

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DE SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**A Interação Feixe-Plasma Como Aplicação da Teoria Cinética
de Plasmas na Aproximação Quase-Linear**

Sabrina Tigik Ferrão

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a orientação do Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Porto Alegre, 25 de dezembro de 2013

Sabrina Tigik Ferrão

**A INTERAÇÃO FEIXE-PLASMA COMO APLICAÇÃO DA TEORIA
CINÉTICA DE PLASMAS NA APROXIMAÇÃO QUASE-LINEAR**

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a orientação do Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell
Orientador, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Rudi Gaelzer
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. José Eduardo Costa
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre, 25 de dezembro de 2013

Agradecimentos

À minha mãe, por ter me apoiado e acreditado na minha capacidade. Obrigada por eventualmente me arrastar para fora da minha loucura de estudos, mesmo com a minha cara emburrada e com resmungos de "eu deveria estar estudando". Te amo, mãe. Tu sempre serás o modelo de mulher forte e determinada que eu seguirei.

Ao meu filho, por todo o carinho e compreensão. Responsável por algumas das conversas e situações mais divertidas e emocionantes da minha vida. Tu és genial, guri, te amo. Esse trabalho todo é dedicado a ti.

Ao meu marido, pelo apoio moral, emocional e financeiro. Sem tu, eu não teria conseguido, obrigada por acreditar em mim e, por diversas vezes, me convencer a não desistir. A culpa é tua! Te amo.

Ao meu orientador, pelas discussões intelectualmente enriquecedoras, pela paciência (gigante!), pela grande disposição em ajudar e pelas palavras de apoio nos momentos de desespero. É um prazer imenso ser tua orientanda.

Aos meus amigos e amigas, que tornaram os últimos semestres da minha graduação mais divertidos e com mais sentido. Obrigada pelas palavras de incentivo e por terem segurado as pontas no café na semana anterior à entrega desse tcc. Adoro todos vocês, contem comigo sempre.

Epígrafe

"Don't Panic"
(Douglas Adams)

Resumo

Neste trabalho vamos estudar o fenômeno de interação feixe-plasma com o uso do formalismo quase-linear, em duas dimensões. Para tal, iniciamos fazendo uma revisão da teoria cinética de plasmas, onde apresentamos em detalhes o processo de linearização do sistema de equações Vlasov-Maxwell, usando como exemplo um plasma Maxwelliano e considerando apenas a propagação de ondas eletrostáticas de alta frequência. Nessa revisão, destacamos a condição para a ocorrência de amortecimento das ondas, caracterizando o amortecimento de Landau. Em seguida discutimos a aproximação quase-linear da equação de Vlasov, destacando as diferenças entre esta abordagem e a aproximação linear, para então, deduzirmos a equação de difusão característica da teoria quase-linear, obtendo a expressão de seu coeficiente de difusão e a expressão da variação temporal da amplitude do espectro, e discutindo detalhadamente os limites de validade e o significado físico das equações do formalismo quase-linear. Na parte que se refere ao fenômeno de interação feixe-plasma, é feita uma breve explicação sobre os processos que ocorrem quando um segundo pico é formado na função de distribuição pela incidência do feixe de elétrons sobre o plasma, onde evidenciamos a influência dos efeitos não-lineares na evolução temporal da função de distribuição do plasma durante a interação. Reproduzimos alguns resultados anteriores, obtidos pelos integrantes do Grupo de Física de Plasmas, usando uma abordagem em que as equações e o código de integração numérica, foram escritos em coordenadas cartesianas. Discutimos a ocorrência de instabilidade numérica durante a tentativa feita de inclusão de um termo de colisões ao programa, e a ideia de buscar uma alternativa que pudesse ser mais adequada às características do termo colisional, envolvendo coordenadas polares. Apresentamos então as equações quase-lineares em coordenadas polares e descrevemos o procedimento feito para a mudança de coordenadas. Comparamos os resultados obtidos com a integração numérica das equações nessa abordagem com resultados obtidos em coordenadas cartesianas, em condições equivalentes, de onde conclui-se que a nova abordagem que usa coordenadas polares está pronta para receber o termo colisional.

Abstract

In this work we are going to study the plasma-beam interaction phenomenon using the quasi-linear formalism in two dimensions. For this end, we begin by reviewing the kinetic theory of plasmas, where we show in details the linearization process of the Vlasov-Maxwell system of equations, by using as an example a Maxwellian plasma and considering only the propagation of high-frequency electrostatic waves. In this review, we highlight the condition for the occurrence of wave damping, characterizing the Landau damping. Then we discuss the quasi-linear approximation of the Vlasov equation, highlighting the differences between this approach and the linear approximation, to then deduce the characteristic quasi-linear diffusion equation, obtaining the expression of its diffusion coefficient, and the expression for the temporal variations of the spectral amplitude, by discussing in details validity limits and the physical meaning of the equations of the quasi-linear formalism. In the part that refers to the beam-plasma interaction phenomenon, it is made a brief explanation about the process that occurs when a second peak is formed in the distribution function due to the incidence of the electron beam on the plasma, where we evidenciate the influence of the non-linear effects on the temporal evolution of the plasma distribution function during the interaction. We reproduce some previous results, obtained by members of the Plasma Physics Group, by using an approach where the equations, and the numerical integration code, were written in cartesian coordinates. We discuss the occurrence of numerical instability during the attempt of inclusion of a collision term to the code, and the idea of seeking for an alternative that could be more suitable to characteristics of the collisional term, involving polar coordinates. Then, we present the quasi-linear equations in polar coordinates, and describe the procedures used to perform the change of coordinates. We compare the results obtained by numerical integration of the equations in this approach with the results obtained in cartesian coordinates, for equivalent conditions, from where we conclude that the new approach, using polar coordinates, is ready to receive the collisional term.

Lista de Figuras

1	Evolução temporal da função de distribuição de velocidades e da amplitude espectral. Resultados obtidos usando o código que faz uso de coordenadas cartesianas nos espaços de velocidade e número de onda.	40
2	Evolução temporal da função de distribuição de velocidades e da amplitude espectral. Resultados obtidos usando o código que faz uso de coordenadas polares nos espaços de velocidade e número de onda.	41

Sumário

1	Introdução	8
2	Teoria Cinética de Plasmas	10
2.1	Sistema de Equações Vlasov-Maxwell	10
2.2	Abordagem Linear da Equação de Vlasov Para Ondas de Langmuir	12
2.2.1	Linearização da Equação de Vlasov	12
2.2.2	Solução Geral do Sistema Vlasov-Maxwell Linearizado	14
3	Teoria Quase-Linear	19
3.1	Sistema de Equações Vlasov-Maxwell na Aproximação Quase-Linear	19
3.2	Equação de Difusão Quase-Linear	21
3.2.1	Coefficiente de Difusão Quase-Linear	22
3.2.2	Amplitude Espectral	24
4	Interação Feixe-Plasma Na Aproximação Quase-Linear	26
4.1	Abordagem Bi-Dimensional em Coordenadas Cartesianas	27
4.1.1	Método e Resultados em Coordenadas Cartesianas	29
4.2	Abordagem Bi-Dimensional em Coordenadas Polares	30
4.2.1	Método e Resultados em Coordenadas Polares	33
5	Considerações Finais	34
	Apêndice A - Métodos Numéricos	36
	Apêndice B - Figuras	40

Capítulo 1

Introdução

De maneira geral, um plasma é um gás ionizado. Entretanto, para que seja caracterizado o estado de plasma, alguns requisitos devem ser satisfeitos. O gás ionizado deve ser “quase-neutro”, no sentido de que a densidade de partículas carregadas deve ser suficientemente grande para que em um elemento de volume do sistema a diferença entre as densidades de partículas positivas e negativas seja considerada apenas uma flutuação. O gás ionizado deve também apresentar o que se chama de “blindagem”, ou seja, qualquer carga de um determinado sinal presente em um dado ponto vai atrair cargas do sinal oposto e repelir cargas do mesmo sinal, de modo que a efetividade da força elétrica dessa carga acaba limitada a uma determinada distância, conhecida como *comprimento de Debye*. Mesmo assim, a interação entre as partículas ocorre à distância, não dependendo apenas de colisões diretas, como acontece em gases neutros. O plasma pode ser portanto definido como sendo um sistema composto por íons e elétrons, podendo conter partículas neutras, que apresenta quase-neutralidade e comportamento coletivo. Frequentemente, os plasmas são classificados como sendo o “quarto estado da matéria”, embora essa denominação não seja muito acurada, pois não há uma transição de fase bem caracterizada entre o estado gasoso e o estado de plasma.

No ambiente em que vivemos, propício ao desenvolvimento da vida como a conhecemos, plasmas são raros. Os poucos plasmas com os quais temos contato são produzidos artificialmente, por meio de fortes descargas elétricas em gases confinados, como nas lâmpadas fluorescentes que iluminam nossas residências, ou naturalmente, em chamas ou nas imediações do canal de descarga de um raio na atmosfera. Contudo, se considerarmos outros ambientes, logo acima dessa tênue atmosfera que nos separa do meio interplanetário, vemos que ocorre o inverso do que percebemos aqui na Terra. De fato, podemos dizer que em ambientes espaciais o plasma é o estado mais frequente em que a matéria é encontrada.

A física de plasmas é uma área de estudo complexa, em que desenvolvimento de modelos teóricos e computacionais tem grande importância para a compreensão de fenômenos que ocorrem tanto na natureza, quanto em laboratórios, de maneira que possamos adaptá-los para uma possível aplicação tecnológica e industrial.

Um bom exemplo de aplicação industrial advinda de modelos teóricos foi o desenvolvimento das técnicas de processamento de materiais através de plasma, que tem como base a teoria desenvolvida na primeira metade do século XX, pelo químico americano Irving Langmuir e que, a partir dos anos 80, tornou possível a capacidade de fabricação em larga escala de pequenos circuitos integrados de grande complexidade, a preços economicamente viáveis [1].

Neste trabalho será apresentado um estudo das instabilidades associadas à propagação de um feixe de elétrons em um plasma. Este tipo de fenômeno é observado na natureza, onde, por exemplo, aparece associado a emissões de radiação solar conhecidas como radiação de tipo II e tipo III, e envolve processos de amplificação e de absorção de energia das ondas através da interação entre estas e as partículas que constituem o feixe. Os processos associados à presença de um feixe tem como consequência a geração de turbulência envolvendo ondas de Langmuir e emissão de radiação eletromagnética, gerada por efeitos não lineares. Este tipo de instabilidade é conhecido na literatura como “instabilidade do tipo *bump-in-tail*”, devido à forma característica de sua distribuição de velocidades.

No segundo capítulo, faremos uma revisão sobre a teoria cinética de plasmas, apresentando o sistema de equações Vlasov-Maxwell e evidenciando seu caráter auto-consistente. A seguir, será deduzida a expressão geral para a relação de dispersão na aproximação linear. Como aplicação, será obtida a relação de dispersão para ondas de Langmuir, em um plasma Maxwelliano, na aproximação de plasmas mornos.

No capítulo três será apresentada a aplicação do formalismo quase-linear ao sistema de equações Vlasov-Maxwell, de onde deduziremos a equação de difusão quase-linear, o coeficiente de difusão dessa equação e a expressão para a variação temporal da amplitude espectral. Essa dedução será acompanhada por uma discussão sobre as diferenças entre essa teoria e a abordagem linear apresentada no capítulo anterior, bem como os seus limites de validade. A leitura deste capítulo é fundamental para que se possa ter uma melhor compreensão do tema abordado no capítulo seguinte.

No quarto capítulo apresentaremos o estudo da interação feixe-plasma, utilizando o formalismo quase-linear em duas dimensões. Serão duas abordagens: uma modelada em coordenadas cartesianas, e outra, modelada em coordenadas polares. Na primeira seção, vamos expor as equações, os métodos utilizados e os resultados obtidos para o modelo em coordenadas cartesianas. Será feita uma discussão detalhada sobre a evolução temporal obtida numericamente, e o que seria esperado do ponto de vista teórico. Por fim, discutiremos os problemas numéricos que surgiram com a inclusão do termo de colisões ao código de integração. Essa última discussão servirá de motivação para o desenvolvimento do modelo em coordenadas polares. Na seção seguinte, serão colocados os métodos utilizados para a transformação de coordenadas das equações expostas na seção anterior, apresentaremos o sistema de equações quase-lineares em coordenadas polares e, por fim, discutiremos os resultados obtidos nessa abordagem, fazendo a comparação com os resultados obtidos em coordenadas cartesianas.

No capítulo cinco, faremos um breve sumário do trabalho, e discutiremos as perspectivas futuras para o código escrito em coordenadas polares.

Capítulo 2

Teoria Cinética de Plasmas

Para que possamos obter informações relevantes sobre um sistema físico, é fundamental que consigamos determinar sua posição e a taxa com que essa posição está variando ao longo do tempo. Em um plasma isso não é diferente, entretanto sua quantidade de componentes é muito grande, impossibilitando a determinação desses parâmetros partícula a partícula. Outra dificuldade nessa abordagem, quando estamos tratando de plasmas, é a correlação entre seus componentes que, por serem partículas dotadas de carga elétrica, e por estarem em movimento, geram campos elétricos e magnéticos. Através da geração desses campos, uma partícula é capaz de afetar partículas à distância, as quais geram seus próprios campos, afetando outras partículas, e assim sucessivamente. Como nosso interesse é estudar um plasma quente e de baixa densidade, podemos desconsiderar efeitos de colisões entre as partículas. Essas características definem um sistema com comportamento coletivo, auto-consistente e com interações de médio alcance, pois além de não haver efeitos colisionais, o campo gerado por uma partícula induz ou alimenta o campo gerado por outras partículas, sem a necessidade de qualquer intervenção externa.

Com a intenção de descrever satisfatoriamente sistemas como este, fazemos uso de uma abordagem estatística, através da equação de Boltzmann não-colisional

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{\mathbf{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (2.1)$$

Nessa expressão $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ é a função de distribuição, ou seja, uma função que expressa a densidade de partículas do tipo α no espaço de fases e \mathbf{F} é a força que atua sobre as partículas que fazem parte da distribuição. O produto da função de distribuição pelo elemento de volume no espaço de fases, $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3x d^3v$, representa a probabilidade de encontrar uma partícula do tipo α em um elemento de volume d^3x em torno de \mathbf{r} e em um elemento de volume d^3v em torno de \mathbf{v} , no instante t .

2.1 Sistema de Equações Vlasov-Maxwell

As partículas que compõem um plasma, por serem dotadas de carga elétrica, tem suas interações governadas por campos de natureza eletromagnética. Esses campos, como mencionado anteriormente, são gerados e realimentados pelos próprios constituintes do plasma, sem influência

externa. Sendo assim, a força interna que atua sobre essas partículas é a força eletromagnética, ou força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q_\alpha(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)). \quad (2.2)$$

Substituindo a força que aparece na equação de Boltzmann não-colisional pela força de Lorentz, mais um termo geral de força externa e, por simplicidade de notação, suprimindo a dependência em \mathbf{r} , \mathbf{v} e em t , obtemos a equação de Vlasov:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} [q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}_{\text{ext}}] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0. \quad (2.3)$$

A força externa que aparece na equação de Vlasov se deve, normalmente, à atuação de campos eletromagnéticos externos aplicados ao plasma, logo, ela também é uma força de Lorentz. No entanto, estamos interessados em tratar o caso em que não há campos externos atuando sobre o sistema, sendo assim $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$, e a equação de Vlasov fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0. \quad (2.4)$$

Os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} atuam no sistema de acordo com as equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (2.8)$$

onde ρ é a densidade carga do plasma e \mathbf{J} é a densidade da corrente que circula no plasma. Suas expressões, em uma abordagem estatística, dependem da função de distribuição do plasma, e tem a seguinte forma,

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.9)$$

e

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.10)$$

Nessas equações a soma em α leva em conta as diferentes espécies de partículas carregadas que constituem o plasma, com $\alpha = i$, para íons e $\alpha = e$, para elétrons.

As expressões acima formam um conjunto completo e auto-consistente de equações, onde fica explícito que, embora não haja colisões entre as partículas, elas interagem entre si através de campos eletromagnéticos gerados e modificados internamente pelo seu próprio deslocamento e pelo deslocamento de outras partículas carregadas, através do plasma [2].

2.2 Abordagem Linear da Equação de Vlasov Para Ondas de Langmuir

O sistema de equações de Vlasov-Maxwell pode ser utilizado para estudar fenômenos ondulatórios em plasmas. Dentre os diversos tipos de ondas possíveis, existem as oscilações eletrostáticas de alta frequência, conhecidas como ondas de Langmuir. Nesta seção vamos considerar o caso de oscilações de pequena amplitude e obter a relação de dispersão para ondas de Langmuir, através de um processo de linearização no sistema de equações.

2.2.1 Linearização da Equação de Vlasov

A faixa de frequência das ondas de Langmuir está acima da frequência de oscilação associada ao movimento dos elétrons em torno dos íons massivos. Esta frequência, denominada *frequência de plasma*, é tão alta que podemos considerar os íons como um “background” estático. A função de distribuição total varia somente em termos da função de distribuição eletrônica, enquanto f_i , a função de distribuição dos íons, permanece constante. Logo, f_i será suprimida nos cálculos seguintes, restando somente a variação da f_e que, por simplicidade, será denotada apenas como f . Para o caso eletrostático, somente campos elétricos atuam sobre o sistema, sendo assim, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Sob essas condições, considerando apenas os termos relacionados aos elétrons, temos uma força eletrostática da forma

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E}. \quad (2.11)$$

Sabemos que no caso puramente eletrostático, o campo elétrico está diretamente relacionado à variação espacial do potencial elétrico, com seu vetor direcionado na direção oposta à direção de crescimento do potencial. Ou seja, o campo elétrico é o negativo do gradiente do potencial:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.11),

$$\mathbf{F} = e\nabla\Phi, \quad (2.13)$$

os sinais negativos se anulam e obtemos a força a ser inserida na equação de Vlasov para o caso eletrostático:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m_e} \nabla\Phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (2.14)$$

Neste ponto, podemos considerar que nossa função de distribuição é composta de dois termos, um termo de ordem zero, relativo a uma função de distribuição de equilíbrio, $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, e outro termo de primeira ordem, referente a uma perturbação de pequena amplitude, $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Assumindo um plasma que, no estado de equilíbrio, é infinito, homogêneo e estacionário, temos que $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v})$. Portanto, nossa função de distribuição total fica:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (2.15)$$

O campo elétrico também pode ser separado de forma semelhante. Entretanto, vamos considerar que o campo elétrico de equilíbrio é nulo, de modo que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$, que vamos denotar sem o índice, por simplicidade.

Para resolvermos a equação de Vlasov precisamos de uma expressão para o potencial elétrico, que pode ser obtida através da equação de Poisson. Vamos começar aplicando mais uma vez o operador vetorial ∇ em (2.12):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \Phi. \quad (2.16)$$

Das equações de Maxwell temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.17)$$

que, junto com (2.16), nos leva à equação de Poisson para o potencial elétrico

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.18)$$

Da mesma forma adotada para o campo elétrico, Φ representa o potencial perturbado Φ_1 , escrito sem o índice, por simplicidade.

A densidade de carga que aparece no lado direito da equação (2.18) é a seguinte¹:

$$\begin{aligned} \rho &= en_0 - e \int_v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \\ &= en_0 - e \int_v [f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] d^3v \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde o primeiro termo representa a densidade de carga associada aos íons. O valor de equilíbrio da densidade de elétrons é dado por

$$n_0 = \int_v f_0(\mathbf{v}) d^3v. \quad (2.20)$$

Podemos ver, pelas equações (2.19) e (2.20), que os termos referentes à densidade de equilíbrio n_0 se anulam. O que resta é uma densidade de carga associada à perturbação, dependendo exclusivamente da função de distribuição perturbada:

$$\rho_1 = -e \int_v f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.21)$$

Com isso, obtemos a equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = \frac{e}{\epsilon_0} \int_v f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.22)$$

Com a intenção de deixar mais claro o processo de linearização da equação de Vlasov, é interessante explicitar os termos em f_0 e em f_1 ,

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(f_0 + f_1) + \frac{e}{m_e} \nabla \Phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f_0 + f_1) = 0. \quad (2.23)$$

¹Neste trabalho, todas as integrais sem limites de integração explícitos serão tomadas como de $-\infty$ a $+\infty$

A função de distribuição de equilíbrio, f_0 , é constante no tempo, então o termo que leva sua derivada temporal é nulo. Assim também é com a sua derivada espacial, dada por ∇f_0 . No termo que leva o gradiente da f no espaço de velocidades, precisamos levar em consideração a condição de baixa amplitude da perturbação, pois temos o gradiente do potencial, que depende somente de f_1 e a derivada do termo de perturbação no espaço de velocidades. O produto entre essas duas funções de f_1 , derivadas, leva a um termo de segunda ordem muito pequeno que, devido à baixa amplitude da perturbação, pode ser desprezado. Sob estas condições, obtemos uma equação aproximada para a perturbação da função de distribuição, a qual pode ser chamada de equação de Vlasov linearizada:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 + \frac{e}{m_e} \nabla \Phi_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0. \quad (2.24)$$

2.2.2 Solução Geral do Sistema Vlasov-Maxwell Linearizado

Para resolver o sistema de equações Vlasov-Maxwell linearizado, vamos escrever as quantidades lineares de primeira ordem em termos suas transformadas de Fourier no espaço e no tempo:

$$f_{\mathbf{k}} \equiv f(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \int dt \int d^3r f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.26)$$

A vantagem dessa representação é que a propriedade de derivadas da transformada de Fourier nos permite substituir as derivadas espaciais, ∇ , e temporais, $\frac{\partial}{\partial t}$, por equações algébricas: $i\mathbf{k}$, no domínio recíproco de espaço, e $-i\omega$, no domínio recíproco de tempo.

Usando essas propriedades, podemos reescrever a equação de Vlasov da seguinte forma:

$$-i\omega f_{\mathbf{k}} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} f_{\mathbf{k}} + i \frac{e}{m_e} \Phi_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0, \quad (2.27)$$

onde

$$-i\mathbf{k} \Phi_{\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}. \quad (2.28)$$

Reescrevendo a equação de Poisson também em termos de transformadas de Fourier,

$$k^2 \Phi_{\mathbf{k}} = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_{\mathbf{v}} f_{\mathbf{k}} d^3v, \quad (2.29)$$

ficamos com um sistema completo que nos permite obter a relação de dispersão para ondas eletrostáticas de alta frequência.

Prosseguindo com a solução, isolamos $f_{\mathbf{k}}$ em (2.27)

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{-1}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega} \frac{e}{m_e} \Phi_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \quad (2.30)$$

e substituímos em (2.29), obtendo

$$k^2 \Phi_{\mathbf{k}} = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_{\mathbf{v}} \left(\frac{-1}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega} \frac{e}{m_e} \Phi_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \right) d^3v. \quad (2.31)$$

A forma homogênea da equação (2.31) pode ser evidenciada agrupando as constantes e explicitando o potencial:

$$\left[1 - \frac{e^2}{k^2 m_e \epsilon_0} \int_v \frac{1}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 d^3 v \right] \Phi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.32)$$

deixando claro que só haverá solução não-trivial para o potencial quando a expressão que está entre colchetes for nula. Com isso, chegamos à seguinte equação de dispersão:

$$\frac{e^2}{k^2 m_e \epsilon_0} \int_v \frac{1}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 d^3 v = 1. \quad (2.33)$$

Essa é uma equação de dispersão, envolvendo duas variáveis até então mutuamente independentes: ω e \mathbf{k} . As soluções dessa equação são as *relações de dispersão*, que podem ser escritas como $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Estas determinam as frequências das oscilações que o plasma sustenta e seus comprimentos de onda, da mesma forma que no vácuo $\omega = kc$.

Nesse ponto, é interessante que definamos nossa função de distribuição de equilíbrio $f_0(\mathbf{v})$, como uma função normalizada da forma:

$$\hat{f}_0(\mathbf{v}) = \frac{1}{n_0} \int f_0(\mathbf{v}) d^3 v. \quad (2.34)$$

Ao substituírmos f_0 pela sua forma normalizada temos a seguinte equação

$$\frac{n_0 e^2}{k^2 m_e \epsilon_0} \int_v \frac{1}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \hat{f}_0 d^3 v = 1, \quad (2.35)$$

onde podemos identificar, entre as constantes que multiplicam a integral, um parâmetro bem conhecido da física de plasmas, o quadrado da frequência angular de plasma para elétrons

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}. \quad (2.36)$$

Escrevendo a relação de dispersão em termos de ω_p , ficamos com

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_v \frac{1}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \hat{f}_0 d^3 v = 1. \quad (2.37)$$

O processo que estamos discutindo, como mencionado anteriormente, envolve apenas forças eletrostáticas. Além disso, estamos considerando um meio não magnetizado, em que todas as direções são equivalentes. Podemos então definir o eixo z do sistema de coordenadas como sendo paralelo à direção de propagação da onda, dada pelo vetor de onda \mathbf{k} , resultando na seguinte expressão:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_v \frac{1}{v_z - \omega/k_z} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_z} dv_z = 1. \quad (2.38)$$

Para a obtenção dessa expressão, foi feita a integração sobre as coordenadas perpendiculares à direção de propagação, de modo que a distribuição é agora função apenas de v_z . Entretanto, por simplicidade, continuaremos a usar o símbolo \hat{f}_0 .

Antes de darmos continuidade à solução da equação (2.38), é interessante simplificarmos um pouco sua forma, usando integração por partes. Explicitando a parte da relação de dispersão

a ser integrada, lembrando que essa integração ocorrerá somente em v_z , a direção em que \hat{f}_0 foi derivada, e definindo a substituição de variáveis como $u = \frac{1}{v_z - \omega/k_z}$ e $dv = \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_z}$, efetuamos a integral da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v_z}{v_z - \omega/k_z} dv_z = \frac{\hat{f}_0}{v_z - \omega/k} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0}{(v_z - \omega/k_z)^2} dv_z. \quad (2.39)$$

Uma vez que \hat{f}_0 vai a zero em $\pm\infty$, o primeiro termo é nulo e ficamos com uma expressão mais simples para a relação de dispersão

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_v \frac{\hat{f}_0}{(v_z - \omega/k_z)^2} dv_z = 1. \quad (2.40)$$

Podemos perceber, no denominador do integrando da equação (2.40), que há uma singularidade no ponto $v_z = \omega/k$. De fato, essa singularidade já estava presente antes da integração por partes, na equação (2.38). A presença da singularidade no denominador representa uma dificuldade no cálculo da integral, uma vez que ali o integrando vai a infinito. O procedimento correto para tratar esse tipo de problema foi desenvolvido por Landau, em meados do século 20. Não vamos entrar em detalhe a respeito da solução, faremos apenas uma discussão de aspectos qualitativos essenciais. De acordo com o procedimento introduzido por Landau, as perturbações no plasma deveriam ser tratadas como problemas de valor inicial. O problema deveria então ser tratado com uso de transformada de Laplace na variável t , ao invés de transformada de Fourier. Uma vez obtida a solução para a transformada de Laplace, a solução do problema passa pela obtenção da transformada de Laplace inversa. Para garantir a convergência da solução, o procedimento requer uma integração no plano complexo, seguindo um caminho que fique à direita de singularidades do integrando. Sem entrar em detalhes, o ponto essencial é que o procedimento leva à conclusão de que integrais no espaço de velocidades, como as que aparecem na equação (2.38), devem ser feitas seguindo um caminho ao longo do qual a variável ω pode ter valores complexos, passando por baixo do polo que existe no integrando.

O procedimento via transformada de Laplace na variável t representa um tratamento correto do problema, mas há uma forma pragmática de se chegar à mesma forma da solução. Nessa abordagem pragmática usa-se transformada de Fourier, como vinha sendo feito nessa seção. Isso leva às integrais com singularidade, como já vimos. Nesse ponto, evita-se a singularidade supondo que ω tem uma parte imaginária finita, positiva e tendendo a zero, o que leva o polo a ficar acima do eixo. Esse procedimento adotado para a integração significa a adoção de um caminho conhecido como *contorno de Landau*. Levando-se então em conta a prescrição do contorno de Landau, e empregando-se o teorema dos resíduos, a equação (2.40) pode ser escrita na forma seguinte,

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left[\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0}{(v_z - \omega/k_z)^2} dv_z + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_z} \Big|_{v_z=\omega/k} \right] = 1, \quad (2.41)$$

onde \mathcal{P} representa o *valor principal* da integral.

Prosseguindo, vamos considerar ondas cuja velocidade de fase seja muito maior do que os valores de velocidade das partículas para os quais a distribuição \hat{f}_0 tem valores significativos. Ou seja, vamos considerar que $v_\phi = \omega/k_z \gg v_z$, para os valores de v_z onde a distribuição é

significativa. Nesse caso, o segundo termo pode ser desprezado, uma vez que a singularidade localiza-se em uma região de alta velocidade térmica, onde f_0 é muito pequena, assim como sua derivada, $\partial f_0/\partial v_z$. Com isso, ficamos com a seguinte expressão:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0}{(v_z - v_\varphi)^2} dv_z \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0}{(v_z - v_\varphi)^2} dv_z = 1, \quad (2.42)$$

A integral que aparece na expressão acima pode ser representada na forma seguinte,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0}{(v_z - v_\varphi)^2} dv_z = \langle (v_z - v_\varphi)^{-2} \rangle. \quad (2.43)$$

Adotando-se a forma (2.43) em (2.42), ficamos com

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \langle (v_z - v_\varphi)^{-2} \rangle = 1, \quad (2.44)$$

e, lembrando que supomos $v_\varphi \gg v_z$, podemos desenvolver $(v_z - v_\varphi)^{-2}$ em série de Taylor, usando v_z/v_φ como parâmetro

$$(v_z - v_\varphi)^{-2} \approx v_\varphi^{-2} \left(1 + \frac{2v_z}{v_\varphi} + \frac{3v_z^2}{v_\varphi^2} + \dots \right). \quad (2.45)$$

Tomando a média dessa expansão, os termos cujos expoentes são ímpares anulam-se, uma vez que a média envolve uma integração em limites simétricos, e truncando no termo de segunda ordem, ficamos com

$$\langle (v_z - v_\varphi)^{-2} \rangle \approx v_\varphi^{-2} \left(1 + 3 \frac{\langle v_z^2 \rangle}{v_\varphi^2} \right). \quad (2.46)$$

Substituindo (2.46) em (2.44) e escrevendo v_φ como ω/k novamente, obtemos a relação de dispersão, na aproximação de velocidade de fase grande:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{k^2}{\omega} \left(1 + 3 \frac{k^2 \langle v_z^2 \rangle}{\omega^2} \right) = 1, \quad (2.47)$$

onde a média da velocidade irá depender da função de distribuição inicial do plasma.

Supondo que nossa função de distribuição de equilíbrio seja uma Maxwelliana unidimensional, cuja expressão é a seguinte

$$f_0(v) = n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{1/2} e^{-\left(\frac{m_e v^2}{2k_B T_e} \right)}, \quad (2.48)$$

onde foi descartado o subscrito z da velocidade, podemos escrever a energia cinética média das partículas de acordo com a seguinte expressão

$$\frac{1}{2} m_e \langle v_{th}^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T_e, \quad (2.49)$$

de acordo com o teorema da equipartição da energia, sendo k_B é a constante de Boltzmann e v_{th} é a velocidade térmica do plasma. Isolando v_{th} em (2.49), substituindo em (2.47), obtemos

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{k^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{k_B T_e}{m_e} \right) = 1, \quad (2.50)$$

Supondo que a correção térmica da distribuição é muito pequena, podemos fazer $\omega \approx \omega_p$ no segundo termo de (2.50) e, isolando o ω restante, obtemos a seguinte forma da relação de dispersão para ondas eletrostáticas de alta frequência (as ondas de Langmuir),

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 \frac{3k_B T_e}{m_e}. \quad (2.51)$$

Na derivação da expressão (2.51), desprezamos a contribuição do polo, considerada pequena. Caso a contribuição do resíduo da integral em (2.41) tivesse sido mantida, poderíamos ter seguido os mesmos procedimentos anteriores, e teríamos chegado à seguinte forma da expressão,

$$\omega^2 \left(1 - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_z} \Big|_{v=v_\varphi} \right) = \omega_{pe}^2, \quad (2.52)$$

onde, por simplicidade, desprezamos a correção térmica que aparece em (2.51).

Como estamos supondo que o polo está localizado muito perto do eixo dos reais, é correto afirmarmos que a parte imaginária é muito pequena. Sendo assim, podemos isolar ω e expandir a expressão em série de Taylor, para eliminar a raiz quadrada. Dessa forma, obtemos

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_z} \Big|_{v=v_\varphi} \right). \quad (2.53)$$

Para uma função de distribuição Maxwelliana, a derivada $\partial \hat{f}_0 / \partial v_z$, é negativa

$$\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_z} = -\frac{2v}{v_{th}^3 \sqrt{\pi}} e^{(-v^2/v_{th}^2)}, \quad (2.54)$$

consequentemente, a parte imaginária de ω é negativa. Isso significa que o efeito de primeira ordem, relacionado a ocorrência de uma pequena perturbação f_1 em torno do equilíbrio, em um plasma com distribuição de velocidades dos elétrons Maxwelliana, é um amortecimento não colisional dessa perturbação. Esse fenômeno foi primeiramente demonstrado matematicamente pelo físico russo Lev Landau, já mencionado, e é conhecido como “amortecimento de Landau”, ou, em inglês, “*Landau damping*”.

Como foi visto em (2.54), devido à derivada negativa, plasmas com distribuições Maxwellianas só podem suportar efeitos de amortecimento, pois não há pontos de derivada positiva nessa distribuição, o que elimina efeitos de instabilidades nesses sistemas. Entretanto, quando existe um feixe de elétrons adicionado a um plasma Maxwelliano, a função distribuição pode apresentar um pico na região de velocidades correspondente à velocidade do feixe, grande o suficiente para que exista uma região de derivada positiva, que pode dar origem a instabilidades. Pode-se dizer que nesse caso ocorre um efeito oposto ao amortecimento de Landau [3], pois há uma amplificação de ondas nessa região. Entretanto, o acompanhamento da variação da amplitude das ondas ao longo do tempo requer a inclusão de efeitos não-lineares e não pode ser tratado com o uso da aproximação linear da equação de Vlasov.

Capítulo 3

Teoria Quase-Linear

Na aproximação linear, supomos que tanto as funções distribuição quanto os campos são compostos por uma contribuição de ordem zero e uma contribuição de ordem um (a perturbação). Consideramos que as contribuições de ordem zero não variam ao longo do tempo e, a partir das equações para as quantidades de ordem um, determinamos as condições para a existência das perturbações, ou seja, obtemos a relação de dispersão. Por exemplo, supondo oscilações eletrostáticas e considerando Maxwelliana a distribuição de ordem zero, obtivemos a parte real e a parte imaginária da frequência das ondas de Langmuir, conforme equações (2.51) e (2.53). Se quisermos acompanhar a evolução temporal das perturbações, precisamos levar em conta que a presença destas pode afetar as propriedades do plasma, ou seja, precisamos levar em conta efeitos não lineares. Isso decorre do caráter auto-consistente do sistema Vlasov-Maxwell, em que perturbações nos campos podem afetar as distribuições de velocidades das partículas, e vice-versa. A forma mais imediata de incluir efeitos não lineares é através da chamada aproximação quase-linear.

3.1 Sistema de Equações Vlasov-Maxwell na Aproximação Quase-Linear

Novamente, considerando um plasma não magnetizado, inicialmente em equilíbrio, partimos diretamente da equação de Vlasov para o caso eletrostático, para partículas do tipo α

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0, \quad (3.1)$$

onde \mathbf{E} pode ser obtido através da equação para a divergência do campo elétrico,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_{\alpha} \frac{q_\alpha}{\epsilon_0} \int_{\mathbf{v}} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (3.2)$$

Mais uma vez, supomos uma pequena perturbação na distribuição inicial de equilíbrio do plasma

$$f_\alpha = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}, \quad (3.3)$$

e no campo de atuação sobre o sistema

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1. \quad (3.4)$$

Quando obtivemos a aproximação linear da equação de Vlasov, supusemos que $f_{\alpha 0}$, a função de equilíbrio, não tinha dependência temporal. Na aproximação quase-linear, vamos admitir que a $f_{\alpha 0}$ possa variar com o tempo, embora de forma bem mais lenta que a variação das perturbações. Para obter as equações para a evolução temporal das quantidades de ordem zero e de ordem um, vamos introduzir médias espaciais das quantidades de interesse.

A média espacial da função de distribuição de velocidades é expressa da seguinte forma:

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \langle f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) \rangle + \langle f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle, \quad (3.5)$$

onde a média de f_{α} é dada por

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \frac{1}{V} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r. \quad (3.6)$$

As flutuações relacionadas a $f_{\alpha 1}$ são aleatórias, sendo assim, sua média é nula e, conseqüentemente, a média da função de distribuição será a própria função de equilíbrio:

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t). \quad (3.7)$$

Para o campo elétrico, considerando $\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$, temos que o campo elétrico terá apenas a contribuição de ordem um, que, como anteriormente, vamos denotar simplesmente como \mathbf{E} . Novamente, impondo que o termo de primeira ordem na expressão do potencial elétrico vá a zero nas extremidades, a média espacial do campo elétrico de primeira ordem também será nula:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = -\frac{1}{V} \int \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} d^3r = 0. \quad (3.8)$$

A média espacial da equação de Vlasov é dada pela seguinte equação

$$\frac{\partial \langle f_{\alpha} \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \langle f_{\alpha} \rangle}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0. \quad (3.9)$$

Expandindo a função de distribuição total, ficamos com:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}) \right\rangle + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[\langle \mathbf{E} \rangle \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right] = 0. \quad (3.10)$$

No segundo termo, a derivada espacial de $f_{\alpha 0}$, é nula, assim como a média da derivada de $f_{\alpha 1}$. No terceiro termo, temos a média de \mathbf{E} , que é zero. Sendo assim, ao eliminarmos os termos nulos de (3.10) e isolarmos $\partial f_{\alpha 0} / \partial t$, obtemos uma equação para a evolução temporal de $f_{\alpha 0}$:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (3.11)$$

A equação (3.11) pode ser substituída no termo referente à derivada temporal de $f_{\alpha 0}$ na equação (3.1), resultando em

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \underbrace{\left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} - \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right]}_{\text{termos de segunda ordem}} = 0. \quad (3.12)$$

Os termos de flutuações de segunda ordem, assinalados em (3.12), tornam nosso sistema de equações Vlasov-Maxwell aberto. Consequentemente, sempre precisaremos adicionar termos de, pelo menos, uma ordem superior para obter equações que descrevem a evolução temporal do sistema, envolvendo flutuações de uma certa ordem. Entretanto, nessa aproximação, esses termos são muito menores do que as flutuações de primeira ordem e podem ser desprezados. Com essa aproximação, obtemos uma equação que é formalmente igual à equação (2.24), obtida na aproximação linear, com a diferença de que agora a $f_{\alpha 0}$ varia no tempo:

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \approx 0. \quad (3.13)$$

Temos então um sistema acoplado, constituído pelas equações (3.13), (3.11) e (3.2).

3.2 Equação de Difusão Quase-Linear

Com a aproximação quase-linear, nossa intenção é obter resultados para instabilidades geradas por efeitos não lineares, então trataremos somente o caso em que existe região com $\partial f_0 / \partial \mathbf{v} > 0$. Vamos considerar, novamente, oscilações de alta frequência, associadas a elétrons. Nesse caso, os íons podem ser considerados como um meio estático neutralizador e poderemos abandonar a soma e o índice α .

Para prosseguirmos com a solução, vamos escrever f_1 e \mathbf{E} em termos de suas respectivas transformadas de Fourier, de acordo com as equações (2.25) e (2.26). Assim podemos reescrever as derivadas em termos de \mathbf{k} e ω , ficando com

$$f_{1\mathbf{k}} = \frac{e}{m_e} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega)}. \quad (3.14)$$

Escrevendo o campo elétrico em termos do potencial, já no espaço de Fourier,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}}, \quad (3.15)$$

e substituindo em (3.14), obtemos:

$$f_{1\mathbf{k}} = -\frac{e}{m_e} \frac{\Phi_{\mathbf{k}}}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega)} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) na equação de Poisson, ficamos com:

$$k^2 \Phi_{\mathbf{k}} = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e} \int_v \frac{\Phi_{\mathbf{k}}}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega)} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d^3v. \quad (3.17)$$

E, omitindo uma série de passos que já foram realizados no capítulo anterior, quando discutimos a aproximação linear da equação de Vlasov, chegamos à mesma equação de dispersão:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_v \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d^3v = 1. \quad (3.18)$$

A diferença é que f_0 , nesse caso, representa a média espacial da função de distribuição de velocidades e varia lentamente com o tempo. Por conta dessa lenta evolução temporal, o uso dessa relação é válido somente para o caso em que o número de partículas ressonantes é muito menor do que o número total de partículas do sistema [4]. A evolução temporal da função f_0 , que pode ser chamada de “distribuição de fundo”, é dada por

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (3.19)$$

Substituindo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $f_1(\mathbf{v}, t)$, em (3.19), pelas suas respectivas transformadas de Fourier, ficamos com

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \left\langle \int \frac{d^3 k}{8\pi^3} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i[\mathbf{k}-\omega(\mathbf{k})t]} \cdot \int \frac{d^3 k'}{8\pi^3} \frac{\partial f_{1\mathbf{k}'}(\mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} e^{i[\mathbf{k}'-\omega(\mathbf{k}')t]} \right\rangle. \quad (3.20)$$

Colocando (3.20) em termos do potencial $\Phi_{\mathbf{k}}$ e efetuando a média, temos a seguinte expressão:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int_V \left[\int \frac{d^3 k}{8\pi^3} \int \frac{d^3 k'}{8\pi^3} (-i\mathbf{k}) \Phi_{\mathbf{k}} e^{i[\mathbf{k}-\omega(\mathbf{k})t]} f_{1\mathbf{k}'} e^{i[\mathbf{k}'-\omega(\mathbf{k}')t]} \right] d^3 r. \quad (3.21)$$

Se invertermos a ordem de integração, (3.21) pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{d^3 k}{8\pi^3} \int d^3 k' (-i(-\mathbf{k})) \left[\frac{1}{8\pi^3} \int_V e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3 r \right] \Phi_{\mathbf{k}} f_{1\mathbf{k}'} e^{-i[\omega(\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k}')t]}, \quad (3.22)$$

em que o termo isolado entre colchetes, no lim $V \rightarrow \infty$, é a definição da delta de Dirac:

$$\frac{1}{8\pi^3} \int_V e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3 r = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (3.23)$$

Usando a definição da delta de Dirac em (3.22), ficamos com

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -i \frac{1}{V} \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{d^3 k}{8\pi^3} \mathbf{k} \Phi_{-\mathbf{k}} f_{1\mathbf{k}} e^{-i[\omega(-\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k})t]}. \quad (3.24)$$

3.2.1 Coeficiente de Difusão Quase-Linear

Na aproximação quase-linear, como mencionado anteriormente, as interações não-lineares não são levadas em conta nas equações para as perturbações, mas são mantidas na equação para a evolução temporal da função de distribuição de velocidades de ordem zero [6]. Esses efeitos são observados em $f_0(\mathbf{v}, t)$ como mudanças na sua forma e essas mudanças se devem a efeitos de difusão no espaço de velocidades. A intensidade e a forma dessa difusão é dada pelo coeficiente que iremos obter nessa subseção.

Queremos expressar (3.24) em termos de f_0 , para isso vamos verificar algumas propriedades de simetria das variáveis $\Phi_{\mathbf{k}}$ e $\omega(\mathbf{k})$ no espaço de Fourier. Então, tendo em mente que Φ deve ser real em toda parte [5]:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^*(\mathbf{r}, t), \quad (3.25)$$

onde o termo com $*$ denota o complexo conjugado de $\Phi(\mathbf{r}, t)$, e podemos usar essa propriedade para analisar sua simetria.

Reescrevendo (3.25) em termos de sua transformada de Fourier, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \Phi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega(\mathbf{k},t)t} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \Phi_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega^*(\mathbf{k},t)t} \quad (3.26)$$

e, invertendo o sinal da variável de integração k e dos limites de integração do lado direito de (3.26), percebemos que o resultado dessa integral permanece inalterado:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \Phi_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega^*(\mathbf{k},t)t} &= \int_{\infty}^{-\infty} d^3(-k) \Phi_{-\mathbf{k}}^*(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega^*(-\mathbf{k},t)t} \\ \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \Phi_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega^*(\mathbf{k},t)t} &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \Phi_{-\mathbf{k}}^*(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega^*(-\mathbf{k},t)t}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Comparando a relação acima com o lado esquerdo de (3.26), podemos verificar a simetria do potencial eletrostático no espaço de Fourier:

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t) = \Phi_{-\mathbf{k}}(t). \quad (3.28)$$

A relação de dispersão é complexa e, de acordo com (3.27), tem a seguinte propriedade de simetria:

$$\omega(\mathbf{k}, t) = -\omega^*(-\mathbf{k}, t). \quad (3.29)$$

Usando o resultado de (3.29), analisamos o argumento da exponencial de (3.24),

$$\begin{aligned} \omega(-\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}) &= \omega_R(-\mathbf{k}) + i\omega_I(-\mathbf{k}) + \omega_R(\mathbf{k}) + i\omega_I(\mathbf{k}) \\ \omega(-\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}) &= 2i\omega_I(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Com o resultado de (3.30), para o argumento da exponencial e com a propriedade de simetria de Φ , obtida em (3.28), reescrevemos (3.24) da seguinte forma:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = i \frac{1}{V} \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{d^3k}{8\pi^3} \mathbf{k} \Phi_{\mathbf{k}} f_{1\mathbf{k}} e^{2\omega_I(\mathbf{k})t}. \quad (3.31)$$

Substituindo $f_{1\mathbf{k}}$ pela equação (3.16) em (3.24), obtemos uma equação que expressa como os efeitos das flutuações não lineares sobre f_0 atuam em sua evolução temporal:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{d^3k}{8\pi^3} \frac{\Phi_{\mathbf{k}}^2}{i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} - \omega)} \mathbf{k} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right), \quad (3.32)$$

lembrando que

$$\Phi_{\mathbf{k}}^2 = \Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}} e^{2\omega_I(\mathbf{k})t}. \quad (3.33)$$

Expressando os produtos escalares em (3.32) em forma de somatório e usando a relação

$$\Phi_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{k^2}, \quad (3.34)$$

obtemos uma equação diferencial de segunda ordem, conhecida como “equação de difusão quase-linear”:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[D_{ij} \frac{\partial f_0}{\partial v_j} \right], \quad (3.35)$$

onde D_{ij} é o coeficiente de difusão quase-linear, o qual tem a seguinte forma

$$D_{ij} = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{V} \frac{1}{8\pi^3} \int d^3k \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{ik^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} k_i k_j. \quad (3.36)$$

3.2.2 Amplitude Espectral

Uma questão importante, na aproximação quase-linear, é ligar as ondas geradas por efeitos não lineares à função de distribuição de velocidades. Sabemos que isso é feito através do coeficiente de difusão quase-linear, mas ainda ignoramos como a informação sobre como essas instabilidades de ordem superior são expressas em D_{ij} . É isso o que iremos verificar nessa subseção.

Tomando a média do quadrado do campo elétrico, dividida por 8π , temos:

$$\frac{\langle E_i^2 \rangle}{8\pi} = \frac{1}{8\pi V} \frac{1}{8\pi^3} \int d^3k \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \int d^3k' \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}^* \left[\int \frac{d^3r}{8\pi^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \right], \quad (3.37)$$

onde novamente temos a definição da delta de Dirac entre os colchetes, o que resulta em:

$$\frac{\langle E_i^2 \rangle}{8\pi} = \frac{1}{8\pi V} \frac{1}{8\pi^3} \int d^3k \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^* = \int d^3k \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t), \quad (3.38)$$

em que

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t) \equiv \frac{1}{8\pi V} \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)|^2}{8\pi^3} \quad (3.39)$$

é conhecida como amplitude espectral do campo elétrico.

Sabemos que $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)$ varia temporalmente, conforme as ondas vão sendo amplificadas ou absorvidas. Devemos lembrar que essa quantidade representa a intensidade espectral das flutuações que ocorrem no plasma, as quais devem satisfazer a relação de dispersão. Ou seja, essas ondas oscilam com a parte real da frequência determinada pela relação de dispersão e tem uma amplitude lentamente variável, dependendo da parte imaginária da frequência [7, 8]. Ou seja, as amplitudes dessas ondas são proporcionais a $e^{\omega_I t}$, de modo que podemos escrever

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{8\pi V} \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{8\pi^3} e^{2\omega_I(\mathbf{k})t} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}} e^{2\omega_I(\mathbf{k})t}. \quad (3.40)$$

Podemos também escrever na forma de uma equação diferencial,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} = 2\omega_I(\mathbf{k}) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t). \quad (3.41)$$

Vamos fazer mais algumas considerações a respeito do coeficiente de difusão. Substituindo (3.38) em (3.36), temos uma expressão que correlaciona a amplitude do espectro das ondas geradas por efeitos não-lineares, à difusão da função de distribuição de velocidades:

$$D_{ij} = -\frac{e^2}{m_e} \int d^3k \frac{i \mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{k^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} k_i k_j. \quad (3.42)$$

Temos no denominador um ω , que é uma quantidade complexa. Para buscar uma forma mais conveniente, vamos multiplicar a expressão pelo complexo conjugado do denominador,

$$D_{ij} = -\frac{e^2}{m_e} \int d^3k \frac{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_R + i\omega_I) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{k^2[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_R)^2 + \omega_I^2]} k_i k_j. \quad (3.43)$$

Usando as simetrias de $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ e de $\omega(\mathbf{k})$, podemos ver que a parte imaginária dessa expressão é nula. Ficamos então com

$$D_{ij} = \frac{e^2}{m_e} \int d^3k \frac{\omega_I \mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{k^2 [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_R)^2 + \omega_I^2]} k_i k_j. \quad (3.44)$$

Considerando que no contexto de validade da teoria quase-linear a parte imaginária da frequência deve ser pequena, para garantir evolução temporal lenta, podemos usar o seguinte limite matemático:

$$\lim_{\omega_I \rightarrow 0} \frac{\omega_I}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_R)^2 + \omega_I^2} = \pi \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega). \quad (3.45)$$

Dessa forma, obtemos um conjunto completo de equações auto-consistentes da aproximação quase-linear:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[D_{ij} \frac{\partial f_0}{\partial v_j} \right], \quad (3.46)$$

onde

$$D_{ij} = \frac{e^2}{m_e} \int d^3k \frac{k_i k_j}{k^2} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \pi \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) \quad (3.47)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} = 2\omega_I(\mathbf{k}) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t). \quad (3.48)$$

Cabe lembrar que a parte imaginária da frequência das ondas, ω_I , que aparece na equação para a evolução do espectro das ondas, é obtida através da solução da relação de dispersão, que, como vimos, depende da distribuição f_0 .

Capítulo 4

Interação Feixe-Plasma Na Aproximação Quase-Linear

A incidência de um feixe de elétrons energéticos em um plasma térmico pode dar início a processos turbulentos que envolvem a geração e amplificação de ondas eletrostáticas de alta frequência através de efeitos lineares e não lineares relacionados à interação onda-partícula. A interação das partículas do feixe incidente com as ondas presentes no plasma ocorre via ressonância, levando a alterações na função de distribuição de velocidades dos elétrons e no espectro das ondas, um processo conhecido como “instabilidade *bump-in-tail*”. Esse nome está relacionado à existência de um segundo pico na distribuição de velocidades, na região do feixe de partículas, criando uma região onde a derivada da função de distribuição é positiva, condição propícia ao aparecimento de instabilidades.

Efeitos não lineares relacionados à interação onda-partícula e a interações onda-onda podem levar à geração da chamada “turbulência de Langmuir”, e também à emissão de ondas eletromagnéticas, através de processos conhecidos como decaimento e espalhamento de ondas. Quando a instabilidade é pequena e o crescimento das ondas turbulentas é lento, emprega-se, como uma primeira aproximação, a teoria quase-linear para descrever como as ondas turbulentas, geradas e amplificadas pela interação onda-partícula, afetam a distribuição de velocidades de equilíbrio do plasma. A transferência de energia entre partículas e ondas continua até que o sistema atinja um estado estacionário [6, 8].

Essas interações são observadas na natureza, por exemplo associadas a fenômenos de emissão de radiação solar dos tipos II e III, além de ser uma ocorrência comum em plasmas de laboratório, como foi demonstrado experimentalmente em [11].

Nesse capítulo iremos apresentar a interação feixe-plasma como aplicação da teoria quase-linear, sem a incidência de campos externos, para ondas de Langmuir e em duas dimensões. A escolha da abordagem bi-dimensional se justifica pela consideração de que em duas dimensões é possível estudar aspectos impossíveis de investigar em uma abordagem unidimensional, enquanto ao mesmo tempo se pode evitar a grande demanda computacional e a complexidade que estariam associadas a um tratamento tri-dimensional. Ondas de Langmuir são ondas eletrostáticas de alta frequência e, nessa escala de frequência, os íons podem ser considerados como um “*background*” estático neutralizador. Na primeira seção revisaremos o caso modelado em coordenadas perpendicular e paralela à propagação do feixe, realizado anteriormente pelos integrantes do Grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS, onde serão evidenciadas as equações quase-lineares bem como

alguns resultados obtidos, via integração numérica, para a evolução temporal do sistema. Haverá, também, uma breve discussão a respeito de uma tentativa de incorporação do efeito de colisões na dinâmica de evolução do sistema feixe-plasma, com uma descrição sumária das instabilidade numéricas que apareceram em uma tentativa de introdução de um termo de colisões no código numérico. Esta discussão servirá de motivação para a abordagem apresentada na seção seguinte, em que abordaremos a interação feixe-plasma, na aproximação quase-linear, em coordenadas polares. Inicialmente, serão expostos os métodos utilizados para a mudança de coordenadas dessas equações, para, então, apresentarmos as expressões em coordenadas polares, bem como os resultados da integração numérica obtidos até o momento, com uso dessa abordagem.

A função inicial de distribuição para os elétrons foi definida como sendo Maxwelliana, adicionada de uma Maxwelliana deslocada representando o feixe, com velocidade média v_f . A distribuição “de fundo” tem uma pequena velocidade média negativa, v_0 , de modo que a velocidade média total é nula. A expressão, em termos de velocidades normalizadas à velocidade térmica dos elétrons, $v_e = \sqrt{2T_e/m_e}$, é a seguinte:

$$\begin{aligned} \Phi_e = & \left(1 - \frac{n_f}{n_e}\right) \frac{1}{\pi} \exp\left(u_{\perp}^2 - (u_{\parallel} - u_0)^2\right) \\ & + \frac{n_f}{n_e} \frac{1}{\pi} \exp\left(-\left(u_{\perp}^2 + (u_{\parallel} - u_f)^2\right)\right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Conforme é habitual na área de Física de Plasmas, as temperaturas estão escritas em unidades de energia, representando o valor da constante de Boltzmann multiplicada pela temperatura real.

A relação de dispersão para ondas de Langmuir é dada pela seguinte expressão

$$\omega_{\mathbf{k}}^L = \omega_{pe} \left(1 + 3k^2 \lambda_{De}^2\right)^{1/2}, \quad (4.2)$$

onde $\lambda_{De} = v_e/(\sqrt{2}\omega_{pe})$ é o comprimento de Debye.

Essa expressão corresponde, com outra notação, à equação (2.51), e obedece à relação de simetria dada por $\omega_{-\mathbf{k}}^L = -\omega_{\mathbf{k}}^L$. A forma adimensional da relação de dispersão, para ondas de Langmuir, é a seguinte:

$$z_{\mathbf{q}}^L = \left(1 + \frac{3}{2}q^2\right)^{1/2},$$

onde $z_{\mathbf{q}}^L \equiv \omega/\omega_{pe}$ e $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}v_e/\omega_{pe}$.

4.1 Abordagem Bi-Dimensional em Coordenadas Cartesianas

Definindo a direção do feixe como paralela ao eixo z , o vetor velocidade \mathbf{u} e o vetor de onda \mathbf{q} , ambos normalizados, são expressos em coordenadas cartesianas da seguinte forma

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{e}_x + q_z \mathbf{e}_z. \quad (4.4)$$

A equação quase-linear descreve como a função de distribuição Φ_e evolui temporalmente, sob a influência das ondas geradas pelos efeitos da interação onda-partícula, através de uma equação de difusão no espaço de velocidades, como pode ser visto a seguir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} = & \frac{\partial}{\partial u_x} (A_x^e \Phi_e) + \frac{\partial}{\partial u_z} (A_z^e \Phi_e) \\ & + \frac{\partial}{\partial u_x} \left(D_{xx}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{xz}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial u_z} \left(D_{zx}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{zz}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde τ é o tempo normalizado, $\tau = t\omega_{pe}$.

Na equação acima, as quantidades A_x^e e A_z^e são, respectivamente, as componentes perpendicular e paralela de um coeficiente associado a processos espontâneos. Esse coeficiente não aparecia na formulação quase-linear convencional, conforme apresentamos anteriormente, tendo sido adicionado ao formalismo em trabalho relativamente recente, com o objetivo de levar em conta os efeitos relacionados a processos de flutuações espontâneas sobre a evolução temporal da função de distribuição [13]. A expressão desses coeficientes é a seguinte:

$$A_i^e = g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_i}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z), \quad (4.6)$$

onde g é o *parâmetro de plasma* normalizado.

Os termos contendo os D_{ij} correspondem àqueles que aparecem na equação (3.46), em duas dimensões. Os coeficientes D_{xx} , D_{xz} , D_{zx} e D_{zz} são as componentes do coeficiente de difusão quase-linear e, como mencionado no capítulo anterior, relacionam diretamente a evolução temporal de Φ_e , com as ondas geradas por efeitos não-lineares. Em duas dimensões, temos:

$$D_{ij}^e = \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_i q_j}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z), \quad (4.7)$$

onde podemos observar $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}$, a amplitude do espectro de ondas, cuja evolução temporal é dada pela seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} = & \frac{\pi n_e}{q^2 n_*} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\ & \times \left[\frac{1}{2} \frac{n_e}{n_*} g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} \right] \\ & + \frac{\pi n_e}{q^2 n_*} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\ & \times \left[\frac{1}{2} \frac{n_e}{n_*} g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Essa equação corresponde a uma forma mais geral do que a equação (3.48), uma vez que também incorpora termos relacionados a processos espontâneos [13], que são os termos contendo a quantidade g .

A função δ que aparece nas expressões para a evolução da distribuição e do espectro nada mais é que a condição de ressonância entre ondas e partículas, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega = 0$, em duas dimensões e indicando explicitamente o sentido de propagação das ondas, através do parâmetro σ , que pode ser $\sigma = 1$ ou $\sigma = -1$.

4.1.1 Método e Resultados em Coordenadas Cartesianas

As equações apresentadas, tanto aquela para a função distribuição quanto aquela para o espectro das ondas, foram aproximadas por equações de diferenças finitas e um código numérico utilizando linguagem de programação FORTRAN foi desenvolvido. Para a integração da equação de difusão foi usado o método “*splitting*” e para a equação da onda foi empregado o método Runge-Kutta de quarta ordem (mais detalhes sobre o código podem ser encontrados no apêndice A desse trabalho). O código se mostrou eficiente e com uma boa estabilidade numérica, tendo sido utilizado para a obtenção de resultados apresentados em diversos artigos que aparecem na literatura especializada, dos quais podemos citar alguns exemplos [14, 15, 16, 17]. Apenas como complemento, podemos citar que no âmbito do grupo foram também feitos estudos usando uma abordagem unidimensional, como a Ref. [18].

Para o presente trabalho, escolhemos uma situação com temperatura do feixe igual à temperatura do plasma de fundo, $T_f = T_e$, com $T_e = 7.0T_i$ e parâmetro de plasma $g = 5.0 \times 10^{-3}$. Supusemos um feixe tênue, com $n_f/n_e = 1.0 \times 10^{-3}$ e $u_f = 5.0$. Adotamos uma grade de 101×51 pontos no espaço de velocidades (u_x, u_z) , e uma grade com 51×51 pontos no espaço de números de onda normalizados (q_x, q_z) . Fizemos a evolução temporal adotando um passo temporal $\Delta\tau = 0.1$. Os resultados obtidos nessa abordagem estão apresentados na figura^{2 3} 1.

Na primeira linha de gráficos da figura 1, temos resultados para tempo de integração $\tau = 0$, ou seja, são os estágios iniciais da função de distribuição Φ_e (à esquerda) e da amplitude do espectro (à direita). Podemos perceber em Φ_e o “*bump*” gerado na função de distribuição pela presença de um feixe com velocidade $u_f = 5$. Esse novo pico, causado pelo feixe, dá origem à região de derivada positiva, entre a função de distribuição dos elétrons do plasma e a distribuição dos elétrons do feixe, favorecendo o aparecimento de instabilidades. Na amplitude espectral ainda não há crescimento de ondas.

Na segunda linha podemos ver os resultados para $\tau = 100$. Neste tempo de integração, a função de distribuição apresenta um leve achatamento em ambos os picos. Na amplitude de espectro, vemos que já ocorre um pequeno crescimento de ondas.

Na terceira linha, com tempo de integração $\tau = 500$, os efeitos da difusão no espaço de velocidades já são bem evidentes. A região onde antes havia uma declividade positiva, agora começa a apresentar a formação de um “plateau”, indicando que está ocorrendo a transferência de energia das partículas do feixe para as ondas do plasma, aumentando as oscilações que, por sua vez, promovem os efeitos de difusão no espaço de velocidades. O aumento nas oscilações pode ser observado no aumento considerável da amplitude espectral, no gráfico à direita.

Na última linha, o tempo de integração é $\tau = 1000$ e podemos perceber que praticamente não há mais a região de derivada positiva na distribuição total. Outro aspecto interessante é que a difusão no intervalo entre $\tau = 500$ e $\tau = 1000$ é bem menor do que o observado no intervalo entre $\tau = 100$ e $\tau = 500$, um reflexo disso é a estagnação da formação do pico na amplitude espectral, como pode ser visto em seu respectivo gráfico. Uma descrição clara sobre como ocorre essa redução na difusão e na geração de ondas, pode ser encontrada em [6].

Todos os estágios da evolução temporal obtidos numericamente, no modelo em coor-

²As figuras encontram-se no apêndice B.

³Os gráficos para a função de distribuição e para a amplitude espectral, em ambas as abordagens, foram plotados em escala logarítmica, para que uma melhor visualização da difusão de Φ_e e no crescimento do pico em \mathcal{E}_q^L , fosse possível.

denadas cartesianas, estão de acordo com o esperado para a aplicação da teoria quase-linear à interação feixe-plasma, como pode ser verificado em [4, 6, 8]. Termos não lineares de ordem mais alta, como os associados aos processos conhecidos como “decaimento de três ondas” e “espalhamento”, já foram incorporados ao código e foram levados em conta em estudos anteriores, embora tenham ficado fora do escopo do presente trabalho. Foi feita também uma tentativa de inclusão de efeitos colisionais no código numérico, com o objetivo de estudar a evolução do sistema a longo prazo. No entanto, a adição de termos colisionais ao programa, feita anteriormente ao início deste trabalho, deu origem ao desenvolvimento de instabilidades numéricas, o que motivou a busca por uma nova abordagem que pudesse reduzir a possibilidade de ocorrência dessas instabilidades. Possivelmente, as instabilidades numéricas verificadas estão associadas a determinadas características do termo colisional, as quais não se ajustam bem a uma descrição em coordenadas cartesianas. Ocorre que, em uma formulação relativamente simples, o termo colisional contém uma parte associada a uma derivada em uma coordenada que é o módulo da velocidade das partículas e outra parte associada a uma derivada na coordenada que representa um deslocamento angular na direção azimutal:

$$\left(\frac{\partial\Phi_e}{\partial\tau}\right)_{col} = \frac{2}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial\Phi_e}{\partial u} + \Phi_e \right) + \frac{Z^2 + 1}{u^3 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi_e}{\partial\theta} \right). \quad (4.9)$$

Nessa expressão u é a velocidade normalizada, θ é o ângulo entre a direção da velocidade e o eixo z e Z é um número que indica a carga dos íons ($q_i = Ze$). O vetor velocidade foi normalizado utilizando a velocidade de Alfvén e o tempo τ foi normalizado com o inverso da frequência de ciclotron. Detalhes da derivação dessa expressão estão fora do escopo do presente e podem ser encontrados na literatura [19, 20]. A expressão adequada a ser usada nesse trabalho deve ser normalizada através da velocidade térmica e da frequência de plasma dos elétrons, como o restante das equações aqui apresentadas.

O primeiro termo que aparece na equação (4.9), com a derivada em u , é considerado um termo “de arrasto”, enquanto o segundo termo (com a derivada em θ) é considerado um termo “de espalhamento”. Quando expressos em termos de coordenadas cartesianas, em duas dimensões, ambos os termos contém derivadas tanto na coordenada u_x quanto na coordenada u_z , derivadas essas que são abordadas separadamente no método de *splitting*. Foi proposta então a tentativa de implementação de um código escrito em termos de coordenadas que pudessem expressar melhor as características do termo colisional, ou seja, em termos de coordenadas polares. Essa foi, então, a motivação para o presente trabalho.

4.2 Abordagem Bi-Dimensional em Coordenadas Polares

Com a motivação exposta na seção anterior, foi dado início ao processo de transformação de coordenadas das equações quase-lineares. Sendo assim, definimos a direção de propagação do feixe como sendo na direção z . Com isso, os vetores velocidade e de onda normalizados, foram escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z = u \sin\theta \mathbf{e}_x + u \cos\theta \mathbf{e}_z \quad (4.10)$$

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{e}_x + q_z \mathbf{e}_z = q \sin\vartheta \mathbf{e}_x + q \cos\vartheta \mathbf{e}_z. \quad (4.11)$$

As relações entre as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas são as seguintes

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_z^2}, \quad q = \sqrt{q_x^2 + q_z^2} \quad (4.12)$$

onde

$$u_x = u \sin \theta, \quad q_x = q \sin \vartheta \quad (4.13)$$

e

$$u_z = u \cos \theta, \quad q_z = q \cos \vartheta. \quad (4.14)$$

Para as derivadas da equação de difusão, no espaço de velocidades, usamos a regra da cadeia para relacionar as derivadas em coordenadas perpendicular e paralela e as novas derivadas em coordenadas polares. Para isso precisávamos relacionar o ângulo θ com u_x e u_z , o que foi feito usando

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u_x}{u_z}, \quad (4.15)$$

e, com isso, pudemos escrever:

$$\frac{\partial}{\partial u_x} = \frac{\partial u}{\partial u_x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u_x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_z} = \frac{\partial u}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (4.17)$$

Não foi necessário efetuar a regra da cadeia para o vetor de onda, uma vez que não temos derivadas no espaço \mathbf{q} .

Aplicando essas transformações no sistema de equações apresentado na seção anterior, obtivemos para a equação de difusão a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} &= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} (u A_u^e \Phi_e) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta^e \Phi_e) \\ &+ \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u D_{uu}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u D_{u\theta}^e \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta\theta}^e \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta u}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Tanto os coeficientes, quanto o espectro de amplitude, possuem integrais. Os primeiros tem integrais no espaço de velocidades e o segundo no espaço de vetor de onda, sendo assim, precisamos efetuar a mudança de coordenadas dos elementos de integração dessas equações. Para isso, montamos uma matriz Jacobiana, para ambos os vetores, e calculamos o módulo do determinante dessas matrizes, como segue:

$$|J| = \left| \frac{\partial u_x}{\partial u} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial u} \right|, \quad (4.19)$$

resultando em $|-u| = u$. Para o vetor de onda, a operação foi a mesma, em seu respectivo espaço, levando a $|J| = q$.

Para a mudança de coordenadas dos coeficientes da equação de difusão, aproveitamos a simetria completa do espaço de vetor de onda em torno da origem, transformando uma integral que seria no intervalo de 0 a 2π , em uma integral equivalente, apenas no primeiro quadrante. Esse

procedimento tem como o objetivo de reduzir o tamanho dos vetores no código de integração numérica, diminuindo significativamente o tempo de integração. O mesmo método foi empregado para a equação da amplitude espectral, onde, devido ao pico gerado pelo feixe incidente, pudemos aproveitar somente a simetria em torno da componente u_z do espaço de velocidades, reduzindo a integração aos dois primeiros quadrantes.

Os coeficientes de emissão espontânea, A_u^e , A_θ^e , na forma polar e já com as condições de simetria impostas, ficaram com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_u^e &= 2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta \cos(\theta - \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta - \vartheta)) \\ &\quad + 2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta \cos(\theta + \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta + \vartheta)), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} A_\theta^e &= -2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin(\theta - \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta - \vartheta)) \\ &\quad - 2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin(\theta + \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta + \vartheta)). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Os coeficientes de emissão induzida, D_{uu}^e , $D_{u\theta}^e$, $D_{\theta\theta}^e$ e $D_{\theta u}^e$, também com a simetria já aplicada, seguem logo abaixo, em sua forma polar:

$$\begin{aligned} D_{uu}^e &= 2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta q \cos^2(\theta - \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta - \vartheta)) \\ &\quad + 2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta q \cos^2(\theta + \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta + \vartheta)), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} D_{\theta\theta}^e &= 2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta q \sin^2(\theta - \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta - \vartheta)) \\ &\quad + 2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta q \sin^2(\theta + \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta + \vartheta)), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} D_{u\theta}^e &= -2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta q \cos(\theta - \vartheta) \sin(\theta - \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta - \vartheta)) \\ &\quad - 2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta q \cos(\theta + \vartheta) \sin(\theta + \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta + \vartheta)), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} D_{\theta u}^e &= -2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta q \sin(\theta - \vartheta) \cos(\theta - \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta - \vartheta)) \\ &\quad - 2g \int_0^\infty dq \int_0^{\pi/2} d\vartheta q \sin(\theta + \vartheta) \cos(\theta + \vartheta) \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta + \vartheta)). \end{aligned} \quad (4.25)$$

A equação para a evolução temporal da amplitude do espectro em coordenadas polares, já levando em conta as condições de simetria do espaço de velocidades que, como mencionado

anteriormente, é em torno do eixo z , foi escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= g \frac{\pi}{q^2} \int_0^\infty du \int_0^\pi d\theta u \Phi_e \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta - \vartheta)) \\
 &+ \frac{\pi}{q} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \int_0^\infty du \int_0^\pi d\theta u \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta - \vartheta)) \\
 &\quad \times \left(\cos(\theta - \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{1}{u} \sin(\theta - \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \\
 &+ \frac{\pi}{q^2} \int_0^\infty du \int_0^\pi d\theta u \Phi_e \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta + \vartheta)) \\
 &+ \frac{\pi}{q} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \int_0^\infty du \int_0^\pi d\theta u \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - uq \cos(\theta + \vartheta)) \\
 &\quad \times \left(\cos(\theta + \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{1}{u} \sin(\theta + \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right).
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Podemos ver que a forma geral das expressões permanece a mesma. Entretanto, cabe notar que o já elegante sistema de equações quase-lineares, tem sua beleza ressaltada quando escrito em sua forma polar.

4.2.1 Método e Resultados em Coordenadas Polares

O procedimento de discretização adotado para as coordenadas cartesianas foi também feito para as equações em coordenadas polares e um novo código FORTRAN foi desenvolvido para essa abordagem. Como aplicação, consideramos uma situação com os mesmos parâmetros físicos daquela situação descrita na seção anterior. Adotamos uma grade de 101x101 pontos no espaço de velocidades (u, θ) , e uma grade com 51x51 pontos no espaço de números de onda normalizados (q, ϑ) . Fizemos a evolução temporal adotando um passo temporal $\Delta\tau = 0.1$, da mesma forma que no caso do uso de coordenadas cartesianas.

Os resultados iniciais da implementação do código em coordenadas polares não foram muito bons, com uma persistente instabilidade numérica prejudicando a análise dos resultados para tempos de integração maiores que $\tau = 500$. Contudo, após várias tentativas de aperfeiçoamento do código, conseguimos solucionar esse problema e obter resultados considerando tempos maiores de integração.

Na figura 2 podemos ver que evolução do sistema está de acordo com os resultados obtidos pela simulação em coordenadas cartesianas, o que indica que o código desenvolvido a partir das equações quase-lineares em coordenadas polares superou as instabilidades anteriormente mencionadas. Cabe ressaltar que, embora estejamos integrando as equações em coordenadas polares, os dados gerados foram projetados para coordenadas cartesianas, com a finalidade de facilitar a análise e a compreensão da evolução temporal do sistema.

Capítulo 5

Considerações Finais

A interação feixe-plasma em uma dimensão, com o uso da teoria quase-linear, é um tema amplamente abordado na literatura específica da Física de plasmas. Entretanto, nessa aproximação uni-dimensional, diversos aspectos observados, tanto em plasmas na natureza, quanto em plasmas de laboratório, não podem ser descritos. Essa desvantagem da aproximação em uma dimensão, motivou os integrantes do Grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS a desenvolver um modelo teórico-computacional, em duas dimensões, para a interação feixe-plasma.

Neste trabalho, apresentamos uma descrição da abordagem bi-dimensional do sistema de equações quase-lineares aplicado à interação feixe-plasma, feita em coordenadas cartesianas. Resultados obtidos com integração numérica desse modelo, levando em conta apenas as equações quase-lineares, foram apresentados e discutidos no capítulo 4. Também mencionamos a ocorrência de instabilidade numérica durante a tentativa de adicionar o termo de colisões entre as partículas ao programa de integração. Essa menção teve como objetivo motivar a busca por uma abordagem alternativa, em que as equações fossem escritas e integradas numericamente, utilizando o mesmo sistema de coordenadas do termo colisional, ou seja, coordenadas polares.

O objetivo deste trabalho, foi apresentar a interação feixe-plasma como aplicação da teoria quase-linear em coordenadas polares, demonstrar o método utilizado para mudança de coordenadas das equações na forma cartesiana, para coordenadas polares e discutir os resultados obtidos numericamente com essa nova abordagem, comparando-os com os resultados da integração em coordenadas perpendicular e paralela.

Com a intenção de darmos um embasamento teórico para o estudo que seria apresentado mais adiante, este trabalho foi iniciado com uma revisão detalhada da teoria cinética de plasmas, na qual foram deduzidas as expressões da aproximação linear do sistema de equações Vlasov-Maxwell, onde relatamos a influência da relação de dispersão para a ocorrência, ou não, de instabilidades, destacando o caso onde não ocorrem instabilidades, apenas amortecimento. Para isso, usamos como exemplo um plasma Maxwelliano, e levamos em conta ondas de Langmuir, dessa forma, obtivemos a expressão para o amortecimento de Landau.

Em seguida, deduzimos as equações da teoria quase-linear e destacamos as diferenças entre este formalismo, e a aproximação linear do sistema Vlasov-Maxwell, obtida no capítulo anterior. Para finalizar esse resumo teórico, consideramos a condição de lenta evolução temporal da aproximação quase-linear como um limite matemático, que nos permitiu expressar matematicamente as condições de ressonância que irão contribuir para a evolução temporal do sistema,

através de uma função δ . Dessa forma, obtivemos um sistema auto-consistente de equações quase-lineares.

Com a base teórica feita, passamos para o estudo da interação feixe-plasma, onde os principais aspectos desse fenômeno foram explicados, enfatizando a influência dos efeitos não-lineares sobre a evolução temporal da função de distribuição do plasma.

A seguir foram escritas todas as equações da abordagem em coordenadas cartesianas e alguns resultados da integração numérica desse modelo foram reproduzidos. Esses resultados foram descritos em detalhes, onde concluiu-se que eles estavam de acordo com a teoria. Em seguida foi mencionada a ocorrência de instabilidade numérica durante a tentativa de inclusão do termo de colisões ao programa, bem como a necessidade de buscarmos uma alternativa que envolva a mesma simetria do termo colisional, isto é, coordenadas polares.

Na última parte do trabalho, apresentamos a nova abordagem da interação feixe-plasma, em que as equações foram completamente expressas em termos de coordenadas polares. Descrevemos os métodos utilizados para a mudança de coordenadas e para a implementação da integração numérica das equações. Os resultados obtidos por integração numérica em coordenadas polares foram comparados com resultados equivalentes obtidos em coordenadas cartesianas, de onde pudemos concluir que eles também estão de acordo com o previsto teoricamente para a aplicação da teoria quase linear à interação feixe plasma. Sendo assim, podemos afirmar que o programa escrito na nova abordagem está pronto para a inclusão do termo colisional.

O desenvolvimento mais imediato que visualizamos para esse trabalho é a inclusão do termo de colisões ao código numérico. A adaptação do código já está em andamento e acreditamos que em futuro bem próximo teremos resultados a apresentar, permitindo investigar o efeito de colisões na evolução temporal de longo prazo da instabilidade feixe-plasma, na aproximação quase-linear. Uma vez vencida essa etapa, versões mais sofisticadas e completas do código deverão ser também desenvolvidas usando coordenadas polares, incluindo termos não lineares associados a processos de decaimento de ondas e de espalhamento onda-partícula. Esses processos influenciam a evolução de longo prazo do sistema e podem ser investigados com uma abordagem que vai além da aproximação quase-linear, conhecida como *teoria de turbulência fraca*. A perspectiva então é a inclusão de efeitos colisionais no contexto da teoria de turbulência fraca, para análise de situações físicas de interesse, como é o caso da situação envolvendo plasmas e feixes de partículas.

Apêndice A

Métodos Numéricos

Este apêndice tem como objetivo apresentar alguns detalhes a respeito dos métodos numéricos utilizados nesse trabalho, principalmente o método utilizado para integração da equação de difusão bi-dimensional, o chamado método “*splitting*”.

Iniciamos fazendo uma breve menção ao método Runge-Kutta de quarta ordem, utilizado para efetuar a integração da equação da amplitude espectral. Por ser um método de integração numérica bem conhecido, ele é aqui apenas delineado em seus aspectos fundamentais.

A seguir apresentamos o algoritmo utilizado para a integração da equação de difusão quase-linear, que é uma equação diferencial parcial, com a variável tempo e duas variáveis no espaço de velocidades. Mostramos o processo de transformação da equação para diferenças finitas e explicamos brevemente os termos que aparecem na equação resultante e o método de solução utilizado.

A.1 Método Runge-Kutta de quarta ordem

A equação para a evolução temporal da amplitude espectral é uma equação diferencial de primeira ordem, podendo ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} = \mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{E}. \quad (1)$$

Examinando a equação da onda, tanto em coordenadas cartesianas (4.8) quanto em coordenadas polares (4.26), fica fácil identificar os termos que correspondem a \mathcal{A} e a \mathcal{B} , em cada uma delas.

Para a integração dessa equação, que é uma equação diferencial ordinária, foi utilizado o método Runge-Kutta de quarta ordem, que envolve médias ponderadas da função que está sendo integrada, calculadas nos extremos e em pontos intermediários de cada intervalo de integração temporal. O método é bastante conhecido e facilmente encontrado em livros que abordam métodos numéricos [10].

A.2 Método *splitting* para equações diferenciais parciais

Um dos objetivos deste trabalho é obter a solução numérica da evolução temporal da função de distribuição de velocidades de um plasma interagindo com um feixe de elétrons. Para isso, é necessário desenvolver um código que faça a integração de uma equação de difusão em duas dimensões, seja em coordenadas cartesianas (4.5), seja em coordenadas polares (4.18). A

integração numérica deste tipo de equação não é trivial, uma vez que se trata de uma equação diferencial parcial, e requer um algoritmo mais sofisticado do que o utilizado para a integração da amplitude espectral. Neste trabalho utilizamos o chamado “método *splitting*”.

No método *splitting*, integramos as coordenadas espaciais separadamente. Para isso, no caso de coordenadas cartesianas, definimos um operador para a coordenada u_x e um operador para a coordenada u_z , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} = & \underbrace{\frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_e + \left(A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{xx} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial u_x^2} + \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial u_x \partial u_z}}_{\mathcal{L}_x} \\ & + \underbrace{\frac{\partial A_z}{\partial u_z} \Phi_e + \left(A_z + \frac{\partial D_{zz}}{\partial u_z} \right) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} + D_{zz} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial u_z^2} + \frac{\partial D_{zx}}{\partial u_z} \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{zx} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial u_z \partial u_x}}_{\mathcal{L}_z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Podemos ver que as derivadas relativas a u_x estão contidas no operador \mathcal{L}_x , e as derivadas relativas a u_z estão contidas no operador \mathcal{L}_z e que ambos os operadores possuem termos mistos.

Iniciamos transformando a equação diferencial em uma equação de diferenças finitas, calculando em um número finito de pontos no espaço de velocidades, a intervalos finitos de tempo. Vamos assumir o índice i para a coordenada u_x , com $1 \leq i \leq n_i$, e k para a coordenada u_z , com $1 \leq k \leq n_k$. Para o tempo normalizado τ , usaremos o índice n e intervalo de tempo $\Delta\tau$.

Para discretizar as equações, vamos utilizar o método de “Crank-Nicholson”, que pode ser visto com mais detalhes em [10]. De acordo com este método, cada operador diferencial no espaço de velocidades é tratado como parcialmente implícito e como parcialmente explícito. Para ambos os casos, os termos mistos são tratados com explícitos.

Em cada intervalo de tempo aplicamos os operadores \mathcal{L}_x e \mathcal{L}_z sobre Φ^n , gerando as funções Φ_x e Φ_z . Em seguida, escrevemos $\Phi^{n+1} = \Phi_x + \Phi_z - \Phi^n$, note que essa subtração é necessária para que não fiquemos com o dobro do resultado da integração. Por fim, aplicamos as condições de contorno a Φ^{n+1} .

Nesse apêndice vamos demonstrar as equações de diferenças finitas e os coeficientes de integração apenas para a coordenada u_x do espaço de velocidades, tendo em vista que o procedimento é o mesmo para a coordenada u_z . O método é apresentado aqui aplicado à equação em coordenadas cartesianas, mas pode ser facilmente adaptado para a equação de difusão em coordenadas polares.

Aplicando do operador \mathcal{L}_x :

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial \tau} = \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi^e + \left(A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right) \frac{\partial \Phi^e}{\partial u_x} + D_{xx} \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial u_x^2} + \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^e}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial u_x \partial u_z}. \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial \tau} - \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi^e - \left(A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right) \frac{\partial \Phi^e}{\partial u_x} - D_{xx} \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial u_x^2} = \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^e}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial u_x \partial u_z}. \quad (4)$$

Tomamos o operador como parcialmente explícito e parcialmente implícito, para cada $1 \leq k \leq n_k$ e $2 \leq i \leq n_i - 1$, efetuando derivadas centrais em u_x e derivada à direita em τ ,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\Phi_{i,k}^{n+1} - \Phi_{i,k}^n}{\Delta\tau} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^{n+1} - \frac{1}{2} \left(A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \left(\frac{\Phi_{i+1,k}^{n+1} - \Phi_{i-1,k}^{n+1}}{2\Delta u_x} \right) \\
& - \frac{1}{2} D_{xx} \left(\frac{\Phi_{i+1,k}^{n+1} - 2\Phi_{i,k}^{n+1} + \Phi_{i-1,k}^{n+1}}{(\Delta u_x)^2} \right) \\
& = \frac{1}{2} \left(A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \left(\frac{\Phi_{i+1,k}^n - \Phi_{i-1,k}^n}{2\Delta u_x} \right) + \frac{1}{2} D_{xx} \left(\frac{\Phi_{i+1,k}^n - 2\Phi_{i,k}^n + \Phi_{i-1,k}^n}{(\Delta u_x)^2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^n + \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^n}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u_x \partial u_z} .
\end{aligned} \tag{5}$$

Multiplicando a expressão acima por $\Delta\tau$,

$$\begin{aligned}
& \left(\Phi_{i,k}^{n+1} - \Phi_{i,k}^n \right) - \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^{n+1} \frac{\Delta\tau}{2} - \left(A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} \left(\Phi_{i+1,k}^{n+1} - \Phi_{i-1,k}^{n+1} \right) \\
& - D_{xx} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u_x)^2} \left(\Phi_{i+1,k}^{n+1} - 2\Phi_{i,k}^{n+1} + \Phi_{i-1,k}^{n+1} \right) \\
& = \left(A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} \left(\Phi_{i+1,k}^n - \Phi_{i-1,k}^n \right) + D_{xx} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u_x)^2} \left(\Phi_{i+1,k}^n - 2\Phi_{i,k}^n + \Phi_{i-1,k}^n \right) \\
& + \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^n \frac{\Delta\tau}{2} + \left[\frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^n}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u_x \partial u_z} \right] (\Delta\tau) ,
\end{aligned} \tag{6}$$

podemos definir os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left(A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} - D_{xx} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u_x)^2} , \\
\beta_1 &= 1 - \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \frac{\Delta\tau}{2} + 2D_{xx} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u_x)^2} , \\
\gamma_1 &= - \left(A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} - D_{xx} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u_x)^2} , \\
\psi_1 &= \Phi_{i,k}^n + \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^n \frac{\Delta\tau}{2} + \left(\frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^n}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u_x \partial u_z} \right)_{i,k} (\Delta\tau) \\
& + \left(A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} \left(\Phi_{i+1,k}^n - \Phi_{i-1,k}^n \right) \\
& + D_{xx} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u_x)^2} \left(\Phi_{i+1,k}^n - 2\Phi_{i,k}^n + \Phi_{i-1,k}^n \right) .
\end{aligned} \tag{7}$$

De onde obtemos:

$$\alpha_1 \Phi_{i-1,k}^{n+1} + \beta_1 \Phi_{i,k}^{n+1} + \gamma_1 \Phi_{i+1,k}^{n+1} = \psi_1 , \tag{8}$$

para $2 \leq i \leq n_i - 1$ e $1 \leq k \leq n_k$.

Os coeficientes α_1 , β_1 e γ_1 , como pode ser visto na equação acima, se referem à parte implícita do operador \mathcal{L}_x e fazem parte de uma matriz tridiagonal, composta pelos termos das

derivadas de $\Phi_{i,k}^{n+1}$ em u_x , onde $\Phi_{i-1,k}^{n+1}$ é a diagonal logo abaixo da diagonal principal, $\Phi_{i,k}^{n+1}$ é a diagonal principal e $\Phi_{i+1,k}^{n+1}$ é a diagonal logo acima da diagonal principal. O coeficiente Ψ_1 , se refere à parte explícita do operador \mathcal{L}_x . Esses coeficientes são utilizados em uma subrotina de integração que aplica o algoritmo de Thomas para solucionar a matriz tridiagonal resultante do processo de discretização das equações, e retornar um vetor com o resultado da integração na coordenada u_x . Por fim, são aplicadas as condições de contorno. No caso deste trabalho, consideramos que $\Phi_{i,k}^n$ tem derivada nula nas bordas.

Apêndice B

Figuras

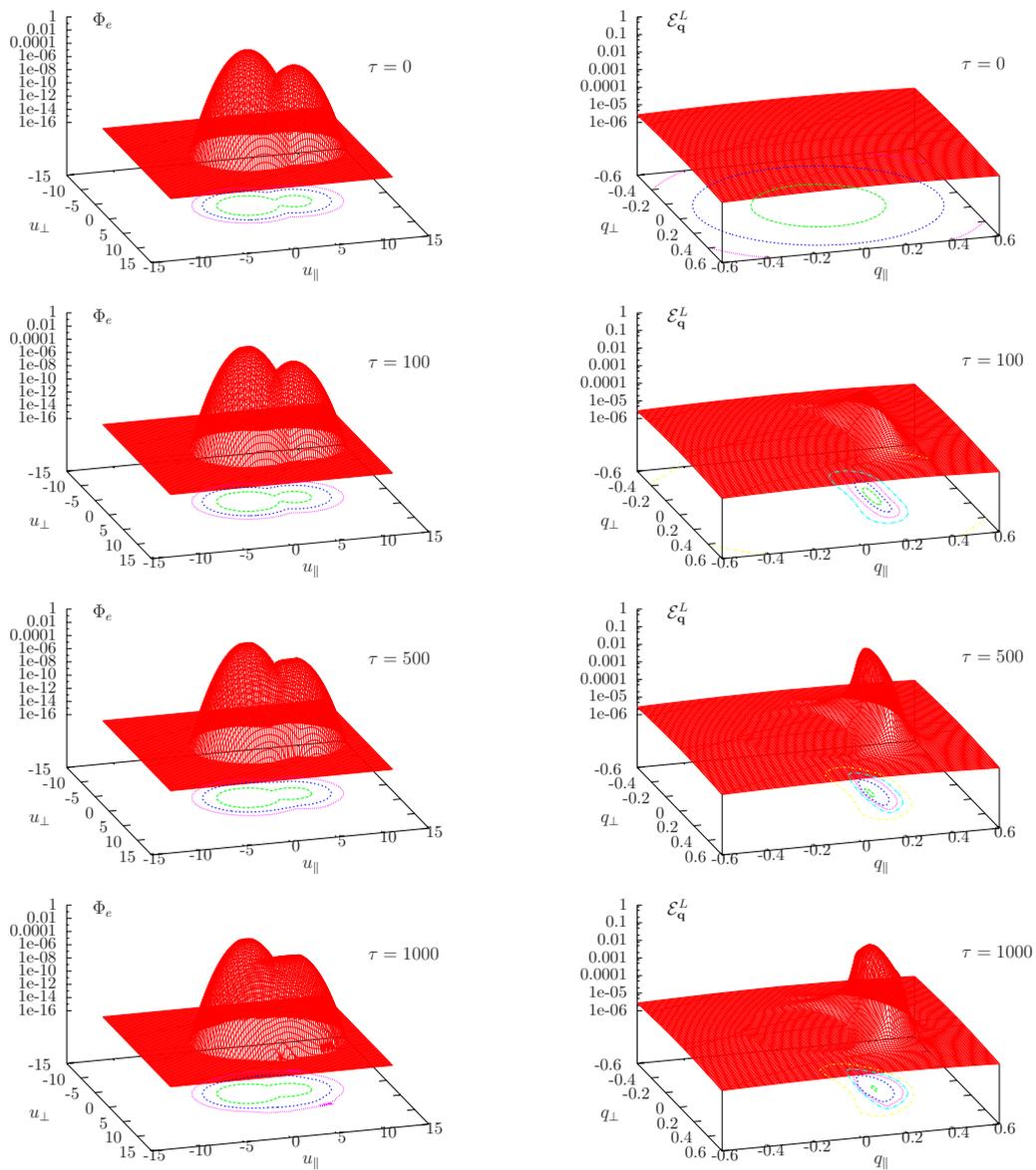


Figura 1: Evolução temporal da função de distribuição de velocidades e da amplitude espectral. Resultados obtidos usando o código que faz uso de coordenadas cartesianas nos espaços de velocidade e número de onda.

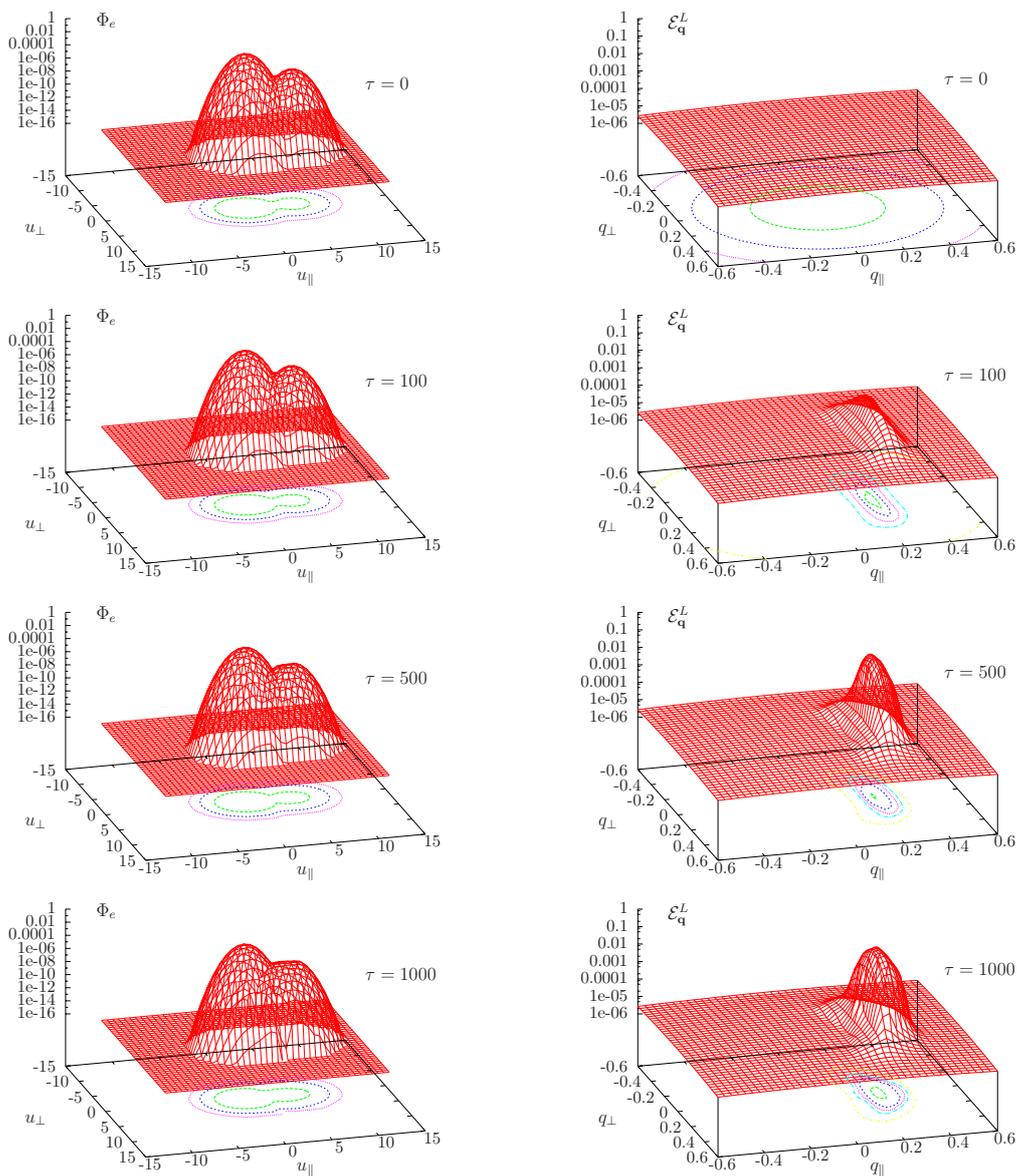


Figura 2: Evolução temporal da função de distribuição de velocidades e da amplitude espectral. Resultados obtidos usando o código que faz uso de coordenadas polares nos espaços de velocidade e número de onda.

Referências Bibliográficas

- [1] P. M. Bellan *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press 2006.
- [2] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics*. INPE-FAPESP, São José dos Campos, 1995, 2nd. ed.
- [3] F. F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Plenum, New York, 1984, 2nd. ed.
- [4] A. I. Akhiezer & R. V. Polovin & K. N. Stepanov. *Plasma Electrodynamics Volume 2*. Pergamon Press Ltd, 1975.
- [5] D. A. Gurnett & A. Bhattacharjee. *Introduction to Plasma Physics*. Cambridge University Press, 2005.
- [6] V. N. Tsytovich. *Non Linear Effects in Plasmas*. Plenum Press, New York, 1970.
- [7] V. N. Tsytovich. *Theory of Turbulent Plasma*. Consultants Bureau, New York, 1977.
- [8] D. B. Melrose. *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [9] YU. L. Klimontovich. *The Statistical Theory Of Non-Equilibrium Processes In A Plasma*. Pergamon Press Ltd, 1967.
- [10] C. Scherer. *Métodos Computacionais da Física - Versão Scilab*. Livraria da Física, 2010, 2a. ed.
- [11] D. M. Karfidov, A. M. Rubenchik, K. F. Sergeichev, I. A. Sychev, Strong Langmuir turbulence excited by an electron beam in plasma. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki (ISSN 0044-4510)* vol. 98, Nov. 1990, p. 1592-1604. In Russian.
Physics Of Plasmas, 12:042306, 2005.
- [12] Peter H. Yoon. Generalized weak turbulence theory. *Phys. Plasmas*, 7(12):4858–4871, Dec. 2000.
- [13] Peter H. Yoon. Effects of spontaneous fluctuations on the generalized weak turbulence theory.
- [14] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, R. P. Lin, and L. Wang. Langmuir turbulence and suprathermal electrons. *Space Science Reviews*, 173(1-4):459–489, Nov. 2012.
- [15] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and P. H. Yoon. Dynamics of Langmuir wave decay in two-dimensions. *Phys. Plasmas*, 15(1):032303, 11p., Mar. 2008.

- [16] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, J. Pavan, and P. H. Yoon. Two-dimensional nonlinear dynamics of beam-plasma instability. *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 50(8):085011, 15p., 2008.
- [17] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and J. Pavan. Electromagnetic weak turbulence theory revisited. *Phys. Plasmas*, 19(10):102303, 9pp, Oct. 2012.
- [18] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and Peter H. Yoon. Nonlinear development of weak beam-plasma instability. *Phys. Plasmas*, 8(9):3982–3995, Sept. 2001.
- [19] J. D. Gaffey Jr., Energetic ion distribution resulting from neutral beam injection in tokamaks. *J. Plasma Phys.*, 16(2):149-169, 1976.
- [20] Lucio M. Tozawa. Difusão estocástica de íons energéticos em tokamaks sob a ação de ondas do tipo híbrida inferior. MSc Diss., UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Física, 31 mar. 1998.