÃO ANALÍTICA E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Para alguns casos, é possível obter a solução analítica da equação de águas rasas. Neste capítulo é realizada, a obtenção da solução analítica das equações (2.59)-(2.60), com a condição de contorno $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ (Roux et al., 1998).

Além disso, as equações de conservação de massa e energia são obtidas a partir das equações de águas rasas do problema modelo estudado neste trabalho.

3.1 Solução analítica da Equação de Águas Rasas para o caso $f = 0$

Para obtenção da solução analítica, adota-se a velocidade inicial e parâmetro de Coriolis ambos igual zero. Assim, aplicando o operador divergente na equação (2.59) e multiplicando por H , obtém-se

$$H \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u} + gH \Delta \eta = 0. \quad (3.1)$$

Derivando com relação ao tempo a equação (2.60), resulta em

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + H \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.2)$$

Igualando as equações (3.1) e (3.2), a seguinte equação da onda de segunda ordem é obtida:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gH \Delta \eta = 0. \quad (3.3)$$

A simetria circular da solução (a solução não depende da variação angular) é preservada pela ausência do termo de Coriolis. Assim é possível simplificar o operador laplaciano, que dependerá apenas da variação radial, e obter a equação em coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 < t < \infty \quad (3.4)$$

onde $c = \sqrt{gH}$. Sujeita as condição de fronteira

$$\eta_r(R, t) = 0, \quad \text{para } t > 0, \quad (3.5)$$

com ausência de singularidades na origem. As condições iniciais são:

$$\eta(r, 0) = ae^{-br^2}, \quad \text{para } 0 \leq r \leq R \quad (3.6)$$

$$\eta_t(r, 0) = 0, \quad \text{para } 0 \leq r \leq R \quad (3.7)$$

onde a condição (3.7) surge da imposição da velocidade inicial zero.

Para resolver este problema, utiliza-se o método da separação de variáveis. Sendo assim, procura-se uma solução da forma $\eta(r, t) = R(r)T(t)$. Substituindo na equação (3.4) e separando as variáveis, tem-se:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{R' + rR''}{rR} = \lambda, \quad (3.8)$$

dando origem as equações:

$$T'' - \lambda c^2 T = 0, \quad (3.9)$$

$$rR'' + R' - \lambda rR = 0. \quad (3.10)$$

Note que deve-se ter $\lambda < 0$, em (3.9), pois caso contrário a equação (3.10) não teria solução que satisfizesse (3.5). Pondo $\lambda = -\mu^2$, obtém-se a solução:

$$T(t) = C_1 \cos(c\mu t) + C_2 \sin(c\mu t). \quad (3.11)$$

Aplicando a condição inicial imposta em (3.7), tem-se $T'(0) = C_2 c\mu = 0$. Conclui-se que $C_2 = 0$ e a solução é dada apenas por:

$$T(t) = C_1 \cos(c\mu t). \quad (3.12)$$

Por outro lado, multiplica-se por r a equação (3.10) e fazendo a mudança de variável $s = \mu r$, tem-se:

$$s^2 \frac{d^2 R}{ds^2} + s \frac{dR}{ds} + sR = 0, \quad (3.13)$$

que é a equação de Bessel de índice 0. A solução, portanto, é

$$R(r) = AJ_0(\mu r) + BY_0(\mu r). \quad (3.14)$$

No entanto, deve-se ter $B = 0$ em (3.14), pois a solução deve ser finita e bem definida em $r = 0$, pois é a origem do disco. Obtendo, assim,

$$\eta(r, t) = AJ_0(\mu r) \cos(c\mu t). \quad (3.15)$$

A condição de contorno (3.5), implica que $J_1(\mu R) = 0$, isto é, $\mu = \mu_n$ são zeros da função de Bessel J_1 . Encontramos então as soluções

$$\eta_n(r, t) = A_n J_0(\mu_n r) \cos(c\mu_n t) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.16)$$

para a equação diferencial e condições de fronteira. Fazendo a superposição, finalmente obtém-se a solução da equação diferencial:

$$\eta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) \cos(c\mu_n t). \quad (3.17)$$

Usando a condição inicial (3.6), deve-se ter a série de Fourier-Bessel

$$ae^{-br^2} = \eta(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r). \quad (3.18)$$

Pela ortogonalidade das funções de Bessel (Churchill, 1941), os coeficientes A_n são:

$$A_n = \frac{\int_0^R \eta(r, 0) J_0(\mu_n r) r dr}{\int_0^R J_0^2(\mu_n r) r dr}. \quad (3.19)$$

A solução exibida nesta seção, é utilizada para fazer a comparação com solução discreta no capítulo 6.

3.2 Conservação de Massa e Energia

Para calcular a quantidade global de massa, é necessário integrar sobre todo o domínio da equação da continuidade em (2.60). Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \eta \, d\Omega + H \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0. \quad (3.21)$$

Aplicando o teorema divergência no segundo termo à esquerda de (3.21),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \eta \, d\Omega + H \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0, \quad (3.22)$$

e pela condição de contorno (3.5), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \eta \, d\Omega = 0.$$

Isso significa que para que haja a conservação de massa, a integral

$$\int_{\Omega} \eta \, d\Omega, \quad (3.23)$$

deve ser constante no decorrer do tempo.

Para obter a formulação da conservação da energia, o procedimento é um pouco diferente. Toma-se o produto escalar da equação (2.59) com uma velocidade \mathbf{u} e integra-se sobre Ω . Assim,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + g \nabla \eta \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0. \quad (3.24)$$

Note que,

$$\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{u}|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}, \quad \implies \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right). \quad (3.25)$$

Além disso, pela identidade $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$, tem-se

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.25) e (3.26) em (3.24), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} d\Omega + g \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \quad (3.27)$$

Para estimar o segundo termo do lado esquerdo de (3.27), multiplica-se a equação (2.60) por η e integra-se sobre Ω . Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial t} \eta + H(\nabla \cdot \mathbf{u}) \eta d\Omega = 0. \quad (3.28)$$

Sabendo que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \eta d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \mathbf{u} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.29)$$

já que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ em Γ .

Utilizando o mesmo argumento que levou a (3.25), para reescrever o primeiro termo do lado esquerdo de (3.28) e substituindo a equação (3.29) em (3.28), tem-se:

$$\int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \mathbf{u} d\Omega = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{\eta^2}{2} d\Omega. \quad (3.30)$$

Finalmente, substituindo (3.30) em (3.27) e fazendo algumas simplificações, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} H \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + g \frac{\eta^2}{2} d\Omega = 0. \quad (3.31)$$

Portanto, para que a energia seja conservada, a integral

$$\int_{\Omega} H \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + g \frac{\eta^2}{2} d\Omega, \quad (3.32)$$

deve ser constante no tempo.

4 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

Neste capítulo realiza-se a discretização das equações de águas rasas introduzidas no capítulo 2 e que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Para o processo de discretização, obtém-se a discretização espacial (semi-discretização) via método dos elementos finitos e em seguida a discretização temporal pelo método de Crank-Nicolson.

4.1 Discretização das Equações Lineares

Considere Ω o domínio do modelo com fronteira Γ . O problema linear para as equações de águas rasas é dado por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma \times (0, T), \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{em } \Omega, \quad (4.4)$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0 \quad \text{em } \Omega, \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{u} = [u, v]$ é o campo de velocidades no plano, η é a elevação do fluido, \mathbf{n} é a normal externa unitária, f é o parâmetro de Coriolis, g é a aceleração da gravidade e H é a profundidade média do fluido, considerada constante. Além disso, a velocidade inicial e elevação inicial são \mathbf{u}_0 e η_0 , respectivamente.

4.1.1 Semi-discretização

O primeiro passo para realizar a semi-discretização é obter a formulação fraca (ou variacional) das equações que modelam o problema. Para isso, define-se

os espaços de funções:

$$V = \{\boldsymbol{\phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{\phi} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \text{ e } \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma\} \text{ e}$$

$$W = \{\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \psi \in L^2(\Omega)\}.$$

Considere \mathbf{u} e η diferenciáveis em t tais que $\mathbf{u}(t) \in V$ e $\eta(t) \in W$ para cada $t \in [0, T]$. A formulação fraca das equações (4.1)-(4.2) é obtida integrando essas equações multiplicadas por um conjunto de funções testes $\boldsymbol{\phi}$ e ψ pertencentes ao mesmo espaço de \mathbf{u} e η , respectivamente,

$$\langle \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\phi} \rangle + f \langle \mathbf{k} \times \mathbf{u}, \boldsymbol{\phi} \rangle + g \langle \nabla \eta, \boldsymbol{\phi} \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in V, \quad (4.6)$$

$$\langle \eta_t, \psi \rangle + H \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, \psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in W. \quad (4.7)$$

Na equação (4.6) aplica-se o teorema de Green, para remover as derivadas na elevação e assim evitar impor condições de contorno no campo de elevação. Ou seja,

$$\langle \nabla \eta, \boldsymbol{\phi} \rangle = - \langle \eta, \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \rangle + \langle \eta, \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \rangle |_{\Gamma}. \quad (4.8)$$

Note que o segundo termo no lado direito de (4.8) se anula, pois $\boldsymbol{\phi} \in V$ e assim $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} = 0$ em Γ .

Portanto, a formulação variacional para o problema contínuo consiste em encontrar o par $(\mathbf{u}(t), \eta(t)) \in V \times W$, tal que

$$\langle \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\phi} \rangle + f \langle \mathbf{k} \times \mathbf{u}, \boldsymbol{\phi} \rangle - g \langle \eta, \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in V, \quad (4.9)$$

$$\langle \eta_t, \psi \rangle + H \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, \psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in W. \quad (4.10)$$

4.1.1.1 Método dos elementos finitos

No método dos elementos finitos, busca-se uma solução aproximada (\mathbf{u}^h, η^h) em um subespaço de dimensão finita (V^h, W^h) do espaço de dimensão infinita (V, W) . As soluções \mathbf{u}^h e η^h são exclusivamente polinomiais por partes e

não necessariamente do mesmo grau (Johnson, 1987). Desse modo, a partir da formulação variacional (4.9)-(4.10), o método dos elementos finitos é formulado como: Encontre $(\mathbf{u}^h, \eta^h) \in (V^h, W^h)$ tal que

$$\langle \mathbf{u}_t^h, \boldsymbol{\phi}^h \rangle + f \langle \mathbf{k} \times \mathbf{u}^h, \boldsymbol{\phi}^h \rangle - g \langle \eta^h, \nabla \cdot \boldsymbol{\phi}^h \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{\phi}^h \in V^h, \quad (4.11)$$

$$\langle \eta_t^h, \psi^h \rangle + H \langle \nabla \cdot \mathbf{u}^h, \psi^h \rangle = 0, \quad \forall \psi^h \in W^h. \quad (4.12)$$

As funções teste são introduzidas como $\phi_j \equiv \phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, N$ e $\psi_j \equiv \psi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, M$, onde N e M são os números de graus de liberdade para a velocidade e elevação respectivamente. Essas funções são funções polinomiais por partes que servem como base para gerar os espaços aproximantes V^h e W^h , respectivamente. Assim, para qualquer $(\mathbf{u}^h, \eta^h) \in V^h \times W^h$ tem-se as expressões

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j(t) \phi_j(\mathbf{x}), \quad (4.13)$$

$$\eta^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^M \eta_j(t) \psi_j(\mathbf{x}), \quad (4.14)$$

Fazendo uso de (4.13) e (4.14) pode-se resumir o problema (4.11)-(4.12) encontrando os valores nodais \mathbf{u}_j e η_j tais que

$$\sum_{j=1}^N \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} \langle \phi_m, \phi_j \rangle + f \sum_{j=1}^N (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_j) \langle \phi_m, \phi_j \rangle - \sum_{j=1}^M g \eta_j \langle \nabla \phi_m, \psi_j \rangle = 0, \quad m = 1, \dots, N, \quad (4.15)$$

$$\sum_{j=1}^M \frac{d\eta_j}{dt} \langle \psi_m, \psi_j \rangle + H \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j \cdot \langle \psi_m, \nabla \phi_j \rangle = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (4.16)$$

Até agora, obteve-se uma formulação de elementos finitos semi-discreta. Para obter a formulação discreta é necessário escolher um método de discretização temporal das derivadas. Com essa discretização temporal e o cálculo das integrais, na forma de produto interno nas equações (4.15)-(4.16), é possível obter um sistema linear no qual os valores nodais \mathbf{u}_j e η_j podem ser encontrados.

4.1.2 Discretização temporal

A discretização temporal que será empregada no problema modelo é baseada no esquema semi-implícito de Crank-Nicolson. Pode-se ilustrar o procedimento aplicando o esquema às equações (4.9)-(4.10). Assim,

$$\langle \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\phi} \rangle + \frac{f\Delta t}{2} \langle \mathbf{k} \times \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\phi} \rangle - \frac{g\Delta t}{2} \langle \eta^{n+1}, \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \rangle = \mathbf{R}^{u,n}, \quad (4.17)$$

$$\langle \eta^{n+1}, \psi \rangle + \frac{H\Delta t}{2} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, \psi \rangle = R^{\eta,n}, \quad (4.18)$$

onde

$$\mathbf{R}^{u,n} = \langle \mathbf{u}^n, \boldsymbol{\phi} \rangle - \frac{f\Delta t}{2} \langle \mathbf{k} \times \mathbf{u}^n, \boldsymbol{\phi} \rangle + \frac{g\Delta t}{2} \langle \eta^n, \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \rangle, \quad (4.19)$$

$$R^{\eta,n} = \langle \eta^n, \psi \rangle - \frac{H\Delta t}{2} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}^n, \psi \rangle. \quad (4.20)$$

Pode ser mostrado que a energia total do escoamento, descrita na seção 3.2, é conservada com a escolha de um esquema semi-implícito, como Crank-Nicolson, para discretização temporal. Com efeito, considere E a energia total do escoamento, cuja derivada é dada por

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(H \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + g \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) d\Omega. \quad (4.21)$$

Aplicando o método de Crank-Nicolson na equação anterior e nas equações (4.1) e (4.2), a seguinte expressão é obtida:

$$\begin{aligned} \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} &= \int_{\Omega} H \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} \cdot \left[-f \mathbf{k} \times \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} - g \nabla \left(\frac{\eta^{n+1} + \eta^n}{2} \right) \right] \\ &\quad + g \frac{\eta^{n+1} + \eta^n}{2} \left[-H \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} \right) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Com algumas manipulações algébricas e impondo a condição de contorno $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, obtém-se

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = -gH \int_{\Gamma} \frac{\eta^{n+1} + \eta^n}{2} \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \quad (4.23)$$

O método de Crank-Nicolson é um esquema cuja a convergência é de segunda ordem. Por ser um esquema semi-implícito, esse método fornece uma grande flexibilidade na escolha do passo de tempo.

5 PARES DE ELEMENTOS FINITOS

No decorrer deste trabalho, é feito o uso de diversos pares de elementos finitos. Para isso, vamos introduzir a notação usual para descrever os pares estudados.

A nomenclatura P_m-P_n significa que as componentes da velocidade e da elevação da superfície são representadas como polinômios definidos por partes de graus m e n , respectivamente.

5.1 O Par de Elementos P_1-P_1

O par de elementos P_1-P_1 tem grau 1 tanto para a velocidade quanto para a elevação. Na Figura 5.1 é ilustrado a disposição dos nós e o suporte compacto.

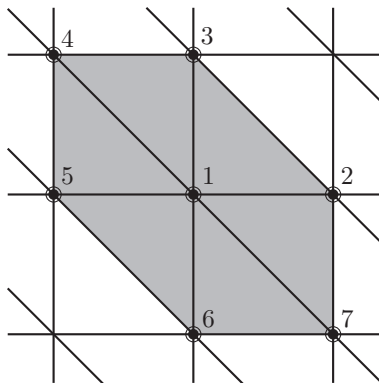


Figura 5.1: Os símbolos “●” e “○” indicam os nós de velocidade e elevação, respectivamente. A parte sombreada representa o suporte compacto do nó 1.

O par P_1-P_1 apresenta modos espúrios para a elevação da superfície, como é mostrado por Hanert et al. (2002); Roux et al. (1998) e Pierre (1988). Uma forma de verificar isso é calcular o espaço nulo do operador gradiente discretizado,

Q , definido como

$$Q\eta^h = \int_{\Omega_0} \eta^h \nabla \phi_i d\Omega, \quad (5.1)$$

onde Ω_0 é o suporte da função base ϕ_i correspondendo a um nó de velocidade denotado por i na Figura 5.2, na qual é indicada uma numeração apropriada.

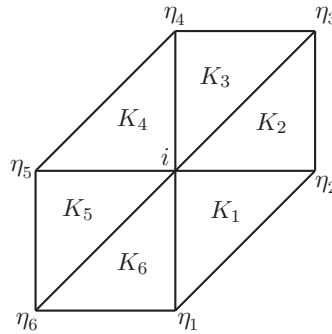


Figura 5.2: Nó da velocidade i e nós da elevação, ao redor, para o par P_1 - P_1 .

Para um triângulo de referência definido na Figura 5.3,

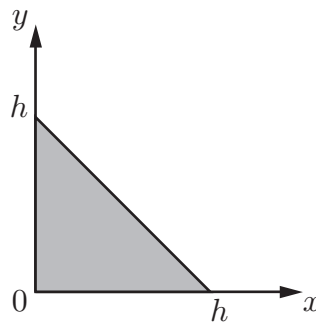


Figura 5.3: Triângulo de referência para o cálculo das funções base locais.

as funções base locais são dadas por:

$$\tilde{\phi}_1(x, y) = 1 - (x + y)/h, \quad (5.2)$$

$$\tilde{\phi}_2(x, y) = x/h, \quad (5.3)$$

$$\tilde{\phi}_3(x, y) = y/h. \quad (5.4)$$

e as componentes do gradiente de ϕ_i , no nó i , em cada triângulo são:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \begin{cases} -1/h & \text{em } K_1 \text{ e } K_2, \\ 0 & \text{em } K_3 \text{ e } K_6, \\ 1/h & \text{em } K_4 \text{ e } K_5, \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \begin{cases} -1/h & \text{em } K_3 \text{ e } K_4, \\ 0 & \text{em } K_2 \text{ e } K_5, \\ 1/h & \text{em } K_6 \text{ e } K_1. \end{cases}$$

Como o domínio de referência pode ser decomposto da forma $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^6 K_i$, o cálculo é feito sobre cada um dos triângulos e ao fim tudo é somado. Assim, expandindo η^h em termos da função base em (5.1) obtém-se um sistema linear 2×6 . Para verificar isso, tem-se

1ª Componente:

$$\begin{aligned} \int_{K_1} \eta^h \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega &= \int_{K_1} \eta_i \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \eta_1 \phi_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \eta_2 \phi_2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega \\ &= -\frac{1}{h} \int_{K_1} \eta_i \tilde{\phi}_1 + \eta_1 \tilde{\phi}_2 + \eta_2 \tilde{\phi}_3 d\Omega \\ &= -\eta_i \frac{h}{6} - \eta_1 \frac{h}{6} - \eta_2 \frac{h}{6}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{K_2} \eta^h \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega &= \int_{K_2} \eta_2 \phi_2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \eta_3 \phi_3 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \eta_i \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega \\ &= -\frac{1}{h} \int_{K_2} \eta_2 \tilde{\phi}_1 + \eta_3 \tilde{\phi}_2 + \eta_i \tilde{\phi}_3 d\Omega \\ &= -\eta_2 \frac{h}{6} - \eta_3 \frac{h}{6} - \eta_i \frac{h}{6}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\int_{K_3 \cup K_6} \eta^h \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega = 0, \quad \text{pois } \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = 0, \text{ em } K_3 \text{ e } K_6. \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \int_{K_4} \eta^h \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega &= \int_{K_4} \eta_i \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \eta_4 \phi_4 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \eta_5 \phi_5 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega \\ &= \frac{1}{h} \int_{K_4} \eta_i \tilde{\phi}_1 + \eta_4 \tilde{\phi}_2 + \eta_5 \tilde{\phi}_3 d\Omega \\ &= \eta_i \frac{h}{6} + \eta_4 \frac{h}{6} + \eta_5 \frac{h}{6}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \int_{K_5} \eta^h \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega &= \int_{K_5} \eta_5 \phi_5 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \eta_6 \phi_6 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \eta_i \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega \\ &= \frac{1}{h} \int_{K_5} \eta_5 \tilde{\phi}_1 + \eta_6 \tilde{\phi}_2 + \eta_i \tilde{\phi}_3 d\Omega \\ &= \eta_5 \frac{h}{6} + \eta_6 \frac{h}{6} + \eta_i \frac{h}{6}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

2ª Componente:

$$\begin{aligned}
\int_{K_1} \eta^h \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\Omega &= \int_{K_1} \eta_i \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \eta_1 \phi_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \eta_2 \phi_2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\Omega \\
&= \frac{1}{h} \int_{K_1} \eta_i \tilde{\phi}_1 + \eta_1 \tilde{\phi}_2 + \eta_2 \tilde{\phi}_3 d\Omega \\
&= \eta_i \frac{h}{6} + \eta_1 \frac{h}{6} + \eta_2 \frac{h}{6}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\int_{K_2 \cup K_5} \eta^h \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\Omega = 0, \quad \text{pois } \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = 0, \text{ em } K_2 \text{ e } K_5. \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
\int_{K_3} \eta^h \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\Omega &= \int_{K_3} \eta_4 \phi_4 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \eta_i \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \eta_3 \phi_3 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\Omega \\
&= -\frac{1}{h} \int_{K_3} \eta_4 \tilde{\phi}_1 + \eta_i \tilde{\phi}_2 + \eta_3 \tilde{\phi}_3 d\Omega \\
&= -\eta_4 \frac{h}{6} - \eta_i \frac{h}{6} - \eta_3 \frac{h}{6}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
\int_{K_4} \eta^h \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\Omega &= \int_{K_4} \eta_i \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \eta_4 \phi_4 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \eta_5 \phi_5 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\Omega \\
&= -\frac{1}{h} \int_{K_4} \eta_i \tilde{\phi}_1 + \eta_4 \tilde{\phi}_2 + \eta_5 \tilde{\phi}_3 d\Omega \\
&= -\eta_i \frac{h}{6} - \eta_4 \frac{h}{6} - \eta_5 \frac{h}{6}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
\int_{K_6} \eta^h \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\Omega &= \int_{K_6} \eta_1 \phi_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \eta_i \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \eta_6 \phi_6 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\Omega \\
&= \frac{1}{h} \int_{K_6} \eta_1 \tilde{\phi}_1 + \eta_i \tilde{\phi}_2 + \eta_6 \tilde{\phi}_3 d\Omega \\
&= \eta_1 \frac{h}{6} + \eta_i \frac{h}{6} + \eta_6 \frac{h}{6}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Com os cálculos realizados acima, tem-se para a primeira componente as expressões em (5.5), (5.6), (5.7), (5.8), (5.9) e para a segunda componente (5.10), (5.11), (5.12), (5.13), (5.14). Somando essas expressões e com algumas simplificações, têm-se

$$2(\eta_2 - \eta_5) + \eta_3 - \eta_4 + \eta_1 - \eta_6 = 0 \tag{5.15}$$

$$2(\eta_4 - \eta_1) + \eta_3 - \eta_2 + \eta_5 - \eta_6 = 0. \tag{5.16}$$

A solução geral de (5.15) e (5.16) é da forma

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6) = (a, b, c, a + d, b - d, c + d), \quad (5.17)$$

onde a, b, c, d são constantes quaisquer. Desse modo, existem quatro graus de liberdade correspondendo a quatro possíveis soluções. Uma dessas é o campo de elevação e as outras três são modos espúrios. Pela presença de modos espúrios na solução, o elemento P_1 - P_1 não parece ser um bom par para resolver águas rasas. No entanto, na Seção 5.4 é apresentada uma técnica de estabilização para esse par, a fim de suprimir esses modos espúrios. Assim, haverá o par P_1 - P_1 com um modelo de estabilização que aqui será denominado como P_1 - P_1 estabilizado.

5.2 O Par de Elementos P_2 - P_1

O par de elementos P_2 - P_1 também é conhecido como Taylor-Hood. Conforme a notação introduzida, esse par tem grau 2 para a velocidade e grau 1 para elevação. Na Figura 5.4 pode-se ver os nós onde são calculados velocidade e elevação.

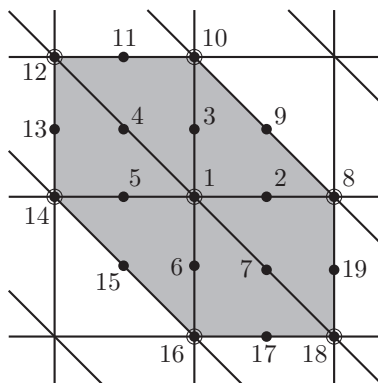


Figura 5.4: Os símbolos “●” e “○” indicam os nós onde são calculadas a velocidade e a elevação, respectivamente. A parte sombreada representa o suporte compacto do nó 1.

Este par não possui modos espúrios para o campo de velocidade ou elevação da superfície. No entanto, pode-se verificar uma dificuldade em representar

o balanço geostrófico com esse par de elementos. Para isso, considere a equação do balanço geostrófico,

$$f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -g \nabla \eta, \quad (5.18)$$

cuja formulação fraca é dada por:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega = -\frac{g}{f} \int_{\Omega} \eta \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega. \quad (5.19)$$

Resolvendo a equação (5.19) pelo método dos elementos finitos, utiliza-se uma expansão do tipo $\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{u}_i \phi_i$ e $\eta = \sum_j \eta_j \psi_j$. A solução discreta para a primeira componente da velocidade, u , para os nós 1, 2, 3 e 4, respectivamente, da Figura 5.4, são obtidas:

$$18u_1 - 2(u_9 + u_{11} + u_{13} + u_{15} + u_{17} + u_{19}) - (u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} + u_{16} + u_{18}) = 0, \quad (5.20)$$

$$16u_2 + 4(u_3 + u_7 + u_9 + u_{19}) - u_{10} - u_{18} = \frac{15g}{f} \frac{1}{h} (\eta_1 + \eta_{18} - \eta_8 - \eta_{10}), \quad (5.21)$$

$$16u_3 + 4(u_2 + u_4 + u_9 + u_{11}) - u_8 - u_{12} = \frac{30g}{f} \frac{1}{h} (\eta_1 - \eta_{10}), \quad (5.22)$$

$$16u_4 + 4(u_3 + u_5 + u_{11} + u_{13}) - u_{10} - u_{14} = \frac{15g}{f} \frac{1}{h} (\eta_1 + \eta_{14} - \eta_{10} - \eta_{12}). \quad (5.23)$$

Para ver o comportamento da amplitude de funções gaussianas, define-se as funções $u = \tilde{u} e^{i(kx+ly)}$ e $\eta = \tilde{\eta} e^{i(kx+ly)}$, onde k e l são números de onda nas direções x e y , respectivamente. Devido a simetria da função base, as amplitudes são exibidas nos nós 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Tem-se:

$$\tilde{u} = 0, \quad (5.24)$$

$$\tilde{u} = -\frac{g}{f} (il\tilde{\eta}) \left[\frac{\text{sen}(lh/2)}{(lh/2)} \frac{15 \cos(k-l)(h/2)}{8 + 4 \cos(lh/2) + 4 \cos(k-l)(h/2) - \cos(k-2l)(h/2)} \right], \quad (5.25)$$

$$\tilde{u} = -\frac{g}{f} (il\tilde{\eta}) \left[\frac{\text{sen}(lh/2)}{(lh/2)} \frac{15}{8 + 4 \cos(kh/2) + 4 \cos(k-l)(h/2) - \cos(2k-l)(h/2)} \right], \quad (5.26)$$

$$\tilde{u} = -\frac{g}{f} (il\tilde{\eta}) \left[\frac{\text{sen}(lh/2)}{(lh/2)} \frac{15 \cos(kh/2)}{8 + 4 \cos(kh/2) + 4 \cos(lh/2) - \cos(k+l)(h/2)} \right]. \quad (5.27)$$

A representação do balanço geostrófico é essencial quando se trata com escoamentos geofísicos. As amplitudes mostradas nas equações (5.24), (5.25), (5.26) e (5.27) são bem diferentes para cada um dos nós de velocidade. Isso leva a uma má representação do balanço geostrófico, principalmente para grandes números de onda, podendo deixar ruídos na solução discreta.

Apesar disso, esse par de elementos é muito utilizado para resolver as equações de Stokes e Navier-Stokes que, diferentemente das equações de águas rasas abordadas, possuem viscosidade e ausência da força de Coriolis. Do ponto de vista dessas equações, a influência desses termos pode esconder ruídos na obtenção da solução. Assim, visto que esse par de elementos tem uma boa performance no cálculo da solução discreta das equações de Stokes e Navier-Stokes, há um interesse neste trabalho em estudar a sua capacidade para resolver equações de águas rasas.

5.3 O Par de Elementos RT_0 - P_0

A notação RT_0 - P_0 indica um elemento com velocidade normal no meio da aresta de cada triângulo pertencente à discretização e P_0 é um elemento que é constante em cada partição da triangulação. O elemento RT_0 também é conhecido como o elemento de Raviart-Thomas e baseia-se na conservação do fluxo na aresta dos elementos da triangulação.

Para RT_0 , a velocidade é aproximada da seguinte forma:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=0}^{N_a} J_i \phi_i \quad (5.28)$$

com J_i sendo o fluxo normal através da aresta Γ_i e N_a o número de arestas da triangulação. Em um dado elemento Ω_e da triangulação, a função base é definida:

$$\phi_i(\mathbf{x})|_{\Omega_e} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{2|\Omega_e|}, \quad (5.29)$$

onde $|\Omega_e|$ é a área do elemento e \mathbf{x}_i são as coordenadas do vértice i oposto à aresta Γ_i . (Figura 5.5)

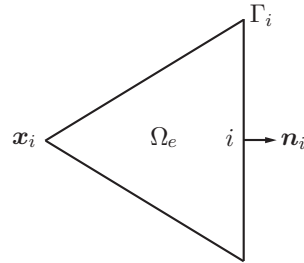


Figura 5.5: Notação para RT_0 - P_0 .

Para um elemento da triangulação, valem

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}|_{\Omega_e} = \frac{1}{|\Omega_e|}, \quad (5.30)$$

$$\boldsymbol{\phi}|_{\Omega_e} \cdot \mathbf{n}_m = \frac{\delta_{im}}{|\Gamma_m|}, \quad (5.31)$$

onde \mathbf{n}_m é a normal externa a aresta Γ_m , cujo comprimento é $|\Gamma_m|$.

O par de elementos RT_0 - P_0 não apresenta modos espúrios para a elevação, o que pode ser visto calculando a expressão equivalente a (5.1) para o suporte definido na Figura 5.6.

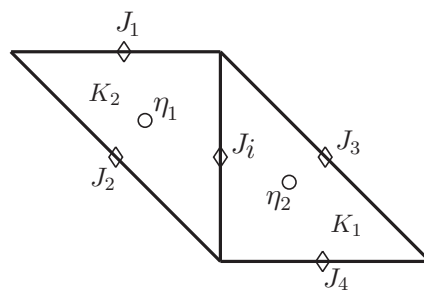


Figura 5.6: Suporte compacto do nó i . Os símbolos “◇” e “○” indicam os nós de velocidade normal e elevação, respectivamente, para o par de elementos RT_0 - P_0 .

Para realizar os cálculos, escreve-se a função base definida de acordo com a equação (5.29). A origem dos eixos coordenados x e y é fixada no nó i . Desse

modo, têm-se as funções base local para cada triângulo pertencente a triangulação:

$$\text{Em } K_1 \begin{cases} \tilde{\phi}_1(\mathbf{x}) = \left(\frac{x}{2|\Omega_e|}, \frac{y-h/2}{2|\Omega_e|} \right), \\ \tilde{\phi}_2(\mathbf{x}) = \left(\frac{x}{2|\Omega_e|}, \frac{y+h/2}{2|\Omega_e|} \right), \\ \tilde{\phi}_3(\mathbf{x}) = \left(\frac{x-h}{2|\Omega_e|}, \frac{y+h/2}{2|\Omega_e|} \right), \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{em } K_2 \begin{cases} \tilde{\phi}_1(\mathbf{x}) = \left(\frac{x}{2|\Omega_e|}, \frac{y+h/2}{2|\Omega_e|} \right), \\ \tilde{\phi}_2(\mathbf{x}) = \left(\frac{x}{2|\Omega_e|}, \frac{y-h/2}{2|\Omega_e|} \right), \\ \tilde{\phi}_3(\mathbf{x}) = \left(\frac{x+h}{2|\Omega_e|}, \frac{y-h/2}{2|\Omega_e|} \right). \end{cases}$$

Assim, pode-se avaliar os modos espúrios para elevação pelo espaço nulo do operador

$$\int_{\Omega_0} \eta^h \nabla \cdot \phi_i d\Omega, \quad (5.32)$$

onde Ω_0 é agora definido como suporte da função base da velocidade no nó i (Figura 5.6). Logo, tem-se

$$\int_{\Omega_0} \eta^h \nabla \cdot \phi_i d\Omega = \underbrace{\int_{K_1} \eta^h \nabla \cdot \phi_i d\Omega}_1 + \underbrace{\int_{K_2} \eta^h \nabla \cdot \phi_i d\Omega}_2 = 0. \quad (5.33)$$

Note que η^h é formado por funções base constantes. Desta maneira, o cálculo em cada triângulo resulta em:

$$\begin{aligned} 1) \quad \int_{K_1} \eta^h \nabla \cdot \phi_i d\Omega &= \int_{\partial K_1} \eta^h \phi_i \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma - \int_{K_1} \nabla \eta^h \cdot \phi_i d\Omega \\ &= \eta_2 \int_{\partial K_1} \phi_i \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \int_{K_2} \eta^h \nabla \cdot \phi_i d\Omega &= \int_{\partial K_2} \eta^h \phi_i \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma - \int_{K_2} \nabla \eta^h \cdot \phi_i d\Omega \\ &= \eta_1 \int_{\partial K_2} \phi_i \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Note que em (5.34) e (5.35) tem-se $\mathbf{n}_i|_{K_1} = -\mathbf{n}_i|_{K_2}$. Assim, pela propriedade (5.31), obtém-se

$$\eta_1 - \eta_2 = 0. \quad (5.36)$$

A solução de (5.36) só pode ser uma única constante do campo de elevação. Assim, pode-se concluir que o par de elementos RT_0 - P_0 não possui modos espúrios para a elevação.

Porém, esse par possui modos espúrios para a velocidade. Para ver isso, considera-se o operador de Coriolis discreto (F) e o seu espaço nulo. Assim, define-se:

$$F\mathbf{u}^h = \int_{\Omega_0} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}^h) \cdot \phi_i d\Omega, \quad (5.37)$$

Impondo que $F\mathbf{u}^h = 0$, tem-se:

$$F\mathbf{u}^h = \int_{\Omega_0} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}^h) \cdot \phi_i d\Omega = 0 \quad (5.38)$$

$$F\mathbf{u}^h = \underbrace{\int_{\Omega_0} -v\phi_i^x d\Omega}_1 + \underbrace{\int_{\Omega_0} u\phi_i^y d\Omega}_2 = 0, \quad (5.39)$$

os índices sobrescritos (x e y) indicam a primeira e segunda componente de ϕ_i .

1)

$$\int_{\Omega_0} -v\phi_i^x d\Omega = \underbrace{\int_{K_1} -v\phi_i^x d\Omega}_{1\Delta} + \underbrace{\int_{K_2} -v\phi_i^x d\Omega}_{1\Box} \quad (5.40)$$

1 Δ)

$$\begin{aligned} \int_{K_1} -v\phi_i^x d\Omega &= - \int_{K_1} J_4 \tilde{\phi}_1^y \tilde{\phi}_3^x + J_3 \tilde{\phi}_2^y \tilde{\phi}_3^x + J_i \tilde{\phi}_3^y \tilde{\phi}_3^x d\Omega \\ &= -J_4 \frac{5}{24} + J_3 \frac{1}{8} + J_i \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (5.41)$$

1 \Box)

$$\begin{aligned} \int_{K_2} -v\phi_i^x d\Omega &= - \int_{K_2} J_1 \tilde{\phi}_1^y \tilde{\phi}_3^x + J_2 \tilde{\phi}_2^y \tilde{\phi}_3^x + J_i \tilde{\phi}_3^y \tilde{\phi}_3^x d\Omega \\ &= -J_1 \frac{5}{24} + J_2 \frac{1}{8} + J_i \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (5.42)$$

2)

$$\int_{\Omega_0} u\phi_i^y d\Omega = \underbrace{\int_{K_1} u\phi_i^y d\Omega}_{2\Delta} + \underbrace{\int_{K_2} u\phi_i^y d\Omega}_{2\Box} \quad (5.43)$$

2Δ)

$$\begin{aligned} \int_{K_1} u \phi_i^y d\Omega &= \int_{K_1} J_4 \tilde{\phi}_1^x \tilde{\phi}_3^y + J_3 \tilde{\phi}_2^x \tilde{\phi}_3^y + J_i \tilde{\phi}_3^x \tilde{\phi}_3^y d\Omega \\ &= J_4 \frac{1}{24} + J_3 \frac{1}{24} - J_i \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (5.44)$$

2□)

$$\begin{aligned} \int_{K_2} v \phi_i^x d\Omega &= \int_{K_2} J_1 \tilde{\phi}_1^x \tilde{\phi}_3^y + J_2 \tilde{\phi}_2^x \tilde{\phi}_3^y + J_i \tilde{\phi}_3^x \tilde{\phi}_3^y d\Omega \\ &= J_1 \frac{1}{24} + J_2 \frac{1}{24} - J_i \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Somando os resultados obtidos em (5.41), (5.42), (5.44), (5.45), obtém-se a relação

$$J_1 - J_2 - J_3 + J_4 = 0, \quad (5.46)$$

que admite solução diferente de zero. Essas soluções também são chamadas de modos espúrios, mas elas podem ser filtradas adicionando um termo de viscosidade na equação de movimento, como mostrado na Seção 5.4.

5.4 Técnicas de Estabilização

Alguns dos elementos descritos neste trabalho possuem modos espúrios ou para a elevação da superfície ou para a velocidade. Para que esses elementos sejam aptos para o uso na solução numérica de águas rasas ou mesmo para problemas mais complexos, deve-se realizar algum procedimento para filtrar esses modos espúrios. Esses procedimentos, também conhecidos como técnicas de estabilização, são descritos por Hanert et al. (2002).

5.4.1 Modos Espúrios para a Elevação

A maneira mais fácil de controlar os modos espúrios para a elevação é adicionar um termo com Laplaciano na equação da continuidade. Assim, a equação

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \nabla \cdot \mathbf{u} = \alpha \Delta \eta \quad (5.47)$$

seria adotada ao invés da equação (4.2). O parâmetro α é uma difusividade apropriada que pode ser ajustado de modo a filtrar os modos espúrios. A discretização do termo $\Delta \eta$ tem um efeito de suavização. Porém, essa abordagem viola a consistência, isso porque uma solução exata de águas rasas não satisfaz a equação (5.47).

Uma estabilização consistente pode ser obtida através da formulação de mínimos quadrados de Petrov-Galerkin (Hanert e Legat, 2006), aplicando o operador divergência na equação (4.1). Desse modo, com um pouco de manipulação algébrica, tem-se

$$\Delta \eta + \frac{1}{g} \nabla \cdot \mathbf{u}_t + \frac{f}{g} \nabla \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) = 0. \quad (5.48)$$

Multiplicando (5.48) pela função teste ψ , integrando por partes sobre Ω e aplicando a solução discreta, pelo método de Galerkin, tem-se a seguinte equação para a estabilização da formulação discreta:

$$-\langle \nabla \eta^h, \nabla \psi^h \rangle + \frac{1}{g} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_t^h, \psi^h \rangle - \frac{f}{g} \langle \mathbf{k} \times \mathbf{u}^h, \nabla \psi^h \rangle = 0, \quad (5.49)$$

onde a condição de contorno

$$\frac{f}{g} \langle \psi^h, (\mathbf{k} \times \mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{n} \rangle |_{\Gamma} + \langle \psi^h, \nabla \eta^h \cdot \mathbf{n} \rangle |_{\Gamma} = 0 \quad (5.50)$$

foi adotada. O problema pode ser estabilizado adicionando (5.49) multiplicada por uma difusividade, α , na formulação fraca da equação da continuidade.

Devido a grande escala característica de comprimento horizontal (L) o valor escolhido para α pode tornar-se relativamente grande. Assim, nas simulações realizadas no capítulo 6, onde a escala horizontal $L \sim O(1000 \text{ km})$, é necessário α na ordem de $10^5 \text{ m}^2/\text{s}$.

O método de estabilização ilustrado nessa seção somente é empregado se as funções testes para a elevação tem grau maior ou igual a 1. Desse modo, esse procedimento é adotado para estabilizar o elemento P_1-P_1 . Esse método adiciona uma difusão à equação da continuidade. Essa técnica é numericamente eficiente, mas não tem justificativa física, já que não existem processos de difusão de massa (Hanert et al., 2002).

5.4.2 Modos Espúrios para a Velocidade

Para a estabilização de modos espúrios para a velocidade, a ideia é a mesma da seção anterior. No entanto, adiciona-se um termo de difusão na equação de momento. Assim, a equação de momento

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta = \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (5.51)$$

deve ser adotada, onde ν é uma viscosidade do escoamento.

O termo do laplaciano na equação (5.51) é fisicamente realístico, já que existem processos de difusão de momento. Em problemas de modelagem oceânica mais realísticos, o termo de difusão de momento não é negligenciado e assim os modos espúrios gerados pelo elemento RT_0-P_0 seriam filtrados (Hanert et al., 2002).

6 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos com a simulação das equações governantes apresentadas no capítulo 4. As simulações foram realizadas com os elementos P_1 - P_1 , P_1 - P_1 estabilizado, P_2 - P_1 e RT_0 - P_0 apresentados no capítulo 5, utilizando o software FreeFem++ (Hecht et al., 2012).

O FreeFem++ é um software gratuito desenvolvido em C++ e voltado para a resolução numérica de equações diferenciais parciais pelo método dos elementos finitos, em duas ou três dimensões. A implementação deste software é feita introduzindo a formulação variacional das equações modelo, o que facilita a implementação do problema.

Apesar de possuir o próprio gerador de malhas, é possível também importar malhas no FreeFem++. Além disso, o software dispõe de vários métodos iterativos e diretos para solução do sistema linear como LU, Cholesky, Crout, Gradiente Conjugado, GMRES, UMFPACK, etc.

Com o uso de uma discretização temporal semi-implícita, um sistema linear deve ser resolvido em cada passo de tempo. O sistema pode ser resolvido tanto com métodos iterativos, quanto métodos diretos. No entanto, a medida que aumenta o número de equações, os métodos iterativos tornam-se mais competitivos tanto no número de operações para a solução do sistema linear, quanto a memória do computador exigida para o armazenamento da matriz do sistema (Bittencourt e Feijóo, 1997). Como não faz parte do escopo deste trabalho avaliar a performance de métodos iterativos, seguindo a literatura (Roux et al., 1998), o método GMRES é adotado, pois a matriz global é não-simétrica devido ao termo de Coriolis.

No Apêndice A é exposto, como exemplo, o código computacional utilizado para as simulações da Seção 6.1 com o par P_1 - P_1 , a fim de ilustrar a implementação com o FreeFem++.

6.1 Onda de Gravidade em um domínio circular

Nesta seção é feita a simulação da propagação de uma onda de gravidade através das equações de águas rasas lineares (4.1)-(4.2), com os diferentes elementos expostos anteriormente. O domínio circular de raio $R = 1000 \text{ km}$ é discretizado por uma malha não-estruturada gerada pelo próprio FreeFem++ e exibido na Figura 6.1. Ela é composta de 3620 nós e 7038 elementos.

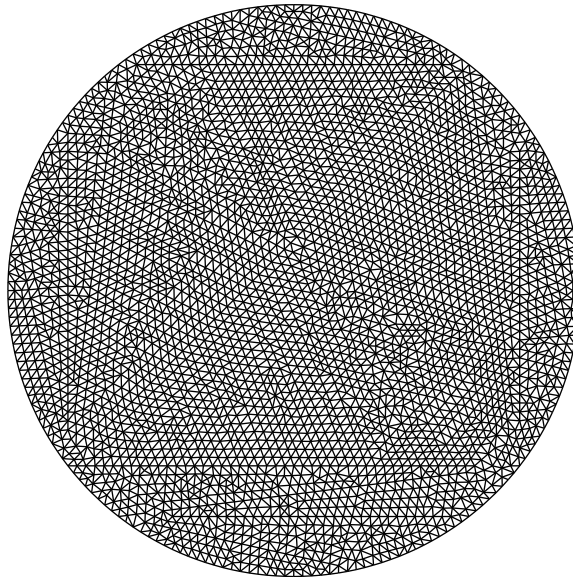


Figura 6.1: Malha circular não-estruturada.

A ideia é reproduzir os resultados do problema teste encontrado em Roux et al. (1998). Desse modo, todos os valores escolhidos para as simulações são os mesmos que o artigo utiliza. Assim, nesta seção utiliza-se o parâmetro de Coriolis $f = 0$, velocidade inicial $\mathbf{u}_0 = 0$ e a elevação da superfície é prescrita no tempo inicial por uma distribuição gaussiana. Isto é,

$$\eta_0 = ae^{-br^2},$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância do centro gaussiano, $a = 100 \text{ m}$ e $b = 6.4 \times 10^{-11} \text{ m}^{-2}$. Além disso, são dados a profundidade média $H = 2000 \text{ m}$, a aceleração

da gravidade $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ e o passo de tempo $dt = 80 \text{ s}$. A comparação dos valores de máximo e mínimo em alguns passos de tempo da simulação, entre cada tipo de elemento e o valor exato são mostradas nas Tabelas 6.1 e 6.2.

Tabela 6.1: Comparação entre o valor de máximo exato e os valores de máximo para cada elemento, em diferentes passos de tempo.

Estágios	Nº de passos de tempo	Máx.				
		Exato	P_1-P_1	P_1-P_1 Est.	P_2-P_1	RT_0-P_0
1	1	98,28	98,08	98,04	98,07	97,54
2	17	22,06	22,50	22,12	22,10	22,16
3	34	16,71	17,20	16,72	16,78	16,77
4	51	14,01	14,52	13,95	14,07	14,01
5	68	12,30	12,80	12,31	12,36	12,27
6	85	23,32	23,91	23,30	23,73	23,11
7	102	11,63	12,09	11,41	11,63	11,48
8	119	15,02	15,67	14,62	15,02	14,77
9	136	18,65	18,99	18,07	18,60	18,26
10	153	26,11	25,85	24,95	25,92	25,20
11	171	80,92	74,79	74,24	79,81	75,17
12	341	39,44	32,95	33,24	36,67	32,84

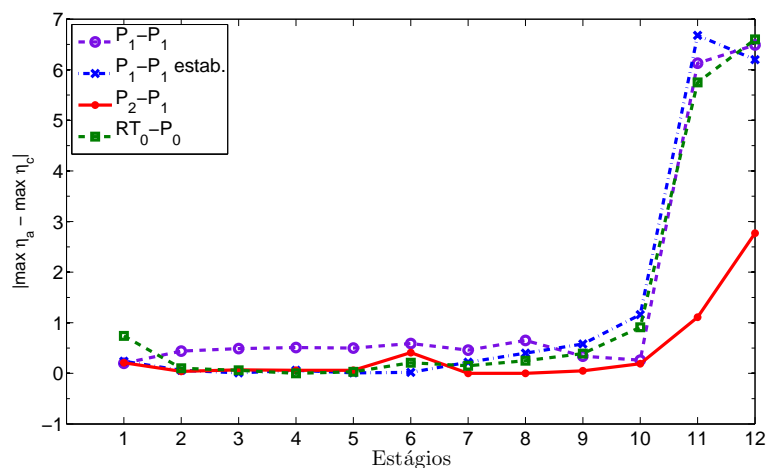


Figura 6.2: Erro entre o máximo da solução analítica (η_a) e o máximo da solução calculada (η_c) para cada par de elementos nos diferentes estágios.

Tabela 6.2: Comparação entre o valor de mínimo exato e os valores de mínimo para cada elemento, em diferentes passos de tempo.

Estágios	Nº de passos de tempo	Min.				
		Exato	P_1-P_1	P_1-P_1 Est.	P_2-P_1	RT_0-P_0
1	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	17	-28,41	-28,15	-28,61	-28,58	-28,53
3	34	-12,05	-13,69	-12,37	-12,20	-12,33
4	51	-8,56	-9,88	-8,96	-8,68	-8,85
5	68	-6,97	-8,06	-7,38	-7,11	-7,29
6	85	-5,60	-6,80	-5,99	-5,73	-5,89
7	102	-8,71	-11,77	-9,80	-9,17	-9,41
8	119	-4,80	-6,46	-5,28	-4,99	-5,32
9	136	-4,68	-6,56	-5,34	-4,92	-5,30
10	153	-4,90	-6,61	-5,65	-5,19	-5,73
11	171	-3,48	-6,38	-4,63	-3,94	-4,67
12	341	-16,01	-17,86	-15,65	-16,34	-16,65

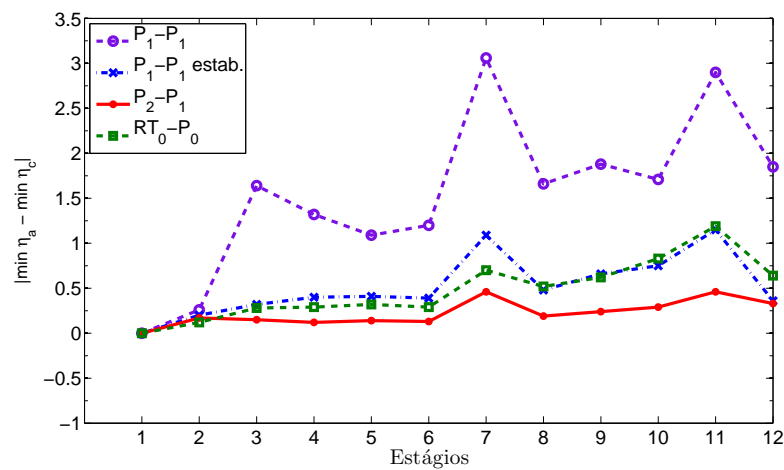


Figura 6.3: Erro entre mínimo da solução analítica (η_a) e o mínimo da solução calculada (η_c) para cada par de elementos nos diferentes estágios.

As soluções para o campo de elevação com cada um dos elementos são exibidas a seguir:

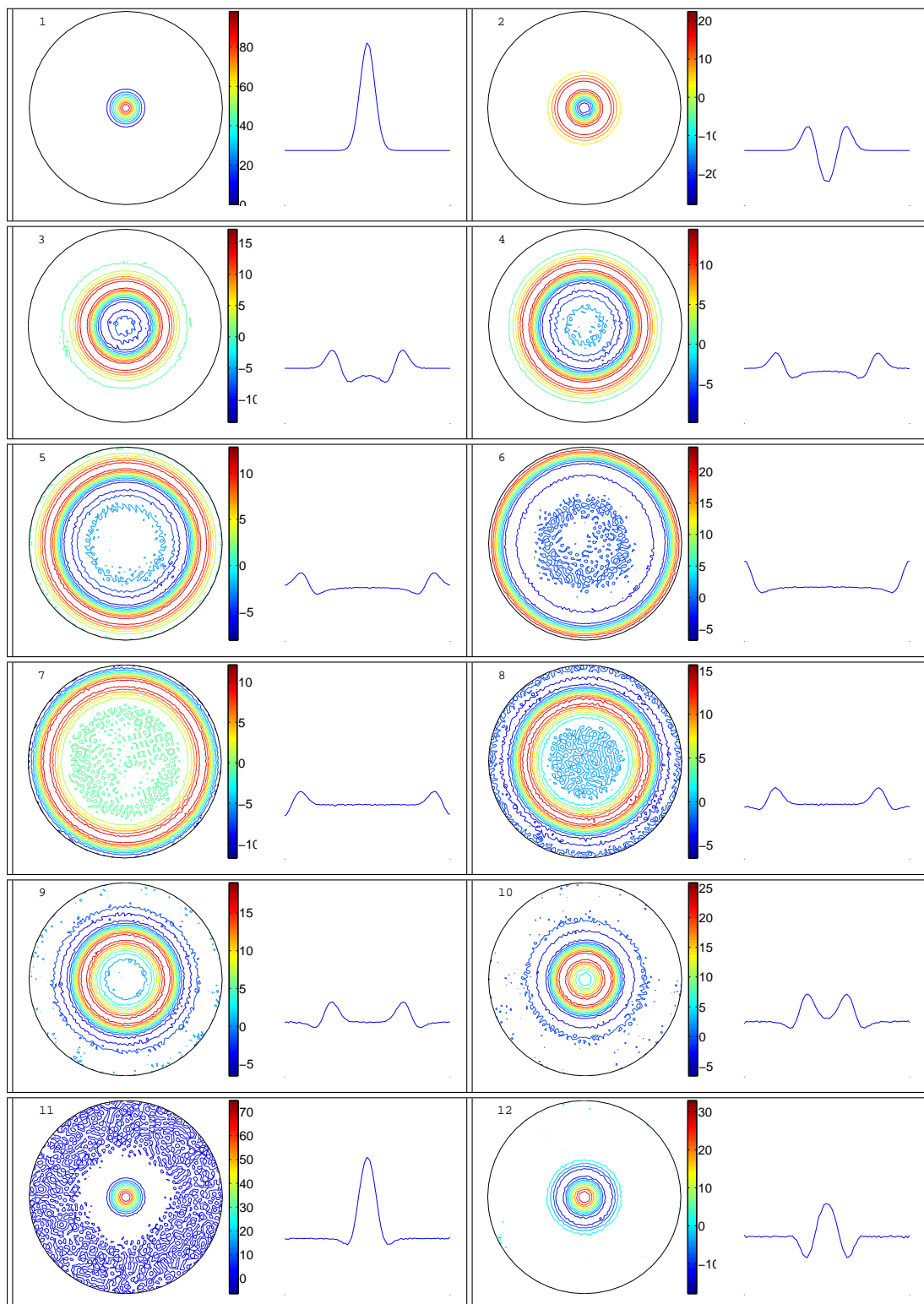


Figura 6.4: Isolinhas da solução e corte vertical da elevação da superfície, usando o par de elementos P_1 - P_1 .

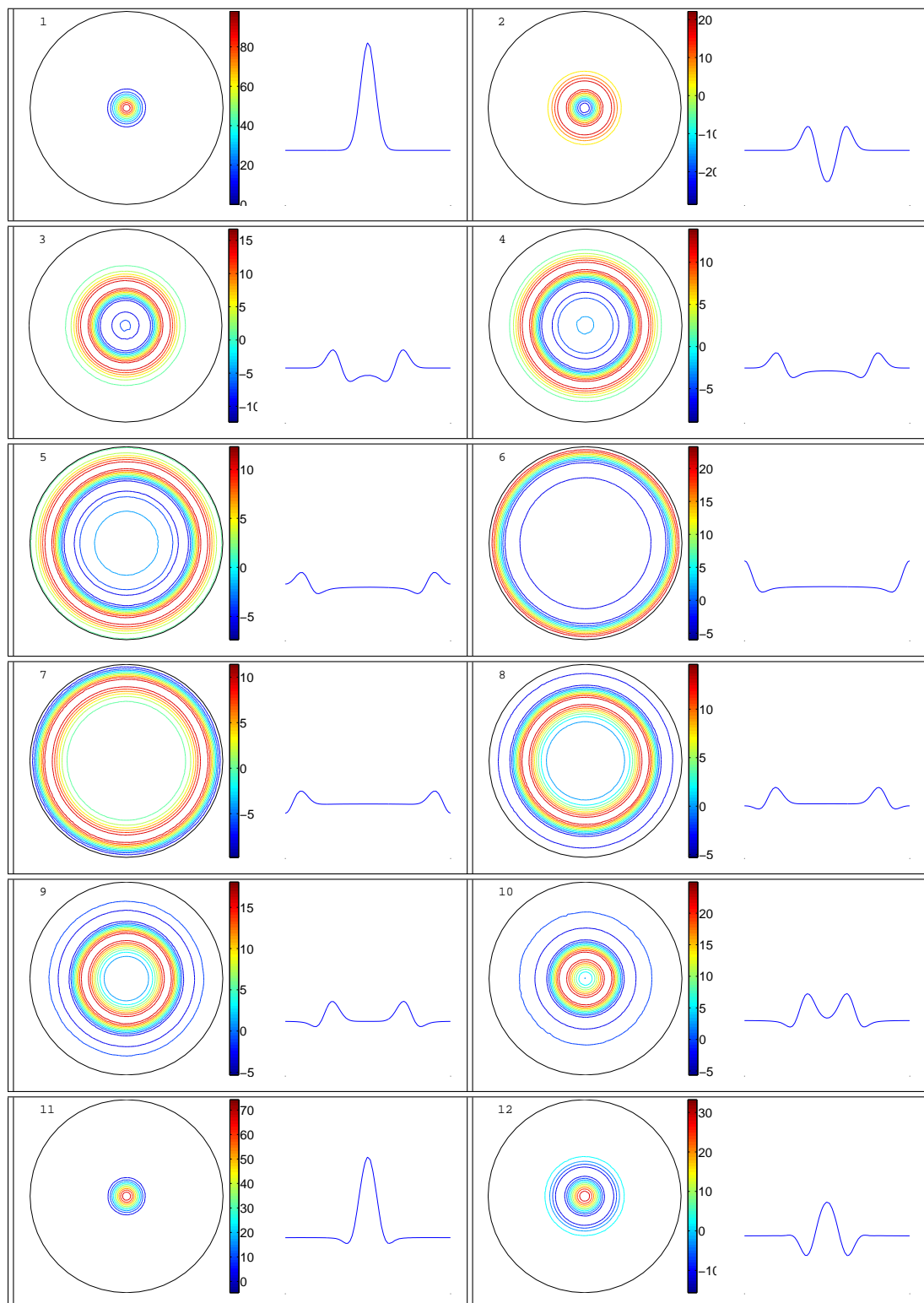


Figura 6.5: Isolinhas da solução e corte vertical da elevação da superfície, usando o par de elementos P_1 - P_1 estabilizado.

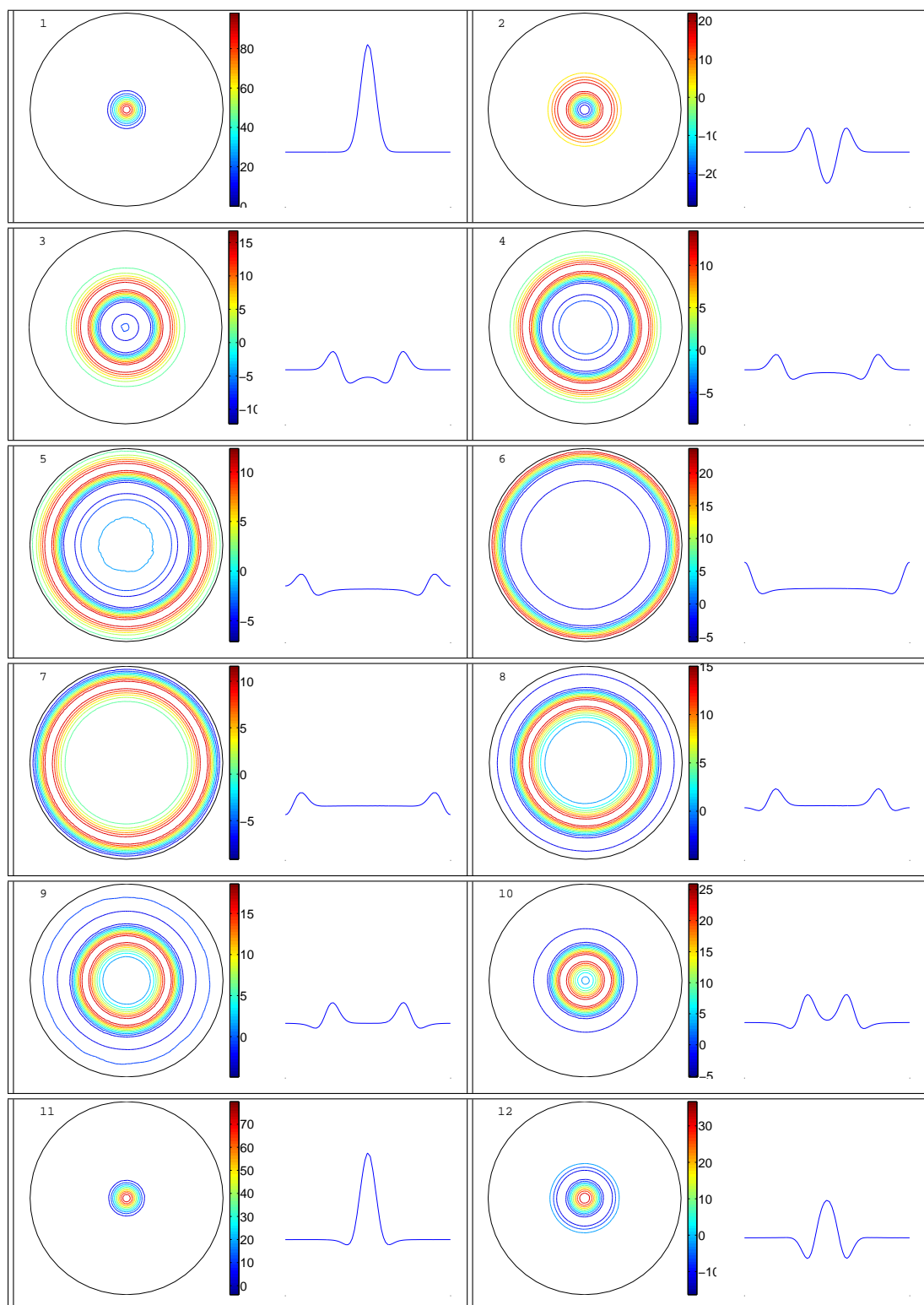


Figura 6.6: Isolinhas da solução e corte vertical da elevação da superfície, usando o par de elementos P_2 - P_1

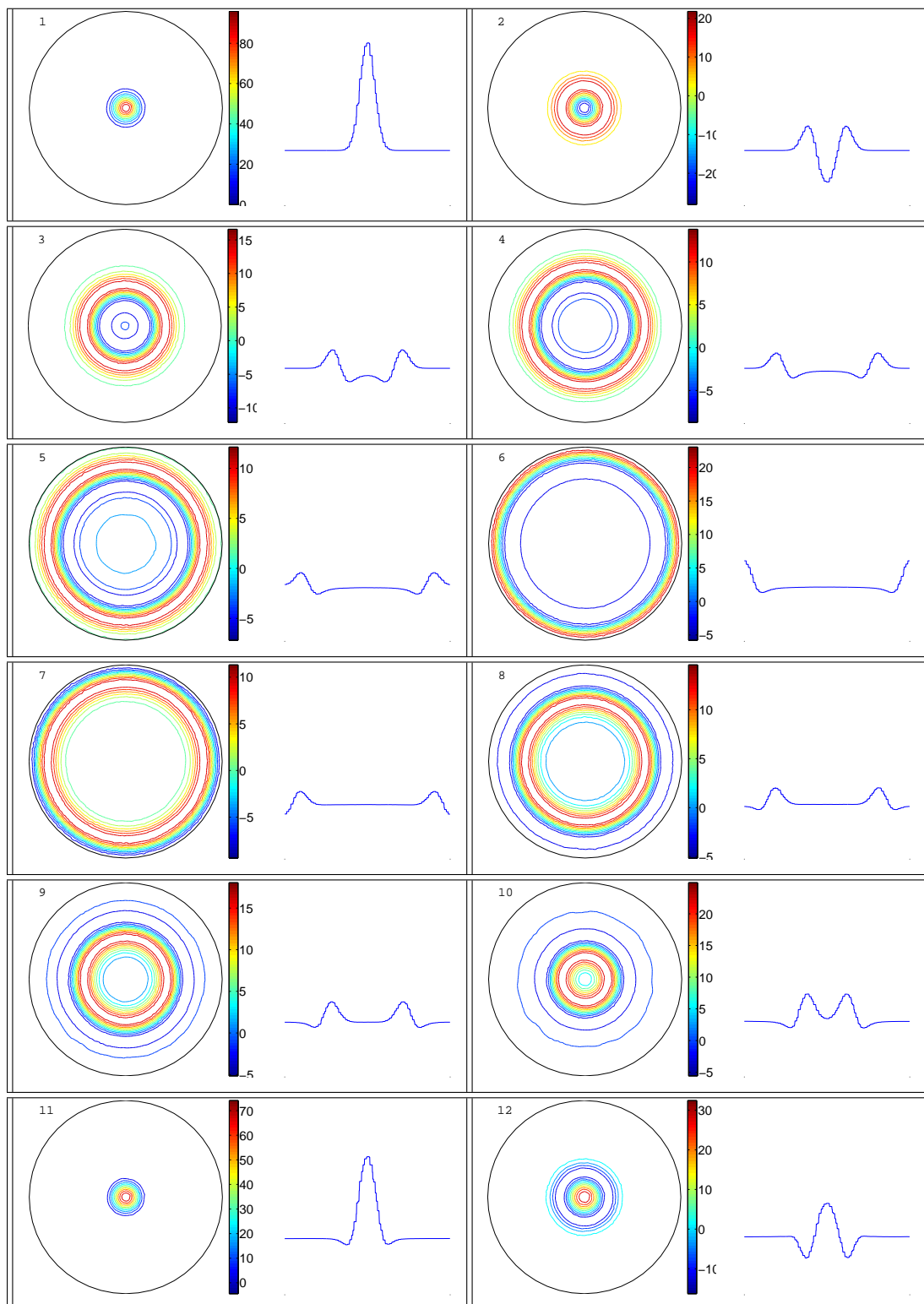


Figura 6.7: Isolinhas da solução e corte vertical da elevação da superfície, usando o par de elementos RT_0 - P_0

Na Figura 6.4 são mostradas as simulações utilizando o par P_1-P_1 . Como pode ser notado, ele apresenta modos espúrios para a elevação. Esse fato já era esperado, pelo que foi mostrado na seção 5.1. Além disso, percebe-se que o par P_1-P_1 tem a pior amplitude dentre os demais elementos, como pode ser visto no gráfico do erro entre as amplitudes, mostrados na Figura 6.2 e 6.3. Nas Tabelas 6.1 e 6.2 é possível notar o valor da amplitude máxima e mínima para cada par de elementos.

Na Figura 6.5 é mostrada a simulação das equações utilizando o elemento P_1-P_1 estabilizado, com a técnica mostrada na Seção 5.4.1. Para esse esquema, os modos espúrios para a elevação são filtrados utilizando $\alpha = 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$, e assim percebe-se que a solução não tem qualquer ruído. Porém, o termo difusivo adicionado para estabilização reduz o alcance dos pontos de máximo e mínimo comparado com a solução analítica. Ainda assim, o par P_1-P_1 estabilizado tem resultado muito melhor que o par P_1-P_1 , como pode ser visto nas Figuras 6.2 e 6.3, através dos gráficos de erro.

O par P_2-P_1 não apresenta modos espúrios para a elevação. Para esse teste, esse elemento tem a melhor performance, tanto pela ausência de modos espúrios, quanto por obter a melhor amplitude dentre os demais elementos, como pode ser visto pelos valores das amplitudes, nas Tabelas 6.1 e 6.2, e pelos gráficos nas Figuras 6.2 e 6.3 que exibem o menor erro para esse par. No entanto, deve-se notar que as dificuldades de representação do balanço geostrófico encontradas por esse par de elementos são eliminadas devido a ausência da força de Coriolis ($f = 0$).

Na Figura 6.7 é mostrada a simulação das equações para o esquema com o elemento RT_0-P_0 . O elemento RT_0-P_0 não apresenta modos espúrios para a elevação da superfície, mas possui modos espúrios para a velocidade. Contudo, a presença de modos espúrios na velocidade, para equações lineares, não afeta a elevação (Roux et al., 1998) e vice-versa. Na comparação entre amplitudes (Tabelas 6.1 e 6.2), o par RT_0-P_0 distancia-se do valor exato, mas deve-se notar que a função

teste para a elevação é constante, além disso o gráfico do erro, nas Figuras 6.2 e 6.3, apresenta bons resultados, exibindo o mesmo comportamento que P_1-P_1 estabilizado.

Apesar de dificuldades particulares, todos os elementos reproduzem bem o fluxo geofísico, como pode ser visto no corte vertical ao lado de cada solução. Toda a energia fornecida pela condição inicial é dissipada no domínio pela ausência do termo de Coriolis e rebatida pela fronteira.

6.2 Propagação de ondas de gravidade inerciais e Conservação de Massa

Esta seção trata da simulação de um simples problema teste ainda com as equações lineares de águas rasas (4.1)-(4.2), em um domínio fechado, realizado por Hanert et al. (2002). O problema considera a evolução de uma gaussiana para ver como um esquema de elementos finitos representa a propagação de uma onda de gravidade inercial e se uma malha não-estruturada poderia gerar ruídos na solução numérica. O uso de um domínio fechado possibilita efetuar um balanço de massa e energia e assim comparar os elementos P_1-P_1 , P_1-P_1 estabilizado ($\alpha = 5 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$, $\nu = 0$), P_2-P_1 e RT_0-P_0 ($\alpha = 0$, $\nu = 0$).

Para tal simulação, considere um domínio quadrado de lado $L = 10^6 \text{ m}$, a profundidade média é $H = 2000 \text{ m}$, o parâmetro de Coriolis $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ e a gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$. Inicialmente o fluido está em repouso, ou seja, $\mathbf{u}_0 = 0$ e a elevação, em metros, é descrita no tempo inicial pela seguinte expressão:

$$\eta_0 = \exp\left(-\frac{((x - L/2)^2 + (y - L/2)^2)}{(L/4)^2}\right). \quad (6.1)$$

A malha exibida na Figura 6.8 é não-estruturada e composta por 1452 nós e 2753 elementos. O passo de tempo adotado é $dt = 500 \text{ s}$. O campo de elevação para os elementos P_1-P_1 , P_1-P_1 estabilizado, P_2-P_1 e RT_0-P_0 são dados nas figuras

6.9, 6.10, 6.11 e 6.12, respectivamente. Cada estágio corresponde a um passo de tempo, onde estágio 1 é a solução no tempo inicial e os demais estágios são nos passos de tempo subsequentes.

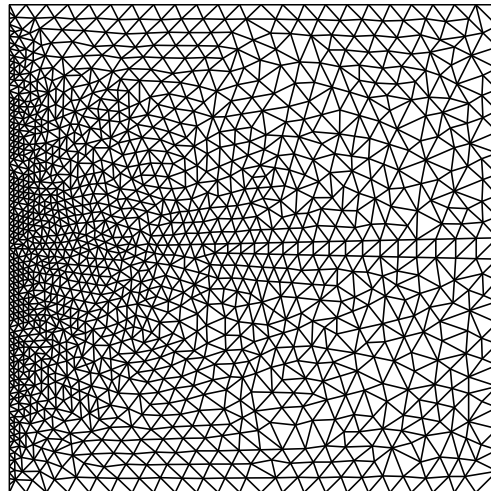


Figura 6.8: Malha não-estruturada usada na simulação da onda de gravidade.

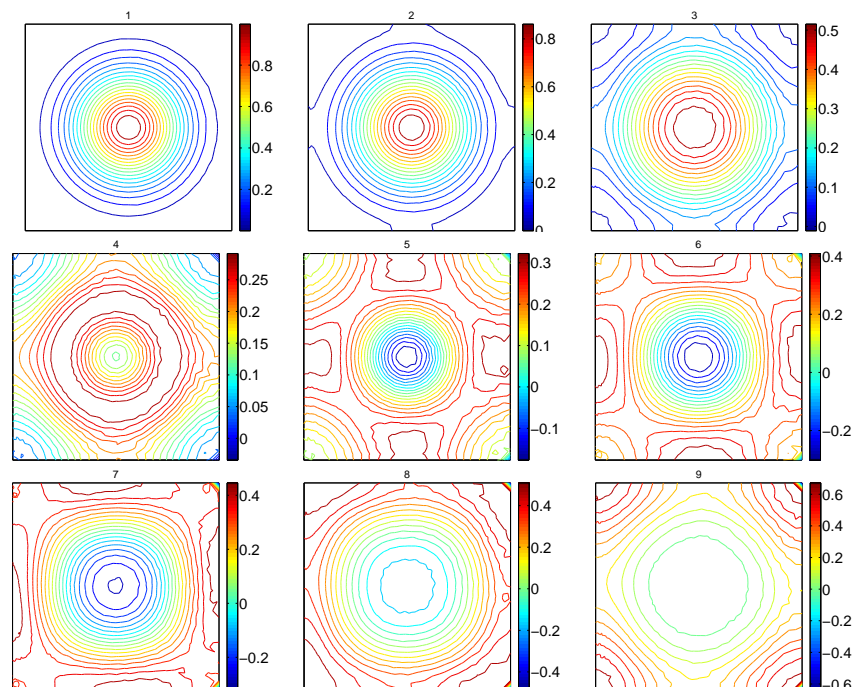


Figura 6.9: Isolinhas da elevação da superfície em diferentes estágios para o par de elementos P_1 - P_1 . A elevação é plotada com 18 isolinhas.

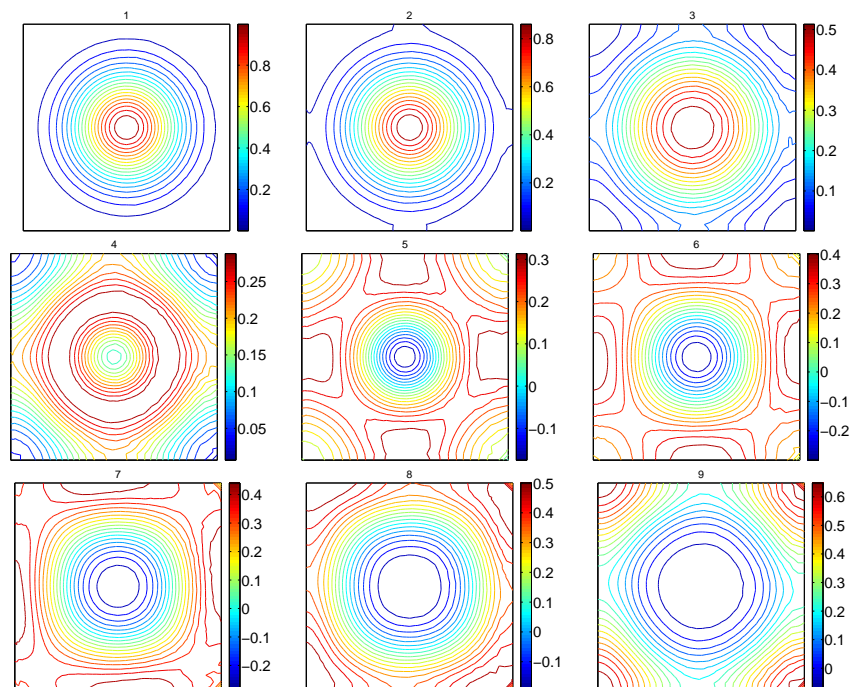


Figura 6.10: Isolinhas da elevação da superfície em diferentes estágios para o par de elementos P_1 - P_1 estabilizado. A elevação é plotada com 18 isolinhas.

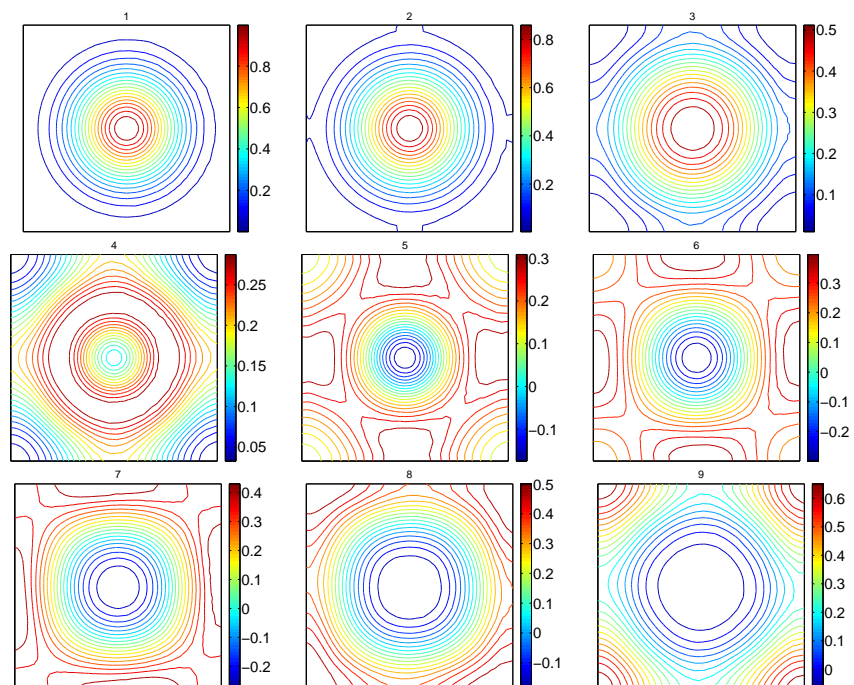


Figura 6.11: Isolinhas da elevação da superfície em diferentes estágios para o par de elementos P_2 - P_1 . A elevação é plotada com 18 isolinhas.

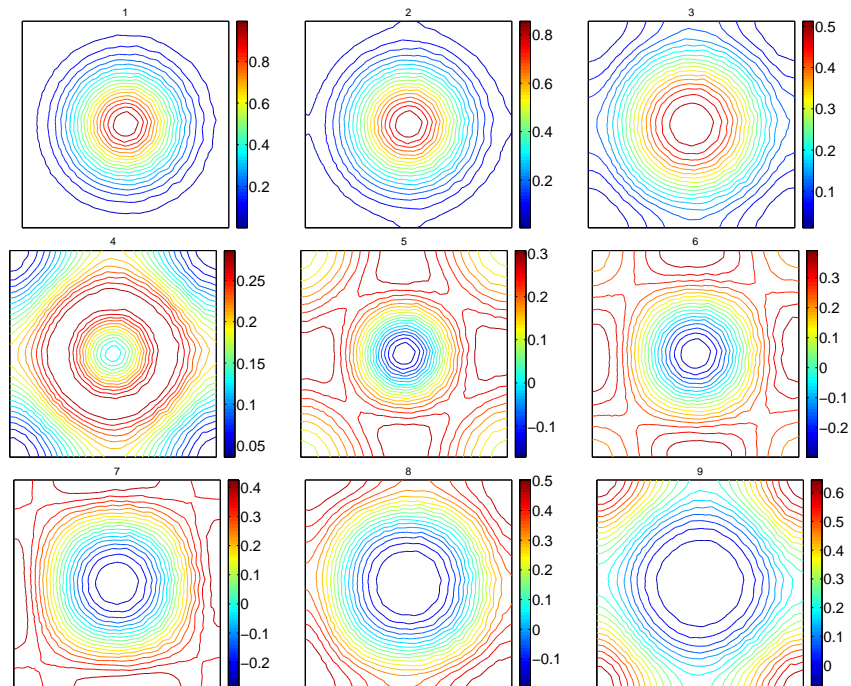


Figura 6.12: Isolinhas da elevação da superfície em diferentes estágios para o par de elementos RT_0 - P_0 . A elevação é plotada com 18 isolinhas.

As soluções exibidas para o campo de elevação, nas Figuras 6.10, 6.11 e 6.12, além de serem qualitativamente iguais para os pares de elementos, estão em pleno acordo com a solução exibida por Hanert et al. (2002). No entanto, o par P_1 - P_1 não apresenta um bom comportamento devido à perda de amplitude e aos ruídos na solução, como já foi notado na seção anterior. Pode ser observado que a malha não estruturada não gera ruído na solução numérica. No lado direito do domínio observe que a elevação pode algumas vezes ser menos acentuada devido ao menor refinamento nessa região.

A fim de observar que os esquemas preservam a massa e energia, pode-se recorrer aos cálculos feitos na Seção 3.2. Desse modo, para mostrar que a massa é conservada, calcula-se a cada 10 passos de tempo a equação (3.23), normalizando

por seu valor inicial. Assim, calcula-se a quantidade:

$$M^n = \frac{|\int_{\Omega} \eta^n d\Omega|}{|\int_{\Omega} \eta_0 d\Omega|}, \quad (6.2)$$

onde η_0 é a elevação no tempo inicial e η^n é a elevação com n passos de tempo.

Seguindo o mesmo processo anterior, é possível também mostrar o efeito do termo de estabilização, usado no esquema com o par P_1-P_1 , calculando a energia total do fluxo, dada pela equação (3.32), normalizada por seu valor inicial. Ou seja, calcula-se:

$$E^n = \frac{\int_{\Omega} \frac{1}{2}(H(\mathbf{u}^n)^2 + g(\eta^n)^2)d\Omega}{\int_{\Omega} \frac{1}{2}(H(\mathbf{u}_0)^2 + g(\eta_0)^2)d\Omega}, \quad (6.3)$$

onde \mathbf{u}_0 , η_0 são os campos de velocidade e elevação no tempo inicial, respectivamente.

Os resultados do cálculo da massa e energia para os esquemas são mostrados na Figura 6.13.

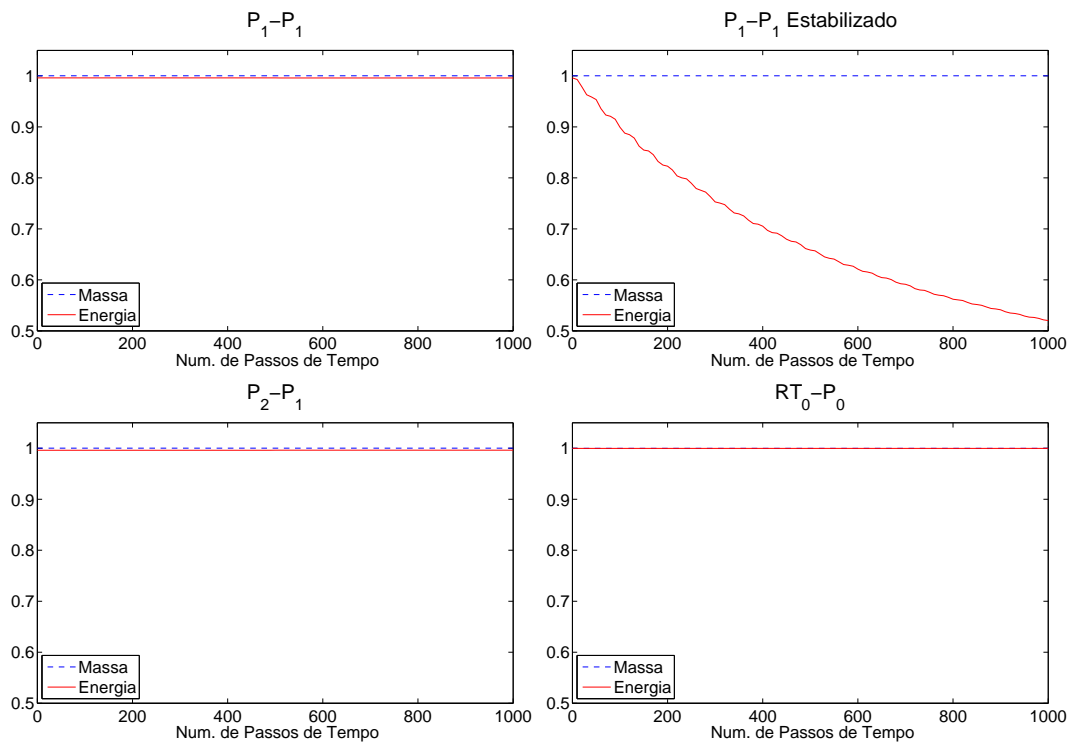


Figura 6.13: Massa e energia para os pares de elementos P_1-P_1 , P_1-P_1 estabilizado, P_2-P_1 e RT_0-P_0 .

Note que para todos os esquemas, o cálculo feito pela equação (6.2) mantém-se igual a 1. Isso significa que todos os elementos estão preservando a massa. Essa propriedade é muito importante para que o elemento seja capaz de suportar um longo prazo de simulação.

No caso da energia, quando se usa P_1-P_1 , P_2-P_1 e RT_0-P_0 a energia é conservada. Porém, o termo difusivo presente na estabilização do elemento P_1-P_1 leva ao decréscimo da energia total do fluxo. Isso mostra que as técnicas de estabilização têm um impacto que não pode ser negligenciado na física do escoamento.

É notável a influência que o termo de estabilização consegue exercer sobre o problema. A presença de modos espúrios foi claramente apresentada para o elemento P_1-P_1 tanto matematicamente, quanto nas simulações numéricas, tornando esse par uma má escolha para águas rasas.

Através de uma análise de Fourier, Roux et al. (1998) notou que o par P_2-P_1 não consegue representar bem o balanço geostrófico, algo essencial para escoamentos geofísicos, mostrando que para diferentes pontos de uma malha a solução tem grande discrepância nas amplitudes e isso é causado pelo fato de que o número de graus de liberdade para a velocidade é bem maior que para a elevação.

Deve-se notar que o par P_2-P_1 é muito utilizado em problemas para resolver equações de Stokes e Navier-Stokes. No entanto, no contexto dessas equações o efeito da viscosidade e a ausência do termo de Coriolis pode mascarar a dificuldade de representar o balanço geostrófico. Assim, para o contexto oceânico, onde o balanço geostrófico é de fundamental importância, os pares de baixa ordem como RT_0-P_0 e P_1-P_1 estabilizado são os melhores candidatos para resolver equações como a de águas rasas.

6.3 Perturbação no balanço geostrófico

Nesta seção, as simulações realizadas com o modelo linear de águas rasas buscam comparar a capacidade dos pares de elementos abordados neste trabalho em representar a norma da velocidade. Soluções com malhas estruturadas também são ilustradas. Este experimento também foi realizado no artigo de Roux et al. (1998) para avaliar pares de elementos que sejam promissores na solução da equação de águas rasas.

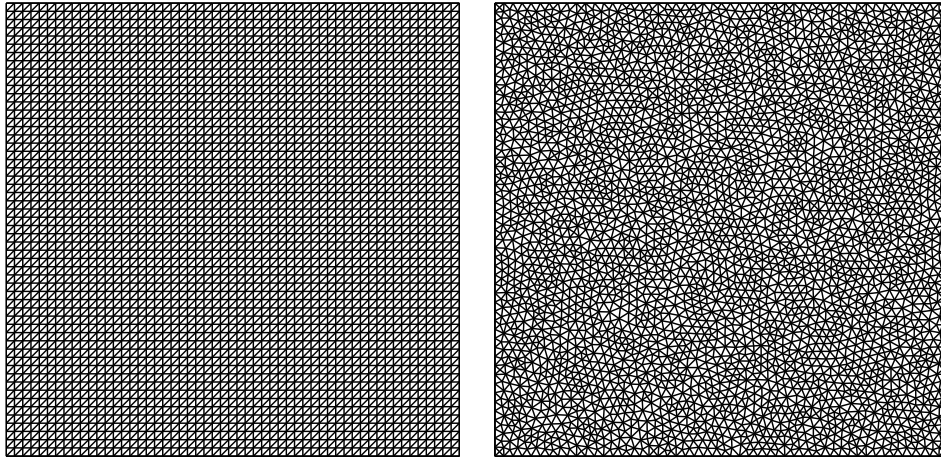


Figura 6.14: Malha estruturada (à esquerda) e não-estruturada (à direita) utilizadas nas simulações.

As simulações são realizadas em um domínio quadrado com 1000 km de lado, discretizado por duas malhas, (estruturada e não-estruturada) mostradas na Figura 6.14. A maior aresta do triângulo de cada uma das malhas é aproximadamente 25 km .

Como condição inicial, o campo de elevação é considerado:

$$\eta_0 = ae^{-b(x^2+y^2)}, \quad (6.4)$$

onde $a = 2,81 \text{ m}$ e $b = 2,77 \times 10^{-11} \text{ m}^{-2}$. Em função de η_0 , a velocidade no tempo inicial, \mathbf{u}_0 , é descrita pelo balanço geostrófico $f\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -g\nabla\eta$, cujas componentes

são dadas por

$$u(x, y, 0) = 2\frac{g}{f}abye^{-b(x^2+y^2)}, \quad (6.5)$$

$$v(x, y, 0) = -2\frac{g}{f}abxe^{-b(x^2+y^2)}, \quad (6.6)$$

onde o parâmetro de Coriolis é calculado em uma latitude de $25^\circ N$ ($f = 6,17 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), a aceleração gravitacional é $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, a profundidade do fluido é $H = 5 \text{ m}$ e o passo de tempo é $dt = 30 \text{ min}$.

A baixa profundidade, H , adotada nas simulações não é comum em estudos atmosféricos, mas é pertinente no contexto oceânico, quando se estuda a ação da gravidade em camadas de fluido com diferentes densidades (Roux et al., 1998).

As soluções para os pares P_1-P_1 , P_1-P_1 estabilizado ($\alpha = 1,5 \times 10^5$), na Figura 6.15, e para P_2-P_1 , RT_0-P_0 , na Figura 6.16, são exibidas após 10 e 30 passos de tempo, respectivamente.

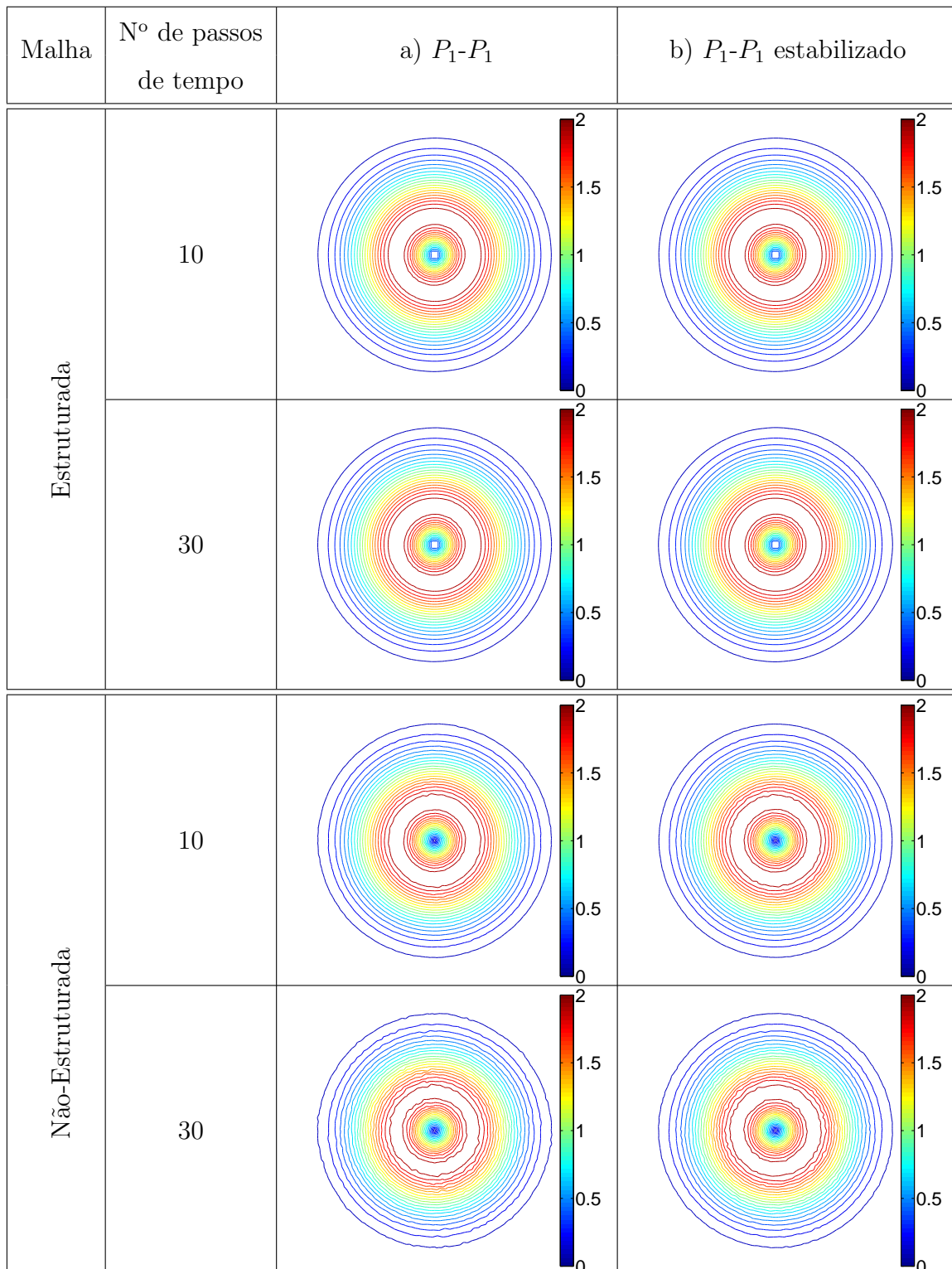


Figura 6.15: Norma da velocidade para o par de elementos P_1-P_1 e P_1-P_1 estabilizado ($\alpha = 1,5 \times 10^5$). As soluções são plotadas com 20 isolinhas.

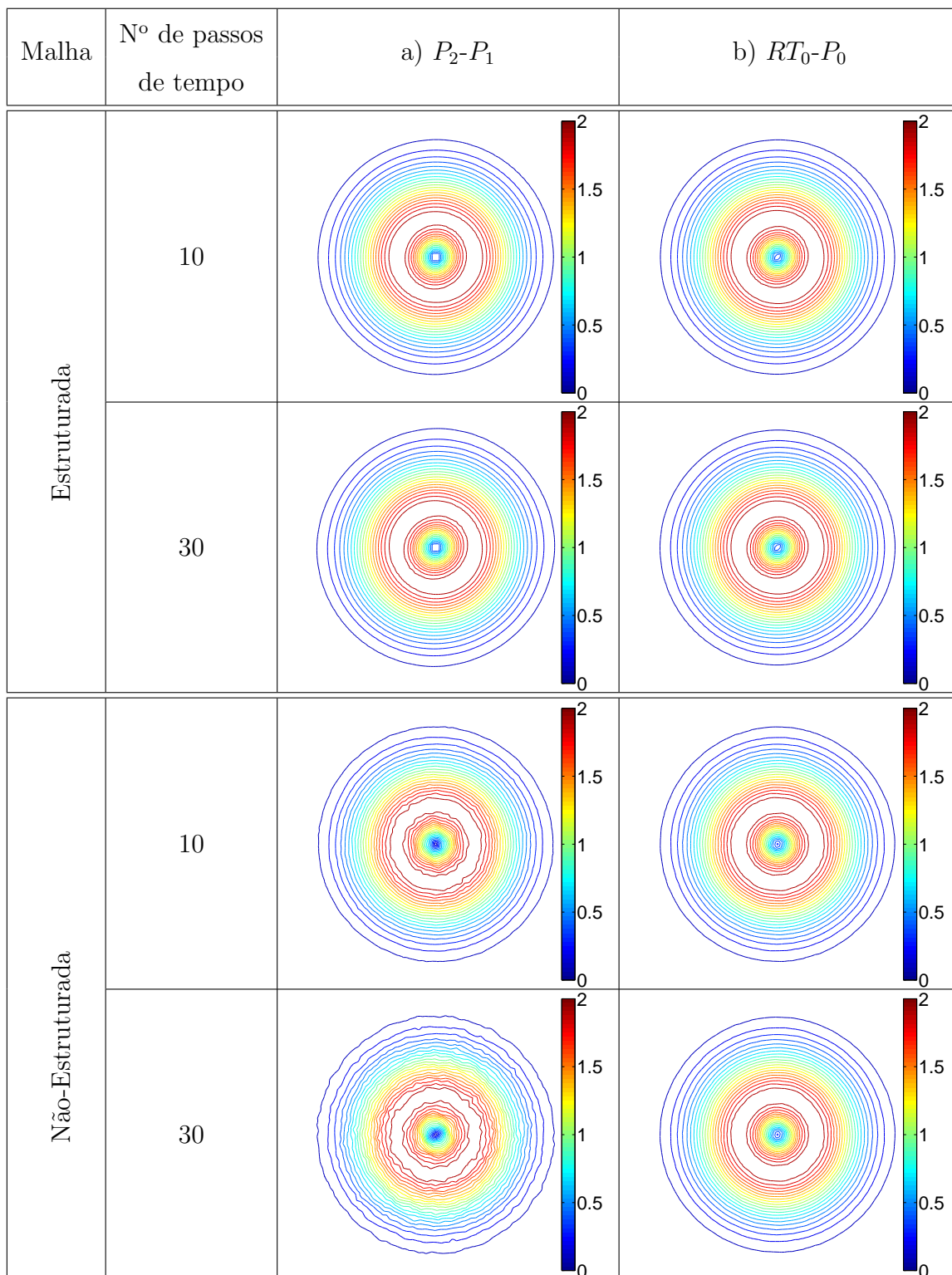


Figura 6.16: Norma da velocidade para o par de elementos P_2-P_1 e RT_0-P_0 . As soluções são plotadas com 20 isolinhas.

As simulações realizadas com malhas estruturadas mostraram-se eficazes com todos os elementos utilizados, inclusive com RT_0-P_0 que possui modos espúrios para o campo da velocidade. Pode-se notar que, mesmo com a evolução temporal, a norma da velocidade com as malhas estruturadas permanece igual.

No entanto, o interesse desse estudo está voltado para malhas não-estruturadas, visto que elas possuem uma melhor adaptatividade a domínios complexos e facilidade de refinamento local. Essas características das malhas não-estruturadas são atrativas, pois as simulações em um contexto oceânico mais realístico as geometrias são bastante irregulares, como é o caso da costa dos continentes. Um exemplo utilizando esse tipo de geometria é o caso do golfo do México, mostrado na Figura 6.17. Essa região possui fortes correntes oceânicas e diversas vezes já teve a presença de furacões.

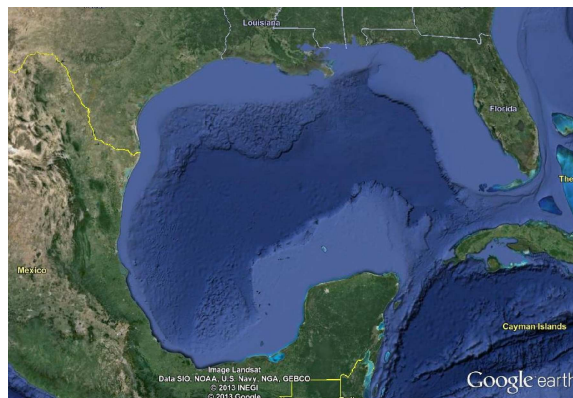


Figura 6.17: Geometria do Golfo do México via Google Earth

Deste modo, analisando a norma da velocidade com a malha não-estruturada, pode-se notar, na Figura 6.15, que tanto P_1-P_1 , quanto P_1-P_1 estabilizado, conseguem apresentar bons resultados. A partir de 30 passos de tempo as isolinhas da solução de ambos os pares de elementos apresentam um pouco de ruído, mas a solução ainda é bem representada. No entanto, como já foi notado anteriormente, o uso do par P_1-P_1 torna-se problemático quando se simula a elevação da superfície, devido aos modos espúrios que esse par introduz na discretização.

Nesse ponto, o par P_1 - P_1 estabilizado leva bem mais vantagem em relação ao P_1 - P_1 na simulação de escoamentos geofísicos, pelo fato de que a técnica de estabilização utilizada consegue suprimir os ruídos no campo de elevação.

Na Figura 6.16, os ruídos na norma da velocidade aparecerem apenas quando o par P_2 - P_1 é utilizado, esses ruídos se intensificam quando a solução é exibida com 30 passos de tempo. Como foi detalhado na Seção 5.2, esse par de elementos não é muito utilizado na solução de problemas geofísicos, visto que possui dificuldade de representar o balanço geostrófico, podendo gerar ruídos na solução numérica. Os ruídos mostrados neste teste ilustram a dificuldade desse par de elementos para simular fenômenos geofísicos. Por outro lado, o par RT_0 - P_0 consegue representar bem a norma da velocidade, tanto para 10 quanto 30 passos de tempo. Apesar de RT_0 - P_0 possuir modos espúrios para a velocidade, nas simulações realizadas, não houve a necessidade de utilizar estabilização para esse par de elementos.

Assim, os melhores resultados apresentados para a norma da velocidade com malhas não-estruturada são exibidos pelos pares de elementos P_1 - P_1 estabilizado e RT_0 - P_0 . O par RT_0 - P_0 apresenta uma vantagem a mais com relação ao P_1 - P_1 , pois não necessita da estabilização.

6.4 Propagação de uma Onda Rossby

Nesta seção, um experimento realizado na tese de Hanert (2004, pág. 45-49), busca simular a propagação de uma onda de Rossby em um domínio quadrado $1000 \text{ km} \times 1000 \text{ km}$, discretizado utilizando a mesma malha não-estruturada exibida na Figura 6.14.

A fim de obter uma onda de Rossby, utiliza-se a aproximação do plano beta ($f = f_0 + \beta y$) descrita na Seção 1.3.5, onde f_0 e β são calculados em uma latitude de $25^\circ N$ ($f_0 = 6,17 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ e $\beta = 2,07 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$). Desse modo, é possível manter os efeitos dinâmicos da variação do parâmetro de Coriolis com a latitude, no termo da força de Coriolis na equação de movimento. Como condição inicial, o campo de elevação é considerado como

$$\eta_0 = ae^{-b(x^2+y^2)}, \quad (6.7)$$

onde $a = 0,95 \text{ m}$ e $b = 5,92 \times 10^{-11} \text{ m}^{-2}$. Em função de η_0 , a velocidade no tempo inicial, \mathbf{u}_0 , é descrita pelo balanço geostrófico $f\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -g\nabla\eta$, cujas componentes são dadas por

$$u(x, y, 0) = 2\frac{g}{f}abye^{-b(x^2+y^2)}, \quad v(x, y, 0) = -2\frac{g}{f}abxe^{-b(x^2+y^2)}, \quad (6.8)$$

onde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ é a aceleração gravitacional, $H = 1,63 \text{ m}$ é a profundidade do fluido e o passo de tempo é $dt = 30 \text{ min}$. A superfície de elevação e a norma da velocidade no tempo inicial são exibidos na Figura 6.18.

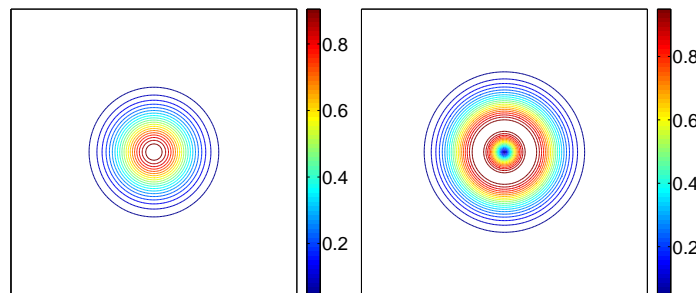


Figura 6.18: Elevação da superfície (à esquerda) e norma da velocidade (à direita) no tempo inicial

As soluções para os pares P_1-P_1 , P_1-P_1 estabilizado ($\alpha = 1,5 \times 10^5$), P_2-P_1 e RT_0-P_0 são exibidas na Figura 6.19, após o tempo final de uma semana. Isso é equivalente a 336 passos de tempo.

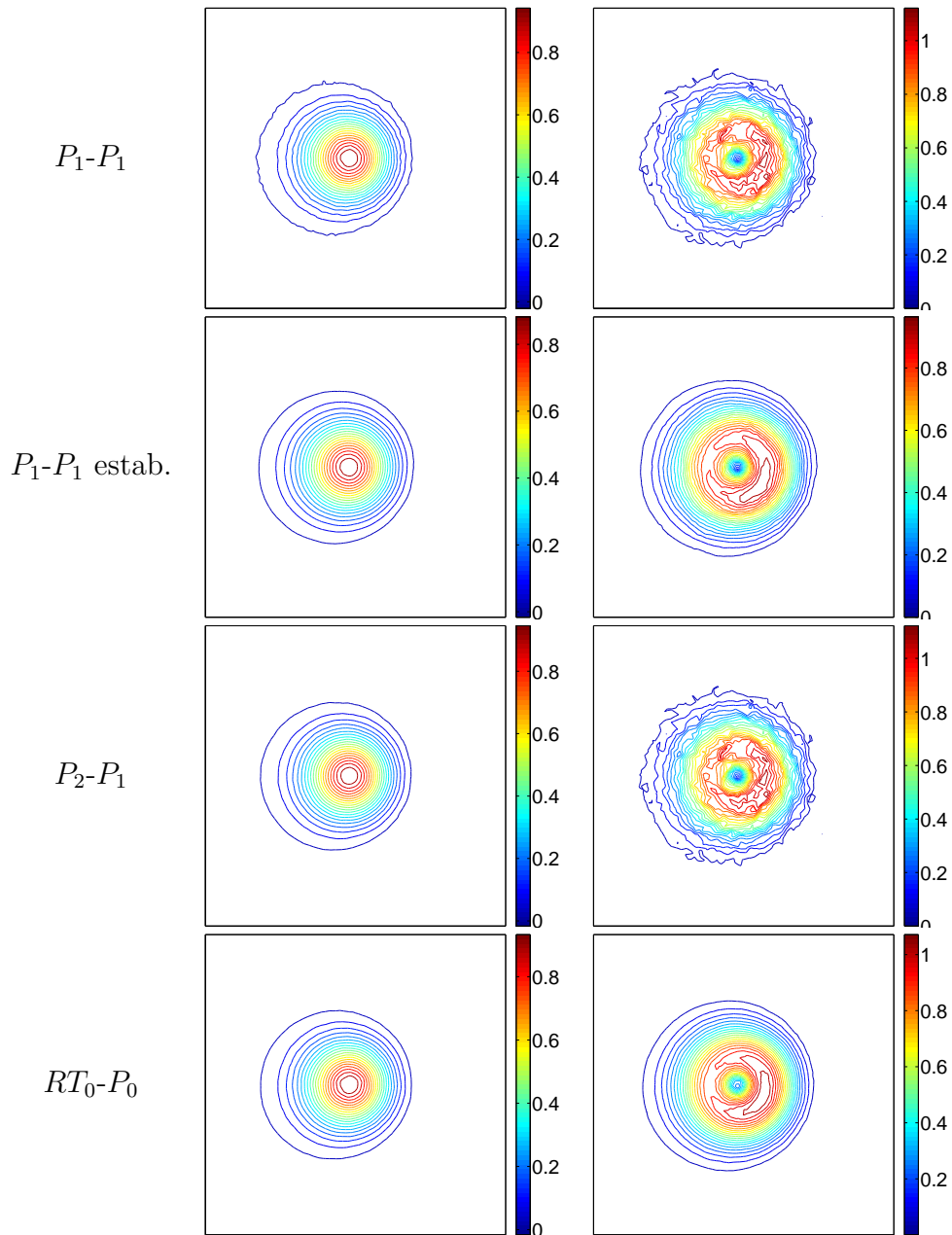


Figura 6.19: Isolinhas do campo de elevação (à esquerda) e da norma da velocidade (à direita) para o par de elementos P_1-P_1 e P_1-P_1 estabilizado ($\alpha = 1,5 \times 10^5$), P_2-P_1 e RT_0-P_0 . As figuras são plotadas com 20 isolinhas.

Após o fim do período de simulação é possível notar que a onda de Rossby começa a deslocar-se para a esquerda. Isso é previsto e está de acordo com esse tipo de fenômeno, visto que esse tipo de onda costuma mover-se do leste para o oeste como foi discutido na Seção 1.3.4.

Como já foi mostrado nas simulações anteriores, os pares de elementos P_1-P_1 e P_2-P_1 apresentam problemas para calcular a solução discreta da equação de águas rasas. Isso fica mais evidente quando a norma da velocidade, exibida na Figura 6.19, apresenta ruídos nas isolinhas da solução com ambos os pares. É possível também notar ruídos no campo de elevação com a solução apresentada pelo par P_1-P_1 , proporcionados pela presença de modos espúrios na discretização introduzida por esse par de elementos.

Por outro lado, os pares P_1-P_1 estabilizado e RT_0-P_0 exibem os melhores resultados, tanto para a elevação quanto para a norma da velocidade. Isso pode ser observado pelo padrão bem mais suave que as isolinhas da solução apresentam. Vale a pena lembrar que o par RT_0-P_0 possui modos espúrios para o campo da velocidade, mas em nenhuma das simulações foi necessário o uso de técnicas de estabilização para controlar esses modos. Além disso, os modos espúrios para o campo de elevação são os mais críticos quando se trabalha com equações de águas rasas, visto que ele é responsável por descrever o comportamento da solução geofísica, neste caso, da onda de Rossby.

Pelas simulações realizadas, pode-se observar que os pares de elementos P_1-P_1 estabilizado e RT_0-P_0 são os únicos que apresentam boas condições para a simulação de equações de águas rasas. Além disso, o par RT_0-P_0 apresenta uma vantagem sobre o par P_1-P_1 estabilizado, visto que ele não precisa de estabilização para o campo de elevação, que são os mais críticos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma das principais dificuldades do método dos elementos finitos para a solução da equação de águas rasas é a obtenção de pares de elementos finitos que calculem corretamente a solução discreta. Assim, o elemento deve representar bem o escoamento geofísico e não apresentar modos espúrios. A presença de modos espúrios na solução discreta é detectada através do cálculo do espaço nulo dos operadores gradiente e de Coriolis (Roux et al., 1998; Hanert et al., 2002).

Para contornar o surgimento desse modos, foram abordados o uso de técnicas de estabilização, como a formulação de mínimos quadrados de Petrov-Galerkin para estabilizar a equação da continuidade e a introdução de uma viscosidade para estabilização da equação de momento. Essas estabilizações possibilitam capacitar pares de elementos problemáticos para resolver problemas geofísicos, introduzindo um efeito de suavização na solução. Os modos espúrios para a elevação no par de elementos P_1 - P_1 foram contornados utilizando a estabilização para a equação da continuidade, dando lugar ao par de elementos P_1 - P_1 estabilizado. Apesar do par RT_0 - P_0 possuir modos espúrios para a velocidade, não foi necessário a introdução de uma viscosidade para estabilizar a equação de momento.

O par P_2 - P_1 não apresenta modos espúrios para a velocidade ou elevação, mas possui uma dificuldade na representação do balanço geostrófico, como visto na Seção 5.2. Isso pode ser prejudicial para a solução de águas rasas, principalmente para problemas mais realísticos, onde o balanço geostrófico tem grande influência. Segundo Roux et al. (1998), o problema com esse elemento é o grande número de graus de liberdade para a velocidade, em relação a elevação. Em algumas simulações realizadas, esse par mostrou um bom desempenho, principalmente na simulação da solução geofísica das ondas de gravidade, na Seção 6.1, onde se pode notar que esse elemento obteve a melhor amplitude e representação da solução geofísica que

os demais pares testados. No entanto, nessas simulações o parâmetro de Coriolis está ausente e isso deve ser analisado com cuidado. As deficiências para o par P_2-P_1 representar a solução geofísica, podem ser notadas nas simulações da norma da velocidade, com malha não-estruturada (Seção 6.3) e da onda de Rossby (Seção 6.4), onde a solução apresenta ruído nas isolinhas. Esse par de elementos é muito utilizado para a solução das equações de Stokes e Navier-Stokes, mas nesse caso a ausência do termo de Coriolis ou presença da viscosidade nessas equações pode mascarar a presença de ruídos na solução discreta.

É importante destacar a escolha de um método de discretização temporal implícito, como o método de Crank-Nicolson. Essa escolha traz a vantagem da preservação da energia total do fluxo, além de permitir uma flexibilidade na escolha do passo de tempo.

A conservação da massa, que é essencial para grandes tempos de simulação, é alcançada por todos os elementos testados. Com relação à conservação de energia, o par P_1-P_1 estabilizado é único que perde energia no decorrer do tempo de simulação. Essa perda de energia é esperada, pois o termo de estabilização introduzido na equação da continuidade age com um efeito viscoso, suavizando a solução.

Desse modo, analisando as simulações computacionais e as propriedades de conservação de massa e energia, nota-se que os pares de elementos P_1-P_1 estabilizado e RT_0-P_0 são os melhores candidatos para trabalhar com a simulação de escoamentos geofísicos, como é o caso das equações de águas rasas. Vale destacar que o par RT_0-P_0 leva uma vantagem a mais que o P_1-P_1 estabilizado, pois não necessita de estabilização para o campo de elevação, visto que esses são os mais críticos, pois representam a solução geofísica.

Existem outros pares de elementos que oferecem um melhor desempenho no cálculo da solução discreta de águas rasas, como é o caso de $P_1^{NC}-P_1$ (Hanert et al., 2005, 2009) e P_1 iso P_2-P_{0-3} (Roux et al., 1998). O primeiro par atribui

funções base linear não-conforme para a velocidade e linear para a elevação, enquanto que o segundo possui funções base linear para a velocidade em cada um dos quatro sub-triângulos, obtidos do refinamento de cada elemento da triangulação, e constante para a elevação com três nós internos.

O software utilizado possui suporte ao par $P_1^{NC}-P_1$, mas sua implementação através da formulação variacional não é simples, visto que é necessário implementar saltos entre os elemento não-conformes. No caso do P_1 iso P_2-P_{0-3} , o software não possui esse par, assim seria necessário sub-rotinas com a implementação de ambos os pares.

APÊNDICE A CÓDIGO COMPUTACIONAL

O código computacional mostrado pelo Algoritmo A.1, exemplifica a implementação numérica da equação de águas rasas, através do software FreeFem++. O código realiza os cálculos exibidos na Seção 6.1, através do par P_1 - P_1 .

A malha salva pelo código e os arquivos com a solução são plotados com o auxílio do MATLAB, através dos scripts elaborados por Dambrine (2010).

Algoritmo A.1: Código para Águas Rasas com FreeFem++

```

1 // DIRETORIO PARA SALVAR DADOS:
2 string plotdir = "matlabplots/";
3 string datadir = "data/";
4
5 // PREFIXO DO NOME DOS ARQUIVOS:
6 string problemPrefix = "lerouxplp1";
7
8 // CRIA DIRETORIOS SE NAO EXISTENTES:
9 exec("mkdir -p " + plotdir);
10 exec("mkdir -p " + datadir);
11
12 // PARAMETROS:
13 real g=9.8, dt=80.0, H=2000.0;
14 real alpha=100.0, beta=6.4e-11, stably=0.0;
15
16 // GERA A MALHA:
17 border a(t=0,2*pi){ x=1000000*cos(t); y=1000000*sin(t);label=1;}
18 mesh Th= buildmesh(a(200));
19
20 // SALVA A MALHA:
21 savemesh(Th,plotdir + "circulo.msh");
22
23 // DEFINE OS ESPACOS:
24 fespace Xh(Th,P1);
25 fespace Mh(Th,P1);
26
27 // FUNCOES DISCRETAS DE CADA ESPACO:
28 Xh u1, u2, v1, v2, up1, up2;
29 Mh eta, psi, etap;
30 Mh speed, lambda, gamma;
31
32 verbosity=0; // VERBOSIDADE
33 int maxint=341; // NUM. DE ITERACOES
34 real f=0.0; // PARAMETRO DE CORIOLIS
35 func r=sqrt(x^2+y^2); // RAI0
36 func eta0=alpha*exp(-beta*r*r); // ETA INICIAL
37 real t=0.0; // TEMPO INICIAL
38 real pval, ulval, u2val, xp, yp; // USADO PARA SALVAR SOL.
39
40 // CONDICOES INICIAIS:
41 u1=0.0;
42 u2=0.0;
43 eta=eta0;
44

```

```

45 // DEFINICAO DE MACROS:
46 macro ggrad(u,v) ( dx(u) * dx(v) + dy(u) * dy(v) )//
47 macro div(u1,u2) ( dx(u1) + dy(u2) )//
48
49 // DECLARACAO DO PROBLEMA:
50 problem shwater([u1,u2,eta],[v1,v2,psi],solver=GMRES)=
51   int2d(Th)(
52     u1*v1+u2*v2 +f*dt*0.5*(-u2*v1+u1*v2)
53     -g*dt*0.5*(eta*dx(v1)+eta*dy(v2))
54     +eta*psi+H*dt*0.5*(psi*dx(u1)+psi*dy(u2))
55     +stably*( 0.5*dt*ggrad(eta,psi)-div(u1,u2)*psi/g
56     +0.5*dt*(-u2*dx(psi)+u1*dy(psi))*f/g )
57   )
58   +int2d(Th)(
59     -up1*v1-up2*v2 +f*dt*0.5*(-up2*v1+up1*v2)
60     -g*dt*0.5*(etap*dx(v1)+etap*dy(v2))
61     -etap*psi+H*dt*0.5*(psi*dx(up1)+psi*dy(up2))
62     +stably*( 0.5*dt*ggrad(etap,psi)+div(up1,up2)*psi/g
63     +0.5*dt*(-up2*dx(psi)+up1*dy(psi))*f/g )
64   )
65   +int1d(Th,a)(g*dt*0.5*(eta*v1*N.x+eta*v2*N.y))
66   +int1d(Th,a)(g*dt*0.5*(etap*v1*N.x+etap*v2*N.y))
67   +on(a,u1=0,u2=0);
68
69 // ABRE ARQUIVO PARA SALVAR MAX. E MIN. DE ETA:
70 { ofstream file2(datadir + problemPrefix + "eta-max-min"+" .dat");
71   file2 << "iter" << " " << "eta.max" << " " << "eta.min" << endl;
72 }
73 // CALCULA A SOLUCAO A CADA ITERACAO:
74 for (int iter=1;iter<=maxint;iter++){
75   t=t+dt;
76   up1=u1;
77   up2=u2;
78   etap=eta;
79   shwater;
80   speed=sqrt(u1^2+u2^2);
81   if ( !(iter % 17)&&(iter<=153) || (iter==1) || (iter==171) || (iter==341) ){
82     plot(cmm="eta"+iter+"_max="+eta[ ].max+"_min="+eta[ ].min,nbiso=10,value=1,
83         eta);
84     // ABRE ARQUIVO PARA SALVAR SOLUCAO:
85     { ofstream file1(plotdir + problemPrefix + "sol_"+iter+".dat");
86       file1 << eta[ ].n << " " << speed[ ].n << endl;
87       for (int j=0;j<eta[ ].n ; j++){
88         file1 << eta[ ][j] << " " << speed[ ][j] << endl;
89       } // ENDFOR
90     } // ENDOFSTREAM
91     file2 << iter << " " << eta[ ].max << " " << eta[ ].min << endl;
92   } // ENDFOR
93 }; // ENDOFSTREAM

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Batteen, M. L. e Han, Y.-J. (1981). On the computational noise of finite-difference schemes used in ocean models. *Tellus*, 33(4):387–396.
- [2] Bittencourt, M. L. e Feijóo, R. A. (1997). Análise comparativa de métodos diretos e iterativos para a solução de sistema de equações. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 13(2):123–148.
- [3] Churchill, R. (1941). *Fourier Series and Boundary Value Problems*. McGraw-Hill.
- [4] Dambrine, J. (2010). Freefem to Matlab, A tool to import Freefem meshes into Matlab. Disponível em: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/26833-freefem-to-matlab>.
- [5] Fix, G. J. (1975). Finite element models for ocean circulation problems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 29(3):371–387.
- [6] Hanert, E. (2004). *Towards a Finite Element Ocean Circulation Model*. Tese de Doutorado, Université Catholique de Louvain.
- [7] Hanert, E. e Legat, V. (2006). How to save a bad element with weak boundary conditions. *Computers & Fluids*, 35(5):477 – 484.
- [8] Hanert, E., Legat, V., e Deleersnijder, E. (2002). A comparison of three finite elements to solve the linear shallow water equations. *Ocean Modelling*, 5:17–35.
- [9] Hanert, E., Roux, D. Y. L., Legat, V., e Deleersnijder, E. (2005). An efficient eulerian finite element method for the shallow water equations. *Ocean Modelling*, 10(1-2):115–136.
- [10] Hanert, E., Walters, R. A., Roux, D. Y. L., e Pietrzak, J. D. (2009). A tale of two elements: $P_1^{NC} - P_1$ and RT_0 . *Ocean Modelling*, 28(1-3):24 – 33.

- [11] Hecht, F., Pironneau, O., e Morice, J. (2012). Freefem++. Versão 3.20, 3ª edição. Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris. Disponível em: <http://www.freefem.org/ff++>.
- [12] Holton, J. R. (2004). *An Introduction to Dynamic Meteorology*. International Geophysics. Elsevier Science, 4ª edição.
- [13] Johnson, C. (1987). *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Dover books on mathematics. Dover Publications.
- [14] Kalnay, E. (2003). *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. Cambridge University Press.
- [15] Lemes, M. A. M. e Moura, A. D. (2002). *Fundamentos de Dinâmica Aplicados à Meteorologia e Oceanografia*. Holos, 2ª edição.
- [16] Liu, Y., Shi, Y., Yuen, D., Sevre, E., Yuan, X., e Xing, H. (2009). Comparison of linear and nonlinear shallow wave water equations applied to tsunami waves over the china sea. *Acta Geotechnica*, 4(2):129–137.
- [17] Marshall, J. e Plumb, R. A. (2007). *Atmosphere, Ocean and Climate Dynamics: An Introductory Text*. International Geophysics. Elsevier Science.
- [18] Pedlosky, J. (1986). *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer.
- [19] Pierre, R. (1988). Simple C^0 approximations for the computation of incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68(2):205 – 227.
- [20] Roux, D. Y. L., Lin, C. A., e Staniforth, A. (2000). A semi-implicit semi-lagrangian finite-element shallow-water ocean model. *Monthly Weather Review*, 128:1384 – 1401.
- [21] Roux, D. Y. L., Staniforth, A., e Lin, C. A. (1998). Finite elements for shallow-water equation ocean models. *Monthly Weather Review*, 126:1931–1951.