

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Soluções Exatas da Métrica de Weyl para
Aproximação de Segunda Ordem de um
Disco Fino e Testes Clássicos da RG**

por

Rafael da Silva Valada

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Waldir Leite Roque
Orientador

Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza
Co-orientador

Porto Alegre, Setembro de 2013.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Valada, Rafael da Silva

Soluções Exatas da Métrica de Weyl para Aproximação de Segunda Ordem de um Disco Fino e Testes Clássicos da RG / Rafael da Silva Valada.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2013.

76 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2013.

Orientador: Roque, Waldir Leite; Co-orientador: Jessé Capistrano de Souza, Abraão

Dissertação: Matemática Aplicada
Relatividade geral, soluções exatas das equações de Einstein, precessão do periélio, desvio da luz, métrica de Weyl

Soluções Exatas da Métrica de Weyl para Aproximação de Segunda Ordem de um Disco Fino e Testes Clássicos da RG

por

Rafael da Silva Valada

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Física-matemática

Orientador: Prof. Dr. Waldir Leite Roque

Co-orientador: Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza

Banca examinadora:

Professor Dr. Edmundo Marinho do Monte
PPGFIS/UFPB

Professor Dr. Paulo de Ávila Zingano
PPGMAT/UFRGS

Professor Dr. Bardo Josef Bodmann
PROMECC/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
13/09/2013.

Maria Cristina Varriale
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu orientador Waldir Leite Roque, pela cooperação, paciência e fé depositada em mim, mesmo quando em situações adversas. Também ao professor Abraão Jessé Capistrano de Souza, pelas sugestões, atenção e tempo prestado a este trabalho. Agradeço aos professores do PPGMAp da UFRGS: Dago- berto Justo, Leandro Farina, José Afonso Barrionuevo e Manuela Longoni de Castro. Essas são pessoas que sempre foram mais do que professores, foram amigas.

Agradeço à minha família, aos meus irmãos Irene, Genilda e Airton, que sempre me ajudaram e continuam me ajudando de todas as formas possíveis que alguém pode ser ajudado. Agradeço a meus pais Geni e Ido, que apesar de não estarem mais aqui, sempre me incentivaram a estudar, mesmo que muitas vezes de uma forma muito excêntrica.

Agradeço à minha esposa e ao meu filho pela compreensão, pelo apoio e pelo incentivo. Priscila e Leonardo, vocês são a melhor parte de minha vida e todo o meu trabalho, presente e futuro, é por vocês.

Agradeço a meu amigo Rodrigo, pelas longas e descontraídas conversas e pela crença de que eu poderia fazer este trabalho.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro parcial durante o desenvolvi- mento deste trabalho.

Não poderia deixar de mencionar meus professores de graduação: Re- nato de Ávila Consul, Moacyr Marranghello, Vicente Teixeira Batista, Leomir Joel Schweig, Rodrigo Dalla Vecchia, Bernardo Liberman, Luiz Carlos Gomes, Livio Amaral e Roberto Michelena Virgilio de Carvalho obrigado pelos ensinamentos, pela paciência e pelo exemplo.

E por fim agradeço aos estudiosos, desde de Einstein e Weyl, sem os quais este trabalho nunca poderia ter acontecido.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	x
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
1 INTRODUÇÃO	1
2 RELATIVIDADE GERAL	3
2.1 Relatividade restrita	3
2.1.1 Massa gravitacional e massa inercial	5
2.2 Geometria Riemanniana	7
2.2.1 Tensor métrico	8
2.2.2 Objetos de análise tensorial	10
2.3 Postulados da relatividade geral	11
3 ESPAÇO-TEMPO DE UM DISCO FINO	14
3.1 Construção da métrica de Weyl	14
3.1.1 Soluções de Weyl	15
3.2 Equações de campo	16
3.2.1 Aproximação de zero ordem	19
3.2.1.1 Construção da $\sigma(r)$	19
3.2.1.2 Construção da $\lambda(r)$	20
3.2.2 Aproximação de primeira ordem	20
3.2.2.1 Construção da $\sigma(r, z)$	21
3.2.2.2 Construção da $\lambda(r, z)$	21

3.2.3	Aproximação de segunda ordem	22
3.2.3.1	Construção da $\sigma(r, z)$	23
3.2.3.2	Construção da $\lambda(r, z)$	24
3.3	Soluções Riemann-flat	27
3.3.1	Componentes independentes do tensor de Riemann	28
3.3.2	Obtenção das soluções Riemann-flat	29
3.4	Soluções para um disco fino	30
3.4.1	Caso 1: $c_0 \ll 1$	31
3.4.1.1	Caso 1.1: $a_0 = c_0 = 0$ e $k_0 \neq 0$	32
3.4.1.2	Caso 1.2: $a_0 = 0$, $c_0 \neq 0$ e $k_0 \neq 0$	32
3.4.1.3	Caso 1.3: $c_0 = 0$, $a_0 \neq 0$ e $k_0 \neq 0$	33
3.4.2	Caso 2: $d_0 \ll 1$	33
3.4.3	Caso 3: $k_0 = 0$	33
3.4.3.1	Caso 3.1: $k_0 = 0$ e $c_0 \ll 1$	34
3.4.4	Resumo das soluções	34
4	PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE PLANETAS DO SISTEMA SOLAR	38
4.1	Precissão do periélio de Mercúrio	38
4.2	Construção da equação da órbita	40
4.2.1	Recuperação da equação da órbita Newtoniana	42
4.2.2	Resolução da equação diferencial da órbita	43
4.2.2.1	Resolução da homogênea associada	44
4.2.2.2	Obtenção da solução particular	44
4.3	Precissão do periélio via limite quase-Newtoniano	45
4.3.1	Determinação observacional de c_0	46

5	DEFLEXÃO DA LUZ	49
5.1	Observações do eclipse de 1919	50
5.2	Equações gerais da geodésica	52
5.3	Redução das equações da geodésica para um disco fino	52
5.4	Geodésica nula e desvio da luz	54
5.4.1	Desvio da luz devido ao princípio da equivalência	55
5.4.1.1	Interpretação da solução obtida	58
5.4.2	Contribuição devido à curvatura do espaço-tempo	58
6	CONCLUSÃO	63
APÊNDICE A	EQUAÇÃO NEWTONIANA DA ÓRBITA	65
APÊNDICE B	LIMITE QUASE-NEWTONIANO	68
APÊNDICE C	DESVIO DA LUZ SEGUNDO A MECÂNICA NEWTONIANA	70
APÊNDICE D	PACOTE CTENSOR-WXMAXIMA	72
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74

Lista de Figuras

Figura 3.1	Quadro de soluções para um disco fino	36
Figura 3.2	Quadro de soluções segundo a ordem das funções σ e λ	37
Figura 4.1	Representação da precessão do periélio de um planeta solar . . .	40
Figura 5.1	Representação do desvio da luz de estrelas distantes sofridas ao passar próximas ao Sol.	50
Figura 5.2	Foto do eclipse total do Sol de 1919 em Sobral, Ceará.	51

Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Resumo das soluções obtidas	27
Tabela 4.1	Contribuições para precessão do periélio de Mercúrio não considerando os efeitos relativísticos	39
Tabela 4.2	Valores de c_0 para os planetas solares	47
Tabela 4.3	Valores de c_0^*	48
Tabela 5.1	Resultados observacionais do desvio da luz do eclipse de 1919	50

RESUMO

Soluções exatas das equações de campo de Einstein sempre foram de muita importância para o desenvolvimento da teoria da relatividade geral, tanto do ponto de vista teórico quanto do observacional. Neste trabalho, estudamos o espaço-tempo de um disco fino através da obtenção de soluções exatas das equações de Einstein para a região exterior de um corpo maciço com simetria cilíndrica. Utilizando a métrica estática de Weyl para descrever este espaço-tempo, buscamos soluções na forma de potência para as funções da expansão de segunda ordem de tal métrica. Nossas soluções foram aplicadas ao problema da precessão do periélio de planetas solares bem como à deflexão da luz, proveniente de objetos distantes, ao passar próxima ao Sol.

ABSTRACT

The exact solutions of Einstein's field equations have always been of great importance for the development of the general theory of relativity, from both theoretical and observational point of view. In this dissertation, we study the space-time of a thin disk by obtaining exact solutions of the Einstein field equations for the exterior region of a massive body with cylindrical symmetry. Using the static Weyl metric to describe this space-time, we look for power law solutions for the expansion of the second-order-metric functions. Our solutions have been applied to the precession of the perihelion of solar planets, as well as to the deflection of light from distant objects as it passes close to the Sun.

1 INTRODUÇÃO

Soluções exatas das equações de Einstein sempre foram de muita importância para o desenvolvimento da teoria da relatividade geral, tanto de um ponto de vista teórico quanto observacional. Historicamente, as maiores confirmações dessa teoria aconteceram pelo uso de soluções exatas das equações de Einstein. A mais famosa foi obtida por Schwarzschild, ao buscar soluções para a região exterior de um corpo maciço com simetria esférica.

Diferentes geometrias com diferentes simetrias, foram propostas para descrever o espaço-tempo desde a publicação dos artigos de Einstein em meados do século vinte. Estudos posteriores levaram a soluções das equações de Einstein para cada caso. Entre as soluções existentes estão as soluções com simetria cilíndrica. Essas soluções são de suma importância tanto na teoria da gravitação de Newton quanto na teoria de gravitação de Einstein [1]. Isso se deve ao fato de modelarem muitas e distintas situações como, por exemplo, discos de acreção na formação de planetas, processos de formação de estrelas ou até mesmo a dinâmica de galáxias, apesar de distintas todas compartilham configurações tipo disco.

A métrica do espaço-tempo desse tipo de configuração é a métrica estática de Weyl [1]. Tal métrica é utilizada para descrever geometrias de simetria cilíndrica, sejam cilindros, halos, anéis, etc. Em coordenadas cilíndricas, a métrica admite a forma

$$ds^2 = e^{2(\lambda-\sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 + e^{2(\lambda-\sigma)} dz^2 - e^{2\sigma} dt^2,$$

onde $\sigma = \sigma(r, z)$ e $\lambda = \lambda(r, z)$.

Sendo assim, nossa proposta é procurar soluções exatas das equações de Einstein, para a região externa de um corpo maciço com simetria cilíndrica, onde a altura do cilindro será considerada muito menor que seu raio, ou seja, um disco

fino. Neste trabalho, nossas soluções serão para o vácuo, que implica que teremos o tensor de Einstein nulo e, como veremos no Capítulo 2, isso equivale a admitir todas as componentes do tensor de Ricci nulas, $R_{mn} = 0$, onde R_{mn} é expresso por

$$R_{mn} = \partial_n \Gamma_{pm}^p - \partial_p \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mp}^l \Gamma_{nl}^p - \Gamma_{mn}^p \Gamma_{lp}^l = 0$$

Resolver as equações de Einstein, neste caso, se resume a obter as funções σ e λ , que definem a métrica de Weyl.

No Capítulo 3, estendendo o trabalho de Capistrano [3], admitiremos que as funções σ e λ podem ser expressas por expansões em série de Taylor, centradas em $z = 0$, tendo em vista que procuramos soluções para um disco fino. Posteriormente, faremos uma análise destas soluções e, sobre quais condições, as mesmas tornam-se soluções Riemann-flat.

Nossas soluções serão aplicadas a problemas clássicos em relatividade geral, como a precessão do periélio de planetas solares, estudadas no Capítulo 4, onde utilizaremos o chamado limite quase-Newtoniano da relatividade geral, desenvolvido no apêndice B, para aproximar o campo gravitacional do Sol.

No Capítulo 5, por fim, aplicando nossas soluções, trataremos do problema do desvio da luz, proveniente de estrelas distantes, sofridas ao passar próximas do campo gravitacional do Sol.

A forma como encontramos as soluções para as equações de Einstein no vácuo, assumindo a métrica de Weyl como a métrica do espaço-tempo e o fato de recuperarmos outras soluções encontradas na literatura [3, 4], valida a técnica aplicada em nosso trabalho e inspira a busca por outras soluções com as mesmas características em trabalhos posteriores, onde a simetria em questão for cilíndrica-discoidal.

2 RELATIVIDADE GERAL

Até o início do século passado, acreditava-se que o espaço e o tempo eram conceitos físicos disjuntos e que suas respectivas naturezas independiam da matéria contida neste espaço - este considerado absoluto, tridimensional e Euclidiano; por sua vez, o tempo era absoluto e fluindo de modo uniforme em qualquer região do Universo. Tais concepções só foram totalmente abandonadas com o advento da teoria da relatividade restrita e posteriormente com a generalização dessa teoria.

2.1 Relatividade restrita

A teoria da relatividade restrita está fundamentada em dois postulados básicos que são a invariância da velocidade da luz ¹ e o princípio da relatividade. O princípio da relatividade afirma que as leis da física são as mesmas para todos os referenciais inerciais, ou seja, os referenciais nos quais um sistema de partículas preservam individualmente seu momento linear. A invariância da velocidade da luz afirma que qualquer observador inercial, independentemente de seu estado de movimento (parado ou em movimento uniforme) medirá a velocidade da luz, no vácuo, com valor constante e igual a c .

A invariância da velocidade da luz impõem que as denominadas transformações de Galileu devem ser substituídas pelas transformações de Lorentz. Estas transformações são utilizadas quando desejamos avaliar o movimento relativo entre referenciais inerciais, ou seja, quando desejamos obter as coordenadas de um referencial com respeito a outro referencial. Com efeito, considere dois sistemas de coordenadas S_1 e S_2 , ambos inerciais, desta forma, o grupo de equações que descreve

¹Existem formas alternativas de construir a teoria da relatividade restrita de modo a abandonar o postulado ligado a invariância da velocidade da luz [29].

o movimento relativo desses sistemas é chamado grupo de Lorentz e dado por

$$\begin{aligned}x_2 &= \gamma(x_1 + vt_1), \\y_2 &= y_1, \\z_2 &= z_1, \\t_2 &= \gamma\left(t_1 + \frac{vx_1}{c^2}\right),\end{aligned}$$

onde o fator γ é expresso por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

c é a velocidade da luz no vácuo e v a velocidade relativa entre os sistemas S_1 e S_2 .

Observe que a velocidade da luz passa a ser uma constante fundamental da natureza, que limita a velocidade de qualquer processo físico, unificando espaço e tempo.

Baseado nestes postulados, o espaço e o tempo, considerados separados, passaram a compor um único substrato para os eventos físicos, denominado espaço-tempo. Como disse Minkowski [5], *“Doravante o espaço em si e o tempo em si estão fadados a desaparecer em meras sombras e só uma espécie de combinação dessas duas coisas preservará uma realidade independente”*.

Neste contexto, o elemento de linha, que representa a grandeza mais importante em uma geometria métrica que é a distância ds , passou a ser o elemento de linha de Minkowski, substituindo o clássico elemento de linha Euclidiano. Posteriormente, daremos uma definição adequada à métrica do espaço-tempo mas, por ora, apenas definiremos a métrica de Minkowski como

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad (2.1)$$

onde c , representa a velocidade da luz no vácuo.

2.1.1 Massa gravitacional e massa inercial

As experiências de Galileu na torre de Pisa mostraram que corpos de diferentes massas assumiam a mesma aceleração em queda livre. Isso levou Newton, durante o desenvolvimento da mecânica, a postular que massa inercial e massa gravitacional possuem a mesma intensidade.

Na teoria Newtoniana, a grandeza massa é introduzida de duas maneiras diferentes. Temos a chamada massa inercial que aparece no contexto da segunda lei de Newton,

$$F = m^{(i)} a,$$

e massa gravitacional relativa à interação gravitacional de corpos que possuem massa,

$$F_g = \frac{GM^{(g)}m^{(g)}}{R^2}.$$

Admitindo um corpo acelerado apenas pela influência gravitacional, temos que esta aceleração será dada por

$$a = \left(\frac{m^{(g)}}{m^{(i)}} \right) \frac{GM^{(g)}}{R^2}.$$

Assim, fazendo referência aos experimentos de Galileu a quantidade $\left(\frac{m^{(g)}}{m^{(i)}} \right)$ deveria ser uma constante, independente da massa dos corpos. A partir disso, Newton postula a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional, ou seja

$$m^{(i)} = m^{(g)}.$$

Experimentos foram realizados para verificar a veracidade do postulado de Newton. Dicke [6], mostrou que esta equivalência é correta com precisão de uma parte em 10^{11} .

A equivalência entre massa inercial e massa gravitacional pode levar a implicações quanto a forma da métrica do espaço-tempo. Para percebermos isso,

assumindo um campo gravitacional esfericamente simétrico, por exemplo, gerado por uma estrela de massa M e um sistema de referência S_0 , que cai em queda livre sobre a estrela. No interior do sistema S_0 , podemos admitir que seja válida a métrica de Minkowski (2.1). Consideremos ainda, o sistema S_0 , num instante t , a uma distância r e uma velocidade v da estrela.

Cattani [7] mostrou que uma estimativa da métrica do espaço-tempo, ou seja, uma perturbação causada na métrica de Minkowski, admitindo o campo gravitacional Newtoniano com a forma

$$\Phi(r) = \frac{-GM}{r},$$

e a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional é dada por

$$ds^2 = \frac{dr^2 - c^2 dt^2 \left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}, \quad (2.2)$$

onde a métrica de Minkowski foi escrita em coordenadas polares usuais (r, θ, ϕ, t) , e ainda ressaltou que o tempo computado por um relógio, a uma distância r de um campo $\Phi(r)$, poderia ser estimado por

$$dt^* = \left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right) dt, \quad (2.3)$$

onde dt^* e dt representam o incremento de tempo na presença do campo e na ausência de campo, respectivamente.

Desta forma, percebe-se que a existência de um campo gravitacional altera a métrica do espaço-tempo. Outro aspecto, ainda não comentado, é que na teoria de gravitação de Newton a interação entre as massas ocorre de forma instantânea e a distância, e como na relatividade restrita não existem processos instantâneos, inspira a procura por uma teoria da relatividade generalizada, que inclua acelerações e os efeitos da gravidade.

2.2 Geometria Riemanniana

Nesta seção iremos introduzir os fundamentos para a construção da relatividade geral. Para isso usaremos como referência o livro de M. Dalarsson [8].

Seja $(x^1, x^2, x^3, \dots, x^k)$ um conjunto de variáveis contínuas e independentes que possuem valores $(a^1, a^2, a^3, \dots, a^k)$, estes valores são chamados pontos. Definimos *espaço* ao conjunto de todos os pontos representados por estas variáveis.

Suponha que quiséssemos fazer uma transformação de variáveis. Deste modo esta transformação representada por

$$y^k = y^k(x^1, x^2, \dots, x^N), \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (2.4)$$

é dada por

$$dy^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^m} dx^m, \quad (k, m = 1, 2, \dots, N). \quad (2.5)$$

Logo, y^k e x^k representam sistemas de coordenadas independentes e a transformação (2.5) representa a transformação entre os sistemas de coordenadas. A descrição de um espaço e todas as suas transformações recebe o nome de *geometria métrica* [7].

De forma geral, qualquer conjunto de variáveis definidos em um sistema de coordenadas x^k e y^k por A^k e \bar{A}^k , respectivamente, e que se transforma segundo a lei

$$\bar{A}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^m} A^m, \quad (k, m = 1, 2, \dots, N), \quad (2.6)$$

é denominado vetor contravariante.

Por outro lado, um conjunto de variáveis que se transforma segundo a lei

$$\bar{B}_k = \frac{\partial x^m}{\partial y^k} B_m, \quad (k, m = 1, 2, \dots, N), \quad (2.7)$$

é denominado vetor covariante.

Ao consideramos o produto de dois vetores contravariantes B^m e D^n , dado por

$$A^{mn} = B^m D^n,$$

utilizando a lei de transformação de vetores contravariantes, (2.6), obtemos

$$\bar{A}^{jk} = \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \frac{\partial y^k}{\partial x^n} A^{mn}, \quad (k, j, m, n = 1, 2, \dots, N), \quad (2.8)$$

que representa um tensor de segunda ordem contravariante.

De modo análogo, podemos definir um tensor de segunda ordem covariante

$$A_{mn} = B_m D_n,$$

pelo produto de dois vetores covariantes, B_m e D_n , que se transforma segundo a lei

$$\bar{A}_{jk} = \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \frac{\partial x^n}{\partial y^k} A_{mn}, \quad (k, j, m, n = 1, 2, \dots, N). \quad (2.9)$$

Quando fazemos o produto de vetores covariantes e contravariantes, obtemos um tensor misto que terá uma lei de transformação que vai depender das características dos vetores envolvidos. Por exemplo, a transformação de A_{ps}^{mn} definido em x^k para \bar{A}_{kl}^{ij} , representado no sistema de coordenadas z^k é dada por

$$\bar{A}_{kl}^{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial x^m} \frac{\partial y^j}{\partial x^n} \frac{\partial x^p}{\partial y^k} \frac{\partial x^s}{\partial y^l} A_{ps}^{mn}. \quad (2.10)$$

2.2.1 Tensor métrico

Sejam dois pontos representados por $P(y^1, y^2, \dots, y^N)$ e $Q(y^1 + dy^1, y^2 + dy^2, \dots, y^N + dy^N)$, onde dy^k , $k = 1, 2, \dots, N$ é a distância infinitesimal entre o ponto de P com respeito a Q , logo, a distância Euclidiana ds entre P e Q será dada por

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + \dots + (dy^N)^2, \quad (2.11)$$

que pode ser escrita como

$$ds^2 = \delta_{jk} dy^j dy^k, \quad (j, k = 1, 2, \dots, N), \quad (2.12)$$

onde δ_j^i é dado por

$$\delta_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}.$$

A expressão (2.12) é definida como elemento de linha, ou métrica.

Assumindo a transformação de coordenadas obtida na Seção 2.2, a métrica admite a forma

$$ds^2 = g_{mn} dy^m dy^n, \quad (m, n = 1, 2, \dots, N), \quad (2.13)$$

onde

$$g_{mn} = \delta_{jk} \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \frac{\partial y^k}{\partial x^n}, \quad (2.14)$$

é chamado tensor métrico.

Um espaço onde vetores covariantes podem ser convertidos em vetores contravariantes, e vice-versa, é chamado *espaço métrico*, e esta conversão é feita pelo tensor métrico, da seguinte maneira

$$U_i = g_{im} U^m.$$

Em um sentido topológico, espaço métrico é definido por um conjunto X munido de uma métrica d fixada.

Quando as componentes do tensor métrico são constantes, as linhas das coordenadas são retas. No entanto, se essas componentes dependem das coordenadas y^k , tem-se linhas de coordenadas curvas. Se um espaço pode ser descrito por coordenadas retilíneas, ele é considerado um espaço plano, e quando um espaço não pode ser representado por coordenadas retilíneas, ele é considerado curvo ou Riemanniano.

2.2.2 Objetos de análise tensorial

Nesta seção, definiremos uma série de objetos tensoriais, necessários à construção da relatividade geral, no entanto não faremos um maior desenvolvimento de suas partes, apenas indentificaremos algumas de suas características.

Qualquer transformação tensorial de sistemas de coordenadas é linear, ou seja, se um tensor possui suas componetes nulas em determinado sistema, após a transformação, manterá as componentes nulas no novo sistema de coordenadas.

Definimos a derivada covariante de um tensor de segunda ordem contravariante da seguinte maneira

$$C_{;p}^{mn} = \frac{DC^{mn}}{Dx^p} = \frac{\partial C^{mn}}{\partial x^p} + \Gamma_{kp}^n C^{mk} + \Gamma_{kp}^m C^{kn}, \quad (2.15)$$

onde os coeficiente Γ_{np}^m são chamados símbolos de Christoffel, dados por

$$\Gamma_{np}^m = \frac{1}{2} \left(g^{mk} \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^p} + g^{mk} \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^n} - g^{mk} \frac{\partial g_{np}}{\partial x^k} \right). \quad (2.16)$$

A introdução dos símbolos de Christoffel permitem utilizando as equações de Euler-Lagrange, construir a equação da geodésica

$$\frac{d^2 u^n}{ds^2} + \Gamma_{lk}^n \frac{du^l}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0, \quad (2.17)$$

que representa a menor distância entre dois pontos de um espaço e u^n significa as coordenadas do espaço-tempo. Desta maneira, as linhas geodésicas sobre uma superfície plana são retas, enquanto as mesmas linhas sobre uma superfície curva são curvas.

O tensor que representa a curvatura do espaço-tempo é chamado tensor de Riemann, definido por

$$R_{mkp}^n = \partial_k \Gamma_{mp}^n - \partial_p \Gamma_{mk}^n + \Gamma_{mp}^l \Gamma_{lk}^n - \Gamma_{mk}^l \Gamma_{lp}^n, \quad (2.18)$$

onde $\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial x^\xi} = (\bullet)_\xi$, representa a derivada parcial com respeito a variável x^ξ .

A contração do tensor de Riemann pelo tensor métrico, ou seja, $g_{ml}R_{nkp}^l$, adquire a forma

$$R_{mnkp} = \frac{1}{2} (\partial_k \partial_n g_{pm} + \partial_p \partial_m g_{nk} - \partial_k \partial_m g_{np} - \partial_p \partial_n g_{km}) + g_{lj} (\Gamma_{nk}^l \Gamma_{mp}^j - \Gamma_{np}^l \Gamma_{mk}^j), \quad (2.19)$$

onde vamos assumir $(m, n, k, p = 1, 2, 3, 4)$. Desta maneira, se R_{mnkp} é nulo em todos os pontos de um espaço, temos um espaço plano, também chamado espaço *flat*. Cabe observar que o número de componentes n do tensor de Riemann é dado por

$$n = \frac{N^2 (N^2 - 1)}{12},$$

onde N representa o número de coordenadas do espaço-tempo. A contração deste tensor é denominado tensor de Ricci, expresso por

$$R_{mn} = \partial_n \Gamma_{pm}^p - \partial_p \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mp}^l \Gamma_{nl}^p - \Gamma_{mn}^p \Gamma_{lp}^l, \quad (2.20)$$

onde definimos

$$R_{mn} = R_{mnp}^p = -R_{mpn}^p.$$

A contração do tensor de Ricci, feita pelo tensor métrico é denominado escalar de Ricci, dado por

$$R = g^{mn} R_{mn} = g^{mn} g^{pk} R_{kmnp}. \quad (2.21)$$

2.3 Postulados da relatividade geral

A relatividade geral está fundamentada sob três postulados; o primeiro chama-se princípio da equivalência, afirma que massa inercial massa gravitacional são equivalentes, aspecto que de certa forma, já havia sido proposto por Newton em função dos experimentos de Galileu. O segundo postulado afirma que não existem sistemas de coordenadas privilegiadas para descrever as leis da natureza, como disse

o próprio Einstein [14], “*Todos os sistemas de coordenadas gaussianas são equivalentes para a formulação das leis gerais da natureza*”. Este postulado recebe o nome de princípio da covariância generalizada.

Por fim, temos a ação de Einstein-Hilbert expressa por

$$\delta I_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \delta \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d\Omega,$$

que leva a suas equações de campo. São essas equações que descrevem como a matéria e energia se relacionam no espaço-tempo. A matéria diz ao espaço como se curvar e o espaço diz a matéria como se mover [15].

O tensor de Einstein é definido por

$$G_{kl} = R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R, \quad (2.22)$$

onde R_{kl} é o tensor de Ricci, g_{kl} o tensor métrico e R o escalar de Ricci. Este tensor representa a parte geométrica das equações de campo de Einstein dadas por

$$G_{kl} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{kl}, \quad (2.23)$$

onde T_{kl} é o tensor energia-momento, que em geral também é uma função do tensor métrico. Ou

$$R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{kl}. \quad (2.24)$$

Vale observar que para o espaço-tempo usual e pelo fato de G_{kl} ser função do tensor de Ricci, que por sua vez é a contração do tensor de Riemann, as equações de Einstein se tornam vinte equações diferenciais parciais de segunda ordem não lineares e acopladas que passam a ser apenas dez, devido a simetria do tensor de Einstein. Logo, dada a forma geral de uma métrica do espaço-tempo, onde existem funções incógnitas, resolver as equações de Einstein, se resume a encontrar estas funções.

Pode-se facilitar o trabalho se considerarmos que o tensor energia-momento seja nulo, ou seja, termos uma configuração para o vácuo. Para este

caso, as equações de Einstein podem ser reduzidas, contraindo a equação (2.24) com g^{pk} obtendo,

$$R_l^p - \frac{1}{2}\delta_l^p R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_l^p,$$

que implica ao admitirmos $p = l$ a expressão

$$R = \frac{8\pi G}{c^4}T.$$

Assim, a equação (2.24) pode ser reescrita como

$$R_{kl} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}T \right). \quad (2.25)$$

Logo, se T_{kl} é nulo, equivale a admitir

$$R_{kl} = 0, \quad (2.26)$$

cabe observar que $T_{kl} = 0$, representa um espaço-tempo onde não existe matéria ou energia, ou seja, T_{kl} esta associado à matéria.

3 ESPAÇO-TEMPO DE UM DISCO FINO

No Capítulo 2, vimos que a relatividade geral afirma que a presença de matéria, ou energia, distorce o espaço-tempo em sua volta, ditando como a matéria deve se mover. Vimos também que esta distorção é representada por uma métrica com a forma

$$ds^2 = g_{mn} dy^m dy^n,$$

assim, dada uma distribuição de matéria ou energia, a forma da métrica é determinada pelas equações de Einstein.

3.1 Construção da métrica de Weyl

Queremos obter uma métrica do espaço-tempo estática e com simetria cilíndrica, ou seja, independente do tempo e independente do ângulo de rotação com respeito ao eixo de simetria.

Começamos por impor as simetrias feitas através da determinação de campos vetoriais que representem estas simetrias, ou seja, os campos de Killing. Para este caso, teremos um campo vetorial tipo tempo, ϑ , e um campo vetorial tipo espaço, χ . Desta forma, impomos que a métrica seja invariante ao longo das linhas de fluxo destes campos. Em termos das derivadas de Lie, podemos assumir que

$$L_{\vartheta} g_{mn} = L_{\chi} g_{mn} \equiv 0,$$

onde L_{ϑ} e L_{χ} representam, respectivamente, a derivada de Lie com respeito a ϑ e χ . Se escolhermos y^2 como o deslocamento ao longo de χ e y^4 como o deslocamento ao longo de ϑ e substituindo y^2 por φ e y^4 por t , como consequência a métrica não terá dependência com respeito a estas coordenadas. Devemos ressaltar o fato de que termos cruzados do tipo $d\varphi dy$ e $dt dy$ são nulos, pois pela simetria $t \rightarrow -t$ e $\varphi \rightarrow -\varphi$.

O elemento de linha correspondente a estas imposições é

$$ds^2 = \zeta_{ij} dy^i dy^j + B d\varphi^2 - A dt^2, \quad (3.1)$$

onde A , B e ζ_{ij} dependem apenas das coordenadas y^1 e y^3 e $\{i, j\} = \{1, 3\}$.

Este elemento de linha deixa de ser diagonal apenas com relação às coordenadas y^1 e y^3 , logo assumindo que podemos aplicar uma transformação de coordenadas tal que $(y^1, y^3) \rightarrow (r, z)$, levando (3.1) a

$$ds^2 = D dr^2 + B d\varphi^2 + D dz^2 - A dt^2, \quad (3.2)$$

onde A , B e D são funções apenas de r e z . Assim, empregamos a seguinte notação $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (r, \varphi, z, t)$. Agora, utilizando as equações de Einstein para o vácuo, podemos escrever a expressão (3.2), obtendo a métrica estática de Weyl

$$ds^2 = e^{2(\lambda-\sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 + e^{2(\lambda-\sigma)} dz^2 - e^{2\sigma} dt^2,$$

onde $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$, $-\infty < t < \infty$ e as funções σ e λ , só dependem das variáveis r e z , ou seja, $\sigma = \sigma(r, z)$ e $\lambda = \lambda(r, z)$.

3.1.1 Soluções de Weyl

Nesta seção, vamos citar algumas soluções de Weyl, ou seja, soluções exatas para as equações de Einstein geradas pela métrica de Weyl [9]

Campo Homogêneo

$$\sigma = \mu_1 z, \quad \lambda = -\frac{\mu_1 r^2}{2}, \quad (3.3)$$

onde μ_1 é uma constante.

Soluções de Levi-Civita

$$\sigma = 2\mu_2 \ln(r) + \ln(C), \quad \lambda = 4\mu_2^2 \ln(r), \quad (3.4)$$

onde μ_2 e C são constantes.

Soluções de Chazy-Curzon ou partícula de Curzon

$$\sigma = -\frac{m}{R}, \quad \lambda = -\frac{m^2 r^2}{2R^4}, \quad (3.5)$$

onde $R^2 = r^2 + (z - z_0)^2$ e m é constante.

Barra de comprimento finito

$$\sigma = \frac{m}{2l} \ln \left(\frac{R_1 + R_2 + 2l}{R_1 + R_2 - 2l} \right), \quad \lambda = \frac{m^2}{2l^2} \ln \left[\frac{(R_1 + R_2)^2 - 4l^2}{4R_1 R_2} \right], \quad (3.6)$$

onde $R_1 = \sqrt{r^2 + (z + m)^2}$, $R_2 = \sqrt{r^2 + (z - m)^2}$, m e l são constantes.

Soluções de Schwarzschild

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{R_1 + R_2 - 2m}{R_1 + R_2 + 2m} \right), \quad \lambda = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(R_1 + R_2)^2 - 4m^2}{4R_1 R_2} \right], \quad (3.7)$$

onde m é constante.

Um estudo sobre soluções da métrica de Weyl foi realizado por D'Afonseca [9], no qual o assunto principal foi uma revisão das soluções das equações de Einstein para sistemas estáticos de simetria axial.

3.2 Equações de campo

Considerando um campo gravitacional com simetria cilíndrica assumimos o caso em que a altura do cilindro é muito menor que o raio, ou seja $h \ll r$. Para modelar este espaço-tempo utilizaremos a métrica estática de Weyl, construída na seção 3.1,

$$ds^2 = e^{2(\lambda-\sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 + e^{2(\lambda-\sigma)} dz^2 - e^{2\sigma} dt^2. \quad (3.8)$$

Como mostrado anteriormente, por razões de simetria, as funções σ e λ são funções que dependem apenas das variáveis r e z , ou seja, $\sigma = \sigma(r, z)$ e $\lambda = \lambda(r, z)$.

Da definição de símbolo de Christoffel dada pela equação (2.16), onde admitimos que

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) = (r, \varphi, z, t),$$

obtemos as seguintes componentes não nulas

$$\Gamma_{11}^1 = \lambda_r - \sigma_r, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{11}^1, \quad \Gamma_{23}^2 = -\sigma_z, \quad \Gamma_{44}^1 = e^{4\sigma-2\lambda}\sigma_r, \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{11}^3 = \sigma_z - \lambda_z, \quad \Gamma_{14}^4 = \sigma_r, \quad \Gamma_{33}^1 = -\Gamma_{11}^1, \quad \Gamma_{44}^3 = e^{4\sigma-2\lambda}\sigma_z, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1-r\sigma_r}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = e^{-2\lambda}(r^2\sigma_r - r), \quad \Gamma_{33}^3 = -\Gamma_{11}^3, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{13}^1 = -\Gamma_{11}^3, \quad \Gamma_{22}^3 = e^{-2\lambda}r^2\sigma_z, \quad \Gamma_{34}^4 = \sigma_z, \quad (3.12)$$

onde os índices subscritos nas funções σ e λ , representam derivadas parciais com respeito a r ou z .

As componentes não nulas do tensor de Ricci, obtidas originalmente por Zipoy e Rosen [24, 20] e calculadas através da expressão (2.20), são dadas por

$$R_{11} = \frac{r\sigma_{zz} + r\sigma_{rr} - 2r\sigma_r^2 + \sigma_r - r(\lambda_{zz} + \lambda_{rr}) + \lambda_r}{r}, \quad (3.13)$$

$$R_{13} = \frac{-2r\sigma_r\sigma_z + \lambda_z}{r}, \quad (3.14)$$

$$R_{22} = e^{-2\lambda} [r^2(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) + r\sigma_r], \quad (3.15)$$

$$R_{33} = \frac{r\sigma_{zz} + r\sigma_{rr} - 2r\sigma_z^2 + \sigma_r - r(\lambda_{zz} + \lambda_{rr}) - \lambda_r}{r}, \quad (3.16)$$

$$R_{44} = \frac{e^{-2\lambda} [r e^{4\sigma} (\sigma_{zz} + \sigma_{rr}) + e^{4\sigma}\sigma_r]}{r}. \quad (3.17)$$

Como nosso interesse está nas soluções para vácuo, assumimos o tensor de Einstein (2.22) nulo que é equivalente a tomar as equações (3.13) a (3.17) idênticas a zero, levando a

$$r\sigma_{zz} + r\sigma_{rr} - 2r\sigma_r^2 + \sigma_r - r(\lambda_{zz} + \lambda_{rr}) + \lambda_r = 0, \quad (3.18)$$

$$-2r\sigma_r\sigma_z + \lambda_z = 0, \quad (3.19)$$

$$r^2 (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) + r\sigma_r = 0, \quad (3.20)$$

$$r\sigma_{zz} + r\sigma_{rr} - 2r\sigma_z^2 + \sigma_r - r(\lambda_{zz} + \lambda_{rr}) - \lambda_r = 0, \quad (3.21)$$

$$r (\sigma_{zz} + \sigma_{rr}) + \sigma_r = 0. \quad (3.22)$$

Subtraindo a equação (3.18) da equação (3.21), temos que

$$-\lambda_r + r\sigma_r^2 - r\sigma_z^2 = 0. \quad (3.23)$$

De (3.20) ou (3.22) vem que

$$\sigma_r + r\sigma_{rr} + r\sigma_{zz} = 0. \quad (3.24)$$

Finalmente, considerando a equação (3.19), temos

$$2r\sigma_r\sigma_z = \lambda_z, \quad (3.25)$$

resultando nas seguintes equações de campo não nulas e independentes, no vácuo

$$r (\sigma_r^2 - \sigma_z^2) - \lambda_r = 0, \quad (3.26)$$

$$\sigma_r + r\sigma_{rr} + r\sigma_{zz} = 0, \quad (3.27)$$

$$2r\sigma_r\sigma_z = \lambda_z. \quad (3.28)$$

Vamos então assumir a condição $h \ll r$, justificada no início desta seção. Para isso, utilizaremos a expansão em série de Taylor de ordem arbitrária, tal que

$$\sigma(r, z) = \sigma(r, 0) + z \left. \frac{\partial \sigma(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} + z^2 \left. \frac{\partial^2 \sigma(r, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots, \quad (3.29)$$

$$\lambda(r, z) = \lambda(r, 0) + z \left. \frac{\partial \lambda(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} + z^2 \left. \frac{\partial^2 \lambda(r, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots, \quad (3.30)$$

que vamos considerar apenas até segunda ordem

$$\sigma(r, z) \approx A(r) + a(r)z + c(r)z^2, \quad (3.31)$$

$$\lambda(r, z) \approx B(r) + b(r)z + d(r)z^2. \quad (3.32)$$

3.2.1 Aproximação de zero ordem

Vamos assumir uma aproximação de zero ordem, ou seja,

$$\sigma(r, z) = A(r), \quad (3.33)$$

$$\lambda(r, z) = B(r). \quad (3.34)$$

Note que nesse caso as funções σ e λ são funções apenas de r .

3.2.1.1 Construção da $\sigma(r)$

Partindo da equação (3.27) e fazendo a seguinte redução de ordem, temos

$$\sigma_r = y \Rightarrow \sigma_{rr} = y_r \Rightarrow y + ry_r = 0. \quad (3.35)$$

Resolvendo (3.35), por separação de variáveis, obtemos

$$\sigma_r = \frac{C_1}{r}, \quad (3.36)$$

onde C_1 é uma constante de integração. Após mais uma integração com respeito a r vem

$$\sigma(r) = C_1 \ln(r) + C_2. \quad (3.37)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $C_1 = \frac{k_0}{2}$ e $C_2 = 0$, tendo em vista que nas equações de campo temos apenas derivadas da função σ , que resulta assim em

$$\sigma(r) = \frac{k_0}{2} \ln(r). \quad (3.38)$$

3.2.1.2 Construção da $\lambda(r)$

De posse do resultado estabelecido para $\sigma(r)$, equação (3.38), e admitindo a equação de campo (3.26), temos

$$\lambda_r = r \left(\frac{k_0}{2r} \right)^2 \Rightarrow \lambda(r) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) + C_3, \quad C_3 = \text{const}, \quad (3.39)$$

e sem perda de generalidade fazemos $C_3 = 0$, assim temos como soluções das equações da campo,

$$\sigma(r) = \frac{k_0}{2} \ln(r), \quad (3.40)$$

$$\lambda(r) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r). \quad (3.41)$$

As soluções (3.40) e (3.41) foram obtidas por Gautreau e Hoffman [4], quando estudavam soluções Riemann-flat para a métrica de Weyl, admitindo que σ e λ eram funções apenas da variável r .

A solução de zero ordem obtida, ainda poderia ser escrita utilizando um conceito de *escala global*. Desta maneira, ao contrário de termos a soma de constantes arbitrárias de integração, poderíamos construir uma integral definida de r_0 a r , de modo que as soluções (3.40) e (3.41), admitiriam a forma

$$\sigma(r) = \frac{k_0}{2} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right), \quad (3.42)$$

$$\lambda(r) = \frac{k_0^2}{4} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right), \quad (3.43)$$

onde $r_0 \neq 0$.

3.2.2 Aproximação de primeira ordem

Considerando uma aproximação de primeira ordem, temos

$$\sigma(r, z) = A(r) + a(r)z, \quad (3.44)$$

$$\lambda(r, z) = B(r) + b(r)z. \quad (3.45)$$

3.2.2.1 Construção da $\sigma(r, z)$

Assumindo a equação (3.27) e fazendo a seguinte redução de ordem, temos

$$\sigma_r = y \Rightarrow \sigma_{rr} = y_r \Rightarrow y + ry_r = 0. \quad (3.46)$$

Resolvemos (3.46) por separação de variáveis, obtendo

$$\sigma_r = \frac{C_1(z)}{r}, \quad (3.47)$$

onde $C_1(z)$ é uma constante de integração. Após mais uma integração com respeito a r obtem-se

$$\sigma(r, z) = C_1(z) \ln(r) + C_2(z). \quad (3.48)$$

Calculando a derivada da expressão (3.48), com respeito a z e comparando com a mesma derivada obtida de (3.44)

$$\sigma_z = C_1(z)_z \ln(r) + C_2(z)_z = a(r) \Rightarrow C_2(z)_z = a(r) - C_1(z)_z \ln(r). \quad (3.49)$$

Observe que $C_2 = C_2(z) \Rightarrow C_1(z)_z = 0$, $a(r) = a_0 = \text{const}$. Logo, fazendo $C_1(z) = \frac{k_0}{2} = \text{const}$, e integrando (3.49), temos a solução

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) + a_0 z + c_1, \quad (3.50)$$

e, novamente, sem perda de generalidade, fazendo $c_1 = 0$, obtém-se

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) + a_0 z. \quad (3.51)$$

3.2.2.2 Construção da $\lambda(r, z)$

Admitindo a equação de campo (3.26) e o resultado estabelecido para $\sigma(r, z)$, equação (3.51), temos que

$$\lambda_r = r \left(\frac{k_0}{2r} \right)^2 - r a_0^2. \quad (3.52)$$

Após uma integração com respeito a r , tem-se

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - \frac{a_0^2}{2} r^2 + C_3(z). \quad (3.53)$$

Derivando a expressão (3.53) com respeito a z e comparando com a mesma derivada obtida de (3.45), temos que $C_3(z)_z = b(r)$. E como $C_3 = C_3(z) \Rightarrow C_3(z)_z = b_0 = \text{const.}$ Logo $C_3(z) = b_0 z + c_2$ e chegamos ao resultado de $\lambda(r, z)$

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - \frac{a_0^2}{2} r^2 + b_0 z, \quad (3.54)$$

onde admitimos, como já discutido anteriormente, sem perda de generalidade, $c_2 = 0$. Quando substituimos os resultados de $\sigma(r, z)$, equação (3.51) e de $\lambda(r, z)$, equação (3.54), nas equações de campo, temos a imposição $b_0 = k_0 a_0$ levando às soluções:

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) + a_0 z, \quad (3.55)$$

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - \frac{a_0^2}{2} r^2 + k_0 a_0 z. \quad (3.56)$$

A equação (3.55) foi obtida por Capistrano [3] ao estudar soluções Ricci-flat para a métrica de Weyl, admitindo uma expansão em Taylor de primeira ordem para as funções σ e λ .

Observamos que se assumirmos $a_0 = b_0 = 0$, recuperamos a solução de ordem zero da Seção 3.2.1.

3.2.3 Aproximação de segunda ordem

Considerando uma aproximação de ordem dois, temos

$$\sigma(r, z) = A(r) + a(r)z + c(r)z^2, \quad (3.57)$$

$$\lambda(r, z) = B(r) + b(r)z + d(r)z^2. \quad (3.58)$$

3.2.3.1 Construção da $\sigma(r, z)$

Admitindo a equação (3.27) e fazendo a seguinte redução de ordem, temos

$$\sigma_r = y \Rightarrow \sigma_{rr} = y_r \Rightarrow y + ry_r + 2rc(r) = 0. \quad (3.59)$$

A última equação é linear, e pode ser resolvida segundo a técnica de fator de integração,

$$y_r + \frac{1}{r}y = -2c(r) \Rightarrow \sigma_r = -\frac{1}{r} \left(\int 2rc(r)dr \right) + \frac{A_1(z)}{r}, \quad (3.60)$$

e após mais uma integração temos

$$\sigma(r, z) = - \int \frac{1}{r'} \left(\int 2r''c(r'')dr'' \right) dr' + \int \frac{A_1(z)}{r'} dr'. \quad (3.61)$$

Resolvendo a integral exterior que aparece em (3.61), obtemos para $\sigma(r, z)$, a seguinte expressão

$$\sigma(r, z) = - \int \frac{1}{r'} \left(\int 2r''c(r'')dr'' \right) dr' + A_1(z) \ln(r) + A_2(z). \quad (3.62)$$

Neste ponto, escolhemos a forma da $c(r'')$ como uma função potência. Justificamos esta escolha pelo fato de buscarmos funções analíticas no infinito, logo

$$c(r'') = \frac{c_0}{r''^n}, \quad c_0 = \text{const}, \quad (3.63)$$

substituindo na expressão (3.62) e fazendo os cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma(r, z) &= - \int \frac{1}{r'} \left(\int 2r'' \frac{c_0}{r''^n} dr'' \right) dr' + A_1(z) \ln(r) + A_2(z) \\ &= - \int \frac{1}{r'} \left(2 \frac{c_0}{(2-n)} r'^{2-n} + A_3(z) \right) dr' + A_1(z) \ln(r) + A_2(z) \\ &= - \int \left(2 \frac{c_0}{(2-n)} r'^{1-n} + \frac{A_3(z)}{r'} \right) dr' + A_1(z) \ln(r) + A_2(z) \\ &= \frac{-2c_0}{(2-n)^2} r^{2-n} + k(z) \ln(r) + A_2(z), \quad n \neq 2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\sigma(r, z) = k(z) \ln(r) + \frac{-2c_0}{(2-n)^2} r^{2-n} + A_2(z), \quad n \neq 2. \quad (3.65)$$

Calculando a derivada da equação (3.65) com respeito a z , temos

$$\sigma_z = k(z)_z \ln(r) + A_2(z)_z, \quad (3.66)$$

e da equação (3.57), temos para mesma derivada o seguinte resultado

$$\sigma_z = a(r) + 2c(r)z = a(r) + \frac{2c_0}{r^n} z, \quad (3.67)$$

Das equações (3.66) e (3.67) e isolando $A_2(z)_z$ obtemos

$$A_2(z)_z = a(r) + \frac{2c_0}{r^n} z - k(z)_z \ln(r). \quad (3.68)$$

Observe que $A_2(z)$ é uma função apenas de z , logo implica que

$$A_2 = A_2(z) \Rightarrow a(r) = a_0 = \text{const}, \quad k(z) = \frac{k_0}{2} = \text{const}, \quad n = 0. \quad (3.69)$$

Então,

$$A_2(z)_z = a_0 + 2c_0 z \Rightarrow A_2(z) = a_0 z + c_0 z^2 + c_1. \quad (3.70)$$

Observando as equações de campo (3.26) a (3.28), percebe-se que sempre temos as derivadas de $\sigma(r, z)$, logo podemos considerar $c_1 = 0$, sem perda de generalidade. Chegamos desta forma ao seguinte resultado

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) - \frac{c_0 r^2}{2} + a_0 z + c_0 z^2. \quad (3.71)$$

3.2.3.2 Construção da $\lambda(r, z)$

Admita a equação de campo (3.26), vamos considerar

$$d(r) = \frac{d_0}{r^m}, \quad d_0 = \text{const}. \quad (3.72)$$

De posse do resultado estabelecido para $\sigma(r, z)$, equação (3.71), temos que

$$\lambda_r = r\sigma_r^2 - r\sigma_z^2 = r\left(\frac{k_0}{2r} - c_0r\right)^2 - r(a_0 + 2c_0z)^2. \quad (3.73)$$

ou

$$\lambda_r = r\left(\frac{k_0^2}{4r^2} - k_0c_0 + c_0^2r^2\right) - r(a_0 + 2c_0z)^2 = \frac{k_0^2}{4r} - k_0c_0r + c_0^2r^3 - r(a_0 + 2c_0z)^2.$$

Integrando com respeito a r , obtém-se

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - k_0c_0\frac{r^2}{2} + c_0^2\frac{r^4}{4} - (a_0 + 2c_0z)^2\frac{r^2}{2} + B_1(z), \quad (3.74)$$

Derivando a expressão acima com respeito a z , obtemos

$$\lambda_z = (-2a_0c_0 - 4c_0^2z)r^2 + B_1(z)_z, \quad (3.75)$$

e calculando a mesma derivada da equação (3.58), temos

$$\lambda_z = b(r) + 2d(r)z = b(r) + 2\frac{d_0}{r^m}z,$$

levando ao seguinte resultado

$$B_1(z)_z = b(r) + 2\frac{d_0}{r^m}z + 2a_0c_0r^2 + 4c_0^2zr^2 \quad (3.76)$$

que integrando com respeito a z , obtém-se

$$B_1(z) = b(r)z + 2\frac{d_0}{r^m}\frac{z^2}{2} + 2a_0c_0r^2z + 4c_0^2r^2\frac{z^2}{2} + b_1, \quad (3.77)$$

ou ainda

$$B_1(z) = \left(\frac{d_0}{r^m} + 2c_0^2r^2\right)z^2 + (b(r) + 2a_0c_0r^2)z + b_1. \quad (3.78)$$

Para que $B_1(z)$ seja uma função apenas de z , temos que

$$C_1 = \frac{d_0}{r^m} + 2c_0^2r^2 = d(r) + 2c_0^2r^2; \quad C_2 = b(r) + 2a_0c_0r^2, \quad (3.79)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, assim obtemos para $\lambda(r, z)$, a seguinte expressão

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - k_0c_0\frac{r^2}{2} - (a_0 + 2c_0z)^2\frac{r^2}{2} + \frac{1}{4}c_0^2r^4 + C_1z^2 + C_2z + b_1, \quad (3.80)$$

onde assumimos a constante $b_1 = 0$, sem perda de generalidade. Substituindo esse resultado, bem como a equação (3.71), nas equações de campo, encontramos as seguintes restrições para C_1 e C_2

$$C_1 = k_0 c_0, \quad (3.81)$$

$$C_2 = k_0 a_0. \quad (3.82)$$

Assim, chega-se à expressão

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - k_0 c_0 \frac{r^2}{2} + \frac{1}{4} c_0^2 r^4 - (a_0 + 2c_0 z)^2 \frac{r^2}{2} + k_0 c_0 z^2 + k_0 a_0 z. \quad (3.83)$$

Temos a implicação imediata, usando a equação (3.79),

$$b(r) = k_0 a_0 - 2a_0 c_0 r^2 \quad (3.84)$$

e a equação

$$d(r) = k_0 c_0 - 2c_0^2 r^2, \quad (3.85)$$

de onde obtemos que

$$b(r) = \frac{a_0}{c_0} d(r). \quad (3.86)$$

Em outros termos, a solução resulta em

$$A(r) = \frac{k_0}{2} \ln r - \frac{c_0}{2} r^2, \quad (3.87)$$

$$a(r) = a_0, \quad c(r) = c_0, \quad (3.88)$$

$$B(r) = \frac{k_0^2}{4} \ln r - (a_0^2 + k_0 c_0 - \frac{c_0^2}{2} r^2) \frac{r^2}{2}, \quad (3.89)$$

$$b(r) = \frac{a_0}{c_0} d(r), \quad d(r) = k_0 c_0 - 2c_0^2 r^2. \quad (3.90)$$

Observe que se assumirmos $c_0 = 0$, recuperamos a solução de primeira ordem da Seção 3.2.2. Desta maneira, podemos organizar as funções $A(r)$, $B(r)$, $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ e $d(r)$, em função da ordem da solução obtida. Assim, podemos resumir esses resultados na Tabela 3.1.

Função	Ordem		
	Zero	Primeira	Segunda
$A(r)$	$\frac{k_0}{2} \ln(r)$	$\frac{k_0}{2} \ln(r)$	$\frac{k_0}{2} \ln(r) - \frac{c_0 r^2}{2}$
$B(r)$	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r)$	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r) - a_0^2 \frac{r^2}{2}$	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r) - (a_0^2 + k_0 c_0) \frac{r^2}{2} + c_0^2 \frac{r^4}{4}$
$a(r)$	-	a_0	a_0
$b(r)$	-	$a_0 k_0$	$a_0 (k_0 - 2c_0 r^2)$
$c(r)$	-	-	c_0
$d(r)$	-	-	$c_0 (k_0 - 2c_0 r^2)$

Tabela 3.1: Resumo das soluções obtidas

Logo a solução de segunda ordem mais geral é,

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) - c_0 \frac{r^2}{2} + a_0 z + c_0 z^2, \quad (3.91)$$

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - (a_0^2 + k_0 c_0) \frac{r^2}{2} + c_0^2 \frac{r^4}{4} + a_0 (k_0 - 2c_0 r^2) z + c_0 (k_0 - 2c_0 r^2) z^2, \quad (3.92)$$

onde todos os casos estão inclusos; ressaltando que se $c_0 = 0$ recuperamos a solução de primeira ordem e que se $a_0 = c_0 = 0$ recuperamos a solução de zero ordem.

3.3 Soluções Riemann-flat

Nesta seção, estudaremos sob que condições nossa solução geral leva a métrica de Weyl à métrica de Minkowski, ou seja, sob quais circunstâncias temos o tensor de Riemann $R_{mnpq} = 0$. As soluções obtidas na seção anterior são ditas Ricci-flat, pois resolvemos as equações de Einstein para o vácuo. No entanto, se $R_{mn} = 0$, nada podemos afirmar quanto a $R_{mnpq} = 0$, mostrando que a condição $R_{mn} = 0$ é

menos restritiva que $R_{mnp} = 0$. Desta maneira, começamos nosso desenvolvimento por colecionar as componentes independentes e não nulas do tensor de Riemann.

3.3.1 Componentes independentes do tensor de Riemann

Utilizando a definição de tensor de Riemann (2.19), bem como a solução geral das equações de campo da Seção 3.2.3, obtemos as relações abaixo

$$R_{1313} = -(R_{1212} + R_{1414}), \quad (3.93)$$

$$R_{2211} = \omega_1(r, z)R_{1212}, \quad R_{4433} = \omega_2(r, z)R_{1212}, \quad (3.94)$$

$$R_{2424} = -\omega_1(r, z)R_{1313}, \quad R_{3311} = -R_{1313}, \quad R_{4422} = \omega_2(r, z)R_{1313}, \quad (3.95)$$

$$R_{2323} = -\omega_1(r, z)R_{1414}, \quad R_{3322} = -R_{1414}, \quad R_{4422} = \omega_2(r, z)R_{1414}, \quad (3.96)$$

$$R_{2213} = -\omega_1(r, z)R_{1322}, \quad R_{2321} = \omega_1(r, z)R_{1322}, \quad R_{3212} = -R_{1322}, \quad R_{4431} = \omega_2(r, z)R_{1322}, \quad (3.97)$$

onde $\omega_1(r, z)$ e $\omega_2(r, z)$, são dados pelas expressões

$$\omega_1(r, z) = -r^{2-\frac{k_0^2}{2}} \exp \left[\left(4c_0^2 z^2 + 4a_0 c_0 z + c_0 k_0 + a_0^2 - \frac{c_0^2}{2} r^2 \right) r^2 - 2k_0 (c_0 z^2 + a_0 z) \right], \quad (3.98)$$

$$\omega_2(r, z) = -r^{2k_0-2} \exp(-2c_0 r^2 + 4z(c_0 z + a_0)) \omega_1(r, z). \quad (3.99)$$

Logo as componetes não nulas e independentes do tensor de Riemann são R_{1212} , R_{1414} e R_{1322} , dadas por

$$R_{1212} = \frac{\sum_{n=0}^3 P_n(a_0, k_0) c_0^n + k_0^2 (k_0 - 2)}{8r^2}, \quad (3.100)$$

$$R_{1414} = \frac{\sum_{n=0}^3 Q_n(a_0, k_0) c_0^n - k_0 (k_0 - 2)^2}{8r^2}, \quad (3.101)$$

$$R_{1322} = \frac{\sum_{n=0}^3 S_n(a_0, k_0) c_0^n}{4r}, \quad (3.102)$$

onde os polinômios que aparecem de (3.100) a (3.102) são expressos por

$$\begin{aligned}
P_3(a_0, k_0) &= 96r^4z^2 - 8r^6 \\
P_2(a_0, k_0) &= 64r^2z^2 - 48r^2z^2k_0 + 12r^4k_0 - 8r^4 + 96a_0r^4z \\
P_1(a_0, k_0) &= 8r^2k_0 + 16r^2 - 6r^2k_0^2 + 24a_0^2r^4 + 64r^2za_0 - 48r^2za_0k_0 \\
P_0(a_0, k_0) &= a_0^2r^2(16 - 12k_0)
\end{aligned} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
Q_3(a_0, k_0) &= -96r^4z^2 + 8r^6 \\
Q_2(a_0, k_0) &= -32r^2z^2 + 48r^2z^2k_0 - 12r^4k_0 + 16r^4 - 96a_0r^4z \\
Q_1(a_0, k_0) &= -16r^2k_0 - 8r^2 + 6r^2k_0^2 - 24a_0^2r^4 - 32r^2za_0 + 48r^2za_0k_0 \\
Q_0(a_0, k_0) &= a_0^2r^2(12k_0 - 8)
\end{aligned} \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned}
S_3(a_0, k_0) &= 32r^2z^3 - 24zr^4 \\
S_2(a_0, k_0) &= -24zr^2 - 12a_0r^4 + 48a_0r^2z^2 + 24zr^2k_0 \\
S_1(a_0, k_0) &= 24zr^2a_0^2 - 6zk_0^2 + 12r^2a_0k_0 - 12r^2a_0 + 12zk_0 \\
S_0(a_0, k_0) &= 4r^2a_0^3 - 3a_0k_0(k_0 - 2)
\end{aligned} \tag{3.105}$$

3.3.2 Obtenção das soluções Riemann-flat

Para soluções Riemann-flat, temos que $R_{mnkp} \equiv 0$, logo $R_{1212} = R_{1414} = R_{1322} = 0$. Assim, para que (3.100), (3.101) e (3.102) sejam simultaneamente nulas, temos a primeira condição $a_0 = c_0 = 0$, que resulta imediatamente em $R_{1322} = 0$ e em

$$R_{1212} = \frac{k_0^2(k_0 - 2)}{8r^2}, \tag{3.106}$$

$$R_{1414} = \frac{-k_0(k_0 - 2)^2}{8r^2}. \tag{3.107}$$

Para que ambas sejam nulas, temos que $k_0 = 0$ ou $k_0 = 2$. Estas condições reproduzem as condições encontradas por Gautreau e Hoffman [4], quando estudavam soluções Riemann-flat para a métrica de Weyl, admitindo que σ e λ eram funções apenas da variável r .

3.4 Soluções para um disco fino

Assumindo a métrica de Weyl, dada pela equação (3.8), e as expansões (3.57) e (3.58), onde consideramos

$$\begin{aligned} c(r) &= \frac{c_0}{r^n}, \\ d(r) &= \frac{d_0}{r^m}, \end{aligned}$$

obtemos a solução geral

$$\begin{aligned} \sigma(r, z) &= \frac{k_0}{2} \ln(r) - c_0 \frac{r^2}{2} + a_0 z + c_0 z^2, \\ \lambda(r, z) &= \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - (a_0^2 + k_0 c_0) \frac{r^2}{2} + c_0^2 \frac{r^4}{4} + a_0 (k_0 - 2c_0 r^2) z + c_0 (k_0 - 2c_0 r^2) z^2. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Nossa proposta inicial foi encontrar soluções exatas das equações de Einstein no vácuo para a métrica de Weyl, com a intenção de estudar o espaço-tempo para um disco fino. A abordagem que escolhemos foi usar expansões em série de Taylor para aproximar as funções σ e λ da métrica de Weyl, logo vamos considerar que a contribuição de segunda ordem será menor que a contribuição de primeira ordem e assim por diante. Nossa ideia é de que, por estarmos impondo a simetria de um disco fino, onde $h \ll r$ a contribuição às soluções serão inversamente proporcionais a potência de z .

Desta maneira, um critério para a aplicação das considerações que faremos nesta Seção é a condição $h \ll r$, ou $\frac{h}{r} \ll 1$. No caso do sistema solar

considerando as quantidades físicas do Sol e dos planetas temos, por exemplo, para o Sol e Mercúrio que a quantidade $\frac{h}{r} \approx 1 \times 10^{-2}$ e ao considerar o campo gravitacional Newtoniano temos, $\frac{h}{r} \approx 1 \times 10^{-13}$.

Neste ponto de nossa discussão, exploraremos quais são as consequências e as imposições geradas por esta nova premissa.

3.4.1 Caso 1: $c_0 \ll 1$

Se considerarmos $c_0 \ll 1$, então da equação (3.90), devemos considerar $c_0^2 r^2 \rightarrow 0 \Rightarrow d(r) = \frac{d_0}{r^m} = k_0 c_0$ e, portanto, devemos impor $m = 0$. Isto significa que $d_0 = k_0 c_0$.

Sob tais restrições, as expressões de $\sigma(r, z)$ e $\lambda(r, z)$ reduzem-se, portanto, a

$$\sigma(r, z) = A(r) + a_0 z + c_0 z^2, \quad (3.109)$$

$$\lambda(r, z) = B(r) + b_0 z + d_0 z^2, \quad (3.110)$$

onde

$$a_0 = \text{const}, \quad c_0 = \text{const}; \quad d_0 = \text{const}, \quad (3.111)$$

$$b(r) = b_0 = a_0 k_0, \quad (3.112)$$

$$A(r) = \frac{k_0}{2} \ln r - \frac{c_0}{2} r^2, \quad (3.113)$$

$$B(r) = \frac{k_0^2}{4} \ln r - (a_0^2 + k_0 c_0) \frac{r^2}{2}, \quad (3.114)$$

com $k_0 = \text{const}$.

No entanto, para que isso permaneça sendo solução das equações de campo, devemos satisfazer a condição, $a_0 = 0$ ou $c_0 = 0$, ou ambos zero. Estudaremos cada caso separadamente.

3.4.1.1 *Caso 1.1: $a_0 = c_0 = 0$ e $k_0 \neq 0$*

Se $a_0 = c_0 = 0$ decorre que $b_0 = d_0 = 0$, reduzindo as expressões das duas funções a apenas os termos

$$A(r) = \frac{k_0}{2} \ln r,$$

$$B(r) = \frac{k_0^2}{4} \ln r,$$

onde k_0 é uma constante livre.

Nesse caso, perdemos as contribuições de primeira e segunda ordens, ficando apenas com a contribuição de zero ordem de ambas funções.

3.4.1.2 *Caso 1.2: $a_0 = 0$, $c_0 \neq 0$ e $k_0 \neq 0$*

Se $a_0 = 0$ temos $b_0 = 0$, reduzindo as expressões das duas funções aos termos

$$A(r) = \frac{k_0}{2} \ln r - \frac{c_0}{2} r^2,$$

$$B(r) = \frac{k_0^2}{4} \ln r - k_0 c_0 \frac{r^2}{2},$$

e as constantes $c_0 \ll 1$, $d_0 = k_0 c_0$, e k_0 , livres.

Nesse caso, perdemos a contribuição de primeira ordem, ficando apenas com a contribuição de segunda ordem, mas proveniente das duas funções.

3.4.1.3 Caso 1.3: $c_0 = 0$, $a_0 \neq 0$ e $k_0 \neq 0$

Se $c_0 = 0$ temos $d_0 = 0$, reduzindo as expressões das duas funções aos termos

$$A(r) = \frac{k_0}{2} \ln r,$$

$$B(r) = \frac{k_0^2}{4} \ln r - a_0^2 \frac{r^2}{2},$$

e as constantes a_0 e k_0 .

Nesse caso, perdemos a contribuição de segunda ordem, ficamos apenas com a contribuição de primeira ordem, mas também das duas funções.

3.4.2 Caso 2: $d_0 \ll 1$

Se considerarmos $d_0 \ll 1$, então da equação (3.90) devemos considerar $c_0 \ll 1$ que recai nos casos já explorados.

3.4.3 Caso 3: $k_0 = 0$

Apesar de neste caso estarmos supondo a contribuição de zero ordem nula, temos em mente que esta aproximação pode ser útil em aplicações. Desta maneira, se considerarmos $k_0 = 0$, então das equações (3.87) a (3.90) ficam com a forma:

$$A(r) = -\frac{c_0}{2} r^2, \quad (3.115)$$

$$a(r) = a_0, \quad c(r) = c_0, \quad (3.116)$$

$$B(r) = -(a_0^2 - \frac{c_0^2}{2} r^2) \frac{r^2}{2}, \quad (3.117)$$

$$b(r) = \frac{a_0}{c_0} d(r), \quad d(r) = -2c_0^2 r^2. \quad (3.118)$$

Nesse caso, mantendo as contribuições de primeira e segunda ordem nas duas funções $\sigma(r, z)$ e $\lambda(r, z)$.

3.4.3.1 Caso 3.1: $k_0 = 0$ e $c_0 \ll 1$

Ainda considerarmos $c_0 \ll 1$, podemos assumir $c_0^2 \rightarrow 0$. Desta forma, as equações de (3.115) a (3.118) reduzem-se a

$$A(r) = -\frac{c_0}{2}r^2, \quad (3.119)$$

$$a(r) = a_0, \quad c(r) = c_0, \quad (3.120)$$

$$B(r) = -a_0^2 \frac{r^2}{2}, \quad (3.121)$$

$$b(r) = -2a_0c_0r^2, \quad d(r) = 0. \quad (3.122)$$

Nesse caso, perdemos a contribuição de segunda ordem da $\lambda(r, z)$. Analogamente os mesmos resultados se verificam se considerarmos $d_0 \ll 1$.

3.4.4 Resumo das soluções

Todas as considerações que fizemos, desde a solução geral, estão resumidas a seguir:

Caso Geral

$$\begin{aligned} \sigma(r, z) &= \frac{k_0}{2} \ln(r) - c_0 \frac{r^2}{2} + a_0 z + c_0 z^2, \\ \lambda(r, z) &= \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - (a_0^2 + k_0 c_0) \frac{r^2}{2} + c_0^2 \frac{r^4}{4} + a_0 (k_0 - 2c_0 r^2) z + c_0 (k_0 - 2c_0 r^2) z^2, \end{aligned}$$

lembrando que ambas, σ e λ , admitem a adição de um termo constante.

Caso 1.1

$$\begin{aligned} \sigma(r, z) &= \frac{k_0}{2} \ln(r), \\ \lambda(r, z) &= \frac{k_0^2}{4} \ln(r). \end{aligned}$$

O Caso 1.1, corresponde exatamente às soluções de Levi-Civita, dadas por (3.4), considerando $k_0 = 4\mu_2$ e $C_2 = \ln(C)$, onde C_2 é a constante que foi descartada na equação (3.37).

Caso 1.2

$$\begin{aligned}\sigma(r, z) &= \frac{k_0}{2} \ln(r) - c_0 \frac{r^2}{2} + c_0 z^2, \\ \lambda(r, z) &= \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - k_0 c_0 \frac{r^2}{2} + k_0 c_0 z^2.\end{aligned}$$

Caso 1.3

$$\begin{aligned}\sigma(r, z) &= \frac{k_0}{2} \ln(r) + a_0 z, \\ \lambda(r, z) &= \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - a_0^2 \frac{r^2}{2} + a_0 k_0 z.\end{aligned}$$

Caso 2

Equivalente ao Caso 1.

Caso 3

$$\begin{aligned}\sigma(r, z) &= -c_0 \frac{r^2}{2} + a_0 z + c_0 z^2, \\ \lambda(r, z) &= -a_0^2 \frac{r^2}{2} + c_0^2 \frac{r^4}{4} - 2a_0 c_0 r^2 z - 2c_0^2 r^2 z^2.\end{aligned}$$

Caso 3.1

$$\begin{aligned}\sigma(r, z) &= -c_0 \frac{r^2}{2} + a_0 z + c_0 z^2, \\ \lambda(r, z) &= -a_0^2 \frac{r^2}{2} - 2a_0 c_0 r^2 z.\end{aligned}$$

A solução para campo homogêneo, dada por (3.3), é uma solução particular que está contida no Caso 3.1, quando admitimos $c_0 = 0$ e fazemos $a_0 = \mu_1$.

Os casos acima citados estão resumidos em duas tabelas. A Tabela 3.1 mostra as funções σ e λ , a Tabela 3.2 mostra as mesmas funções segundo sua ordem.

CASOS	k_0	a_0	c_0	$\sigma(r, z)$	$\lambda(r, z)$
GERAL	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\frac{k_0}{2} \ln(r) - c_0 \frac{r^2}{2} + a_0 z + c_0 z^2$	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r) - (a_0^2 + k_0 c_0) \frac{r^2}{2} + c_0^2 \frac{r^4}{4} + a_0 (k_0 - 2c_0 r^2) z + c_0 (k_0 - 2c_0 r^2) z^2$
1			$\ll 1$		
1.1	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$\frac{k_0}{2} \ln(r)$	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r)$
1.2	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\frac{k_0}{2} \ln(r) - \frac{c_0}{2} r^2 + c_0 z^2$	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r) - k_0 c_0 \frac{r^2}{2} + k_0 c_0 z^2$
1.3	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\frac{k_0}{2} \ln(r) + a_0 z$	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r) - a_0^2 \frac{r^2}{2} + k_0 a_0 z$
3	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$-\frac{c_0}{2} r^2 + a_0 z + c_0 z^2$	$-a_0^2 \frac{r^2}{2} + c_0^2 \frac{r^4}{4} - 2a_0 c_0 r^2 z - 2c_0^2 r^2 z^2$
3.1	$= 0$		$\ll 1$		
3.1	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$-\frac{c_0}{2} r^2 + a_0 z + c_0 z^2$	$-a_0^2 \frac{r^2}{2} - 2c_0 a_0 r^2 z$

Figura 3.1: Quadro de soluções para um disco fino

CASOS	k_0	a_0	c_0	$\sigma(r, z)$			$\lambda(r, z)$		
				ZERO ORDEM	PRIMEIRA ORDEM	SEGUNDA ORDEM	ZERO ORDEM	PRIMEIRA ORDEM	SEGUNDA ORDEM
GERAL	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\frac{k_0}{2} \ln(r) - \frac{c_0}{2} r^2$	$a_0 z$	$c_0 z^2$	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r) - \left(a_0^2 + k_0 c_0 - \frac{c_0^2}{2} r^2 \right) \frac{r^2}{2}$	$(k_0 a_0 - 2c_0 a_0 r^2) z$	$(k_0 c_0 - 2c_0^2 r^2) z^2$
1			$\ll 1$						
1.1	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$\frac{k_0}{2} \ln(r)$	0	0	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r)$	0	0
1.2	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\frac{k_0}{2} \ln(r) - \frac{c_0}{2} r^2$	0	$c_0 z^2$	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r) - k_0 c_0 \frac{r^2}{2}$	0	$k_0 c_0 z^2$
1.3	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\frac{k_0}{2} \ln(r)$	$a_0 z$	0	$\frac{k_0^2}{4} \ln(r) - a_0^2 \frac{r^2}{2}$	$k_0 a_0 z$	0
3	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$-\frac{c_0}{2} r^2$	$a_0 z$	$c_0 z^2$	$-\left(a_0^2 - \frac{c_0^2}{2} r^2 \right) \frac{r^2}{2}$	$-2c_0 a_0 r^2 z$	$-2c_0^2 r^2 z^2$
3.1	$= 0$		$\ll 1$						
3.1	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$-\frac{c_0}{2} r^2$	$a_0 z$	$c_0 z^2$	$-a_0^2 \frac{r^2}{2}$	$-2c_0 a_0 r^2 z$	0

Figura 3.2: Quadro de soluções segundo a ordem das funções σ e λ

4 PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE PLANETAS DO SISTEMA SOLAR

Neste capítulo, usando a construção feita no Apêndice B do chamado campo quase-Newtoniano, bem como as soluções das equações de Einstein obtidas no Capítulo 3, buscaremos a contribuição relativística à precessão do periélio de planetas do Sistema Solar. Para tanto, usaremos o planeta Mercúrio como exemplo para este desenvolvimento, tendo em vista que a precessão do periélio deste planeta foi muito estudada desde 1859 [10].

4.1 Precessão do periélio de Mercúrio

O sucesso obtido por Le Verrier [10], com a descoberta de Netuno, devido a anomalias na órbita de Urano, o motivou a sugerir que a precessão observada, e não explicada na órbita de Mercúrio, seria causada por um planeta intra-mercuriano o nomeando Vulcano, o deus do fogo na mitologia grega. Le Verrier, inclusive, calculou a massa de Vulcano, obtendo um valor de $1/7$ da massa de Mercúrio. Em 1860 houve uma série de observações, devido a um eclipse total do Sol, com a esperança de encontrá-lo, mas com o passar dos anos a hipótese da existência de Vulcano foi abandonada.

Apresentamos uma representação ilustrativa, na Figura 4.1, da precessão do periélio de planetas solares [25]. A Tabela 4.1 [11] mostra as contribuições a precessão do periélio de Mercúrio. Pode-se observar que a discrepância entre o valor total observado e o valor total teórico é de cerca de $43''$ de arco por século.

Outras hipóteses foram formuladas para explicar a precessão do periélio de $43''$ de arco por século de Mercúrio, entre as quais

- existência de um satélite de Mercúrio,
- incrementos na massa de Vênus,
- modificações na lei de gravitação de Newton, alterando a potência de r , na expressão do campo gravitacional.

Causa	$\Delta\varphi$ (” por século)
Precessão dos equinócios	5025.6
Força gravitacional de outros planetas	531.4
Achatamento do Sol	0.0254
Total teórico	5557.02
Observado	5599.7

Tabela 4.1: Contribuições para precessão do periélio de Mercúrio não considerando os efeitos relativísticos

No entanto, nenhuma dessas possibilidades se confirmou. Somente em 1915, com os artigos de Einstein sobre relatividade geral é que aparece uma alternativa teórica para explicar tal fato. O próprio Einstein disse que uma das formas de corroborar sua teoria seria calcular a precessão do periélio de Mercúrio.

Como já mencionado, a primeira solução exata das equações de Einstein foi obtida por Schwarzschild [2], em 1916, ao estudar a métrica do espaço-tempo para a região exterior de um corpo maciço com simetria esférica.

O valor obtido para a contribuição relativística da precessão do periélio de Mercúrio foi de

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 p},$$

onde $p = a(1 - \varepsilon^2)$, a é a medida do semi-eixo maior da elipse, ε a excentricidade da órbita e c a velocidade da luz no vácuo.

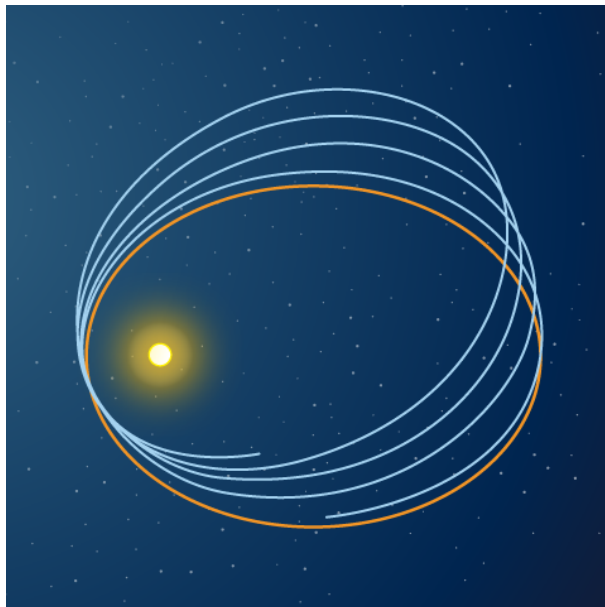


Figura 4.1: Representação da precessão do periélio de um planeta solar

Aplicando dados astronômicos e das constantes físicas na expressão acima, obtém-se aproximadamente os $43''$ de arco por século. Esta foi uma das primeiras confirmações observacionais da relatividade geral.

4.2 Construção da equação da órbita

Do Apêndice A, temos que a equação da órbita Newtoniana é dada por

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}, \quad (4.1)$$

onde $p = a(1 - \varepsilon^2)$, bem como, sua solução é expressa por $u = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}{p}$ [8].

Do Apêndice B, temos que a expressão para o campo quase-Newtoniano é dada por

$$\Phi = \frac{-c^2}{2} (1 + g_{44}). \quad (4.2)$$

Do Capítulo 2, temos que no caso geral de segunda ordem a função $\sigma(r, z)$ possui a forma

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) - c_0 \frac{r^2}{2} + a_0 z + c_0 z^2 + \delta_0, \quad (4.3)$$

onde δ_0 se refere a constante c_1 , que na equação (3.70) havia sido ignorada.

Admitindo a métrica de Weyl (3.8), temos que $g_{44} = -e^{2\sigma}$. Logo

$$g_{44} = -e^{2\left(\frac{k_0}{2} \ln(r) - c_0 \frac{r^2}{2} + a_0 z + c_0 z^2 + \delta_0\right)} = -e^{(\ln(r^{k_0}) - c_0 r^2 + 2a_0 z + 2c_0 z^2 + 2\delta_0)}, \quad (4.4)$$

ou

$$g_{44} = -r^{k_0} e^{-c_0 r^2} e^{2a_0 z + 2c_0 z^2} e^{2\delta_0}. \quad (4.5)$$

Admitindo que $c_0 \ll 1 \Rightarrow a_0 = 0$, $e^{-c_0 r^2} = 1 - c_0 r^2$, vem

$$g_{44} = -r^{k_0} (1 - c_0 r^2) e^{2c_0 z^2} \delta_1, \quad (4.6)$$

onde $\delta_1 = e^{2\delta_0}$. Dessa maneira chegamos a

$$g_{44} = -\delta_1 (r^{k_0} - c_0 r^{2+k_0}) e^{2c_0 z^2}. \quad (4.7)$$

Assumindo a equação (4.2) e substituindo o resultado acima, dado por (4.7), temos o potencial gravitacional quase-Newtoniano

$$\Phi = \frac{-c^2}{2} \left[1 - \delta_1 (r^{k_0} - c_0 r^{2+k_0}) e^{2c_0 z^2} \right]. \quad (4.8)$$

Sabemos que a força relativística é expressa por $F = \frac{-\partial\Phi}{\partial r}$ e para Φ dado em (4.8), temos

$$F = \frac{c^2}{2} \left[(\delta_1 c_0 (2 + k_0) r^{k_0+1} - \delta_1 k_0 r^{k_0-1}) e^{2c_0 z^2} \right]. \quad (4.9)$$

Fazendo a seguinte troca de variáveis, $r = \frac{1}{u}$ e $z = 0$, temos

$$F = \frac{c^2}{2} \left(\frac{\delta_1 c_0 (2 + k_0)}{u^{k_0+1}} - \frac{\delta_1 k_0}{u^{k_0-1}} \right). \quad (4.10)$$

4.2.1 Recuperação da equação da órbita Newtoniana

Admitindo a equação (4.1) e multiplicando e dividindo à direita da igualdade por F_g , onde F_g representa a força gravitacional Newtoniana, temos

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} \frac{F_g}{F_g} = \frac{1}{p} \frac{F_g}{\left(\frac{-GMm}{r^2}\right)} = \frac{-F_g}{pGMmu^2}. \quad (4.11)$$

Observe que a equação (4.11) é assumida como primeira aproximação, mas não derivada das equações da geodésica.

Logo

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{-F_g}{pGMmu^2}. \quad (4.12)$$

Neste ponto vamos considerar que F , expressa pela equação (4.10), seja idêntica a F_g , ou seja,

$$F \equiv F_g. \quad (4.13)$$

Utilizando a identidade (4.13), podemos reescrever a equação (4.12), obtendo

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{c^2}{2pGMm} \left(\frac{\delta_1 k_0}{u^{k_0+1}} - \frac{\delta_1 c_0 (2 + k_0)}{u^{k_0+3}} \right). \quad (4.14)$$

Uma maneira de recuperarmos o resultado Newtoniano descrito anteriormente, é primeiro arbitrarmos $k_0 = -3$, assim

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \delta_1 c_0 \frac{c^2}{2pGMm} - 3\delta_1 \frac{c^2}{2pGMm} u^2, \quad (4.15)$$

e segundo admitirmos $\delta_1 c_0 = \frac{2GMm}{c^2} \Rightarrow \delta_1 = \frac{2GMm}{c_0 c^2}$. Desta maneira, obtém-se

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} - 3 \left(\frac{2GMm}{c_0 c^2} \right) \frac{c^2}{2pGMm} u^2, \quad (4.16)$$

ou

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} - \frac{3u^2}{c_0 p}. \quad (4.17)$$

Logo, a equação da órbita Newtoniana, (4.1) é recuperada se ignorarmos o segundo termo à direita da igualdade da equação (4.17). Com efeito, este termo é um termo corretivo em nosso modelo e o interpretamos como a contribuição relativística a precessão do periélio. Neste contexto a equação da órbita (4.17), figura entre a teoria Newtoniana e a teoria da relatividade geral.

4.2.2 Resolução da equação diferencial da órbita

Para resolvermos a equação (4.17), usaremos a teoria de perturbação para equações diferenciais [18]. Sabemos que essa teoria obtém uma solução aproximada da equação diferencial, se admitirmos apenas os termos de maior ordem como solução. Nossa construção será idêntica a utilizada por Dalarsson [8], ao obter a contribuição relativística à precessão do periélio de planetas solares, utilizando a métrica de Schwarzschild. Assim admitimos as seguintes hipóteses

$$u = u^{(0)} + u^{(1)}, \quad u^{(1)} \ll u^{(0)}, \quad (4.18)$$

onde $u^{(0)} = \frac{1+\varepsilon \cos(\varphi)}{p}$. Substituindo essa premissa em (4.17), temos

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} (u^{(0)} + u^{(1)}) + u^{(0)} + u^{(1)} = \frac{1}{p} - \frac{3}{c_0 p} (u^{(0)} + u^{(1)})^2, \quad (4.19)$$

e para $u^{(1)} \ll u^{(0)}$, obtém-se

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} + \underbrace{\frac{d^2 u^{(0)}}{d\varphi^2} + u^{(0)}}_{\frac{1}{p}} + u^{(1)} = \frac{1}{p} - \frac{3}{c_0 p} (u^{(0)})^2. \quad (4.20)$$

Assim

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} + u^{(1)} = -\frac{3}{c_0 p} \left(\frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}{p} \right)^2, \quad (4.21)$$

ou

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} + u^{(1)} = -\frac{3}{c_0 p} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{2\varepsilon \cos(\varphi)}{p^2} + \frac{\varepsilon^2 \cos^2(\varphi)}{p^2} \right). \quad (4.22)$$

De maneira geral, temos a condição $\varepsilon \ll 1$ e para os planetas solares, o parâmetro p^2 está compreendido na faixa $3.07 \times 10^{21} < p^2 < 2.02 \times 10^{25}$. Considerando apenas a contribuição do termo, $\frac{2\varepsilon \cos(\varphi)}{p^2}$, a equação (4.22) admite a forma

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} + u^{(1)} = -\frac{6\varepsilon \cos(\varphi)}{c_0 p^3}. \quad (4.23)$$

Para resolver a equação (4.23), vamos assumir que a solução tem a forma

$$u^{(1)} = u_H^{(1)} + u_P^{(1)},$$

onde $u_H^{(1)}$ é solução da homogênea associada e $u_P^{(1)}$ é uma solução particular da equação diferencial.

4.2.2.1 Resolução da homogênea associada

Montando a equação característica, chegamos a

$$u_H^{(1)} = C_1 \sin(\varphi) + C_2 \cos(\varphi). \quad (4.24)$$

4.2.2.2 Obtenção da solução particular

Admitindo $u_P^{(1)} = \varphi (B \sin(\varphi) + C \cos(\varphi))$, temos

$$(u_P^{(1)})' = (B \sin(\varphi) + C \cos(\varphi)) + \varphi (B \cos(\varphi) - C \sin(\varphi)), \quad (4.25)$$

$$(u_P^{(1)})'' = B \cos(\varphi) - C \sin(\varphi) + (B \cos(\varphi) - C \sin(\varphi)) + \varphi (-B \sin(\varphi) - C \cos(\varphi)). \quad (4.26)$$

Substituindo o resultado na equação inicial

$$\frac{d^2 u_P^{(1)}}{d\varphi^2} + u_P^{(1)} = -\frac{6\varepsilon \cos(\varphi)}{c_0 p^3},$$

temos

$$\begin{aligned} 2B \cos(\varphi) - 2C \sin(\varphi) - \varphi (B \sin(\varphi) + C \cos(\varphi)) + \\ \varphi (B \sin(\varphi) + C \cos(\varphi)) = -\frac{6\varepsilon \cos(\varphi)}{c_0 p^3} \end{aligned} \quad (4.27)$$

e as implicações

$$\begin{aligned} 2B \cos(\varphi) - 2C \sin(\varphi) = -\frac{6\varepsilon \cos(\varphi)}{c_0 p^3} \\ \Rightarrow B = -\frac{3\varepsilon}{c_0 p^3}, \quad C = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Desta maneira, chegamos à solução particular

$$u_P^{(1)} = -\frac{3\varepsilon}{c_0 p^3} \varphi \sin(\varphi). \quad (4.29)$$

Portanto, a solução $u = u^{(0)} + u^{(1)}$, é expressa por

$$u = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}{p} - \frac{3\varepsilon}{c_0 p^3} \varphi \sin(\varphi), \quad (4.30)$$

onde admitimos $u^{(1)} = u_P^{(1)}$.

Observe que a solução encontrada, (4.30), mostra que a dimensão da constante c_0 deve ser $[L]^{-2}$, onde $[L]$ representa a dimensão de comprimento.

4.3 Precessão do periélio via limite quase-Newtoniano

Admitindo que a equação da órbita tenha uma forma análoga ao resultado Newtoniano, tendo em vista que a solução obtida, dada por (4.30) é uma solução que figura entre a teoria Newtoniana e a teoria da relatividade, fazemos

$$u = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \Delta\varphi)}{p}. \quad (4.31)$$

Expandindo $\cos(\varphi + \Delta\varphi)$, obtém-se

$$\cos(\varphi + \Delta\varphi) = \cos(\varphi) \cos(\Delta\varphi) - \sin(\varphi) \sin(\Delta\varphi). \quad (4.32)$$

Admitindo que $\Delta\varphi \ll 1 \Rightarrow \cos(\Delta\varphi) \approx 1$, $\sin(\Delta\varphi) = \Delta\varphi$, logo

$$\cos(\varphi + \Delta\varphi) = \cos(\varphi) - \sin(\varphi)\Delta\varphi. \quad (4.33)$$

Desta maneira, comparando os resultados para u , temos

$$u = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \Delta\varphi)}{p} = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}{p} - \frac{3\varepsilon}{c_0 p^3} \varphi \sin(\varphi), \quad (4.34)$$

ou

$$\frac{1 + \varepsilon (\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\Delta\varphi)}{p} = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}{p} - \frac{3\varepsilon}{c_0 p^3} \varphi \sin(\varphi). \quad (4.35)$$

Logo, chegamos a igualdade

$$-\frac{\varepsilon \sin(\varphi)\Delta\varphi}{p} = -\frac{3\varepsilon}{c_0 p^3} \varphi \sin(\varphi), \quad (4.36)$$

e temos para $\Delta\varphi$ a expressão

$$\Delta\varphi = \frac{3\varphi}{c_0 p^2}. \quad (4.37)$$

Para uma volta completa $\varphi = 2\pi$

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi}{c_0 p^2}. \quad (4.38)$$

4.3.1 Determinação observacional de c_0

Para determinar c_0 utilizaremos valores observados para a correção relativística da precessão do periélio de planetas solares [23], bem como, dados dos respectivos planetas [12]. Para o cálculo efetivo de c_0 é necessário uma correção para utilizarmos $\Delta\varphi$ em segundos de arco por século, logo, (4.38) deve ser multiplicado por s/w , onde s é uma constante de correção, que admite o valor de $2.062648062 \times 10^7 \left[\frac{'' \text{ arco anos}}{\text{seculo}} \right]$ e w é o período do planeta em anos terrestres.

Quando calculamos c_0 , para cada planeta solar, percebemos que seus valores estão na faixa $0.0466 \times 10^{-14} m^{-2} < c_0 < 1.2177 \times 10^{-14} m^{-2}$, o que confirma

nossa premissa inicial de que $c_0 \ll 1$; no entanto, mostra que c_0 admite um valor diferente para cada planeta.

A Tabela 4.2, mostra os dados para os planetas solares para os quais temos valores observados de $\Delta\varphi$ e o valor de c_0 , calculado por (4.38). Observe que os índices, a , b , c , d representam, anos, (” de arco/século), ($10^{10}m$) e ($10^{-14}m^{-2}$), respectivamente.

Planeta	Dados de planetas solares e valores obtidos para c_0			
	Período a	$\Delta\varphi$ b observado	p c	c_0 d
Mercúrio	0.2408467	43.1000 ± 0.5000	5.5460	1.2177
Vênus	0.6151972	8.0000 ± 5.0000	10.8205	0.6747
Terra	1.0000174	5.0000 ± 1.0000	14.9556	0.3476
Marte	1.8808476	1.3624 ± 0.0005	22.5956	0.2972
Júpiter	11.862615	0.0700 ± 0.0040	77.6519	0.0777
Saturno	29.447498	0.0140 ± 0.0020	142.25282	0.0466

Tabela 4.2: Valores de c_0 para os planetas solares

Observando as duas últimas colunas da Tabela 4.2, propomos a hipótese de que c_0 tenha uma relação com o parâmetro p . Desta maneira admitimos

$$c_0 \propto \frac{1}{p} \Rightarrow c_0 = \frac{c_0^*}{p}, \quad (4.39)$$

onde c_0^* é uma constante de proporcionalidade e sua dimensão é $[L]^{-1}$.

Afim de determinarmos c_0^* , fazemos o produto $c_0 p$ e calculamos c_0^* , obtendo os seguintes dados

Calculando a média dos valores de c_0^* , obtidos na Tabela 4.3, temos $c_0^* \approx 6.45 \times 10^{-4}m^{-1}$. Neste contexto a equação (4.38) pode ser reescrita da seguinte

Planeta	$c_0^* \times 10^{-4} m^{-1}$
Mercúrio	6.7534
Vênus	7.3006
Terra	5.1986
Marte	6.7154
Júpiter	6.0335
Saturno	6.6290

Tabela 4.3: Valores de c_0^*

maneira

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi}{c_0^* p}. \quad (4.40)$$

Desta maneira, percebe-se que existe uma dependência do termo de segunda ordem, representado por c_0 e a excentricidade da órbita do planeta. Observamos ainda, que seriam necessários dados de outros sistemas planetários para determinar a dependência de c_0^* com a massa da estrela. No entanto, ao admitirmos a métrica de Schwarzschild, chegamos a $\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 p}$ [8] para a precessão do periélio. Comparando com nosso resultado dado por (4.40), temos para c_0^*

$$c_0^* = \frac{c^2}{GM}, \quad (4.41)$$

e utilizando os dados do Sol [12], bem como, das constantes físicas obtém-se $c_0^* = 6.78 \times 10^{-4} m^{-1}$, assemelhando-se ao nosso resultado. Note que a dimensão de c_0^* a partir da igualdade (4.41) é $[m^{-1}]$, mostrando consistência com a equação (4.39).

5 DEFLEXÃO DA LUZ

Newton foi o primeiro a supor que um raio luminoso poderia sofrer um desvio de sua trajetória retilínea, ao passar próximo ao campo gravitacional do Sol. Em 1801, o astrônomo alemão Johann Georg von Soldner, utilizando a mecânica Newtoniana, calculou o desvio de um raio luminoso, proveniente de uma estrela distante, ao passar próximo ao campo gravitacional do Sol [22]. Johann obteve a seguinte expressão

$$\Delta\varphi = \frac{2GM}{c^2 R_\odot}, \quad (5.1)$$

apresentamos no Apêndice C, a dedução deste resultado [22].

Aplicando os dados do Sol, bem como os valores das constantes físicas na equação (5.1), obtém-se para $\Delta\varphi$ um valor de 0.875 segundos de arco.

Einstein, levando em conta apenas o princípio da equivalência, obteve um resultado idêntico, no entanto, ao considerar a curvatura do espaço-tempo, obteve o dobro desse resultado, ou seja, 1.75 segundos de arco [14].

O próprio Einstein ressaltou que uma verificação observacional poderia ser obtida comparando duas chapas fotográficas feitas de um determinado grupo de estrelas, durante um eclipse total do Sol e do mesmo grupo na ausência do Sol. As afirmações de Einstein foram feitas em 1916 e o próximo eclipse total do Sol apenas aconteceria em 1919. Logo, o mundo esperou por três anos para saber se o sistema solar era plano ou curvo. Uma representação do desvio da luz devido à curvatura do espaço-tempo é dada pela Figura 5.1.

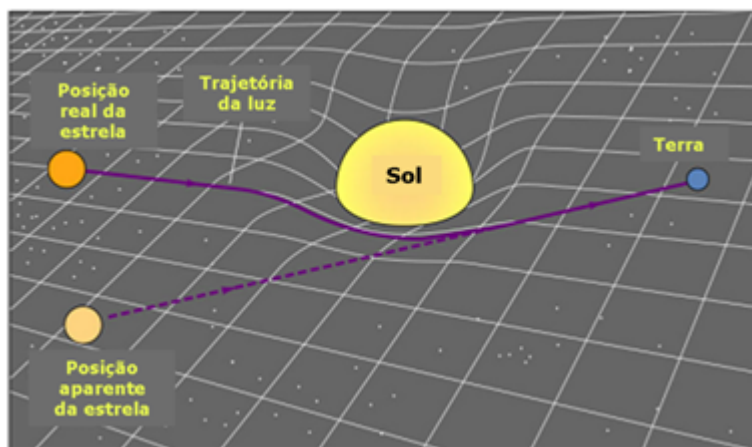


Figura 5.1: Representação do desvio da luz de estrelas distantes sofridas ao passar próximas ao Sol.

5.1 Observações do eclipse de 1919

Duas expedições foram organizadas para verificar as previsões de Einstein, quando astrônomos ingleses viajaram a Sobral, no Ceará, e à Ilha do Príncipe, na África Ocidental.

Apresentamos, na Figura 5.2 [28], uma foto do eclipse total do Sol, obtida em Sobral em 1919, e na Tabela 5.1, os valores observados para o desvio da luz nas duas expedições.

Local	$\Delta\varphi$ (")	Erro (")
Sobral	1.98	± 0.12
Ilha do Príncipe	1.61	± 0.31

Tabela 5.1: Resultados observacionais do desvio da luz do eclipse de 1919

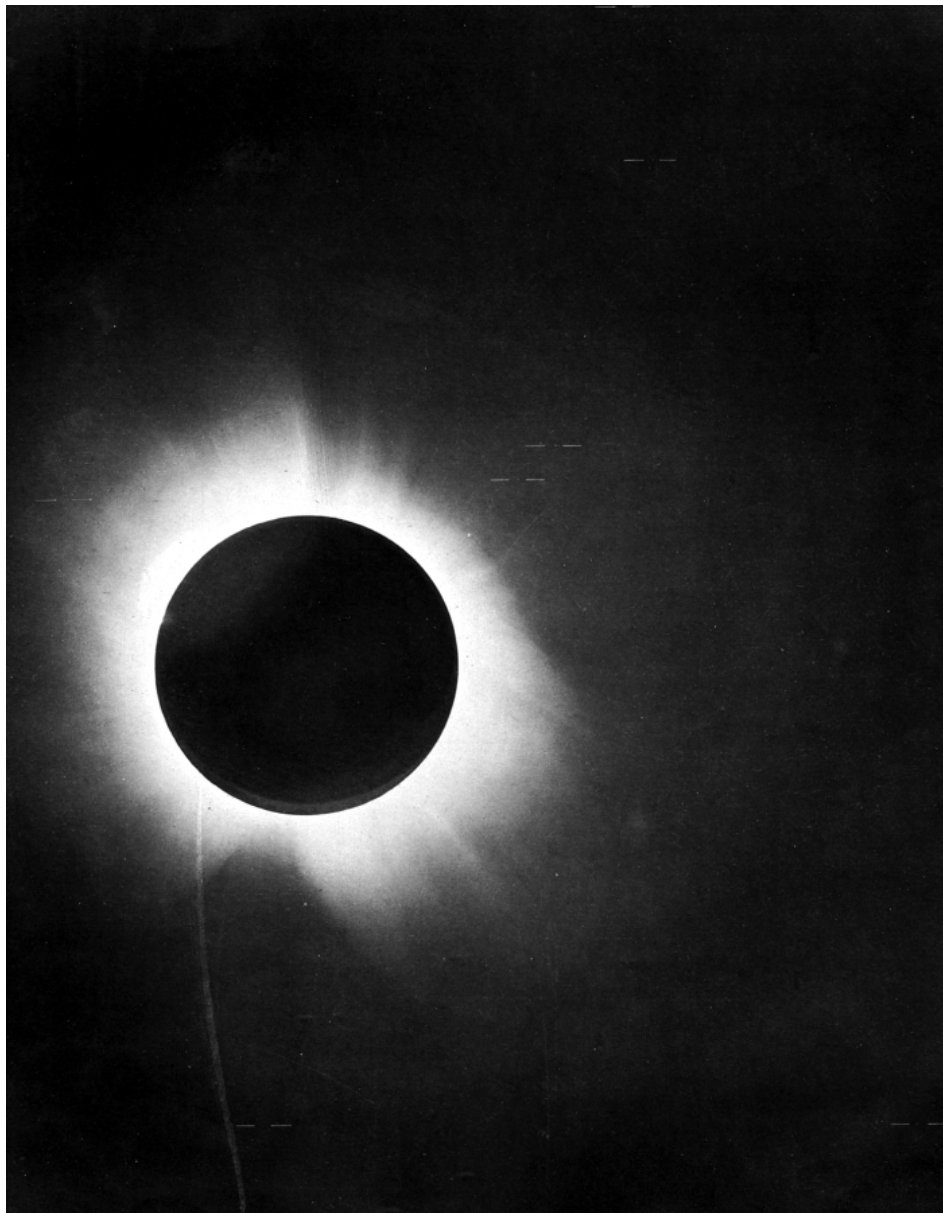


Figura 5.2: Foto do eclipse total do Sol de 1919 em Sobral, Ceará.

5.2 Equações gerais da geodésica

A partir da definição de equação da geodésica (2.17)

$$\frac{d^2 u^m}{ds^2} + \Gamma_{np}^m \frac{du^n}{ds} \frac{du^p}{ds} = 0,$$

e dos resultados de (3.9) a (3.12), construímos as seguintes equações

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + (\sigma_r - \lambda_r) \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + (2\lambda_z - 2\sigma_z) \frac{dr}{ds} \frac{dz}{ds} + e^{-2\lambda} (r^2 \sigma_r - r) \quad (5.2)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + e^{4\sigma - 2\lambda} \sigma_r \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - (\sigma_r - \lambda_r) \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$2r\sigma_z \frac{d\varphi}{ds} \frac{dz}{ds} - r \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + 2r\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - 2 \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + (\lambda_z - \sigma_z) \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 - (2\sigma_r - 2\lambda_r) \frac{dr}{ds} \frac{dz}{ds} + e^{-2\lambda} r^2 \sigma_z \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \quad (5.4)$$

$$+ e^{4\sigma - 2\lambda} \sigma_z \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + (\sigma_z - \lambda_z) \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$2\sigma_z \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} + \frac{d^2 t}{ds^2} + 2\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (5.5)$$

5.3 Redução das equações da geodésica para um disco fino

Admitindo a equação (5.3), a equação (5.5), bem como a expressão da métrica de Weyl, temos

$$2r\sigma_z \frac{d\varphi}{ds} \frac{dz}{ds} - r \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + 2r\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - 2 \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (5.6)$$

$$2\sigma_z \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} + \frac{d^2 t}{ds^2} + 2\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0, \quad (5.7)$$

$$ds^2 = e^{2(\lambda - \sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 + e^{2(\lambda - \sigma)} dz^2 - e^{2\sigma} dt^2. \quad (5.8)$$

Fazendo $z = 0$, nas últimas equações, temos

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + 2\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \left(\frac{2}{r} - 2\sigma_r\right) \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (5.10)$$

$$ds^2 = e^{2(\lambda-\sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 - e^{2\sigma} dt^2. \quad (5.11)$$

Observe que

$$\frac{d}{ds} \left(e^{2\sigma} \frac{dt}{ds} \right) = e^{2\sigma} \left(\frac{d^2t}{ds^2} + 2\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} \right) \Rightarrow e^{-2\sigma} \frac{d}{ds} \left(e^{2\sigma} \frac{dt}{ds} \right) = \left(\frac{d^2t}{ds^2} + 2\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} \right).$$

Desta forma, a equação (5.9) pode ser reescrita como:

$$e^{-2\sigma} \frac{d}{ds} \left(e^{2\sigma} \frac{dt}{ds} \right) = 0 \Rightarrow e^{2\sigma} \frac{dt}{ds} = k_1 \Rightarrow dt = k_1 e^{-2\sigma} ds, \quad (5.12)$$

com k_1 constante.

Também observe que

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{ds} \right) = r^2 e^{-2\sigma} \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \left(\frac{2}{r} - 2\sigma_r \right) \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} \right),$$

logo a equação (5.10) pode ser reescrita como

$$\frac{e^{2\sigma}}{r^2} \frac{d}{ds} \left(r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \Rightarrow r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{ds} = k_2 \Rightarrow ds = r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{k_2}, \quad (5.13)$$

com k_2 constante.

Substituindo os resultados (5.12) e (5.13) na equação (5.11), temos

$$\left(r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{k_2} \right)^2 = e^{2(\lambda-\sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 - e^{2\sigma} \left(\frac{k_1}{k_2} r^2 e^{-4\sigma} d\varphi \right)^2. \quad (5.14)$$

Após algumas manipulações,

$$\left(\frac{r^4 e^{-2\sigma}}{k_2^2} + \frac{r^4 k_1^2}{k_2^2} e^{-4\sigma} - r^2 \right) d\varphi^2 = e^{2\lambda} dr^2$$

ou

$$\frac{dr^2}{d\varphi^2} = e^{-2\lambda} \left(\frac{r^4 e^{-2\sigma}}{k_2^2} + \frac{r^4 k_1^2}{k_2^2} e^{-4\sigma} - r^2 \right),$$

obtendo, assim, a equação

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = e^{-2\lambda} \left[r^4 e^{-2\sigma} (\alpha^2 + \beta^2 e^{-2\sigma}) - r^2 \right], \quad (5.15)$$

onde $\alpha = \frac{1}{k_2}$ e $\beta = \frac{k_1}{k_2}$ são constantes.

5.4 Geodésica nula e desvio da luz

Como a luz descreve uma geodésica de comprimento nulo, vamos assumir $ds = 0$. Esta condição equivale a admitir nas equações (5.12) e (5.13) que $k_1 \rightarrow \infty$ e, igualmente, $k_2 \rightarrow \infty$. Logo na expressão (5.15) temos que $\alpha \rightarrow 0$ e β indeterminado, admitindo a forma

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = e^{-2\lambda} [\beta^2 r^4 e^{-4\sigma} - r^2]. \quad (5.16)$$

Com intenção de avaliar a indeterminação de β , vamos construir uma equação independente de ds . Para tal, faremos a razão entre as equações (5.13) e (5.12), obtendo

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e^{4\sigma}}{\beta}, \quad (5.17)$$

ou

$$\beta = \frac{e^{4\sigma}}{\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)}.$$

Desta forma, temos que β é uma constante finita, pois $\frac{1}{2}r^2 \frac{d\varphi}{dt}$ é a velocidade areolar no limite Newtoniano e $\sigma = 0$, no mesmo limite. Logo, a equação (5.16) é consistente, podendo ser aplicada ao problema do desvio da luz.

Dos casos explorados na Seção 3.4, admitimos que $c_0 \ll 0$ e $a_0 = c_0 = 0$, ou seja, o Caso 1.1, logo as funções σ e λ possuem a forma

$$\begin{aligned} \sigma(r, z) &= \frac{k_0}{2} \ln(r) + \psi, \\ \lambda(r, z) &= \frac{k_0^2}{4} \ln(r), \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde ψ se refere a constante c_1 , que na equação (3.70) havia sido ignorada.

Assim, substituindo as funções acima, (5.18) em (5.16), obtemos

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^{2-\frac{1}{2}k_0^2} (\beta^2 e^{-4\psi} r^{2-2k_0} - 1). \quad (5.19)$$

Por outro lado, admitindo a equação (5.11) com $ds = 0$, temos

$$e^{2\lambda-4\sigma} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 e^{-4\sigma} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - 1 = 0, \quad (5.20)$$

ou

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = e^{4\sigma-2\lambda} - \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (5.21)$$

Usando o resultado da equação (5.17), podemos reescrever (5.21) como

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = e^{4\sigma-2\lambda} - \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} \frac{e^{8\sigma}}{\beta^2}, \quad (5.22)$$

ou

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = e^{4\sigma-2\lambda} \left[1 - \frac{e^{4\sigma}}{\beta^2 r^2} \right]. \quad (5.23)$$

Dividindo ambos os lados da igualdade de (5.23) por $e^{8\sigma}$ temos

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{e^{4\sigma-2\lambda} \left[1 - \frac{e^{4\sigma}}{\beta^2 r^2} \right]}{e^{8\sigma}}. \quad (5.24)$$

Assim, substituindo as funções σ e λ dadas por (5.18) em (5.24), obtemos

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} \right)^2 = r^{-\frac{1}{2}k_0^2} e^{-4\psi} \left(r^{-2k_0} - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2} r^{-2} \right). \quad (5.25)$$

5.4.1 Desvio da luz devido ao princípio da equivalência

Admitindo que $k_0 = 0$ nas equações (5.19) e (5.25), desenvolvidas na Seção 5.4, temos, respectivamente,

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \beta^2 e^{-4\psi} r^4 - r^2, \quad (5.26)$$

e

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} \right)^2 = e^{-4\psi} \left(1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^2} \right). \quad (5.27)$$

Esta escolha de k_0 , será devidamente justificada na Seção (5.4.1.1).

Observe que neste caso a equação (5.27) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} = e^{-2\psi} \sqrt{1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^2}}. \quad (5.28)$$

Para resolver a equação diferencial (5.26), fazemos a troca de variáveis

$r = \frac{1}{u}$, logo

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2} \Rightarrow \left(\frac{dr}{du}\right)^2 = \frac{1}{u^4}$$

e

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2.$$

Dessa maneira, a equação (5.26) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \beta^2 e^{-4\psi} \left(\frac{1}{u}\right)^4 - \left(\frac{1}{u}\right)^2, \quad (5.29)$$

ou

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \beta^2 e^{-4\psi} - u^2. \quad (5.30)$$

Calculando a derivada com respeito a variável φ , obtemos

$$2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \frac{du}{d\varphi} = -2u \frac{du}{d\varphi},$$

e assumindo $\frac{du}{d\varphi} \neq 0$, temos

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - u = 0,$$

cuja solução é

$$u = C_1 \cos(\varphi) + C_2 \sin(\varphi), \quad (5.31)$$

ou

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos(\varphi) + C_2 \sin(\varphi). \quad (5.32)$$

Neste ponto, fazemos $r \rightarrow \infty$ e definimos que φ admite o valor φ_∞ , onde $\varphi_\infty \ll 1$.

Desta maneira de (5.32), temos

$$\tan(\varphi_\infty) = -\frac{C_1}{C_2},$$

e utilizando a premissa $\varphi_\infty \ll 1$, podemos admitir $\tan(\varphi_\infty) \approx \varphi_\infty$, assim

$$\varphi_\infty = -\frac{C_1}{C_2}. \quad (5.33)$$

Conforme Cattani [21], $\Delta\varphi = 2\varphi_\infty$, assim, de (5.33) obtemos

$$\Delta\varphi = -\frac{2C_1}{C_2}, \quad (5.34)$$

onde, ainda arbitramos $C_1 = 1$, obtendo finalmente

$$\Delta\varphi = -\frac{2}{C_2}. \quad (5.35)$$

Por outro lado, calculando a derivada de (5.32) com respeito a t , temos

$$-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = [-C_1 \sin(\varphi) + C_2 \cos(\varphi)] \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5.36)$$

ou

$$\frac{dr}{dt} = [C_1 \sin(\varphi) - C_2 \cos(\varphi)] \left(\frac{e^{4\sigma}}{\beta} \right), \quad (5.37)$$

onde utilizamos o resultado da equação (5.17).

Desta maneira, (5.37) pode reescrita como

$$\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\beta} [C_1 \sin(\varphi) - C_2 \cos(\varphi)], \quad (5.38)$$

ou

$$e^{-2\psi} \sqrt{1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^2}} = \frac{1}{\beta} [C_1 \sin(\varphi) - C_2 \cos(\varphi)], \quad (5.39)$$

onde substituímos o resultado de (5.28), na equação (5.38).

Considerando $C_1 = 1$, como anteriormente e fazendo $r \rightarrow \infty$, temos

$$\beta e^{-2\psi} = \sin(\varphi_\infty) - C_2 \cos(\varphi_\infty), \quad (5.40)$$

e como $\varphi_\infty \ll 1$, podemos fazer $\sin(\varphi_\infty) \approx 0$, $\cos(\varphi_\infty) \approx 1$, que implica

$$C_2 = -\beta e^{-2\psi}. \quad (5.41)$$

Substituindo o resultado de (5.41) na equação (5.35), obtemos para o desvio da luz

$$\Delta\varphi = \frac{2e^{2\psi}}{\beta}. \quad (5.42)$$

5.4.1.1 Interpretação da solução obtida

Quando analisamos as soluções na Seção 3.3, obtemos que se $k_0 = a_0 = c_0 = 0$, temos o caso do espaço-tempo Riemann-flat, ou seja, um espaço-tempo plano. Assim, interpretamos o resultado obtido para o desvio da luz expresso pela equação (5.42), como a contribuição para esse fenômeno apenas devido ao princípio da equivalência entre massa inercial e massa gravitacional, ou seja, o resultado não considera a curvatura do espaço-tempo.

Ora, este resultado é equivalente ao resultado Newtoniano para o desvio da luz, anteriormente discutido. Logo, ao compararmos as equações, (5.42) e (5.1) obtemos que

$$\frac{e^{2\psi}}{\beta} = \frac{GM}{c^2 R_\odot}, \quad (5.43)$$

onde R_\odot , representa o raio do Sol.

5.4.2 Contribuição devido à curvatura do espaço-tempo

Nesta seção, buscaremos o desvio da luz considerando a curvatura do espaço-tempo. Para tanto, voltamos nas equações (5.19) e (5.25), desenvolvidas na Seção 5.4, admitindo $k_0 = -4$. Observe que esta escolha, segundo a análise das soluções Riemann-flat feitas na Seção 3.3, representa um espaço-tempo curvo.

Dessa maneira, obtemos

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \beta^2 e^{-4\psi} r^4 - \frac{1}{r^6}, \quad (5.44)$$

e

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt}\right)^2 = e^{-4\psi} \left(1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^{10}}\right). \quad (5.45)$$

Observe que nesse caso a equação (5.45) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} = e^{-2\psi} \sqrt{1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^{10}}}. \quad (5.46)$$

Para resolver a equação diferencial (5.44), repetimos os passos utilizados para resolver a equação (5.26), começando por fazer a troca de variáveis $r = \frac{1}{u}$, obtendo após algumas manipulações

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -5u^9. \quad (5.47)$$

Resolveremos a equação (5.47) em duas etapas. Primeiramente, omitiremos o termo $-5u^9$ e obteremos uma solução que definiremos por $u^{(0)}$. Logo após, buscaremos uma solução por meio da técnica de perturbação, analogamente ao que foi feito na Seção 4.2.2, obtendo uma solução $u^{(1)}$, onde vamos considerar $u^{(1)} \ll u^{(0)}$. A solução será a soma das duas contribuições, ou seja, $u^{(0)} + u^{(1)}$.

Assim, encontramos facilmente que

$$u^{(0)} = C_4 + C_3\varphi.$$

Logo $u^{(1)}$, será a solução de

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} = -5(u^{(0)} + u^{(1)})^9,$$

onde admitindo que $u^{(1)} \ll u^{(0)}$, leva a

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} = -5(u^{(0)})^9, \quad (5.48)$$

ou

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} = -5(C_4 + C_3\varphi)^9. \quad (5.49)$$

Integrando a equação (5.49) duas vezes e admitindo as constantes de integração nulas, temos que

$$u^{(1)} = -\frac{1}{22C_3^2}(C_4 + C_3\varphi)^{11}, \quad (5.50)$$

logo $u^{(0)} + u^{(1)}$, é dado por

$$u = C_4 + C_3\varphi - \frac{1}{22C_3^2}(C_4 + C_3\varphi)^{11}, \quad (5.51)$$

ou

$$\frac{1}{r} = C_4 + C_3\varphi - \frac{1}{22C_3^2}(C_4 + C_3\varphi)^{11}. \quad (5.52)$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$ temos $\varphi \rightarrow \varphi_\infty$ e subsequentemente obtém-se

$$22C_3^2 = (C_4 + C_3\varphi_\infty)^{10}. \quad (5.53)$$

Por outro lado, calculando a derivada da equação (5.52) com respeito a t , temos

$$-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \left[C_3 - \frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi)^{10} \right] \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5.54)$$

ou

$$\frac{dr}{dt} = \left[\frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi)^{10} - C_3 \right] \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (5.55)$$

Finalmente, substituindo o resultado da equação (5.17) em (5.55), temos

$$\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi)^{10} - C_3 \right], \quad (5.56)$$

e usando a equação (5.46), obtém-se

$$e^{-2\psi} \sqrt{1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^{10}}} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi)^{10} - C_3 \right]. \quad (5.57)$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$ temos $\varphi \rightarrow \varphi_\infty$ e subsequentemente obtém-se

$$e^{-2\psi}\beta = \frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi_\infty)^{10} - C_3. \quad (5.58)$$

Das equações (5.58) e (5.53), obtemos

$$C_3 = \frac{e^{-2\psi}\beta}{10}, \quad (5.59)$$

logo

$$\varphi_\infty = \frac{1}{C_3} \left[[2C_3 (e^{-2\psi}\beta + C_3)]^{\frac{1}{10}} - C_4 \right], \quad (5.60)$$

ou

$$\Delta\varphi = \frac{e^{2\psi}}{\beta} \left[20 \left(\frac{11}{50} \frac{1}{\left(\frac{e^{2\psi}}{\beta}\right)^2} \right)^{\frac{1}{10}} - 20C_4 \right], \quad (5.61)$$

onde assumimos que $\Delta\varphi = 2\varphi_\infty$ e expandimos o resultado de C_3 .

Neste ponto, voltando ao resultado obtido na Seção 5.4.1.1, onde identificamos

$$\frac{e^{2\psi}}{\beta} = \frac{GM}{c^2 R_\odot},$$

e obtemos para o desvio da luz a expressão

$$\Delta\varphi = \omega_0 \frac{GM}{c^2 R_\odot}, \quad (5.62)$$

onde ω_0 é expresso por

$$\omega_0 = 20 \left[\left(\frac{11}{50} \right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{GM}{c^2 R_\odot} \right)^{-\frac{1}{5}} - C_4 \right].$$

Observe que utilizando os dados observacionais do desvio da luz do eclipse de 1919 expressos na Tabela 5.1 e considerando para $\Delta\varphi$ o valor médio, pode-se verificar que $\omega_0 \approx 4$, que implica em $C_4 \approx \frac{23}{2}$, ou seja, a equação (5.62) admite a forma

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 R_\odot}, \quad (5.63)$$

reproduzindo resultados conhecidos para o desvio da luz [21].

No entanto, a equação (5.62) sugere uma correção ao desvio estabelecido na literatura. Ressaltamos que a constante C_4 é arbitrária e conseqüentemente a constante ω_0 é livre, portanto, apenas através de novas estimativas observacionais para a deflexão da luz é que poderemos determinar ω_0 . Outra possibilidade seria de se fazer um estudo relativo ao espalhamento dos fótons constituintes do feixe de luz e então determinar o valor de C_4 e conseqüentemente, estimar o valor de ω_0 .

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, utilizando a métrica estática de Weyl para representar a região exterior de um corpo maciço de simetria cilíndrica-discooidal e expansões até segunda ordem em série de Taylor centradas em $z = 0$, para aproximar as funções incógnitas, σ e λ , que definem tal métrica, obtivemos uma família de soluções das equações de Einstein para o vácuo. Tais soluções quando, devidamente reduzidas aos casos de primeira ordem e zero ordem, reproduzem soluções encontradas na literatura [3, 4, 9].

A partir das soluções, um estudo sobre o periélio dos planetas solares e da deflexão da luz foi realizado. Considerando os dados observacionais mais recentes, apresentados na Tabela 4.2, obtemos uma solução para a contribuição relativística a precessão do periélio dos planetas com base na correção de segunda ordem, (4.40), mostrando consistência com os dados observacionais. No caso da deflexão da luz, a solução apresentada introduz um termo corretivo dado pela equação (5.62), o qual pode ser estimado a partir de dados observacionais.

Extensões deste trabalho podem ser implementadas buscando soluções de ordem três, quatro ou buscando uma equação de recorrência em função da ordem da solução desejada, ou seja, uma solução de ordem n . Vimos que a contribuição de segunda ordem é pequena, logo, a busca por soluções de ordens superiores podem justificar apenas a utilização de soluções de segunda ordem. As soluções obtidas dadas na Tabela 3.1, sugerem esta busca por uma expressão recursiva para obtenção das soluções. Outra possibilidade seria usar outra métrica para aproximar o espaço-tempo de simetria cilíndrica, por exemplo a métrica modificada de Weyl denominada métrica de Zipoy [20].

Quanto às aplicações feitas da solução geral encontrada neste trabalho, poderíamos abordar a questão de precessão do periélio de planetas solares direta-

mente das equações da geodésica e comparar os resultados com o caso já explorado, ao utilizar o limite quase-Newtoniano, bem como a aplicação do resultado relativo ao desvio da luz à objetos em maior escala, como por exemplo, as lentes gravitacionais.

Apêndice A EQUAÇÃO NEWTONIANA DA ÓRBITA

Neste Apêndice, deduziremos a equação Newtoniana da órbita, tendo em vista que a mesma foi utilizada no Capítulo 4, sem maiores discussões. Para isso, admitimos um planeta em órbita em torno do Sol. A Lagrangiana do planeta é expressa por

$$L = E - m\phi(r) = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow L = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \right) m. \quad (\text{A.1})$$

A conservação de energia do planeta adquire a forma

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \text{const}, \quad (\text{A.2})$$

que ao substituir na equação (A.1), fornece

$$L = m \left[\frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi} \right) + \frac{GM}{r} \right], \quad (\text{A.3})$$

onde escrevemos L , com coordenadas esféricas usuais.

Admitindo que o planeta esteja ao plano equatorial, assumimos $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$, logo a equação (A.3) se reduz a

$$L = m \left[\frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi} \right) + \frac{GM}{r} \right]. \quad (\text{A.4})$$

A equação Lagrangiana com respeito ao ângulo φ é dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a equação (A.4) em (A.5), obtém-se

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (\text{A.6})$$

ou

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = h = \text{const}, \quad (\text{A.7})$$

onde h representa a conservação do momento angular do planeta.

Substituindo o resultado obtido em (A.7) em (A.2), obtemos

$$E = \frac{m}{2} \left[(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{2GM}{r} \right], \quad (\text{A.8})$$

ou

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{h^2}{m^2r^2} + \frac{2GM}{r}. \quad (\text{A.9})$$

Multiplicando a equação (A.9) por $\frac{m^2}{h^2}$, obtemos

$$\frac{m^2}{h^2} \left(\frac{2E}{m} - \frac{h^2}{m^2r^2} + \frac{2GM}{r} \right) = \dot{r}^2 \frac{m^2}{h^2} = \frac{\dot{r}^2}{r^4 \dot{\varphi}^2}, \quad (\text{A.10})$$

onde utilizamos o resultado da equação (A.7).

Desta forma, podemos reescrever a equação (A.9) da seguinte forma

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2Em}{h^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GMm^2}{rh^2}, \quad (\text{A.11})$$

ou

$$\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 = \frac{2Em}{h^2} - \left(\frac{1}{r} \right)^2 + \frac{2GMm^2}{h^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (\text{A.12})$$

Fazendo a troca de variáveis

$$u = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.13})$$

temos

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2Em}{h^2} - u^2 + \frac{2GMm^2}{h^2} u, \quad (\text{A.14})$$

ou

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2Em}{h^2} - \left(\frac{GMm^2}{h^2} - u \right)^2 + \frac{G^2M^2m^4}{h^4}. \quad (\text{A.15})$$

Neste ponto, introduzimos a seguinte notação

$$\frac{\varepsilon^2}{p^2} = \frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2M^2m^4}{h^4}, \quad \frac{1}{p} = \frac{GMm^2}{h^2}. \quad (\text{A.16})$$

Assim, temos que

$$\varepsilon = 1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}, \quad p = \frac{h^2}{GMm^2},$$

logo podemos escrever (A.15) de forma reduzida

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{p} - u\right)^2, \quad (\text{A.17})$$

e após uma derivada com respeito a φ , obtém-se

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}. \quad (\text{A.18})$$

A equação (A.18) é conhecida como equação diferencial da órbita Newtoniana [8] e sua solução obtida pelo método de perturbação para equações diferenciais ordinárias é

$$u = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}{p}, \quad p = a(1 - \varepsilon^2), \quad (\text{A.19})$$

onde ε representa a excentricidade da órbita e a o semi-eixo maior da elipse.

Apêndice B LIMITE QUASE-NEWTONIANO

Para reproduzirmos o limite-quase Newtoniano da relatividade geral, partimos das hipóteses de campo fraco, estático e baixas velocidades.

Admitindo a equação geral da geodésica (2.17) e supondo uma geodésica tipo tempo, de modo que $x^\mu = x^\mu(\tau)$, temos

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\gamma}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0, \quad (\text{B.1})$$

que parametrizada em termos da coordenada $x^4 = -ct$, pode ser expressa por

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} + \Gamma_{4k}^i \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} + \Gamma_{j\gamma}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\gamma}^4 \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0, \quad (\text{B.2})$$

onde $i = 1, 2, 3$.

Fazendo a atribuição

$$\tau = -ct,$$

temos

$$\frac{dx^i}{dt} = -c \frac{dx^i}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2 x^i}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2}, \quad (\text{B.3})$$

e assumindo a hipótese de baixas velocidades, implica que

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} + \Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{cdt} \frac{dx^4}{cdt} + \underbrace{\Gamma_{4k}^i \frac{dx^4}{cdt} \frac{dx^k}{cdt} + \Gamma_{j\gamma}^i \frac{dx^j}{cdt} \frac{dx^\gamma}{cdt} + \Gamma_{\lambda\gamma}^4 \frac{dx^\lambda}{cdt} \frac{dx^\gamma}{cdt}}_0 = 0, \quad (\text{B.4})$$

ou

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} = -\Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{cdt} \frac{dx^4}{cdt}. \quad (\text{B.5})$$

Note que, como

$$x^4 = -ct \Rightarrow \frac{dx^4}{dt} = -c,$$

podemos escrever,

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} = -\Gamma_{44}^i. \quad (\text{B.6})$$

Por outro lado, assumindo a métrica de Minkowski como primeira aproximação da métrica do espaço-tempo, e adicionando incrementos de modo a recuperar a força de campo, tal que

$$g_{\mu\gamma} \simeq \eta_{\mu\gamma} + \delta h_{\mu\gamma} + O(\delta h_{\mu\gamma}^2), \quad (\text{B.7})$$

considerando ainda a condição de campo estacionário, obtemos para Γ_{44}^i a expressão

$$\Gamma_{44}^i \simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} (\delta h_{44}). \quad (\text{B.8})$$

Substituindo o resultado da equação (B.8) em (B.6), obtemos

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} (\delta h_{44}), \quad (\text{B.9})$$

ou

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} (\delta h_{44}). \quad (\text{B.10})$$

Como a equação da geodésica é dependente das equações de Einstein por meio do tensor métrico, aqui postulamos a equação de movimento quase-Newtoniana com um potencial escalar [3], definido por

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} := -\frac{\partial \Phi}{\partial x^a}, \quad (\text{B.11})$$

onde Φ , denota o potencial quase-Newtoniano.

Comparando as equações (B.10) e (B.11), obtemos

$$\Phi = -\frac{c^2}{2} \int_0^{\delta h_{44}} d(\delta h'_{44}) = -\frac{c^2}{2} \delta h_{44}, \quad (\text{B.12})$$

onde somamos todas as contribuições da métrica $g_{\mu\gamma}$ de 0 até δh_{44} .

Assim, obtemos

$$\Phi = -\frac{c^2}{2} (1 + g_{44}). \quad (\text{B.13})$$

Cabe observar que este potencial situa-se entre a teoria de Newton e a relatividade geral, pois a soma de incrementos se dá apenas em uma das componentes da métrica.

Apêndice C DESVIO DA LUZ SEGUNDO A MECÂNICA NEWTONIANA

Podemos obter o desvio da luz proveniente de estrelas distantes ao passar próximas ao campo gravitacional do Sol por uma abordagem, apenas, Newtoniana. Para isso, considere um fóton de massa m_f , constante ao longo de todos os pontos de sua trajetória. Pelo princípio da conservação do momento angular temos

$$m_f r^2 \frac{d\alpha}{dt} = m_f c R_\odot, \quad (\text{C.1})$$

onde c , R_\odot , α representam respectivamente, a velocidade da luz no vácuo, o raio do Sol, e o ângulo formado entre a trajetória retilínea do raio de luz e a linha radial que emana do centro do Sol.

De (C.1), podemos obter que

$$r^2 = \frac{c R_\odot}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}. \quad (\text{C.2})$$

Por outro lado, a força exercida pelo Sol sobre o a partícula de luz é dada por

$$F = -\frac{G m_f M}{r^2}, \quad (\text{C.3})$$

e pela segunda lei de Newton, temos que a força na direção y é dada por

$$F_y = m_f \frac{dv_y}{dt} = F \sin(\alpha). \quad (\text{C.4})$$

Desta forma, temos que

$$F_y = -\frac{G m_f M}{r^2} \sin(\alpha) \quad (\text{C.5})$$

Pelo princípio da equivalência, no contexto Newtoniano, temos que

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \sin(\alpha) \quad (\text{C.6})$$

e substituindo o valor de r^2 obtido na equação (C.2), obtém-se

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{GM}{cR_\odot} \frac{d\alpha}{dt} \sin(\alpha). \quad (\text{C.7})$$

Admitindo a integral, em ambos os lados da igualdade de (C.7), temos

$$\int_0^{-c \sin(\varphi)} dv_y = -\frac{GM}{cR_\odot} \left[\int_0^{\varphi+\pi} \sin(\alpha) d\alpha \right], \quad (\text{C.8})$$

onde φ representa o ângulo de desvio do raio de luz da trajetória retilínea. A integração resulta em

$$c \sin(\varphi) = \frac{GM}{cR_\odot} [1 - \cos(\varphi + \pi)], \quad (\text{C.9})$$

ou

$$\frac{\sin(\varphi)}{1 - \cos(\varphi)} = \frac{GM}{c^2 R_\odot}, \quad (\text{C.10})$$

ou ainda

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{GM}{c^2 R_\odot}. \quad (\text{C.11})$$

Como o ângulo φ é considerado pequeno, podemos fazer a aproximação

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \approx \frac{\varphi}{2},$$

que resulta na expressão final para φ

$$\varphi = \frac{2GM}{c^2 R_\odot}. \quad (\text{C.12})$$

Definimos a expressão para φ , obtida por (C.12), como o desvio da luz dado pela mecânica Newtoniana, ou seja,

$$\Delta\varphi := \varphi = \frac{2GM}{c^2 R_\odot}. \quad (\text{C.13})$$

Apêndice D **PACOTE CTENSOR-WXMAXIMA**

O wxMaxima é uma interface para o sistema de álgebra computacional MAXIMA baseada no wxWidgets. Este software possui um pacote manipulação de componentes denominado Ctensor.

Abaixo, enumeramos os passos utilizados para obter as equações de Einstein e as componentes do tensor de Riemann usadas no Capítulo 3, bem como as equações da geodésica usadas no Capítulo 5.

Em uma primeira etapa, além de carregar o pacote, fornecemos informações sobre a métrica do espaço-tempo a ser estudada:

Carrega o pacote

```
load(ctensor);
```

Define as coordenadas da métrica

```
ct_coords : [X, Y, Z, T];
```

Define as funções incógnita da métrica e sua dependência

```
depends([ALPHA, BETA], [X, Y]);
```

Matrix do tensor métrico

```
lg : matrix([a11, a12, a13, a14], [a21, a22, a23, a24], [a31, a32, a33, a34], [a41, a42, a43, a44]);
```

Define a matriz anterior como o tensor métrico

```
cmetric(false);
```

Posteriormente, a seguinte sequência deve ser seguida:

1. `christof(true)`
2. `riemann(true)`
3. `ricci(true)`
4. `cgeodesic (true)`,

onde esta sequência calcula, respectivamente, os símbolos de Christoffel, o tensor de Riemann, o tensor de Ricci, e as equações da geodésica.

Se o argumento das funções for *false* no lugar de *true* o cálculo é realizado, mas não apresentado em tela.

Uma descrição completa das funções acima citadas podem ser encontradas no próprio wxMaxima [13].

Referências Bibliográficas

- [1] P. S. Letelier, **Soluções exatas das equações de Einstein com simetria axial**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 27, número 1, 121-136, 2005.
- [2] D. Vogt and P. S. Letelier, **Exact General Relativistic Discs and the Advance of Perihelion**. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 384, 334-342, 2008
- [3] A. J. Capistrano, **A matéria escura como efeito não linear da gravitação**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2006.
- [4] R. Gautreau e R. B. Hoffman, **Exact Solutions of the Einstein Vacuum Field Equations in Weyl Co-ordinates**. Il Nuovo Cimento, LXI B, 411- 424, 1969.
- [5] P. Davies, **O enigma do tempo: a revolução iniciada por Einstein**. Tradução de I. Kortowski, segunda edição, Rio de Janeiro, Ediouro, 1998.
- [6] R. H. Dicke, **The theoretical significance of experimental relativity**, Gordon and Breach, New York, 1965.
- [7] M. Cattani, **Dedução das Equações da Teoria da Gravitação de Einstein em um Curso de Graduação**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 20, número 1, 27-37, 1998.
- [8] M. Dalarsson and N. Dalarsson, **Tensor Calculus, Relativity, and Cosmology**. Elsevier Academic Press, 2005.

- [9] L. A. D'Afonseca, **Soluções de Weyl: Aspectos Globais, Singularidades e Geodésicas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1999.
- [10] U. J. Le Verrier, **Theorie du Mouvement de Mercure**, Annales de l'Observatoire Impirial de Paris. V, 76, 1859.
- [11] R. A. Rydin, **Le Verrier's 1859 Paper on Mercury**, The General Science Journal.
- [12] <http://solarsystem.nasa.gov/planets/>
- [13] <http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/en/maxima.html>
- [14] A. Einstein, **A teoria da relatividade especial e Geral**. Tradução de C. A. Pereira, quinta edição, Rio de Janeiro, Contraporto, 1999.
- [15] G. Gamow, **O incrível mundo da física moderna**. Tradução de E. J. Monteiro, segunda edição, São Paulo, 1980.
- [16] D. R. Constantin, **On the first determination of Mercury's perihelion advance**. arXiv: 1104.05481 [astro-ph.ED].
- [17] E. V. Pitjeva, **Relativistic Effects and Solar Oblateness from Radar Observations os Planets and Spacecraft**, Astronomy Letters, Vol 31, número 5, 340-349, 2005.
- [18] L. C. Evans, **Partial Differential Equations**. Segunda edição, Hardcover, American Mathematical Society, Berkeley, 1997.
- [19] A. Biswas e K. R. S. Mani, **Relativistic perihelion precession of orbits of Venus and the Earth**. Department of Physics, Godopy Center for Scientific Research, Calcutta, India.

- [20] D. M. Zipoy, **Topology of Some Spheroidal Metrics**. Jour. Math. Phys., volume 7, número 6, 1966.
- [21] M. Cattani, **Einstein Gravitation Theory: Experimental Tests II**. arXiv:1007.0140, 2010.
- [22] W. Lopes, **Raio real do Sol**. Cat. Ens. Fís., volume 11, número 2, 1994.
- [23] G.G. Nyambuya, **Azimuthally symmetric theory of gravitation - I. On the perihelion precession of planetary orbits**. Mon. Not. R. Astron. Soc. 403, 1381-1391, 2010.
- [24] N. Rosen, **Rev.Mod.Phys.** 21, 503, (1949).
- [25] <http://e-escola.ist.utl.pt/mgallery/default.asp?obj=6690>
- [26] <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=1566>
- [27] J. L. Margot and J. D. Giorgini, **Probing general relativity with radar astrometry in the inner solar system**. Relativity in Fundamental Astronomy, IAU Symposium, número 261, 2009.
- [28] http://en.wikipedia.org/wiki/File:1919_eclipse_negative.jpg
- [29] V. Mitvalsky, **Special Relativity without the Postulate of Constancy of Light**. American Journal of Physics, Volume 34, páginas 825-829, (1966).