

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

Marcelo de Carvalho Griebeler

**ENSAIOS EM POLÍTICA E DESENVOLVIMENTO
ECONÔMICO**

Porto Alegre
2013

Marcelo de Carvalho Griebeler

**ENSAIOS EM POLÍTICA E DESENVOLVIMENTO
ECONÔMICO**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Ronald Otto Hillbrecht

Porto Alegre
2013

CIP - Catalogação na Publicação

Griebeler, Marcelo de Carvalho
Ensaio em política e desenvolvimento econômico /
Marcelo de Carvalho Griebeler. -- 2013.
95 f.

Orientador: Ronald Otto Hillbrecht.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-RS, 2013.

1. Desenvolvimento econômico. 2. Lotka-Volterra.
3. Banco Central. 4. Convexidade. 5. Viés
Inflacionário. I. Hillbrecht, Ronald Otto, orient.
II. Título.

Marcelo de Carvalho Griebeler

ENSAIOS EM POLÍTICA E DESENVOLVIMENTO
ECONÔMICO

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovada em: Porto Alegre, 25 de outubro de 2013

Prof. Dr. Ronald Otto Hillbrecht - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Geraldo Edmundo Silva Jr
Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. João Rogério Sanson
Universidade Federal de Santa Catarina

À memória da minha amada avó Nilda

RESUMO

Esta tese é composta por três ensaios. No primeiro, mostramos em nosso modelo básico que economias formadas exclusivamente por produtores e parasitas podem cair em armadilhas de pobreza, desde que ambos grupos se comportem de acordo com a dinâmica de Lotka-Volterra. Contudo, a introdução de um limite para o crescimento do produto e de expectativas por parte dos agentes exclui o resultado de armadilha em seus múltiplos equilíbrios. Nossa conclusão, entretanto, é similiar para ambos modelos estudados: melhora na proteção aos direitos de propriedade por parte do Estado pode fazer com que a armadilha de pobreza seja superada, no modelo básico; e afetar a estabilidade dos equilíbrios, no modificado, fazendo com que resultados econômicos com maior produto tornem-se estáveis. No segundo ensaio, obtemos condições sob as quais a função perda do banco central é estritamente convexa em quatro estados distintos da economia: economia aquecida, em recessão, inflação alta e produto alto. Encontramos, ainda, que quando inflação e produto são funções lineares do instrumento de política monetária, a convexidade é garantida para qualquer um dos quatro estados citados. Ao estendermos nossa análise a vários instrumentos, encontramos que apenas linearidade já não é mais suficiente para a garantia do formato da função perda. Nossos resultados fornecem, ainda, condições sob as quais existirá dependência entre os instrumentos de política monetária. Por fim, o terceiro ensaio estuda regimes de metas de inflação, nos quais agentes podem influenciar a política monetária através das expectativas de mercado reportadas ao banco central. Este, por sua vez, deve formular a política monetária considerando que tal influência pode ser usada em benefício dos próprios agentes. Modelamos essa relação estratégica como um jogo sequencial entre uma instituição financeira representativa e o banco central. Mostramos que quando a autoridade monetária escolhe apenas o nível da taxa de juros, existe um potencial viés inflacionário na economia. Esse viés é superado quando a oferta de moeda torna-se um segundo instrumento de política. Ainda mostramos que penalização de instituições más previsoras também pode ser um mecanismo eficiente de ancoragem de expectativas.

Palavras-chave: Desenvolvimento econômico. Lotka-Volterra. Banco central. Convexidade. Viés inflacionário. Metas de inflação.

Classificação JEL: O12; 043; E50; E58.

ABSTRACT

This thesis consists of three essays. In the first one, we show in our basic model that economies consisted exclusively by producers and parasites may fall into poverty traps, assuming that both groups behave according to the dynamics of Lotka-Volterra. However, the introduction of an upper bound on the output growth and expectations for the agents excludes the result of trap in its multiple equilibria. Our conclusion, nevertheless, is similar for both studied models: improved protection of property rights by the state can mitigate the poverty trap possibility in the basic model, and affect the stability of equilibria in the modified one, making that economic outcomes with higher output become stable. In the second essay, we obtain conditions under which the central bank's loss function is strictly convex in four different states of the economy: booming economy, recession, high inflation and high output. Moreover, we found that when inflation and output are linear functions of monetary policy instruments, convexity is guaranteed for any of the four states mentioned. When we extend our analysis to the case of many instruments, we found that only linearity is not sufficient to guarantee the shape of loss function. Our results also provide conditions under which there exists dependence between instruments of monetary policy. Finally, the third essay studies the inflation targeting regimes, in which agents can influence the monetary policy through market expectations reported to the central bank. Monetary authority, in its turn, should formulate the monetary policy considering that this influence may be used for the benefit of agents themselves. We model this strategic relationship as a sequential game between a representative financial institution and the central bank. We show that when the monetary authority chooses only the level of interest rates, there is a potential inflationary bias in the economy. This bias is solved when the money supply becomes a second instrument of policy. In addition, we show that to impose penalty on the worse predictor institutions may also be an efficient anchoring expectations mechanism.

Keywords: Economic development. Lotka-Volterra. Central bank. Convexity. Inflation bias. Inflation target.

JEL classification: O12; O43; E50; E58.

Sumário

1 Introdução	7
2 Produtores e parasitas: uma aplicação do modelo de Lotka-Volterra às economias em desenvolvimento	9
2.1 Introdução	9
2.2 Dinâmica entre produtores e parasitas	13
2.2.1 <i>O modelo básico</i>	13
2.2.2 <i>Equilíbrios e estabilidade do sistema</i>	17
2.2.3 <i>Modelo modificado: adicionando expectativas e limitando o número de produtores</i>	19
2.2.4 <i>Estabilidade e equilíbrio do sistema modificado</i>	23
2.3 Implicações de política e a armadilha da pobreza	25
2.4 Considerações finais	29
2.5 Referências	30
2.6 Apêndice	32
2.6.1 <i>Definições e resultados auxiliares</i>	32
2.6.2 <i>Demonstrações</i>	33
3 Convexidade da função perda do banco central e dependência entre instrumentos monetários	40
3.1 Introdução	40
3.2 Convexidade da função perda do Banco Central	43
3.2.1 <i>O caso de um instrumento</i>	43
3.2.2 <i>Mais de um instrumento</i>	49
3.3 Um exemplo simples com dois instrumentos independentes	54
3.4 Conclusão	56
3.5 Referências	57
3.6 Apêndice	60
4 Expectativas de mercado e viés inflacionário em regimes de metas de inflação	66
4.1 Introdução	66
4.2 A relação estratégica entre banco central e instituições financeiras	70
4.2.1 <i>Modelo básico: jogo de dois períodos</i>	70
4.2.2 <i>O potencial viés inflacionário</i>	75
4.2.3 <i>Superando o viés inflacionário: um jogo de três períodos com escolha da oferta monetária</i>	79
4.2.4 <i>Outra alternativa de superação do viés: penalizando erros de previsão</i>	82
4.3 Conclusão	86
4.4 Referências	88

4.5 Apêndice	91
5 Conclusão	94
Referências	95

1 Introdução

Esta tese está dividida em três ensaios e trata de dois assuntos distintos, mas que possuem características em comum. De uma maneira geral, podemos classificar os dois tópicos que tratamos aqui em desenvolvimento econômico (primeiro ensaio) e teoria monetária (segundo e terceiro). Dessa forma, o título, “Ensaio em política e desenvolvimento econômico”, parece representar bem os tópicos aqui discutidos. Vale ressaltar que uma característica em particular une os três ensaios. Esta está ligada à metodologia adotada: os trabalhos tratam exclusivamente de teoria econômica, no sentido de que não utilizamos qualquer abordagem empírica - econometria, por exemplo. Como veremos adiante, as abordagens são distintas, mas conservam tal ponto comum. Vamos começar apresentando o primeiro ensaio.

Uma característica comum entre as economias em desenvolvimento é a presença em grande número de empreendimentos improdutivos, os quais se financiam e sobrevivem somente às custas de atividades produtivas. Essas atividades parasitas assumem diversas formas, que vão desde organizações criminosas violentas e armadas, tais como a máfia, até quadrilhas que envolvam políticos corruptos. Apesar de não produzirem, os parasitas¹ têm o mesmo objetivo de uma empresa regular, o lucro. As consequências da atividade parasita para economia podem ser muito sérias, a ponto de se cair em uma armadilha de pobreza (MEHLUM; MOENE; TORVIK, 2003b). Dessa forma, é fundamental conhecer a dinâmica entre estas populações e suas implicações para o desenvolvimento econômico.

Nesse sentido, o objetivo do primeiro ensaio é modelar a dinâmica populacional de produtores e parasitas em uma economia em desenvolvimento e mostrar que, na ausência de melhora nos parâmetros institucionais, tal sociedade tende a cair em uma armadilha de pobreza. Para tal, utilizaremos o modelo de Lotka-Volterra, que descreve a evolução ao longo do tempo da quantidade de presas e predadores em um ambiente ecológico. A ideia é tratar produtores como presas e agentes que vivem às custas destes como predadores. A dinâmica se dará através da hipótese de que os parasitas só sobrevivem e se multiplicam às custas dos produtores e estes, por sua vez, têm seu crescimento afetado pelas ações de extorção daqueles.

Mudando o foco para a teoria monetária, temos que grande parte da literatura sobre viés inflacionário e otimização do banco central seguiu a formulação proposta nos trabalhos seminais de Barro e Gordon (1983a, 1983b). Seu modelo assumia uma função perda da autoridade monetária quadrática na inflação e linear no produto. Outra boa parcela de trabalhos estudou funções quadráticas tanto no produto quanto na inflação, como mostram os *surveys* em Walsh (2010) e Cuckierman (1992). Outros estudos, ainda,

¹Outro termo utilizado na literatura para caracterizar estes agentes é “predadores”. Optamos por “parasitas” para destacar que só existem graças à alguma atividade produtiva consolidada.

utilizam formas funcionais distintas para levar em conta assimetria nas preferências do banco central, com Nobay e Peel (2003) sendo um exemplo deste ramo da literatura. O que todos estes trabalhos têm em comum é a hipótese de que a função perda é convexa. Portanto, se faz necessário estudar sob quais condições esta função realmente terá tal desejável propriedade.

Este é o objetivo do segundo ensaio: encontrar condições sob as quais a função perda do banco central é convexa e, conseqüentemente, seu problema de estabilização de produto e preços tem um mínimo único. Começamos estudando o problema de minimização quando a autoridade monetária dispõe de apenas um instrumento - a variação na oferta de moeda - para escolha. Veremos quais as restrições devem ser impostas sob as funções de inflação e do produto para que a convexidade estrita seja garantida em qualquer estado da economia - recessão, economia aquecida, produto alto e inflação alta. Também estudaremos o caso de mais de um instrumento de política monetária e investigaremos a relação da convexidade da função perda com a independência entre os instrumentos.

Ainda com relação à teoria monetária, vários trabalhos empíricos, tais como Bourke (1989), Demirgüç-Kunt e Huizinga (1999), Clayes e Vennet (2008), Molyneux e Thornton (1992), Staikouras e Wood (2003), entre outros, têm encontrado uma correlação positiva entre taxa de juros e lucratividade bancária. A mesma literatura reporta uma relação direta também entre inflação e lucratividade dos bancos, bem como entre produto e lucros. Em países onde existe mecanismos de pesquisa de expectativas de mercado por parte da autoridade monetária, como é o caso do Brasil e o seu Sistema de expectativas de mercado do Banco Central, a possibilidade de, por exemplo, maiores taxas de juros incrementarem os lucros das instituições financeiras levanta uma questão: aquelas instituições que possuem ativos indexados à taxa de juros não terão incentivos à mentir sua expectativa de inflação? O questionamento faz sentido na medida que o banco central responde a altas expectativas de inflação com maiores taxas de juros.

Dessa forma, o terceiro ensaio busca modelar a relação estratégica entre instituições financeiras e banco central implícita na discussão acima. As instituições, por um lado, desejam maximizar seu lucro escolhendo qual expectativa de inflação reportar à autoridade monetária. Esta, por sua vez, objetiva estabilizar a economia - minimizar o desvio da inflação com relação à meta e do produto com relação a seu nível potencial - escolhendo o nível do instrumento de política monetária. Dado que existe a possibilidade de a expectativa reportada ser superior à verdadeira, um dos pontos cruciais para o banco central é dar incentivos às instituições para que as expectativas sejam ancoradas.

2 Produtores e parasitas: uma aplicação do modelo de Lotka-Volterra às economias em desenvolvimento

Abstract

Mostramos em nosso modelo básico que economias formadas exclusivamente por produtores e parasitas podem cair em armadilhas de pobreza, desde que ambos grupos se comportem de acordo com a dinâmica de Lotka-Volterra. Contudo, a introdução de um limite para o crescimento do produto e de expectativas por parte dos agentes exclui o resultado de armadilha em seus múltiplos equilíbrios. Nossa conclusão, entretanto, é similar para ambos modelos estudados: melhora na proteção aos direitos de propriedade por parte do Estado pode fazer com que a armadilha de pobreza seja superada, no modelo básico; e afetar a estabilidade dos equilíbrios, no modificado, fazendo com que resultados econômicos com maior produto tornem-se estáveis.

2.1 Introdução

Uma característica comum entre as economias em desenvolvimento é a presença em grande número de empreendimentos improdutivos, os quais se financiam e sobrevivem somente às custas de atividades produtivas. Essas atividades parasitas assumem diversas formas, que vão desde organizações criminosas violentas e armadas, tais como a máfia, até quadrilhas que envolvam políticos corruptos. Apesar de não produzirem, os parasitas têm o mesmo objetivo de uma empresa regular, o lucro. As consequências da atividade parasita para economia podem ser muito sérias, a ponto de se cair em uma armadilha de pobreza (MEHLUM; MOENE; TORVIK, 2003b).

Um meio comum de parasitas agirem é através de extorsões de pequenos negócios, fornecendo em contrapartida, por exemplo, proteção e garantia que contratos serão cumpridos. Este é o conhecido *modus operandi* da máfia, retratado inclusive no cinema²: a “solução de problemas”, que normalmente deveria ser feita pelo Estado, é executada por grupos violentos, os quais extorquem os envolvidos. Mesmo sendo possível encontrar exemplos de tais grupos em países desenvolvidos (vide o exemplo da máfia siciliana), a presença destes parasitas é muito maior em países em desenvolvimento, em especial nas economias em transição do leste europeu. Nestas regiões o vácuo institucional forneceu as condições necessárias para o aumento de todo tipo de atividade informal, inclusive a ação de grupos improdutivos e violentos (CAMPOS, 2000).

²Coppola (1972) com seu clássico *The Godfather* (O poderoso chefão, em português), vencedor do Oscar de melhor filme do mesmo ano, é provavelmente o mais famoso filme sobre o comportamento mafioso. A cena inicial mostra diversas pessoas indo até Don Vito Corleone (Marlon Brando), chefe da máfia, para lhe pedir favores e resolução dos mais diversos problemas. Os pedidos são atendidos, com a ressalva de que poderão custar outro “favor” em troca em algum momento futuro.

Um relato interessante da ação parasita na Rússia pós-comunista é fornecido por Volkov (1998). Neste país, segundo dados do Ministry of Internal Affairs, citado no próprio artigo, em janeiro de 1994, organizações criminosas controlavam ou eram proprietárias (em termos não especificados) de 40 mil empresas, incluindo duas mil no setor estatal. A diversidade de atuação destes grupos é tamanha que o autor ainda classifica a estrutura da “empresa da violência” no país em três tipos: estatal e ilegal (unidades de polícia estatal e forças de segurança agindo como empresas privadas); não estatal (privada) e legal (companhias de proteção privada); e privada e ilegal (organizações criminosas e grupos de bandidos). Naim (2006) é outro trabalho a mostrar como a reestruturação soviética abriu possibilidades para lucrativas atividades ilícitas ao eliminar controles governamentais e criar uma região “sombria” na economia.

A América Latina também é cenário de inúmeras atividades ilícitas, mesmo que algumas não possam ser consideradas parasitas em um sentido direto. Um dos principais negócios ilegais que figura na região é o tráfico de drogas. Países como Brasil, Colômbia e México são mundialmente conhecidos por suas organizações nesta atividade criminosa³. Traficantes e outros tipos de criminosos necessitam, entretanto, de empreendimentos legais nos quais possam “transformar” seu lucro ilegal em dinheiro limpo. Esta é a maneira mais comum com que o tráfico de entorpecentes se relaciona com atividades parasitas: a lavagem de dinheiro⁴. A existência do Black Market Peso Exchange (BMPE), esquema no qual traficantes colombianos - posteriormente também mexicanos - repatriam lucros ao confiar seu dinheiro aos corretores, que, em nome dos clientes colombianos, usam os fundos para compras nos Estados Unidos, com uma taxa de câmbio favorável, exemplifica esta relação (NAIM, 2006).

Para se ter uma ideia da dimensão, em números, das consequências da ação parasita à economia, vejamos o caso da pirataria, uma das atividades deste setor mais disseminadas no mundo. Com a crescente globalização, não há setor produtivo da economia que esteja a salvo da falsificação. A gama de produtos copiados vai de armas a perfumes, carros a tênis de corrida, medicamentos a máquinas industriais e, mais recentemente, tem se destacado com softwares, filmes e músicas. Segundo Naim (2006), as companhias norte-americanas, por exemplo, estimam entre 200 e 250 bilhões de dólares a receita anual que perderam devido às falsificações. Já a União Européia avalia que o seu custo, em decorrência das cópias ilegais, em termos de perda de empregos chegue a 100 mil⁵.

O que todos os exemplos de atividade parasita citados têm em comum é o fato de eles

³Para se ter uma ideia do poderio que o tráfico alcançou em alguns países da América Latina, Pablo Escobar Gaviria, o famoso chefe das drogas, em seu apogeu, ofereceu-se para pagar toda a dívida externa da Colômbia (NAIM, 2006).

⁴Em algumas regiões o tráfico de drogas pode exercer papel semelhante ao da máfia, ao substituir atividades que deveriam ser monopólios estatais, como o cumprimento de contratos, por exemplo. Esse é o caso das favelas cariocas, entre outros locais dominados por essa atividade.

⁵A administração pública também é afetada pelo comércio de produtos falsificados. Naim (2006) cita que, em 2003, o estado de Nova Iorque deixou de arrecadar US\$ 1,6 bilhões em impostos devido à pirataria.

obterem sucesso e conseguirem se reproduzir de forma mais eficiente em economias onde o Estado falha em garantir os direitos de propriedade. De fato, é intuitivo observar que sociedades onde a legislação sobre propriedade privada é obscura ou inexistente e o poder de polícia e de *enforcement* de contratos é fraco, criam incentivos para empresas que atuam nessa lacuna institucional prosperarem. O título do artigo de Volkov (1998), neste sentido, é emblemático, “Who is strong when the state is weak: violent entrepreneurs in post-communist Russia”. Como se nota, o autor sugere que a fraqueza do Estado fortalece os parasitas⁶.

Para entender a relação do Estado com esta classe de agentes, é importante destacar que, baseado na definição dada acima, a apropriação de renda parasita é diferente de um *rent-seeking* padrão. Este captura renda de uma forma direta, de um Estado ativo - e frequentemente grande - através de regulação de negócios privados, por exemplo. A ação parasita, por sua vez, aproveita-se de lacuna deixadas pela ausência e ou fraqueza do Estado. Enquanto *rent-seeking* distorce decisões políticas via atividades de influência que desperdiçam recursos⁷, apropriação de renda parasita desafia o monopólio estatal sobre a tributação, proteção e legitimação da violência (MEHLUM; MOENE; TORVIK, 2003b). Ao longo do trabalho este será o conceito de atividade parasita adotado.

O objetivo deste trabalho é modelar a dinâmica populacional de produtores e parasitas em uma economia em desenvolvimento e mostrar que, na ausência de melhora nos parâmetros institucionais, tal sociedade tende a cair em uma armadilha de pobreza. Para tal, utilizaremos o modelo de Lotka-Volterra, que descreve a evolução ao longo do tempo da quantidade de presas e predadores em um ambiente ecológico. A ideia é tratar produtores como presas e parasitas como predadores. A dinâmica se dará através da hipótese de que os parasitas só sobrevivem e se multiplicam às custas dos produtores e estes, por sua vez, têm seu crescimento afetado pelas ações de extorção daqueles.

Nosso modelo básico encontra um equilíbrio que não pode ser classificado como estável nem instável, porque desvios deste ponto apresentam uma dinâmica cíclica entre produtores e parasitas. Dessa forma, a população destes dois grupos oscila ao longo do tempo e acaba sempre retornando aos valores anteriores. Quando a produção em equilíbrio é muito pequena, consideraremos que a economia está em uma armadilha de pobreza, tal que a única maneira de passarmos a um equilíbrio superior (com um maior número de produtores) é através de mudanças nos parâmetros institucionais, que representam garantia aos direitos de propriedade. Nossa principal conclusão é que a superação de tais armadilhas (baixo número de produtores) só é possível com melhora institucional.

⁶Coppola (1972) também mostra como a ausência ou fraqueza do Estado pode criar condições para ações parasitas. Na cena inicial, o primeiro a pedir solução de problemas a Don Corleone é Bonasera (Salvatore Corsitto), proprietário de uma funerária. Este relata que sua filha foi agredida por dois homens e pede justiça, já que a polícia americana não agiu como desejava. A resposta de Don Vito é ilustrativa: “Why did you go to the police? Why didn’t you come to me first?”.

⁷Sobre a definição clássica de *rent-seeking*, ver Krueger (1974).

Ao modificarmos o modelo básico para incorporar a defasagem na resposta populacional dos parasitas a modificações no número de produtores e um limitante para a população destes agentes - que pode ser visto como o produto potencial da economia - não temos mais o resultado cíclico de armadilha de pobreza. Apesar disso, a melhora nos valores dos parâmetros institucionais referentes à proteção da propriedade privada tem o papel fundamental de fomentar o desenvolvimento através do aumento do nível de produtores - e agora também através de uma redução do número de parasitas. A ação estatal de melhora em tais parâmetros também afetará a estabilidade dos equilíbrios em nosso novo modelo, de modo que pode-se estabilizar resultados com produto maior usando o poder de polícia, por exemplo.

Nosso artigo contribui com a literatura de modelos microfundamentados de desenvolvimento econômico que levam em conta o ambiente institucional e suas influências no crescimento⁸. Os trabalhos que mais nos aproximamos são Mehlum, Moene e Torvik (2003a) e Mehlum, Moene e Torvik (2003b), os quais consideram na economia somente a presença dos mesmos dois grupos de agentes estudados aqui e analisam sua influência na dinâmica do produto⁹. Adicionalmente, temos em comum com os dois trabalhos supracitados a hipótese de que a raiz do problema do desenvolvimento está no fraco *enforcement* da lei por parte do Estado. Já a principal diferença¹⁰ entre nossos resultados está na maneira da superação da pobreza: enquanto concluímos que este papel deve ser exercido exogenamente pela melhora institucional, eles encontram uma solução endógena, baseada principalmente em um grande aumento do fluxo de empreendedores na economia.

Com relação ao uso do modelo de Lotka-Volterra na Economia, seguimos a tradição de Goodwin (1967), que é o primeiro a aplicá-lo com sucesso. Baseado na ideia marxista de que a alternância entre altos e baixos do capitalismo pode ser explicada pela interação dinâmica entre lucros, salários e emprego, o autor modela os salários como predadores e o lucro como presas. A altos níveis de emprego, o poder de barganha dos trabalhadores aumenta os salários e, em consequência, diminui lucros. Conforme os lucros diminuem, uma quantidade menor de trabalhadores será contratada e o emprego diminuirá, elevando, ao final, os lucros. Seguindo o raciocínio, lucros maiores levarão a maiores níveis de emprego e, dessa forma, um padrão cíclico emerge.

Entre todas suas extensões¹¹, uma das mais inovadoras é a proposta por Vadasz (2007), que apresenta uma variação do modelo original de Goodwin (1967) com o intuito de mo-

⁸Um bom *survey* de modelos de desenvolvimento microfundamentados pode ser encontrado em Besley e Gathak (2010).

⁹Nesse sentido, nosso trabalho também se assemelha a abordagem de Grossman e Kim (1997) e Grossman (1998), que estudam modelos de equilíbrio geral onde os agentes podem escolher entre ser produtor ou parasita, de acordo com qual setor é mais lucrativo.

¹⁰Esta não é única diferença relevante entre os trabalhos. Mehlum, Moene e Torvik (2003a) e Mehlum, Moene e Torvik (2003b) utilizam como base de sua dinâmica, por exemplo, modelos de industrialização, não tratados aqui.

¹¹As principais são Desai (1973), Shah e Desai (1981), Wolfstetter (1982), van der Pleog (1987) e Sportelli (1995), além do próprio Goodwin (1972, 1990).

delar um cenário mais realista: uma economia que tenha salários reais e emprego estáveis, mas na qual pequenas mudanças podem forçá-la a entrar em um movimento cíclico; ainda, mudanças mais drásticas podem levar tal economia a se comportar de maneira caótica. Para tal tarefa, é adicionado ao tradicional sistema de predador-presa uma limitação quanto à magnitude do emprego - para esta não superar o valor de pleno emprego. Além disso, é incorporada a defasagem entre mudanças no emprego e seus efeitos nos salários, a qual é devida, principalmente, a falhas informacionais da economia. Utilizaremos em nosso modelo as mesmas modificações propostas por Vadasz (2007).

O artigo está dividido como segue. Além desta introdução e breve revisão da literatura, organizamos o estudo em mais quatro seções. Seção 2.2 apresenta nosso modelo básico de dinâmica entre produtores e parasitas baseado no de Lotka-Volterra, bem como as inclusões necessárias para chegarmos ao modelo modificado e mais realista. Ainda nesta seção é discutida a estabilidade dos equilíbrios obtidos. As implicações econômicas e de política destes resultados estão na seção 2.3, onde também é estudado a possibilidade de superação de armadilhas de pobreza. Seção 2.4 conclui, seção 2.5 apresenta as referências e seção 2.6 traz um apêndice com definições auxiliares e demonstrações de todos os resultados do trabalho.

2.2 Dinâmica entre produtores e parasitas

No que segue denotaremos as variáveis de interesse por letras minúsculas do alfabeto latino e os parâmetros exógenos por letras minúsculas do alfabeto grego. Também usaremos a notação convencional de derivada com relação ao tempo, t , representada por um ponto sobre a variável. Dessa forma, $\dot{a} = \frac{da}{dt}$, representa a variação da variável a ao longo do tempo. Ainda, assumiremos que todas as variáveis são continuamente diferenciáveis o número de vezes necessário no domínio de interesse.

2.2.1 O modelo básico

Vamos considerar uma economia em desenvolvimento onde existem dois tipos de agente, produtores, presentes em quantidade x , e parasitas, em quantidade y . Os produtores são indivíduos e firmas que se engajam em atividades produtivas legais, fazendo o produto da economia crescer. Estes são os únicos agentes a produzir. Vamos fazer a hipótese simplificadora de que todos os produtores são idênticos e cada um produz apenas uma unidade de produto, de maneira que o produto total da economia também será igual a x . Assumiremos também que não existem barreiras à entrada e à saída e que o mercado de fatores é capaz de atender a demanda dos produtores sem afetar seu custo. A única limitação para o número de produtores, inicialmente, é a demanda pela sua produção.

Já os parasitas são os agentes definidos na introdução, aqueles que só existem devido a não existência ou má definição de direitos de propriedade na economia. Estes agentes se apropriam de parte da produção dos produtores e alimentam seu negócio através da extorção e de outros meio ilegais. Como citado acima, os parasitas não desempenham atividade produtiva, tal que seu produto é zero. Assumiremos que seu custo é nulo e a inexistência de barreiras à entrada e saída. Dessa forma, a dinâmica destas duas populações na economia pode ser descrita, inicialmente, pelo sistema

$$\dot{x} = \alpha_1 x - \gamma_1 xy \quad (2.1)$$

$$\dot{y} = \theta_1 xy - \beta_1 y, \quad (2.2)$$

onde x é a densidade (quantidade) de agentes produtores na economia, y a densidade de parasitas, α_1 a taxa (constante) de crescimento dos produtores (taxa de lucro das atividades produtivas), β_1 a taxa (constante) de desaparecimento dos parasitas (devido à atuação da autoridade estatal e de seu poder de polícia, uma variável de coerção às atividades parasitas), γ_1 a taxa de desaparecimento dos produtores devido à extorção (uma variável que mede o quanto os agentes produtivos são sensíveis às ações ilegais dos parasitas) e θ_1 a taxa de conversão da extorção em mais parasitas (o quanto da extorção é usado no aumento da indústria ilegal, uma boa *proxy* é a taxa de lucro dos parasitas).

A equação (2.1) nos diz que a quantidade de produtores na economia crescerá quanto maior for sua taxa de lucro, α_1 , o que atrairá mais empresas e indivíduos para as atividades produtivas, e decrescerá quanto maior for a sua sensibilidade à extorção praticada pelos agentes parasitas, γ_1 , o que incentivará a saída do negócio. Da mesma forma, a equação (2.2) indica um aumento da população de parasitas conforme sua taxa de lucro, θ_1 , aumenta, atraindo novos agentes deste grupo, e uma diminuição conforme aumenta a taxa de coerção de suas das atividades por parte do Estado, β_1 . Note que, por estarmos trabalhando com taxas, todos os parâmetros são não negativos e pertencem ao intervalo $[0, 1]$ ¹².

O sistema de equações acima é idêntico ao modelo de representação da dinâmica populacional de presas e predadores em uma ambiente ecológico de Lotka-Volterra. A dinâmica entre produtores e parasitas, portanto, seguirá sua mesma lógica: quanto maior o número de parasitas, menor o crescimento de produtores e, por outro lado, quanto maior o número de produtores, maior o crescimento dos parasitas. O mecanismo que rege essa dinâmica pode ser entendido através da definição de parasita: a extorção praticada por este setor desestimula a entrada de novos agentes na atividade produtiva e ainda expulsa alguns que já eram produtores, enquanto uma maior quantidade de potenciais produtores a serem extorquidos incentiva um aumento da quantidade de agentes praticando atividade

¹²As taxas de lucro, α_1 e θ_1 podem ser superiores a 1, mas a título de simplificação, assumiremos que $\alpha_1, \theta_1 \in [0, 1]$.

parasita.

As hipóteses subjacentes a dinâmica descrita acima são as seguintes: (i) a população de produtores encontra todas as condições necessárias para a produção em qualquer período de tempo, ou, em outras palavras, não há limitações para a produção; (ii) a oferta de condições necessárias à atividade parasita depende inteiramente da população de produtores, dado seu caráter de extorção; (iii) as taxas de mudança das populações são proporcionais ao seu tamanho, ou, dito de outra forma, as taxas de lucro induzem a variação nas populações; e (iv) durante toda a dinâmica o ambiente não muda em favor de nenhuma das populações.

Perceba no sistema (2.1)-(2.2) que, além da interação com o outro grupo de agentes, as variações nas populações de produtores e parasitas dependem de um conjunto de parâmetros exógenos. Tal conjunto pode ser afetado por políticas públicas e, como será visto à frente, guiará nossos principais resultados. A proposição abaixo mostra o papel de dois deles na dinâmica do modelo. As provas deste e de todos os demais resultados do trabalho encontram-se no apêndice.

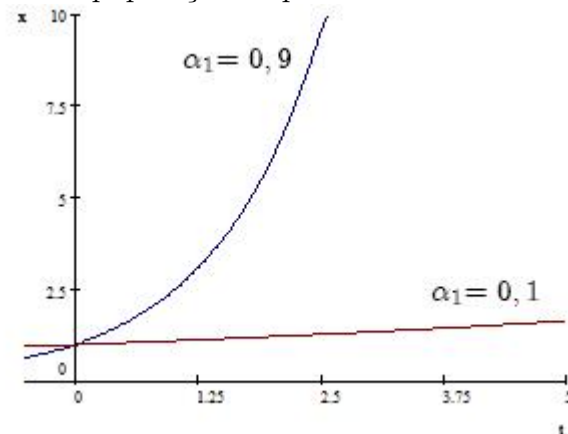
Proposição 2.1 *Considere o sistema (2.1)-(2.2). Então:*

(i) *Na ausência de parasitas, a população de produtores cresce exponencialmente a uma taxa constante $\alpha_1 > 0$.*

(ii) *Na ausência de produtores, a população de parasitas decai exponencialmente até a extinção a uma taxa constante $\beta_1 > 0$.*

O resultado acima é intuitivo na medida que conhecemos a dinâmica entre os dois setores: na ausência de um grupo que extrai parte de sua renda, o número de produtores crescerá sem limitações e, por outro lado, na ausência de produtores, os parasitas não encontram meio de sobreviverem, dado que “se alimentam” das atividades produtivas, e desaparecem da economia.

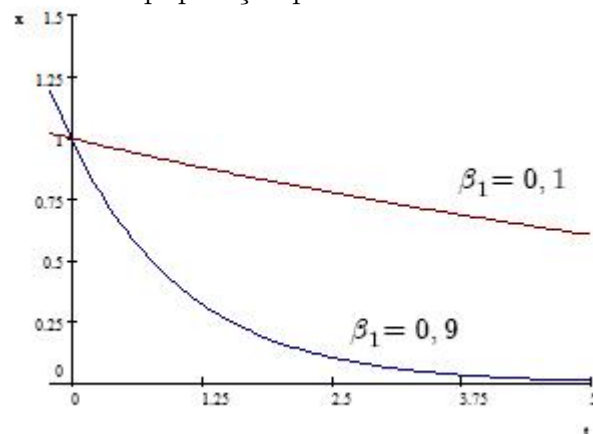
Figura 1: Dinâmica da população de produtores na ausência de parasitas



Fonte: elaboração própria.

A figura 1 acima ilustra o crescimento citado no item (i) da Proposição 1 para os valores de $\alpha_1 = 0,1$ e $\alpha_1 = 0,9$. Note que quanto maior a taxa de lucro do setor, mais rápido é o crescimento dos produtores. Já o item (ii) é exemplificado na figura 2. Os valores usados para β_1 foram os mesmos 0,1 e 0,9. Agora quanto mais efetiva for a ação estatal no combate às atividades parasitas, mais rápido será o decaimento da sua população até a extinção.

Figura 2: Dinâmica da população parasita na ausência de produtores



Fonte: elaboração própria.

2.2.2 Equilíbrios e estabilidade do sistema

O equilíbrio do sistema ocorre quando o nível de nenhuma das populações está mudando. A proposição abaixo mostra que existem dois equilíbrios em (2.1)-(2.2).

Proposição 2.2 *Considere o sistema (2.1)-(2.2). Então, temos os seguintes equilíbrios $E_1 = \{x = 0, y = 0\}$ e $E_2 = \{x = \frac{\beta_1}{\theta_1}, y = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\}$.*

O primeiro equilíbrio representa a extinção de ambos os grupos. Com a ausência de produtores e parasitas, a economia permanecerá assim indefinidamente. Já o segundo equilíbrio representa um ponto no qual tanto produtores quanto parasitas sustentam o tamanho de suas populações - em um número positivo - e, em nosso modelo simplificado, na ausência de choques externos, permanecerão assim indefinidamente. Como pode ser visto, o nível de cada população dependerá exclusivamente dos parâmetros exógenos do sistema dinâmico (2.1)-(2.2). Veremos à frente como isso pode levar a uma armadilha de pobreza.

Note neste segundo equilíbrio, ainda, que a população de produtores permanece constante quando o seu número iguala a razão entre a taxa de desaparecimento dos parasitas (devido à atuação coercitiva da autoridade estatal) e a taxa de conversão da extorção em mais parasitas (taxa de lucro dos parasitas). Da mesma forma, a quantidade de parasitas na economia não muda quando a quantidade atual deste grupo iguala a razão entre a taxa de crescimento dos produtores (taxa de lucro das atividades produtivas) e a taxa de desaparecimento dos produtores devido à extorção dos parasitas (medida de sensibilidade dos produtores à atividade parasita). Em outras palavras, o número de agentes produtivos (parasitas) se mantém inalterado quando iguala a razão entre desincentivos e incentivos à entrada nas atividades parasitas (produtivas).

Após a identificação dos equilíbrios, veremos como desvios destes pontos provocados por choques exógenos afetam a dinâmica do modelo. Para a análise da estabilidade usaremos a linearização do sistema (2.1)-(2.2), obtendo sua matriz Jacobiana:

$$J_1(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \gamma_1 y & -\gamma_1 x \\ \theta_1 y & \theta_1 x - \beta_1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Quando avaliada nos equilíbrios, seus autovalores nos fornecem informações sobre a estabilidade do ponto. Proposição 2.3 trata da estabilidade na origem.

Proposição 2.3 *O equilíbrio $E_1 = \{x = 0, y = 0\}$ do sistema (2.1)-(2.2) é um ponto de sela.*

Embora em equilíbrio este ponto seja de pouco interesse - já que ambos grupos estão ausentes -, estudar sua estabilidade é importante. Note que se tal equilíbrio fosse estável,

populações em quantidade positivas poderiam ser atraídas em direção a si, de tal maneira que a dinâmica do modelo levaria a extinção tanto de produtores quanto de parasitas para muitos casos de níveis iniciais de populações de ambos os grupos. Contudo, dado que o ponto é de sela e, portanto, instável, a extinção é um resultado difícil de ocorrer no modelo. De fato, a única possibilidade de ocorrência de extinção seria se os produtores fossem artificialmente erradicados, de modo que os parasitas não teriam quem extorquir e também acabariam por desaparecer da economia.

Proposição 2.4 *O equilíbrio $E_2 = \{x = \frac{\beta_1}{\theta_1}, y = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\}$ do sistema (2.1)-(2.2) não é hiperbólico, ou seja, não é estável nem instável.*

Como os autovalores da matriz (2.3) avaliada em E_2 são puramente imaginários, nenhuma conclusão pode ser obtida através da análise linear. Entretanto, a proposição abaixo fornece um resultado auxiliar no entendimento da dinâmica na vizinhança desse equilíbrio.

Proposição 2.5 *O sistema (2.1)-(2.2) se move em órbitas fechadas, além disso admite uma constante de movimento $C = x^{\beta_1} y^{\alpha_1} e^{-\theta_1 x - \gamma_1 y}$.*

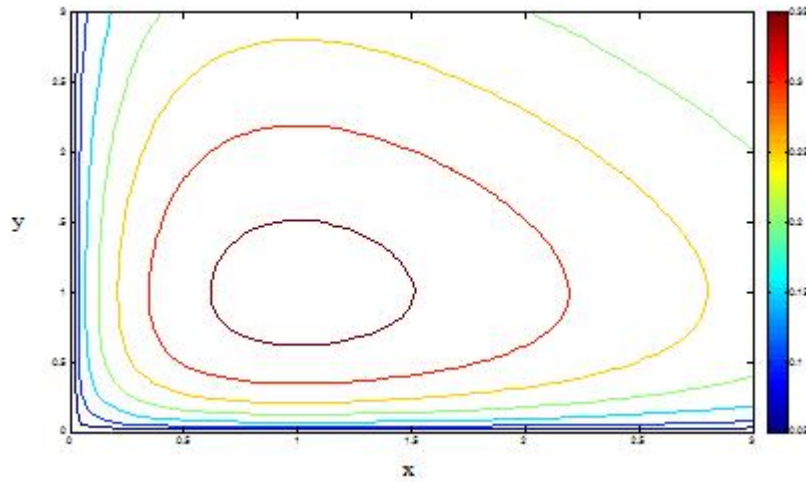
A proposição 2.5 nos diz que os níveis das populações de produtores e parasitas oscilam ao redor do equilíbrio $E_2 = (\frac{\beta_1}{\theta_1}, \frac{\alpha_1}{\gamma_1})$ de forma cíclica. Ainda, através do seguinte problema de maximização

$$\max_{x,y>0} x^{\beta_1} y^{\alpha_1} e^{-\theta_1 x - \gamma_1 y} \quad (2.4)$$

é possível notar que o maior valor da constante C é $C^* = \left(\frac{\alpha_1}{\gamma_1 e}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\beta_1}{\theta_1 e}\right)^{\beta_1}$, alcançado justamente no ponto de equilíbrio, $E_2 = (\frac{\beta_1}{\theta_1}, \frac{\alpha_1}{\gamma_1})$. Intuitivamente, o que este resultado nos diz é que a duração dos ciclos das populações de produtores e parasitas dependerá da quantidade inicial de cada grupo e, principalmente, dos valores dos parâmetros exógenos o modelo.

Portanto, a dinâmica cíclica do nosso modelo se dá da seguinte forma: os parasitas aumentam em número quando existe uma grande quantidade de produtores para extorquirem, mas ao praticarem a extorção incentivam agentes produtivos a abandonar a economia e diminuem suas possibilidades de extorção, fazendo, então, com que sua própria população decline. Dessa forma, a população parasita torna-se baixa, fazendo com que a quantidade de produtores aumentem novamente. Esta dinâmica constitui um ciclo de crescimento e declínio de ambos os grupos. A figura 3 mostra o comportamento cíclico de ambas populações para o conjunto de parâmetros $\alpha_1 = \theta_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0,5$ e diversos valores de C .

Figura 3: Comportamento cíclico de produtores e parasitas



Fonte: elaboração própria.

2.2.3 Modelo modificado: adicionando expectativas e limitando o número de produtores

O modelo básico apresentado acima assume que não existem limites para as quantidades de produtores e parasitas na economia. Em particular, na ausência deste último grupo, vimos que a população de agentes produtivos cresce exponencial e indefinidamente a uma taxa constante. Isso significa que, em uma economia composta apenas por produtores, o produto crescerá rapidamente e de maneira ilimitada. Da mesma forma, tal hipótese implica que a taxa de ingresso de novos agentes na atividade produtiva não é afetada pela quantidade de produtores já estabelecidos. Isto implica em uma demanda crescente a mesma taxa, tal que todo novo produtor conseguirá ter sua produção vendida. A lucratividade do setor produtivo é independente do número de agentes produtivos. Claramente, estas hipóteses são um tanto fortes para serem feitas em um modelo econômico.

Para superar a dificuldade acima e incorporar mais realidade ao nosso modelo, assumiremos que a população de produtores cresce conforme uma (saturação) função logística. Formalmente, temos agora

$$\dot{x} = \alpha_2 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - \gamma_2 xy. \quad (2.5)$$

Proposição 2.6 *A solução da equação (2.5), que rege a nova dinâmica populacional de produtores é dada, na ausência de parasitas, por*

$$x = \frac{Kx_0e^{\alpha_2 t}}{K + x_0(e^{\alpha_2 t} - 1)}, \quad (2.6)$$

onde K é uma constante positiva e x_0 a população inicial de produtores.

A proposição abaixo resume o comportamento da população de produtores ao longo do tempo neste novo modelo.

Proposição 2.7 *Assuma que a população de produtores na ausência de parasitas apresenta a dinâmica expressa em (2.6). Então:*

(i) *Se a população inicial de produtores é menor do que K , x é crescente ao longo do tempo.*

(ii) *Se a população inicial de produtores é maior do que K , x é decrescente ao longo do tempo.*

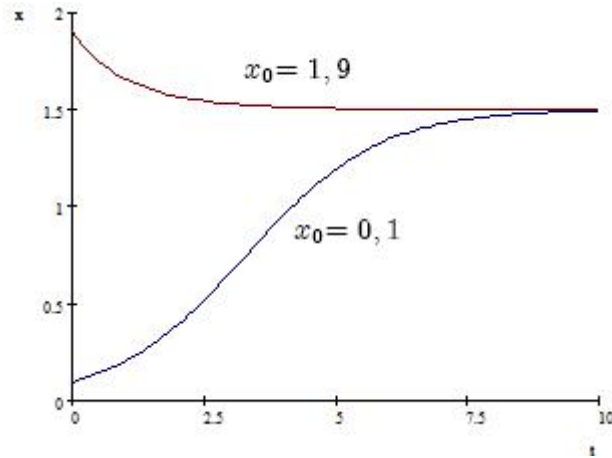
(iii) *Em ambos os casos, todas as soluções tenderão a K conforme o tempo cresce infinitamente.*

Repare que a nova dinâmica da população de produtores - e, conseqüentemente, do produto da economia - implica que, no longo prazo, na ausência de parasitas, seu número convergirá para uma constante. Esta hipótese pode ser interpretada de duas maneiras¹³. Por um lado, ela supera a dificuldade apresentada na seção anterior, segundo a qual poderiam haver infinitos agentes dispostos a ingressar nas atividades produtivas atraídos pela taxa de lucro constante. Agora, o número de produtores já estabelecidos afeta a atratividade do setor. Se, por exemplo, em uma economia sem parasitas existir um número inicial excessivo de produtores ($K < x_0$), pela Proposição 2.6 a variação na população será negativa, indicando que existe um excesso de oferta na economia, diminuindo a atratividade do setor. Repare que não precisamos mais assumir que a demanda cresce na mesma magnitude dos produtores, como na seção anterior.

A hipótese representada nas equações (2.5) e (2.6) também pode ser vista indicando o produto potencial da economia na passagem de uma economia em desenvolvimento - definida aqui como aquela com grande presença de parasitas - para uma economia completamente desenvolvida (ausência total de parasitas). Vimos na seção anterior que, dada a dinâmica cíclica das populações, esta mudança não é algo trivial, mas assumindo um cenário hipotético, temos que uma economia que consiga eliminar a quantidade de agentes que vivem de extorção terá seu produto convergindo, no longo prazo, para uma constante K . Embora a imposição de tal limite possa parecer restritiva, lembre que este só será efetivo na ausência completa de parasitas, algo que não acontecerá no nosso modelo. De fato, nosso modelo é adequado para representar a dinâmica entre os dois setores da economia, desde que ambos em quantidade positiva. Para economias formadas unicamente por agentes produtivos os modelos tradicionais de crescimento se mostram mais eficientes. Figura 4 abaixo mostra o comportamento de (2.6) para $K = 1,5$ e dois valores diferentes de população inicial, maiores e menores que K .

¹³Em um ambiente ecológico, $K > 0$ é a “capacidade de carregamento” (*carrying capacity*) do ambiente com respeito à presa. Já Vadasz (2007) usa $K = 1$ para limitar a taxa de emprego da economia.

Figura 4: Dinâmica da população produtora, limitada pela quantidade K, na ausência de parasitas



Fonte: elaboração própria.

A segunda modificação para tornar nosso modelo mais realista inclui a incorporação de defasagem na relação entre produtores e parasitas. Um aumento na quantidade de parasitas na economia não tem um efeito instantâneo sobre a quantidade de produtores e vice-versa. De fato, existe um intervalo entre o aumento de uma população e a percepção e resposta de outra. Os potenciais parasitas, por exemplo, só percebem o aumento na quantidade de produtores e uma maior disponibilidade de alvos para a extorção certo tempo depois do aumento e, então, decidem ingressar no setor. Esta defasagem pode ser provocada pelo fato de que nem toda atividade produtiva é imediatamente mensurável¹⁴. Especificamente, assumiremos que o setor parasita possui menos informação disponível - talvez devido a seu menor nível de organização, já que trata-se, na grande maioria das vezes, de atividades ilegais - do que o produtivo, tal que a resposta da sua população às mudanças na quantidade de produtores não será instantânea.

A defasagem descrita acima pode ser modelada ao inserirmos na equação (2.2) uma função peso que leva em conta movimentos passados da população produtora. Formalmente, vamos substituir x na equação (2.2) por

$$z = \int_0^t x(\tau)G(t - \tau)d\tau \quad (2.7)$$

onde $G(\cdot)$ é uma função peso, não negativa e integrável, com a propriedade de

$$\int_{-\infty}^t G(t - \tau)d\tau = \int_0^{\infty} G(s)ds = 1. \quad (2.8)$$

O modelo presa-predador apresenta uma problema sério no que diz respeito a sua

¹⁴Outra possibilidade é ser causada por falhas informacionais, comuns nas economias em desenvolvimento.

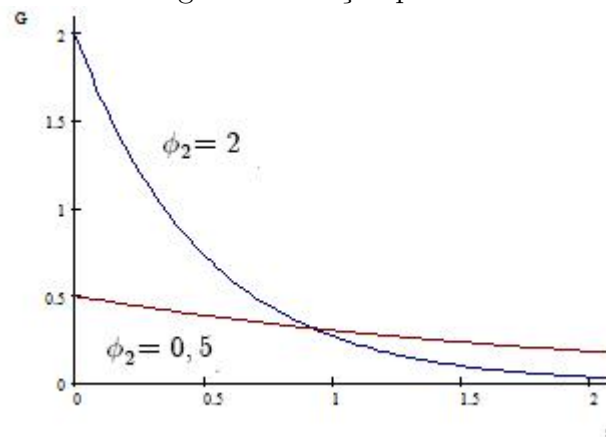
instabilidade estrutural¹⁵. Esta instabilidade significa que pequenas perturbações nas condições iniciais podem levar a comportamentos qualitativamente diferentes. Mais especificamente, soluções com condições iniciais (x_0, y_0) próximas do centro significam que (2.1) e (2.2) irão tender de volta a (x_0, y_0) , mas não se manterão a uma distância fixa do mesmo. Formalmente, os pontos do centro dos ciclos são quase-assintoticamente estáveis, mas são instáveis no sentido de Liapunov¹⁶. Tal instabilidade pode ser solucionada através da escolha correta da função peso G .

Uma alternativa sugerida na literatura¹⁷ é estudar o sistema com a seguinte função peso

$$G(s) = G_1(s) = \phi_2 e^{-\phi_2 s}, \phi_2 > 0. \quad (2.9)$$

A função acima indica que consideramos um desconto $\frac{1}{\phi_2}$ na reação dos parasitas às mudanças na quantidade de produtores na economia. A função G , ainda, possui a característica desejável de fazer com que níveis de população produtora que ocorreram em um passado distante (s grande) tenham um efeito menor sobre a quantidade de parasitas do que têm aqueles mais recentes. No limite, com s tendendo ao infinito, o efeito será nulo. Figura 5 apresenta o comportamento de G para duas taxas de desconto diferentes, $\phi_2 = 2$ e $\phi_2 = 0,5$.

Figura 5: Função peso G



Fonte: elaboração própria.

Substituindo G em (2.7), temos um novo sistema para o nosso novo modelo de produtores e parasitas:

¹⁵O modelo de Goodwin (1967) sofre do mesmo problema. O autor tentou solucioná-lo em Goodwin (1972).

¹⁶Definições de estabilidade são encontradas no apêndice.

¹⁷Por exemplo, Vadasz (2007), Farkas (1984a, 1984b, 1987) e Farkas e Farkas(1988a) optam por tal função.

$$\dot{x} = \alpha_2 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - \gamma_2 xy \quad (2.10)$$

$$\dot{y} = \theta_2 y \int_0^t x(\tau) \phi_2 e^{-\phi_2(t-\tau)} d\tau - \beta_2 y. \quad (2.11)$$

Este aparentemente complicado sistema tem sido investigado por alguns autores da literatura em modelos da ecologia¹⁸. Para facilitar a sua resolução, usamos o seguinte resultado.

Proposição 2.8 *O sistema (2.10)-(2.11) é equivalente a*

$$\dot{x} = \alpha_2 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - \gamma_2 xy \quad (2.12)$$

$$\dot{y} = \theta_2 y z - \beta_2 y \quad (2.13)$$

$$\dot{z} = \phi_2 (x - z). \quad (2.14)$$

A interpretação econômica do nosso novo sistema é simples e mais realista do que o modelo básico: parasitas reagirão, aumentando ou diminuindo o seu número, não mais aos níveis atuais da população produtora, mas sim às expectativas dos níveis futuros, que são baseadas nas quantidades de produtores no passado. Expectativas mudarão e se corrigirão continuamente, como expressas por (2.14) no sistema acima.

2.2.4 Estabilidade e equilíbrio do sistema modificado

Nosso novo modelo apresenta um ponto de equilíbrio a mais do que o modelo básico, como descreve a Proposição 2.9.

Proposição 2.9 *Considere o sistema (2.12)-(2.14). Então, temos os seguintes equilíbrios* $E_3 = \{x = 0, y = 0, z = 0\}$, $E_4 = \{x = K, y = 0, z = K\}$ e $E_5 = \{x = \frac{\beta_2}{\theta_2}, y = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K}\right), z = \frac{\beta_2}{\theta_2}\}$.

Em termos de interpretação econômica, temos o equilíbrio trivial $E_3 = (0, 0, 0)$, com ausência de produtores e parasitas; $E_4 = (K, 0, K)$, que representa a economia no seu produto potencial, atingindo a quantidade máxima de produtores, K , e mínima (ausência) de parasitas; e $E_5 = \left[\frac{\beta_2}{\theta_2}, \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K}\right), \frac{\beta_2}{\theta_2}\right]$, com a presença em quantidade positiva de ambas populações, desde que $\beta_2 < \theta_2 K$. É importante observar que $\beta_2 > \theta_2 K$ implica em população parasita negativa, algo impossível. A variável z possui apenas um papel auxiliar, estritamente técnico. Note, ainda, que os valores de equilíbrio são independentes da taxa de desconto no tempo ϕ_2 .

¹⁸Farkas (1984a, 1984b, 1987) e Farkas e Farkas (1988a).

Repare na proposição acima que, se assumirmos que os parâmetros de (2.12)-(2.14) possuem os mesmos valores dos seus equivalentes em (2.1)-(2.2) (na notação empregada, $\psi_1 = \psi_2$, onde ψ é o parâmetro), a população de produtores em equilíbrio não se altera, enquanto que a de parasitas será menor, independente do valor de K . Dessa forma, ao levar em conta níveis defasados da população produtora ao formar suas expectativas, parasitas reduzem sua população, quando comparados ao ambiente sem expectativas.

Para tratar a estabilidade do sistema devemos considerar agora a seguinte matriz jacobiana:

$$J_2(x, y, z) = \begin{bmatrix} \alpha_2 \left(1 - \frac{2x}{K}\right) - \gamma_2 y & -\gamma_2 x & 0 \\ 0 & \theta_2 z - \beta_2 & \theta_2 y \\ \phi_2 & 0 & -\phi_2 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

O equilíbrio na origem continua a ser instável, o que garante que, partindo de uma situação com ambas populações em quantidade produtiva, não tenhamos uma extinção total.

Proposição 2.10 *O equilíbrio $E_3 = \{x = 0, y = 0, z = 0\}$ do sistema (2.12)-(2.14) é um ponto de sela.*

Além do resultado acima, temos agora que os demais equilíbrios não apresentam mais o comportamento cíclico do modelo básico. Começemos analisando a estabilidade de E_4 .

Proposição 2.11 *Considere o equilíbrio $E_4 = \{x = K, y = 0, z = K\}$ do sistema (2.12)-(2.14). Com relação à sua estabilidade temos que:*

- (i) se $\beta_2 > \theta_2 K$, então E_4 é assintoticamente estável;
- (ii) se $\beta_2 < \theta_2 K$, então E_4 é instável (ponto de sela ou explosivo);
- (iii) se $\beta_2 = \theta_2 K$, então E_4 é estável, mas não assintoticamente.

O que é relevante notar na Proposição 2.11 é que $\beta_2 \geq \theta_2 K$ é condição suficiente para a estabilidade de E_4 ($\beta_2 > \theta_2 K$ para estabilidade assintótica). Em outras palavras, se a coerção das atividades parasitas exercida pelo Estado for alta, quando comparada à taxa de lucro do setor ilegal ponderada pela quantidade máxima de produtores, temos a estabilidade de E_4 . Isso é explicado pelo fato de E_4 ser um equilíbrio onde os produtores estão em sua quantidade máxima e os parasitas não existem, de maneira que a ação coercitiva deve ser muito forte (ou a taxa de lucro parasita muito baixa) para que esta situação se mantenha estável.

O equilíbrio E_5 é o de maior interesse por apresentar quantidade positiva de ambas populações. A proposição abaixo trata de sua estabilidade.

Proposição 2.12 *Considere o equilíbrio $E_5 = \{x = \frac{\beta_2}{\theta_2}, y = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K}\right), z = \frac{\beta_2}{\theta_2}\}$ do sistema (2.12)-(2.14). Com relação à sua estabilidade temos que:*

- (i) se $\beta_2 < \theta_2 K$, então E_5 é assintoticamente estável;

- (ii) se $\beta_2 > \theta_2 K$, então E_5 é instável (ponto de sela ou explosivo);
 (iii) se $\beta_2 = \theta_2 K$, então E_4 é estável, mas não assintoticamente.

É possível observar que as condições para a estabilidade de E_5 são o inverso daquelas estabelecidas na Proposição 2.11, ou seja, para que tal equilíbrio seja estável é suficiente que $\beta_2 \leq \theta_2 K$ ($\beta_2 < \theta_2 K$ para estabilidade assintótica). Agora, por termos quantidade positiva de ambas populações, a atividade coercitiva não pode ser forte demais, caso em que poderia criar a extinção de parasitas ($\beta_2 = \theta_2 K$, por exemplo). Analisando por outro lado, a taxa de lucro parasita, ponderada pelo seu número potencial de presas, deve ser alta quando comparada à atividade de poder de polícia, para que este grupo não seja extinto.

2.3 Implicações de política e a armadilha da pobreza

Uma conclusão direta da seção 2.2.2, da proposição 2.5, em particular, é a de que uma economia em desenvolvimento, uma vez em equilíbrio, não conseguirá crescer de maneira contínua, quando for formada apenas por agentes produtivos e parasitas. A explicação está no fato de, segundo nosso modelo, a dinâmica da população destes dois grupos ser cíclica. Assim, mesmo com a ocorrência de algum choque que leve a um desvio do equilíbrio, o produto da economia não passará de um certo patamar, oscilando ao redor do equilíbrio. Produtores, únicos responsáveis pela riqueza da economia, terão seu número aumentado e diminuído, conforme a interação com os parasitas, mas não crescerão indefinidamente - a não ser, é claro, no caso da ausência de parasitas, como visto acima. Uma situação como essa pode ser caracterizada como armadilha de pobreza.

Definição 2.13 Dizemos que um equilíbrio E_i é uma armadilha de pobreza quando este é caracterizado por um baixo produto e a economia por si só, de forma endógena, não consegue superá-lo. Além disso, desvios de E_i levam a um comportamento cíclico ao seu redor¹⁹.

Perceba que definimos armadilha de pobreza de uma maneira um pouco distinta da usual na literatura. Adicionalmente, note que a definição implica a existência de algum limite (em princípio arbitrário), acima do qual o produto da economia passa a fazer parte de um equilíbrio que não constitui mais uma armadilha de pobreza. Outro ponto importante na definição acima é o comportamento não hiperbólico do equilíbrio, o qual cria o componente cíclico do produto. Dessa forma, o equilíbrio $E_2 = (\frac{\beta_1}{\theta_1}, \frac{\alpha_1}{\gamma_1})$ do sistema (2.1)-(2.2) pode ser considerado uma armadilha de pobreza dependendo do valor de seus parâmetros.

¹⁹Nossa definição difere da usual da literatura apenas pela inclusão do componente cíclico. Para um excelente *survey* sobre armadilhas de pobreza, veja Azariadis e Stachurski (2005).

O que argumentamos - e as evidências reportadas pela literatura na introdução corroboram - é que países em desenvolvimento apresentam valores para α_1 , β_1 , γ_1 e θ_1 que, frequentemente, levam a uma armadilha de pobreza. Consideremos um país em desenvolvimento qualquer que apresente baixa garantia aos direitos de propriedade dos seus cidadãos, refletido em altos γ_1 , a taxa de desaparecimento dos produtores devido à extorção dos parasitas (variável que mede a sensibilidade dos agentes produtivos aos parasitas) e θ_1 , a taxa de lucro da atividade parasita. O principal parâmetro a ser afetado por essas más intuições, contudo, é β_1 , a taxa (constante) de desaparecimento dos parasitas devido à atuação da autoridade estatal através de coerção às suas atividades, pois a efetividade do poder de polícia em tais países é baixa. Além disso, em países em desenvolvimento, a taxa de lucro de atividades produtivas, α_1 , tendem a ser pequenas. Dessa forma, $\frac{\beta_1}{\theta_1}$ torna-se uma razão pequena, podendo caracterizar uma armadilha de pobreza. O valor de $\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$, por sua vez, dependerá das magnitudes de α_1 e γ_1 .

Com baixa proteção à propriedade torna-se fácil para os parasitas extorquirem os agentes produtores. Isso é refletido na sensibilidade do número de parasitas, em equilíbrio, aos parâmetros institucionais. Da mesma forma, em equilíbrio, produtores são desencorajados a ingressar (ou permanecer) em seu setor pela ausência de segurança. A proposição abaixo resume a sensibilidade do comportamento de ambos grupos a mudanças nos parâmetros.

Proposição 2.14 *Considere o equilíbrio $E_2 = \left(\frac{\beta_1}{\theta_1}, \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \right)$ do sistema (2.1)-(2.2). Então:*

(i) *um aumento (diminuição) no poder de polícia, β_1 , provoca, ceteris paribus, um aumento (diminuição) na população de produtores;*

(ii) *um aumento (diminuição) na taxa de lucro parasita, θ_1 , provoca, ceteris paribus, uma diminuição (aumento) na população de produtores;*

(iii) *um aumento (diminuição) na taxa de lucro dos produtores, α_1 , provoca, ceteris paribus, um aumento (diminuição) na população de parasitas;*

(iv) *um aumento (diminuição) na taxa de desaparecimento dos produtores devido à ação parasita, γ_1 , provoca, ceteris paribus, uma diminuição (aumento) na população de parasitas.*

Uma implicação direta do resultado acima é a de que o Estado pode promover crescimento da produção - através do aumento da população produtora - melhorando seu poder de polícia, β_1 , e através de outras atividades que combatam e diminuam a taxa de lucro parasita, θ_1 . Dessa forma, como mostra o corolário abaixo, a autoridade estatal pode ser a força propulsora da superação da armadilha de pobreza em economias em desenvolvimento.

Corolário 2.15 *Considere uma economia representada pelo sistema (2.1)-(2.2). Assuma que a produção de equilíbrio é $\frac{\beta_1}{\theta_1} < M$, onde M é o nível de produção que define uma armadilha de pobreza para esta economia. Assuma também que a taxa de lucro da atividade*

produtiva e a taxa de desaparecimento de produtores devido às atividades parasitas estão fixas. Então a única maneira desta economia superar a armadilha de pobreza é através de melhora institucional da proteção à propriedade privada.

Embora em versões marginalmente diferentes, o resultado do corolário 2.15 está bem estabelecido na literatura. De fato, Acemoglu e Robinson (2008) e Azariadis e Stachurski (2005), entre outros, identificam diferentes tipos de armadilhas²⁰ no processo de desenvolvimento, superáveis através da melhora institucional. A afirmação acima é um tanto forte ao colocar nas mãos do Estado toda responsabilidade do desenvolvimento da economia. Porém, abstraindo as hipóteses simplificadoras de nosso modelo básico, o resultado capta um aspecto crucial do crescimento, relegado em muitas teorias de desenvolvimento: a criação - ou a melhora - de incentivos às atividades realmente produtivas e a promoção de esforços para desincentivar aquelas que não agregam valor - e, em nosso modelo, até mesmo desagregam. A grande contribuição do modelo de Lotka-Volterra ao nosso artigo é a percepção de que quando um incentivo é criado, esta ação afetará tanto produtores quanto parasitas.

Já no modelo modificado (2.12)-(2.14), nenhum dos equilíbrios é não hiperbólico e, portanto, não existe armadilha de pobreza. A inclusão de um limitante superior para a população produtora e da defasagem temporal ao nosso modelo básico eliminou o comportamento cíclico. Mesmo assim, as duas formulações mantêm similaridades quanto aos resultados. A principal delas é a importância da ação estatal na melhoria institucional da proteção à propriedade privada, gerando, assim, incentivos à produção.

Proposição 2.16 *Considere o equilíbrio $E_5 = \left(\frac{\beta_2}{\theta_2}, \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K} \right), \frac{\beta_2}{\theta_2} \right)$ do sistema (2.12)-(2.14) e assuma que $\beta_2 < \theta_2 K$. Então:*

(i) *um aumento (diminuição) no poder de polícia, β_2 , provoca, ceteris paribus, um aumento (diminuição) na população de produtores e uma diminuição (aumento) na população de parasitas;*

(ii) *um aumento (diminuição) na taxa de lucro parasita, θ_2 , provoca, ceteris paribus, uma diminuição (aumento) na população de produtores e um aumento (diminuição) na população parasita;*

(iii) *um aumento (diminuição) na taxa de lucro dos produtores, α_2 , provoca, ceteris paribus, um aumento (diminuição) na população de parasitas;*

(iv) *um aumento (diminuição) na taxa de desaparecimento dos produtores devido à ação parasita, γ_1 , provoca, ceteris paribus, uma diminuição (aumento) na população de parasitas;*

(v) *um aumento (diminuição) no produto máximo da economia, K , provoca, ceteris paribus, um aumento (diminuição) da população parasita.*

²⁰Acemoglu e Robinson (2008) utilizam o termo “cilada” para identificar a dificuldade nas reformas institucionais necessárias ao desenvolvimento.

Note que as Proposições 2.14 e 2.15 têm em comum a influência da melhora do poder de polícia (aumento de β_i) e da piora da taxa de lucro parasita (diminuição de θ_i) no aumento da produção de equilíbrio. Contudo, no modelo modificado a mudança nestes parâmetros apresenta um benefício para a economia ainda maior que no básico, pois também diminui a população parasita. Portanto, ao tornar nosso modelo mais realista, adicionando um limite para o crescimento populacional dos produtores e defasagens temporais, além de eliminarmos a armadilha de pobreza, obtemos uma influência ainda mais forte da melhora institucional no desenvolvimento econômico.

Com relação à taxa de lucro dos produtores, α_2 , e à taxa de desaparecimento destes devido à atividade parasita, γ_2 , os resultados do modelo modificado também são os mesmos do básico, desde que tenhamos uma quantidade positiva de parasitas ($\beta_2 < \theta_2 K$). Aumento (diminuição) em α_i e diminuição (aumento) em γ_i continuam a incentivar o crescimento parasita. Note que se o valor limite para a população produtora, K , for conhecido e a autoridade estatal tiver total controle sobre β_2 e θ_2 , esta pode escolher os valores de tais parâmetros de modo a fazer $\beta_2 = \theta_2 K$, implicando $y^* = 0$ e não haverá efeito de mudanças de α_2 e γ_2 sobre a população parasita.

Modificações na quantidade máxima de produtores da economia afetarão, em equilíbrio, somente a população parasita. Tal efeito será positivo, no sentido de que um K maior cria a possibilidade de aumento nas suas potenciais presas. Não haverá efeito sobre a população produtora porque seu crescimento depende apenas da população parasita e dos parâmetros do modelo. Observe também que, conforme K cresce indefinidamente a população parasita nos dois modelos se iguala²¹.

Melhora institucional que promova mudança nos parâmetros β_2 e θ_2 também podem afetar a estabilidade dos equilíbrios, conforme indicam as Proposições 2.11 e 2.12. O equilíbrio $E_4 = (K, 0, K)$, por exemplo, será assintoticamente estável se $\beta_2 > \theta_2 K$. Isso indica que uma condição suficiente para estabilidade é a taxa de desaparecimento de parasitas devido à ação estatal ser maior do que a taxa de lucro parasita ponderada pelo número máximo de produtores da economia. Dado que E_4 representa uma economia sem parasitas e com a quantidade máxima de produtores, para sua estabilidade é suficiente que os direitos de propriedade sejam muito bem protegidos (com alto β_2 e baixo θ_2 , por exemplo).

Quanto ao equilíbrio E_5 , a ação institucional sobre sua estabilidade é limitada, pois $\beta_2 > \theta_2 K$ implica em uma população parasita em quantidade negativa. Caso essa possibilidade fosse factível, a proposição 2.12 mostra que teríamos um resultado de instabilidade. Como os parasitas devem estar em uma quantidade não negativa na economia, os parâmetros β_2 e θ_2 podem ser escolhidos apenas para determinar se o equilíbrio estável será assintótico ou não. A condição suficiente para estabilidade, aqui, possui a desigual-

²¹Formalmente, $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K}\right) = \frac{\alpha_2}{\gamma_2}$.

dade na direção contrária daquela em E_4 porque agora o equilíbrio deve manter alguns parasitas na economia. Portanto, valores muito altos de β_2 quando comparados a $\theta_2 K$ podem desestabilizar o sistema e levar à extinção das atividades de extorção.

De uma maneira ou de outra, as decisões estatais com relação à proteção dos direitos de propriedade afetarão o crescimento de uma economia em desenvolvimento, principalmente através dos parâmetros que representam a ação coercitiva contra atividades parasitas e que reduzem sua taxa de lucro. Em um modelo mais básico, tais decisões podem ser responsáveis pela superação de armadilhas de pobreza. Já em um ambiente mais realista, mudança institucional pode afetar a estabilidade dos equilíbrios das populações produtoras e parasitas.

2.4 Considerações finais

Quando atividades como exercício do poder de polícia, taxação e proteção à propriedade privada não são monopólio do Estado, incentivos econômicos são deslocados da produção para a predação. Empresas ilegais baseadas nestas atividades são como parasitas, pois sobrevivem às custas de outros empreendimentos legalmente estabelecidos. Mostramos em nosso modelo básico que economias formadas exclusivamente por produtores e parasitas podem cair em armadilhas de pobreza, desde que ambos grupos se comportem de acordo com a dinâmica de Lotka-Volterra. Contudo, a introdução de um limite para o crescimento do produto e de expectativas por parte dos agentes exclui o resultado de armadilha em seus múltiplos equilíbrios. Nossa conclusão, entretanto, é similar para ambos modelos estudados: melhora na proteção aos direitos de propriedade por parte do Estado pode fazer com que a armadilha de pobreza seja superada no modelo básico, e afetar a estabilidade dos equilíbrios no modificado, fazendo com que resultados econômicos com maior produto tornam-se estáveis.

Algumas hipóteses do nosso modelo podem ser alvo de críticas. A existência de apenas dois tipos de agentes na economia, honestos e desonestos, pré dispostos às atividades produtivas e parasitas, respectivamente, é uma delas. Aqui excluimos o comportamento oportunista de empreendedores sem escrúpulos, os quais escolheriam qual setor entrar baseados nas suas lucratividades²². Apesar de não dar um tratamento formal, é possível conjecturar que não haveria mudança substancial nos resultados, porque, em nosso modelo, a lucratividade é refletida nos parâmetros de entrada de ambos setores. A crítica pode permanecer, neste sentido, sobre a exogeneidade de tais parâmetros.

Tornar a lucratividade das atividades parasita e produtora endógena, em princípio, também não alteraria os principais pontos de nossas conclusões. Imagine que ambas taxas de lucros sejam função da quantidade de empresas no setor. Formalmente, $\alpha(x)$ e

²²O comportamento oportunista, em uma estrutura de equilíbrio geral, é estudado em Grossman (1998).

$\theta(y)$. Podemos assumir que o lucro cai quando aumenta a concorrência no setor, tal que $\alpha'(x), \theta'(y) < 0$. Suponha que houve um aumento exógeno em x , implicando uma queda na taxa de lucro dos produtores. Isto acarretará dois movimentos: com maior disponibilidade de presas, a quantidade de parasitas crescerá; e a queda nos lucros expulsará alguns produtores já estabelecidos. O aumento de parasitas fará com que sua taxa de lucro também caia, de forma que uma dinâmica cíclica emergirá.

Nossa conclusão de que o Estado pode escolher o valor do parâmetro exógeno β para fazer o produto crescer está baseada na hipótese de que este possui recursos orçamentários suficientes para exercer qualquer nível de poder de polícia. Assim, podemos ser questionados como nossos resultados seriam afetados pela presença endógena deste terceiro agente na economia. O Estado poderia exercer um duplo papel em nosso modelo. Por um lado, extrairia renda (parte do produto) do setor produtivo na forma de tributos e, por outro lado, coibiria a ação parasita através do exercício do poder de polícia. Dessa forma, β passaria a ser endógeno. Além disso, haveria uma fonte de financiamento para a atividade coercitiva estatal. Não temos a resposta para a pergunta acima e consideramos esta uma boa sugestão de trabalhos futuros. Se o Estado for modelado como uma terceira “espécie” na dinâmica de Lotka-Volterra, o tratamento matemático torna-se mais complicado.

Outras possibilidades que não abordamos aqui e que podem ser alvos de trabalhos futuros são a interação estratégica entre os dois setores e a sua evolução ao longo do tempo. Isto talvez possa ser tratado com o uso do arcabouço da teoria dos jogos evolucionários, a qual já possui uma grande difusão na modelagem populacional em biologia. Por fim, tornar outras das decisões institucionais endógenas, microfundamentando detalhadamente o comportamento do Estado, pode levar a novos *insights* sobre o desenvolvimento econômico.

2.5 Referências

- ACEMOGLU, D.; ROBINSON, J. The role of institution in growth and development. **Working Paper of Comission on Growth and Development**, no. 10, 2008.
- AZARIADIS, C.; STACHURSKI, J. **Poverty traps**. In: Aghion, P. e Durlauf, S. Handbook of Economic Growth, vol. 1A. The Netherlands: North Holland, 2005.
- BESLEY, T.; GATHAK, M. **Property rights and economic development**. In: Rodrik, D.; Rosenzweig, M. Handbook of Development Economics, vol. 5. The Netherlands: North Holland, 2005.
- CAMPOS, N. **Never around noon: on the nature and causes of the transition shadow**. Mimeo, CERGE-EI, Praga, 2000.

COPPOLA, F. F. **The Godfather**. [Filme-video] Direção de Francis Ford Coppola e produzido por Paramount Pictures. DVD, 2h51min, 1972.

DESAI, M. Growth cycles and inflation in a model of the Class Struggle. **Journal of Economic Theory**, 6 (6), 527-545, 1973.

FARKAS, M. Stable oscillations in a predator-prey model with time lag, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 102, 175-188, 1984a.

FARKAS, M. ZIP bifurcation in a competitive model. **Nonlinear Analysis TMA**, 8, 1295-1309, 1984b.

FARKAS, M. Competitive exclusion by zip bifurcation, IIASA Workshop, Sopron, **Lecture Notes in Economics And Mathematical Systems 287**, Berlin: Springer-Verlag, 165-178, 1987.

FARKAS, M.; FARKAS, A. **Stable oscillations in a more realistic predator-prey model with time lag**. In: Asymptotic Methods of Mathematical Physics. Kiev: Naukova Dumka, 250-256, 1988a.

GOODWIN, R. **A growth cycle**. In: Feinstein, C.H. Socialism, Capitalism and Economic Growth. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

GOODWIN, R. **A growth cycle**. In E. K. Hunt and Jesse G. Schwartz, A Critique of Economic Theory, Harmondsworth: Penguin, pp. 442-449, 1972.

GOODWIN, R. **Chaotic economic dynamics**. Oxford University Press, 1990.

GROSSMAN, H. Producers and predators. **Pacific Economic Review**, 3 (3), 169-187, 1998.

GROSSMAN, H.; KIM, M. Predation, efficiency, and inequality. **NBER Working Paper**, No. 6301, 1997.

KRUEGER, A. The political economy of the rent-seeking society. **American Economic Review**, 64 (3), 291-303, 1974.

MEHLUM, H.; MOENE, K.; TORVIK, R. Predator or prey? Parasitic enterprise in

economic development. **European Economic Review**, 47, 275-294, 2003a.

MEHLUM, H.; MOENE, K.; TORVIK, R. Parasites. **Memorandum n° 16/2003**. Department of Economics, University of Oslo, 2003b.

NAIM, M. **Ilícito**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2006.

SHAH, A.; DESAI, M. Growth cycles with induced technical change. **Economic Journal**, 91, 1006-1010, 1981.

SPORTELLI, M. A Kolmogorov generalized predator-prey model of Goodwin's growth cycle. **Journal of Economics**, 61 (1), 35-64, 1995.

VADASZ, V. **Economic motion: an economic application of the Lotka-Volterra predator-prey model**. Undergraduate thesis, Franklin and Marshall College, 2007.

VAN DER PLOEG, F. Growth cycles, induced technical change, and perpetual conflict over the distribution of income. **Journal of Macroeconomics**, 9 (1), 1-12, 1987.

VOLKOV, V. **Who is strong when the state is weak: violent entrepreneurs in post-communist Russia**. Conference "Russia at the end of the twentieth century", Stanford University, 1998.

WOLFSTETTER, E. Fiscal policy and the classical growth cycle. **Journal of Economics**, 42 (4), 375-393, 1982.

2.6 Apêndice

2.6.1 Definições e resultados auxiliares

Definição 2.17 *Um ponto é quase-assintoticamente estável se e somente se existe $\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(x, t) - \varphi(y, t)| = 0$.*

Definição 2.18 *Um ponto é estável no sentido de Liapunov se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$ então $|\varphi(x, t) - \varphi(y, t)| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$, onde $\varphi(\cdot)$ é uma solução.*

Teorema 2.19 *O número de raízes positivas de uma equação polinomial $p(x)$ com coeficientes reais nunca é maior que o número de trocas de sinal T na sequência de seus coeficientes não nulos, e se é menor, então é sempre por um número par.*

2.6.2 Demonstrações

Prova. (Proposição 2.1) Imagine um ambiente ausente de parasitas, tal que $y = 0$. Então, (2.1) torna-se

$$\dot{x} = \alpha_1 x, \quad (2.16)$$

a qual possui solução $x = x_0 e^{\alpha_1 t}$, para algum $\alpha_1 > 0$ e onde x_0 é uma constante que representa a população inicial de produtores. Para ver (ii), faça $x = 0$ e note que (2.2) torna-se

$$\dot{y} = -\beta_1 y, \quad (2.17)$$

com solução $y = y_0 e^{-\beta_1 t}$, indicando que a população inicial de parasitas, y_0 , decairá exponencialmente até a extinção. ■

Prova. (Proposição 2.2) Dado que, em equilíbrio, não há variação nas populações, temos $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Então, o sistema (2.1)-(2.2) torna-se

$$0 = x(\alpha_1 - \gamma_1 y) \quad (2.18)$$

$$0 = y(\theta_1 x - \beta_1), \quad (2.19)$$

que tem como soluções $\{x = 0, y = 0\}$ e $\{x = \frac{\beta_1}{\theta_1}, y = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\}$. ■

Prova. (Proposição 2.3) Avaliando J_1 em $(0, 0)$ temos

$$J_1(0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\beta_1 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

a qual possui autovalores $\lambda_1 = \alpha_1$ e $\lambda_2 = -\beta_1$. Dado que $\alpha_1, \beta_1 > 0$, temos que o ponto $(0, 0)$ é de sela. ■

Prova. (Proposição 2.4) Avaliando a matriz J_1 em $(\frac{\beta_1}{\theta_1}, \frac{\alpha_1}{\gamma_1})$ temos

$$J_1\left(\frac{\beta_1}{\theta_1}, \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\gamma_1 \beta_1}{\theta_1} \\ \frac{\theta_1 \alpha_1}{\gamma_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

cujos autovalores são $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha_1 \beta_1}$. Autovalores puramente imaginários implicam que o ponto não é hiperbólico. ■

Prova. (Proposição 2.5) Para mostrar que o sistema (2.1)-(2.2) possui órbitas fechadas devemos encontrar uma função que é constante em qualquer trajetória e mostrar que esta função é estritamente monótona ao longo de um raio começando em um ponto de

equilíbrio e crescendo no sentido nordeste no plano presa-predador. Para entender o porquê a existência dessa função implica em um sistema com órbitas fechadas, suponha que temos tal função f e considere a trajetória começando em um ponto \mathbf{a} de um raio, fazendo uma volta completa ao redor do ponto de equilíbrio e voltando ao raio em outro ponto, \mathbf{b} , por exemplo. Dado que f é constante na trajetória, $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$. Contudo, como f é monótona no raio, devemos ter $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, tal que a trajetória é uma órbita fechada.

Inicialmente, dividimos ambos os lados de (2.1) e (2.2) por x e y , respectivamente, obtendo

$$\frac{\dot{x}}{x} = \alpha_1 - \gamma_1 y \quad (2.22)$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \theta_1 x - \beta_1. \quad (2.23)$$

Dividindo (2.22) por (2.23) temos

$$\frac{y \dot{x}}{x \dot{y}} = \frac{\alpha_1 - \gamma_1 y}{\theta_1 x - \beta_1}. \quad (2.24)$$

Com algumas mudanças algébricas,

$$\frac{(\theta_1 x - \beta_1) \dot{x}}{x} = \frac{(\alpha_1 - \gamma_1 y) \dot{y}}{y}. \quad (2.25)$$

É possível notar que (2.25) é equivalente a

$$\frac{d}{dt}(\theta_1 x - \beta_1 \ln x) = \frac{d}{dt}(\alpha_1 \ln y - \gamma_1 y). \quad (2.26)$$

Integrando ambos os lados,

$$\int \frac{d}{dt}(\theta_1 x - \beta_1 \ln x) dt = \int \frac{d}{dt}(\alpha_1 \ln y - \gamma_1 y) dt \quad (2.27)$$

$$A + \theta_1 x - \beta_1 \ln x = \alpha_1 \ln y - \gamma_1 y, \quad (2.28)$$

onde A é a constante de integração.

Tomando a exponencial de ambos os lados e depois de algumas mudanças algébricas temos a constante de movimento

$$C = x^{\beta_1} y^{\alpha_1} e^{-(\theta_1 x - \gamma_1 y)}, \quad (2.29)$$

onde $C = e^A$. Agora devemos mostrar que esta função é estritamente monótona ao longo de um raio começando em um ponto de equilíbrio e crescendo no sentido nordeste.

Considere um raio (x, y) que começa no ponto de equilíbrio $(\frac{\beta_1}{\theta_1}, \frac{\alpha_1}{\gamma_1})$ e se move na direção nordeste em relação à origem no plano. Podemos escrever $x = \frac{\beta_1}{\theta_1} s$, $y = \frac{\alpha_1}{\gamma_1} s$, onde

s é um parâmetro medindo a distância do ponto de equilíbrio. Note que quando $s = 1$, (x, y) é o ponto de equilíbrio. Substituindo em (2.29) obtemos

$$\left(\frac{\beta_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)^{\alpha_1} s^{\alpha_1+\beta_1} e^{-s(\alpha_1+\beta_1)} = C. \quad (2.30)$$

Passando os dois primeiros termos do lado esquerdo para o lado direito e tomando a $(\alpha_1 + \beta_1)$ -ésima raiz de ambos os lados,

$$se^{-s} = D, \quad (2.31)$$

onde $D = C^{\frac{1}{\alpha_1+\beta_1}} \left(\frac{\theta_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}} \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta_1}}$.

Se mostrarmos que o lado esquerdo de (2.31) é estritamente monótona para $s > 1$, então qualquer $s > 1$ que satisfaça (2.31) é único. Tomando a derivada do lado esquerdo temos

$$e^{-s} - se^{-s} = (1-s)e^{-s}, \quad (2.32)$$

que é estritamente negativo para $s > 1$. Isto mostra que o sistema dinâmico se move em órbitas fechadas ao redor do ponto de equilíbrio. ■

Prova. (Proposição 2.6) Para resolver a equação adotamos o método da separação de variáveis, tal que

$$\frac{\dot{x}}{x} \frac{K}{(K-x)} = \alpha_2. \quad (2.33)$$

Integrando ambos os lados,

$$\int \frac{\dot{x}}{x} \frac{K}{(K-x)} dt = \int \alpha_2 dt \quad (2.34)$$

$$K \int \frac{\dot{x}}{x} \frac{1}{(K-x)} dt = \alpha_2 t + A, \quad (2.35)$$

onde A é a constante de integração.

Agora, usamos o método das frações parciais para escrever

$$\frac{1}{x(K-x)} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{K-x} + \frac{1}{x} \right). \quad (2.36)$$

Assim, temos

$$\int \frac{1}{x(K-x)} dt = \frac{1}{K} \left(\int \frac{1}{K-x} dt + \int \frac{1}{x} dt \right) \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{K} \ln \left(\frac{x}{K-x} \right). \quad (2.38)$$

Substituindo em (2.35), obtemos

$$\ln\left(\frac{x}{K-x}\right) = \alpha_2 t + A. \quad (2.39)$$

Tomando a exponencial em ambos os lados, a expressão acima torna-se

$$\left(\frac{x}{K-x}\right) = B e^{\alpha_2 t}, \quad (2.40)$$

onde B é outra constante.

Isolando x ,

$$x = \frac{K e^{\alpha_2 t} B}{1 - e^{\alpha_2 t} B}. \quad (2.41)$$

Assumindo que em $t = 0$ a quantidade de produtores é x_0 ,

$$B = \left(\frac{x_0}{K - x_0}\right), \quad (2.42)$$

e substituindo em (2.41),

$$x = \frac{K e^{\alpha_2 t} x_0}{K + x_0(e^{\alpha_2 t} - 1)} \quad (2.43)$$

. ■

Prova. (Proposição 2.7) Vimos que a solução de (2.5), com $y = 0$, é dada por (2.6) para algum $K > 0$. Tomando a derivada em relação ao tempo temos

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{K x_0 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} (K - x_0)}{[K + x_0(e^{\alpha_1 t} - 1)]^2}. \quad (2.44)$$

Como o denominador, K , x_0 , α_1 e $e^{\alpha_1 t}$ são valores positivos, o sinal da derivada é determinado por $(K - x_0)$. Assim, x é crescente e decrescente se, e somente se, $K > x_0$ e $K < x_0$, respectivamente.

Note também que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K x_0 e^{\alpha_1 t}}{K + x_0(e^{\alpha_1 t} - 1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K x_0 \alpha_1 e^{\alpha_1 t}}{x_0 \alpha e^{\alpha_1 t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} K = K, \quad (2.45)$$

onde aplicamos a Regra de L'Hôpital. ■

Prova. (Proposição 2.8) Veja Farkas (1984a). ■

Prova. (Proposição 2.9) Em equilíbrio temos $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Então, o sistema (2.12)-(2.14) torna-se

$$0 = x\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2 x}{K} - \gamma_2 y\right) \quad (2.46)$$

$$0 = y(\theta_2 z - \beta_2) \quad (2.47)$$

$$0 = \phi_1(x - z), \quad (2.48)$$

da onde é direto ver que as soluções são $\{x = 0, y = 0, z = 0\}$, $\{x = K, y = 0, z = K\}$ e $\{x = \frac{\beta_2}{\theta_2}, y = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K}\right), z = \frac{\beta_2}{\theta_2}\}$. ■

Prova. (Proposição 2.10) Avaliando J_2 em $(0, 0, 0)$ encontramos

$$J_2(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 0 \\ \phi_2 & 0 & -\phi_2 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

a qual, por ser diagonal, nos fornece diretamente os seus autovalores: $\lambda_1 = \alpha_2$, $\lambda_2 = -\beta_2$ e $\lambda_3 = -\phi_2$. Como $\alpha_2, \beta_2, \phi_2 > 0$, o ponto $(0, 0, 0)$ é de sela. ■

Prova. (Proposição 2.11) O jacobiano do sistema (2.12)-(2.14) avaliado no ponto de equilíbrio $(K, 0, K)$ é

$$J_2(K, 0, K) = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\gamma_2 K & 0 \\ 0 & \theta_2 K - \beta_2 & 0 \\ \phi_2 & 0 & -\phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Com alguma álgebra é possível mostrar que $J_2(K, 0, K)$ possui como polinômio característico

$$-\lambda^3 - \lambda^2(\alpha_2 + \phi_2 + \beta_2 - \theta_2 K) - \lambda[\alpha_2 \phi_2 + (\alpha_2 + \phi_2)(\beta_2 - \theta_2 K)] + \alpha_2 \phi_2 (\theta_2 K - \beta_2). \quad (2.51)$$

Vamos provar primeiramente o item (iii). Se $\beta_2 = \theta_2 K$, o polinômio (2.51) torna-se

$$-\lambda^3 - \lambda^2(\alpha_2 + \phi_2) - \lambda(\alpha_2 \phi_2), \quad (2.52)$$

o qual possui como raízes $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\alpha_2$ e $\lambda_3 = -\phi_2$. Logo, como $\alpha_2, \phi_2 > 0$, $\beta_2 = \theta_2 K$ implica que o sistema é estável, mas não assintoticamente, devido a presença de uma raiz nula.

Para o item (i), podemos aplicar o Teorema 2.19 para mostrar que $\beta_2 > \theta_2 K$ é condição suficiente para que (2.51) possua somente raízes reais negativas²³. Para tal, consideremos a seguinte notação para (2.51): $a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$. Note que se $a_i < 0$ para todo i , então (2.51) não troca de sinal - apresenta a seguinte sequência $(-, -, -, -)$, e pelo Teorema 2.19, não possui raízes reais positivas.

Como $a_0 = -1 < 0$, nos resta mostrar que $\beta_2 > \theta_2 K$ implica $a_1, a_2, a_3 < 0$. Dado que $\alpha_2 + \phi_2 > 0$, para $a_1 = -(\alpha_2 + \phi_2 + \beta_2 - \theta_2 K) < 0$ basta termos $\beta_2 > \theta_2 K$. Já para $a_2 = -[\alpha_2 \phi_2 + (\alpha_2 + \phi_2)(\beta_2 - \theta_2 K)] < 0$, temos também que $\alpha_2 \phi_2 > 0$, de maneira que $\beta_2 > \theta_2 K$ é suficiente. Por fim, para $a_3 = \alpha_2 \phi_2 (\theta_2 K - \beta_2) < 0$ também precisamos de

²³Estamos interessados em condições suficientes sobre o comportamento do sistema fora do equilíbrio. Como raízes reais negativas garantem a estabilidade, não nos preocuparemos com a outra possibilidade, qual seja, de uma raiz real negativa e duas complexas com parte real negativa.

$\theta_2 K < \beta_2$ para a validade da desigualdade. Assim, $\beta_2 > \theta_2 K$ é condição suficiente para que (2.51) não possua raízes positivas reais.

Ainda precisamos obter condições para que (2.51) possua somente raízes negativas reais. Observe que substituindo λ por $(-\lambda)$ em (2.51) temos

$$\lambda^3 - \lambda^2(\alpha_2 + \phi_2 + \beta_2 - \theta_2 K) + \lambda[\alpha_2 \phi_2 + (\alpha_2 + \phi_2)(\beta_2 - \theta_2 K)] + \alpha_2 \phi_2(\theta_2 K - \beta_2). \quad (2.53)$$

Assumindo $\beta_2 > \theta_2 K$, temos que (2.53) troca de sinal três vezes - apresenta a sequência $(-, +, -, +)$. Dessa forma, o Teorema 19 implica que (2.51) possui três, duas ou nenhuma raiz negativa real. Como duas ou nenhuma são opções impossíveis - raízes complexas sempre aparecem em seu conjugado -, temos que (2.51) possui somente raízes reais negativas. Logo, concluímos que $\beta_2 > \theta_2 K$ é condição suficiente para a estabilidade do sistema (2.12)-(2.14) e (i) está provado.

Para provar (ii) note que, se $\beta_2 < \theta_2 K$, então $a_3 = \alpha_2 \phi_2(\theta_2 K - \beta_2) > 0$ em (2.51) e (2.53). Como $a_0 > 0$ em (2.53), este polinômio pode trocar de sinal duas $[(+, +, -, +)$ ou $(+, -, +, +)]$ ou nenhuma vez $[(+, +, +, +)]$. Aplicando novamente o Teorema 2.19, temos que, na primeira possibilidade (2.51) terá duas ou nenhuma raiz real negativa e; na segunda possibilidade, nenhuma raiz real negativa. Em qualquer caso, é impossível termos 3 raízes reais negativas ou uma real negativa e duas complexas com parte real negativa - sempre existirá uma positiva real -, casos que garantiriam a estabilidade do sistema (2.12)-(2.14). Isso prova (ii). ■

Prova. (Proposição 2.12) O jacobiano de (2.12)-(2.14) avaliado em E_5 é

$$J_2 \left(\frac{\beta_2}{\theta_2}, \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K} \right), \frac{\beta_2}{\theta_2} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_2 \beta_2}{\theta_2 K} & -\frac{\gamma_2 \beta_2}{\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta_2 \alpha_2}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K} \right) \\ \phi_2 & 0 & -\phi_2 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Fazendo $J_2 \left(\frac{\beta_2}{\theta_2}, \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K} \right), \frac{\beta_2}{\theta_2} \right) - \lambda \mathbf{I}$ e calculando seu determinante temos

$$-\lambda^3 - \lambda^2 \left(\phi_2 + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\theta_2 K} \right) - \lambda \left(\frac{\alpha_2 \beta_2 \phi_2}{\theta_2 K} \right) + \alpha_2 \beta_2 \phi_2 \left(\frac{\beta_2}{\theta_2 K} - 1 \right). \quad (2.55)$$

Começemos por provar (iii). Se $\beta_2 = \theta_2 K$, então (2.55) torna-se

$$-\lambda^3 - \lambda^2(a_2 + \phi_2) - \lambda(\alpha_2 \phi_2), \quad (2.56)$$

que possui as seguintes raízes $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\alpha_2$ e $\lambda_3 = -\phi_2$. Logo, $\beta_2 = \theta_2 K$ implica em estabilidade de E_5 , porém não assintótica.

Para provar (i) e (ii) usaremos novamente a notação $a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$ para (2.55). Primeiramente, considere que $\beta_2 < \theta_2 K$. Então $a_3 = \alpha_2 \beta_2 \phi_2 \left(\frac{\beta_2}{\theta_2 K} - 1 \right) < 0$ e

teremos nenhuma troca de sinal em (2.55), pois $a_0 = -1 < 0$, $a_1 = -\left(\phi_2 + \frac{\alpha_2\beta_2}{\theta_2 K}\right) < 0$ e $a_2 = -\left(\frac{\alpha_2\beta_2\phi_2}{\theta_2 K}\right) < 0$. Pelo Teorema 2.19, portanto, (2.55) possui nenhuma raiz real positiva.

Substituindo λ por $(-\lambda)$ em (2.55) temos

$$\lambda^3 - \lambda^2 \left(\phi_2 + \frac{\alpha_2\beta_2}{\theta_2 K}\right) + \lambda \left(\frac{\alpha_2\beta_2\phi_2}{\theta_2 K}\right) + \alpha_2\beta_2\phi_2 \left(\frac{\beta_2}{\theta_2 K} - 1\right), \quad (2.57)$$

o qual apresenta três trocas de sinal $[(+, -, +, -)]$, o que, por sua vez, implica que (2.55) possui três, duas ou nenhuma raiz real negativa, onde usamos o Teorema 2.19. Como raízes complexas aparecem aos pares, a única possibilidade é a de que as três raízes sejam reais e negativas. Isto prova a estabilidade.

Considere, agora, que $\beta_2 > \theta_2 K$. Isso faz com que $a_3 = \alpha_2\beta_2\phi_2 \left(\frac{\beta_2}{\theta_2 K} - 1\right) > 0$ em (2.55) e (2.57). Perceba que em (2.57) temos, dessa forma, duas trocas de sinal $[(+, -, +, +)]$, fazendo com que (2.55) possua duas ou nenhuma raiz real negativa. Em ambos os casos, uma raiz será positiva e real, fazendo com que o sistema (2.12)-(2.14) seja instável. Isso prova (ii). ■

Prova. (Proposição 2.14) Notaremos $E_2 = \left(x^* = \frac{\beta_1}{\theta_1}, y^* = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)$. Assim, tomemos as seguintes derivadas para provar a proposição: (i) $\frac{\partial x^*}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\theta_1} > 0$; (ii) $\frac{\partial x^*}{\partial \theta_1} = -\frac{\beta_1}{\theta_1^2} < 0$; (iii) $\frac{\partial y^*}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{\gamma_1} > 0$; (iv) $\frac{\partial y^*}{\partial \gamma_1} = -\frac{\alpha_1}{\gamma_1^2} < 0$, pois $\alpha_1, \beta_1, \theta_1, \gamma_1 > 0$. ■

Prova. (Corolário 2.15) Segue direto das proposições 2.5 e 2.14. ■

Prova. (Proposição 2.16) Notaremos $E_5 = \left(x^* = \frac{\beta_2}{\theta_2}, y^* = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K}\right), z^* = \frac{\beta_2}{\theta_2}\right)$. Tomemos as seguintes derivadas parciais: (i) $\frac{\partial x^*}{\partial \beta_2} = \frac{1}{\theta_2} > 0$, $\frac{\partial y^*}{\partial \beta_2} = -\frac{\alpha_2}{\gamma_2} \frac{1}{\theta_2 K} < 0$; (ii) $\frac{\partial x^*}{\partial \theta_2} = -\frac{\beta_2}{\theta_2^2} < 0$, $\frac{\partial y^*}{\partial \theta_2} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \frac{\beta_2}{\theta_2^2 K} > 0$; (iii) $\frac{\partial y^*}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\beta_2}{\theta_2 K}\right) > 0$, se $\beta_2 < \theta_2 K$; (iv) $\frac{\partial y^*}{\partial \gamma_2} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2^2} \left(\frac{\beta_2}{\theta_2 K} - 1\right) < 0$, se $\beta_2 < \theta_2 K$; (v) $\frac{\partial y^*}{\partial K} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \frac{\beta_2}{\theta_2 K^2} > 0$. Isto prova a proposição. ■

3 Convexidade da função perda do banco central e dependência entre instrumentos monetários

Abstract

Neste artigo obtemos condições sob as quais a função perda do banco central é estritamente convexa em quatro estados distintos da economia: economia aquecida, em recessão, inflação alta e produto alto. Encontramos, ainda, que quando inflação e produto são funções lineares do instrumento de política monetária, a convexidade é garantida para qualquer um dos quatro estados citados. Ao estendermos nossa análise a vários instrumentos, encontramos que apenas linearidade já não é mais suficiente para a garantia do formato da função perda. Nossos resultados fornecem, ainda, condições sob as quais existirá dependência entre os instrumentos de política monetária.

3.1 Introdução

Barro e Gordon (1983b), em seu trabalho sobre inconsistência temporal em política monetária e sua relação com viés inflacionário, dão origem a uma tradição de modelos que utilizam sua base formal como ponto de partida. De fato, a função objetivo do banco central (ou autoridade monetária), quadrática na inflação e linear no produto, utilizada nesse artigo, foi adaptada para as mais diversas aplicações em teoria monetária, conforme demonstra Walsh (2010). Grande parte dessas adaptações são mudanças marginais do modelo original para levar em conta distorções devido à taxação, competição monopolística e pressões do governo sobre o peso dado pelo banco central ao produto (CUCKIERMAN, 1992).

A principal variação na forma funcional da função perda do banco central assume que suas preferências podem ser expressas por uma expressão quadrática tanto no desvio da inflação atual de um nível pré determinado - a meta de inflação, em economias com este tipo de regime monetário - quanto no desvio do produto corrente do produto potencial. Grande parte da literatura sobre as tentativas de superação do viés inflacionário adotou essa modificação, como Canzoneri (1985), Backus e Driffil (1985), Cuckierman e Meltzer (1986), Cuckierman e Liviatan (1991), Ball (1995) e Walsh (2000), por exemplo²⁴.

A literatura também fornece algumas variações maiores do modelo original. Jonsson (1997), por exemplo, modifica o modelo de Barro e Gordon (1983b) para incorporar persistência no processo do produto. Já Beetsma e Jensen (1998) incorporam um termo de choque nas preferências do banco central sobre inflação e produto, além de um contrato

²⁴Uma discussão mais aprofundada da literatura sobre soluções do viés inflacionário pode ser encontrada em Persson e Tabellini (1990).

de inflação linear, com seu parâmetro sendo escolhido pelo governo. Giavazzi e Pagano (1988) adicionam entre as variáveis de escolha da autoridade monetária a taxa de câmbio, justificada pela preocupação com a lucratividade do setor exportador. Ainda em um ambiente com metas de inflação, a função perda também pode ser modificada para incluir a escolha explícita por parte do banco central do nível de preços a ser atingido (WALSH, 2010).

Assimetria nas preferências do banco central com relação à estabilização de preços e produto também é uma fonte importante de alterações na função perda original. Um dos principais estudos a tratar essa assimetria é Nobay e Peel (2003), o qual utiliza um arcabouço geral de política monetária ótima. Nesse trabalho, a assimetria é introduzida apenas nos desvios da inflação, devido, segundo os autores, à complexidade técnica de introduzi-la também em desvios do produto. Para economias com regimes de metas de inflação, Ruge-Murcia (2003) também usa uma função perda que dá peso maior a desvios acima da meta, quando comparados àqueles abaixo da meta de nível de preços da economia.

O que todos os trabalhos citados acima possuem em comum é a hipótese implícita de que a função perda do banco central é estritamente convexa nos instrumentos de política monetária, de modo que é sempre possível fazer escolhas que a minimizam. Mesmo trabalhos empíricos, que buscam calibrar os parâmetros das preferências da autoridade monetária partem dessa premissa²⁵. Contudo, impor uma formato sobre preferências *a priori* pode ser uma restrição demasiadamente forte. Suponha, por exemplo, que a verdadeira função perda do banco central não seja estritamente convexa. A implicação da modelagem errada para a política monetária, neste caso, seria a da tomada de decisões muito distintas da ótima. As possibilidades de superação do viés inflacionário, por exemplo, mudariam drasticamente.

Outro ponto em comum nesta literatura é a modelagem das decisões de política monetária através da escolha de apenas um instrumento - frequentemente a variação da oferta de moeda. Outros modelos, ainda mais simples, assumem que a escolha do banco central é feita diretamente através do nível de inflação que vigorará na economia. Toda autoridade monetária, entretanto, possui outros instrumentos alternativos para atingir seus objetivos²⁶. Alguns dos principais exemplos são a taxa de redesconto e a reserva compulsória. A taxa básica de juros da economia também pode ser vista como instrumento, embora nem sempre esteja sob o controle total do banco central.

Nesse sentido, nosso trabalho tem como objetivo estudar condições sob as quais a pro-

²⁵Veja, por exemplo, Pasca, Aragon e Portugal (2012) para o Peru e Aragon e Portugal (2010) para o Brasil.

²⁶De fato, bancos centrais não possuem controle direto sobre inflação, taxas de juros de longo prazo e nem mesmo sobre oferta de moeda. As variáveis que estão mais próximas de seu controle total são a base monetária e taxas de juros de curto prazo. Contudo, assumir que Δm é o instrumento facilita a análise e fornece *insights* importantes. Para uma análise sobre a utilização de instrumentos de controle mais direto e sua relação com metas intermediárias de política, veja os *surveys* de Friedman (1990) e Walsh (2010).

priedade desejável da convexidade da função perda do banco central é garantida. Consideramos quatro possíveis estado da economia e obtemos em cada um deles condições suficientes sobre as funções de inflação e produto correntes para que a propriedade citada se verifique. Nossa análise inicialmente é feita assumindo que apenas um instrumento de política monetária está disponível. A seguir, permitimos que o banco central possa utilizar vários instrumentos para estabilizar produto e preços.

Nossos resultados mostram que, no caso de um único instrumento, inflação e produto devem responder de maneira diferente a mudanças no instrumento de política em cada um dos estados da economia estudados a fim de garantir a convexidade da função perda. Especificamente, para inflação acima (abaixo) da meta, ou produto acima (abaixo) do potencial, é condição suficiente que o efeito marginal do instrumento seja crescente (decrescente) para que a função tenha a propriedade desejada. Esse resultado indica certa assimetria nas preferências da autoridade monetária e pode ser uma justificativa teórica para trabalhos como o de Nobay e Peel (2003), por exemplo. Ainda no caso de um instrumento, mostramos que quando inflação e produto são funções lineares do instrumento, a função perda é estritamente convexa em qualquer estado da economia.

Quando mais de um instrumento de política monetária estão disponíveis ao banco central, os resultados são semelhantes aos do caso univariado. A principal diferença agora é a necessidade de um limite superior para o efeito cruzado dos instrumentos sobre produto e inflação para que a convexidade seja garantida. Ainda, encontramos que quando produto e inflação são funções lineares dos instrumentos, precisamos que as taxas marginais de substituição da inflação e do produto com relação aos instrumentos dois a dois sejam diferentes para termos a convexidade estrita da função perda em qualquer estado da economia. Esse resultado tem uma interpretação em termos de independência dos instrumentos de política monetária: em um ambiente linear, taxas marginais de substituição iguais geram instrumentos dependentes, no sentido de não ser possível escolher seus níveis individualmente.

Dessa forma, nosso trabalho contribui em dois pontos distintos com a literatura existente em economia monetária. O primeiro deles, como visto acima, diz respeito especificamente à estrutura matemática do problema de otimização do banco central. Assim, nossos resultados podem ser aplicados a qualquer modelo em que a autoridade monetária é assumida como uma tomadora de decisão. Exemplos são os trabalhos que estudam viés inflacionário e inconsistência temporal, já citados. Também contribuimos com a literatura sobre escolha ótima de instrumentos de política monetária, iniciada com Poole (1970) e analisada de forma bastante completa em Friedman (1990), ao estabelecer sob quais condições dois ou mais instrumentos são dependentes.

É importante destacar que, embora relacionado, nosso artigo difere da literatura sobre escolha de instrumentos de política monetária por abrir a possibilidade de seu uso conjunto. Para perceber melhor tal diferença, considere, por exemplo, o seminal tra-

balho de Poole (1970), o qual tenta responder a pergunta de qual instrumento de política monetária, entre oferta de moeda e taxa de juros, é a escolha ótima de um banco central preocupado apenas em estabilizar o produto. Utilizando um modelo IS-LM estocástico, o autor encontra que a preferência por algum dos instrumentos dependerá da magnitude das variâncias dos choques nas curvas IS e LM, bem como da inclinação destas. A diferença em relação à nossa análise fica clara ao notarmos que nesse trabalho a escolha é feita entre um instrumento ou outro, não havendo possibilidade de combiná-los²⁷.

A diferença entre nossa abordagem e aquela da análise clássica do problema da escolha ótima do instrumento de política monetária também é clara quando analisamos a literatura recente. Um dos exemplos mais atuais é o trabalho de Collard e Dellas (2005), que estendem a abordagem de Poole para um modelo novo keynesiano e encontram que oferta de moeda é um instrumento superior a taxa de juros para responder a choques monetários. Já Atkeson et al. (2007) mostram que a taxa de juros é a escolha de *first-best*, seguida pela taxa de câmbio e pela oferta de moeda, quando utiliza-se como critério de decisão as desejáveis características de um instrumento monetário, notadamente o grau de correlação com a variável meta (*tightness*, na literatura) e transparência. Outras extensões nessa linha são fornecidas por Goodhart et al. (2011), que estudam o instrumento ótimo para fins prudenciais, e Niemann et al. (2011), que incluem interação estratégica entre formuladores de políticas monetária e fiscal no modelo de escolha do instrumento ótimo.

Este artigo está dividido da seguinte maneira. Após esta introdução, na seção 3.2, estudamos as condições sob as quais o problema de minimização do banco central é estritamente convexo. Analisamos individualmente os casos de um único e de mais de um instrumentos de política monetária. Em ambos fornecemos exemplos de aplicações de nossos resultados. Ainda na seção 3.2, estudamos a relação entre convexidade da função perda e dependência entre os instrumentos. Seção 3.3 fornece um exemplo de modelo com dois instrumentos de política monetária independentes. Seção 3.4 conclui. As demonstrações de todos nossos resultados encontram-se no apêndice.

3.2 Convexidade da função perda do Banco Central

3.2.1 O caso de um instrumento

Considere o problema do Banco Central de estabilizar preços e produto, minimizando desvios da meta de inflação e do produto potencial. Sua função objetivo pode ser ex-

²⁷Como utiliza um modelo IS-LM, Poole (1970) considera preços fixos. Para uma análise da literatura do chamado *instrument problem* pelo lado da oferta, veja Sargent e Wallace (1975) e McCallum (1981) para modelos com política monetária neutra, e Fischer (1977a) e Phelps e Taylor (1977) para modelos sem neutralidade.

pressa por $L(\pi, y; \pi^*, y^*) \in C^2$, onde π e y são a taxa de inflação e produto correntes, respectivamente. A meta de inflação, π^* , e o produto potencial, y^* , são assumidos serem parâmetros exógenos. A título de simplificação, não faremos distinção entre produto potencial e produto socialmente desejado, como em parte da literatura.

Como o objetivo do Banco Central é minimizar L , faremos a seguinte hipótese.

Hipótese 3.1 $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ é estritamente convexa em π e y . Em outras palavras, existem $\hat{\pi}$ e \hat{y} únicos tais que $L(\hat{\pi}, \hat{y}) = \min_{\pi, y} L(\pi, y)$ ²⁸.

Uma implicação da hipótese acima é a de que $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} > 0$ ²⁹. Dito de outra forma, estamos assumindo que a perda de bem-estar do Banco Central varia a taxas crescentes conforme a taxa de inflação e produto correntes, individualmente, aumentam. Isso indica grande instabilidade de L para altos valores de π e y .

Também faremos outra hipótese padrão da literatura, a de que a utilidade marginal do Banco Central depende do estado da economia. Se a inflação corrente está abaixo (acima) da meta, então aumentos em π , *ceteris paribus*, aumentam (diminuem) seu bem-estar. Da mesma forma, se o produto está abaixo (acima) do potencial, sua utilidade marginal é positiva (negativa). Formalmente:

Hipótese 3.2 Se $\pi > \pi^*$, então $\frac{\partial L}{\partial \pi} > 0$, e se $\pi < \pi^*$, então $\frac{\partial L}{\partial \pi} < 0$. Analogamente, se $y > y^*$, então $\frac{\partial L}{\partial y} > 0$, e se $y < y^*$, então $\frac{\partial L}{\partial y} < 0$.

O conjunto de hipóteses 3.1-3.2 vem sendo utilizado pelos principais modelos de otimização do banco central. Considere, por exemplo, uma modificação do modelo seminal de Barro e Gordon (1983b), que tem sido a principal forma funcional de L adotada na literatura³⁰:

$$L = \frac{\lambda}{2} (y - y^*)^2 + \frac{1}{2} (\pi - \pi^*)^2, \quad (3.1)$$

onde λ mede o peso relativo que o banco central coloca na estabilização do produto frente à inflação. Uma análise rápida em (3.1) mostra que, para $\pi, y > 0$, hipóteses 3.1 e 3.2 são satisfeitas³¹.

²⁸Além de implicar em $\arg \min(L) = \{(\hat{\pi}, \hat{y})\}$, a hipótese garante que este mínimo seja interior.

²⁹A hipótese é a de que o hessiano de L em π e y ,

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \pi} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

é positivo definido. Logo, $|H_1| = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} > 0$. Além disso, $|H_2| = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y} \right)^2 > 0$, o que implica que $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} > 0$.

³⁰Veja os trabalhos citados na introdução e o *survey* de Walsh (2010).

³¹Observe que $\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda(y - y^*)$ e $\frac{\partial L}{\partial \pi} = (\pi - \pi^*)$, o que satisfaz hipótese 3.2. Além disso, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \lambda > 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} = 1$ e $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y} = 0$, tal que $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y} \right)^2 = \lambda > 0$ implica que L é uma função estritamente convexa em π e y , satisfazendo hipótese 3.1.

Mesmo modelos que assumem preferências assimétricas, como Nobay e Peel (2003), satisfazem as hipóteses citadas. Considere sua função perda

$$L = \frac{e^{\alpha(\pi - \pi^*)} - \alpha(\pi - \pi^*) - 1}{\alpha^2} + \frac{\lambda}{2}(y - y^*)^2, \quad (3.2)$$

onde α é uma constante e λ possui a mesma interpretação que em (3.1). Diferenciando (3.2) temos hipóteses 3.1 e 3.2 satisfeitas³².

O banco central não escolhe diretamente os níveis de inflação e produto correntes. Ele afeta tais variáveis utilizando os instrumentos de política monetária. Inicialmente vamos considerar o caso em que o único instrumento disponível é a variação da oferta de moeda, Δm ³³. Dessa forma, temos que inflação e produto são funções de Δm e de termos estocásticos u e v :

$$\pi = \pi(\Delta m, u; \pi^e) \quad (3.3)$$

e

$$y = y(\Delta m, v; \pi^e), \quad (3.4)$$

onde u e v possuem média zero e variâncias finitas σ_u^2 e σ_v^2 , respectivamente. O parâmetro π^e é a expectativa de inflação dos agentes, assumida como exógena. Adicionalmente, assumimos $\pi, y \in C^2$.

É natural fazermos a hipótese de que um aumento na oferta de moeda impacte positivamente a taxa de inflação corrente. Por outro lado, supor que o produto cresça com aumentos em Δm não é algo tão intuitivo. Sabemos através da curva de Phillips com expectativas racionais que apenas inflação não esperada estimula o produto. Assim, oferta de moeda impactará positivamente y somente se causar surpresa inflacionária. Entretanto, como o único canal possível para Δm afetar y é através de π , faremos a seguinte hipótese:

Hipótese 3.3 *A variação na oferta de moeda afeta positivamente tanto a inflação quanto o produto. Formalmente, $\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} > 0$ e $\frac{\partial y}{\partial \Delta m} > 0$.*

As definições a seguir nos deixarão em condições de estabelecer nosso primeiro resultado sobre a convexidade da função perda do banco central com relação à variação da oferta de moeda. Note que cada estado abaixo também pode ser entendido utilizando a hipótese 3.2.

³² $\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda(y - y^*) > 0$ se $y > y^*$ e $\frac{\partial L}{\partial y} < 0$ se $y < y^*$; e $\frac{\partial L}{\partial \pi} = \frac{e^{\alpha(\pi - \pi^*)} - 1}{\alpha} > 0$ se $\pi > \pi^*$ e $\frac{\partial L}{\partial \pi} < 0$ se $\pi < \pi^*$. Isso satisfaz hipótese 3.2. Além disso, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \lambda > 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} = e^{\alpha(\pi - \pi^*)} > 0$ e $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y} = 0$, tal que $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y}\right)^2 > 0$, tal que L é estritamente convexa, satisfazendo hipótese 3.1.

³³Veja nota de rodapé 26.

Definição 3.4 *Uma economia está em recessão quando sua inflação corrente é menor do que sua meta e seu produto corrente é menor do que o produto potencial. Isto é, $\pi(\Delta m, u; \pi^e) < \pi^*$ e $y(\Delta m, v; \pi^e) < y^*$.*

Definição 3.5 *Uma economia está aquecida quando sua inflação corrente é maior do que sua meta e seu produto é maior do que o produto potencial. Isto é, $\pi(\Delta m, u; \pi^e) > \pi^*$ e $y(\Delta m, v; \pi^e) > y^*$.*

Definição 3.6 *Uma economia está com inflação alta quando sua inflação corrente é maior do que a sua meta e seu produto menor do que o produto potencial. Isto é, $\pi(\Delta m, u; \pi^e) > \pi^*$ e $y(\Delta m, v; \pi^e) < y^*$.*

Definição 3.7 *Uma economia está com produto alto quando sua inflação corrente é menor do que a sua meta e seu produto maior do que o produto potencial. Isto é, $\pi(\Delta m, u; \pi^e) < \pi^*$ e $y(\Delta m, v; \pi^e) > y^*$.*

Proposição 3.8 *Considere a função perda do banco central $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ e as funções de inflação e produto correntes, $\pi(\Delta m, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, v; \pi^e)$, respectivamente. Suponha que são satisfeitas as hipóteses 3.1 e 3.2. Então, são condições suficientes para que L seja estritamente convexa em Δm :*

- (i) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} \geq 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} \geq 0$, se a economia está aquecida;
- (ii) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} \leq 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} \leq 0$, se a economia está em recessão;
- (iii) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} \geq 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} \leq 0$, se a economia está com inflação alta;
- (iv) e $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} \leq 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} \geq 0$, se a economia está com produto alto.

Observe que a proposição 3.8 indica um certo tipo de assimetria nas preferências do banco central. Com $\pi > \pi^*$, como nos casos de inflação alta e economia aquecida, se o efeito marginal da variação da oferta de moeda sobre a inflação é crescente, a convexidade estrita de L está garantida. Em outras palavras, para combater inflação deve-se ter um instrumento com efeito crescente - pela hipótese 3.3 - a taxas crescentes.

O contrário ocorre quando $\pi < \pi^*$. Com o nível de preços abaixo de sua meta, é suficiente para a convexidade estrita de L que o efeito da variação da oferta de moeda sobre a inflação cresça a taxas decrescentes. Isso indica que nestas situações, o “poder” do instrumento Δm deve ser decrescente conforme seu nível aumenta. De certa forma, essa diferença na resposta exigida do instrumento em cada estado da economia reflete uma assimetria entre situações com inflação acima e abaixo da sua meta. Embora trate de outro tipo de assimetria, nosso resultado pode ser visto como uma justificativa teórica para os modelos de Nobay e Peel (2003) e Ruge-Murcia (2003), por exemplo.

A mesma assimetria pode ser observada no que diz respeito ao produto. Quando este está acima do potencial, é suficiente que a variação da oferta de moeda tenha efeito marginal crescente sobre o seu nível corrente y para garantir L estritamente convexa. Por

outro lado, quando o produto está abaixo do seu nível potencial, a condição suficiente é que o efeito marginal de Δm sobre y seja decrescente conforme seu nível aumente.

Corolário 3.9 *Se $\pi(\Delta m, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, v; \pi^e)$ são lineares em Δm , então $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ é estritamente convexa em Δm em qualquer um dos estados da economia.*

De fato, o resultado do corolário 3.9 tem sido amplamente utilizado de maneira implícita na literatura. Considere, novamente, o modelo de Barro e Gordon (1983b), seguido pela maioria dos trabalhos posteriores. As suas equivalentes de nossas funções $\pi(\Delta m, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, v; \pi^e)$ são:

$$\pi = \Delta m + u \quad (3.5)$$

e

$$y = y_n + a(\pi - \pi^e) + v, \quad (3.6)$$

onde y_n e a são parâmetros exógenos e positivos. Equação (3.6) é uma função de oferta agregada do tipo Lucas, enquanto (3.5) explicita a relação direta entre oferta de moeda e inflação. A substituição direta de (3.5) em (3.6) é suficiente para nos certificarmos que ambas são lineares em Δm .

Perceba que o corolário 3.9 é apenas um resultado de suficiência. Portanto, podem existir $\pi(\Delta m, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, v; \pi^e)$ não lineares que tornam $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ estritamente convexa, por exemplo, em qualquer um dos quatro estados da economia. Contudo, não parece simples encontrar funções de inflação e produto com estas características e que satisfaçam a proposição 3.8. Apresentamos abaixo dois exemplos dessa dificuldade. Exemplo 3.10 substitui (3.6) por uma curva de Phillips convexa, de maneira que a convexidade da função perda passa a depender do valor dos parâmetros do modelo. Já o exemplo 3.11 mostra uma L que é não convexa para determinados estados da economia.

Exemplo 3.10 *Seguiremos o modelo básico de Barro e Gordon (1983b), de modo que a função perda do banco central é dada pela forma padrão (3.1) e a função de inflação é dada por (3.5). A título de simplificação, assumamos também que $u = v = 0$. Adotaremos a curva de Phillips convexa, proposta por Schaling (1999), conforme apresentada em Semmler e Zhang (2004)³⁴:*

$$y = y^* - \frac{\pi - \beta r}{\phi(\psi\pi + \beta r\psi - \theta)}, \quad (3.7)$$

onde β mede a sensibilidade da inflação a mudanças na taxa de juros real r , ψ é um índice de curvatura da função, θ mede a sensibilidade da inflação a mudanças no desemprego

³⁴A discussão sobre a linearidade da curva de Phillips é um tópico relativamente recente na literatura. Um bom *survey* sobre modelos com curvas não lineares e suas justificativas empíricas e teóricas pode ser encontrado em Filardo (1998). Dentre os formatos não lineares mais estudados estão a convexa, a côncava e a convexa-côncava. O primeiro tipo é analisado em Clark, Laxton and Rose (1996), Schaling (1999), Laxton, Meredith e Rose (1998), Tambakis (1998), entre outros. Já o formato côncavo pode ser encontrado nos trabalhos de Stiglitz (1997) e Eisner (1997). Por fim, Filardo (1998) discute a formulação convexa-côncava.

e ϕ é um parâmetro de uma função não linear auxiliar utilizada na construção de (3.7). Assumimos que todos os parâmetros são estritamente positivos e $1 > \psi \geq 0$ ³⁵.

Substituindo (3.5) em (3.6), e ambas em (3.1), estamos aptos a otimizar L . Sua condição de segunda ordem é dada por:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} = \frac{\lambda \theta}{\phi^2} \left[\frac{2\psi(\Delta m + \beta r) + \theta}{(\psi \Delta m + \beta r \psi - \theta)^3} \right] + 1. \quad (3.8)$$

Suponha, agora, que o produto da economia esteja alto, de maneira que $y - y^* > 0$. Dessa forma,

$$y - y^* = \frac{-(\Delta m + \beta r)}{\phi(\psi \Delta m + \beta r \psi - \theta)} > 0, \quad (3.9)$$

o que implica que $\psi \Delta m + \beta r \psi - \theta < 0$. Assim, por (3.8), não é possível afirmar que L é convexa. De fato, neste caso, o sinal de $\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2}$ dependerá dos valores dos parâmetros do modelo.

Exemplo 3.11 Continuemos com a função perda dada por (3.1) e com a hipótese de que $u = v = 0$. Seja o produto, agora, dado por (3.6) e a inflação por

$$\pi = \ln \Delta m. \quad (3.10)$$

Note que, neste exemplo simplificado, restringimos o domínio da função inflação a \mathbb{R}_+^* , tal que $\Delta m > 0$: o banco central pode escolher apenas variações estritamente positivas na oferta de moeda. Além disso, a hipótese 3.3 é atendida, ou seja, inflação e produto crescem com aumentos na oferta de moeda. Contudo, esse crescimento acontece a taxas decrescentes, já que $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} < 0$ para todo $\Delta m \in \mathbb{R}_+^*$.

Com a substituição de (3.10) e (3.6) em (3.1), a condição de segunda ordem do problema do banco central é dada por:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} = \frac{\lambda a(1 - \ln \Delta m + \pi^e)}{\Delta m^2} + \frac{(1 - \ln \Delta m + \pi^*)}{\Delta m^2}, \quad (3.11)$$

a qual pode ser maior ou menor que zero, dependendo do sinal dos dois termos entre parênteses.

Note acima que, para a convexidade estrita de L , é suficiente que $\ln \Delta m < \min\{1 + \pi^e, 1 + \pi^*\}$. Entretanto, esta condição pode não ser satisfeita para alguns estados da economia. De fato, se a economia está aquecida o suficiente, tal que $\pi - \pi^* = \ln \Delta m - \pi^* > 1$ e $y - y^* = a(\ln \Delta m - \pi^e) > a$, é fácil ver em (3.11) que $\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} < 0$ e, portanto, o hessiano de L é indefinido.

³⁵O modelo de Schaling (1999), apresentado em Semmler e Zhang (2004), utiliza a curva de Phillips sem expectativas $\pi = -\beta r - \theta \mu$. Através da lei de Okun $g = -\mu$, onde $g = y - y^*$ é o *gap* do produto, os autores usam a função $f(g) = \frac{\phi g}{1 - \psi \phi g}$, para reescrever a curva de Phillips como $\pi = -\beta r - \theta \Pi(\mu)$, onde $\Pi(\mu) = \frac{\phi \mu}{1 + \psi \phi \mu}$. A expressão (3.7) apenas usa a lei de Okun para substituir μ na curva de Phillips acima.

3.2.2 Mais de um instrumento

Toda a análise da seção 3.2.1 foi feita baseada na hipótese de que o banco central usa um único instrumento de política monetária para estabilizar preços e produto. É natural supor que, para alcançar suas metas, esta instituição deseje utilizar tantos instrumentos quantos estiverem à sua disposição, se não os utilizando de maneira combinada, ao menos escolhendo o instrumento “ótimo”, como estuda a literatura iniciada com Poole (1970), por exemplo. Vamos considerar agora que, além da variação da oferta de moeda, Δm , a taxa de juros básica da economia, i , também é um instrumento de política disponível³⁶.

Nesse novo contexto, inflação e produto correntes podem ser afetados também pela taxa de juros, tal que $\pi(\Delta m, i, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, i, v; \pi^e)$. Precisamos, dessa forma, acrescentar uma hipótese para incluir o efeito do novo instrumento no modelo. Assumiremos que aumentos (quedas) em i diminuem (aumentam) a inflação - através da retração da demanda agregada, por exemplo - e o produto - através do aumento do custo de capital e conseqüente queda do investimento.

Hipótese 3.12 *A taxa de juros afeta negativamente tanto inflação quanto produto. Formalmente, $\frac{\partial \pi}{\partial i} < 0$ e $\frac{\partial y}{\partial i} < 0$.*

Para garantirmos a convexidade de L quando existe mais de um instrumento de política monetária não basta mais que as derivadas segundas sejam positivas. Devemos agora analisar o seu Hessiano com relação a Δm e i e impor condições sobre o comportamento das derivadas cruzadas.

Proposição 3.13 *Considere a função perda do banco central $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ e as funções de inflação e produto correntes, $\pi(\Delta m, i, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, i, v; \pi^e)$, respectivamente. Suponha que são satisfeitas as hipóteses 3.1, 3.2, 3.3 e 3.12. Então, são condições suficientes para que L seja estritamente convexa em Δm e i :*

I. *com a economia aquecida:*

- (i) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \geq 0$;
- (ii) $0 \leq \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \leq \sqrt{\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2}}$ e $0 \leq \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq \sqrt{\frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}}$;
- (iii) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq \min\{A, B, C\}$;

II. *com a economia em recessão:*

- (i) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \leq 0$;
- (ii) $-\sqrt{\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2}} \leq \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \leq 0$ e $-\sqrt{\frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}} \leq \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq 0$;
- (iii) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq \min\{A, B, C\}$;

III. *com economia com inflação alta:*

- (i) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \geq 0, \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \leq 0$;

³⁶Relembre comentário da nota 26.

$$(ii) 0 \leq \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \leq \sqrt{\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2}} \text{ e } -\sqrt{\frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}} \leq \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq 0;$$

$$(iii) \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \geq \max\{-A, B, C\};$$

IV. com economia com produto alto:

$$(i) \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \leq 0, \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \geq 0;$$

$$(ii) -\sqrt{\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2}} \leq \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \leq 0 \text{ e } 0 \leq \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq \sqrt{\frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}};$$

$$(iii) \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \geq \max\{-A, B, C\};$$

$$\text{Onde } A = \sqrt{\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}}, B = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} \text{ e } C = \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}.$$

Observe que o item (i) de cada um dos estados da economia é equivalente ao resultado da proposição 3.8. Sempre que a inflação corrente está acima (abaixo) da sua meta, precisamos que ambos instrumentos tenham efeito marginal crescente (decrecente) sobre o nível de preços. Conclusão análoga podemos tirar ao se analisar o comportamento do produto.

As diferenças entre as proposições 3.8 e 3.13 estão na inclusão das restrições sobre o sinal e magnitude das derivadas cruzadas. Considere o caso da economia aquecida, por exemplo. Além de efeitos marginais de Δm e i sobre π e y crescentes, é necessário, para garantir a convexidade estrita de L , também que as derivadas cruzadas sejam positivas e limitadas superiormente, bem como seu produto.

No caso da economia aquecida, podemos interpretar as novas restrições da seguinte maneira. Assim como antes, o efeito marginal da variação da oferta de moeda (taxa de juros) sobre produto e inflação correntes deve ser crescente na taxa de juros (variação de oferta de moeda), contudo, tal crescimento agora deve ser limitado. Em outras palavras, é suficiente para que L seja estritamente convexa que individualmente os instrumentos tenham efeitos marginais crescentes sobre π e y - medidos pelas derivadas segundas próprias, porém, quando combinados, existe um limite para o crescimento dos efeitos marginais de Δm e i .

Note que um padrão emerge da proposição 3.13. Condições suficientes para a convexidade estrita da função perda exigem derivadas cruzadas de π com relação Δm e i positivas (negativas) sempre que $\pi > \pi^*$ ($\pi < \pi^*$). O mesmo vale para as derivadas cruzadas de y . A interpretação é semelhante aquela do caso de um instrumento, apenas incluindo-se agora a limitação da influência de uma variável sobre o efeito marginal da outra, discutido acima.

É natural imaginarmos que exista um corolário para o caso de dois instrumentos de política monetária semelhante ao do problema univariado: o fato de que se $\pi(\Delta m, i, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, i, v; \pi^e)$ são lineares em Δm e i é suficiente para a convexidade estrita de L . Porém, esta afirmação não é verdade no caso de mais de um instrumento. De fato, outra condição precisa ser acrescentada para garantir a existência de um mínimo único para o problema do banco central.

Corolário 3.14 *Assuma que as hipóteses 3.1, 3.2, 3.3 e 3.12 são atendidas. Além disso, são válidas:*

(i) $\pi(\Delta m, i, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, i, v; \pi^e)$ são lineares em Δm e i ;

(ii) e $\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \neq \frac{\partial y}{\partial \Delta m}$;

Então L é estritamente convexa em Δm e i em qualquer um dos estados da economia.

A condição (ii) do corolário 3.14 afirma que a taxa marginal de substituição da inflação entre variação da oferta de moeda e taxa de juros deve ser diferente da taxa marginal de substituição do produto entre os mesmos instrumentos. Dito de outra forma, além da linearidade de π e y , é suficiente para a convexidade de L que a razão dos efeitos marginais de Δm e i sejam diferentes para π e y .

Para compreender melhor a importância da hipótese (ii) acima, considere a seguinte modificação do problema de otimização do banco central.

Exemplo 3.15 *Seja a função perda do banco central dada por*

$$L = \frac{\lambda}{2} (y - y^*)^2 + \frac{1}{2} (\pi - \pi^*)^2, \quad (3.12)$$

e suponha que a instituição deseja minimizar (3.12) escolhendo o nível da variação na oferta de moeda, Δm , e da taxa de juros, i .

Assuma também que as funções de inflação e produto correntes são dadas por

$$\pi = \pi_1 \Delta m + \pi_2 i + u \quad (3.13)$$

e

$$y = y^* + a(\pi - \pi^e) + v, \quad (3.14)$$

onde $\pi_1 > 0$, $\pi_2 < 0$ e $a > 0$. A substituição de (3.13) em (3.14) mostra que ambas π e y são lineares em Δm e i , e que as hipóteses 3.3 e 3.12 são satisfeitas.

Deixando L apenas em função dos instrumentos de política monetária, temos o seguinte problema do banco central:

$$\min_{\Delta m, i} \frac{\lambda}{2} (a\pi_1 \Delta m + a\pi_2 i + au - a\pi^e + v)^2 + \frac{1}{2} (\pi_1 \Delta m + \pi_2 i + u - \pi^*)^2, \quad (3.15)$$

o qual possui solução³⁷:

$$\Delta m = \frac{\pi^* + \lambda a(a\pi^e - v)}{(\lambda a^2 + 1)\pi_1} - \frac{u}{\pi_1} - \frac{\pi_2}{\pi_1}i. \quad (3.16)$$

Observe que o problema não possui mínimo único. Ao contrário, qualquer combinação de Δm e i que satisfaça (3.16) é solução de (3.15). Em outras palavras, os instrumentos não são independentes: ou o banco central escolhe a variação de oferta de moeda e a taxa de juros se ajusta à esta escolha; ou escolhe a taxa de juros e a oferta de moeda é quem deve se ajustar.

A razão para essa dependência é que L é uma função convexa não estrita. Esse fato é facilmente verificado através do seu hessiano:

$$H_2 = (\lambda a^2 + 1) \begin{bmatrix} \pi_1^2 & \pi_1\pi_2 \\ \pi_1\pi_2 & \pi_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

da onde concluímos que $|H_2| = 0$ e $|H_1| = \pi_1^2(\lambda a^2 + 1) > 0$. Logo, L possui infinitos pontos de mínimo, expressos pela reta (3.16).

Podemos agora verificar que a exigência (ii) do corolário 3.14 não é atendida neste modelo. Note que as taxas marginais de substituição são iguais,

$$\frac{\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial \pi}{\partial i}} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{a\pi_1}{a\pi_2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial y}{\partial i}}. \quad (3.18)$$

Outra maneira de visualizarmos a importância da relação entre as taxas marginais de substituição sobre a escolha de Δm e i é através das curvas de nível de π e y . Para simplificar a análise, assuma que $\lambda = 1$, $y^* = 1$, $\pi^* = 1$, $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = -1$, $a = 2$, $\pi^e = 1$, $y_2 = -1$ e que ambos os choques são constantes e iguais a zero, $u = v = 0$. Com essa especificação, temos que as curvas de nível $\bar{\pi}$ e \bar{y} são expressas por:

$$\Delta m = \bar{\pi} + i \quad (3.19)$$

e

$$\Delta m = \left(\frac{\bar{y} + 2}{2} \right) + i. \quad (3.20)$$

³⁷As condições de segunda ordem são:

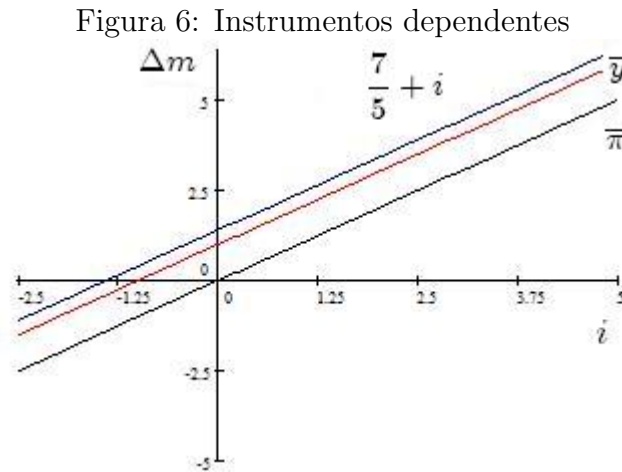
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Delta m} &= \pi_1(\pi_1 \Delta m + \pi_2 i + u - \pi^e)(\lambda a^2 + 1) + \lambda a \pi_1 v = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial i} &= \pi_2(\pi_1 \Delta m + \pi_2 i + u - \pi^e)(\lambda a^2 + 1) + \lambda a \pi_2 v = 0, \end{aligned}$$

as quais formam um sistema linearmente dependente. Esse fato pode ser constatado através da matriz de seus coeficientes ou de substituição simples.

Note que ambas são paralelas, em decorrência da igualdade entre as taxas marginais de substituição. Além disso, com os parâmetros assumindo os valores citados acima, a solução (3.16) torna-se

$$\Delta m = \frac{7}{5} + i, \quad (3.21)$$

que possui a mesma inclinação das curvas de nível (3.19) e (3.20). Para $\bar{\pi} = \bar{y} = 0$, graficamente temos:



Fonte: elaboração própria.

Dado o paralelismo entre as curvas de nível e a solução, só existe uma possibilidade de resolução do problema: as três curvas serem sobrepostas. Em outras palavras, é necessário que seus interceptos sejam iguais. Quando isso acontece, temos a reta da solução tocando as curvas de nível em infinitos pontos, gerando, conseqüentemente, infinitas soluções para (3.15). No exemplo, $\bar{\pi} = \frac{7}{5}$ e $\bar{y} = \frac{4}{5}$ garantem esse resultado.

É importante destacar que esse resultado possui uma interpretação econômica interessante. Quando $\pi(\Delta m, i, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, i, v; \pi^e)$ são lineares em Δm e i , e se as taxas marginais de substituição (da variação da oferta de moeda pela taxa de juros) da inflação e do produto correntes forem iguais, então não é possível utilizá-los de maneira independente para estabilizar a economia. Podemos pensar que essa igualdade cria uma espécie de substitubilidade entre os instrumentos: deve-se escolher o nível de um e de deixar a dinâmica da economia definir o valor do outro. Neste caso, faz sentido a aplicação de estudos que investigam qual o instrumento ótimo.

O resultado encontrado no exemplo anterior pode ser generalizado para qualquer número finito $n \geq 2$ de instrumentos de política monetária à disposição do banco central.

Proposição 3.16 Considere a função perda do banco central $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ e as funções de inflação e produto correntes $\pi(a_1, a_2, \dots, a_n, u; \pi^e)$ e $y(a_1, a_2, \dots, a_n, v; \pi^e)$, respectivamente, onde a_1, a_2, \dots, a_n são n instrumentos de política monetária disponíveis. Sejam

$\pi(a_1, a_2, \dots, a_n, u; \pi^e)$ e $y(a_1, a_2, \dots, a_n, v; \pi^e)$ lineares em a_1, a_2, \dots, a_n . Além disso, suponha que

$$\frac{\frac{\partial \pi}{\partial a_k}}{\frac{\partial \pi}{\partial a_j}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial a_k}}{\frac{\partial y}{\partial a_j}} \quad (3.22)$$

para todo $k \neq j$. Então $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ é convexa (não estrita) em a_1, a_2, \dots, a_n .

O resultado acima nos diz que, em uma economia onde inflação e produto correntes são funções lineares de todos os instrumentos de política monetária, sempre que houver igualdade entre as taxas marginais de substituição da inflação e do produto entre os instrumentos k e j , estes instrumentos serão dependentes e não será possível escolher seus níveis individualmente. Por outro lado, se o banco central deseja utilizar com independência n destes instrumentos para estabilizar a economia, a única informação que temos é que a condição necessária é que as taxas marginais de substituição sejam diferentes.

Um resultado de suficiência para independência dos instrumentos seria uma extensão natural do corolário 3.14 para n instrumentos. Entretanto, em um ambiente linear, exigir apenas que as taxas marginais de substituição sejam diferentes pode não ser o suficiente, porque isso garantiria que uma linha do hessiano de ordem n de L não é múltipla da outra³⁸, mas não excluiria a possibilidade de outras combinações lineares.

3.3 Um exemplo simples com dois instrumentos independentes

A seção anterior foi encerrada com um resultado que garante instrumentos de política monetária *dependentes*. Contudo, é mais provável que seja de interesse de um banco central saber sob quais condições poderá escolher o nível de seus instrumentos de maneira *independente*. No exemplo abaixo fornecemos uma modificação simples do modelo utilizado no exemplo 3.15 e obtemos como escolha ótima do banco central Δm e i independentes.

Exemplo 3.17 *Vamos considerar a mesma estrutura do modelo analisado no exemplo 3.15, apenas substituindo (3.14) por*

$$y = y^* + a(\pi - \pi^*) + y_2 i + v, \quad (3.23)$$

onde $y_2 < 0$, para atender a hipótese 3.12. Podemos justificar a inclusão de i em (3.23), admitindo que a taxa de juros possui, além do efeito indireto através da taxa de inflação, um efeito direto sobre o produto corrente. Por exemplo, o impacto de mudanças em i sobre o custo de capital pode afetar o investimento e, conseqüentemente, o produto da economia.

³⁸Veja a prova da proposição 3.16 no apêndice.

Perceba que já não temos mais igualdade entre as taxas marginais de substituição de π e y :

$$\frac{\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial \pi}{\partial i}} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \neq \frac{a\pi_1}{a\pi_2 + y_2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial y}{\partial i}} \quad (3.24)$$

O reflexo da condição acima sobre a convexidade estrita de L em relação a Δm e i pode ser visto no seu hessiano:

$$H_2 = \begin{bmatrix} \pi_1^2(a^2\lambda + 1) & \pi_1[a\lambda(a\pi_2 + y_2) + \pi_2] \\ \pi_1[a\lambda(a\pi_2 + y_2) + \pi_2] & \lambda(a\pi_2 + y_2)^2 + \pi_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

onde $|H_1| = \pi_1^2(a^2\lambda + 1) > 0$ e $|H_2| = \lambda\pi_1^2y_2^2 > 0$. Dessa forma, taxas marginais de substituição diferentes, neste contexto, garantem a existência de um mínimo único para o problema do banco central. Observe o papel de y_2 no resultado: se $y_2 = 0$, então (3.25) é igual a (3.17) e $|H_2| = 0$.

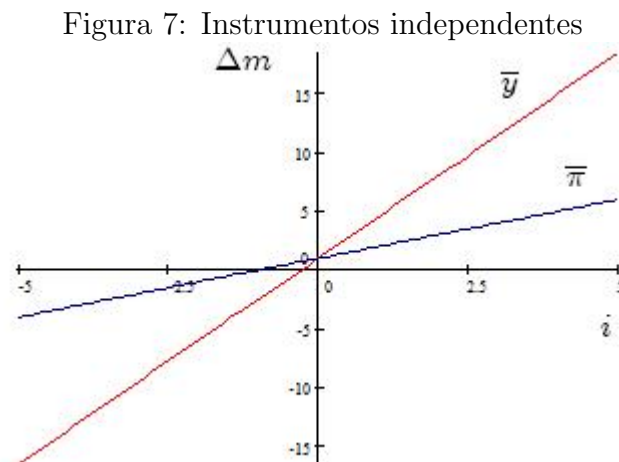
Graficamente também é possível ver a unicidade da solução. Considere os valores dos parâmetros propostos no exemplo 3.15 e $y_2 = -5$. As curvas de nível $\bar{\pi}$ e \bar{y} são expressas por

$$\Delta m = \bar{\pi} + i \quad (3.26)$$

e

$$\Delta m = \left(\frac{\bar{y} + 1}{2}\right) + \frac{7}{2}i, \quad (3.27)$$

respectivamente. Observe que agora as inclinações são diferentes, o que indica a possibilidade de cruzamento entre as curvas.



Fonte: elaboração própria.

Neste contexto, a autoridade monetária pode escolher a variação da oferta de moeda e taxa de juros de maneira independente, já que uma variável não é mais função da outra. O ponto $A = (1, 0)$ na figura acima é a solução do problema do banco central para os valores

propostos dos parâmetros, obtida através das condições de primeira ordem do problema. Para $\Delta m = 1$ e $i = 0$, temos $\bar{\pi} = 1$ e $\bar{y} = 1$, ou seja, produto e inflação correntes são iguais a 1.

3.4 Conclusão

Não é claro que as preferências de um banco central qualquer possam ser expressas por uma função perda estritamente convexa em seus instrumentos de política monetária. Mesmo assim, talvez por conveniência técnica ou teórica, a grande maioria dos modelos que estudam a tomada de decisão da autoridade monetária assumem tal hipótese como válida. Dado que, se de fato a função perda não possui esse formato, as conclusões obtidas nesses modelos podem ser muito enganosas, faz-se necessário estudar sob quais condições a convexidade estrita será garantida.

Nossos resultados partem de algumas hipóteses básicas para obter condições suficientes à desejável propriedade citada acima. Dentre elas, a hipótese 3.2 não parece ser uma imposição forte, dado que, qualquer banco central que deseje estabilizar preços e produto apresentará tal comportamento. Da mesma forma, na hipótese 3.3, o fato da oferta de moeda afetar positivamente à inflação não parece questionável. Por outro lado, é possível considerar que o produto pode não ser afetado pelo lado monetário da economia. Como, de qualquer modo, não é plausível que tal efeito seja negativo, modificar a hipótese 3.3 de maneira que $\frac{\partial y}{\partial \Delta m} = 0$ não afetaria qualitativamente nossos resultados. Ao contrário, conjecturamos que as condições suficientes se tornariam menos restritivas. O mesmo argumento pode ser aplicado à hipótese 3.12, dado que não parece possível que taxas de juros afetem positivamente inflação e produto.

O relaxamento da hipótese 3.1, por outro lado, pode modificar de maneira substancial nossas conclusões. Na medida que a convexidade estrita em π e y não é garantida, as derivadas segundas de L podem ter qualquer sinal, o que deixaria a análise muito mais complexa, pois muitas possibilidades seriam abertas - como uma análise das demonstrações no apêndice deixam claro. Contudo, supor que pode não haver inflação e produto ótimos para o banco central faz-nos questionar sobre a própria necessidade de modelar sua tomada de decisão. De qualquer maneira, este parece ser um ponto importante a ser considerado em trabalhos futuros.

Outra possibilidade de extensão de nossos resultados é considerar que o banco central tenha mais de dois objetivos. Poder-se-ia, por exemplo, assumir que a autoridade monetária também preocupa-se com o câmbio, além da estabilização do nível de preços e do produto, como faz Ruge-Murcia (2003). Entretanto, novamente conjecturamos que não haverá mudança qualitativa em nossas conclusões. A análise se tornará mais complexa - por ter de lidar com matrizes de dimensões superiores na proposição 3.13, por exemplo -, mas acreditamos que as principais condições necessárias para a convexidade se manterão:

o efeito dos instrumentos deve variar a taxas crescentes ou decrescentes conforme o estado da economia, assim como os efeitos cruzados devem ser limitados.

Também contribuimos à literatura que trata da escolha ótima dos instrumentos de política monetária. Nosso resultado de dependência mostra que modelos como o proposto pela literatura conhecida como “o problema do instrumento”, iniciada por Poole (1970), podem, de fato, ser os mais adequados: sob condições de linearidade e igualdade entre as taxas marginais de substituição, não é possível escolher o nível dos instrumentos individualmente, de maneira que o formulador deverá optar por apenas um deles. Novamente, nossas conclusões são condicionais às hipóteses assumidas e, portanto, a mesma observação em relação à possibilidade de relaxá-las feita anteriormente se aplica. Além disso, é importante que trabalhos futuros tentem obter condições suficientes também para a independência entre n instrumentos, como conjecturamos ao final da seção 3.2.

Por fim, vale destacar que nosso foco neste trabalho recaiu sobre condições suficientes para a obtenção de propriedades desejáveis no problema de otimização do banco central. Uma análise mais completa deve tratar também de condições necessárias. Esta é outra sugestão para trabalhos futuros, embora uma rápida análise nas demonstrações de nossos resultados, contidas no apêndice, deixem claro o grande número de possibilidades abertas e o aumento na complexidade quando se opta por este tipo de abordagem.

3.5 Referências

ATKESON, A.; CHARI, V.; KEHOE, P. On the optimal choice of a monetary policy instrument. **NBER Working Paper Series**, Working paper 13398, 2007.

ARAGON, E.; PORTUGAL, M. Nonlinearities in central bank of Brazil’s reaction function: the case of asymmetric preferences. **Estudos Econômicos**, v.40, 373-399, 2010.

BACKUS, D. K.; DRIFFILL, J. Inflation and reputation. **American Economic Review**, 75 (3), 530-538, 1985.

BALL, L. Time consistent inflation policy and persistent changes in inflation. **Journal of Monetary Economics**, 36 (2), 329-350, 1995.

BARRO, R. J.; GORDON, D. B. A positive theory of monetary policy in a natural-rate model. **Journal of Political Economy**, 91 (4), 589-610, 1983a.

BARRO, R. J.; GORDON, D. B. Rules, discretion, and reputation in a model of monetary policy. **Journal of Monetary Economics**, 12 (1), 101-121, 1983b.

BEETSMA, R.; JENSEN, H. Inflation targets and contracts with uncertain central banker preferences. **Journal of Money, Credit, and Banking**, 30 (3), part 1, 384-403, 1998.

CANZONERI, M. B. Monetary policy games and the role of private information. **American Economic Review**, 75 (4), 1056-1070, 1985.

CLARK, P.; LAXTON, D.; ROSE, D. Asymmetry in the U.S. output-inflation nexus: issues and evidence. **IMF Staff Papers**, Vol. 43, No. 1, 216-250, 1996.

COLLARD, F.; DELLAS, H. Poole in the New Keynesian model. **European Economic Review**, 49, 887-907, 2005.

CUCKIERMAN, A. **Central bank strategies, credibility and independence**. Cambridge: MIT Press, 1992.

CUCKIERMAN, A. Are contemporary central banks transparent about economic models and objectives and what difference does it make? **Federal Reserve Bank of St. Louis Review**, 84 (4), 15-35, 2002.

CUCKIERMAN, A.; LIVIATAN, N. Optimal accommodation by strong policymakers under incomplete information. **Journal of Monetary Economics**, 27 (1), 99-127, 1991.

CUCKIERMAN, A.; MELTZER, A. A theory of ambiguity, credibility and inflation under discretion and asymmetric information. **Econometrica**, 54 (5), 1099-1128, 1986.

EISNER, R. New view of the NAIRU, in Davidson, P. and Jan A. Kregel, eds., **Improving the Global Economy: Keynesian and the Growth in Output and Employment**, Edward Elgar Publishing Cheltenham: UK and Lyme, U.S., 1997.

FILARDO, A. (1998). New evidence on the output cost of fighting inflation. **Economic Review**, Federal Reserve of Kansas City, 33-61, 1998.

FISCHER, S. Long term contracts, rational expectations, and the optimal money supply rule. **Journal of Political Economy**, 85, 91-205, 1977a.

FRIEDMAN, B. Targets and instruments of monetary policy, in B. Friedman and F. Hahn (eds.), **The Handbook of Monetary Economics**, Vol. II, Amsterdam: North-Holland, 1183-1230, 1990.

GIAVAZZI, F.; PAGANO, M. The advantage of tying one's hands: EMS discipline and central bank credibility. **European Economic Review**, 32, 1055-1082, 1998.

GOODHART, C.; SUNIRAND, P.; TSOMOCOS, D. The optimal monetary instrument for prudential purposes. **Journal of Financial Stability**, 7, 70-77, 2011.

JONSSON, G. Monetary politics and unemployment persistence. **Journal of Monetary Economics**, 39, 303-325, 1997.

LAXTON, D.; MEREDITH, G.; ROSE, D. Asymmetric effects of economic activity on inflation: evidence and policy implications. **IMF Staff Papers**, vol. 42, No. 4, 1995.

MCCALLUM, B. Price level determinacy with an interest rate policy rule and rational expectations. **Journal of Monetary Economics**, 8, 319-329, 1981.

NIEMANN, S.; PICHLER, P.; SORGER, G. Central bank independence and the monetary instrument problem. **Economics Discussion Paper of University of Essex**, n. 687, 2011.

NOBAY, A. R.; PEEL, D. Optimal discretionary monetary policy in a model of asymmetric central bank preferences. **The Economic Journal**, 113, 657-665, 2003.

PASCA, N.; ARAGON, E.; PORTUGAL, M. Preferences of the central bank of Peru and optimal monetary rules in the inflation targeting regime. **Estudos Econômicos**, v.42, 5-42, 2012.

PERSSON, T.; TABELLINI, G.(eds.). **Macroeconomic policy, credibility and politics**. Chur, Switzerland: Harwood Academic, 1990.

PHELPS, E.; TAYLOR, J. Stabilization powers of monetary policy under rational expectations. **Journal of Political Economy**, 85, 163-190, 1977.

POOLE, W. Optimal choice of monetary policy instrument in a simple stochastic macro model. **Quarterly Journal of Economics**, 84, 197-216, 1970.

RUGE-MURCIA, F. Inflation targeting under asymmetric preferences. **Journal of Money, Credit, and Banking**, 35 (5), 763-785, 2003.

SARGENT, T.; WALLACE, N. Rational expectations, the optimal monetary instrument,

and the optimal money supply rule. **Journal of Political Economy**, 83, 241-254, 1974.

SEMMLER, W.; ZHANG, W. **Monetary policy with nonlinear Phillips curve and endogenous NAIRU**, in: Chiarella, C., Franke, R., Flaschel, P. and Semmler, W. (eds.), *Contributions to Economic Analysis*, vol. 277, 483-515, 2006.

SCHALING, E. **The nonlinear Phillips curve and infation forecast targeting**. Bank of England, 1999.

STIGLITZ, J. Reflections on the natural rate hypothesis. **Journal of Economic Perspectives**, Vol. 11, 3-10, 1997.

TAMBAKIS, D. N. Monetary policy with a convex Phillips curve and asymmetric loss. **working paper 98/21, IMF**, 1998.

WALSH, C. E. **Monetary theory and policy**, 3a ed., Cambridge: MIT Press, 2010.

3.6 Apêndice

Prova. (Proposição 3.8) O primeiro passo é substituir (3.3) e (3.4) em $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$, de modo que temos $L(\pi(\Delta m, u; \pi^e), y(\Delta m, v; \pi^e); \pi^*, y^*)$. Derivando através da regra da cadeia:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \right)^2 + \frac{\partial L}{\partial \pi} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta m} \right)^2 + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2}. \quad (3.28)$$

Pela hipótese 3.1, $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} > 0$. Assim, utilizando a hipótese 3.2, temos que:

(i) se a economia está aquecida, $\frac{\partial L}{\partial \pi} > 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} > 0$, então $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} > 0$ implicam $\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} > 0$;

(ii) se a economia está em recessão, $\frac{\partial L}{\partial \pi} < 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} < 0$, então $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} < 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} < 0$ implicam $\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} > 0$;

(iii) se a economia está com inflação alta, $\frac{\partial L}{\partial \pi} > 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} < 0$, então $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} < 0$ implicam $\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} > 0$;

(iv) e se a economia está com produto alto, $\frac{\partial L}{\partial \pi} < 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} > 0$, então $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} < 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} > 0$ implicam $\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} > 0$;

Dessa forma, concluímos a demonstração. ■

Prova. (Corolário 3.9) Se $\pi(\Delta m, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, v; \pi^e)$ são lineares em Δm , então $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} = 0$. Por (3.28), fica claro que $\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} > 0$. ■

Prova. (Proposição 3.13) Considere o hessiano do problema do banco central com dois instrumentos de política monetária

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m \partial i} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m \partial i} & \frac{\partial^2 L}{\partial i^2} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde as derivadas parciais de segunda ordem da sua função perda são dadas por:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \right)^2 + \frac{\partial L}{\partial \pi} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta m} \right)^2 + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial i^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial i} \right)^2 + \frac{\partial L}{\partial \pi} \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial i} \right)^2 + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m \partial i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial \pi}{\partial i} \right) + \frac{\partial L}{\partial \pi} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta m} \frac{\partial y}{\partial i} \right) + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \quad (3.32)$$

Devemos mostrar que $|H_2| > 0$ para cada um dos estados da economia, já que para garantir $|H_1| > 0$ podemos usar o resultado da proposição 3.8. Note que o determinante

de H_2 é dado por

$$\begin{aligned}
|H_2| &= \frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m^2} \frac{\partial^2 L}{\partial i^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m \partial i} \right)^2 \\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial L}{\partial \pi} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} - \frac{\partial \pi}{\partial i} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \right) + \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial y}{\partial i} - \frac{\partial \pi}{\partial i} \frac{\partial y}{\partial \Delta m} \right)^2 \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial L}{\partial y} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \frac{\partial \pi}{\partial i} \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial L}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial i} \left(\frac{\partial \pi}{\partial i} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} - \frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial L}{\partial \pi} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \right)^2 \right] \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial \pi} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial i} \left(\frac{\partial y}{\partial i} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} - \frac{\partial y}{\partial \Delta m} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \right) \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial \pi} \frac{\partial L}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2} \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial L}{\partial \pi} \frac{\partial y}{\partial \Delta m} \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta m} \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} - \frac{\partial y}{\partial i} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \Delta m} \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta m} \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} - \frac{\partial y}{\partial i} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \right) \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial i} \left(\frac{\partial \pi}{\partial i} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} - \frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \right) \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial \pi} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \right) \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial i} \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta m} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} - \frac{\partial y}{\partial \Delta m} \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m^2} \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \right)^2 \right] \\
&= A + B + C + D + E + F + G + H + I + J + K + L + M \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Vamos analisar cada estado da economia individualmente e mostrar que todos os termos do somatório acima - com a exceção de um, como veremos - são positivos, quando aplicamos as condições que a proposição 3.13 impõe. A exceção é o termo B , que é não negativo em qualquer estado, dado que $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} > 0$ pela hipótese 3.1.

I. Economia aquecida. Neste caso, pela hipótese 3.2 temos $\frac{\partial L}{\partial \pi}, \frac{\partial L}{\partial y} > 0$. Usando ainda as hipóteses 3.2, 3.3 e 3.12, temos que os termos fora dos parênteses em A, C, E, G, H, I, K e M são positivos. Utilizando-se as condições (i), (ii) e (iii), é possível ver que os termos dentro dos parênteses também serão positivos para todas as letras. Ainda, para D, F, J e L , os termos fora dos parênteses são negativos. Aplicando (i), (ii) e (iii), temos que o termo dentro dos parênteses também será negativo para estas letras. Portanto, $A, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M > 0$, o que implica $|H_2| > 0$.

II. Economia em recessão. Agora temos $\frac{\partial L}{\partial \pi}, \frac{\partial L}{\partial y} < 0$. Os termos fora dos parênteses de D, E, F, G, J, K, L e M são positivos. Usando (i), (ii) e (iii), temos que seus termos dentro dos parênteses também o são. Já para A, C e H , os termos fora dos parênteses são negativos, contudo, as condições (i), (ii) e (iii) garantem que os termos dentro do parênteses tenham o mesmo sinal. Logo, $A, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M > 0$, implicando $|H_2| > 0$.

III. Inflação alta. Temos $\frac{\partial L}{\partial \pi} > 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} < 0$. Agora, A, E, H, J, L e M possuem seus termos de fora dos parênteses maiores que zero, enquanto que C, D, F, G, I e K possuem tais termos negativos. Aplicando (i), (ii) e (iii), o primeiro grupo tem seus termos de dentro dos parênteses positivos e o segundo, negativos. Logo, $A, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M > 0$. Assim, $|H_2| > 0$.

IV. Produto alto. Neste caso, $\frac{\partial L}{\partial \pi} < 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} > 0$. Note que, agora, C, E, I e M têm seus termos de fora dos parênteses positivos, enquanto que A, D, F, G, H, J, K e L têm estes termos com sinal negativo. Como, quando usamos (i), (ii) e (iii), os termos de dentro do parênteses do primeiro grupo são positivos e do segundo, negativos, $A, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M > 0$. Logo, $|H_2| > 0$. ■

Prova. (Corolário 3.14) Observe que (i) implica que todas as derivadas parciais de segunda ordem de π e y são nulas. Dessa forma, (3.33) torna-se

$$|H_2| = B = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial y}{\partial i} - \frac{\partial \pi}{\partial i} \frac{\partial y}{\partial \Delta m} \right)^2, \quad (3.34)$$

o qual é não negativo, dada a hipótese 3.1. Observe, ainda, que $|H_2| > 0$ se, e somente se, $\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial y}{\partial i} \neq \frac{\partial \pi}{\partial i} \frac{\partial y}{\partial \Delta m}$. Reescrevendo esta última expressão temos a condição (ii):

$$\frac{\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial \pi}{\partial i}} \neq \frac{\frac{\partial y}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial y}{\partial i}}. \quad (3.35)$$

■

Prova. (Proposição 3.16) Considere o hessiano do problema com n instrumentos,

$$H_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_n \partial a_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_n \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial a_n^2} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Devemos mostrar que $|H_i| \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $|H_j| > 0$ para algum j , tal que L é uma função convexa não estrita. Começamos considerando as derivadas que compõe

as duas primeiras linhas de H_n :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a_1^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial a_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \right)^2 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial a_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial a_1} \frac{\partial \pi}{\partial a_2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y}{\partial a_2} \quad (3.38)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial a_n} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial a_1} \frac{\partial \pi}{\partial a_n} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y}{\partial a_n} \end{array} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial a_2} \frac{\partial \pi}{\partial a_1} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial y}{\partial a_1} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a_2^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial a_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_2} \right)^2 \quad (3.41)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_n} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial a_2} \frac{\partial \pi}{\partial a_n} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial y}{\partial a_n}, \end{array} \quad (3.42)$$

onde as derivadas parciais de segunda ordem de π e y estão ausentes porque são nulas pela hipótese de linearidade.

Note que ao multiplicarmos os elementos da primeira linha de H_n por $\frac{\partial y}{\partial a_2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \right)^{-1}$ e usarmos a hipótese de que $\frac{\partial \pi}{\partial a_i} \left(\frac{\partial \pi}{\partial a_j} \right)^{-1} = \frac{\partial y}{\partial a_i} \left(\frac{\partial y}{\partial a_j} \right)^{-1}$ para $i = 1$ e $j = 2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial a_2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial a_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \right)^2 \right] &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial a_2} \frac{\partial \pi}{\partial a_1} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial y}{\partial a_1} \\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_1} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial a_2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial a_1} \frac{\partial \pi}{\partial a_2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y}{\partial a_2} \right] &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial a_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_2} \right)^2 \\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial a_2^2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial a_2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial a_1} \frac{\partial \pi}{\partial a_n} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y}{\partial a_n} \right] = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial \pi}{\partial a_2} \frac{\partial \pi}{\partial a_n} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial y}{\partial a_n} \\ = \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_n}, \end{array} \quad (3.45)$$

o que mostra que a primeira linha é múltipla da segunda. Dessa forma, $|H_n| = 0$. É possível aplicar o mesmo argumento para qualquer menor principal de dimensão $n > 1$, tal que $|H_n| = 0$.

Para completar a prova, basta lembrarmos que os elementos da diagonal principal de

H_n ,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a_i^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial a_i} \right)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial a_i} \right)^2 > 0 \quad (3.46)$$

para $i = 1, \dots, n$ pela hipótese 3.1. ■

4 Expectativas de mercado e viés inflacionário em regimes de metas de inflação

Abstract

Em regimes de metas de inflação, agentes podem influenciar a política monetária através das expectativas de mercado reportadas ao banco central. Este, por sua vez, deve formular a política monetária considerando que tal influência pode ser usada em benefício dos próprios agentes. Modelamos essa relação estratégica como um jogo sequencial entre uma instituição financeira representativa e o banco central. Mostramos que quando a autoridade monetária escolhe apenas o nível da taxa de juros, existe um potencial viés inflacionário na economia. Esse viés é superado quando a oferta de moeda torna-se um segundo instrumento de política. Ainda mostramos que penalização de instituições más previsoras também pode ser um mecanismo eficiente de ancoragem de expectativas.

4.1 Introdução

A relevância de se considerar a expectativa de inflação no momento da formulação da política monetária é algo praticamente consensual em economia. Desde o seminal trabalho de Taylor (1993), muitos estudos têm reportado evidências empíricas³⁹ da influência do nível esperado de preços nas decisões da autoridade monetária, principalmente no que diz respeito à definição do nível da taxa de juros. A chamada Regra de Taylor, indica, em termos gerais, que uma política de estabilização deve responder a altas na inflação corrente, bem como em seu valor esperado, através de aumentos na taxa básica de juros da economia.

Com a disseminação do regime de metas de inflação pelo mundo, a importância do monitoramento das expectativas de preços futuros aumentou ainda mais. Baseado nas ideias da teoria das expectativas racionais, bancos centrais têm tentado eliminar, sem custos, o viés inflacionário da economia através da “ancoragem” das expectativas dos agentes. O termo “ancoragem”, nesse sentido, refere-se ao processo de convergência da expectativa de inflação para sua meta. Isso é feito, em geral, através da independência do banco central e da criação de reputação de intolerante à inflação. A importância do processo de monitoramento das expectativas neste regime, pode, inclusive, fazer com que o banco central adote como meta intermediária a previsão da inflação (Svensson, 1997)⁴⁰.

³⁹Para um *survey* destes trabalhos, bem como um histórico da Regra de Taylor, veja Asso, Kahn e Leeson (2010).

⁴⁰Mais do que isso, Svensson (1997) mostra que a adoção de tal meta intermediária simplifica tanto a implementação quanto o monitoramento da política monetária. Quando comparada a outra meta intermediária alternativa, como o crescimento da oferta de moeda, por exemplo, o autor mostra que a previsão da inflação leva a menor variabilidade da taxa de inflação.

A necessidade de monitoramento das expectativas fez com muitos bancos centrais criassem um sistema para colher periodicamente o valor esperado de um conjunto de indicadores macroeconômicos - os de preços são os principais, mas não os únicos⁴¹. Um grupo de agentes, normalmente composto por instituições financeiras que possuem um corpo técnico especializado em previsões, reporta à autoridade monetária suas expectativas para os mais diversos horizontes de tempo (expectativa diária, mensal, anual, etc). De posse desses dados o formulador de política tem mais informações e pode decidir qual instrumento usar, bem como seu nível ótimo.

Ao levar em conta a expectativa dos agentes ao formular a política monetária, o banco central acaba por conceder às instituições que fazem parte do sistema de expectativas de mercado o poder de afetar a taxa de juros básica da economia. Este trabalho baseia-se na conjectura que essas instituições possuem incentivos a utilizar esse poder em benefício próprio. Para entender de que maneira isso pode acontecer, considere, por exemplo, que um banco comercial influente possua uma carteira com ativos indexados à taxa de juros. Como conhece o comportamento da autoridade monetária, o banco pode decidir reportar uma expectativa de inflação mais alta do que aquela que realmente espera, para que esta aumente a inflação e, em consequência, a autoridade monetária eleve os juros.

Uma outra razão para uma instituição financeira desejar taxas de juros mais altas, é que um ambiente com juros baixos, conjuntamente com forte concorrência bancária, pode limitar as possibilidades de precificação de empréstimos e depósitos, pressionando as margens operacionais e, dessa forma, afetar negativamente sua lucratividade (TRUJILLO-PONCE, 2013). De fato, a literatura empírica fornece evidência do impacto positivo da taxa de juros básica sobre o lucro de bancos comerciais. Exemplos são os estudos de Bourke (1989) para a Europa, América do Norte e Austrália, Clayes e Vennet (2008), Molyneux e Thornton (1992) e Staikouras e Wood (2003) para Europa Central e Ocidental e García-Herrero et al. (2009) para a China. Demirguç-Kunt e Huizinga (1999) encontram a mesma evidência ao fazer um estudo mais amplo, incluindo países de todos os continentes e de diferentes fases de desenvolvimento econômico. A relação positiva entre juros e lucratividade bancária também foi encontrada no Brasil, através de Rover et al. (2011) e Vinhado e Divino (2011).

A taxa de juros não é o único canal através do qual uma instituição financeira pode afetar seu lucro ao escolher a expectativa de inflação a reportar. Maiores taxas de inflação, em geral, também estão positivamente correlacionadas com maiores lucros bancários. Revell (1979) fornece uma das primeiras justificativas para essa relação ao estabelecer que o efeito da inflação nos lucros dependerá tanto de como salários são afetados quanto outros custos operacionais do banco. Nesse sentido, Perry (1992) conclui que o impacto

⁴¹As variáveis que fazem parte do sistema de previsão do banco central brasileiro, por exemplo, não se resumem aquelas ligadas aos índices de preços. De fato, taxa de juros, câmbio, produto, entre outras, também são previstos pelas instituições financeiras. Para mais detalhes de quais são as variáveis previstas, veja a página do BACEN: www.bcb.gov.br.

da inflação sobre os lucros dependerá do quanto do aumento de preços é antecipado pelo banco. Assim, com inflação completamente antecipada, a instituição financeira pode ajustar suas taxas de juros adequadamente, de maneira que suas receitas cresçam mais rápido do que seus custos.

A relação positiva entre inflação e lucratividade bancária também é confirmada na literatura empírica. Alexiou e Sofoklis (2009) e Athanasoglou et al. (2008) encontram tal relação ao analisar o mercado bancário grego. Já Kasman et al. (2010) analisa o setor em toda União Européia - incluindo novos integrantes e candidatos a membros - e encontra a mesma associação positiva entre as duas variáveis. Esse resultado corrobora as evidências já encontradas por Clayes e Vennet (2008) e Pasiouras e Kosmidou (2007). O mesmo padrão emerge quando o objeto de estudo é o mercado bancário brasileiro, conforme mostram Rover et al. (2011) e Vinhado e Divino (2011), e chinês, de acordo com García-Herrero et al. (2009).

Por fim, instituições financeiras também se beneficiam de crescimento do produto. Baixo nível de atividade econômica pode piorar a qualidade do portfólio de empréstimos, gerando perdas de crédito e aumentando a provisão que bancos precisam manter, assim reduzindo a lucratividade do setor. Por outro lado, um bom desempenho econômico, além de melhorar a solvência dos tomadores de empréstimo, aumenta a demanda por crédito por parte dos indivíduos e firmas, impactando positivamente o lucro bancário (TRUJILLO-PONCE, 2013; ATHANASOGLU ET AL., 2008). Nesse sentido, Albertazzi e Gambacorta (2009) concluem que a natureza pró-cíclica dos lucros do setor são resultado do efeito líquido que o crescimento econômico exerce sobre a receita de juros (via empréstimos) e sobre a diminuição da provisão (via melhora na qualidade do portfólio de crédito).

Além de Albertazzi e Gambacorta (2009), muitos estudos observam o comportamento pró-cíclico da lucratividade das instituições financeiras. Demirguç-Kunt e Huizinga (2000) encontram tal relação como significativa em uma amostra com países de diferentes estágios de desenvolvimento, enquanto Biker e Hu (2002) utilizam apenas países industrializados para chegar ao mesmo resultado. Além disso, vale destacar que a mesma relação é obtida nos estudos de Athanasoglou et al. (2008), para Grécia, e Dietrich e Wanzenried (2011), para Suíça. A lucratividade bancária brasileira, como indicam Rover et al. (2011) e Vinhado e Divino (2011), também apresenta um padrão pró-cíclico.

O objetivo deste trabalho é modelar a relação estratégica entre instituições financeiras e banco central implícita na discussão acima. As instituições, por um lado, desejam maximizar seu lucro escolhendo qual expectativa de inflação reportar à autoridade monetária. Esta, por sua vez, objetiva estabilizar a economia - minimizar o desvio da inflação com relação à meta e do produto com relação a seu nível potencial - escolhendo o nível do instrumento de política monetária. Dado que existe a possibilidade de a expectativa reportada ser superior à verdadeira, um dos pontos cruciais para o banco central é dar

incentivos às instituições para que as expectativas sejam ancoradas.

Apresentamos três jogos sequenciais de informação completa e perfeita envolvendo banco central e instituições financeiras. No modelo básico, de dois períodos, permitimos que instituições escolham a expectativa de inflação a reportar e, após observar este movimento, o banco central decida a taxa de juros da economia. O equilíbrio deste jogo resulta em viés inflacionário e produto abaixo do potencial. Esse viés é superado no segundo modelo, no qual introduzimos no jogo inicial a possibilidade do banco central jogar antes das instituições financeiras, escolhendo a oferta de moeda da economia. Conjuntamente com a hipótese de equilíbrio no mercado de títulos, obtemos inflação e produto completamente estabilizados agora. Por fim, um terceiro jogo é estudado, onde o banco central define penalidades para os erros de previsão cometidos pelas instituições. Nesse caso, conclusões importantes sobre a combinação de instrumentos de política monetária para estabilização de preços são fornecidas.

Por chegarmos a uma conclusão de viés inflacionário, nosso trabalho se relaciona com a literatura representada pelo seminal estudo de Barro e Gordon (1983b)⁴². Entretanto, ao contrário deste, a fonte do viés em nosso modelo não provém do problema da inconsistência dinâmica do banco central, mas sim da possibilidade dos agentes que reportam suas expectativas à autoridade monetária utilizarem seu poder de afetar inflação, produto e juros em benefício próprio. Também por obter mecanismos adequados a superação do viés, nossos resultados possuem ligação com outros trabalhos que sugerem diferentes meios de resolver tal problema. Exemplos são Chari e Kehoe (1990) e Ireland (1997a), que propõe criação de reputação através de jogos repetidos; Rogoff (1985b) e Lohmann (1992), que focam nas preferências ótimas do banco central; Walsh (1995a), ao discutir o contrato ótimo de incentivos à autoridade monetária, em uma estrutura de jogo agente-principal; Alesina (1987), que estuda o impacto de diferentes estruturas institucionais na condução da política monetária; e Canzoneri (1985) e Garcia de Paso (1994), que discutem as vantagens de restringir o comportamento dos formuladores de política. Em outras palavras, nosso estudo contribui para o debate “regras *versus* discricção” em política monetária, o qual vem sendo feito recentemente utilizando-se de modelos novo keynesianos, seguindo principalmente o trabalho de Clarida et al. (1999). A pesquisa nesse campo tem focado em políticas ótimas invariantes no tempo baseadas na otimização incondicional da função objetivo do banco central (DAMJANOVIC ET AL., 2008; SAUER, 2010).

Nosso trabalho também possui semelhança com a linha de pesquisa que modela o jogo entre banco central e demais agentes como um problema de informação assimétrica. Embora adotemos informação completa e perfeita, a utilização do arcabouço de teoria dos jogos nos aproxima dos estudos de Canzoneri (1985), Backus e Driffil (1985), Ball (1995)

⁴²Os trabalhos citados neste parágrafo são uma pequena parte da grande literatura sobre o assunto. Para um bom *survey* sobre viés inflacionário e as tentativas de superação deste problema, veja Persson e Tabellini (1990), Cuckierman (1992) e Walsh (2010).

e Cuckierman e Livitan (1991), entre outros. Ainda, nossos resultados sobre combinação entre instrumentos de política monetária com o objetivo de ancorar as expectativas de inflação de mercado estão diretamente ligados a discussão sobre instrumentos ótimos e metas intermediárias de política, tratada em Friedman (1990) e, mais recentemente em um contexto de metas de inflação, em Svensson (1997). Em resumo, a principal diferença do modelo apresentado aqui daqueles já estudados é também a sua grande contribuição: a possibilidade de agentes afetarem a economia (inflação, produto e juros) através de sua expectativa reportada e o potencial viés inflacionário resultante.

Este artigo divide-se em quatro seções. Após esta introdução, estudamos, na seção 4.2, a relação estratégica entre instituições financeiras e banco central. São propostos três modelos: um básico de dois períodos, que resulta em viés inflacionário, em decorrência do incentivo que firmas possuem em reportar inflação esperada acima da meta; e duas modificações para tentar superar o viés, ao permitir que o banco central detemine a oferta de moeda e uma penalização para erros de previsão. Seção 4.3 conclui e fornece diretrizes para trabalhos futuros na área. As demonstrações das proposições apresentadas ao longo do texto encontram-se no apêndice, após as referências.

4.2 A relação estratégica entre banco central e instituições financeiras

4.2.1 Modelo básico: jogo de dois períodos

Considere um jogo com dois jogadores, o banco central e uma instituição financeira representativa - um banco comercial é um bom exemplo. Nosso objetivo é modelar como a relação estratégica entre esses dois agentes afeta inflação e produto da economia. Para tal, começamos definindo as função de inflação e produto correntes:

$$\pi = \pi_0 \Delta m - \pi_1 i + \pi_2 \theta \quad (4.1)$$

e

$$y = y^* + a(\pi - \theta), \quad (4.2)$$

onde π é a inflação corrente, Δm é a variação da oferta de moeda, i é a taxa de juros básica da economia, θ é a expectativa de inflação reportada pelos agentes ao banco central, y é o produto corrente, y^* o produto potencial e π_0 , π_1 , π_2 e a são parâmetros exógenos não negativos. Observe que, a título de simplificação, estamos assumindo que a estrutura da economia é determinística, dado que não há choques sobre π e y .

Equação (4.1) é baseada na regra de Taylor de política monetária, já citada na introdução. É possível perceber que (4.1) é apenas um rearranjo dos termos de uma regra

linear simples, na qual apenas inflação corrente, sua expectativa e oferta de moeda são levadas em conta na decisão da taxa de juros. O importante a notar é que i afeta π negativamente, de maneira que o banco central tem a possibilidade de usar tal instrumento para controlar preços. Por outro lado, θ impacta inflação positivamente. Já (4.2) é uma curva de oferta de Lucas, utilizada em diversos trabalhos da literatura, tais como Backus e Driffil (1985) e Ball (1995), por exemplo. Perceba que, de acordo com (4.2), o produto só estará acima do seu nível potencial se houver inflação surpresa⁴³.

Nosso primeiro modelo é um jogo sequencial com informação completa e perfeita de dois períodos, onde o primeiro a jogar é a instituição financeira representativa. Esta decide qual a expectativa de inflação θ reportar ao banco central⁴⁴. Este último, por sua vez, observa a decisão do primeiro jogador e escolhe o nível da taxa de juros básica da economia i . Mais à frente permitiremos que a autoridade monetária também escolha a oferta de moeda. Ao final do jogo teremos um perfil de estratégias de equilíbrio perfeito em subjogos (EPS) $\{\theta, i(\theta)\}$, de maneira que podemos substituir os valores ótimos de θ e i nas equações (4.1) e (4.2) e determinar produto e inflação correntes da economia.

Por se tratar de um jogo sequencial, devemos utilizar indução retroativa na obtenção do EPS. Dessa forma, comecemos resolvendo o problema do banco central, o último a jogar. Este tem como objetivo estabilizar a economia, minimizando desvios da inflação de sua meta e do produto de seu nível potencial. Formalmente, representamos sua função perda como:

$$U_{BC} = \frac{\lambda}{2} (y - y^*)^2 + \frac{1}{2} (\pi - \pi^*)^2, \quad (4.3)$$

onde π^* é a meta de inflação, assumida como exógena, e λ é um parâmetro não negativo que mensura o peso dado pela autoridade monetária à estabilização do produto relativamente à estabilização de preços. Expressão (4.3) é padrão na literatura e vem sendo utilizada, com algumas modificações, desde a versão original proposta por Barro e Gordon (1983a, 1983b)⁴⁵

Como sua variável de decisão é i , devemos substituir (4.1) e (4.2) em (4.3) para então podermos otimizar o comportamento do banco central. Ao fazer isso podemos escrever o problema da autoridade monetária como

$$\min_i \frac{\lambda}{2} [a(\pi_0 \Delta m - \pi_1 i + (\pi_2 - 1)\theta)]^2 + \frac{1}{2} (\pi_0 \Delta m - \pi_1 i + \pi_2 \theta - \pi^*)^2. \quad (4.4)$$

⁴³Adicionalmente, conjuntamente com uma expressão para a Lei de Okun, (4.2) pode ser expressa como uma curva de Phillips linear.

⁴⁴Nosso modelo não trata de como são formadas as *verdadeiras* expectativas dos agentes - se racionais ou adaptativas, por exemplo. De fato, nossos resultados são independentes de qualquer hipótese feita nesse sentido, já que consideramos apenas a expectativa *reportada*.

⁴⁵Walsh (2010) fornece uma boa revisão de modelos de política monetária que utilizam (4.3).

Sua condição de primeira ordem é dada por

$$-\pi_1 \lambda a^2 (\pi_0 \Delta m - \pi_1 i + (\pi_2 - 1)\theta) - \pi_1 (\pi_0 \Delta m - \pi_1 i + \pi_2 \theta - \pi^*) = 0, \quad (4.5)$$

a qual gera, após resolvermos para i , a seguinte função de melhor resposta para o banco central⁴⁶:

$$i(\theta) = \frac{1}{\pi_1} \left[(\pi_0 \Delta m) - \frac{\pi^*}{(1 + \lambda a^2)} \right] + \frac{\theta}{\pi_1} \frac{[\pi_2(1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}{(1 + \lambda a^2)}. \quad (4.6)$$

O que (4.6) nos diz é que o banco central responderá de maneira linear à expectativa de inflação reportada pelos agentes. Contudo, note que a inclinação da reta definida por (4.6) depende dos valores dos parâmetros do nosso modelo. Proposição 4.1 abaixo trata do assunto.

Proposição 4.1 *Considere a função de melhor resposta do banco central dada pela expressão (4.6). Então:*

(i) *se $\pi_2 > \frac{\lambda a^2}{(1 + \lambda a^2)}$, então $\frac{\partial i}{\partial \theta} > 0$, ou seja, a autoridade monetária responde a aumentos na expectativa de inflação reportada com aumentos na taxa de juros básica;*

(ii) *se $\pi_2 < \frac{\lambda a^2}{(1 + \lambda a^2)}$, então $\frac{\partial i}{\partial \theta} < 0$, ou seja, a autoridade monetária responde a aumentos na expectativa de inflação reportada com redução na taxa de juros básica;*

(iii) *e se $\pi_2 = \frac{\lambda a^2}{(1 + \lambda a^2)}$, então a taxa de juros básica é independente da expectativa de inflação reportada.*

O que se pode concluir da proposição 4.1 é que, se a condição $\pi_2 > \frac{\lambda a^2}{(1 + \lambda a^2)}$ for satisfeita, então as instituições financeiras têm poder de afetar positivamente a taxa básica de juros da economia através da escolha da expectativa de inflação a reportar. Para entendermos a condição acima, denotemos $M = \frac{\lambda a^2}{(1 + \lambda a^2)}$. Como π_2 mede a sensibilidade da inflação corrente à expectativa de inflação reportada, temos que as instituições financeiras só terão poder (indireto) de aumentar i se o efeito de sua expectativa reportada sobre o nível de preços for maior do que o limite M . Intuitivamente, se o efeito de θ sobre π for suficientemente alto, então o banco central responderá a aumentos na expectativa com taxa de juros maior, dado que um dos seus objetivos é estabilizar preços. Por outro lado, se $\pi_2 < M$, então aumentos em θ impactarão pouco em π , de modo que a resposta ótima é reduzir i e estimular o produto.

Note também que $M = \frac{\lambda a^2}{(1 + \lambda a^2)} \leq 1$, já que, para λ fixo, $\lim_{a \rightarrow \infty} M = 1$ e $\lim_{a \rightarrow 0} M = 0$, e para a fixo, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} M = 1$ e $\lim_{\lambda \rightarrow 0} M = 0$. Dessa forma, para garantir que maiores expectativas sejam respondidas por maiores taxas de juros, pode-se pensar em impor a condição $\pi_2 > 1$. Entretanto, não parece provável que na regra de Taylor de qualquer economia, o efeito da inflação esperada sobre a inflação corrente seja maior do que a unidade. Uma hipótese como essa resultaria, no limite, em uma inflação inercial. Além

⁴⁶Dado que a função perda do banco central é estritamente convexa em i , a condição de primeira ordem (4.5) é suficiente para o mínimo. A convexidade é garantida por $\frac{\partial^2 U_{BC}}{\partial i^2} = \pi_1^2 (1 + \lambda a^2) > 0$.

disso, não é intuitivo assumir valores muito altos tanto de λ quanto de a - caso em que o banco central daria um peso muito maior à estabilização do produto do que a da inflação e que a surpresa inflacionária afetaria muito o produto, respectivamente. Assim, dado o argumento acima e o fato de que nosso trabalho foca na interação estratégica entre instituições financeiras e banco central, faz sentido assumirmos a seguinte hipótese.

Hipótese 4.2 $\pi_2 > M$.

Agora que já temos a função de melhor resposta do banco central, a qual indica que este responderá a aumentos na expectativa de inflação reportada com aumentos na taxa de juros, assumida a hipótese 4.2, devemos resolver o problema das instituições financeiras. Baseado nos argumentos apresentados na introdução, modelamos a função lucro⁴⁷ desses agentes como

$$U_{IF} = \beta i + \phi \pi + \psi \ln(y + 1), \quad (4.7)$$

onde β , ϕ e ψ são parâmetros exógenos. Assumiremos que ϕ e ψ são parâmetros não negativos: instituições financeiras, em geral, aumentam seus lucros com maiores taxas de inflação e com maior nível de atividade da economia. A título de simplificação e baseado na observação empírica reportada anteriormente, adotamos um formato linear em i e π . Contudo, assumimos que a demanda por produtos financeiros não cresce à mesma velocidade do produto, de maneira que o lucro das instituições é uma função logarítmica do produto⁴⁸.

O parâmetro β merece um pouco de atenção. Como ele mede a sensibilidade do lucro das instituições às variações na taxa básica de juros da economia, consideraremos este parâmetro como um indicador da posição da instituição em títulos com remuneração indexada à taxa básica de juros. Assim, $\beta > 0$ indica uma posição credora em títulos indexados à i , o que implica que aumentos nos juros elevam o lucro. Por outro lado, se $\beta < 0$, o lucro é afetado negativamente por i , já que a instituição se encontra em uma posição devedora em títulos. Por fim, quando $\beta = 0$, a instituição não possui crédito nem débitos indexados à i , de forma que seu lucro não é afetado pela taxa de juros. Vale ressaltar que estamos considerando aqui apenas o efeito direto de i sobre U_{IF} , porém, como π e y , são funções de i , existem efeitos indiretos a serem levados em conta.

Continuando o processo de indução de retroativa, temos agora que encontrar a escolha ótima das instituições financeiras. Estas escolherão a expectativa de inflação a reportar θ , antecipando a resposta do banco central. Logo, devemos substituir (4.1), (4.2) e (4.6)

⁴⁷Adotamos a hipótese implícita de que os custos operacionais das instituições financeiras são constantes.

⁴⁸O formato $\ln(y + 1)$ permite que o produto assumira valores negativos. Além disso, se o produto for zero, sua contribuição ao lucro é nula.

em (4.7) antes da otimização, o que gera

$$U_{IF} = \beta \left\{ \frac{1}{\pi_1} \left(\pi_o \Delta m - \frac{\pi^*}{1 + \lambda a^2} \right) + \frac{\theta}{\pi_1} \frac{[\pi_2(1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}{1 + \lambda a^2} \right\} + \phi \left(\frac{\pi^* + \lambda a^2 \theta}{1 + \lambda a^2} \right) + \psi \ln \left[y^* + a \left(\frac{\pi^* - \theta}{1 + \lambda a^2} \right) + 1 \right]. \quad (4.8)$$

A condição de primeira ordem de $\max_{\theta} U_{IF}$ é dada por

$$\frac{\beta}{\pi_1} \frac{[\pi_2(1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}{1 + \lambda a^2} + \frac{\phi \lambda a^2}{1 + \lambda a^2} - \frac{\psi a}{(y^* + 1)(1 + \lambda a^2) + a(\pi^* - \theta)} = 0, \quad (4.9)$$

a qual, quando resolvida para θ , gera

$$\theta^I = \pi^* + \frac{(y^* + 1)(1 + \lambda a^2)}{a} - \frac{\pi_1 \psi (1 + \lambda a^2)}{\beta [\pi_2(1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \pi_1 \phi \lambda a^2}, \quad (4.10)$$

onde o superescrito I em θ indica a solução de nosso primeiro modelo⁴⁹. Portanto, temos que o perfil de estratégias de EPS do modelo inicial é dado pelas equações (4.6) e (4.10), $\{\theta^I, i(\theta)\}$.

Uma questão importante de estática comparativa - e que veremos posteriormente ter um papel importante na determinação do nível de inflação e produto - é como a expectativa reportada pelas instituições financeiras responde a variações nas suas posições em títulos indexados à taxa básica de juros. A proposição abaixo apresenta este resultado.

Proposição 4.3 *Considere a expectativa de inflação ótima reportada pelas instituições financeiras, θ^I . Então:*

(i) *se a hipótese 4.2 é válida, aumentos na posição credora da instituição fazem com que a expectativa reportada ótima aumente, ou seja, $\frac{\partial \theta^I}{\partial \beta} > 0$;*

(ii) *se a hipótese 4.2 não é válida, isto é, $\pi_2 \leq M$, aumentos na posição credora da instituição fazem com que a expectativa reportada ótima não aumente, ou seja, $\frac{\partial \theta^I}{\partial \beta} \leq 0$.*

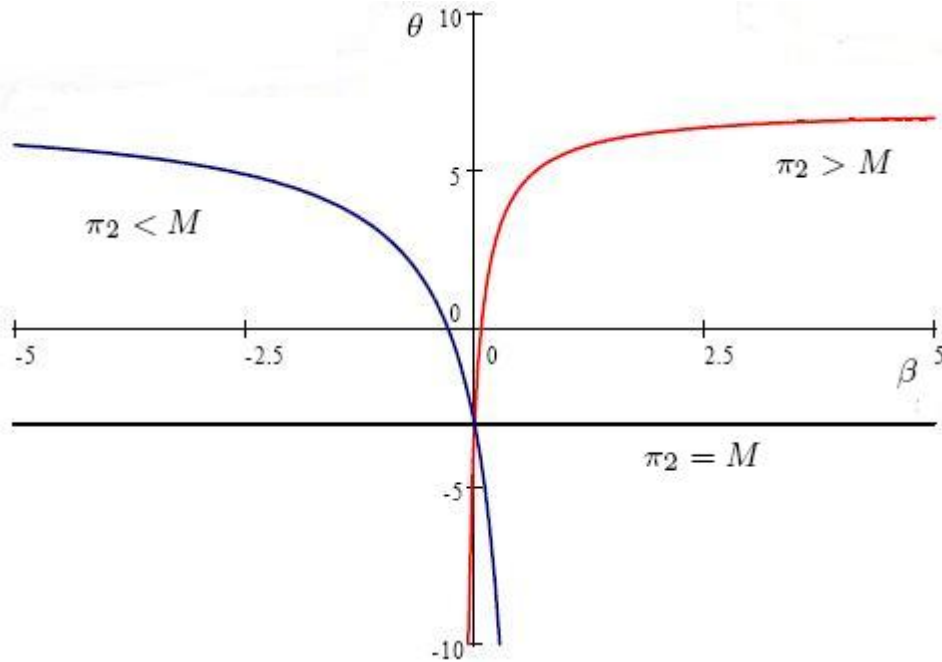
Antes de analisarmos a intuição econômica do resultado acima, vale notar que o item (ii) pode ser separado em dois casos: quando $\pi_2 < M$, então $\frac{\partial \theta^I}{\partial \beta} < 0$ e quando $\pi_2 = M$, tem-se $\frac{\partial \theta^I}{\partial \beta} = 0$. A proposição 4.3 é apresentada dessa forma pois, como já citado, nosso interesse principal recai no caso em que a hipótese 4.2 é válida. Com relação à interpretação do resultado, perceba que a condição necessária para que as instituições financeiras aumentem sua expectativa reportada ao banco central, quando sua quantidade de títulos indexados à taxa básica de juros aumenta, é a de que sua expectativa possua um efeito mínimo sobre a inflação corrente, medido por π_2 . Isso faz sentido na medida que seus lucros aumentam tanto com a inflação quanto com a taxa de juros, mas esta última

⁴⁹Note que U_{IF} é estritamente côncava em θ , de maneira que a condição de primeira ordem é suficiente para o máximo: $\frac{\partial^2 U_{IF}}{\partial \theta^2} = -\frac{\psi a^2}{\{\beta[\pi_2(1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \pi_1 \phi \lambda a^2\}^2} < 0$.

variável só responderá positivamente se $\pi_2 > M$. Assim, se seu poder sobre a inflação for baixo, a instituição pode achar melhor lucrar com aumento do produto e, quando sua posição em títulos aumentar, reportar uma taxa de juros mais baixa.

Outro importante ponto a notar em (4.10) é a sua não linearidade em β . De fato, isso também pode ser visualizado na expressão de $\frac{\partial \theta^I}{\partial \beta}$, a qual não é constante (veja a prova da proposição 4.3 no apêndice). A figura 8 abaixo mostra essa relação não linear para um conjunto de parâmetros fixos⁵⁰ e três casos distintos: $\pi_2 > M$, $\pi_2 < M$ e $\pi_2 = M$. É possível ver que a resposta da expectativa de inflação reportada ótima varia a taxas decrescentes, conforme a quantidade de títulos indexados à taxa de juros aumenta. Para o caso de $\pi_2 > M$, por exemplo, aumentos em β fazem com que que a instituição financeira aumente θ^I a taxas decrescentes. Esse comportamento evita que grandes mudanças em β gerem grandes mudanças em θ e, conseqüentemente, em π .

Figura 8: Expectativa de inflação reportada



Fonte: elaboração própria.

4.2.2 O potencial viés inflacionário

Vamos investigar se a relação estratégica modelada acima pode gerar viés inflacionário. Para tal, começamos obtendo a taxa de juros de equilíbrio do modelo substituindo (4.10)

⁵⁰Os valores são $\pi^* = 2$, $y^* = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, $\pi_1 = \frac{1}{2}$, $\psi = 1$ e $\phi = \frac{1}{2}$. Dessa forma, temos $M = \frac{1}{5}$, tal que os valores escolhidos para π_2 foram $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{5}$. O intercepto do gráfico, ou seja, a expectativa quando para $\beta = 0$ é $\theta = -3$.

em (4.6):

$$i^I = i(\theta^I) = \frac{1}{\pi_1} \left[\frac{\pi_0 \Delta m (1 + \lambda a^2) - \pi^*}{1 + \lambda a^2} \right] + \frac{[\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] [\pi^* a + (y^* + 1)(1 + \lambda a^2)]}{\pi_1 a} - \frac{\psi [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] (1 + \lambda a^2)}{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \pi_1 \phi \lambda a^2}. \quad (4.11)$$

É possível observar em (4.11) que a taxa básica de juros responde de forma não negativa a aumentos na quantidade de títulos indexados a si mantida pelas instituições financeiras. Mais do isso, esse resultado, ao contrário da proposição 4.3, independe da hipótese 4.2 ser satisfeita ou não. Para visualizarmos melhor, temos que

$$\frac{\partial i^I}{\partial \beta} = \frac{\psi [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]^2 (1 + \lambda a^2)}{\{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \pi_1 \phi \lambda a^2\}^2} \geq 0. \quad (4.12)$$

Dessa forma, variações em β só não terão efeitos sobre i^I se $\pi_2 = M$. Em todos os outros casos, mesmo com a hipótese 4.2 sendo violada, aumentos na posição ativa em títulos são respondidos por uma maior taxa básica de juros em equilíbrio.

Para obtermos a inflação corrente de equilíbrio devemos substituir (4.6) e (4.11) em (4.1):

$$\pi^I = \pi^* + \lambda a (y^* + 1) - \frac{\pi_1 \psi \lambda a^2}{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \pi_1 \phi \lambda a^2}. \quad (4.13)$$

Expressão (4.13) pode ser utilizada para alguns exercícios de estática comparativa. Por exemplo, é de interesse saber qual a sensibilidade de π à melhora na eficiência da política monetária, ou seja, a aumentos em π_1 . É de se esperar que uma política monetária mais eficiente diminua a taxa de inflação corrente. Contudo, esse não é sempre o caso. Uma situação que tal efeito ocorrerá é quando as instituições financeiras tem poder de afetar positivamente à inflação e são credoras em títulos, ou seja, $\pi_2 > M$ e $\beta > 0$, respectivamente. Como nosso foco recai sobre a economia quando a hipótese 4.2 está sendo satisfeita, a proposição abaixo nos fornece um resultado importante, apesar de intuitivo: uma melhora institucional que faça a política monetária ser mais eficiente pode reduzir a inflação corrente⁵¹.

Proposição 4.4 *Considere a inflação corrente de equilíbrio π^I e suponha que $\beta > 0$. Então:*

(i) *se a hipótese 4.2 é válida, aumentos na eficiência da política monetária fazem com que a inflação corrente de equilíbrio diminua, ou seja, $\frac{\partial \pi^I}{\partial \pi_1} < 0$;*

(ii) *se a hipótese 4.2 não é válida, isto é, $\pi_2 \leq M$, aumentos na eficiência da política monetária fazem com que a inflação corrente de equilíbrio não diminua, ou seja, $\frac{\partial \pi^I}{\partial \pi_1} \geq 0$.*

⁵¹A análise do caso em que $\beta < 0$ não é tão direta. Quando instituições financeiras são devedoras em títulos, maior eficiência na política monetária impacta negativamente seus lucros. Nesse caso, elas podem desejar aumentar sua expectativa de inflação para lucrar mais através de π .

Outra análise que pode ser feita é sobre o efeito de aumentos dos créditos indexados à taxa básica de juros sobre a inflação corrente. Como veremos, o resultado é semelhante ao da proposição 4.3.

Proposição 4.5 *Considere a inflação corrente de equilíbrio π^I . Então:*

(i) *se a hipótese 4.2 é válida, aumentos na posição credora da instituição fazem com que a inflação corrente de equilíbrio aumente, ou seja, $\frac{\partial \pi^I}{\partial \beta} > 0$;*

(ii) *se a hipótese 4.2 não é válida, isto é, $\pi_2 \leq M$, aumentos na posição credora da instituição fazem com que a inflação corrente de equilíbrio não aumente, ou seja, $\frac{\partial \pi^I}{\partial \beta} \leq 0$.*

Como já discutido, esse resultado é importante para nosso modelo, porque mostra que quando instituições financeiras não tem poder de afetar a inflação positivamente, estas escolherão reportar uma expectativa menor, para, assim, lucrar mais através do aumento da demanda por seus serviços - via y . Isso fará com que a inflação corrente reaja negativamente a variações positivas em β . No caso da hipótese 4.2 válida, instituições possuem poder de afetar π positivamente, de modo que poderão lucrar mais através das suas outras duas fontes, π e i . Para entendermos isso, veja que, em conjunto, proposições 4.1, 4.3 e 4.5 nos dizem que, quando $\pi_2 > M$, há incentivos para aumento em θ , o que, por sua vez, impacta i^I e π^I de maneira positiva.

Nosso próximo resultado estabelece um limite inferior para β , a partir do qual a inflação corrente de equilíbrio π^I é superior a sua meta π^* .

Proposição 4.6 *Considere a inflação corrente de equilíbrio π^I . Então:*

(i) *se $\beta > K$, então $\pi^I > \pi^*$;*

(ii) *se $\beta < K$, então $\pi^I < \pi^*$;*

(iii) *se $\beta = K$, então $\pi^I = \pi^*$;*

Onde $K = \frac{\pi_1 a}{(y^* + 1)} \frac{[\psi - \phi \lambda a (y^* + 1)]}{[\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}$.

O que foi estabelecido acima é que existe um nível mínimo de títulos indexados à taxa básica de juros mantido na carteira das instituições financeiras que faz com que a inflação corrente de equilíbrio seja superior à sua meta. Devemos investigar o sinal desse nível mínimo K , bem como seus determinantes. O primeiro aspecto a notar é que seu sinal é determinado pelos termos $[\psi - \phi \lambda a (y^* + 1)]$ e $[\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]$. Este segundo será positivo se, e somente se, $\pi_2 > M$. Começemos analisando este caso.

Caso 1: $\pi_2 > M$. Nesse caso, $K > 0$ se, e somente se, $\psi - \phi \lambda a (y^* + 1) > 0$. Se reescrevermos essa última expressão obtemos $\frac{\psi}{\phi} > \lambda a (y^* + 1)$. Logo, temos que o nível mínimo de títulos para que $\pi^I > \pi^*$ será positivo se, e somente se, o peso da contribuição do produto para o lucro relativo à contribuição da inflação, $\frac{\psi}{\phi}$, é maior que um certo limite. Em outras palavras, se a contribuição do produto para o lucro é suficientemente maior que a da inflação, então a instituição financeira deve ter uma quantidade de títulos

positiva mínima para que inflação esteja acima da meta. É possível ver que o contrário é válido: se a contribuição do produto para o lucro é suficientemente menor que a da inflação, então a instituição financeira deve ter uma quantidade de títulos negativa - ou seja, dívidas indexadas à taxa básica de juros - mínima para que inflação esteja acima da meta.

Caso 2: $\pi_2 < M$. Agora, a condição necessária e suficiente para que $K > 0$ é exatamente a contrária do caso 1: $\frac{\psi}{\phi} < \lambda a(y^* + 1)$. Assim, o peso relativo dado ao produto frente à inflação sobre o lucro deve ser menor que um certo nível para que o nível mínimo de β que permite $\pi^I > \pi^*$ seja positivo. O argumento para $K < 0$ também é análogo ao do caso anterior.

Caso 3: $\pi_2 = M$. Perceba que K não é definido sobre essa condição. Entretanto, podemos verificar que $\lim_{\pi_2 \rightarrow M} K = +\infty$ se $\frac{\psi}{\phi} > \lambda a(y^* + 1)$, de maneira que β nunca será maior que K , indicando que teremos $\pi^I < \pi^*$; e que $\lim_{\pi_2 \rightarrow M} K = -\infty$ se $\frac{\psi}{\phi} < \lambda a(y^* + 1)$, tal que $\beta > K$, implicando que $\pi^I > \pi^*$.

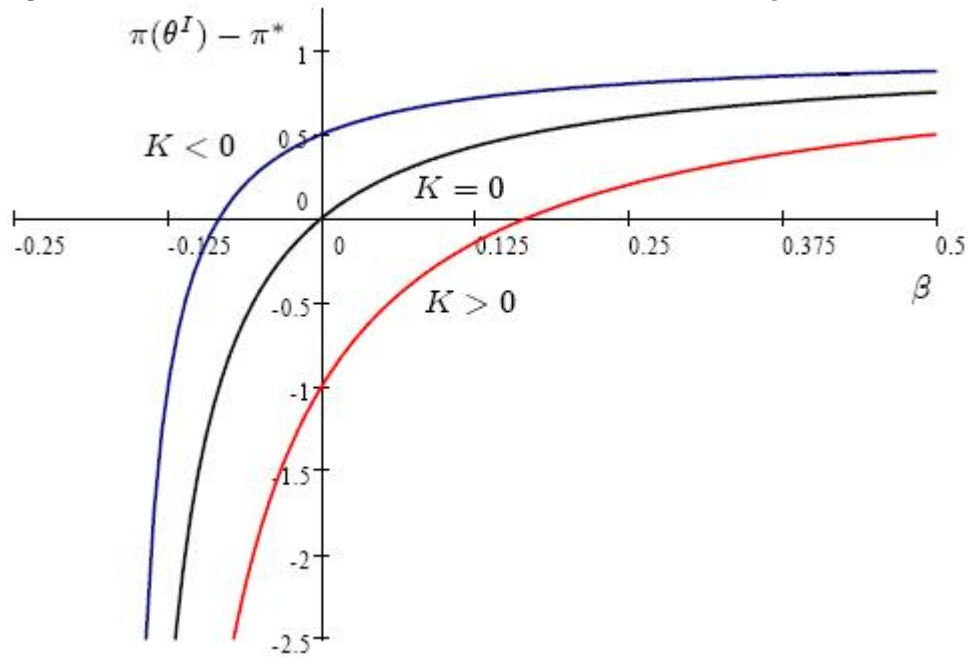
Como nossas situações de interesse são aquelas satisfeitas pela hipótese 4.2, vamos focar nossa atenção no caso 1. Baseado na observação empírica - de dados e da literatura - podemos conjecturar que a contribuição da inflação para o lucro das instituições financeiras é relativamente superior à contribuição do produto. Portanto, não parece irrealista considerarmos o caso em que $\frac{\psi}{\phi} < \lambda a(y^* + 1)$ como o mais comum encontrado na economia. Baseado nisso, a proposição 4.6 nos diz que, sempre que $\beta > K$, com $K < 0$, teremos $\pi^I > \pi^*$. Um corolário dessa conclusão é que mesmo que a firma tenha dívidas indexadas à taxa básica de juros - e, portanto, não obtém aumento nos seus lucros em decorrência de aumentos em i^I -, a inflação corrente de equilíbrio pode ser superior à meta. Logo, viés inflacionário emerge e parece ser um resultado comumente encontrado na economia, segundo nosso modelo.

É importante destacar que, em nosso modelo, mesmo que $\beta = 0$, ou seja, a instituição financeira não possua débitos nem créditos indexados à i , pode ocorrer viés inflacionário se o peso do produto sobre o lucro for suficientemente menor que aquele da inflação. Adicionalmente, note acima que existe um nível de β tal que a inflação corrente é exatamente igual àquela estabelecida como meta. Se for possível para a autoridade monetária induzir as instituições financeiras a adquirirem títulos na quantidade $\beta = K$, então não haverá viés inflacionário. Essas conclusões podem ser visualizadas na figura 9, a qual fornece um gráfico do viés inflacionário como função de β com os demais parâmetros fixos⁵².

Abriremos a possibilidade da autoridade monetária induzir a escolha das instituições nas próximas seções. Antes disso, contudo, vamos notar que um resultado análogo ao da proposição 4.6 vale para produto de equilíbrio.

⁵²Os parâmetros possuem os mesmos valores utilizados na figura 8. Veja nota 50.

Figura 9: Viés inflacionário e nível de títulos das instituições financeiras



Fonte: elaboração própria.

Proposição 4.7 *Considere o produto corrente de equilíbrio y^I . Então:*

- (i) *se $\beta > K$, então $y^I < y^*$;*
- (ii) *se $\beta < K$, então $y^I > y^*$;*
- (iii) *se $\beta = K$, então $y^I = y^*$;*

Onde $K = \frac{\pi_1 a}{(y^* + 1)} \frac{[\psi - \phi \lambda a (y^* + 1)]}{[\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}$.

Todo o raciocínio construído acima para a análise do viés inflacionário pode ser aplicado para produto abaixo do seu nível potencial. Logo, no caso mais comum na economia, teremos produto abaixo do potencial. Ainda, da mesma forma que antes, existe um nível de β que faz com que o produto seja igual ao potencial, notadamente $\beta = K$.

4.2.3 Superando o viés inflacionário: um jogo de três períodos com escolha da oferta monetária

Modificaremos nosso modelo básico introduzindo um período adicional. Agora, o primeiro a jogar é o banco central, escolhendo o nível de oferta monetária da economia, Δm . A seguir, instituições financeiras observam tal escolha e decidem qual expectativa de inflação θ deve ser reportada à autoridade monetária. Por fim, o banco central observa o valor de θ e escolhe qual o nível da taxa de juros básica da economia i . Para resolver esse jogo introduziremos uma hipótese adicional de que a variação da oferta de moeda da economia é feita exclusivamente através da compra e venda de títulos indexados à taxa de

juros i (operações de mercado aberto). Dessa forma, como uma oferta positiva (negativa) significa que houve compra (venda) de títulos, teremos a definição abaixo:

Definição 4.8 Dizemos que o mercado de títulos está em equilíbrio se suas oferta e demanda se igualam, ou seja, $\beta = -\Delta m$.

Com a possibilidade de afetar o valor de β através da oferta de moeda Δm , o banco central pode buscar controlar a expectativa de inflação reportada pelas instituições financeiras e, conseqüentemente, afetar a inflação. Portanto, a partir de agora, assumiremos como válida:

Hipótese 4.9 O mercado de títulos está em equilíbrio, ou seja, $\beta = -\Delta m$.

Buscamos agora um perfil de EPS da seguinte forma $\{(\Delta m, i(\theta, \Delta m)), \theta(\Delta m)\}$. Dado que o período introduzido é o primeiro, já temos as funções de melhor resposta obtidas por indução retroativa nos últimos dois períodos, as quais são dadas por (4.6) e (4.11). Para nossos propósitos, devemos apenas substituir a condição de equilíbrio no mercado de títulos para obter uma função de melhor resposta para as instituições financeiras:

$$\theta(\Delta m) = \pi^* + \frac{(y^* + 1)(1 + \lambda a^2)}{a} - \frac{\pi_1 \psi (1 + \lambda a^2)}{\pi_1 \phi \lambda a^2 - \Delta m [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}. \quad (4.14)$$

Ao substituirmos (4.6) e (4.14) na função perda do banco central (4.3), temos

$$U_{BC} = \frac{\lambda a^2}{2} \left\{ \frac{\pi_1 \psi}{\pi_1 \phi \lambda a^2 - \Delta m [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]} - \frac{(y^* + 1)}{a} \right\}^2 + \frac{(\lambda a^2)^2}{2} \left\{ \frac{(y^* + 1)}{a} - \frac{\pi_1 \psi}{\pi_1 \phi \lambda a^2 - \Delta m [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]} \right\}^2, \quad (4.15)$$

a qual possui como condição de primeira ordem⁵³

$$0 = \lambda a^2 (1 + \lambda a^2) \frac{\pi_1 \psi [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}{\{\pi_1 \phi \lambda a^2 - \Delta m [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]\}^2} \cdot \left\{ \frac{\pi_1 \psi}{\pi_1 \phi \lambda a^2 - \Delta m [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]} - \frac{(y^* + 1)}{a} \right\}. \quad (4.16)$$

Logo, a oferta de moeda que minimiza a perda do banco central é dada por

$$\Delta m^{II} = \frac{\pi_1 a}{(y^* + 1)} \frac{[\phi \lambda a (y^* + 1) - \psi]}{[\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]} = -K, \quad (4.17)$$

onde o superescrito II indica resultado do segundo modelo. Aplicando a hipótese 4.9 temos que $\beta = K$, o que, pela proposição 4.6, implica em $\pi^{II} = \pi^*$. Ainda, usando o

⁵³O problema é convexo na escolha ótima sob a hipótese 4.2, de forma que a condição de primeira ordem garante um mínimo. Note que $\frac{\partial^2 U_{BC}}{\partial \Delta m^2}(\Delta m^{II}) = \frac{\lambda(1+\lambda a^2)(y^*+1)[\pi_2(1+\lambda a^2)-\lambda a^2]}{(a\psi\pi_1)^2} > 0$.

resultado da proposição 4.7, temos que $y^{II} = y^*$. Essa conclusão é resumida na proposição abaixo.

Proposição 4.10 *Considere o jogo de três períodos descrito nesta seção e assuma válida a hipótese 4.9. Então, seu EPS implica uma completa estabilização da economia, com $\pi^{II} = \pi^*$ e $y^{II} = y^*$. Portanto, não existe viés inflacionário.*

Ao permitir que o banco central seja o primeiro a jogar e condicione às escolhas das instituições financeiras, obtemos estabilidade completa na economia. De fato, a chave da eliminação do viés está na combinação de duas características do novo modelo: a escolha antecipada da oferta de moeda e o equilíbrio no mercado de títulos. Após Δm^{II} ser definida, a carteira de títulos da instituição está definida pela condição de equilíbrio e a escolha da expectativa a reportar deve ser feita condicionada a isso. Assim, sua melhor resposta será $\theta^{II} = \pi^*$.

Outra análise interessante que pode ser feita em (4.17) diz respeito à relação entre os instrumentos de política monetária Δm e i . Como modelado pelo jogo, a oferta de moeda é definida antes da taxa de juros. Podemos nos perguntar se esta defasagem temporal os torna instrumentos substitutos ou complementares. Nesse sentido, observe que a sensibilidade de Δm^{II} a mudanças na eficiência de i é dada por:

$$\frac{\partial \Delta m^{II}}{\partial \pi_1} = \frac{a}{(y^* + 1)} \frac{[\phi \lambda a (y^* + 1) - \psi]}{[\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]} = -\frac{K}{\pi_1}. \quad (4.18)$$

É possível notar que o sinal de $\frac{\partial \Delta m^{II}}{\partial \pi_1}$ dependerá do valor de K e, portanto, de qual dos três casos citados na seção 4.2.2 a economia se encontra⁵⁴. Assumindo, novamente, como o caso 1 ($\pi_2 > M$) como o mais provável, note que os instrumentos terão funções complementares se $\frac{\psi}{\phi} < a \lambda (y^* + 1)$. Em outras palavras, se a contribuição do produto para o lucro das instituições financeiras é suficientemente menor do que a da inflação, então o banco central usará os dois instrumentos conjuntamente: quanto mais eficiente a taxa de juros, maior a oferta de moeda. Caso seja o produto que tem mais peso sobre o lucro dos bancos, então um aumento na eficiência de i diminui o valor de Δm^{II} .

Nem sempre, contudo, o banco central terá controle sobre dois instrumentos de política monetária distintos, como assumimos. Como sugere Friedman (1990), podem existir metas intermediárias de política monetária e alguns dos instrumentos disponíveis podem ser usados para tentar atingir tais metas. Isso pode reduzir a liberdade de escolha da autoridade monetária no que diz respeito à meta final. De certa forma, isso pode ser visto como uma limitação do modelo proposto nesta seção. Nosso resultado também está fortemente baseado na hipótese de equilíbrio do mercado de títulos. Essa talvez possa ser

⁵⁴ Mesmo considerando variações em π_1 , não faz sentido econômico que seu valor seja negativo - implicaria em uma política monetária com o efeito contrário ao teorizado e observado. Dessa forma, o sinal de $\frac{\partial \Delta m^{II}}{\partial \pi_1}$ dependerá exclusivamente de K .

uma hipótese restritiva, pois devido a complexidade do mercado financeiro, existem muitos instrumentos (derivativos, etc) que remuneram à taxa de juros básica, além dos próprios títulos públicos. Adicionalmente, operações de mercado aberta não são o único canal para se alterar a oferta de moeda. Por estes motivos, consideramos mais uma extensão do nosso modelo básico na próxima seção.

4.2.4 Outra alternativa de superação do viés: penalizando erros de previsão

Vamos considerar, agora, a possibilidade do banco central penalizar a instituição financeira quando esta reportar uma taxa de inflação esperada diferente da taxa de inflação vigente (erro de previsão). Sua intenção é a de acabar com o viés inflacionário potencial apontado na seção 4.2.2. Especificamente, assumiremos que cada desvio $\pi - \theta$ é penalizado por um valor fixo definido pela autoridade monetária. A maneira com que será implementada esse mecanismo pode variar, mas algumas características básicas devem estar presentes. A principal delas é que esta penalização reduza o lucro das instituições financeiras, dado que esta é a única maneira de incentivos serem criados em nosso modelo. Formalmente, a nova função lucro das firmas é dada por

$$U_{IF} = \beta i + \phi \pi + \psi \ln(y + 1) - \frac{\xi}{2} (\pi - \theta)^2, \quad (4.19)$$

onde ξ é o valor da penalização escolhido pelo banco central. O formato quadrático adotado em (4.19) garante que desvios positivos e negativos da inflação corrente serão penalizados simetricamente, além de implicar na concavidade de U_{IF} .

Assumiremos também que o banco central incorre em uma perda de bem-estar proporcional à penalização. Podemos pensar que criação, implementação e, principalmente, execução e controle de um sistema de acompanhamento e penalização das instituições financeiras demanda recursos à autoridade monetária, de maneira que seu custo cresce quanto maior for o nível da pena escolhido. Esta hipótese impede que um nível de ξ muito alto seja escolhido arbitrariamente, dado que se sua escolha não fosse custosa, seria estratégia dominante para a autoridade monetária definir a mais alta penalização possível. Assim, temos que a nova função perda do banco central é

$$U_{BC} = \frac{\lambda}{2} (y - y^*)^2 + \frac{1}{2} (\pi - \pi^*)^2 + \frac{\xi^2}{2}, \quad (4.20)$$

onde o termo quadrático em ξ garante a existência de um mínimo no seu problema de otimização.

O novo jogo proposto é de três estágios: no primeiro, o banco central define a penalização ξ para desvios da inflação esperada da corrente; em seguida, após observar a escolha da autoridade monetária, a instituição financeira escolhe qual o valor da inflação

esperada θ reportar; por fim, no terceiro, após observar a inflação esperada reportada, o banco central define a taxa de juros da economia. O EPS deste novo jogo será um perfil de estratégias do tipo $\{(\xi, i(\theta, \xi)), \theta(\xi)\}$. Para encontrá-lo, note que o processo de indução retroativa para a escolha de $i(\theta, \xi)$ gera a mesma expressão de (4.6), dado que não há interação entre a nova variável ξ e a taxa de juros.

Para a estratégia ótima das instituições, precisamos antes, substituir (4.6) em (4.19), o que fornece

$$U_{IF} = \beta \left\{ \frac{1}{\pi_1} \left(\pi_o \Delta m - \frac{\pi^*}{1 + \lambda a^2} \right) + \frac{\theta}{\pi_1} \frac{[\pi_2(1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}{1 + \lambda a^2} \right\} + \phi \left(\frac{\pi^* + \lambda a^2 \theta}{1 + \lambda a^2} \right) + \psi \ln \left[y^* + a \left(\frac{\pi^* - \theta}{1 + \lambda a^2} \right) + 1 \right] - \frac{\xi}{2} \left(\frac{\pi^* - \theta}{1 + \lambda a^2} \right)^2, \quad (4.21)$$

onde usamos (4.1) e (4.2) para reescrever seu último termo. A condição de primeira ordem do problema acima⁵⁵, portanto, é

$$\frac{\beta}{\pi_1} \frac{[\pi_2(1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}{1 + \lambda a^2} + \frac{\phi \lambda a^2}{1 + \lambda a^2} - \frac{\psi a}{(y^* + 1)(1 + \lambda a^2) + a(\pi^* - \theta)} + \frac{\xi(\pi^* - \theta)}{1 + \lambda a^2} = 0, \quad (4.22)$$

a qual não possui solução analítica simples⁵⁶. Entretanto, podemos aproximar uma expressão implícita de $\theta^{III}(\xi)$ utilizando sua expansão de Taylor na vizinhança de $\xi = 0$. Antes, porém, vamos analisar a sensibilidade da expectativa a variações na posição de títulos das instituições financeiras.

Podemos visualizar o efeito de β sobre θ^{III} na expressão abaixo,

$$\frac{\partial \theta^{III}}{\partial \beta} = \frac{[(y^* + 1)(1 + \lambda a^2) + (\pi^* - \theta)]^2 [\pi_2(1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}{\psi a^2 (1 + \lambda a^2) + \xi [(y^* + 1)(1 + \lambda a^2) + a(\pi^* - \theta)]^2}, \quad (4.23)$$

onde utilizamos o teorema da função implícita em (4.22). Observe que o sinal da derivada acima dependerá da hipótese 4.2 estar sendo satisfeita ou não. De fato, o resultado da mudança em θ^{III} em decorrência de variações em β é idêntico ao de θ^I , resumido na proposição 4.3. Por exemplo, se $\pi_2 > M$, ou seja, se as instituições financeiras têm relativo poder de afetar a inflação com sua expectativa reportada, então mais títulos indexados à taxa básica de juros em suas carteira implicam em maior θ^{III} .

Para obtermos uma expressão implícita de $\theta^{III}(\xi)$, inicialmente vamos denotar (4.22) por $f(\theta, \xi) = 0$. Note, então, que $f(\theta, 0) = 0$, nos fornece

$$\theta^{III}(0) = \pi^* + \frac{(y^* + 1)(1 + \lambda a^2)}{a} - \frac{\pi_1 \psi (1 + \lambda a^2)}{\beta [\pi_2(1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \pi_1 \phi \lambda a^2} = \theta^I. \quad (4.24)$$

⁵⁵Novamente temos um problema côncavo, dado que $\frac{\partial U_{IF}^2}{\partial \theta^2} = - \left\{ \frac{\psi a^2}{[(y^* + 1)(1 + \lambda a^2) + a(\pi^* - \theta)]^2} + \frac{\xi}{1 + \lambda a^2} \right\} < 0$.

⁵⁶Computacionalmente é possível encontrar as duas raízes de (4.22). Contudo, cada uma delas é formada por uma combinação muito grande dos parâmetros do modelo, sendo pouco informativo analisá-las.

O segundo passo é obtermos uma expressão para $\frac{\partial \theta^{III}}{\partial \xi}$. Utilizando novamente o teorema da função implícita chega-se a

$$\frac{\partial \theta^{III}}{\partial \xi}(\xi) = \frac{(\pi^* - \theta)[(y^* + 1)(1 + \lambda a^2) + a(\pi^* - \theta)]^2}{\psi a^2(1 + \lambda a^2) + \xi[(y^* + 1)(1 + \lambda a^2) + a(\pi^* - \theta)]^2}. \quad (4.25)$$

Antes de continuarmos, é importante analisarmos o efeito da penalização sobre a expectativa de inflação reportada pelas instituições financeiras. É possível, inicialmente, ver que quando a expectativa de inflação é igual à meta, então a penalização não tem efeito algum sobre a expectativa, como era de se esperar. Além disso, aumentos na pena imposta aumentarão a expectativa se, e somente se, esta última estiver abaixo da meta. Analogamente, uma condição necessária e suficiente para $\frac{\partial \theta^{III}}{\partial \xi} < 0$ é que $\pi^* < \theta$. Portanto, um mecanismo como esse de fato gera incentivo para a expectativa de inflação convergir para a meta.

A expansão de Taylor pode ser obtida combinando (4.24) com (4.25) avaliada em $\xi = 0$. Assim, de forma implícita definimos

$$\theta^{III}(\xi) = \theta^I + \frac{(\pi^* - \theta^{III})[(y^* + 1)(1 + \lambda a^2) + a(\pi^* - \theta^{III})]^2}{\psi a^2(1 + \lambda a^2)} \xi. \quad (4.26)$$

Expressão (4.26), embora definida implicitamente, pode nos fornecer algumas informações revelantes sobre a política de penalização ótima. Considere, por exemplo, ausência de viés inflacionário, tal que $\theta^{III} = \pi^*$. De (4.26), temos que então $\theta^I = \pi^*$. Dessa forma, podemos utilizar o resultado da proposição 4.6, que nos diz que se $\beta = K$, o viés é eliminado. Portanto, uma escolha ótima de ξ por parte do banco central deveria ser tal que garanta $\beta = K$. Contudo, como a proposição abaixo estabelece, esta não é uma condição suficiente para ausência de viés.

Proposição 4.11 *Considere o jogo em três estágios proposto acima e seja θ^{III} , definido por (4.26), a escolha ótima das instituições financeiras. Então se $\beta = K$, $\theta^{III}(\xi) = \pi^*$ ou $\theta^{III}(\xi) = \pi^* + \frac{(y^*+1)(1+\lambda a^2)}{a} + \frac{a\psi}{\xi(y^*+1)}$.*

O fato de que $\beta = K$ não é garantia de ausência de viés inflacionário é, sem dúvida, um resultado ruim para o formulador de política. De fato, se tal condição for verdadeira, pode-se acabar com uma previsão muito superior à meta, com a diferença, nesse caso, medida por $\frac{(y^*+1)(1+\lambda a^2)}{a} + \frac{a\psi}{\xi(y^*+1)}$. Sob essas condições, mesmo que o banco central defina uma penalização muito alta, haverá viés inflacionário, já que $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \theta^{III} = \pi^* + \frac{(y^*+1)(1+\lambda a^2)}{a}$.

Para sabermos mais sobre a decisão ótima do banco central, devemos otimizar (4.20) com relação a ξ . Substituindo (4.1), (4.2) e (4.26) em (4.20), o problema da autoridade monetária torna-se

$$\min_{\xi} \frac{\lambda}{2} \left[a \left(\frac{\pi^* - \theta^{III}(\xi)}{1 + \lambda a^2} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^* + \lambda a^2 \theta^{III}(\xi)}{1 + \lambda a^2} \right)^2 + \frac{\xi^2}{2}, \quad (4.27)$$

com sua condição de primeira ordem dada por

$$\frac{\partial \theta^{III}}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda a^2}{1 + \lambda a^2} \right)^2 \theta^{III} + \xi^{III} = 0. \quad (4.28)$$

Perceba que mais uma vez não é possível obtermos uma expressão explícita para ξ . Portanto, definindo-a de maneira implícita temos

$$\xi^{III} = -\frac{\partial \theta^{III}}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda a^2}{1 + \lambda a^2} \right)^2 \theta^{III}. \quad (4.29)$$

A expressão acima nos limita em alguns aspectos importante, como por exemplo, obter uma expressão fechada para π e y , de maneira que poderíamos calcular o valor do potencial viés inflacionário ou o quanto o produto corrente está abaixo do potencial. Apesar disso, podemos utilizá-la para analisar qual é a combinação ótima dos instrumentos de política (nesse caso, i e ξ) a ser adotada pela autoridade monetária. Especificamente, é de interesse investigarmos quando deve-se utilizar os dois em conjunto, como complementares, e quando devem atuar como substitutos. Isso dependerá, mais uma vez, do valor de β , da validade da hipótese 4.2 e se a expectativa reportada é superior ou inferior à inflação observada⁵⁷. Apresentamos abaixo o caso que consideramos mais comum.

Proposição 4.12 *Suponha que $\beta > 0$ e que a hipótese 4.2 é válida. Então, no EPS do jogo de três estágios entre banco central e instituições financeiras, os instrumentos de política monetária i e ξ serão:*

- (i) *substitutos, ou seja, $\frac{\partial \xi^{III}}{\partial \pi_1} < 0$, se a expectativa de inflação for maior que a meta ($\pi^* < \theta^{III}$);*
- (ii) *complementares, ou seja, $\frac{\partial \xi^{III}}{\partial \pi_1} > 0$, se a expectativa de inflação for menor que a meta ($\pi^* > \theta^{III}$);*
- (iii) *e independentes, ou seja, $\frac{\partial \xi^{III}}{\partial \pi_1} = 0$, se a expectativa de inflação for igual a meta ($\pi^* = \theta^{III}$).*

A proposição acima nos mostra de qual maneira devem ser combinadas a penalização às instituições financeiras por seus erros de previsão e a taxa de juros em um dos possíveis estados da economia. Veja que, no caso de expectativa abaixo da meta, os instrumentos devem ser utilizados de maneira conjunta, na estratégia ótima: quanto mais eficiente for i , medida por um aumento em π_1 , maior deve ser a penalização aos erros de previsão. O contrário ocorre quando a expectativa é superior à meta: quanto maior for eficiência na política monetária, menor deve ser a pena, configurando uma relação de substituição entre os instrumentos. Por fim, quando a expectativa já é igual à meta, mudanças na eficiência da taxa de juros não afetam o valor da penalidade imposta às instituições errantes.

⁵⁷Para detalhes, veja a prova da proposição abaixo no apêndice.

A relação citada acima evidencia que, sob certas circunstâncias, inflação abaixo da meta é mais difícil de combater do que quando está acima da mesma, tanto que é necessário utilizar ambos instrumentos para alcançar a estabilidade. Contudo, ao modificarmos qualquer das duas exigências da proposição 4.12, teremos uma mudança na relação entre os instrumentos. Dessa forma, nosso modelo parece se adequar bem às principais economias modernas, onde há uma certa assimetria no trato com desvios da meta: bancos centrais tendem a se preocupar mais com o caso de $\pi > \pi^*$ do que quando a desigualdade é na outra direção.

4.3 Conclusão

Muitos bancos centrais utilizam a expectativa de inflação reportada por um grupo de agentes como um dos *inputs* de sua regra de Taylor. Isso acaba por conceder a estes agentes o poder de afetar variáveis macroeconômicas importantes, em particular a taxa de juros. O que mostramos neste trabalho é que esse poder pode criar incentivos para que o valor reportado à autoridade monetária seja utilizado em benefício próprio. Quando os agentes incumbidos de reportar suas expectativas são instituições financeiras, demonstramos que existe um potencial viés inflacionário na economia. O banco central, portanto, terá de usar os instrumentos que dispõe para tentar superar esse viés. Em particular, mostramos que uma combinação de oferta de moeda adequada e equilíbrio no mercado de títulos pode ser uma alternativa efetiva. Além disso, a penalização das instituições com previsões erradas também demonstrou poder de dar os incentivos corretos à ancoragem das expectativas.

Todos nossos resultados têm em comum a relevância da situação financeira (em títulos indexados à taxa básica de juros da economia) da instituição na decisão de política monetária. Logo, em um sentido mais normativo, autoridades monetárias de economias em regimes de metas de inflação devem atentar para indicadores de portfólios dos agentes reportadores de expectativa. Foi visto que tal variável tem um impacto relevante sobre o viés inflacionário. Ainda, bancos centrais que adotam este tipo de sistema devem levar em conta a estrutura de receitas das instituições - se dependem mais de juros, inflação ou produto - bem como seu poder de influenciar a economia. Por fim, melhora na eficiência da política monetária se mostrou efetiva no processo de estabilização de preços.

Nosso modelo é um primeiro passo na direção de estudos que levem em conta a potencial influência das expectativas reportadas em economias com regimes de meta de inflação. Como tal, sofremos de algumas limitações que trabalhos subsequentes podem tentar superar. A primeira delas é o fato de não permitirmos às instituições a escolha de sua carteira de ativos (quantidade de títulos) ótima. Ao introduzir essa possibilidade em nosso modelo básico, o problema da instituição financeira deixa de ser côncavo, de

maneira que não existe um β que maximize seu lucro⁵⁸. A alternativa para contornar tal restrição técnica pode ser a alteração da forma funcional do lucro das instituições ou mesmo de parte da estrutura da economia - equações (4.1) e (4.2). Com esta modificação é possível que o viés inflacionário seja agravado, dado que a expectativa reportada não mais estará condicionada a uma carteira exógena, de forma que uma instituição poderá, por exemplo, escolher comprar muitos títulos para posteriormente reportar alta expectativa.

Ainda nesse sentido, a proposta de superação do viés inflacionário proposto na seção 4.2.3 está sustentada em duas hipóteses que podem ser alvo de discussão. Pode-se conjecturar, por exemplo, como nosso resultado se alteraria se abrissemos mão de toda oferta monetária ser feita por operações de mercado aberto. Note que isso alteraria nossa definição de equilíbrio no mercado de títulos (nossa segunda hipótese), já que agora $-\beta \neq \Delta m$. Se o mercado de títulos continuar em equilíbrio - sob nova definição -, a possibilidade da definição da oferta de moeda por parte do banco central continuará a eliminar o viés. Porém, ao abdicarmos do equilíbrio de mercado, então o resultado provavelmente mudará, dado que não será possível condicionar a escolha das instituições, e o viés deve persistir.

Outras extensões de nosso modelo que parecem promissoras dizem respeito a tornar o jogo repetido, permitindo com que haja a criação de reputação por parte da autoridade monetária. Além disso, a repetição poderia permitir a criação de reputação dos previsores de inflação: uma instituição poderia, por exemplo, se esforçar em se tornar uma boa previsora durante algum período e assim adquirir reputação; se essa reputação aumentar seu poder de influência sobre as decisões do banco central, ela pode se utilizar disso e obter um ganho alto em um período futuro ao mentir sua expectativa deliberadamente. Adicionalmente, seria interessante modelar o jogo com a inclusão de muitas instituições e permitir que haja um mercado interbancário (secundário) de títulos.

Nosso modelo não cobre todos os possíveis mecanismos que uma autoridade monetária pode criar para ancorar expectativas. Alguns bancos centrais divulgam um *ranking* das instituições financeiras que mais acertam suas previsões. A ideia é relacionar uma posição na classificação de acordo com a magnitude do erro de previsão cometido, o qual, em nossa notação, é dado por $\pi - \theta$. Portanto, aquela instituição que apresentou menor erro será a primeira na classificação e aquela com maior erro, a última. Usualmente a divulgação desse *ranking* é pública e periódica, de maneira que todos os agentes da economia têm acesso a ele sempre que desejar⁵⁹. Um exemplo da utilização deste mecanismo é o Top Five do Banco Central do Brasil. Seu *ranking* possui esse nome porque apenas as cinco melhores previsoras em cada variável macroeconômica são divulgadas. Dado sua ampla utilização, é importante que se investigue a eficiência de mecanismos desse tipo.

⁵⁸ Isso acontece porque estamos considerando apenas soluções interiores em nosso modelo.

⁵⁹ Para se ter uma ideia da sua importância, muitas das instituições melhores colocadas utilizam sua boa reputação como previsora para atrair clientes, principalmente na venda de produtos financeiros.

Por fim, uma modelagem alternativa do problema que pode ser promissora é tratar a relação entre banco central e instituições financeiras como um jogo de agente-principal. O banco central (principal) delega uma tarefa às instituições (agentes), qual seja a de reportar a expectativa de inflação, mas o verdadeiro valor desta variável é informação privada do agente. Assim, um mecanismo compatível em incentivo (contrato ótimo) deve ser desenhado para que a informação seja revelada e um equilíbrio separador emerge. Nessa linha, a metodologia se assemelha muito aos trabalhos citados na introdução, entre eles, Canzoneri (1985), Backus e Driffil (1985), Ball (1995) e Cuckierman e Livitan (1991), com a crucial diferença que, agora, quem possui a informação privada não é a autoridade monetária.

4.4 Referências

ALBERTAZZI, U.; GAMBACORTA, L. Bank profitability and the business cycle. **Journal of Financial Stability**, 5, 393-409, 2009.

ALESINA, A. Macroeconomic policy in a two-party system as a repeated game. **Quarterly Journal of Economics**, 102 (3), 651-678, 1987.

ALEXIOU, C.; SOFOKLIS, V. Determinants of bank profitability: evidence from the Greek banking sector. **Economic Annals**, 182, 93-118, 2009.

ASSON, P.; KAHN, G.; LEESON, R. The Taylor rule and practice of central banking. **Research Working Paper of The Federal Reserve Bank of Kansas City**, 10-05, 2010.

ATHANASOGLU, P.; BRISSIMIS, S.; DELIS, M. Bank-specific, industry-specific and macroeconomic determinants of bank profitability. **Journal of International Financial Markets, Institutions and Money**, 18, 121-136, 2008.

BACKUS, D. K.; DRIFILL, J. Inflation and reputation. **American Economic Review**, 75 (3), 530-538, 1985.

BALL, L. Time consistent inflation policy and persistent changes in inflation. **Journal of Monetary Economics**, 36 (2), 329-350, 1995.

BARRO, R. J.; GORDON, D. B. A positive theory of monetary policy in a natural-rate model. **Journal of Political Economy**, 91 (4), 589-610, 1983a.

BARRO, R. J.; GORDON, D. B. Rules, discretion, and reputation in a model of monetary policy. **Journal of Monetary Economics**, 12 (1), 101-121, 1983b.

BIKER, J.; HU, H. Cyclical patterns in profits, provisioning and lending of banks and procyclicality of the new Basel capital requirements. **BNL Quarterly Review**, 221, 143-175, 2002.

BOURKE, P. Concentration and other determinants of bank profitability in Europe, North America and Australia. **Journal of Banking and Finance**, 13, 65-79, 1989.

CANZONERI, M. B. (1985). Monetary policy games and the role of private information. **American Economic Review**, 75 (4), 1056-10701, 1985.

CHARI, V. V.; KEHOE, P. Sustainable Plans. **Journal of Political Economy**, 98 (4), 783-802, 1990.

CLAEYS, S.; VENNET, R. Determinants of bank interest margins in Central and Eastern Europe: A comparison with the West. **Economic Systems**, 32, 197-216, 2008.

CLARIDA, R.; GALÍ, J.; GERTLER, M. The science of monetary policy: a new Keynesian perspective. **Journal of Economic Literature**, 37, 1661-1707, 1999.

CUCKIERMAN, A. **Central bank strategies, credibility and independence**. Cambridge: MIT Press, 1992.

CUCKIERMAN, A.; LIVIATAN, N. Optimal accommodation by strong policymakers under incomplete information. **Journal of Monetary Economics**, 27 (1), 99-127, 1991.

DAMJANOVIC, T.; DAMJANOVIC, V.; NOLAN, C. 2008. Unconditionally optimal monetary policy. *Journal of Monetary Economics*, 55, 491-500, 2008.

DEMIRGUC-KUNT, A.; HUIZINGA, H. Determinants of commercial bank interest margins and profitability: some international evidence. **World Bank Economic Review**, 13, 379-4081, 1999.

DIETRICH, A.; WANZENRIED, G. Determinants of bank profitability before and during the crisis: evidence from Switzerland. **Journal of International Financial Markets, Institution and Money**, 21 (3), 307-327, 2011.

FRIEDMAN, B. M. Targets and instruments of monetary policy, in B. Friedman and F. Hahn (eds.), **The Handbook of Monetary Economics**, Vol. II, Amsterdam: North-Holland, 1183ñ1230, 1990.

GARCÍA DE PASO, J. I. Monetary policy with private information: a role for monetary targets. **Instituto Complutense de Analisis Economico Working Paper No. 9315**, 1993.

GARCÍA-HERRERO, A.; GAVILÁN, S.; SANTABÁRBARA, D. What explains the low profitability of Chinese banks? **Journal of Banking and Finance**, 33, 2080-2092, 2009.

IRELAND, P. A small, structural, quarterly model for monetary policy evaluation. **Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy**, 47 , 83ñ108, 1997a.

KASMAN, A.; TUNC, G.; VARDAR, G.; OKAN, B. Consolidation and commercial bank net interest margins: evidence from old and new European Union members and candidate countries. **Economic Modelling**, 27, 648-655, 2010.

LOHMANN, S. Optimal commitment in monetary policy: credibility versus flexibility. **American Economic Review**, 82, 273ñ286, 1992.

MOLYNEUX, P; THORNTON, J. Determinants of European bank profitability: a note. **Journal fo Banking and Finance**, 16, 1173-1178, 1992.

PASIOURAS, F.; KOSMIDOU, K. Factors influencing the profitability of domestic and foreign commercial banks in the European Union. **Research in International Business and Finance**, 21, 222-237, 2007.

PERRY, P. Do banks gain or lose from inflation? **Journal of Retail Banking**, 14, 25-30, 1992.

PERSSON, T.; TABELLINI, G.(eds.). **Macroeconomic policy, credibility and politics**. Chur, Switzerland: Harwood Academic, 1990.

REVELL, J. **Inflation and financial institutions**. Financial Times, London, 1979.

ROGOFF, K. The optimal commitment to an intermediate monetary target. **Quarterly Journal of Economics**, 100(4), 1169-1189, 1985b.

ROVER, S.; TOMAZZIA, E.; FÁVERO, L. Determinantes econômico-financeiros e macroeconômicos da rentabilidade: evidências empíricas do setor bancário brasileiro. **Anais do XXXV Encontro da ANPAD**, Rio de Janeiro, 2011.

SAUER, S. Discretion rather than rules? When is discretionary policymaking better than the timeless perspective? **International Journal of Central Banking**, 6 (2), 2010.

STAIKOURAS, C.; WOOD, G. The determinants of bank profitability in Europe. **International Business & Economics Research Journal**, 3 (6), 57-68, 2003.

SVENSSON, L. Inflation forecast targeting: implementing and monitoring inflation targets. **European Economic Review**, 41(6), 1111-1146, 1997.

TAYLOR, J. Discretion versus policy rules in practice. **Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy**, 39, 195-214, 1993.

TRUJILLO-PONCE, A. What determines the profitability of banks? Evidence from Spain. **Accounting & Finance**, vol. 53, No. 2, 561-586, 2013.

VINHADO, F.; DIVINO, J. A. Determinantes da rentabilidade das instituições financeiras no Brasil. **Anais do XI Encontro Brasileiro de Finanças**, Rio de Janeiro, 2011.

WALSH, C. E. Optimal contracts for central bankers. **American Economic Review**, 85 (1), 150-167, 1995a.

WALSH, C. E. **Monetary Theory and Policy**, 3a ed., Cambridge: MIT Press, 2010.

4.5 Apêndice

Prova. (Proposição 4.1) Dado que

$$\frac{\partial i}{\partial \theta}(\theta) = \frac{1}{\pi_1} \frac{[\pi_2(1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}{1 + \lambda a^2}, \quad (4.30)$$

e lembrando que todos os parâmetros são maiores que zero, o resultado segue direto. ■

Prova. (Proposição 4.3) Observe que

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{\pi_1 \psi (1 + \lambda a^2) [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}{\{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \phi \lambda a^2 \pi_1\}^2}, \quad (4.31)$$

de modo que o resultado segue direto do fato de que todos os parâmetros são positivos. ■

Prova. (Proposição 4.4) Note que

$$\frac{\partial \pi^I}{\partial \pi_1} = \frac{-\psi \lambda a^2 \{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]\}}{\{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \phi \lambda a^2 \pi_1\}^2}, \quad (4.32)$$

tal que seu sinal depende do termo $\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]$. Dessa forma, como $\beta > 0$ por hipótese, temos o resultado. ■

Prova. (Proposição 4.5) O resultado segue direto de

$$\frac{\partial \pi^I}{\partial \beta} = \frac{\psi \lambda a^2 [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]}{\{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \phi \lambda a^2 \pi_1\}^2}, \quad (4.33)$$

já que novamente o termo $[\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]$ determinará o sinal da derivada. ■

Prova. (Proposição 4.6) O viés inflacionário é medido por

$$\pi^I - \pi^* = \lambda a (y^* + 1) - \frac{\psi \lambda a^2}{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \phi \lambda a^2 \pi_1}, \quad (4.34)$$

o qual será maior que zero se, e somente se,

$$\lambda a (y^* + 1) > \frac{\psi \lambda a^2}{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \phi \lambda a^2 \pi_1}. \quad (4.35)$$

Resolvendo para β , temos como condição necessária e suficiente para $\pi^I > \pi^*$,

$$\beta > \frac{\pi_1 a}{(y^* + 1)} \frac{[\psi - \phi \lambda a (y^* + 1)]}{[\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2]} = K. \quad (4.36)$$

O mesmo pode ser feito para os casos de $\pi^I < \pi^*$ e $\pi^I = \pi^*$. ■

Prova. (Proposição 4.7) A diferença entre produto corrente e produto potencial é

$$y^I - y^* = \frac{\pi_1 \psi a}{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \phi \lambda a^2 \pi_1} - 1 - y^*, \quad (4.37)$$

a qual será menor que zero se, e somente se,

$$\frac{\pi_1 \psi a}{\beta [\pi_2 (1 + \lambda a^2) - \lambda a^2] + \phi \lambda a^2 \pi_1} < (y^* + 1). \quad (4.38)$$

Resolvendo para β novamente, obtemos (4.36) como condição necessária e suficiente.

■

Prova. (Proposição 4.10) Dado que, por (4.17), $\Delta m^{II} = -K$, utilizando a hipótese 4.8 obtemos $\beta = K$, o que, pela proposição 4.6, garante que $\pi = \pi^*$. ■

Prova. (Proposição 4.11) Substituindo $\beta = K$ na condição de primeira ordem (4.22) do problema, obtemos

$$\frac{a\psi}{(y^* + 1)(1 + \lambda a^2)} - \frac{a\psi}{(y^* + 1)(1 + \lambda a^2) + a(\pi^* - \theta^{III})} + \xi \frac{(\pi^* - \theta^{III})}{1 + \lambda a^2}, \quad (4.39)$$

o que gera, após rearranjarmos os termos,

$$(\pi^* - \theta^{III}) \left[\frac{a^2\psi}{(y^* + 1)(1 + \lambda a^2)} + \xi(y^* + 1) + \frac{a\xi\pi^* - \theta^{III}}{1 + \lambda a^2} \right] = 0. \quad (4.40)$$

Dessa forma, temos que (4.40) possui como raízes $\theta^{III} = \pi^*$ e $\theta^{III} = \pi^* + \xi(y^* + 1) + \frac{a\psi}{y^* + 1}$.

■

5 Conclusão

Esta tese estudou alguns pontos relacionados à política e desenvolvimento econômico que tendem a ser cada vez mais relevantes tanto na pesquisa econômica quanto na prática dos *policymakers*. Conhecer, por exemplo, causas e consequências da presença de parasitas na economia e, em particular, a dinâmica de sua população, é algo cada vez mais relevante. Embora o tamanho do Estado venha aumentando em muitos países em desenvolvimento, a qualidade das instituições não tem crescido proporcionalmente - em muitas regiões, inclusive, vem piorando -, de maneira que grupos parasitas têm aparecido com mais frequência. Como mostramos no primeiro ensaio, as implicações econômicas deste crescimento podem ser muito sérias.

Igualmente importante é a preocupação com uma política monetária ótima, tanto para estabilização de preços quanto para um crescimento econômico sustentável - de fato, a primeira é pré-condição para o segundo. Dessa forma, o segundo e o terceiro ensaios apresentados aqui podem contribuir substancialmente para o formulador de política. No segundo, embora mais técnico e particularmente adequado à pesquisa acadêmica, destaca-se a importância de se conhecer como a economia reage a mudanças nos instrumentos de política. Além disso, é possível identificar quando tais instrumentos terão papéis complementares ou substitutos. Já o terceiro ensaio tem o mérito de evidenciar a relação estratégica entre banco central e participantes dos sistemas de expectativa de mercado. Em particular, deve-se atentar para o potencial viés inflacionário decorrente de tal relação e as possibilidades de sua superação.

Referências

- BARRO, R. J.; GORDON, D. B. A positive theory of monetary policy in a natural-rate model. **Journal of Political Economy**, 91 (4), 589-610, 1983a.
- BARRO, R. J.; GORDON, D. B. Rules, discretion, and reputation in a model of monetary policy. **Journal of Monetary Economics**, 12 (1), 101-121, 1983b.
- BOURKE, P. Concentration and other determinants of bank profitability in Europe, North America and Australia. **Journal of Banking and Finance**, 13, 65-79, 1989.
- CLAEYS, S.; VENNET, R. Determinants of bank interest margins in Central and Eastern Europe: A comparison with the West. **Economic Systems**, 32, 197-216, 2008.
- CUCKIERMAN, A. **Central bank strategies, credibility and independence**. Cambridge: MIT Press, 1992.
- DEMIRGUC-KUNT, A.; HUIZINGA, H. Determinants of commercial bank interest margins and profitability: some international evidence. **World Bank Economic Review**, 13, 379-408, 1999.
- MEHLUM, H.; MOENE, K.; TORVIK, R. Parasites. **Memorandum n° 16/2003**. Department of Economics, University of Oslo, 2003b.
- MOLYNEUX, P; THORNTON, J. Determinants of European bank profitability: a note. **Journal of Banking and Finance**, 16, 1173-1178, 1992.
- NOBAY, A. R.; PEEL, D. Optimal discretionary monetary policy in a model of asymmetric central bank preferences. **The Economic Journal**, 113, 657-665, 2003.
- STAIKOURAS, C.; WOOD, G. The determinants of bank profitability in Europe. **International Business & Economics Research Journal**, 3 (6), 57-68, 2003.
- WALSH, C. E. **Monetary Theory and Policy**, 3a ed., Cambridge: MIT Press, 2010.