

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM E APROXIMAÇÃO ESTABILIZADA DE ELEMENTOS  
FINITOS PARA ESCOAMENTOS VISCOPLÁSTICOS SUJEITOS A  
EFEITOS ELÁSTICOS NO INTERIOR DE CAVIDADES

por

Renato da Rosa Martins

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Julho de 2013

MODELAGEM E APROXIMAÇÃO ESTABILIZADA DE ELEMENTOS  
FINITOS PARA ESCOAMENTOS VISCOPLÁSTICOS SUJEITOS A  
EFEITOS ELÁSTICOS NO INTERIOR DE CAVIDADES

por

Renato da Rosa Martins

Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey

Comissão de avaliação:

Prof. Dra. Adriane Prisco Petry / UFRGS

Prof. Dra. Maria Laura Martins Costa / UFF

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen / UFRGS

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, Julho 2013

*Dedico este trabalho a minha família, em especial, aos  
meus filhos: Mariana, Mateus e Bruna.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos professores e funcionários do programa de Pós-Graduação da Engenharia Mecânica da UFRGS pelo trabalho realizado.

Parabenizo os meus colegas de trabalho pela colaboração, paciência e compreensão com a minha pessoa.

Com especial ênfase, agradeço ao meu orientador Dr. Pr. Sérgio Luiz Frey, responsável pela oportunidade da realização desta tese e de meu crescimento frente ao trabalho.

## RESUMO

Escoamentos sem inércia de fluido elasto-viscoplástico, dentro de uma cavidade, são numericamente analisados. As soluções visam compreender a influência dos efeitos viscosos e elásticos na topologia de superfícies de escoamento.

Assumindo-se que o colapso da microestrutura do material é instantâneo, o modelo mecânico é constituído pelas equações governantes de massa e momentum para fluidos incompressíveis, associado a uma equação hiperbólica para o tensor tensão extra, baseado na equação do modelo Oldroyd-B (Nassar et al, 2011).

A principal característica do modelo é considerar a viscosidade e o tempo de relaxação como função da taxa de deformação, permitindo a pseudoplasticidade de viscosidade e restringindo os efeitos elásticos para as regiões não deformadas do material.

As simulações numéricas são realizadas através do método de Galerkin mínimos quadrados a três campos: tensor tensão extra, pressão e velocidade.

Os resultados mostram que as superfícies de escoamento do material são fortemente influenciadas pela ação combinada entre os efeitos elásticos e viscosos, estando em conformidade com a recente visualização experimental dos fluxos elasto-viscoplásticos.

Palavras chave: fluido elasto-viscoplástico, superfícies de escoamento, colapso da microestrutura, modelo Oldroyd-B e efeitos elásticos e viscosos.

## ABSTRACT

Elasto viscoplastic fluid flows without inertia, within a cavity, are numerically analyzed. The solutions aim to understand the influence of viscous and elastic effects on the topology of yield surfaces.

Assuming that the collapse of the material microstructure is instantaneous, the mechanical model consists of the governing equations of mass and momentum for incompressible fluids, associated with a hyperbolic equation for the extra stress tensor, based on the equation of the Oldroyd-B model (Nassar et al, 2011).

The main feature of model is to consider the viscosity and the relaxation time as a function of shear rate, allowing the shear-thinning of viscosity and restricting elastic effects for regions not deformed material.

Numerical simulations are performed by the method of Galerkin Least Squares to three fields: extra stress tensor, pressure and velocity.

The results show that the yield surfaces of material are strongly influenced by the combined action between the elastic and viscous effects, complying with the recent experimental visualization of elasto-viscoplastic flows.

Keywords: fluid elasto-viscoplastic, yield surface, collapse of the microstructure, Oldroyd-B model and effects elastic and viscous.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1	Proposta da Tese.....	7
<b>2</b>	<b>A CINEMÁTICA DOS FLUIDOS</b> .....	8
2.1	Teorema de Transporte.....	13
2.2	Equação da Continuidade.....	15
2.3	Dinâmica dos Fluidos: A Equação de Movimento.....	16
2.3.1	Definição de Força.....	16
2.3.2	Os axiomas de Euler.....	20
<b>3</b>	<b>COMPORTAMENTO MATERIAL</b> .....	25
3.1	Fluidos Puramente Viscosos.....	33
3.1.1	Fluido Newtoniano.....	35
3.1.2	Fluido Newtoniano Generalizado.....	35
3.1.3	Fluido Power-law.....	37
3.1.4	Fluido de Carreau-Yasuda.....	38
3.1.5	Fluidos Viscopoplásticos.....	39
3.1.6	A Regularização de Papanastasiou.....	41
3.1.7	Fluido Viscopoplástico SMD.....	42
3.2	Fluidos Viscoelásticos.....	47
3.2.1	Equação Constitutiva de Maxwell Convectado Superior.....	47
3.2.2	Equação Constitutiva de Oldroyd-B.....	50

<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>53</b>
4.1	Definições Preliminares.....	53
4.2	Modelo Mecânico.....	54
4.3	O Método de Solução.....	58
4.4	Parâmetros Adimensionais do Escoamento.....	61
4.5	Resultados Pretendidos.....	63
4.5.1	Influência dos Efeitos Viscosos.....	64
<b>5</b>	<b>COMENTÁRIOS E PERSPECTIVAS FUTURAS.....</b>	<b>71</b>
5.1	Comentários.....	71
5.2	Perspectivas Futuras.....	73
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>74</b>



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Descrição do movimento de um corpo mecânico.....	10
Figura 2.2	Corpo B na qual P é uma porção.....	18
Figura 3.1	Curva de escoamento do modelo SMD.....	43
Figura 3.2	Curvas de escoamento SMD para diferentes relações $\eta_0/\tau_0$ .....	45
Figura 3.3	Função viscosidade SMD para diferentes relações $\eta_0/\tau_0$ .....	46
Figura 3.4	Representação esquemática do modelo UCM.....	48
Figura 3.5	Representação do modelo de Oldroyd-B.....	51
Figura 4.1	A geometria e condições de contorno.....	59
Figura 4.2	Qualidade de malha.....	60
Figura 4.3	Superfícies de escoamento: efeito do número de salto para $\theta_{0_1}^* = 250$ , $n = 0.5$ e $U^* = 0.01$ ; (a) $J = 500$ , (b) $J = 1000$ , (c) $J = 5000$ e (d) $J = 10000$ .....	65
Figura 4.4	Superfícies de escoamento: efeito do índice <i>power-law</i> para $\theta_{0_1}^* = 250$ , $J = 1000$ e $U^* = 0.1$ ; (a) $n = 0,4$ , (b) $n = 0,7$ , (c) $n = 0,9$ e (d) $n = 1$ .....	67
Figura 4.5	Superfícies de escoamento: efeito da intensidade de escoamento para $\theta_{0_1}^* = 250$ , $J = 1000$ e $n = 0,5$ ; (a) $U^* = 0,01$ , (b) $U^* = 0,05$ , (c) $U^* = 0,1$ , (d) $U^* = 0,2$ , (e) $U^* = 0,4$ e (f) $U^* = 1$ .....	68

Figura 4.6 Superfícies de escoamento: efeito da elasticidade para  $U^* = 0,01$ ,  
 $J = 1000$  e  $n = 0,5$ ; (a)  $\theta_{0_1}^* = 200$ , (b)  $\theta_{0_1}^* = 800$ , (c)  $\theta_{0_1}^* = 1000$ ,  
(d)  $\theta_{0_1}^* = 1300$ , (e)  $\theta_{0_1}^* = 1500$  e (f)  $\theta_{0_1}^* = 2000$ ..... 70

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{B}$	Fluido qualquer
$\chi$	Transformação de classe
$\mathcal{C}^3$	Espaço tridimensional
$\chi^{-1}$	Inversa da transformação de classe
$\mathcal{P}$	Partícula
$(\mathbf{x}, t)$	Variáveis espaciais da posição e do tempo
$(\mathbf{X}, t)$	Variáveis materiais da posição e do tempo
$\rho$	Massa específica do fluido, $kg/m^3$
$\mathbf{u}$	Vetor velocidade
$\nabla$	Operador gradiente espacial
$\mathbf{a}$	Campo de aceleração
$\Omega$	Volume arbitrário de fluido
$\Gamma$	Fronteira do volume $\Omega$
$\mathbf{F}$	Tensor gradiente de deformação
$\nabla \cdot$	Operador divergência espacial
$\mathcal{M}$	Massa de fluido, $kg$
$\mathbf{f}_m$	Força mútua por unidade de área, $N/m^2$
$B$	Corpo qualquer
$\mathbf{f}_e$	Força externa por unidade de massa, $N/kg$
$\mathbf{t}$	Vetor tensão
$\mathbf{T}$	Tensor tensão

$\mathbf{n}$	Normal exterior
$\mathbf{F}$	Campo de forças totais externas e mútuas
$\mathbf{r}$	Vetor posição
$\mathbf{T}^T$	Transposto do tensor tensão
$ds$	Vetor geométrico
$\mathbf{Q}$	Tensor ortogonal
$\mathbf{A}$	Operador linear
$\mathbf{1}$	Tensor unitário ou tensor identidade
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor tensão extra ou tensor das tensões deviatórias
$\mathbf{D}$	Tensor taxa de deformação
$\mu$	Viscosidade absoluta do fluido, <i>Pa.s</i>
$\eta(\dot{\gamma})$	Função viscosidade
$\eta_{ap}$	Viscosidade aparente, <i>Pa.s</i>
$m$	Parâmetro regularizador
$n$	Índice power-law
$\eta_0$	Viscosidade para taxa de deformação tendendo a zero, <i>Pa.s</i>
$\eta_\infty$	Viscosidade para taxa de deformação tendendo ao infinito, <i>Pa.s</i>
$\lambda$	Constante de tempo, s
$a$	Parâmetro adimensional
$L$	Parâmetro adimensional
$Wi$	Número adimensional de Weissenberg
$\tau_0$	Tensão limite do material, <i>N/m<sup>2</sup></i>
$K$	Índice de consistência, <i>Pa.s<sup>n</sup></i>

$\tau$	Tensão do material, $N/m^2$
$J$	Número de salto adimensional
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação por cisalhamento, $s^{-1}$
$\dot{\gamma}_1$	Taxa de deformação por cisalhamento no início da região power-law, $s^{-1}$
$\dot{\gamma}_0$	Taxa de deformação por cisalhamento limite do escoamento, $s^{-1}$
$\tau_H$	Magnitude da tensão Hookiana, $N/m^2$
$G$	Módulo de elasticidade
$\gamma_H$	Deformação elástica, $m$
$\eta$	Viscosidade constante, $Pa.s$
$\dot{\gamma}_N$	Taxa de deformação viscosa, $s^{-1}$

## 1. INTRODUÇÃO

Escoamentos de fluidos não-Newtonianos através de geometrias complexas é comum em processos naturais e industriais, tais como os escoamentos de extrusão, escoamentos de óleo no interior de reservatórios, cosméticos e indústrias alimentares. Muitas vezes ocorrem mudanças bruscas na seção transversal e em muitos casos os efeitos de elasticidade desempenham um papel importante. Em escoamentos complexos de fluidos viscoplásticos, geralmente, o nível de tensão ultrapassa o limite de escoamento do material em algumas regiões do escoamento (yielded regions ou regiões escoadas), enquanto, em outras fica abaixo deste limite (unyielded regions ou regiões não-escoadas). A fronteira entre as regiões escoadas e não-escoadas é conhecida como superfície de escoamento. Alguns experimentos simples demonstram que a elasticidade está presente nas regiões não-escoadas, ver, por exemplo, Sikorski et al. (2009).

Apesar do fato da tensão de escoamento ser a mais importante característica de um fluido viscoplástico, sua definição ainda está em debate na literatura. Barnes (1999a, 1999b) realizou uma extensa revisão acerca de materiais com tensão de escoamento, na qual afirma que a propriedade tensão de escoamento, na verdade, não existe. São apresentadas várias curvas de materiais viscoplásticos, mostrando a existência de escoamento abaixo da tensão de escoamento, fato o qual contradiz a usual definição do termo.

O modelo empregado nesta Tese segue o ponto de vista introduzido por Barnes (1999a, 1999b) e, portanto, considera que a tensão de escoamento é

o nível de tensão para o qual ocorre uma severa mudança na microestrutura do material, a qual acarreta uma mudança acentuada na sua viscosidade. Portanto, a ausência de escoamento abaixo do limite de escoamento deixa de ser imposta.

Muitos artigos na literatura tratam do comportamento das superfícies de escoamento em escoamentos complexos (ver, por exemplo, Lipscomb e Denn (1984); Denn (1998); Burgos et al. (1999)), e da modelagem numérica da viscosidade infinita para taxas de deformação nulas, prevista pelos modelos viscoplásticos tradicionais. Em geral, parâmetros de regularização são empregados para contornar esse problema (Bercovier e Engelman (1980); Papanastasiou (1987)). Diversos autores utilizaram estes modelos em suas análises numéricas de escoamentos de fluidos viscoplásticos através de geometrias complexas.

A equação bi-viscosidade foi utilizada por Al Khatib e Wilson (2003) para determinar a superfície de escoamento no fluxo de um fluido viscoplástico no interior de um reômetro ortogonal. Foram obtidos resultados tanto assintoticamente quanto numericamente, com os autores concluindo que as regiões não-escoadas, somente, existem para algumas combinações de parâmetros.

Mitsoulis e Huilgol (2004) realizaram um estudo numérico de escoamentos através de uma expansão abrupta de um fluido de Bingham, utilizando o modelo regularizado de Papanastasiou. Eles determinaram a forma das regiões escoadas e não-escoadas e a perda de carga para uma extensa gama dos números de Reynolds e Bingham. Mitsoulis e Matsoukas (2005) e Mat-

soukas e Mitsoulis (2003) usaram o mesmo modelo para investigar *squeeze flows* de plásticos de Bingham.

Alexandrou et al. (2001) realizou um estudo numérico acerca dos escoamentos de fluidos Herschel-Bulkley em uma expansão plana tridimensional. Eles empregaram uma equação de Papanastasiou modificada, a qual prescreve pseudoplasticidade a elevadas taxas de deformação. Vale a pena ressaltar que, apesar da regularização de Papanastasiou, esta equação prevê viscosidade infinita para taxas de deformação nulas, e, desse modo, uma regularização do tipo bi-viscosidade se faz ainda necessária (de Souza Mendes e Dutra, 2004). Foram obtidos resultados tanto para razão de expansão: 1:2 como para 1:4. Observou-se a ocorrência de uma forte interação entre os efeitos de inércia e viscoplástico (tensão limite), influenciando a formação e destruição das zonas não-escoadas na quina da expansão.

Vradis e Otugen (1997) analisaram numericamente o escoamento de materiais de Bingham através de uma expansão abrupta axissimétrica. Os autores concluíram que o comprimento de recolamento aumenta com o número de Reynolds, diminui com o número de Bingham, e essencialmente independe da razão de expansão. Jay et al. (2001) investigaram o escoamento de fluidos com tensão de escoamento através de uma expansão súbita axissimétrica 1:4, utilizando a regularização de bi-viscosidade da equação de Herschel-Bulkley. Os efeitos da pseudoplasticidade, inércia e da tensão de escoamento no padrão do escoamento e na perda de carga ao longo do escoamento foram analisados. Eles observaram duas regiões toroidais não-escoadas e concluíram que a



inércia e a tensão de escoamento atuam em sentidos opostos, e que a pseudo-plasticidade reduz as dimensões tanto dos vórtices como das zonas mortas.

Liu et al. (2002) estudaram escoamentos sem inércia de fluidos de Bingham ao redor de uma esfera. A maioria de suas soluções numéricas foram obtidas com o auxílio da equação regularizada de Bingham proposta por Bercovier e Engelman (1980). Eles mostraram que a localização da superfície de escoamento é uma função do parâmetro de regularização, de tal modo que as regiões escoadas aumentam à medida que o parâmetro de regularização cresce. Embora tenham investigado valores bastante elevados do parâmetro de regularização, nenhum comportamento limite da posição das superfícies de escoamento pode ser auferido. Assim, ficou demonstrado que a localização das superfícies de escoamento é uma função do valor escolhido para o parâmetro de regularização. É interessante ressaltar, no entanto, que isto não acarreta nenhum problema na modelagem dos materiais viscoplásticos, uma vez aceito que, na verdade, estes materiais escoam abaixo do limite de escoamento. Neste caso, o parâmetro de regularização é uma propriedade reológica mensurável. Mais especificamente, este parâmetro está relacionado com o platô Newtoniano de alta viscosidade que ocorre quando o nível de tensão cai abaixo do limite de escoamento do material.

No que diz respeito à análise de fluidos viscoelásticos em escoamentos através de expansões e contrações abruptas utilizando equações constitutivas diferenciais, a literatura é muito extensa (ver, por exemplo, Phillips e Williams, 2002; Alves et al. 2003; Aboubacar et al., 2002; Szabo et al., 1997;

Baloch et al., 1996). A maioria destes artigos analisam o efeito do número de Deborah no padrão do escoamento e na queda de pressão. Também são discutidas as dificuldades na obtenção de resultados numéricos para elevados valores do número de Deborah e os esforços computacionais para contornar este problema.

Beverly e Tanner (1989) analisaram o fenômeno da expansão do extrudado (*extrudate swell*) em materiais viscoelásticos com tensão de escoamento, utilizando o modelo viscoelástico de Phan-Thien-Tanner modificado por um termo adicional para levar em conta a tensão de escoamento. O mesmo problema foi analisado mais adiante por Mitsoulis et al. (1993). Ambos trabalhos tentaram reproduzir dados experimentais obtidos por Carter e Warren (1987) para o crescimento de massas de pão (*propellant doughs*), as quais são fluidos viscoelásticos com tensão de escoamento. Em um trabalho mais recente, Sofou et al. (2008) utilizaram o modelo K-BKZ com um termo aditivo de tensão de escoamento, para estudar o comportamento de deslizamento de massas de pão nas paredes de um escoamento capilar. A aproximação utilizada nesses trabalhos é um pouco diferente da utilizada na presente Tese. O problema a ser investigado considera um fluido viscoplástico com elasticidade, porém, com o comportamento elástico sendo apenas relevante a taxas de deformação muito baixas, isto é, próximo ou dentro das regiões não-escoadas. Este comportamento é observado em soluções de Carbopol e alguns géis (ver, por exemplo, Sikorski et al. (2009)).

Até o momento, muito poucos artigos estudaram a elasticidade de fluidos

viscoplásticos. Saramito (2007) descreve um novo modelo elasto-viscoplástico, baseado tanto no modelo viscoplástico de Bingham como no modelo viscoelástico de Oldroyd-B. O modelo é objetivo e satisfaz a segunda Lei da Termodinâmica. O autor analisa alguns escoamentos simples, como cisalhamento puro, extensão uniaxial e cisalhamento oscilatório de grande amplitude, apresentando alguns resultados para os módulos de elasticidade.

Vale ressaltar que os modelos mais completos de tixotropia disponíveis (ver revisão apresentada em Mewis e Wagner (2009)) são capazes de prever efeitos elásticos (ver, por exemplo, Mujumdar et al. (2002); Dullaert e Mewis, (2006); de Souza Mendes, (2009)). No entanto, a maioria está limitada aos escoamentos cisalhantes homogêneos, à exceção do recente trabalho de Souza Mendes (2009).

O escoamento de expansão/contração de um fluido viscoplástico foi analisado, tanto numericamente quanto experimentalmente, em de Souza Mendes e et al. (2007). A solução numérica foi obtida usando a equação proposta por de Souza Mendes e Dutra (2004), e os resultados da visualização do escoamento foram também reportados. A zona escoada foi determinada experimentalmente e numericamente para escoamentos sem inércia, em várias combinações de parâmetros. Os experimentos de visualização do escoamento relatam zonas escoadas não simétricas com respeito ao plano ortogonal ao eixo do tubo que divide a cavidade em dois volumes iguais. As soluções numéricas, entretanto, previram zonas escoadas simétricas. Esta discrepância é uma das motivações a ser investigada nesta Tese.

## 1.1 Proposta da Tese

Com o propósito de prever numericamente o comportamento elástico de fluidos viscoplásticos em zonas sujeitas a baixas taxas de deformação por cisalhamento, em escoamentos no interior de cavidades vazantes (*leaky cavities*), será empregado o modelo constitutivo elasto-viscoplástico proposto por Nassar et al. (2011).

Para analisar o desempenho do modelo, empregado na caracterização mecânica de escoamentos elasto-viscoplásticos, os resultados numéricos serão qualitativamente comparados com os experimentais recentemente encontrados em de Souza Mendes (2007).

## 2. A CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Nesta Tese utiliza-se o *modelo contínuo* para a descrição e estudo da cinemática e dinâmica dos fluidos. Este modelo baseia-se na hipótese de que a massa é distribuída continuamente no espaço, exceto nas superfícies de descontinuidade, como ondas de choque e interfaces de fase, desprezando-se os fenômenos em nível molecular.

A fim de facilitar o entendimento dos fenômenos físicos envolvidos no estudo da teoria da Mecânica do Contínuo, cria-se a idéia de *partícula material*. Uma partícula material não é um ponto ou uma pequena porção de matéria, e sim uma abstração capaz de representar as propriedades físicas e a condição cinemática de uma dada posição de um corpo. Assim, é dito que um *corpo mecânico é formado por um conjunto de partículas materiais*.

O escoamento dos fluidos é um fenômeno físico que pode ser representado por uma *transformação contínua* do espaço euclidiano nele próprio, parametrizada pelo tempo  $t \in [0, \infty)$ ,

$$\chi : \mathcal{B} \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathcal{E}$$

onde  $\mathcal{B}$  denota um fluido qualquer,  $\chi$  uma transformação de classe  $\mathcal{C}^3$  referida como seu *movimento* e  $t = 0$  um instante inicial arbitrário.

A fim de descrever esta transformação analiticamente introduzimos um sistema de coordenadas fixo  $(x_1, x_2, x_3)$ , tripla esta referida como *posição* e denotada por  $\mathbf{x}$ . Considere agora um ponto  $\mathcal{P}$  do fluido (uma *partícula*)

movendo-se com o escoamento. Em  $t = 0$  esta partícula ocupa a posição  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  e no instante genérico  $t$  terá se movido para a posição  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Podemos então representar a posição do fluido pela transformação;

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

Fixando a posição  $\mathbf{X}$  da partícula e variando o tempo  $t$ , i.e,  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, \cdot)$ , a eq. (2.1) representa a trajetória da partícula  $\mathcal{P}$ , ao passo que para um tempo fixo  $t$  a transformação  $\boldsymbol{\chi}$  representa uma deformação do fluido  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\cdot, t)$  - ver Figura (2.1).

Da hipótese que pontos distintos do fluido assim permanecem no decorrer de seu escoamento, tira-se que a equação (2.1) admite inversa, ou seja,

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

Apesar do escoamento ser determinado por seu movimento  $\boldsymbol{\chi}$ , também é importante analisar o estado do movimento numa dada posição ao longo do tempo. Isto pode ser feito utilizando-se campos espaciais, como por exemplo,  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , os quais fornecem, respectivamente a densidade e a velocidade da partícula que ocupa a posição  $\mathbf{x}$  no instante de tempo  $t$ . As variáveis  $(\mathbf{x}, t)$  empregadas nas descrições destes campos são conhecidas como variáveis *espaciais*, enquanto as variáveis  $(\mathbf{X}, t)$ , as quais identificam as

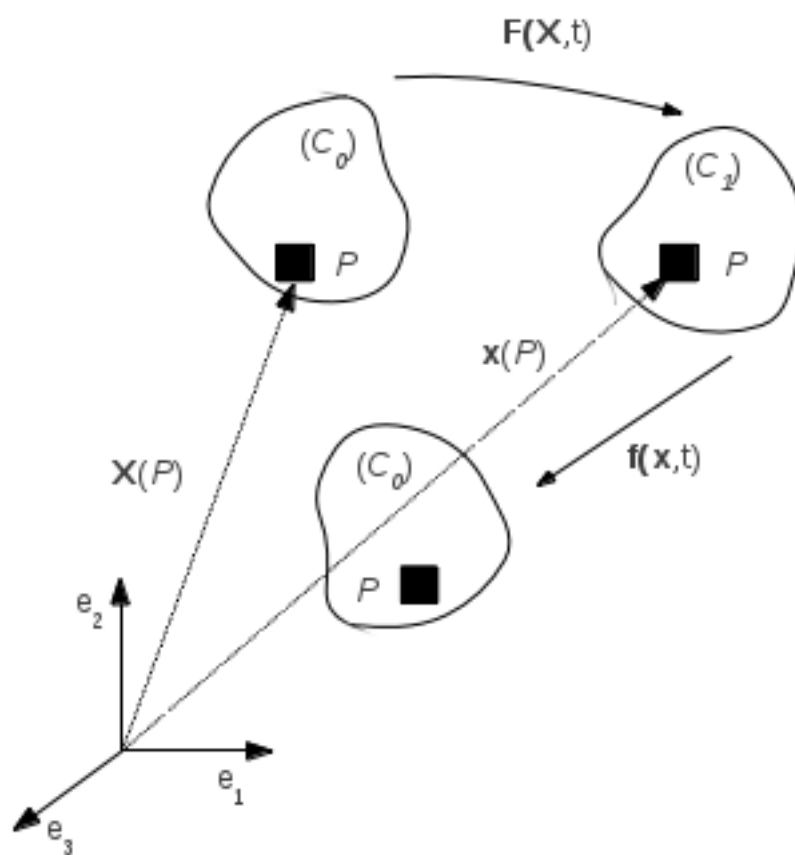


Figura 2.1: Descrição do movimento de um corpo mecânico.

partículas do fluido, são denominadas variáveis *materiais*. Graças à equação (2.1), qualquer grandeza  $\psi$  de um fluido que seja função de suas variáveis espaciais, também o será de suas variáveis materiais  $(\mathbf{X}, t)$ ; e vice-versa. Se, por exemplo, a grandeza  $\psi$  for um campo espacial do fluido ( $\psi(\mathbf{x}, t)$ ) então sua descrição material o relacionará com suas variáveis materiais:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.3)$$

Ao passo que, se  $\psi$  for um campo material ( $\psi(\mathbf{X}, t)$ ), sua descrição espacial fornecerá

$$\psi(\mathbf{X}, t) = \psi(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.4)$$

Do ponto de vista geométrico,  $\psi(\mathbf{x}, t)$  representa o valor do campo  $\psi$  para um instante  $t$ , experimentado pela partícula que inicialmente ocupava a posição  $\mathbf{x}$ ; enquanto que  $\psi(\mathbf{X}, t)$  fornece o valor de  $\psi$  sentido pela partícula que instantaneamente ocupa a posição  $\mathbf{X}$ . Para as derivadas temporais empregaremos a seguinte notação:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \text{ e } \dot{\psi} = \left( \frac{d\psi}{dt} \right) \equiv \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \quad (2.5)$$

onde  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  e  $\dot{\psi}$  são conhecidas como *derivada espacial* e *derivada material* de  $\psi$ . A derivada material mede a variação de  $\psi$  seguindo uma partícula, enquanto a derivada espacial, a taxa de variação de  $\psi$  segundo um observador fixo



na posição  $\mathbf{x}$ . Podemos pensar ainda na derivada material de um campo espacial, ou seja,  $\dot{\psi}(\mathbf{x}, t)$ . Seu desenvolvimento, para o caso de  $\psi$  ser um campo vetorial, segue abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(\mathbf{x}, t)}{dt} &= \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)} & (2.6) \\ &= \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}(\mathbf{x}, t)} + \left[ \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)} \Big|_t \right] \frac{\partial\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + [\nabla\psi(\mathbf{x}, t)]\dot{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \end{aligned}$$

onde  $\nabla(\cdot)$  representa o operador gradiente espacial.

A *velocidade*  $\mathbf{u}$  de uma partícula de fluido é definida por

$$\mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \quad (2.7)$$

Assim definida,  $\mathbf{u}$  é uma função das variáveis materiais do fluido. Na prática, entretanto, é mais vantajoso trabalhar com sua descrição espacial,

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.8)$$

É interessante observar, ainda, que na maioria dos escoamentos dos fluidos torna-se suficiente conhecer o campo de velocidade  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  ao invés do movimento do fluido descrito pela Eq.(2.1).

A *aceleração* de uma partícula é definida como a taxa de variação da

velocidade; ou seja,

$$\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.9)$$

Novamente, é conveniente expressarmos o campo de aceleração como função da descrição espacial do campo de velocidade. Empregando a relação cinemática da eq.(2.6), obteremos:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} \quad (2.10)$$

## 2.1 Teorema de Transporte

Seja  $\Omega = \Omega(t)$  um volume arbitrário de fluido e  $\psi(\mathbf{x}, t)$  uma função - a valor escalar ou vetorial - da posição  $\mathbf{x}$ . Sua integral

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (2.11)$$

é portanto uma função bem definida no tempo. Sua derivada material é determinada pelo Teorema de Transporte de Reynolds, o qual enunciaremos a seguir para funções vetoriais.

**TEOREMA (Reynolds)** Seja  $\boldsymbol{\psi}$  um campo vetorial espacial suficiente-

mente regular. Então, para qualquer volume  $\Omega$  e tempo  $t$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi} d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\psi} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.12)$$

onde  $\Gamma$  denota a fronteira de  $\Omega$ .

*Prova:* Para provar a eq.(2.12) é necessário trocar as variáveis de integração através da aplicação de referência  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ , de modo a podermos trabalhar com o domínio de referência  $\Omega_r$  independente do tempo ( $\Omega(0) \equiv \Omega_r$ ), como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) d\Omega &= \int_{\Omega_r} \frac{\partial(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t))}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)} d\Omega_r \\ &= \int_{\Omega_r} (\dot{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) \dot{\det} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) d\Omega_r \\ &= \int_{\Omega_r} (\dot{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) \nabla \cdot \mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\Omega_r \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad (2.13) \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{F}$  é o tensor gradiente de deformação no movimento  $\boldsymbol{\chi}$  do fluido e  $\nabla \cdot (\cdot)$  denota o operador divergência espacial. Empregando agora a relação utilizada na eq.(2.6) e o teorema da divergência à eq.(2.13), finalizamos a

prova do Teorema:

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) d\Omega \quad (2.14) \\
 &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} (\psi(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma
 \end{aligned}$$

## 2.2 Equação da Continuidade

Suponha agora que o fluido possua uma função densidade  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  a qual através da relação

$$\mathcal{M} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (2.15)$$

é utilizada para determinar a massa  $\mathcal{M}$  de fluido que ocupa a região  $\Omega$ . A função densidade é estritamente positiva e sua dimensão física é massa por unidade de volume.

Do significado físico do conceito de massa, postula-se o chamado **Princípio da Conservação de Massa**: A massa de um volume arbitrário de fluido  $\Omega$  não varia ao longo de seu escoamento. Este princípio pode ser expresso matematicamente por;

$$\dot{\mathcal{M}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = 0 \quad (2.16)$$

Aplicando o Teorema de Transporte e o Teorema de Gauss (divergência) à

Eq. (2.16), obtemos que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} (\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad (2.17)$$

Por ser  $\Omega$  um volume arbitrário de fluido, o teorema de localização (cf. Gurtin [23]) fornece;

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.18)$$

Esta é a forma espacial ou euleriana da equação da conservação de massa, ou, como é mais conhecida, da *equação da continuidade*. Esta equação é condição necessária e suficiente para um escoamento preservar sua massa. Utilizando a relação cinemática da eq.(2.6), obtemos uma forma alternativa para a Eq. (2.18):

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (2.19)$$

## 2.3 Dinâmica dos Fluidos: A Equação de Movimento

Analisaremos agora a dinâmica do movimento dos fluidos objetivando derivar as equações que governam a ação das forças internas e externas atuantes no fluido.

### 2.3.1 Definição de Força

Durante o movimento de um fluido ou, com mais generalidade, de um

corpo, as interações de suas partes internas com o meio exterior são descritas pelas forças nelas atuantes. O conceito de força é um conceito primitivo, que forma a base para introduzir o segundo e o terceiro postulados da mecânica: a primeira e a segunda Leis de Euler. Através da introdução do tensor de tensão são derivadas equações que descrevem, para cada ponto material, os balanços locais de momentum linear e angular: a primeira e segunda Leis de Cauchy.

Na mecânica dos meios contínuos, são classicamente considerados três tipos de forças:

- I. forças mútuas entre partes disjuntas do corpo;
- II. forças de volume exercidas pelo exterior nos pontos interiores do corpo, as chamadas forças volumétricas ou de corpo.
- III. forças de contato entre seu contorno e o meio exterior;

As chamadas forças mútuas originam-se no interior de um corpo, agindo sobre pares de suas partículas materiais. *As forças intermoleculares de longo alcance*<sup>1</sup> que agem entre uma fina película de líquido e o sólido sobre o qual repousam são forças mútuas. Seja  $\mathbf{f}_m$  a força mútua, por unidade de massa, que  $B - P$  exerce sobre  $P$ . Sendo  $P$  uma porção de um corpo  $B$  como ilustrado

---

<sup>1</sup>São de natureza elétrica e atuam a grandes distâncias de separação intermolecular. Surgem do contato não reativo entre duas moléculas fazendo com que uma molécula influencie o comportamento de outra molécula em suas proximidades. John C. Slattery (Advanced Transport Phenomena, Cambridge University Press 1999).

na Fig.(2.2). A força mútua total agindo sobre  $P$  é dada por uma integral em relação ao volume de  $P$ .

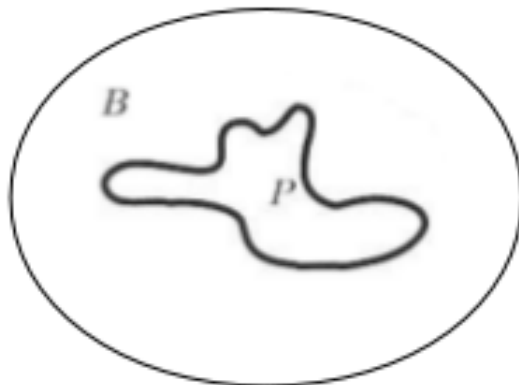


Figura 2.2: Corpo  $B$  na qual  $P$  é uma porção

$$\int_{\Omega_P} \rho \mathbf{f}_m(\mathbf{x}, t) d\Omega_P \quad (2.20)$$

Em geral, é um campo vetorial dependente da posição e do tempo. O somatório das forças mútuas exercidas por duas partes quaisquer de uma na outra é igual a zero.

As forças de corpo originam-se no exterior do corpo e agem sobre suas partículas materiais. Um exemplo é a força uniforme da gravidade. Sendo  $\mathbf{f}_e$  uma força externa, por unidade de massa, que a vizinhança exerce sobre  $B$ .

A força externa total exercida em  $P$  em termos de uma integral volumétrica ao longo da região ocupada por  $P$  será;

$$\int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t) d\Omega_{\mathcal{P}} \quad (2.21)$$

Analogamente,  $\mathbf{f}_e$  é função da posição e do tempo, sendo um campo vetorial espacial.

As forças de contato não são funções da posição, mas sim forças que agem sobre a superfície de uma porção do material, representadas pelo vetor tensão  $\mathbf{t}$ . O vetor  $\mathbf{t}$  representa a força exercida por uma porção de material sobre outra, além das forças mútuas que possam vir a existir. Esta força, por unidade de área, é usualmente referida como tensão. A força de contato total que  $B - P$  exerce sobre  $P$ , pode ser escrita como uma integral sobre a superfície de  $P$ :

$$\int_{S_{\mathcal{P}}} \mathbf{t} dA \quad (2.22)$$

Para avaliar as forças de contato, emprega-se um dos mais importantes axiomas da mecânica do contínuo, a **hipótese de Cauchy** (Billington e Tate, 1981): Em uma superfície fechada arbitrária  $S$  existe uma distribuição de vetores tensão  $\mathbf{t}$ , cuja a resultante de força e momento é equivalente à resultante das forças materiais exercidas pelo lado exterior de  $S$  no seu lado interior. Supõem-se ainda, que a distribuição do tensor tensão  $\mathbf{T}$  depende - para um dado instante de tempo - apenas da posição e da orientação do



elemento de superfície  $d\mathcal{S}$ . Matematicamente, denota-se  $\mathbf{n}$  a normal exterior à superfície  $\mathcal{S}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t)$ .

A natureza do carregamento de contato dado pelo princípio da tensão, o qual postula a existência de uma função vetorial  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathcal{P})$ , definida para todos os pontos  $\mathbf{x}$  em um corpo  $B$  e para todo vetor  $\mathbf{n}$  normal exterior unitário à porção  $P$ , tal que  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathcal{P}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  (Truesdell e Toupin, 1960). Se um balanço de momentum é aplicado para duas porções vizinhas de um corpo contínuo, considerando cada porção e sua superfície em comum, deduz-se  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n})$ , que significa que os vetores de tensão, agindo sobre lados opostos da mesma superfície em um dado ponto, tem magnitudes iguais e sentidos opostos. (Truesdell e Toupin, 1960).

### 2.3.2 Os axiomas de Euler

Em seguida serão postulados os axiomas de Euler, os quais relacionam o movimento de fluido às forças nele atuantes. A primeira Lei de Euler relaciona um balanço de momentum em um volume material, enquanto a segunda Lei de Euler relaciona-se a um balanço de quantidade de movimento angular neste volume.

**I. Princípio da Conservação de Momentum Linear:** *A taxa de variação do momentum linear num volume de fluido  $\Omega$  é igual a força total nele*

*aplicada*. Este princípio pode ser expresso matematicamente por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.23)$$

$\Gamma$  representa a superfície do volume  $\Omega$ , e  $\mathbf{F}$  o campo de forças totais externas e mútuas.

**II. Princípio da Conservação de Momentum Angular:** *A taxa de variação do momentum angular num volume de fluido  $\Omega$  é igual ao torque total nele aplicado.* Matematicamente, este princípio é expresso por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.24)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição.

Empregando-se a definição usual para tensor tensão  $\mathbf{T} = T_{ij} e_i \times e_j$ , na base tensorial  $e_i \times e_j$ , na qual o componente do vetor tensão agindo no lado positivo do plano  $x_i x_j = \text{constante}$  (Slattery, 1999), enunciamos o teorema central da mecânica do contínuo, o teorema de Cauchy (Truesdell and Toupin, 1960), cuja principal asserção é a linearidade de  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ .

**Teorema de Cauchy:** Seja  $(\mathbf{t}(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}(\mathbf{x}, t))$  um sistema de forças de um

corpo em movimento. Então, a condição necessária e suficiente para que as leis de conservação de momentum sejam satisfeitas é a existência de um campo tensorial espacial  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  - chamado tensor de Cauchy - tal que:

I. *para todo vetor unitário  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ ;*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t); \quad (2.25)$$

II. *o tensor  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  é simétrico;  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$*

III. *o tensor  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  satisfaz a equação;*

$$\rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \text{div}\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (2.26)$$

Prova: ver, por exemplo, Gurtin (1981).

Utilizando o teorema de transporte de Reynolds, para um fluido incompressível, no balanço de momentum definido pela Eq.(2.23) e o teorema da divergência (Slattery,1999), o integrando resultante pode ser igualado a zero pela aplicação do teorema de localização (Gurtin, 1981), o que resulta na *primeira lei de Cauchy* (Slattery, 1999):

$$\rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \text{div}\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (2.27)$$

A Eq.(2.27) é a equação de movimento proposta por Cauchy. Esta equação descreve o movimento dos fluidos bem como o movimento de qualquer meio contínuo.

Substituindo-se o teorema de Cauchy (Eq. 2.25) no princípio da conservação de momentum angular definido pela Eq.(2.24), tem-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.28)$$

O primeiro termo do lado esquerdo da Eq.(2.28) modificado na forma:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \rho(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (2.29)$$

Transformando a integral de superfície em uma integral de volume (teorema da divergência) no segundo termo do lado direito da Eq.(2.28), reescreve-se a mesma na forma:

$$\int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \nabla \cdot \mathbf{T}^T(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \rho(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (2.30)$$

Através do teorema de localização (Gurtin,1981), iguala-se o integrando a zero,

$$0 = \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \left( \rho(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{T}^T(\mathbf{x}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) d\Omega \quad (2.31)$$

Identifica-se a forma entre parênteses como o balanço diferencial de momentum, ou primeira lei de Cauchy, e conclui-se que para um sistema qualquer, só é verdade se  $T_{jk} = T_{kj}$ , ou seja,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ . Assim, prova-se a simetria do tensor tensão de Cauchy. Esta é a condição necessária e suficiente para a satisfação do balanço de momentum linear na primeira lei de Cauchy, não é necessário definir-se o balanço de momentum angular, o que fica inerente a esta lei (Gurtin, 1981).

### 3. COMPORTAMENTO MATERIAL

Os axiomas postulados na seção anterior para o campo de forças (axiomas de Euler) são comuns à maioria dos corpos na natureza. Entretanto, estas leis são insuficientes para caracterizar totalmente o comportamento dos corpos, por não serem capazes de distinguir os diferentes tipos de comportamentos dos materiais. Experimentos físicos, bem como nossa própria intuição, mostram que dois corpos de mesmo tamanho e forma sujeitos ao mesmo movimento, porém de materiais diferentes, geralmente apresentam distribuição de forças distintas. É necessário, portanto, introduzir hipóteses adicionais - as chamadas **equações constitutivas** - que possam caracterizar os diferentes comportamentos materiais. Estes comportamentos são descritos pela variação do tensor tensão  $\mathbf{T}$  com o movimento e a deformação às quais o corpo está submetido. Uma equação constitutiva relata as tensões internas para as variáveis cinemáticas. Estas relações devem atender a certos postulados básicos (Slattery, 1999):

- i. **O Princípio do determinismo:** A tensão em um corpo é determinada pela história do movimento que o corpo realizou. Ou seja, o que acontecerá ao corpo no futuro não irá influenciar seu campo de tensão no presente.
- ii. **O Princípio da ação local:** O movimento do material exterior a uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto material pode ser ignorado quanto a determinação da tensão neste ponto. Ou seja, o

movimento em uma parte de um corpo não necessariamente afetará o estado de tensão numa outra parte do corpo. A idéia física das forças de contato sugere que as circunstâncias na vizinhança imediata de um ponto material o determinam.

**iii. O Princípio da indiferença do referencial material:** As equações que descrevem o comportamento material de um corpo (equações constitutivas) como, por exemplo, uma equação que expressa o tensor tensão como uma função do deslocamento ou velocidade do corpo, devem necessariamente ser invariantes ao referencial.

É evidente que uma equação constitutiva deve ser invariante a uma mudança de sistema de coordenadas: a escolha deste sistema, na verdade, é uma convenção usada para atribuir componentes para vetores e tensores. Quando uma equação constitutiva é escrita em uma forma tensorial, e é escolhido um referencial para observação, os tensores envolvidos devem permanecer inalterados sob uma mudança do sistema de coordenadas, embora seus componentes possam mudar. Isto fica evidente quando tensores são definidos como operadores lineares, porque suas definições independem da escolha de qualquer sistema de coordenadas.

Uma exigência mais sutil, mas igualmente básica, de invariância de equações constitutivas, é que elas permaneçam inalteradas sob uma mudança de referencial, mesmo para um referencial que dependa do tempo. Esta idéia pode tanto ser considerada como um postulado, ou aceita intuitivamente.

É importante observar que a indiferença de referencial não é requerida por todas as leis da física como, por exemplo, a equação de movimento que não é indiferente ao referencial. Na verdade, a equação de movimento é usualmente definida para um referencial inercial, tornando-se inválida quando é considerado um referencial acelerado.

Note que o princípio da objetividade material não implica numa suposição de isotropia do material; materiais anisotrópicos devem obedecer o princípio da objetividade material. Neste caso, o princípio da objetividade material implica apenas numa suposição de isotropia do espaço, ou seja, uma mudança de observador deve deixar o comportamento do material inalterado.

Apesar de sua aparente simplicidade, as aplicações do princípio da objetividade material podem ser difíceis se considerarmos, o quão recentemente este princípio foi postulado rigorosamente. Isso pode ser, em parte, atribuído ao fato da exigência da indiferença de referencial não se aplicar à equação de movimento a qual é usada em conjunto com uma equação constitutiva na solução do problema estudado.

Na literatura encontra-se mais de uma equação constitutiva que não obedece ao princípio da objetividade material. Em particular, algumas equações da literatura sobre viscoelasticidade linear sofrem desta deficiência. Esta é uma situação a ser evitada, visto que dados experimentais podem vir a ser descartados quando manipulados com base em uma equação constitutiva não-invariante.



Um terceiro requisito de invariância diz respeito à invariância dimensional. Este requisito não impõe qualquer restrição sob a forma da equação constitutiva empregada, apenas implicando que esta deve conter um número mínimo de parâmetros dimensionais. Pode-se mostrar que, no caso mais geral, é necessário conhecer três parâmetros: um com dimensões de tensão, outro de tempo e um terceiro de comprimento.

A exigência de invariância dimensional fornece, através da teoria dimensional, certas regras de escala para uma gama de problemas em engenharia. No entanto, isto é somente verdadeiro quando hipóteses constitutivas lineares são empregadas. Quando equações não-lineares são utilizadas, estas regras de escala só podem ser empregadas quando o mesmo material é utilizado tanto no modelo como no protótipo. De fato, a validade assintótica da teoria linear demonstrada, na maioria das vezes, pela aplicação exitosa de suas regras à diferentes materiais, ao invés da confirmação experimental direta das hipóteses fundamentais.

Finalmente, uma exigência que não é um requisito de invariância deve ser também considerada, a saber que a segunda lei da termodinâmica não pode ser violada. Esta exigência para um fluido Newtoniano é simplesmente satisfeita pela atribuição de um valor positivo para a sua viscosidade. Para hipóteses constitutivas mais complexas, a questão não é tão simples: a segunda lei da termodinâmica impõe restrições tanto para a equação de estado constitutiva quanto para a equação da energia.

A exigência de que uma equação constitutiva permaneça invariante sob uma mudança de referencial impõe algumas restrições sob a mesma. Quando todos os tensores nela empregados são transformados para o novo referencial, a equação constitutiva deve permanecer inalterada. Analisando, inicialmente, o tensor tensão  $\mathbf{T}$  temos, a partir de sua definição, que;

$$d\mathbf{t} = \mathbf{T}d\mathbf{s} \quad (3.1)$$

$$d\mathbf{t}^* = \mathbf{T}^*d\mathbf{s}^* \quad (3.2)$$

com asteriscos usados para indicar vetores e tensores no novo referencial. O vetor  $d\mathbf{s}$  é, obviamente, indiferente por ser um vetor geométrico. Postulando de que o vetor tensão  $d\mathbf{t}$  também é indiferente, temos que;

$$d\mathbf{s}^* = \mathbf{Q}d\mathbf{s} \quad (3.3)$$

$$d\mathbf{t}^* = \mathbf{Q}d\mathbf{t} \quad (3.4)$$

Onde  $\mathbf{Q}$  é um tensor ortogonal. Pela combinação das Eqs.(3.1 - 3.4) obtemos;

$$(\mathbf{Q}\mathbf{T})d\mathbf{s} = (\mathbf{T}^*\mathbf{Q})d\mathbf{s} \quad (3.5)$$

para toda a superfície  $d\mathbf{s}$ . Assim, podemos escrever que,

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \quad (3.6)$$

e a Eq. (3.6) mostra que o tensor tensão é indiferente ao referencial.

Agora, é possível estabelecer o processo lógico pelo qual este conceito foi provado. As Eqs.(3.1) e (3.2) tem a mesma forma e ambas são a *definição* do tensor  $\mathbf{T}$ . Em geral, assumimos que a definição de um tensor é indiferente ao referencial. Assim, podemos escrever

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{a} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{a}^* \quad (3.8)$$

onde ambas as equações definem  $\mathbf{A}$  como o operador linear, ao qual atribui ao vetor  $\mathbf{a}$  o vetor  $\mathbf{b}$ . Se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  foram indiferentes, então  $\mathbf{A}$  também o será.

Consideremos o caso particular do tensor unitário  $\mathbf{1}$ , definido por  $\mathbf{a} = \mathbf{1}\mathbf{a}$ . Para o caso do tensor  $\mathbf{1}$ , temos que

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}^* = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{I}\mathbf{Q}^T \quad (3.9)$$

o que mostra que o tensor unitário, bem como qualquer tensor isotrópico, é indiferente. Quando esse resultado combinado com Eq. (3.6), verificamos que o tensor de tensão-extra também é indiferente, visto que a soma de dois tensores indiferentes também será um tensor indiferente,

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{Q}^T \quad (3.10)$$

Analisemos, agora, tensores cinemáticos como o tensor gradiente de velocidade  $\nabla(\mathbf{u})$  e o tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ . Da definição do tensor  $\nabla(\mathbf{u})$ , temos que

$$\nabla(\mathbf{u}) = \nabla(\mathbf{u})d\mathbf{X} \quad (3.11)$$

$$\nabla(\mathbf{u})^* = \nabla(\mathbf{u})^*d\mathbf{X}^* \quad (3.12)$$

O vetor  $d\mathbf{X}$  é um vetor geométrico e, portanto, indiferente.

$$d\mathbf{X}^* = \mathbf{Q}d\mathbf{X} \quad (3.13)$$

Da regra de transformação de uma mudança de referencial,

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{Y}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{Z}) \quad (3.14)$$

na qual  $\mathbf{X}(t)$  é a posição de uma partícula e, portanto,  $\mathbf{X}^*(t)$  é a posição da mesma partícula em um novo referencial,  $\mathbf{Y}(t)$  e  $\mathbf{Z}$  são pontos no antigo referencial e  $\mathbf{Q}(t)$  é um tensor ortogonal. Diferenciando a Eq.(3.14) com respeito ao tempo,

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\mathbf{u} + \dot{\mathbf{Y}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{X} - \mathbf{Z}) \quad (3.15)$$

obtêm-se a equação a qual fornece que o vetor velocidade não é um vetor indiferente ao referencial.

Aplicando à Eq.(3.15), a regra da transformação para uma velocidade infinitesimal  $d\mathbf{u}$  dada por

$$d\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}d\mathbf{u} + \dot{\mathbf{Q}}d\mathbf{X} \quad (3.16)$$

onde foi feito uso do fato que  $\mathbf{Q}$  e  $\dot{\mathbf{Y}}$  não são campos, mas sim um tensor e um vetor fixo, respectivamente (a mudança de referencial depende do tempo; é um movimento de corpo rígido do referencial). A translação do novo referencial  $\mathbf{Y}(t)$ , não dá nenhuma contribuição para a expressão de  $d\mathbf{u}^*$ , embora contribua para  $\mathbf{u}^*$ . Na verdade, as diferenças de velocidade (o conceito de velocidade relativa) são indiferentes a uma translação rígida sobreposta.

Combinando as Eqs.(3.11 - 3.16), temos que:

$$\nabla\mathbf{u}^*\mathbf{Q}d\mathbf{X} = \mathbf{Q}\nabla\mathbf{u}d\mathbf{X} + \dot{\mathbf{Q}}d\mathbf{X} \quad (3.17)$$

Logo, visto que podemos escrever

$$\nabla\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\nabla\mathbf{u}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \quad (3.18)$$

concluimos que o tensor gradiente de velocidades não é indiferente ao referencial.

A transformação do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$  obtida a partir de sua definição;

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^* &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^{T*}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \nabla \mathbf{u} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \nabla \mathbf{u}^T \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{Q}}^T) \\ &= \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T\end{aligned}\quad (3.19)$$

sendo a derivada temporal do tensor unitário, o último termo da equação, nula, mostrando que o tensor  $\mathbf{D}$  é indiferente ao referencial.

A grande maioria das equações constitutivas são construídas utilizando os tensores apresentados acima, sendo, por conseguinte, indiferentes ao referencial.

### 3.1 Fluidos Puramente Viscosos

Os princípios acima descritos são empregados na construção de equações constitutivas particulares para o tensor tensão, conforme descrito a seguir.

Os movimentos que causam tensões são os componentes do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ . O vetor velocidade e o tensor vorticidade não podem ser utilizados para descrever o comportamento do tensor tensão, pois não satisfazem o princípio de indiferença ao referencial (Slattery, 1999). O modo como  $\mathbf{D}$  afeta  $\mathbf{T}$  é dado pela chamada equação constitutiva do material.

Observações experimentais dos fluidos incompressíveis têm mostrado que modelos baseados na equação constitutiva obtida por Reiner (1945) e Prager (1945) apresentam alguma utilidade na predição do comportamento dos fluidos

reais.

$$\mathbf{T} = k_0\mathbf{I} + k_1\mathbf{D} + k_2\mathbf{D}^2 \quad (3.20)$$

onde os coeficientes  $k_i$  são funções escalares do primeiro ( $I_{\mathbf{D}}$ ), segundo ( $II_{\mathbf{D}}$ ) e terceiro ( $III_{\mathbf{D}}$ ) invariantes do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ , dados por:

$$I_{\mathbf{D}} = tr(\mathbf{D}) = div\mathbf{u} \quad (3.21)$$

$$II_{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}[I_{\mathbf{D}}^2 - tr(\mathbf{D}^2)] \quad (3.22)$$

$$III_{\mathbf{D}} = det(\mathbf{D}) \quad (3.23)$$

Modelos empíricos baseados na Eq.(3.20) predizem o real comportamento de uma classe de escoamentos conhecidos por escoamentos viscométricos (Bird et al., 1987). Nestes escoamentos a partícula material está sujeita a uma deformação com história constante, sendo que os efeitos de memória não são considerados. Além disso, os escoamentos viscométricos são caracterizados pela ausência de tensões normais, são escoamentos puramente cisalhantes. Como exemplos de escoamentos viscométricos podem ser citados o escoamento em duto fechado, o escoamento de Couette e o escoamento permanente em viscosímetro de cone e placa.

### 3.1.1 Fluido Newtoniano

O modelo de **fluido Newtoniano** (Bird et al., 1987), obtido por uma forma linear da relação entre o tensor tensão e o tensor taxa de deformação,

$$\mathbf{T} = (-p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.24)$$

onde  $p$  é a pressão termodinâmica,  $\mu$  é chamada viscosidade do fluido, e o coeficiente  $(2/3)\mu \operatorname{div}\mathbf{u}$  é um resultado da teoria dos gases monoatômicos rarefeitos (Bird et al., 1987). Para fluidos incompressíveis, a pressão termodinâmica não é definida e este termo é substituído pela pressão média  $p$ , igual a  $-(1/3)\operatorname{tr}\mathbf{T}$ . A equação constitutiva na forma incompressível é dada por:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.25)$$

### 3.1.2 Fluido Newtoniano Generalizado

Na construção de outros modelos, são tomadas algumas considerações. Para um escoamento isocórico (incompressível), tem-se  $I_{\mathbf{D}} = 0$ . Para escoamentos com cisalhamento, o terceiro invariante  $III_{\mathbf{D}}$  é igual a zero, como demonstrado por Bird et al. (1987). Segundo Reddy (2008), não há nenhuma evidência teórica ou experimental de que a viscosidade aparente tenha alguma relação com  $III_{\mathbf{D}}$ . Seguindo estas considerações, e definindo  $\dot{\gamma}$  como a



magnitude do tensor taxa de deformação (Slattery, 1999),

$$\dot{\gamma} = (2II_{\mathbf{D}})^{1/2} = (2tr(\mathbf{D}^2))^{1/2} \quad (3.26)$$

o conceito de **fluido newtoniano generalizado** foi criado para explicar o comportamento não Newtoniano típico de alguns materiais, semelhante ao comportamento linear Newtoniano, no qual a viscosidade também depende da taxa de deformação. Este conceito exclui comportamentos nos quais há influência de tensões normais ou efeitos elásticos dependentes do tempo (Bird et al., 1987). Assim, cria-se um termo de viscosidade não Newtoniana, dependente da taxa de deformação. Segundo Bird et al. (1987), em problemas de engenharia química industrial, este modelo encontra diversas aplicações, pois mesmo formulado de forma simples, é capaz de representar importantes variações na viscosidade durante um processo de escoamento.

Para um fluido newtoniano generalizado (Bird et al., 1987), a equação constitutiva de  $\mathbf{T}$  é dada por:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D} \quad (3.27)$$

onde a função  $\eta(\dot{\gamma})$ , geralmente, é dada por modelos empíricos. Aqui é conveniente que se defina o tensor das tensões desviatórias  $\boldsymbol{\tau}$ , segundo Panton (1996):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} + p\mathbf{I} = 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D} \quad (3.28)$$

A viscosidade aparente para um fluido newtoniano generalizado, em função da magnitude do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ , é dada por:

$$\eta_{ap} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (3.29)$$

sendo  $\tau = (1/2tr(\boldsymbol{\tau}^2))^{1/2}$  conhecida como a magnitude do tensor das tensões desviatórias  $\boldsymbol{\tau}$ .

### 3.1.3 Fluido Power-law

Um dos modelos mais comuns de fluido newtoniano generalizado é o **modelo Ostwald-de-Waele**, ou **power-law**. Neste modelo, a viscosidade aparente é dada por:

$$\eta(\dot{\gamma}) = m\dot{\gamma}^{n-1} \quad (3.30)$$

onde os parâmetros  $m$  (índice de consistência) e  $n$  (índice power-law) são determinados empiricamente. Quando  $n = 1$  e  $m = \mu$ , este modelo reduz-se ao modelo Newtoniano para fluido incompressível. Se  $n < 1$ , o fluido é dito **pseudoplástico**, ou *shear-thinning*, e se  $n > 1$  o fluido é chamado **dilatante** ou *shear-thickening*. Para muito dos materiais importantes em problemas de engenharia, como: alimentos, tintas e polímeros, tem-se o índice  $n < 1$ , o que acarreta em valores ilimitados para a viscosidade em pontos onde a taxa de cisalhamento é nula, ou seja, quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow \infty$ . O mesmo acontece no caso de  $n > 1$  quando  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$  (Slattery, 1999).

### 3.1.4 Fluido de Carreau-Yasuda

Outros modelos são capazes de corrigir esta deficiência através da predição de viscosidades limites  $\eta_0$  e  $\eta_\infty$ . O **modelo Carreau-Yasuda** (Bird et al, 1987) é um modelo com cinco parâmetros que tem flexibilidade suficiente para ajustar uma grande variedade de curvas experimentais, e tem se mostrado útil para a solução numérica de escoamentos onde se necessita de uma expressão analítica para a curva de viscosidade não-newtoniana. O modelo Carreau-Yasuda é dado por:

$$\frac{\eta(\dot{\gamma}) - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda\dot{\gamma})^a]^{\frac{n-1}{a}} \quad (3.31)$$

onde  $\eta_0$  é a viscosidade newtoniana quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  e  $\eta_\infty$  a viscosidade newtoniana quando  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ ,  $\lambda$  é uma constante de tempo,  $n$  é o expoente power-law e  $a$  é um parâmetro adimensional que descreve a região entre a zona de taxa de cisalhamento newtoniana zero e a zona power-law. Na maioria dos casos de fluidos comuns (fluidos alimentícios, soluções de polímeros) são obtidas boas correlações para  $a = 2$  e  $\eta_\infty = 0$ . Nestes casos, somente precisam ser determinados experimentalmente os parâmetros  $\eta_0$ ,  $\lambda$  e  $n$ . A Eq. (3.31) com  $a = 2$  representa o dito modelo de Carreau, desenvolvido por P. J. Carreau (1968), pois a possibilidade de variação deste parâmetro foi somente em 1981 acrescentada por Yasuda (1981).

Adimensionalizando o tensor de tensões deviatórias  $\boldsymbol{\tau}$ , que neste modelo é dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = 2(\eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}})\mathbf{D} \quad (3.32)$$

as variáveis e constantes são adimensionalizadas na forma:

$$\eta^* = \frac{\eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} ; \dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}L}{\mathbf{u}_\infty} ; \boldsymbol{\tau}^* = \frac{\boldsymbol{\tau}L}{(\eta_0 - \eta_\infty)\mathbf{u}_\infty} ; \mathbf{D}^* = \frac{\mathbf{D}L}{\mathbf{u}_\infty} \quad (3.33)$$

Assim, o modelo de Carreau adimensional fica:

$$\boldsymbol{\tau}^* = 2(\eta^*[1 + (Wi\dot{\gamma}^*)^2]^{\frac{n-1}{2}})\mathbf{D}^* \quad (3.34)$$

onde  $Wi$  é o número adimensional de Weissenberg (Weissenberg, 1947), dado por:

$$Wi = \lambda \frac{\mathbf{u}_\infty}{L} \quad (3.35)$$

Pode-se, então, caracterizar um fluido cujo comportamento segue a equação de Carreau por três parâmetros adimensionais,  $n$  e  $Wi$ , enquanto  $(\eta_0 - \eta_\infty)$  é utilizado na caracterização do número de Reynolds do escoamento.

### 3.1.5 Fluidos Viscoplasticos

Um dos modelos mais usados para ajustar dados experimentais de materiais viscoplasticos é a equação de Herschel-Bulkley (Bird et al., 1987). Este modelo utiliza três parâmetros reológicos a saber: a tensão limite do material  $\tau_0$ , o seu índice de consistência  $K$  e o seu índice de power-law  $n$ . A expressão

de sua tensão de cisalhamento  $\tau$  é dada por

$$\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n \quad \text{se } \tau \geq \tau_0 \quad (3.36)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{se } \tau < \tau_0 \quad (3.37)$$

Para  $n = 1$ , o modelo reduz-se ao fluido de Bingham

$$\tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} \quad \text{se } \tau \geq \tau_0 \quad (3.38)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{se } \tau < \tau_0 \quad (3.39)$$

onde  $\mu_p$  é a chamada viscosidade plástica. Ambas as equações predizem uma viscosidade infinita no limite quando taxa de deformação tende a zero. Para índice de power-law menor que um,  $n < 1$ , o modelo de Herschel-Bulkley prediz um material viscoplástico para o qual a viscosidade tem um comportamento pseudoplástico (*shear-thinning*), ou seja, uma dependência não linear da viscosidade com a taxa de deformação do material, na qual a viscosidade diminui com o aumento da taxa de deformação. Quando o índice power-law maior que um,  $n > 1$ , o material escoar como um fluido dilatante (*shear-thickening*), para o qual a viscosidade aumenta com o aumento da taxa de deformação. A função viscosidade aparente de Herschel-Bulkley é

obtida a partir da Eq.(3.36),

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1} \quad \text{se } \tau \geq \tau_0 \quad (3.40)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{se } \tau < \tau_0 \quad (3.41)$$

Pelo fato de que o material precisa de uma tensão mínima para começar a escoar, o domínio do escoamento é caracterizado por duas regiões distintas: as regiões escoadas (*yielded regions*), nas quais a tensão é maior que a tensão limite de escoamento,  $\tau \geq \tau_0$ , e as regiões não-escoadas (*unyielded regions*), nas quais a tensão é menor que a tensão de escoamento,  $\tau < \tau_0$  – com o material se comportando como um corpo rígido, ( $\dot{\gamma} = 0$ ). Entre essas duas regiões existe uma superfície de transição onde  $\tau = \tau_0$ , a chamada superfície de escoamento (*yield surface*).

### 3.1.6 A regularização de Papanastasiou

As equações constitutivas do modelo de Herschel-Bulkley (Eqs.(3.36)-(3.41)) descrevem com bom comportamento os fluidos viscoplásticos. Entretanto, do ponto-de-vista computacional, o modelo é de difícil implementação por ser descrito a duas equações, tanto para tensão como para viscosidade. No mais, sua equação de tensão não é contínua em  $\dot{\gamma}$ . Para superar estas dificuldades, Papanastasiou (1987) propôs uma modificação na eq.(3.36), introduzindo um parâmetro regularizador  $m$ , que controla o crescimento ex-

ponencial da tensão quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ .

$$\tau = \tau_0[1 - \exp(-m|\dot{\gamma}|)] + K\dot{\gamma}^n \quad (3.42)$$

onde o parâmetro  $m$  tem dimensão de tempo. Computacionalmente, o modelo regularizado de Papanastasiou é de simples implementação, visto se tratar de uma equação contínua para tensão. No entanto, ele não pode prever superfícies de escoamento bem definidas ( $\tau = \tau_0$ ), uma vez que há escoamento nas regiões não-escoadas. Nelas, o material deixa de ser um corpo rígido, para se comportar como um fluido Newtoniano escoando a alta viscosidade. A partir da regularização da equação constitutiva da tensão, pode-se então, definir a equação da viscosidade regularizada:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}}[1 - \exp(-m|\dot{\gamma}|)] + K\dot{\gamma}^{n-1} \quad (3.43)$$

Neste modelo observa-se um comportamento inadequado quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ . Pois a regularização de Papanastasiou, neste caso, tenderá ao modelo power-law, caindo nos mesmos problemas deste modelo, ou seja, as suas assíntotas; quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  a sua viscosidade  $\eta \rightarrow \infty$  e quando  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0$ .

### 3.1.7 Fluido Viscoplastico SMD

A partir das dificuldades encontradas pelos modelos viscoplasticos clássicos acima comentadas, de Souza Mendes e Dutra (2004) propuseram uma nova função viscosidade viscoplastica. Seu comportamento qualitativamente igual

às demais funções de viscosidade viscoplásticas, apresentando um platô de viscosidade alta, porém finita para baixas taxas de cisalhamento, seguido de uma queda abrupta da viscosidade em  $\tau = \tau_0$ , seguida de uma região *power-law*. A função SMD, escrita em sua forma para tensão cisalhante, é dada por:

$$\tau = [1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)](\tau_0 + K \dot{\gamma}^n) \quad (3.44)$$

, sendo graficamente representada na Fig.(3.1).

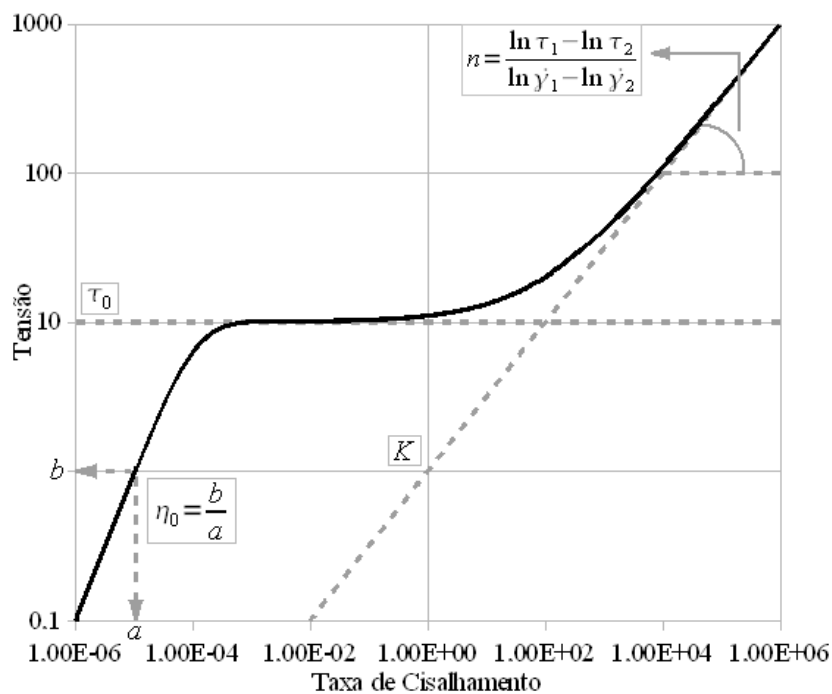


Figura 3.1: Curva de escoamento do modelo SMD.



A viscosidade para baixas taxas de cisalhamento,  $\eta_0$ , é a relação entre a tensão e a taxa de cisalhamento, tomadas na região onde  $\tau$  é menor que  $\tau_0$ . A tensão limite de escoamento é representada na Fig.(3.1) pelo o platô que ocorre em  $\tau_0$ . O índice  $n$  é a inclinação da região *power-law* no gráfico log-log  $\tau \times \dot{\gamma}$ . O intercepto da região *power-law* extrapolada, com a linha vertical  $\dot{\gamma} = 1s^{-1}$ , ocorre em  $\tau = K$ .

Uma importante característica deste modelo é que a função viscosidade é tal que

$$\eta(0) = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{(1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0))}{\dot{\gamma}} (\tau_0 + K \dot{\gamma}^n)$$

$$\eta(0) = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{((\eta_0 / \tau_0) \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0))}{1} (\tau_0 + K \dot{\gamma}^n) = \eta_0 \quad (3.45)$$

em contraste com a função modificada de Papanastasiou, a qual prevê uma função viscosidade infinita quando a taxa de cisalhamento tende a zero. A Fig.(3.2) mostra as curvas de escoamento SMD para diferentes valores da relação  $\eta_0/\tau_0$ , responsável pela regularização do modelo e a Fig.(3.3) apresenta a função viscosidade SMD. De modo semelhante à função de Papanastasiou-modificada, quando a relação  $\eta_0/\tau_0 \rightarrow \infty$ , o modelo de Herschel-Bukley clássico é recuperado. De Souza Mendes et al. (2007) introduzem uma pro-

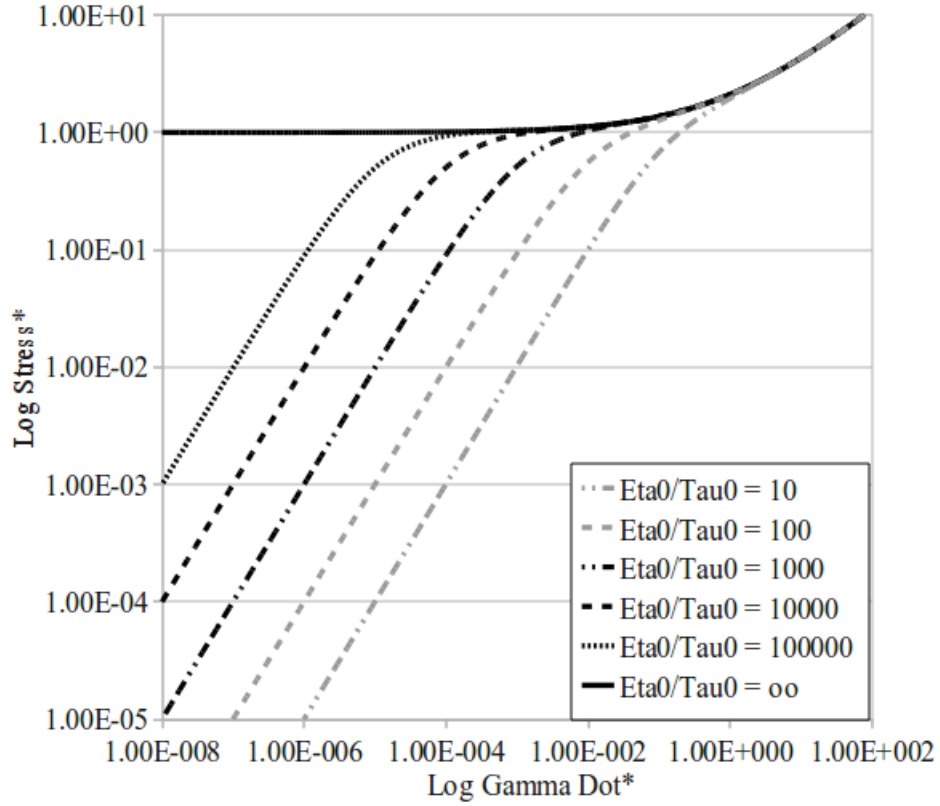


Figura 3.2: Curvas de escoamento SMD para diferentes relações  $\eta_0/\tau_0$ .

priedade reológica adimensional baseada na observação do comportamento da função viscosidade SMD. Quando  $\tau = \tau_0$ , há ocorrência de um salto abrupto de diversas ordens de grandeza na taxa de cisalhamento entre dois valores definidos como

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_0}{\eta_0} \quad (3.46)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \left( \frac{\tau_0}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.47)$$

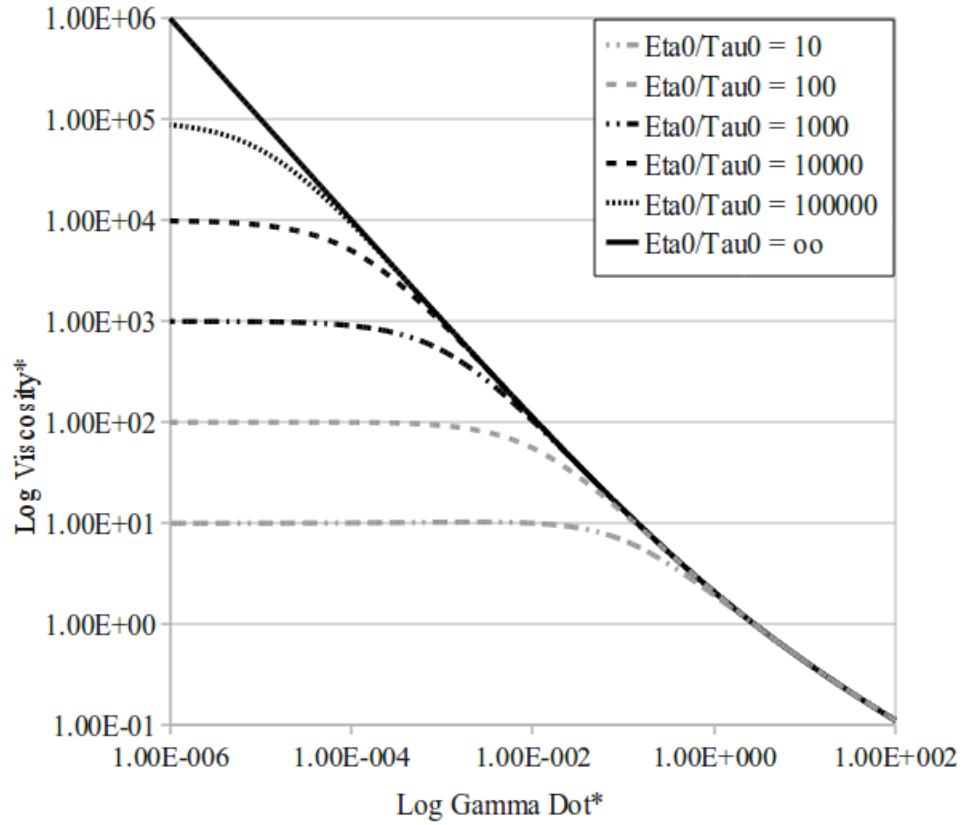


Figura 3.3: Função viscosidade SMD para diferentes relações  $\eta_0/\tau_0$ .

respectivamente, a taxa de cisalhamento limite de escoamento e a taxa de cisalhamento no início da região power-law. Assim, o número de salto adimensional  $J$  fornece uma medida relativa do salto na taxa de cisalhamento que ocorre quando  $\tau = \tau_0$ , dado como:

$$J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \frac{\eta_0 \tau_0^{(n-1)/n}}{K^{1/n}} - 1 \quad (3.48)$$

Para  $n = 1$ , o parâmetro  $J$  torna-se independente de  $\tau_0$ , ficando reduzido a  $J = \eta_0/K - 1$ ; ou seja, a relação entre  $\eta_0$  e o índice de consistência  $K$  dada apenas por  $J + 1$ .

## 3.2 Fluidos Viscoelásticos

### 3.2.1 Equação Constitutiva de Maxwell Convectado Superior

O modelo constitutivo de Maxwell Convectado Superior é o modelo diferencial mais simples para modelar o comportamento de fluidos viscoelásticos, sendo amplamente usado por sua facilidade de implementação em algoritmos numéricos. O modelo consiste na combinação em série de elementos que representam um comportamento reológico ideal: uma deformação elástica Hookeana e um escoamento viscoso Newtoniano, (Conforme Fig.3.4).

O elemento Hookeano pode ser representado fisicamente por uma mola e matematicamente pela seguinte expressão:

$$\tau_H = G\gamma_H \quad (3.49)$$

onde  $\tau_H$  é a magnitude da tensão Hookiana,  $G$  é o módulo de elasticidade e  $\gamma_H$  é a deformação elástica. O elemento Newtoniano, por sua vez, é representado fisicamente por um amortecedor e matematicamente por,

$$\tau_N = \eta\dot{\gamma}_N \quad (3.50)$$

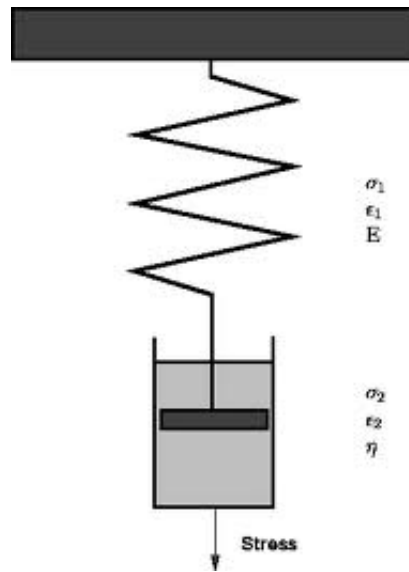


Figura 3.4: Representação esquemática do modelo UCM.

onde  $\eta$  é a viscosidade do fluido constante e  $\dot{\gamma}_N$  é a taxa de deformação viscosa.

Para este modelo, a tensão é igual para ambos os elementos, e a deformação total é a soma das deformações de ambos elementos, conforme as equações (3.51) e (3.52).

$$\tau = \tau_H = \tau_N \quad (3.51)$$

$$\gamma = \gamma_H + \gamma_N \quad (3.52)$$

Diferenciando a Eq.(3.52) em respeito ao tempo, obtem-se a Equação (3.53)

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}_H}{G} + \frac{\tau_N}{\eta} \quad (3.53)$$

Explorando o fato que a tensão é igual em ambos os elementos, obtem-se a Equação (3.54),

$$\tau + \frac{\eta}{G}\dot{\tau} = \eta\dot{\gamma} \quad (3.54)$$

onde a razão entre a viscosidade e o módulo de elasticidade  $\frac{\eta}{G}$  tem dimensões de tempo e denominada como tempo de relaxação do fluido,  $\theta_1$ . De modo a tornar a Eq.(3.54) indiferente ao referencial, a derivada da tensão é dada pela derivada de Jaumann superior

$$\check{\mathbf{J}} = \partial_t \mathbf{J} + (\nabla \mathbf{J})\mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})\mathbf{J} - \mathbf{J}(\nabla \mathbf{u})^T \quad (3.55)$$

ou inferior,

$$\hat{\mathbf{J}} = \partial_t \mathbf{J} + (\nabla \mathbf{J})\mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{J} + \mathbf{J}(\nabla \mathbf{u})^T \quad (3.56)$$

onde  $\mathbf{J}$  é um tensor de segunda ordem.

Portanto, o modelo de Maxwell convectado superior para regime permanente é expresso pela equação (3.57);

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \check{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (3.57)$$

com a derivada  $\check{\boldsymbol{\tau}}$  dada por

$$\check{\boldsymbol{\tau}} = \partial_t \boldsymbol{\tau} + (\nabla \boldsymbol{\tau})\mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u})^T \quad (3.58)$$

Segundo a Eq.(3.54), a tensão  $\boldsymbol{\tau}$  depende da taxa de deformação  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  e uma variação no tempo. Por isso o modelo de Maxwell ilustra o comportamento reológico de um fluido viscoelástico. Para uma história de tensões constantes, ou seja quando  $\check{\boldsymbol{\tau}} = 0$ , a Eq.(3.57) reduz-se ao modelo Newtoniano,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (3.59)$$

### 3.2.2 Equação Constitutiva de Oldroyd-B

O modelo convectado superior de Maxwell, se combinado em paralelo com o modelo Newtoniano, origina o chamado *modelo de Oldroyd-B*. O mesmo abrange os casos em que um fluido viscoelástico obedecendo a relação de Maxwell é misturado com um fluido regulado pela lei de Newton, correspondendo à situação em que um polímero viscoelástico com viscosidade  $\eta_e$  é diluído em um solvente Newtoniano viscoso com viscosidade  $\eta_s$ . A equação constitutiva é definida como:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1\check{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2\check{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \quad (3.60)$$

onde  $\theta_2$  é o tempo de retardamento do fluido, maior ou igual a zero e menor que o tempo de relaxação  $\theta_1$ , e  $\check{\mathbf{D}}$  a derivada convectada superior do tensor taxa de deformação,

$$\check{\mathbf{D}} = \partial_t\mathbf{D} + (\nabla\mathbf{D})\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})\mathbf{D} - \mathbf{D}(\nabla\mathbf{u})^T \quad (3.61)$$

A analogia mecânica para o modelo de Oldroyd-B é equivalente a um sistema com um amortecedor e uma mola ligados em série, e este conjunto, por sua vez, conectado em paralelo com uma mola, como mostrado na Fig.(3.5).

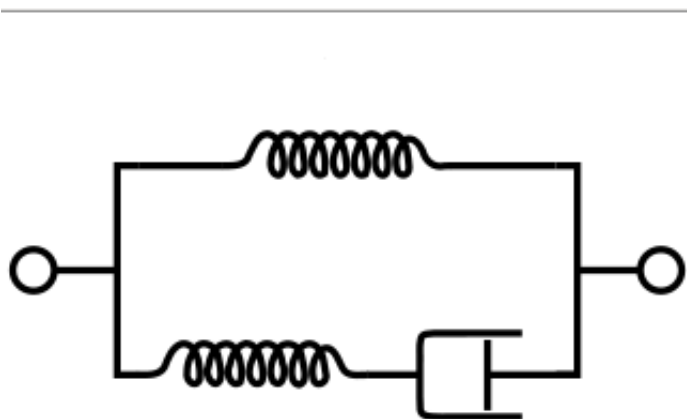


Figura 3.5: Representação do modelo de Oldroyd-B.

A viscosidade  $\eta$  é dada pela soma da viscosidade do solvente Newtoniano  $\eta_s$  com a viscosidade do polímero elástico  $\eta_e$ ;

$$\eta = \eta_s + \eta_e \quad (3.62)$$

Além disso, as relações para  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são dadas como:

$$\theta_1 = \frac{\eta_e}{G} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_e} \theta_1 \quad (3.63)$$



O tensor extra de tensão total  $\boldsymbol{\tau}$  pode ser expresso como a soma da contribuição do solvente Newtoniano,  $\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s\mathbf{D}(\mathbf{u})$ , e da parcela viscoelástica,  $\boldsymbol{\tau}_e$ , ou seja,  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_e$ , com  $\boldsymbol{\tau}_e$  satisfazendo a equação constitutiva de Maxwell convectado superior, segundo a eq.(3.57).

## 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

### 4.1 Definições Preliminares

Os problemas estudados neste trabalho são definidos em um domínio limitado em  $\Omega \subset \mathcal{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , com fronteira  $\Gamma$  poligonal ou polihedral,

$$\begin{cases} \Gamma = \bar{\Gamma}_g \cup \bar{\Gamma}_h, \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \Gamma_g \neq \emptyset \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\Gamma_g$  é a parte da fronteira sobre a qual são impostas as condições de contorno essenciais (Dirichlet) e  $\Gamma_h$  fica sujeita às condições naturais (Neumann).

Realizamos uma partição  $\mathcal{C}^h$  de  $\bar{\Omega}$  em elementos finitos - consistindo de triângulos (tetraedros no  $\mathcal{R}^3$ ), quadrângulos (hexahedros no  $\mathcal{R}^3$ ) ou uma combinação destes - da maneira usual,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}^h} \bar{\Omega}_K, \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2} = \emptyset, \forall K_1, K_2 \in \mathcal{C}^h$$

Para os espaços funcionais de velocidade, pressão e suas respectivas normas, empregaremos a notação usual:

$\mathcal{C}^0(\Omega)$  ... espaço das funções contínuas em  $\Omega$ ,

$L^2(\Omega)$  ... espaço das funções de quadrado integrável em  $\Omega$ ,

$L_0^2(\Omega)$  ... espaço das funções de  $L^2(\Omega)$  com média nula em  $\Omega$ , i.e.,  $\int_{\Omega} q = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega)$ .

$H^1(\emptyset) \cdots$  espaço de Sobolev formado pelas funções de  $L^2(\Omega)$  com 1<sup>as.</sup> derivadas em  $L^2(\Omega)$ .

$H_0^1(\Omega) \cdots$  espaço das funções de  $H^1(\Omega)$  que se anulam em  $\Gamma$ .

Para definição dos diferentes espaços de elementos finitos utilizados neste trabalho, é conveniente introduzirmos a seguinte notação:

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K) & \text{se } K \text{ um triângulo ou tetraedro.} \\ Q_m(K) & \text{se } K \text{ um quadrângulo ou hexaedro.} \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $P_m$  e  $Q_m$  são espaços polinomiais de grau  $m$ .

## 4.2 O Modelo Mecânico

Supondo-se que o colapso da microestrutura do material é instantâneo, o modelo mecânico para o problema em análise é composto pelas usuais equações governantes de conservação de massa e momentum para fluidos incompressíveis, juntamente com a equação constitutiva para fluidos elasto-viscoplásticos recentemente proposta por Nassar et al. (2011). Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  um domínio aberto delimitado por uma fronteira regular poligonal  $\Gamma$ . De acordo com Nassar *et al.* (2011), o escoamento permanente e sem inércia de um material elasto-viscoplástico pode ser modelado pelas seguintes equações

governantes,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.3)$$

$$\nabla \mathcal{P} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade,  $\mathcal{P} \equiv p + \rho\phi$  é a pressão modificada e  $\mathbf{g} = -\nabla\phi$  é a força gravitacional por unidade de massa. O tensor de tensão extra  $\boldsymbol{\tau}$  é suposto ser descrito por uma equação Oldroyd-B modificada,

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1(\dot{\gamma})\check{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta(\dot{\gamma}) [\mathbf{D} + \theta_2(\dot{\gamma})\check{\mathbf{D}}] \quad \text{em } \Omega \quad (4.5)$$

na qual  $\mathbf{D}$  é o tensor taxa de deformação,  $\dot{\gamma} = \sqrt{2tr\mathbf{D}^2}$  sua magnitude,  $\check{\boldsymbol{\tau}}$  e  $\check{\mathbf{D}}$  são as derivadas convectadas superior dos tensores  $\boldsymbol{\tau}$  e  $\mathbf{D}$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \check{\boldsymbol{\tau}} &= (\nabla\boldsymbol{\tau})\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}(\nabla\mathbf{u})^T \\ \check{\mathbf{D}} &= (\nabla\mathbf{D})\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})\mathbf{D} - \mathbf{D}(\nabla\mathbf{u})^T \end{aligned} \quad (4.6)$$

A função de viscosidade viscoplástica empregada neste modelo é uma versão modificada da função proposta por de Souza Mendes e Dutra (2007);

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\eta_0}{\tau_0}\dot{\gamma}\right) \right] \left( \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1} \right) + \eta_\infty \quad (4.7)$$

onde  $\tau_0$  é a tensão de escoamento do material,  $\eta_0$  é o platô inferior de viscosidade cisalhante, o qual ocorre antes do colapso da microestrutura do

material ( $\tau < \tau_0$ ),  $K$  é o índice de consistência,  $n$  é o índice power-law, e  $\eta_\infty$  é o platô superior de viscosidade cisalhante, o qual se dá após o colapso da microestrutura, ( $\tau \geq \tau_0$ ).

Os tempos de relaxação e retardo do fluido são fornecidos, respectivamente, pelas seguintes funções:

$$\begin{aligned}\theta_1(\dot{\gamma}) &= (\theta_{0_1} - \theta_{\infty_1})\exp\left(-\frac{\eta_0}{\tau_0}\dot{\gamma}\right) + \theta_{\infty_1} \\ \theta_2(\dot{\gamma}) &= (\theta_{0_2} - \theta_{\infty_2})\exp\left(-\frac{\eta_0}{\tau_0}\dot{\gamma}\right) + \theta_{\infty_2}\end{aligned}\quad (4.8)$$

onde  $\theta_{0_1}$  e  $\theta_{\infty_1}$  são os tempos de relaxação abaixo e acima do limite de escoamento  $\tau_0$ , respectivamente, e, analogamente,  $\theta_{0_2}$  e  $\theta_{\infty_2}$  são os tempos de retardo abaixo e acima de  $\tau_0$ , respectivamente.

Com a finalidade de descrever comportamentos elásticos recentemente observados em alguns materiais viscoplásticos, nesta Tese os efeitos elásticos só serão considerados abaixo do limite de escoamento (nas regiões não-escoadas), de modo que;

$$\theta_{\infty_1} = 0. \quad (4.9)$$

$$\theta_{\infty_2} = 0. \quad (4.10)$$

De acordo com as Eqs. (4.7) - (4.8), no limite quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  (regiões não

escoadas),

$$\eta(\dot{\gamma}) \rightarrow \eta_0 \quad (4.11)$$

$$\theta_1(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{0_1} \quad (4.12)$$

$$\theta_2(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{0_2} \quad (4.13)$$

ou seja, o modelo tende para o modelo de Oldroyd-B clássico.

Por outro lado, quando  $\dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$  (regiões escoadas),

$$\theta_1(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{\infty_1} \quad (4.14)$$

$$\theta_2(\dot{\gamma}) \rightarrow \theta_{\infty_2}, \quad (4.15)$$

e obtemos uma equação do tipo Oldroyd-B, com a função de viscosidade viscoplástica variável. Além disso, na situação particular analisada no presente trabalho,

$$\theta_{\infty_1} = 0 \quad (4.16)$$

$$\theta_{\infty_2} = 0 \quad (4.17)$$

o modelo de fluido Newtoniano generalizado é recuperado, com o fluido comportando-se como um fluido viscoplástico inelástico.

### 4.3 O Método de Solução

Com o intuito de aproximar o modelo mecânico acima descrito, uma formulação multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados, em termos de pressão, velocidade e tensão extra, será introduzida nesta seção. Esta formulação pode ser vista como uma extensão direta da formulação introduzida por Behr et al. (1993), no contexto de fluidos de viscosidade constante, para escoamentos de materiais elasto-viscoplásticos.

Proposto por Hughes et al. (1986) para o escoamento de Stokes, e depois estendido por Franca e Frey (1992) para as equações de Navier-Stokes, as formulações têm sido aplicadas com sucesso a uma grande gama de aplicações de engenharia. Superando as deficiências inerentes às aproximações de Galerkin de escoamentos de interesse, principalmente, a necessidade de satisfazer as condições de compatibilidade entre os subespaços de elementos finitos de suas variáveis primais, esta formulação é capaz de gerar aproximações estáveis e fisicamente realistas, mesmo empregando uma combinação de igual-ordem de interpolações de elementos finitos Lagrangeanas (ver detalhes em Franca e Frey (1992) e Behr et al. (1993) e as referências neles contidas).

Todos os cálculos apresentados na seção numérica a seguir, exploram as boas características de estabilidade acima descritas, empregando uma combinação de igual-ordem de elementos finitos bi-lineares ( $Q_1$ ).

A geometria considerada neste artigo está ilustrada na fig.(4.1), ou seja, cavidade quadrática de comprimento  $L$ , com a parede superior submetida a uma velocidade horizontal  $u_c$  não-nula da esquerda para a direita, e condições

de não-deslizamento e impermeabilidade;

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

impostas sobre as paredes restantes da cavidade.

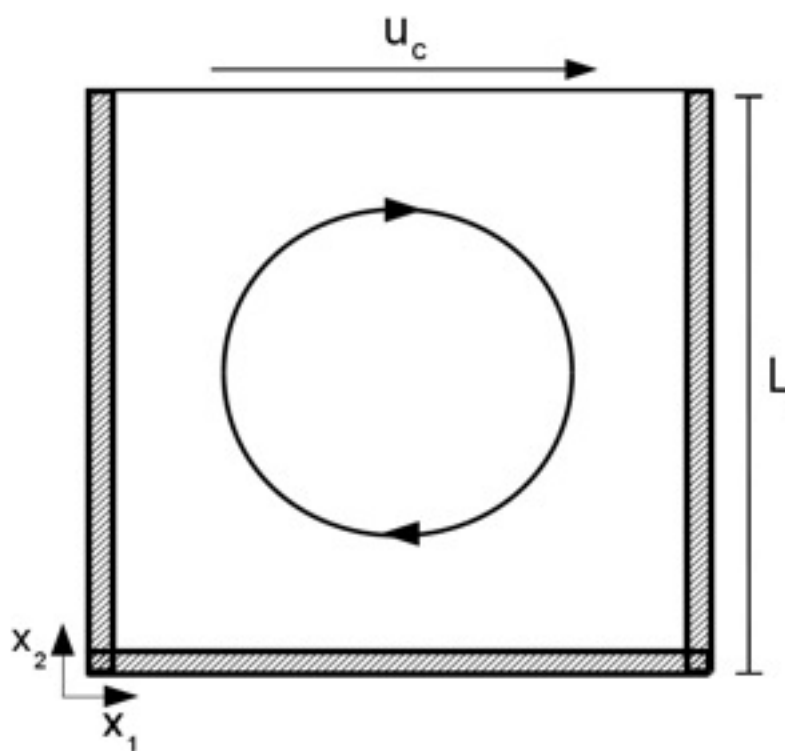


Figura 4.1: A geometria e condições de contorno.

Uma verificação de qualidade de malha, com base na magnitude da tensão extra ao longo do eixo  $x_1^* = 0,5$ ; foi realizada e relatada na Fig.(4.2). Apesar da semelhança de todos os perfis apresentados, a malha mais refinada testada



com  $10^4$   $Q_1$  elementos finitos, 10.201 pontos nodais e com o menor valor de seu comprimento de malha adimensional  $h_{K_{min}}^* = h_K/L$  igual a  $2 \times 10^{-2}$  foi selecionada, de modo a garantir aproximações mais precisas próximo das quinas da cavidade.

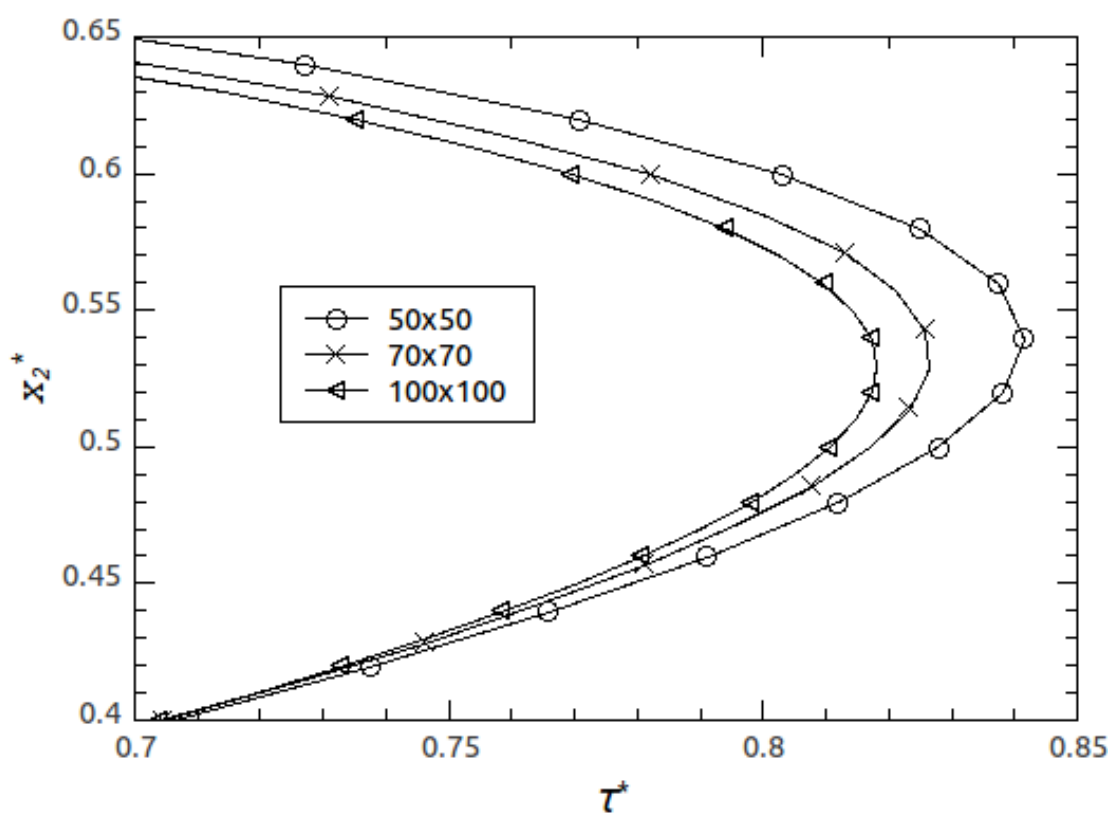


Figura 4.2: Qualidade de malha.

#### 4.4 Parâmetros Adimensionais do Escoamento

Contrariamente às suas definições clássicas, nesta Tese as superfícies de escoamento serão calculadas como o local geométrico dos pontos nos quais a magnitude do tensor da taxa de deformação é inferior ao mais baixo valor da taxa de deformação, para qual a viscosidade é igual ao platô inferior de viscosidade  $\eta_0$ , isto é, quando  $\dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0$  (ver Santos et al. (2011), para mais detalhes).

A fim de analisar os efeitos viscosos e elásticos sobre o padrão de escoamento, os parâmetros adimensionais que representam o problema são obtidos com a introdução do seguinte conjunto de quantidades adimensionais:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}; \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{\dot{\gamma}_1 L}; \quad \mathcal{P}^* = \frac{\mathcal{P}}{\tau_0}; \quad \boldsymbol{\tau}^* = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\tau_0}; \quad \eta^* = \frac{\eta}{\tau_0/\dot{\gamma}_1}; \quad \dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1} \quad (4.19)$$

onde o sobrescrito (\*) indica uma variável adimensional e  $\dot{\gamma}_1 = (\tau_0/K)^{1/n}$  denota o valor da taxa de deformação para o qual a viscosidade começa a ter um comportamento *power-law*.

Substituindo as definições acima, nas equações governantes, definidos previamente pelas Eqs.(4.3 - 4.8), esse conjunto de equações assume a seguinte forma adimensional:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.20)$$

$$\nabla \mathcal{P}^* - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.21)$$

$$\boldsymbol{\tau}^* + \theta_1^*(\dot{\gamma}^*)\check{\boldsymbol{\tau}}^* = 2\eta^*(\dot{\gamma}^*) [\mathbf{D}^* + \theta_2^*(\dot{\gamma}^*)\check{\mathbf{D}}^*] \quad \text{em } \Omega \quad (4.22)$$

$$\eta^*(\dot{\gamma}^*) = [1 - \exp(-(J+1)\dot{\gamma}^*)] \left( \frac{1}{\dot{\gamma}^*} + \dot{\gamma}^{*(n-1)} \right) + \eta_\infty^* \quad (4.23)$$

$$\theta_1^*(\dot{\gamma}) = \theta_{01}^* \exp(-(J+1)\dot{\gamma}^*) \quad \theta_2^*(\dot{\gamma}) = \theta_{02}^* \exp(-(J+1)\dot{\gamma}^*) \quad (4.24)$$

Portanto, a partir das equações acima, os seguintes parâmetros adimensionais governantes do problema estudado são identificados como:

$$\theta_{01}^* = \theta_{01} \dot{\gamma}_1 ; \theta_{02}^* = \theta_{02} \dot{\gamma}_1 ; J \equiv \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_o}{\dot{\gamma}_o} = \eta_0 \left( \frac{\tau_0^{1/n-1}}{K^{1/n}} \right) - 1 ; U^* = \frac{u_c}{\dot{\gamma}_1 L} \quad (4.25)$$

A intensidade do escoamento  $U^*$  surge da adimensionalização da condição de contorno de velocidade, fornece a intensidade ao escoamento, na tampa da cavidade. O parâmetro  $J$  é uma medida relativa do colapso da microestrutura do material, ver de Souza Mendes et al. (2007) para maiores detalhes.

*Comentário:*

Um comentário pode ser adicionado sobre a adimensionalização na Eq.(4.25). Ao contrário da adimensionalização usual dos tempos de relaxação e retardo por uma taxa de deformação característica do escoamento, dando origem ao número de Weissenberg clássico,

$$Wi = \theta \dot{\gamma}_c , \quad (4.26)$$

tais momentos são escalados usando uma quantidade reológica,  $\dot{\gamma}_1$ . Como

consequência, os parâmetros elásticos adimensionais  $\theta_1^*$  e  $\theta_2^*$  originados por esta nova adimensionalização, não são mais sensíveis à cinemática do escoamento. Em outras palavras, o aumento da intensidade do escoamento  $U^*$  não mais perturba os valores de  $\theta_{0_1}$  e  $\theta_{0_2}$ , uma característica muito atraente do ponto de vista experimental. Essa característica será explorada nas interpretações físicas dos resultados apresentados a seguir.

#### 4.5 Resultados Obtidos

Nesta Tese serão propostas simulações numéricas de escoamentos lentos de fluidos elasto-viscoplásticos, a fim de avaliar os efeitos da elasticidade, tensão de escoamento, pseudoplasticidade e cinemáticos sobre o padrão de escoamento estudado. Soluções visam compreender a influência dos efeitos elásticos e viscosos na topologia de superfícies de escoamento. Esta tarefa será realizada variando a intensidade do escoamento  $U^*$ , o tempo de relaxação adimensional  $\theta_{0_1}^*$ , o índice *power-law*  $n$  e o número de salto  $J$ . Todos os resultados pretendidos serão obtidos para tempos de retardo desprezíveis,  $\theta_{0_2}^* = 0$ .

Neste ponto, vale a pena mencionar que, para a classe de líquidos a serem investigados nesta Tese, a elasticidade só desempenha um papel não negligenciável nas regiões não-escoadas, ou seja, regiões nas quais  $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0$ . Ali, o número de Weissenberg local, classicamente definido como o produto entre o tempo característico do fluido e uma taxa de deformação local do escoamento, é extremamente baixo, visto que  $Wi \equiv \theta_{0_1} \dot{\gamma} \approx \dot{\gamma} / \dot{\gamma}_1 \ll 1$  nessas

regiões.

#### 4.5.1 Influência dos Efeitos Viscosos

A Figura 4.3 apresenta, preliminarmente, a influência do número de salto  $J$  na topologia das superfícies de escoamento, para  $U^* = 0,1$ ,  $n = 0,5$  e  $\theta_{0_1}^* = 250$ . As zonas negras na figura representam regiões não-escoadas ( $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0$ ), enquanto que as regiões brancas denotam regiões escoadas ( $\dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$ ). Vale lembrar que as regiões não-escoadas são, de fato, regiões que experimentam taxas de deformação muito baixas, ver eq.(4.7), nas quais a elasticidade pode desempenhar um papel relevante. De acordo com estas figuras, duas regiões não-escoadas distintas podem ser identificadas no interior da cavidade. Uma região quase estagnada, aderida ao fundo da cavidade, e uma outra perto da sua tampa. Esta última está associada com a recirculação induzida pelo movimento da tampa e, por conseguinte, está sujeita a níveis de tensão mais elevados do que aqueles experimentados nas regiões quiescentes perto do fundo da cavidade. A partir da definição do número de salto  $J$  (Eq. (4.25)), pode-se observar que valores mais elevados de  $J$  indicam um comportamento viscoplástico do fluido mais acentuado. Assim, ambas as regiões não-escoadas crescem monotonicamente à medida que  $J$  aumenta. Para o menor valor de  $J$ , ilustrado na figura 4.3 (a), o material se comporta quase como um fluido pseudoplástico, com apenas pequenas porções de líquido não-escoado aderidas a ambos os cantos inferiores da cavidade. Com relação as suas formas, fica evidente a assimetria das suas superfícies de escoamento.

Tal desvio do comportamento simétrico previsto por um modelo puramente viscoplástico, deve ser atribuído à presença de elasticidade dentro das regiões não-escoadas, um fenômeno que, também, será discutido na Figura 4.6.

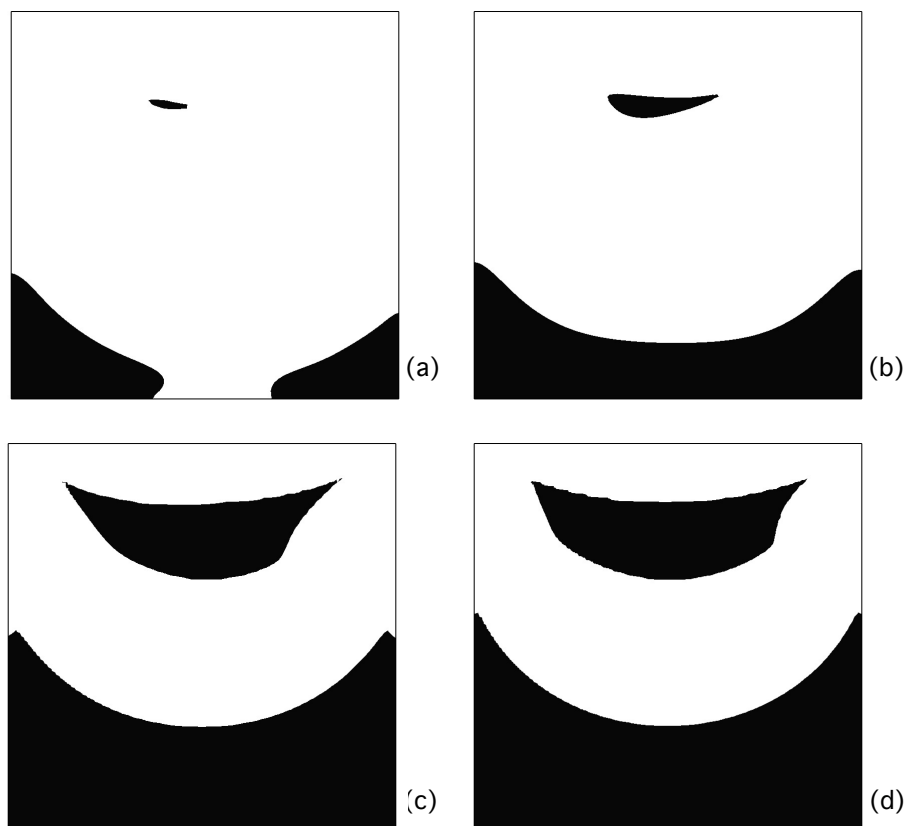


Figura 4.3: Superfícies de escoamento: efeito do número de salto para  $\theta_{0_1}^* = 250$ ,  $n = 0.5$  e  $U^* = 0.01$ ; (a)  $J = 500$ , (b)  $J = 1000$ , (c)  $J = 5000$  e (d)  $J = 10000$ .

O efeito do índice *power-law* sobre o padrão de escoamento é representado na Fig.4.4, para  $U^* = 0, 1$ ,  $J = 1000$ , e  $\theta_{0_1}^* = 250$ . Enquanto que as

regiões estagnadas ou não-escoadas, na parte inferior da cavidade, são quase insensíveis ao aumento de  $n$ , as regiões escoadas, associadas à recirculação do escoamento, são visivelmente reduzidas com o aumento do índice *power-law*. Esta tendência certamente está relacionada com o caráter pseudoplástico da função viscosidade viscoplástica (Eq.(4.23)), o qual dá origem a níveis de tensão mais elevados quando  $n$  aumenta. Como as zonas não-escoadas, no fundo da cavidade, são quase quiescentes, apresentando, conseqüentemente, taxas de deformação praticamente nulas, o caráter pseudoplástico da viscosidade não altera visivelmente sua morfologia nestas simulações preliminares. No que diz respeito aos efeitos elásticos, eles estão presentes nas regiões não-escoadas na parte superior da cavidade, visto que estas apresentam um formato assimétrico.

A Fig.(4.5) ilustra, preliminarmente, a influência da intensidade de escoamento no padrão do escoamento investigado, para  $\theta_{0_1}^* = 250$ ,  $n = 0,5$  e  $j = 1000$ . Uma vez que, de acordo com a sua definição dada pela Eq. (4.25),  $U^*$  está diretamente correlacionado com o inverso do número de Herschel-Bulkley,

$$U^* = \left( \frac{KU^n}{\tau_0 L^n} \right)^{1/n} = HB^{-1/n} \quad (4.27)$$

Portanto, a diminuição monotônica das regiões não-escoadas no interior da cavidade é esperada com o aumento de  $U^*$ . Esta tendência é claramente verificada em todas as figuras, tanto nas regiões não-escoadas da parte su-

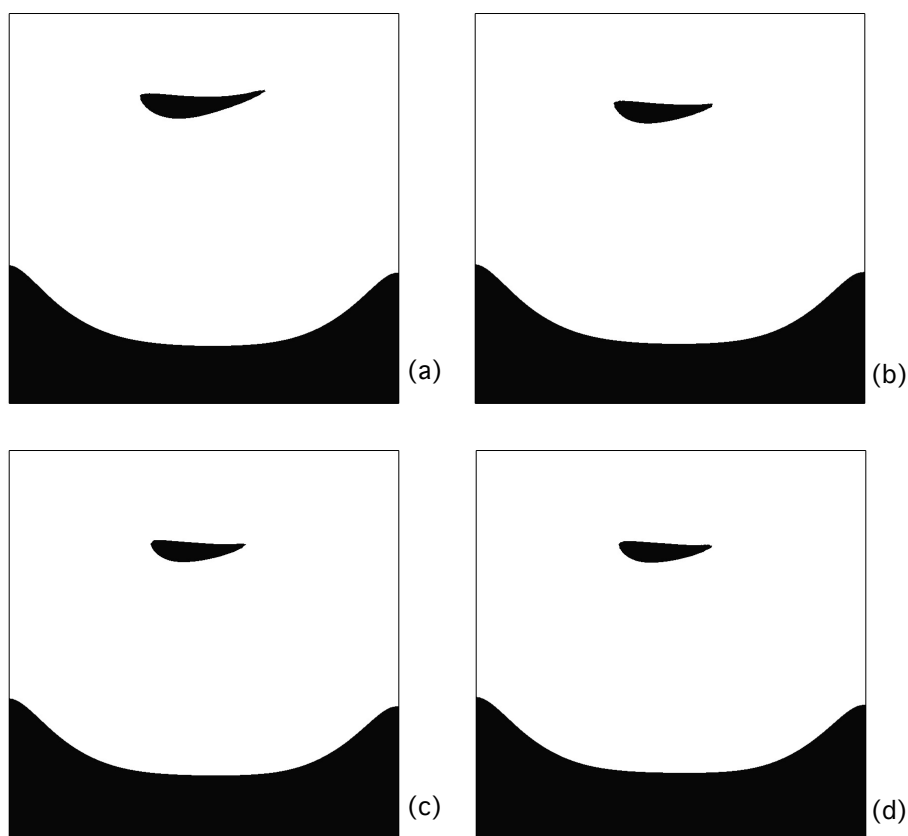


Figura 4.4: Superfícies de escoamento: efeito do índice *power-law* para  $\theta_{01}^* = 250$ ,  $J = 1000$  e  $U^* = 0.1$ ; (a)  $n = 0.4$ , (b)  $n = 0.7$ , (c)  $n = 0.9$  e (d)  $n = 1.0$ .

perior da cavidade, quanto nas regiões na sua parte inferior. As regiões superiores experimentam uma forte redução que quase as leva à completa extinção. Localizada no vórtice principal da cavidade, elas são cercadas por zonas sujeitas a crescentes níveis de tensão quando  $U^*$  aumenta. Já a influência da intensidade de escoamento sobre as regiões não-escoadas do fundo da cavidade é menos pronunciada do que aquela observada sobre as



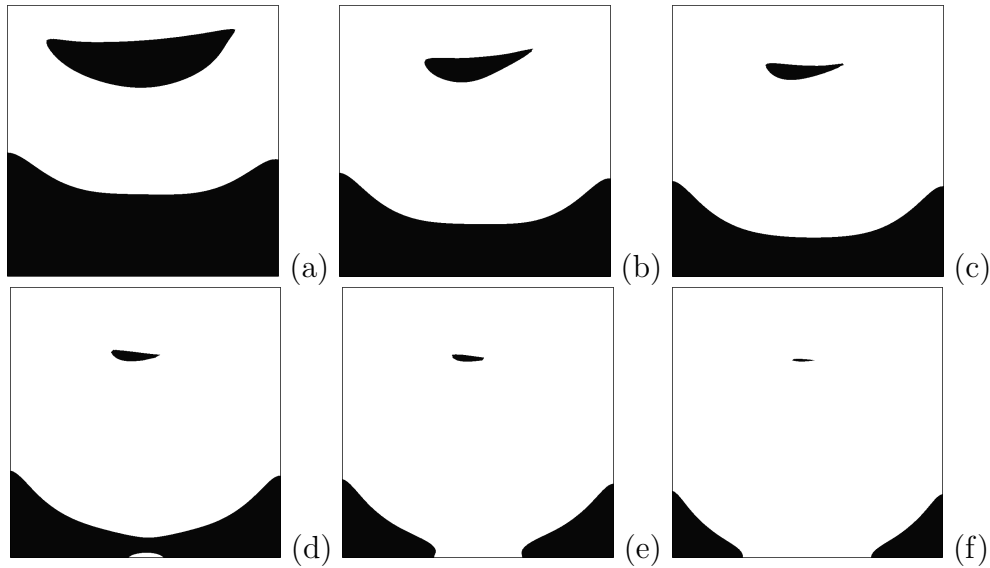


Figura 4.5: Superfícies de escoamento: efeito da intensidade de escoamento para  $\theta_{01}^* = 250$ ,  $J = 1000$  e  $n = 0.5$ ; (a)  $U^* = 0.01$ , (b)  $U^* = 0.05$ , (c)  $U^* = 0.10$ , (d)  $U^* = 0.20$ , (e)  $U^* = 0.40$  e (f)  $U^* = 1.00$ .

regiões não-escoadas superiores. Mesmo para o maior valor de  $U^*$  estudado, porções significativas das regiões não-escoadas ainda se fazem presentes nos cantos da cavidade (ver Fig.4.5(f)). Vale notar que, após um valor crítico de  $U^*$ , ocorre a divisão dessas regiões, com o afastamento delas aumentando quando o valor de  $U^*$  cresce. Essa separação pode ser interpretada como uma indicação que os níveis mais elevados de tensão, associados com o vórtice principal do escoamento, começam a atingir o fundo da cavidade. No que diz respeito a assimetria das regiões não escoadas, os efeitos cinemáticos parecem sobrepor-se aos efeitos elásticos para valores crescentes de  $U^*$ , uma vez que as formas assimétricas dessas regiões, tanto na parte superior como na inferior

da cavidade, tendem a desaparecer à medida que aumenta a intensidade do escoamento.

O efeito da elasticidade é visualizado na Figura 4.6. Como já observado nas figuras anteriores, a presença da elasticidade perturba o padrão simétrico usual das superfícies de escoamento prescritas por modelos puramente viscoplásticos. Elas começam a tornar-se mais assimétricas para o aumento dos níveis de elasticidade, um efeito que atua em ambas regiões não escoadas (superior e inferior). Tal resultado está de acordo com outros trabalhos experimentais relacionados (Souza Mendes et al ,2007) que mostram o mesmo comportamento assimétrico em fluxos sem inércia de fluidos viscoplásticos (uma tendência explicada pela elasticidade). Outra influência da elasticidade na morfologia das regiões não escoadas está relacionada com as suas dimensões. Como ilustrado na Figura 4.6, o aumento dos níveis de elasticidade diminui, significativamente, seus tamanhos, mais uma vez, um comportamento que está associado aos níveis mais elevados de tensão gerados pela natureza viscoelástica do campo de tensões.

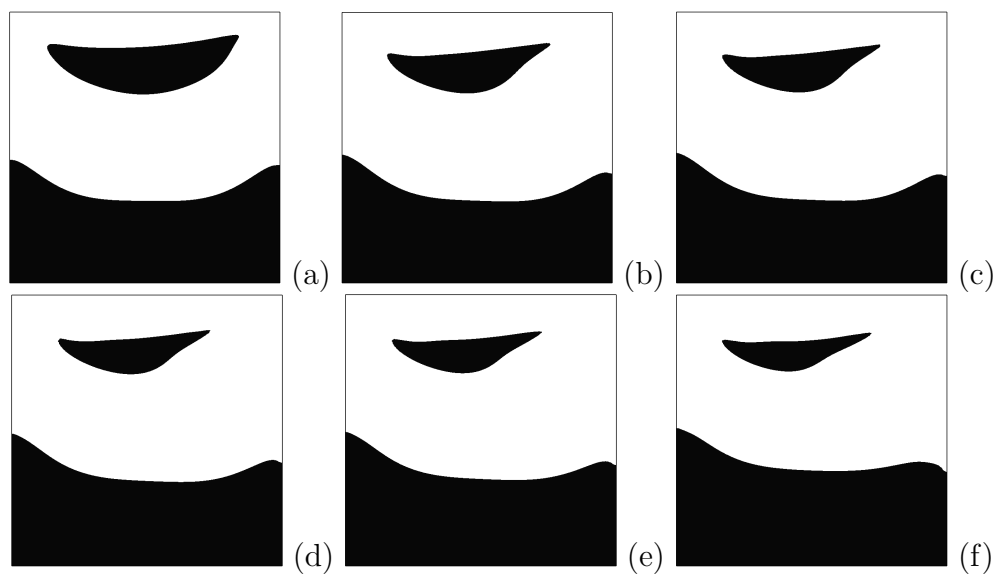


Figura 4.6: Superfícies de escoamento: efeito da intensidade de escoamento para  $U^* = 0.01$ ,  $J = 1000$  e  $n = 0.5$ ; (a)  $\theta_{0_1}^* = 200$ , (b)  $\theta_{0_1}^* = 800$ , (c)  $\theta_{0_1}^* = 1000$ , (d)  $\theta_{0_1}^* = 1300$ , (e)  $\theta_{0_1}^* = 1500$  e (f)  $\theta_{0_1}^* = 2000$ .

Verifica-se uma igualdade de representação para os casos (e) e (f) da Figura 4.6, indicando uma pequena diferença nas regiões superiores não escoadas, ou seja, um limite para o aumento da elasticidade.

## 5. COMENTÁRIOS E PERSPECTIVAS FUTURAS

### 5.1 Comentários

Nesta Tese foram realizadas simulações numéricas de escoamentos lentos de fluidos elasto-viscoplásticos. O modelo elasto-viscoplástico utilizado foi o introduzido em Nassar et al. (2011), cuja característica principal é incorporar a dependência dos tempos de relaxação e retardo, bem como da função de viscosidade viscoplástica, com a taxa de deformação. Devido a esta característica, este modelo permite dosar elasticidade somente nas regiões não-escoadas de materiais viscoplásticos.

O modelo mecânico foi aproximado por meio de um método três-campos de Galerkin mínimos-quadrados, em termos da tensão extra, pressão e velocidade. Formulação esta que assegura a utilização de uma combinação de igual-ordem de interpolações bi-lineares de Lagrange.

O escoamento na cavidade é governado por vários parâmetros adimensionais. Alguns deles são propriedades reológicas do material, assim nomeados: número jump  $J$ , expoente power-law  $n$  e o tempo de relaxação adimensional  $\theta_{0_1}^*$ . Um outro parâmetro é um parâmetro do escoamento; a intensidade do escoamento na tampa da cavidade,  $U^*$ .

A superfície de escoamento é simétrica para o caso puramente viscoso. Entretanto, inserindo elasticidade ou aumentando o tempo de relaxação adimensional,  $\theta_{0_1}^*$ , verifica-se que quanto menor a velocidade na tampa da cavidade maior é a falta de simetria. A presença da elasticidade perturba o padrão

usual simétrico das superfícies de escoamento, prescritas por modelos puramente viscoplásticos, pois as regiões não-escoadas tornam-se cada vez mais assimétricas para níveis crescentes de elasticidade, um efeito que deve atuar tanto sobre as regiões da parte superior quanto da parte inferior da cavidade. A falta de simetria está relacionada com a deformação elástica. Esse comportamento está de acordo com outros artigos, (por exemplo, os trabalhos experimentais de Souza Mendes et al, 2007) os quais relatam comportamento assimétrico dos escoamentos lentos de fluidos viscoplástico (tendência explicada pela presença de elasticidade nas regiões não-escoadas).

Outra influência da elasticidade na morfologia das regiões não escoadas, está relacionada com as suas dimensões. O aumento dos níveis de elasticidade tendem a diminuir significativamente as suas dimensões. Comportamento associado com os crescentes níveis de tensão gerados pela natureza viscoelástica do campo de tensões extra.

A elasticidade mostrou-se fundamental na caracterização da resposta mecânica de materiais viscoplásticos, dentre eles destacando-se as soluções diluídas de Carbopol, muito empregadas nas visualizações experimentais dos materiais viscoplásticos.

## 5.2 Perspectivas Futuras

Uma vez expostos alguns comentários finais, podemos, ainda, listar como futuras tarefas: a qualificação de malha (adaptação de malha) dos resultados apresentados, visando maior precisão na localização das superfícies de escoamento entre as regiões escoadas e não-escoadas, a simulação de *benchmarks* de interesse como escoamentos através de expansões e contrações abruptas, a inclusão da inércia nas simulações numéricas e a introdução de características tixotrópicas no presente modelo, visando a descrição de fluidos cujo colapso de sua micro-estrutura não seja suposto imediato.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- M. Aboubacar, H. Matallah, M.F. Webster, Highly elastic solutions for Oldroyd-B and Phan-Thien/Tanner fluids with a finite volume/element method: planar contraction flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 103 (1) (2002) 65–103.
- A.N. Alexandrou, T.M. McGilvrey, G. Burgos, Steady Herschel-Bulkley fluid flow in three-dimensional expansions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 100 (2001) 77–96.
- M.A. Al Khatib, S.D.R. Wilson, Flow of Bingham fluids in an orthogonal rheometer, *Int. J. Eng. Sci.* 63 (2003) 621–632.
- M.A. Alves, P.J. Oliveira, F.T. Pinho, Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and ptt fluids in planar contractions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 110 (2003) 45–75.
- A. Baloch, P. Townsend, M. Webster, On vortex development in viscoelastic expansion and contraction flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 65 (1996) 133–149.
- H.A. Barnes, A brief history of the yield stress, *Appl. Rheol.* 9 (1999) 262–266.
- H.A. Barnes, The yield stress - a review, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 81 (1999a) 133–178.

- Behr, M., Franca, L.P., Tezduyar, T.E., 1993. "Stabilized Finite Element Methods for the Velocity-Pressure-tensão Formulation of Incompressible Flows", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 104, pp. 31–48.
- M. Bercovier, M. Engelman, A finite element method for incompressible non-Newtonian flows, *J. Comput. Phys.* 36 (1980) 313–326.
- Beverly, C.R., Tanner, R.I., 1989. "Numerical analysis of extrudate swell in viscoelastic materials with yield stress, *J. Rheol.*, vol. 33/6, pp. 989–1009.
- Billington, E. W., Tate, A., 1981 *The physics of deformation and flow.* McGraw-Hill Inc, U.S.A.
- Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O., 1987. *Dynamics of polymeric liquids.* vol. 1, John Wiley and Sons, U.S.A.
- Burgos, G.R., Alexandrou, A.N., Entov, V., 1999. "On the determination of yield surfaces in Herschel–Bulkley fluids", *J. Rheol.* vol. 43/3, pp. 463–483.
- Carreau, P. J., 1968. Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, Madison.
- R.E. Carter, R.C. Warren, Extrusion stresses, die swell, and viscous heating effects in double-based propellants, *J. Rheol.* 31 (1987) 151-173.



- M.M. Denn, Dynamics of complex fluids, in: M. Adams, R. Mashelkar, J. Pearson, A. Rennie (Eds.), Dynamics of Complex Fluids, Imperial College Press, London, 1998, pp. 372-378.
- K. Dullaert, J. Mewis, A structural kinetics model for thixotropy, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 139 (2006) 21-30.
- Franca, L. P., Frey, S., 1992, "Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 99, pp. 209–233.
- Gurtin, M. E., 1981. *An introduction to continuum mechanics*. Academic Press, New York, U.S.A.
- Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balusters, M., 1986. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babūška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol.59, pp. 85–99.
- P. Jay, A. Magnin, J.M. Piau, Viscoplastic fluid flow through a sudden axisymmetric expansion, *AICHE J.* 47 (10) (2001) 2155-2166.
- G.G. Lipscomb, M.M. Denn, Flow of Bingham fluids in complex geometries, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 14 (1984) 337-346.
- B.T. Liu, S.J. Muller, M.M. Denn, Convergence of a regularization method

- for creeping flow of a Bingham material about a rigid sphere, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 102 (2002) 179-191.
- A. Matsoukas, E. Mitsoulis, Geometry effects in squeeze flow of Bingham plastics, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 109 (2003) 231-240.
- J. Mewis, N.J. Wagner, Thixotropy, *Adv. Colloid Interface Sci.* 147-148 (2009) 214-227.
- E. Mitsoulis, R.R. Huilgol, Entry flows of Bingham plastics in expansions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 122 (2004) 45-54.
- E. Mitsoulis, A. Matsoukas, Free surface effects in squeeze flow of Bingham plastics, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 129 (2005) 182-187.
- E. Mitsoulis, S.S. Abdali, N.C. Markatos, Flow simulation of Herschel-Bulkley fluids through extrusion dies, *Can. J. Chem. Eng.* 71 (1993) 147-160.
- A. Mujumdar, A.N. Beris, A.B. Metzner, Transient phenomena in thixotropic systems, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 102 (2002) 157-178.
- Nassar, B., de Souza Mendes, M.F. Naccache, 2011. "Flow of elastoviscoplastic liquids through an axisymmetric expansion-contraction", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 166, pp. 386-394.
- T.C. Papanastasiou, Flows of materials with yield stress, *J. Rheol.* 31 (1987) 385-404.

- T.N. Phillips, A.J. Williams, Comparison of creeping and inertial flow of an Oldroyd-B fluid through planar and axisymmetric contractions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 108 (2002) 25-47.
- Prager, W., 1945. Strain hardening under combined stresses. *J. App. Physics.* vol. 16, pp. 837-843.
- Reddy, J.N., 2008. *An Introduction to Continuum Mechanics*, Cambridge University Press , USA.
- Reiner, R.,1945. A mathematical theory of dilatancy. *A. J. Math*, 67, 350-362, 1945.
- Santos, Daniel Dall Onder; Frey, Sérgio; Naccache, Mônica F.; de Souza Mendes, P.R. Numerical approximations for flow of Viscoplastic fluids in a lid-driven cavity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, p. 667-679, 2011.
- P. Saramito, A new constitutive equation for elasto-viscoplastic fluid flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 145 (2007) 1-14.
- D. Sikorski, H. Tabuteau, J.R. de Bruyn, Motion and shape of bubbles rising through a yield-stress fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 159 (2009) 10-16.
- Slattery, J. C.,1999. *Advanced transport phenomena*. Cambridge University Press, U.S.A.

- S. Sofou, E.B. Muliawan, S.G. Hatzikiriakos, E. Mitsoulis, Rheological characterization and constitutive modeling of bread dough, *Rheol. Acta* 47 (2008) 369-381.
- Panton Ronald L., *Incompressible Flow*, Mechanical Engineering Department University of Texas Austin. A Wiley Interscience Publication, (1996).
- P.R. de Souza Mendes, Dimensionless non-Newtonian fluid mechanics, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 147 (12) (2007) 109-116.
- P.R. de Souza Mendes, Modeling the thixotropic behavior of structured fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 164 (2009) 66-75.
- P.R. de Souza Mendes, E.S.S. Dutra, Viscosity function for yield-stress liquids, *Appl. Rheol.* 14 (6) (2004) 296-302.
- P.R. de Souza Mendes, M.F. Naccache, P.R. Vargas, F.H. Marchesini, Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions-contractions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 142 (13) (2007) 207-217.
- P. Szabo, J. Rallison, E. Hinch, Start-up of flow of a FENE-fluid through a 4:1:4 constriction in a tube, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 72 (1997) 73-86.
- Truesdell, C., Toupin, R. A., 1960. The classical field theories, In: S. Flugge, *Handbuch Der Physik*, vol. 3/1, Springer-Verlag, Berlin.

- G.C. Vradis, M.V. tgen, The axisymmetric sudden expansion flow of a non-Newtonian viscoplastic fluid, *J. Fluids Eng.* 110 (1997) 193-200.
- Yasuda, K., Armstrong, R. C., Cohen R. E., 1981. *Rheol. Acta.* vol. 20, pp.163-178.