

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO FORMATO GEOMÉTRICO EM EXTRATORES DE  
CALOR CONDUTIVOS APLICADOS EM CORPOS BIDIMENSIONAIS QUADRADOS  
COM GERAÇÃO DE CALOR UNIFORME EM REGIME PERMANENTE

por

Weiller Zanette

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, novembro de 2013.

ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO FORMATO GEOMÉTRICO EM EXTRATORES DE  
CALOR CONDUTIVOS APLICADOS EM CORPOS BIDIMENSIONAIS QUADRADOS  
COM GERAÇÃO DE CALOR UNIFORME EM REGIME PERMANENTE

por

Weiller Zanette

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Thamy Cristina Hayashi  
Coordenadora do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Energia e Fenômenos de Transporte**

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha

Comissão de Avaliação:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Thamy Cristina Hayashi

Prof. Dr. Jorge Rodolfo Silva Zabadal

Prof. Dr. Sérgio Viçosa Möller

Porto Alegre, novembro de 2013.

ZANETTE, W. **Estudo da influência do formato geométrico em extratores de calor condutivos aplicados em corpos bidimensionais quadrados com geração de calor uniforme em regime permanente**. 2013. 20 páginas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

## RESUMO

Um processador quadrado hipotético é modelado matematicamente como um problema de valor de contorno, onde há geração de calor em todo o domínio e condições de fronteira de *Neumann* e de *Dirichlet*. O processador opera em regime permanente e sua remoção de calor é realizada com a ajuda de extratores de calor de formato geométrico semelhante às letras “I”, “T”, “U”, e “Ψ”, as quais são feitas de material condutor e se encontram envoltas no material isolante usado no encapsulamento do mesmo. A análise consiste em variar o formato destes extratores com a finalidade de se comparar a capacidade deles em evitar a formação de pontos quentes e/ou o superaquecimento do processador. O estudo da influência de alguns parâmetros geométricos também é proposto com a finalidade de tornar a análise mais genérica. A metodologia empregada foi a simulação computacional feita em Fortran 90 pelo método dos volumes finitos. Os resultados encontrados se mostraram coerentes com a física do problema.

**PALAVRAS-CHAVE:** equação da difusão do calor, método dos volumes finitos, extratores de calor condutivos.

ZANETTE, W. **Study of Geometrical shape influence in conductive heat extractors applied on bidimensional square bodies with uniform heat generation in steady state regime.** 2013. 20 páginas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

## **ABSTRACT**

A hypothetic square processor is mathematically modeled like a boundary value problem where there is heat generation on whole domain and *Neumann* and *Dirichlet* boundary conditions. The processor works in steady state regime and its heat extract is done helped by some heat extractors that were shaped like the letters “I”, “T”, “U”, e “Ψ” which were made by conductive material and are situated enveloped in the isolated material used on the encapsulation of that one. The analysis consists of changing these heat extractors in order to compare their performance in avoiding hot spot formation and/or superheating the processor. An influence study involving some geometrical parameters is also done in order to become the analysis as generic as it could be. The methodology employed was a computational simulation made by Fortran 90 through the finite volume method. Results obtained were showed to be coherent with the problem physics.

**KEYWORDS:** heat diffusion equation, finite volume method, conductive heat extractors.

## ÍNDICE

	Pág.
1	INTRODUÇÃO ..... 1
2	OBJETIVOS ..... 1
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA ..... 1
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA ..... 3
5	METODOLOGIA ..... 5
5.1	Apresentação do problema ..... 5
5.2	Modelo matemático ..... 6
5.3	Considerações sobre erros e independência de malha ..... 7
6	VALIDAÇÃO DO MODELO ..... 9
7	RESULTADOS E DISCUSSÃO ..... 9
7.1	Análise do campo de temperaturas ..... 9
7.2	Considerações sobre a influência de fatores geométricos ..... 12
8	CONCLUSÕES ..... 14
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 15
	APÊNDICE 1 - Resultado da independência de malha para as todas as geometrias ..... 16
	APÊNDICE 2 - Código em Fortran 90 para a geometria I ..... 16

## 1. INTRODUÇÃO

A evolução da capacidade de processamento dos computadores somada à redução de dimensões dos mesmos fez maximizar o problema com o esfriamento de processadores. Com isso, também, surgiu a necessidade do estudo de maneiras alternativas ao método clássico de remoção de calor destes elementos, o qual se baseia, basicamente, no uso de ventiladores instalados sobre os mesmos.

O presente trabalho é uma forma hipotética de vislumbrar uma alternativa para o resfriamento de processadores, que consiste, em um primeiro momento, na remoção de calor produzido nestes, por condução, via extratores de calor geométricos feitos de material condutivo e, num segundo momento, pela dissipação deste calor extraído para o meio externo através de algum tipo de trocador de calor posicionado na lateral daqueles. Contudo, porém, focou-se o estudo apenas nas geometrias dos extratores, de forma a buscar a geometria que melhor desempenhe a tarefa de remover o calor produzido sem que se formem pontos quentes e/ou se supraqueça o processador, evitando, assim, perda de desempenho e/ou danos ao mesmo.

## 2. OBJETIVOS

O objetivo deste estudo é avaliar o desempenho de quatro tipos de geometrias de extratores de calor com relação à formação de pontos quentes e/ou supraaquecimento do processador hipotético. Esta avaliação é feita através da análise das dispersões de temperaturas e de indicadores adimensionais adequados. As geometrias também são usadas em um estudo da influência de fatores geométricos com a finalidade de se elucidar e quantificar a participação destes no desempenho das mesmas.

## 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No que tange problemas de extração de calor envolvendo extratores de calor geométricos os autores tem se atido, sobretudo, no estudo da otimização de geometrias específicas. No trabalho estudado por Almogbel e Bejan, 1999, por exemplo, foi feito um estudo de otimização geométrica de extrator de calor de formato I (Figura 3.1 a). Para isso, foram variadas as dimensões  $B_0$  e  $D_0$  do extrator sem alterar a área do mesmo ( $A_0$ ) e mantendo constante a razão entre as áreas do extrator e do corpo ( $\varphi_0$ ). Isto foi feito, otimizando-se as dimensões para cada razão de condutividades dada por

$$\tilde{k} = \frac{k_p}{k_0} \quad (3.1)$$

sendo  $k_p$  é a condutividade do material condutivo e  $k_0$  a do material isolante. O critério adotado para a otimização foi a condição em que se observa a menor temperatura adimensional de pico

$$\tilde{T}_m = \frac{T_{peak} - T(L_0, 0)}{q''' A_0 / k_0} \quad (3.2)$$

onde  $T_{peak}$  é a temperatura de pico ou máxima,  $T(L_0, 0)$  é a temperatura do contorno onde é promovido a extração de calor e  $q'''$  é taxa a geração volumétrica de calor.

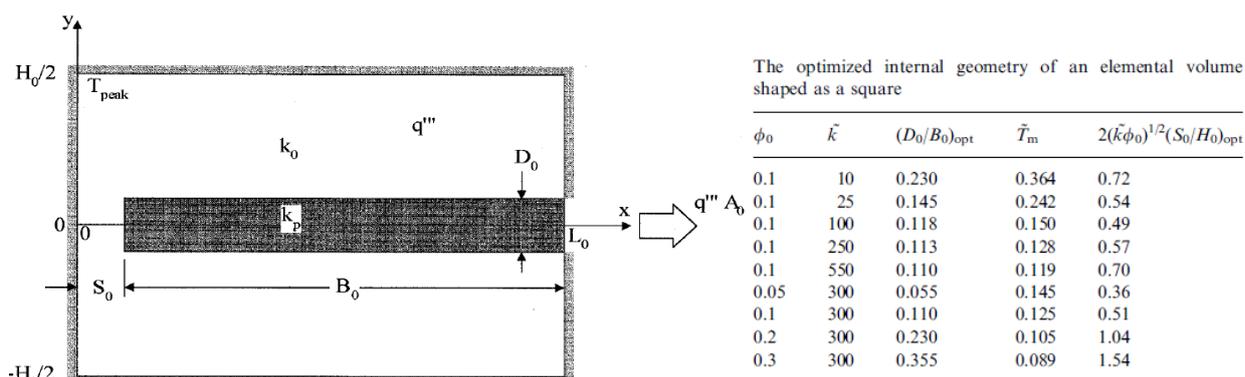


Figura 3.1 - Extrator tipo I; (a) parâmetros do problema e (b) Tabela de resultados da otimização de corpos quadrados [Almogbel e Bejan, 1999]

Uma das conclusões deste artigo, baseado na otimização de corpos quadrados (figura 3.1 b), mostrou que quanto maior é a razão de condutividades  $\tilde{k}$ , menor é a razão  $D_0/B_0$  na condição ótima e menor, também na condição ótima, é a temperatura adimensional de pico  $\tilde{T}_m$ .

No artigo publicado por Lorenzini et al, 2012, foi feita a otimização da geometria de formato X (Figura 3.2 a) variando-se a razão  $L_1/L_0$  e mantendo-se fixas a área da geometria X, as razões entre a área da geometria interna e área do corpo quadrado ( $\phi$ ) e entre coeficientes de condutividades  $\tilde{k}$  (dado, de forma análoga, a equação 3.1).

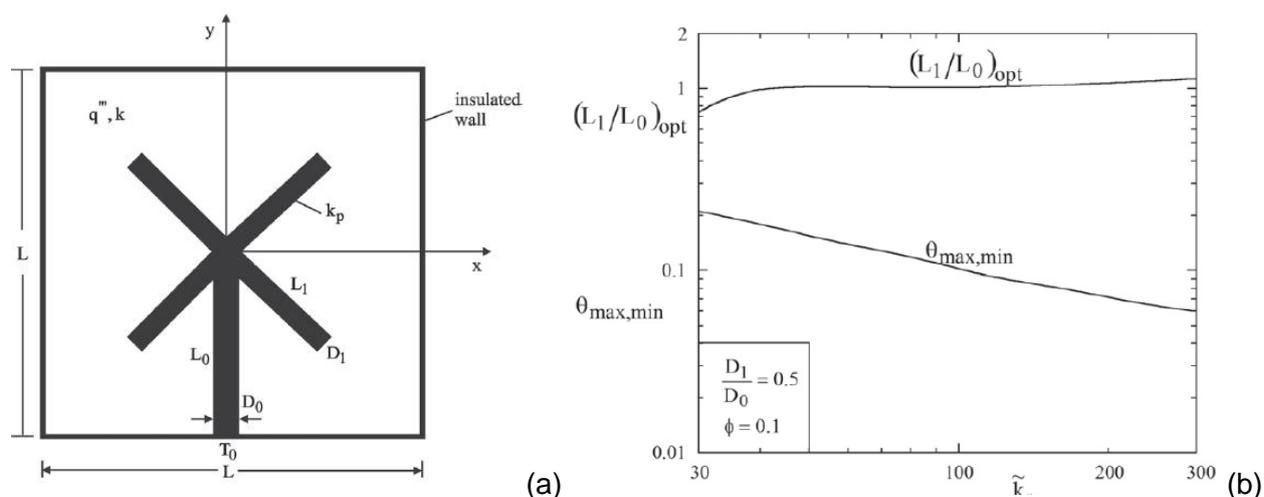


Figura 3.2 - Extrator com geometria interna X; (a) dimensões e condições de contorno e (b) Um dos resultados da otimização [Lorenzini et al, 2012]

Em um dos resultados (Figura 3.2 b), pode-se notar que a temperatura adimensional  $\theta_{max,min}$  (adimensionalizada analogamente a equação 3.2), na condição ótima de  $L_1/L_0$ , decresce a medida que se aumenta a razão de condutividades  $\tilde{k}$ ; o que corrobora, neste ponto, com os resultados obtidos por Almogbel e Bejan, 1999.

#### 4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A condução de calor se dá, segundo Incropera et ali, 2005, devido ao transporte de energia promovido por uma diferença de temperaturas onde o mecanismo físico é a atividade atômico-molecular aleatória.

O modelo matemático que representa este fenômeno é denominado de equação da difusão do calor ou equação da difusão térmica, esta equação fornece a ferramenta básica de análise dos problemas envolvendo condução de calor. Na sua forma completa, em coordenadas cartesianas, ela é representada pela equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica,  $\dot{q}$  a taxa de geração de calor volumétrica,  $c_p$  calor específico e  $T(x,y,z)$  é a função temperatura que descreve a dispersão de temperaturas no meio estudado. Como no presente trabalho se tem um problema bidimensional e em regime permanente, pode-se simplificar a equação 4.1, eliminando-se termos transientes e dependentes de  $z$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right) + \dot{q} = 0 \quad (4.2)$$

Para a resolução da equação do calor em regime permanente há a necessidade de se fixarem condições de contorno, que podem ser de primeira, segunda ou terceira espécies. A condição de contorno de primeira espécie, ou de *Dirichlet*, é caracterizada por ser uma temperatura prescrita no contorno. Já a de segunda espécie, ou de *Neumann*, caracteriza-se por ser uma condição de fluxo prescrito e no caso específico de ser nula, ela é chamada de condição de isolamento ou adiabática. Por fim, a condição de terceira espécie é caracterizada por ser uma condição de convecção que é determinada pelo balaço de energia na superfície; o uso dela requer informação tanto da temperatura externa ( $T_\infty$ ) quanto do coeficiente convectivo ( $h$ ) do meio externo.

Quando a equação do calor em regime permanente é aplicada em um volume infinitesimal se chega às equações fenomenológicas da lei de *Fourier*, dadas por

$$q_x = -k \, dy \, dz \, \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.3)$$

$$q_y = -k \, dx \, dz \, \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.4)$$

$$q_z = -k \, dx \, dy \, \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.5)$$

onde  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$  são, respectivamente, taxa de transferência de calor nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  do volume infinitesimal. Essas equações são, em resumo, o fundamento do método dos volumes finitos, que, por sua vez, consiste em um método numérico de malha estruturada para a resolução de problemas tanto advectivos quanto difusivos. É importante frisar que a malha bidimensional de volumes finitos tem espessura unitária (dimensão  $z$  unitária), porém não existe taxa de calor neste sentido pois  $\frac{\partial T}{\partial z}$  é nulo.

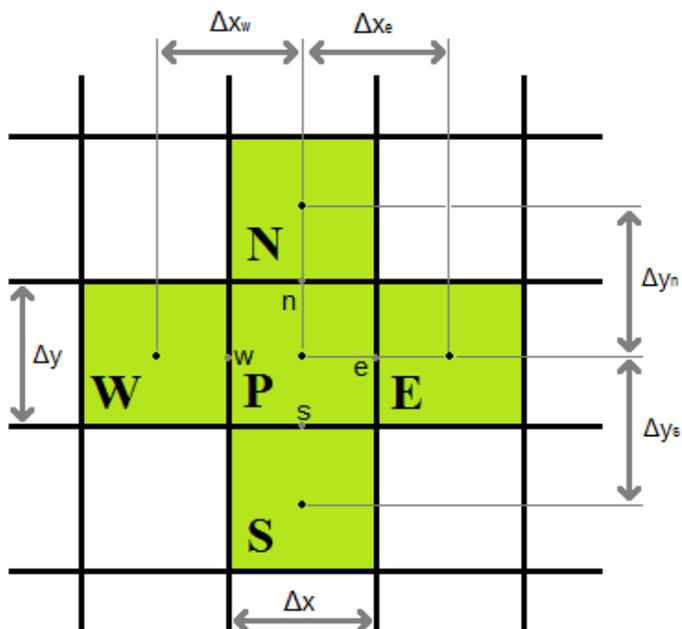


Figura 4.1.1 – Volume elementar 2D do método dos volumes finitos

Para um problema difusivo bidimensional, segundo Maliska, 2004, o método é definido como o balanço energético no volume elementar  $P$  com os seus vizinhos  $W$ ,  $E$ ,  $N$  e  $S$ , o que resulta na equação

$$A_p T_P = A_e T_E + A_w T_W + A_n T_N + A_s T_S + B_P \quad (4.6)$$

onde  $T_P$ ,  $T_E$ ,  $T_W$ ,  $T_N$  e  $T_S$  são, respectivamente, as temperaturas nos pontos  $P$ ,  $W$ ,  $E$ ,  $N$  e  $S$ . Já  $B_P$ ,  $A_p$ ,  $A_e$ ,  $A_w$ ,  $A_n$  e  $A_s$  são coeficientes, que para regime permanente e malha igualmente espaçada, são dados pelas equações

$$A_e = A_w = k_i \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (4.7)$$

$$A_n = A_s = k_i \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (4.8)$$

$$A_p = A_e + A_w + A_n + A_s - S_p \Delta x \Delta y \quad (4.9)$$

$$B_P = S_c \Delta x \Delta y \quad (4.10)$$

onde  $k_i$  é a condutividade térmica relativa ao material do volume elementar,  $S_c$  é a parte constante do termo fonte e  $S_p$  é o termo devido a linearização do termo fonte que, de uma forma resumida, para problemas difusivos, é diferente de zero apenas em volumes elementares de fronteira que possuam condição de contorno de terceira espécie.

Não obstante a isso, quando se tem dois ou mais matérias de condutividades térmicas diferentes, é necessário usar de algum artifício para garantir que o balanço de energia seja respeitado nos volumes que fazem a ligação entre os materiais distintos, uma forma de se fazer isso é atribuir o mesmo coeficiente  $A_i$  dos volumes elementares da região de interface de contato.

## 5. METODOLOGIA

A metodologia adotada para a resolução do problema foi a simulação computacional via método dos volumes finitos, a qual foi implementada com a programação de um código em Fortran 90 (apêndice 2).

### 5.1. Apresentação do problema

O problema proposto consiste, basicamente, de um modelo matemático para um processador hipotético quadrado de lado  $L$ , que possui uma taxa de geração de calor volumétrica uniforme,  $q'''$ , e que foi encapsulado com um material isolante de condutividade térmica  $k$ . A extração de calor deste processador se dá, num primeiro momento, pela interface de dimensão  $L_0$  que é mantida, por hipótese, a uma temperatura  $T_0$ . O calor gerado em todo o domínio é conduzido até a interface de extração com o auxílio de um extrator de calor geométrico de área  $A_0$  feito de material condutor (cobre puro) de condutividade  $k_p$ .

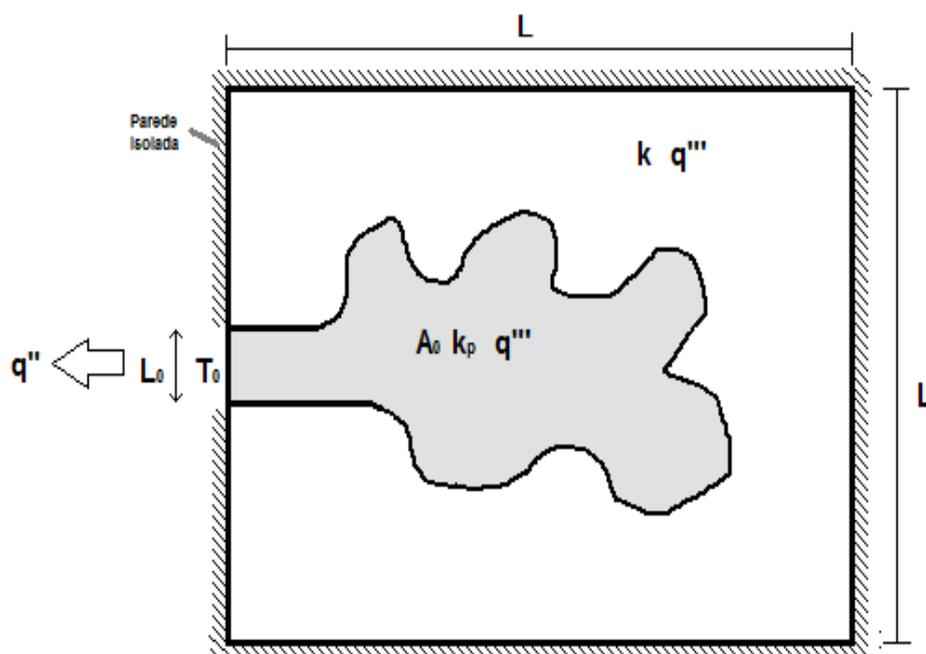


Figura 5.1 – Condições de contorno e parâmetros do problema

Como o estudo propõe uma análise da influência da geometria dos extratores, foram escolhidas quatro tipos de geometrias (figura 5.2), as quais receberam os nomes I, T, U e  $\Psi$ , devido a semelhanças com estas letras. A escolha da geometria "I" foi feita devido a sua simplicidade e por ter sido a primeira, historicamente, a ser estudada em problemas desta natureza, já as outras geometrias foram escolhidas intuitivamente depois de alguns testes feitos com o algoritmo já pronto.

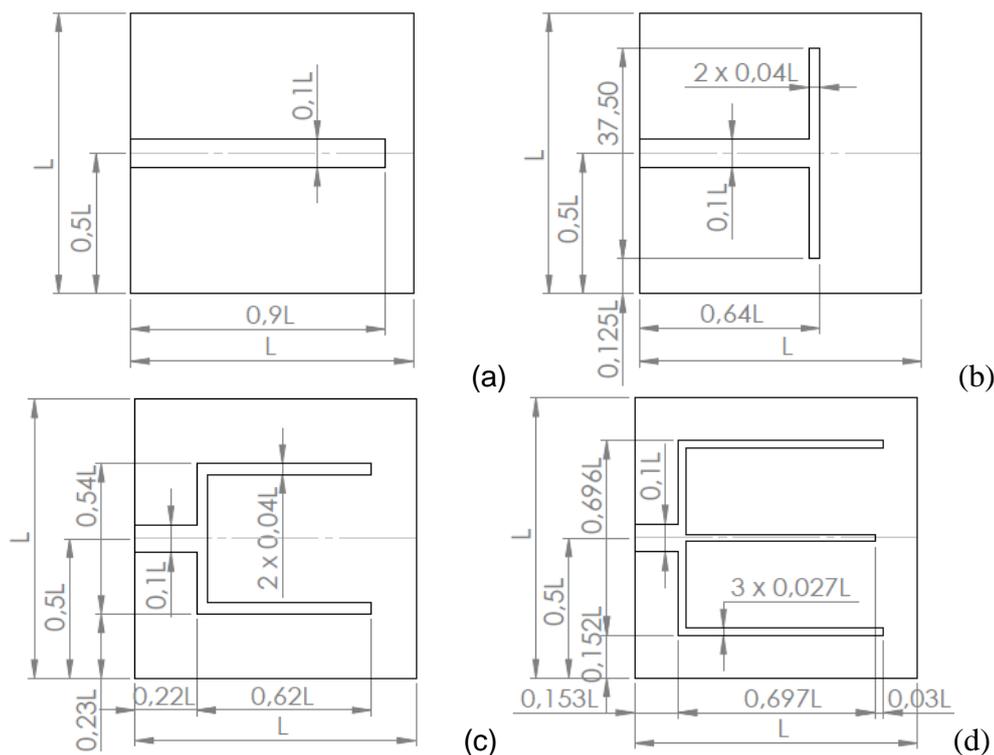


Figura 5.2 – Formato e dimensões das geometrias escolhidas; tipos (a) I, (b) T, (c) U e (d)  $\Psi$ .

Estas geometrias foram desenvolvidas de forma a manter a mesma dimensão  $L_0$  da interface de extração de calor e a mesma área da geometria condutora  $A_0$ . Os valores atribuídos aos parâmetros do problema, citados anteriormente, encontram-se dispostos na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Valores atribuídos para o cálculo

Parâmetro	Valor
L	50 mm
$L_0$	5 mm
k	1 W/mK
$k_p$	401 W/mK
$q'''$	40 kW/m <sup>3</sup>
$T_0$	40°C

## 5.2. Modelo matemático

O modelo matemático é definido como sendo a resolução de um problema de valor de contorno (PVC) elíptico, na qual todo o contorno é adiabático com exceção da interface de extração ( $L_0$ ) que, como já dito anteriormente, recebe condição de temperatura prescrita  $T_0$ . Para a devida resolução foram feitas algumas simplificações no modelo, dentre elas podem ser citadas:

- Regime permanente;
- Resistência de contato desprezível;
- Problema bidimensional;
- Exploração da simetria do problema com a introdução de uma condição de simetria (adiabática).

Para a resolução do PVC, optou-se pelo método dos volumes finitos com malha estruturada, igualmente espaçada e em coordenadas cartesianas. A resolução foi feita por via do método iterativo de *Gauss-Seidel* calculado ponto a ponto.

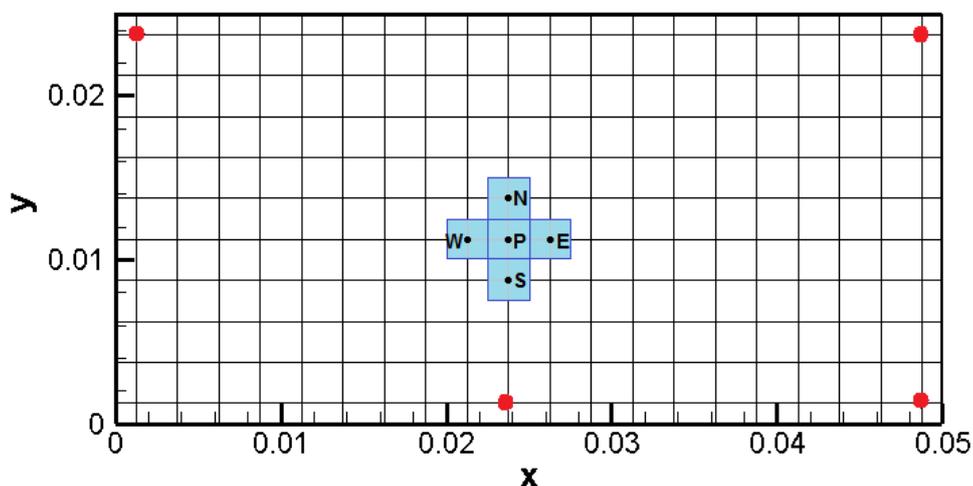


Figura 5.3 – Exemplo da malha de volumes finitos; em azul os volumes finitos envolvidos no cálculo ponto a ponto e em vermelho os pontos de controle para o critério de convergência.

O critério de convergência adotado foi de  $10^{-8}$  que é considerado forte. Este critério foi utilizado na comparação, a cada iteração, das temperaturas dos pontos de controle (figura 5.3) obtidas na atual iteração com relação às da iteração passada; o critério só é satisfeito quando todos os quatro pontos atingem um erro relativo menor que o valor do critério de convergência.

### 5.3. Considerações sobre erros e independência de malha

Erros são definidos como a medida do quanto uma solução aproximada se distancia da real. Em simulações computacionais, existem dois tipos de erros que somados resultam no erro total; o erro de truncamento e o erro de arredondamento.

O primeiro dos erros, o de truncamento, tem sua origem na aproximação da solução por equações algébricas de problemas, originariamente, representados por equações diferenciais. Segundo Maliska, 2004, este tipo de erro tende a desaparecer com o refino de malha, ou seja, o erro de truncamento diminui com o aumento do número de volumes finitos utilizados.

Já o segundo tipo de erro, o de arredondamento, segundo Bortoli et alii, 2003, é causado pela precisão finita do computador usado. Em soluções iterativas, este tipo de erro tende a se propagar e acumular, originando o chamado erro de arredondamento global. Em outras palavras, pode-se dizer que o erro de arredondamento cresce com o refino de malha, ou seja, com o aumento do número de volumes finitos usados na solução. Com a finalidade de entender melhor o comportamento deste tipo de erro, foi feita uma comparação entre a solução analítica de um problema unidirecional com geração de calor e a solução via volumes finitos do mesmo problema; o resultado deste teste corroborou com a teoria e pode ser visto na figura 5.4.

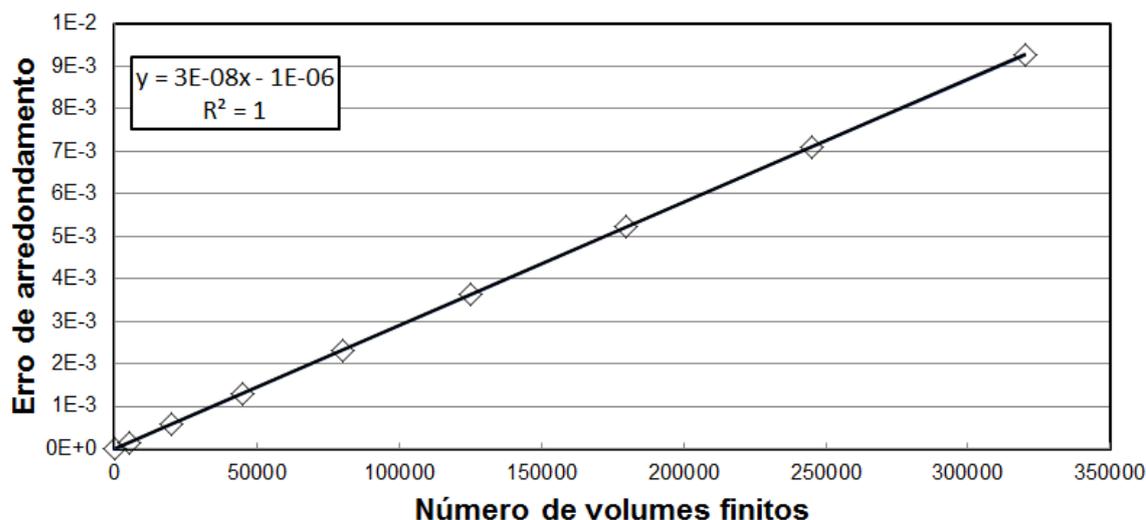


Figura 5.4 – Determinação do comportamento do erro de arredondamento global com o refino de malha

Como o erro de truncamento diminui e o de arredondamento aumenta com o refino de malha, existe uma faixa de tamanho de malha onde o erro total é mínimo. Por esta razão, esta faixa apresenta pouca variação do parâmetro medido com o refino da malha, o que caracteriza, assim, a independência de malha. Não obstante a isso, vale lembrar que à medida que se continua refinando a malha, mais relevante se torna o erro de arredondamento na solução obtida, como pode ser visto na figura 5.5 com a divergência do parâmetro de controle ( $\Delta T_{\max}$ ) para malhas maiores que 80.000 volumes finitos.

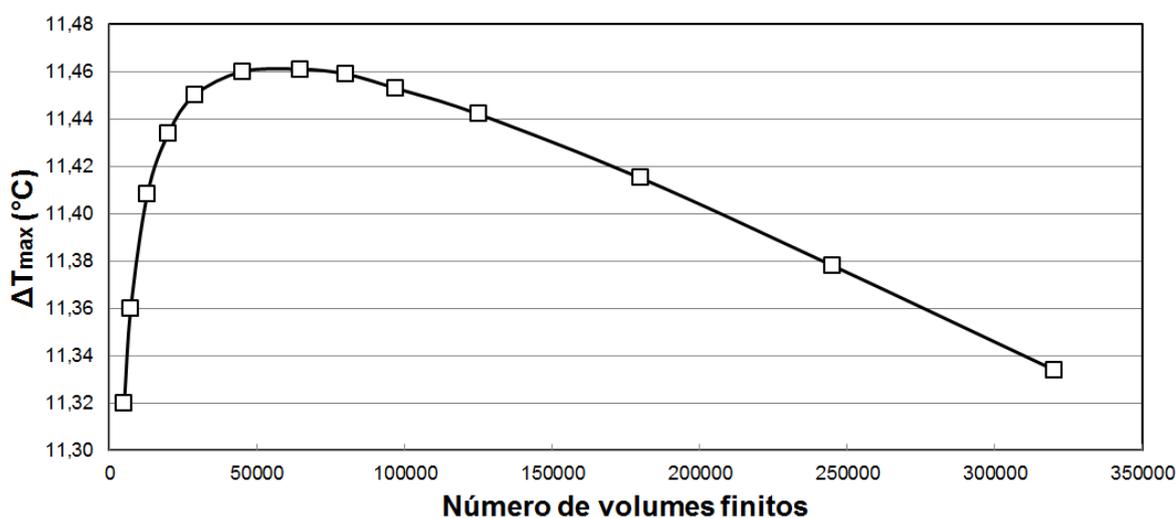


Figura 5.5 – Análise de independência de malha feita no extrator de calor de geometria I

Com base nesta análise de erros e de independência de malha, fixou-se a malha no tamanho de 400 X 200 volumes finitos, resultando, assim, em uma malha de 80.000 unidades finitas a qual foi usada nas quatro geometrias. É importante destacar, também, que a escolha pela malha mais fina dentre as três malhas que compõem a região de independência de malha se deu pelo fato de as demais geometrias serem mais esbeltas que a geometria "I". A análise de independência de malha contemplando todas as geometrias se encontra no apêndice 1.

## 6. VALIDAÇÃO DO MODELO

A validação do modelo se deu por via da comparação do resultado obtido com uma segunda metodologia de resolução. Para isso, procedeu-se com a resolução do problema de geometria I na ferramenta PDE-tool (*Partial Differential Equation*) do MATLAB, que usa o método dos elementos finitos na sua resolução.

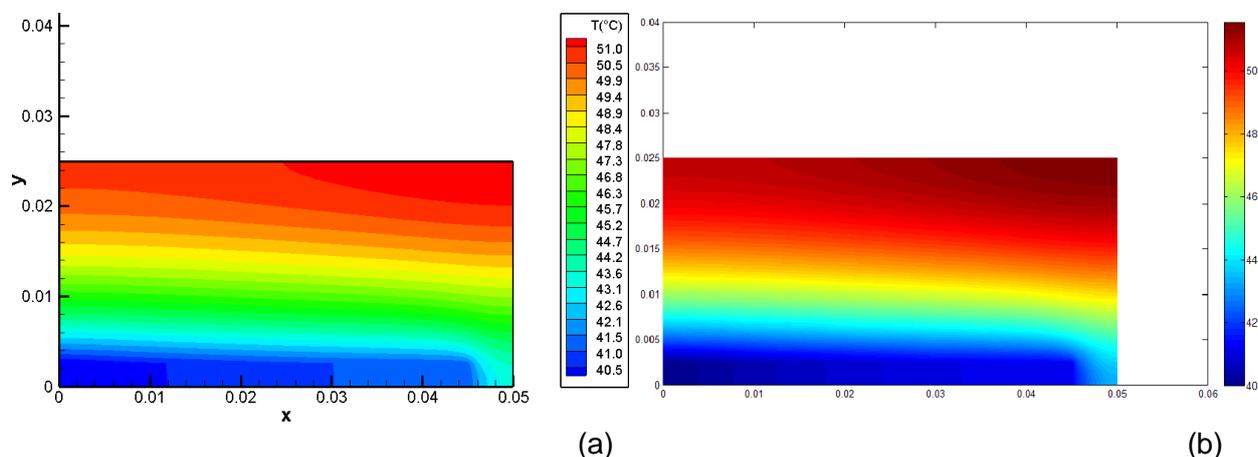


Figura 6.1 – Comparação entre o código feito em Fortran 90 (a) e o mesmo problema feito na ferramenta PDE-tool do MATLAB (b)

Da análise da figura 6.1, os campos de temperaturas mostraram ser bem semelhantes. A diferença máxima de temperatura,  $\Delta T_{max}$ , observada para ambos os modelos, ficou em 11,46°C, no modelo em Fortran 90, e 11,56°C via PDE-tool; o que resulta em uma diferença relativa de 0,9% entre os dois modelos.

## 7. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O pós-processamento dos resultados obtidos com as simulações numéricas foi feito com o uso software Tecplot, de onde foram extraídas as figuras com isobandas de temperaturas apresentadas na sequência.

### 7.1. Análise do campo de temperaturas

Analisando os campos de temperaturas das geometrias estudadas, constatou-se que o gradiente de temperaturas diminui de I para T, de T para U e de U para  $\Psi$ , sendo que em  $\Psi$  se tem a condição de menor temperatura de pico dos quatro. Vale destacar que, apesar de terem as mesmas condições de contorno, mesma taxa de geração de calor e mesma área da geometria condutora, o delta máximo de temperatura ( $\Delta T_{max}$ ) avaliado na geometria  $\Psi$  chega ser próximo a um terço do avaliado em I.

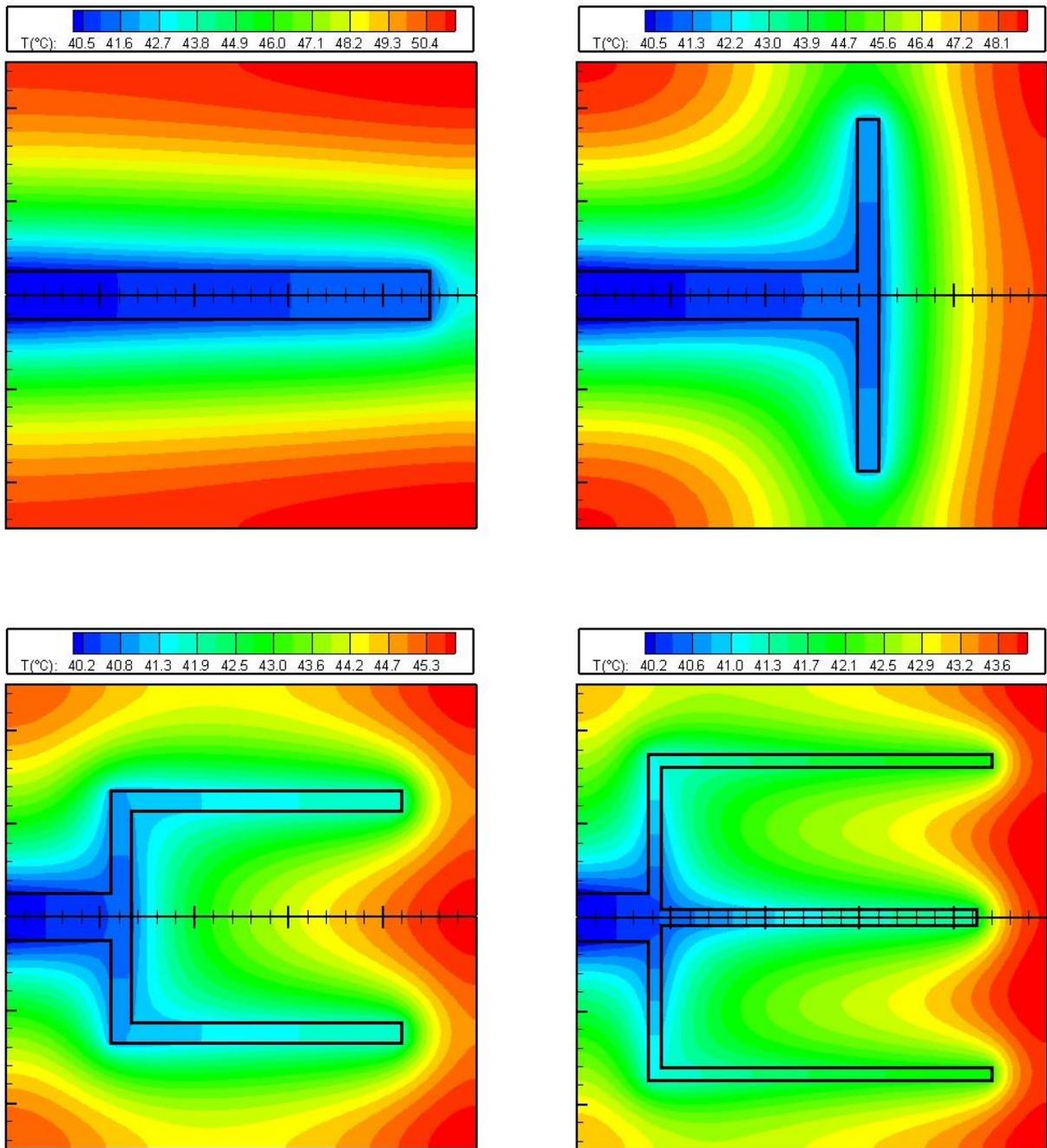


Figura 7.1 – Resultados das simulações nas geometrias I, T, U e Ψ.

Outra forma de ver os resultados é através do gráfico de dispersão de temperaturas (figura 7.2), a vantagem deste tipo de gráfico está na facilidade de se comparar as quatro geometrias ao mesmo tempo. Contudo, com o intuito de deixar o gráfico mais genérico possível, recorreu-se a adimensionalização da temperatura e da variável frequência de ocorrência. Para a temperatura se procedeu da seguinte forma

$$\theta(x, y) = \frac{(T(x, y) - T_0)k}{q''L^2} \quad (7.1)$$

onde  $\theta(x,y)$  é a função temperatura adimensional. Já com a variável de frequência, a adimensionalização foi feita através da razão número de pontos do domínio onde se constatou tal temperatura  $N(\theta_i)$  pela quantidade total de pontos do domínio  $\sum_i N(\theta_i)$ , tal que

$$N_{ad}(\theta_i) = \frac{N(\theta_i)}{\sum_i N(\theta_i)} \quad (7.2)$$

onde  $N_{ad}(\theta_i)$  é a frequência de ocorrência adimensional da temperatura  $\theta_i$  no domínio. Com essas adimensionalizações, a interpretação do gráfico fica independente da dimensão do lado do corpo quadrado ( $L$ ), da intensidade da taxa de geração de calor volumétrica ( $q'''$ ), da temperatura do contorno  $T_o$  e, também, da quantidade de volumes finitos usados na resolução.

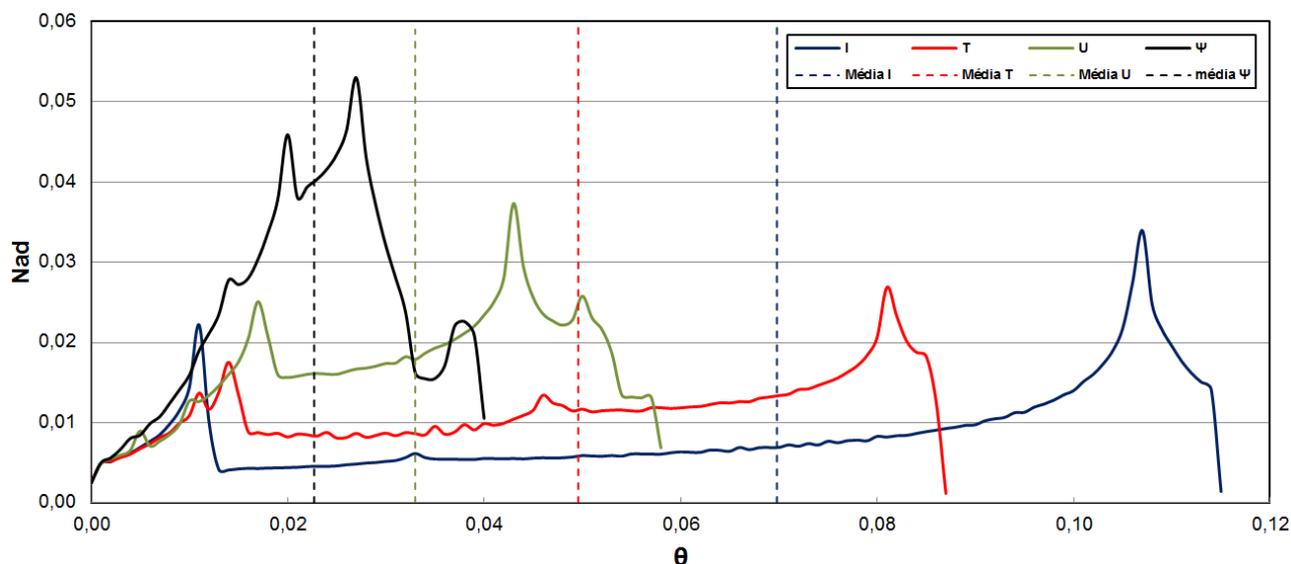


Figura 7.2 – Comparação das dispersões de temperatura

Estes gráficos de dispersão de temperaturas adimensionais são quase que uma “impressão digital” das geometrias extratoras, através deles, pode-se obter o valor e a frequência de ocorrência, no domínio, da temperatura de pico ou de qualquer outra temperatura. É possível também se ter uma medida de quão dispersas estão as temperaturas com relação à temperatura média  $\theta_{med,i}$  de cada geometria.

Para resumir as informações mais relevantes do gráfico, criou-se uma tabela comparativa (tabela 7.1) contemplando-se três indicadores adimensionais; temperatura adimensional máxima ( $\theta_{max}$ ), temperatura adimensional média ( $\theta_{med}$ ) e variância populacional da dispersão de temperaturas adimensionais  $VAR_p(\theta)$ .

Tabela 7.1 – Tabela comparativa das geometrias

Parâmetro adimensional	Geometrias			
	I	T	U	Ψ
$\theta_{max}$	0,115	0,087	0,058	0,040
$\theta_{med}$	0,070	0,050	0,033	0,023
$VAR_p(\theta)$	1,26E-03	6,40E-04	2,20E-04	8,00E-05

Confirmando o quê já se tinha averiguado anteriormente, a geometria  $\Psi$  apresenta os melhores indicadores de desempenho para um extrator de calor de um processador quadrado hipotético.

## 7.2. Considerações sobre a influência de fatores geométricos

Analisando os campos de temperaturas obtidos (figuras 7.1 e 7.2), notou-se haver alguma relação entre a temperatura de pico  $\theta_{max}$  e alguns parâmetros geométricos. O primeiro parâmetro geométrico, chamado de perímetro eficaz  $S_{pe}$ , é representado pela medida do perímetro da geometria descontado  $L_0$ . O segundo fator, que foi chamado de “distância de pico”  $S_{dp}$ , é definido como a distância entre a posição da temperatura máxima e a interface do material condutor mais próxima.

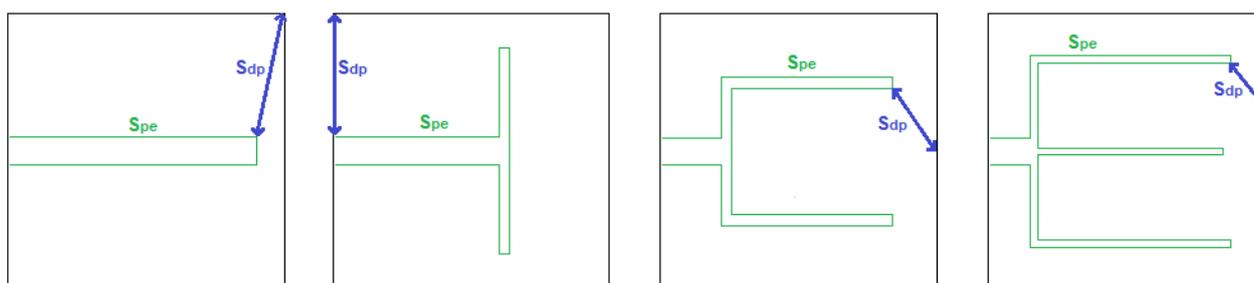


Figura 7.3 – Fatores geométricos  $S_{dp}$  e  $S_{pe}$  representados nas geometrias estudadas

Notou-se, com a análise dos resultados, que quanto menor é a temperatura de pico  $\theta_{max}$  maior é a dimensão de  $S_{pe}$  na geometria e menor é  $S_{dp}$ . Sabe-se, porém, que a relação direta entre um dos fatores apenas e a temperatura de pico adimensional máxima  $\theta_{max}$  não é sempre verdade, por isso, criou-se um parâmetro de forma adimensional  $S_0$  que correlaciona os dois fatores geométricos, dado por:

$$S_0 = \frac{S_{dp}}{S_{pe}} \quad (7.3)$$

Com a análise deste parâmetro adimensional aplicado às geometrias aqui estudadas, percebeu-se a existência de uma relação diretamente proporcional entre  $\theta_{max}$  e  $S_0$  e, também, que esta relação é monótona e tende a uma reta, como pode ser visto na figura 7.4.

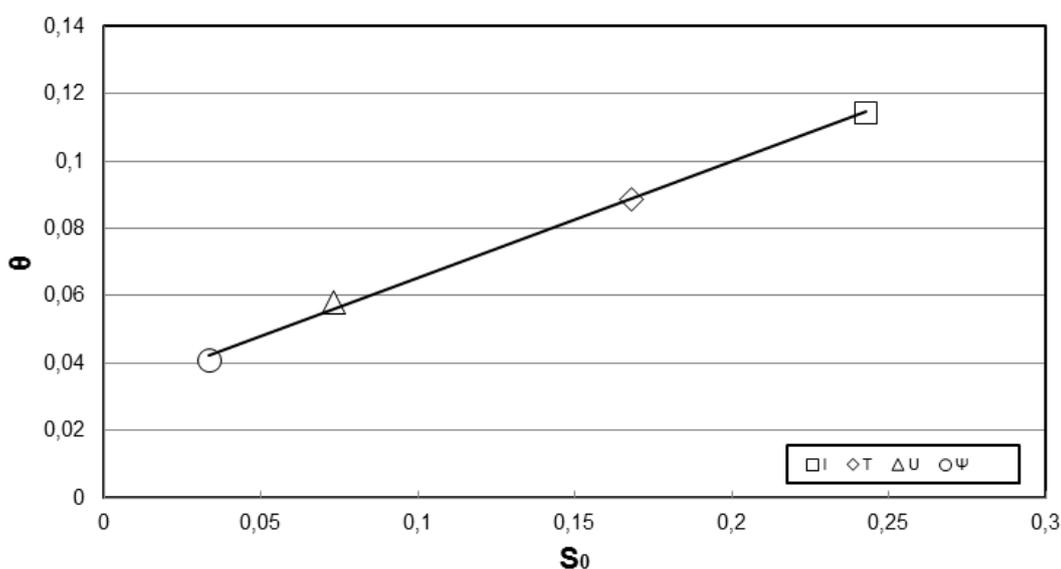


Figura 7.4 – Relação entre o  $S_0$  e  $\theta_{max}$

A reta de tendência, mostrada na figura 7.4, pode ser útil para estimar a temperatura de pico em um processador com uma geometria extratora diferente das estudadas sem usar, para isso, um modelo em volumes finitos. Um dos problemas, portanto, seria a determinação da distância de pico  $S_{dp}$ , a qual seria feita pela estimativa do ponto mais provável de ocorrência da temperatura máxima. Outro limitante dela é que sua validade está restrita a extratores de cobre puro com razão geométrica ( $A_0/L^2$ ) igual a 0,09 e razão ( $L_0/L$ ) igual a 0,1.

No entanto, ao se definir-se, o parâmetro  $\check{k}$  como sendo a relação de condutividades adimensional representada pela equação

$$\check{k} = \frac{k_p}{k} \quad (7.4)$$

pôde-se averiguar a influência da condutividade do material condutor na relação entre  $S_0$  e  $\theta_{max}$ , como pode ser visto na figura 7.5.

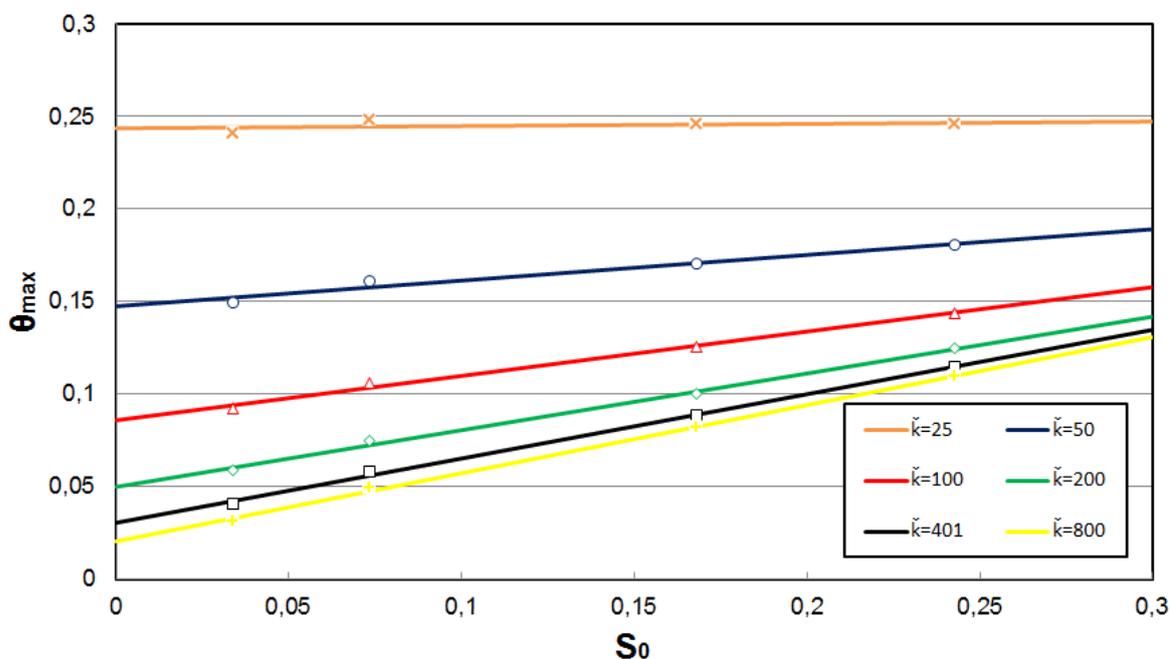


Figura 7.5 – Influência do parâmetro  $\check{k}$  na relação  $S_0$  e  $\theta_{max}$

Constata-se que o parâmetro de forma adimensional  $S_0$  tem mais influência na determinação de  $\theta_{max}$  a medida que  $\check{k}$  aumenta, ou seja para materiais de condutividades próximas a performance do extrator quase não se altera com o formato. Nota-se também, corroborando [Almogbel e Bejan, 1999] e [Lorenzini et alii, 2012], que quanto maior é  $\check{k}$  menor é a temperatura de pico ( $\theta_{max}$ ). Esta última relação, porém, não é monótona por haver uma tendência assintótica em  $\theta_{max}$ , de forma que a partir de certo valor de  $\check{k}$  o aumento deste não resultará numa redução significativa daquele.

Para finalizar, é importante destacar o Teorema dos  $\pi$  de *Buckingham*, o qual, segundo Fox et alii, 2005, afirma que a quantidade de grupos adimensionais  $n_\pi$  é definido pela subtração do número dos parâmetros dimensionais  $n$  (dependente + independentes) pela quantidade de dimensões primitivas  $m$  (comprimento  $S$ , massa  $M$ , tempo  $t$  e Temperatura  $T$ ) envolvidas naquele.

$$n_\pi = n - m \quad (7.5)$$

Ao aplica-lo no problema estudado, que possui nove parâmetros dimensionais

$$\Delta T_{max} = f(L, L_0, q''', k_p, k, A_0, S_{dp}, S_{pe}) \quad (7.6)$$

e quatro dimensões primitivas ( $S$ ,  $M$ ,  $t$  e  $T$ ), chega-se a um número de grupos adimensionais ( $n_\pi$ ) de cinco, que resulta nos seguintes parâmetros:

$$\theta_{max} = g(S_0, \check{k}, \frac{A_0}{L^2}, \frac{L_0}{L}) \quad (7.7)$$

Dessa forma, para se obter uma correlação eficiente que estime  $\theta_{max}$  em um processador quadrado deve-se, obrigatoriamente, estudar as influências dos quatro grupos adimensionais dependentes ( $S_0$ ,  $\check{k}$ ,  $A_0/L^2$  e  $L_0/L$ ). Para finalizar, pode-se dizer, ainda, que  $\check{k}$  é o parâmetro que faz relação das condutividades térmicas,  $\frac{A_0}{L^2}$  a proporção de material condutivo usado no domínio,  $\frac{L_0}{L}$  a proporção de interface de extração de calor no contorno e, finalmente,  $S_0$  é o responsável por quantificar o formato da geometria.

## 8. CONCLUSÕES

Em síntese, pode-se afirmar que o modelo de volumes finitos se mostrou adequado para a resolução do problema. A malha escolhida estava de boa qualidade, uma vez que esta estava na região de menor erro total, e o resultado obtido com a metodologia ficou bem próximo ao do observado no PDE-Tool.

Os resultados, por sua vez, apontaram que a geometria  $\Psi$  teve um melhor desempenho no comparativo das quatro, ou seja, apresentou menores temperaturas máxima, média e menor variância na análise de dispersão de temperaturas.

O estudo com os parâmetros adimensionais de forma ( $S_0$ ) e de razão de condutividades ( $\check{k}$ ) mostraram que para matérias de condutividades próximas, baixo  $\check{k}$ , o formato da geometria pouco influência no desempenho do extrator de calor, quando, porém se aumenta esta razão de condutividades há um ganho considerável de performance com o uso de geometrias mais elaboradas, ou seja de baixo  $S_0$ . Em suma, estes dois parâmetros se mostraram influentes na avaliação da temperatura adimensional máxima ( $\theta_{max}$ ) apesar, todavia, de serem apenas dois dos quatro parâmetros adimensionais independentes previstos pelo teorema dos  $\pi$  de *Buckingham* para o problema.

Com relação a perspectivas futuras, espera-se dar continuidade a análise dos parâmetros adimensionais faltantes e, possivelmente, propor uma correlação para a temperatura adimensional de pico. No geral, o presente trabalho se mostrou coerente com a proposta uma vez que se atingiram os objetivos esperados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almogbel, M., Bejan A.; **“Conduction trees with spacings at the tips”**, International Journal of Heat and Mass Transfer, 1999.

Bortoli, A.L., Cardoso, C., Fachin, M. P. G., Cunha, R. D.; **“Introdução ao cálculo numérico”**, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2ª edição, 2003.

Fox, R. W., McDonald, A. T., Pritchard, P. J., **“Introdução à Mecânica dos Fluidos”**, LTC Editora, 6ª edição, 2006.

Incropera, F. P.; Dewitt, D.P.; Bergman T.L.; Lavine, A.L.; **“Fundamentos de Transferência de Calor e Massa”**, LTC Editora, 6ª edição, 2005.

Lorenzini, G., Biserni, C., Rocha, L. A. O.; **“Constructal design of X-shaped conductive pathways for cooling a heat generation body”**, International Journal of Heat and Mass Transfer, 2012.

Maliska, C.R.; **“Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”**, LTC Editora, 2ª edição, 2004.

## APÊNDICE 1 – Resultado da análise de independência de malha para as todas as geometrias

ni x nj	I				T			
	Iteração	$\Delta T_{max}$	$T_{med}$	tempo	Iteração	$\Delta T_{max}$	$T_{med}$	tempo
100 x 50	42066	11,320	46,830	5:971	45015	8,596	44,915	4:744
200 x 100	131173	11,434	46,976	40:435	138406	8,637	44,948	49:726
300 x 150	246346	11,460	46,980	2:50:173	257890	8,686	44,974	3:57:768
<b>400 x 200</b>	<b>376417</b>	<b>11,459</b>	<b>46,980</b>	<b>8:11:406</b>	<b>394417</b>	<b>8,660</b>	<b>44,959</b>	<b>13:31:490</b>
500 x 250	513628	11,442	46,973	16:52:853	539038	8,628	44,939	23:25:659
600 x 300	652074	11,415	46,956	30:33:406	684380	8,615	44,926	45:49:654
700 x 350	787111	11,378	46,938	57:37:264	826897	8,589	44,905	1:16:28:729
800 x 400	915142	11,334	46,901	1:32:24:123	963706	8,533	44,868	1:45:31:522
ni x nj	U				$\Psi$			
	Iteração	$\Delta T_{max}$	$T_{med}$	tempo	Iteração	$\Delta T_{max}$	$T_{med}$	tempo
100 x 50	55101	5,717	43,261	6:564	-	-	-	-
200 x 100	165184	5,815	43,305	59:564	205847	3,937	42,450	1:23:264
300 x 150	306080	5,834	43,309	4:42:826	356864	4,058	42,296	6:00:100
<b>400 x 200</b>	<b>464636</b>	<b>5,827</b>	<b>43,299</b>	<b>13:09:473</b>	<b>539830</b>	<b>4,001</b>	<b>42,272</b>	<b>15:06:316</b>
500 x 250	631625	5,805	43,280	32:24:941	718579	3,983	42,237	35:52:326
600 x 300	799936	5,772	43,253	55:11:462	928387	3,955	42,237	1:05:50:163
700 x 350	963789	5,729	43,220	1:37:03:368	1115146	3,920	42,196	1:25:05:963
800 x 400	1118328	5,678	43,181	2:26:44:676	1278964	3,849	42,152	1:55:09:209

## APÊNDICE 2 – Código em Fortran 90 para a geometria I

```

program resfriador_I
  ! a = dimensão do processador na direção x, b= dimensão na direção y
  ! dx e dy dimensões do volume planar finito
  real*8 :: a, b, dx, dy, alim, blim, q, k, ko, p, blim_g, p_total
  integer :: ni, nj, i, j, nj_g, time, time2
  real*8 :: x(2010), y(2010), t(1010,2010), ap(1010,2010)
  real*8 :: ae(1010,2010), aw(1010,2010), an(1010,2010)
  real*8 :: as(1010,2010), s(1010,2010), min, seg, mil
  !-----
  open(10, file = "Temp_geometrial.txt")
  write(10,*) "-----Geometria I-----"
  open(15, file = "Temp_I_teste_tecplot.dat" )
  nj=200
  ni= nj+nj  !assegurar que dx seja igual dy
  a=5.d-2
  b=25.d-3
  alim=a*(9.d0/10.d0) !limite geométrico horizontal da parte em cobre
  blim=b*(1.d0/10.d0) !limite geométrico vertical da parte em cobre
  dx= a/ni
  dy= b/nj
  ko=401.d0 !(W/mK) coef de cond. do cobre
  k= 1.d0 ! (W/mK) coef de calor do material do encapsulamento
  p_total=100.d0 !(W) potência do processador inteiro
  p=p_total/2.d0 ! potência da meia parte do processador
  !=====
  !-----CALLS-----
  !=====
  call system_clock(time)
  call malha(a, b, dx, dy, ni, nj, x, y)
  call coeficientes(ni,nj,dx,dy,ap,ae,aw,as,an,ko,k,alim,blim,s,x,
* y,p,q,a,b,blim_g,nj_g)
  call temperatura_inicial(ni, nj, t, x, y, alim, blim)
  call gauss_seidel(ap,an,as,ae,aw,t,s,ko,ni,nj,y,blim,
* p,dx,dy,q,alim,k,x,blim_g,nj_g)
  call fluxos(ni,nj,ko, k, dx, dy, t, p,alim, blim, x, y,q, nj_g)
  call escreve(x, y, ni, nj, t,nj_g)
  call system_clock(time2)
  min=0.d0
  sec=0.d0

```

```

mil=0.d0
if (time2-time > 60000)then
min= aint((time2-time)/60000.d0)
end if
if (time2-time > 1000)then
sec= aint((time2-time)/1000.d0) -min*60
end if
mil= time2-time -min*60000- sec*1000
write(*,*)"tempo",ceiling(min),":",ceiling(sec),":",ceiling(mil)
write(*,*) "FIM"
pause
end program
!=====
!-----MALHA DE VOLUMES FINITOS-----
!=====
subroutine malha (a, b, dx, dy, ni, nj, x, y)
real*8 :: a, b, dx, dy
real*8 :: x(ni + 2), y(nj+2)
integer :: ni, nj, i, j
x(1)=0.d0
x(2)=dx/2.d0 !meio volume de fronteira
do i=3, (ni+1)
x(i)= x(i-1) + dx
end do
x(ni+2)= a
y(1)= 0.d0
y(2)= dy/2.d0!meio volume de fronteira
do j=3, (nj+1)
y(j)=y(j-1) + dy
end do
y(nj+2)= b
return
end
!=====
!-----COEFICIENTES-----
!=====
subroutine coeficientes(ni,nj,dx,dy,ap,ae,aw,as,an,ko,k,alim,
* blim,s,x,y,p,q,a,b,blim_g,nj_g)
integer :: ni, nj, i, j, nj_g
real*8 :: dx, dy, ko, k, q, alim, blim, p, teste_s, blim_g,a,b
real*8 :: ap(ni+2,nj+2), ae(ni+2,nj+2), aw(ni+2,nj+2)
real*8 :: as(ni+2,nj+2), an(ni+2,nj+2), s(ni+2,nj+2)
real*8 :: x(ni+2), y(nj+2)!, sp(ni+2,nj+2)
!Matriz dos coeficientes
q=0.d0
teste_s=0.d0
do i=2, (ni+1)
do j=2, (nj+1)
ae(i,j)=k*dy/dx
aw(i,j)=k*dy/dx
as(i,j)=k*dx/dy
an(i,j)=k*dx/dy
end do
end do
do i=2, (ni+1)
do j=2, (nj+1)
if((x(i)<= alim).and.(y(j)<= blim))then !preenchimento da matriz de coef. do "1" em cobre
ae(i,j)=ko*dy/dx
aw(i,j)=ko*dy/dx
as(i,j)=ko*dx/dy
an(i,j)=ko*dx/dy
if(y(j)> blim-2.d0*dy)then
an(i,j)= ko*dx/dy
as(i,j+1)=an(i,j)
end if
if(x(i)> alim-2.d0*dx)then
ae(i,j)= ko*dy/dx
aw(i+1,j)=ae(i,j)
end if
if((y(j)>(blim-dy)).and.(x(i)<15.d-1*dx))then
blim_g = y(j)+dy/2.d0! limite geom,trico real
nj_g = j -1
end if
end if
end do
end do
q= p/(ni*nj) !termo fonte de calor (W)
do i=2, (ni+1)
do j=2, (nj+1)

```

```

        s(i,j)= q ! potência calorifica (W) gerada no volume finito
    end do
end do
!condições de contornos
do i=2, (ni+1)
    as(i,2)=0.d0 ! condição de contorno de simetria face sul
    an(i,nj+1)= 0.d0 ! condição de contorno de fluxo nulo face norte
end do
do j=2, nj+1
    ae(ni+1,j)= 0.d0 ! fluxo nulo face leste
    if(j <= nj_g +1)then
        aw(2,j)=(2.d0)*aw(2,j)! temperatura prescrita, fronteira cobre
    end if
    if(j > nj_g+1)then
        aw(2,j)=0.d0!fluxo nulo para o resto da face oeste
    end if
end do
!cálculo dos coeficientes no ponto
do i=2, (ni+1)
    do j=2, (nj+1)
        ap(i,j) = ae(i,j)+ aw(i,j)+ as(i,j)+ an(i,j)+sp(i,j)!calculo dos coeficientes no ponto
        teste_s = teste_s + s(i,j) !testar se a primeira lei da termodinâmica vai ser respeitada
    end do
end do
write(*,*) "potência", teste_s
return
end
=====
!-----CHUTE INICIAL DE TEMPERATURA-----
=====
subroutine temperatura_inicial(ni, nj, t, x, y, alim, blim)
integer :: ni, nj, i, j
real*8: alim, blim, to, tp
real*8: t(ni+2,nj+2), x(ni+2), y(nj+2)
to=40.d0!temperatura inicial na parte em cobre (C)
tp=40.d0 ! temperatura inicial na parte em material isolante(C)
do i=1, (ni+2)
    do j=1, (nj+2)
        if((x(i)<= alim).and.(y(j)<= blim))then !preenchida matriz de temp. do "I" em cobre
            t(i,j) = to
        end if
        if((x(i)> alim).or.(y(j)> blim))then !matriz das temperaturas do resto da geometria
            t(i,j) = tp
        end if
    end do
end do
return
end
=====
!-----GAUSS - SEIDEL-----
=====
subroutine gauss_seidel(ap,an,as,ae,aw,t,s,ko,ni,nj,y,blim,
* p,dx,dy,q,alim,k,x,blim_g, nj_g)
integer :: i, j, ni, nj, iter, para, nj_g , cont
real*8: ap(ni+2,nj+2),an(ni+2,nj+2),as(ni+2,nj+2),y(nj+2),x(ni+2)
real*8: ae(ni+2,nj+2), aw(ni+2,nj+2), t(ni+2,nj+2), s(ni+2,nj+2)
real*8 :: ko,q, tref1,tref2,blim,p,dx, dy, c_conv,erro1,erro2
real*8 :: blim_g, tmed,tmin,tmax,tref3, erro3,tref4,erro4,t_sr,t
real*8 :: tmed_ant, erro5
para=0
ti=40.d0 !temperatura mínima fixada
iter=0
cont=1000
c_conv = 1.d-8 !critério de convergência
iter=0
erro1=1.d0
erro2=1.d0
erro3=1.d0
erro4=1.d0
erro5=1.d0
!calcula temperatura nova
do while(para==0)!condição false de parada
    !temperaturas para teste de convergência
    iter = iter+1
    tref1=t(ni+1,nj+1)
    tref2=t(nj,2)
    tref3=t(2,nj+1)
    tref4=t(ni+1,2)
    qsai=0.d0

```

```

do j=2, (nj+1)
  do i=2, (ni+1)
    t(i,j)= (an(i,j)*t(i,j+1) + as(i,j)*t(i,j-1) +
* ae(i,j)*t(i+1,j) + aw(i,j)*t(i-1,j)+s(i,j))/ap(i,j)
  end do
end do
!temperaturas nos contornos
do j=2, nj+1
  t(ni+2,j)=t(ni+1,j)!condiç...o de fluxo nulo
  if(j <= nj_g +1)then !calcula nova temperatura na face de estrator de calor
    !write(*,*) nj_g
    t(1,j)= ti ! temperatura prescrita
    t(2,j)= t(1,j) +p/(nj_g*aw(2,j)) ! balaço de energia
  end if
  if(j> nj_g +1)then
    t(1,j)= t(2,j)!fluxo nulo
  end if
end do
do i=2, ni+1
  t(i,1) = t(i,2) !!condiçEo de simetria
  t(i,nj+2) = t(i,nj+1)!condiç...o de fluxo nulo
end do
t(1,1) = t(1,2)
t(1,nj+2) = t(1, nj+1)
t(ni+2,1)=t(ni+2,2)
t(ni+2,nj+2) = t(ni+2,nj+1)
if(iter==cont)then
  write(*,*) "iter", iter,"tem. ref.", tref1, tref2, tref4
  cont=cont+1000
  tmed_ant = tmed
  tmed=0.d0
  do i=1, ni+2
    do j=1, nj+2
      tmed=tmed+t(i,j)
    end do
  end do
  tmed=tmed/((nj+2)*(ni+2))
  erro5= dabs(tmed-tmed_ant)/tmed
  write(*,*) "tmed", tmed , erro5
end if
!critério de parada
erro1= dabs((tref1-t(ni+1,nj+1))/t(ni+1,nj+1))
erro2= dabs((tref2-t(nj,2))/t(nj,2))
erro3= dabs((tref3-t(2,nj+1))/t(2,nj+1))
erro4= dabs((tref4-t(ni+1,2))/t(ni+1,2))
if((erro1 <= c_conv).and.(erro2 <= c_conv))then
  if((erro3 <= c_conv).and.(erro4<=c_conv))then
    if(erro5 <= 1.d-5)then
      if(iter > 100)then
        para = 1
      end if
    end if
  end if
end if
if (iter >3000000)then
  para = 1
  write(*,*)"não convergiu"
end if
end do
tmax=0.d0
tmin=1.d12
tmed=0.d0
do i=1, ni+2
  do j=1, nj+2
    tmed=tmed+t(i,j)
    if(t(i,j)>tmax)then
      tmax=t(i,j)
    end if
    if(t(i,j)<tmin)then
      tmin=t(i,j)
    end if
  end do
end do
tmed=tmed/((ni+2)*(nj+2))
Write(*,*) "-----"
write(*,*) "temperatura media", tmed , "Número de iterações",iter
write(*,*) "delta T" , tmax-tmin
write (*,*) "erros relativos", erro1, erro2
return

```

```

end
=====
!-----FLUXOS-----
=====
subroutine fluxos (ni,nj,ko, k,dx,dy,t,p,alim,blim, x, y,q, nj_g)
integer :: i,j, ni, nj
real*8 :: t(ni+2, nj+2), x(ni+2), y(nj+2)
real*8 :: qe, qw, p, dx, dy, ko, k, alim, blim, qn, qs
!
qs=0.d0
qn=0.d0
qw=0.d0
qn=0.d0
do i=2, ni+1
!Integração numérica dos fluxos nas faces sul, norte, oeste e leste
    if(x(i)<=alim) then
        qs = qs + ko*dx*(t(i,1) - t(i,2))*2.d0/dy
    end if
    if(x(i)>alim)then
        qs = qs + k*dx*(t(i,1) - t(i,2))*2.d0/dy
    end if
    qn = qn + k*dx*(t(i,nj+2)-t(i, nj+1))*2.d0/dy
end do
!qw=0.d0
do j=2, nj+1
    if(y(j)<=blim) then
        qw = qw + ko*dy*(t(1,j)-t(2,j))*2.d0/dx
    end if
    if(y(j)>blim)then
        qw = qw + k*dy*(t(1,j) - t(2,j))*2.d0/dx
    end if

    !write(*,*) "qw" , qw
    qe = qe + k*dy*(t(ni+2,j)-t(ni+1,j))*2.d0/dx
end do
write(*,*)"FLUXOS"
write(*,*) "qe",qe,"qw", qw ,"qs", qs,"qn", qn
Write(*,*) "fluxo de saída", qw, "pot`ncia", p
write(*,*) "balanço de energia calculado", p + qw +qn+qe+qs
do j=2, nj_g +1
! write(*,*) t(2,j)
end do
return
end
=====
!-----ESCREVER EM ARQUIVO-----
=====
subroutine escreve (x, y, ni, nj, t,nj_g)
real*8 :: x(ni+2), y(nj+2), t(ni+2, nj+2)
integer :: ni, nj, i, j,nj_g
write(10,*)" POSICAO X      POSICAO Y      TEMPERATURA"
write(15,('Variables = x, y, T(°C)'))
write(15,('Zone T = " Zone-One" " l=" l3 " J=" l3 " F=Point'))
*
ni+2, nj+2
do j=1, nj+2
do i=1, ni+2
write(10,(3f20.10)) x(i), y(j), t(i,j)
write(15,(3f20.10)) x(i), y(j), t(i,j)
end do
end do
return
end

```