

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Caracterização de Intermitência Modulacional em dois Circuitos de Rössler Acoplados¹

Roberto Paaz

Dissertação elaborada sob a orientação do Dr. Thomas Braun, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre, maio de 2004.

¹ Trabalho parcialmente financiado pelo CNPq.

*Para o meu pai, que a cada
dia comprovo seus
ensimentos.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Thomas Braun pelo inestimável apoio e dedicação, tanto na iniciação científica quanto no mestrado;

À todos os professores do Laboratório Laser pelo suporte que recebi na elaboração deste trabalho. Agradeço em especial ao professor Jorge Lisbôa pela fundamental ajuda com a parte dos circuitos eletrônicos. Também agradeço aos demais professores do Instituto de Física pela sua dedicação em passar o seu conhecimento a nós alunos;

Aos meus colegas de Laboratório pelas intermináveis discussões e questionamentos que muito me ajudaram a entender e prosseguir na elaboração desta dissertação. Em especial, agradeço Emmanuel Gräve de Oliveira e Leonardo Pletsch que me ajudaram no final da dissertação e também ao Júlio Ricardo Schoffen pela inestimável ajuda na elaboração deste texto em Latex;

À Zuleika Berto pela ajuda com as referências;

Sou seu companheiro constante. Sou seu melhor auxiliar ou seu fardo mais pesado. Vou empurrá-lo para a frente ou afundá-lo no fracasso. Estou completamente sob o seu comando. Metade das coisas que você faz, você pode deixar perfeitamente comigo, que eu serei capaz de realizá-las rápida e corretamente. Sou facilmente manejável, apenas seja firme comigo. Mostre-me exatamente como quer que eu faça algo e, depois de algumas lições, eu o farei automaticamente. Eu sou o servo de todos os grandes homens e de todos os fracassados também. Os que são grandes, eu os fiz grandes. Os que são fracassados, eu os fiz fracassarem. Não sou máquina, embora trabalhe com a precisão de uma máquina e a inteligência de um homem. Você pode me usar para o lucro ou para a ruína, é indiferente para mim. Pegue-me, treine-me, seja firme comigo e eu colocarei o mundo a seus pés. Seja mole comigo e eu o destruirei. Quem sou eu? Eu sou o hábito.

Anônimo

SUMÁRIO

RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
1. INTRODUÇÃO	1
2. O CIRCUITO DE RÖSSLER	5
2.1 O Sistema de Rössler	5
2.2 Construção do circuito equivalente ao sistema de Rössler mo- dificado	8
2.2.1 O circuito para a equação \dot{V}_X	8
2.2.2 O circuito para a equação \dot{V}_Y	9
2.2.3 O circuito para a equação \dot{V}_Z	11
2.3 Validação do circuito equivalente	15
3. TÓPICOS EM SISTEMAS DINÂMICOS	19
3.1 Sistemas Dinâmicos	19
3.1.1 Atratores Estranhos	20
3.1.2 Variedades Invariantes	22
3.2 Análise de Estabilidade	24
3.2.1 Pontos Fixos	24
3.2.2 Ciclos Limites	25
3.2.3 Expoentes de Liapunov	28
3.2.3.1 Definição de Expoentes de Liapunov	30

3.3	Rotas para o caos - intermitência no cenário de Pomeau-Maneville	31
3.3.1	Comportamento característico	32
3.3.2	O mecanismo que provoca a intermitência	32
3.3.3	Leis de escala	34
4.	SINCRONIZAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS	36
4.1	O conceito de sincronização	36
4.2	Formas de acoplamento	40
4.3	Sincronização em sistemas caóticos	42
4.3.1	Sincronização de fase em sistemas caóticos	44
4.3.1.1	A definição de fase em sistemas caóticos	46
4.3.2	Sincronização idêntica	47
4.3.2.1	Estabilidade: a Variedade Transversal	49
4.4	Sincronização na presença de ruído	51
5.	INTERMITÊNCIA MODULACIONAL E SINCRONIZAÇÃO	53
5.1	A intermitência modulacional	53
5.1.1	A descoberta da intermitência modulacional	53
5.1.2	O modelo de mapa para intermitência modulacional	55
5.1.3	Leis de potência	58
5.1.3.1	Caso $z_n = ax_n$	62
5.1.3.2	Parâmetro de controle geral	64
5.1.3.3	Média das fases laminares	67
5.1.4	Leis de escala - parâmetro de controle caótico	68
5.2	A sincronização entre mapas e intermitência modulacional	69
5.2.1	Perturbação como um passeio aleatório	74
5.2.2	Intermitência modulacional: distribuições de leis de potência	76
5.3	Sistemas a tempo contínuo e intermitência modulacional	78

6. INTERMITÊNCIA MODULACIONAL NO CIRCUITO DE RÖSS- LER	80
6.1 O acoplamento entre os circuitos	81
6.2 Observações preliminares	82
6.2.1 Sincronização entre os dois circuitos	84
6.2.2 Espaço de fase durante o acoplamento	84
6.3 A medida das fases laminares	88
6.4 Leis de potência para as fases laminares	91
6.5 Considerações sobre a natureza da intermitência modulacional apresentada	97
6.5.1 O sistema similar	99
6.5.2 Sincronização de fase e a sua quebra	101
7. CONCLUSÃO	109
APÊNDICE — CÁLCULO DA LEI DE POTÊNCIA	111
REFERÊNCIAS	126

RESUMO

Neste trabalho utiliza-se como sistema dinâmico o circuito eletrônico que simula o conjunto de equações acopladas do sistema de Rössler modificado. Este sistema possui uma não-linearidade dada por uma função linear por partes e apresenta comportamento caótico para certos valores dos seus parâmetros. A caracterização experimental da dinâmica do sistema de Rössler modificado é realizada através do diagrama de bifurcações.

Apresenta-se uma fundamentação teórica de sistemas dinâmicos introduzindo conceitos importantes tais como atratores estranhos, variedades invariantes e também uma análise da estabilidade de comportamentos assintóticos como pontos fixos e ciclos limites. Para uma caracterização métrica do caos, apresenta-se a definição dos expoentes de Lyapunov. São introduzidos também os expoentes de Lyapunov condicionais e transversais, que estão relacionados com a teoria de sincronização de sistemas caóticos. Apresenta-se também a conceituação da sincronização de sistemas caóticos, introduzindo-se a definição de sincronização idêntica, sincronização de fase e variedade de sincronização.

As principais propriedades da intermitência modulacional, obtidas a partir de aplicações discretas (mapas), são apresentadas, dando-se ênfase à obtenção das leis de escala. Relatamos a nossa contribuição mais importante: a análise experimental da intermitência modulacional em dois circuitos de Rössler (osciladores eletrônicos) acoplados em uma configuração do tipo mestre-escravo. Atenção particular é devotada às leis estatísticas associadas com a intermitência modulacional.

ABSTRACT

In this work it is used as a dynamical system the electronic circuit that integrates the modified system of Rössler coupled equations. This system has a nonlinearity given by a piecewise linear function and shows chaotic behavior for certain values of the system parameters. The experimental characterization of the modified Rössler system dynamics is realized through a bifurcation diagram.

It is presented a theoretical fundamentation of dynamical systems introducing important concepts like strange attractors, invariant manifolds and also a stability analysis of asymptotic behaviors like fixed points and limit cycles. For a metric characterization of chaos, the definition of the Lyapunov exponents is presented. Also introduced are the conditional and transversal Lyapunov exponents, that are related with the synchronization theory of chaotic systems. It is also presented the conceptual ideas of chaotic synchronization introducing the definitions of identical synchronization, phase synchronization and synchronization manifold.

The main properties of modulational synchronization are obtained from discrete systems (maps), giving special attention to the scaling laws. We report our chief contribution: the experimental analysis of modulational intermittency in two coupled Rössler circuits (electronic oscillators) in a master-slave configuration. Particular attention is devoted to the statistical laws associated with modulational intermittency.

1. INTRODUÇÃO

Um sistema dinâmico é chamado determinístico quando a sua evolução é descrita por uma regra bem definida. No estudo da evolução temporal de um sistema dinâmico determinístico, consideramos dois tipos de variáveis quando expressamos matematicamente a “regra dinâmica” em termos de uma ou mais equações. As variáveis dinâmicas são aquelas que podem modificar-se a cada instante e os seus respectivos valores são determinados solucionando as equações (que, em muitas vezes, dependem do tempo). Por sua vez, as variáveis estáticas, doravante denominadas de parâmetros, são ajustadas quando se determinam as equações do sistema. As variáveis estáticas que são passíveis de alteração determinam os chamados parâmetros de controle do sistema e a mudança nos seus valores pode induzir o sistema a um comportamento dinâmico diferente.

Ao se analisar um sistema dinâmico, é comum se proceder a seguinte investigação: altera-se o valor de um parâmetro de controle e verifica-se que mudança essa variação provoca sobre o comportamento dinâmico do sistema. Em relação a esse aspecto, dentre a imensa gama de sistemas dinâmicos determinísticos possíveis, nos últimos anos especial atenção foi devotada a um particular subconjunto desses sistemas: são aqueles descritos por equações não-lineares determinísticas e que, para certos valores apropriados dos parâmetros, apresentam um comportamento complicado, não periódico, errático. O interesse nos sistemas não-lineares justifica-se pela seguinte comparação. Num sistema linear uma variação num de seus parâmetros altera a escala de seu comportamento, mas não provoca uma mudança qualitativa deste. Assim, se o sistema linear apresenta um comportamento estacionário, com a variação do parâmetro o comportamento permanece estacionário. Por outro lado, num sistema não-linear,

uma pequena variação de um parâmetro, além da mudança quantitativa, pode induzir mudanças bruscas e dramáticas no seu comportamento qualitativo. Por exemplo, ele pode passar a apresentar uma evolução errática, totalmente aperiódica. Essa riqueza em comportamentos dinâmicos diferentes tornou o sistema não-linear um alvo privilegiado das pesquisas recentes. A dinâmica determinística que descreve o comportamento errático desses sistemas é denominada de dinâmica caótica ou simplesmente caos determinístico.

Por sua vez, a sincronização de sistemas dinâmicos foi provavelmente documentada pela primeira vez por C. Huygens em 1650 [1]: ele observou que dois relógios de pêndulo idênticos, afixados numa mesma barra (flexível), em um curto espaço de tempo oscilavam de forma sincronizada, não importando quais eram as fases iniciais deles. Após isso, muitas outras observações de movimentos sincronizados foram feitas. Destaca-se o trabalho de B. van der Pol [2] que, no início do século XX, estudou a sincronização de oscilações entre circuitos eletrônicos. Todas essas observações foram feitas com sistemas dinâmicos (osciladores) ordenados, isto é, periódicos. Agora, com a descoberta do caos determinístico, introduz-se o oscilador caótico e surge então a questão: é possível sincronizar movimentos caóticos? Intuitivamente isto parece ser irrealizável, mas L. Pecora e T. Carrol, em 1990, demonstraram a sincronização de caos [3].

Hoje se reconhece na natureza muitos exemplos de sincronização espontânea em sistemas dinâmicos não-lineares acoplados e a razão do porquê, e como isso ocorre, não está clara ainda. De fato, há muitas questões pertinentes à sincronização caótica que demandam um estudo maior e, por isso, atualmente a sincronização de osciladores caóticos desperta muito interesse como tema de pesquisa. É nesse panorama que se insere o presente trabalho: estudamos um sistema dinâmico composto de dois osciladores eletrônicos acoplados. Como também ocorre em outros sistemas caóticos próximos da sincronização, o sistema investigado apresenta a intermitência modulacional. O nosso maior propósito é caracterizar experimentalmente as suas propriedades no contexto de sistemas dinâmicos que apresentam caos determinístico.

A intermitência caracteriza-se pela alternância “aleatória” entre um sinal regular quase periódico e um sinal totalmente aperiódico. Este é denominado de estouro (em inglês técnico *burst*) e ocorre no meio do primeiro durante um breve instante de tempo, após o que reinicia a fase regular, também chamada laminar. Mudando o parâmetro de controle, altera-se a frequência e duração dos estouros, até que eles tomem conta do sinal que é então considerado caótico. Esta fenomenologia foi descrita pela primeira vez em 1980 por Pomeau e Manneville [4]. Por sua vez, a intermitência modulacional foi relatada pela primeira vez por Fujisaka e Yamada [5] e depois detalhada por Platt, Spiegel e Tresser [6] e, como veremos, apresenta propriedades distintas das intermitências tipo I, II e III de Pomeau e Manneville.

Estruturamos este trabalho da seguinte forma: no capítulo 2 descrevemos a montagem experimental do sistema dinâmico empregado ao longo do trabalho: o sistema modificado de Rössler, implementado em termos de circuito eletrônico. No capítulo 3 são apresentados tópicos da “teoria de sistemas dinâmicos” que julgamos importantes - para um melhor entendimento da análise experimental proposta. No capítulo 4 é colocada a idéia da sincronização de sistemas caóticos e no capítulo 5 introduzem-se as principais propriedades da intermitência modulacional, obtidas a partir de aplicações discretas (mapas). No capítulo 6 relatamos a nossa contribuição mais importante: a análise experimental da intermitência modulacional em dois circuitos de Rössler (osciladores eletrônicos) acoplados, particularmente as leis estatísticas associadas com a intermitência modulacional. Finalmente, no capítulo 7 são apresentadas as conclusões.

Por fim, é oportuno um esclarecimento sobre o termo intermitência modulacional que adotamos neste trabalho. Na literatura em inglês, emprega-se predominantemente a expressão *on-off intermittency*, cunhada por Platt, Spiegel e Tresser [6], que, em uma tradução literal, levaria à expressão intermitência liga-desliga. Em vez deste cacófono, preferimos usar a expressão intermitência modulacional. A bem da verdade, um dos primeiros trabalhos sobre o assunto foi de Fujisaka e Yamada [5], sendo que eles usam o termo *modulational intermittency*, o qual inspirou a nossa tradução. Infelizmente, o termo modulacional ainda não consta do léxico português, ao contrário dos termos

modulada e modulante. Mesmo assim, preferimos adotá-lo como neologismo, porque, na nossa opinião, a expressão intermitência modulacional sintetiza melhor as propriedades do fenômeno aqui investigado do que as expressões intermitência modulada ou intermitência modulante.

2. O CIRCUITO DE RÖSSLER

Neste capítulo descrevemos o sistema experimental com o qual trabalhamos ao longo do desenvolvimento deste trabalho. O aparato experimental consiste basicamente de circuitos eletrônicos. Optamos por tal tipo de equipamento devido à flexibilidade, fácil montagem, disponibilidade e reprodutibilidade de vários sistemas semelhantes. Existe toda uma variedade de montagens que nos possibilitam praticamente todas as operações matemáticas necessárias para a modelagem de sistemas físicos.

2.1 O Sistema de Rössler

O sistema de equações que iremos trabalhar foi baseado no sistema criado por O. E. Rössler [7, 8]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(y + z); \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay; \\ \frac{dz}{dt} &= b + (x - c)z.\end{aligned}$$

Essas equações foram propostas por Rössler em meados de 1976 a partir das equações de Lorenz, transcritas abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x); \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz; \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy.\end{aligned}$$

As equações acima constituem o modelo de Lorenz, apresentado em 1963 por E. Lorenz [9] com o intuito de modelar a convecção de fluidos termicamente induzida na atmosfera. As simulações numéricas feitas por ele, ao mostrarem um atrator estranho no espaço de fase do sistema dinâmico investigado, evidenciaram de forma pioneira um comportamento caótico determinístico. O propósito de Rössler com o seu sistema era o de criar um modelo mais simples, mas que também apresentasse caos. O circuito eletrônico que iremos utilizar ao longo desta dissertação modela um conjunto de equações levemente modificado do sistema proposto por Rössler: a não-linearidade quadrática zx é substituída por outra, representada por uma função linear por partes, e a equação x possui um termo de amortecimento adicional [10].

Optamos pelo sistema de Rössler modificado devido ao alto custo de um multiplicador eletrônico de sinais de tensão, necessário para implementar o sistema original de Rössler e também pelo fato de não ocorrer nenhuma mudança qualitativa relevante na dinâmica dos dois sistemas. As equações para o sistema de Rössler modificado são:

$$\frac{dV_X}{dt} = -\alpha(\Gamma V_X + \beta V_Y + \lambda V_Z) \quad (2.1a)$$

$$\frac{dV_Y}{dt} = \alpha(V_X + \gamma V_Y) \quad (2.1b)$$

$$\frac{dV_Z}{dt} = \delta\alpha(g(V_X) - V_Z) \quad (2.1c)$$

onde as variáveis dinâmicas V_X , V_Y e V_Z são as tensões nos nós do circuito, α , Γ , β , λ , γ , δ são constantes determinadas a partir dos componentes do circuito eletrônico e $g(V_X)$ é a função não-linear (linear por partes) modelada pela presença de um diodo.

Neste ponto, vale lembrar que para chegarmos às equações (2.1), deveremos nos recordar de alguns detalhes. Em um circuito, um **nó** é um elemento que liga dois ou mais elementos de um circuito. Em uma construção, é a junção de dois fios. Poderemos então estabelecer as leis de Kirchoff, sintetizadas nas próximas duas definições:

Definição 1. *A soma algébrica das correntes em um nó é nula. Matematicamente*

$$\sum_k i_k = 0. \quad (2.2)$$

Aqui, convém notar que quando falamos em soma algébrica, temos que estabelecer a convenção de que as correntes que entram em um nó, são consideradas como positivas; e, as que saem, como negativas (o contrário também valeria, mas vamos adotar esta primeira convenção).

Definição 2. *A soma algébrica das quedas de tensões em uma malha é nula. Matematicamente*

$$\sum_k V_k = 0. \quad (2.3)$$

Para implementar num circuito o conjunto de equações (2.1), precisamos de amplificadores operacionais para efetuar as derivadas que aparecem nas equações. Admitimos que os amplificadores operacionais sejam ideais; conseqüentemente, as duas condições seguintes que representam as “leis de ouro” para amplificadores operacionais [11]:

Definição 3. *As entradas positiva e negativa em um amplificador operacional possuem a mesma tensão, isto é,*

$$V_+ = V_-. \quad (2.4)$$

Definição 4. *A corrente que entra em um amplificador operacional é nula,*

$$i_o = 0; \quad (2.5)$$

ou seja, as entradas positiva e negativa possuem impedância infinita.

2.2 Construção do circuito equivalente ao sistema de Rössler modificado

Empregando as definições 1 a 4 acima, com o auxílio de amplificadores operacionais e demais componentes eletrônicos, construímos circuitos, onde cada um modela uma das equações do sistema (2.1). Depois, a junção desses circuitos num único representará o circuito correspondente ao sistema de Rössler modificado.

2.2.1 O circuito para a equação \dot{V}_X

O circuito que modela a equação 2.1a está representado na figura 2.1.

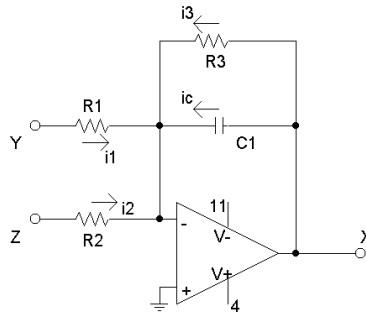


Fig. 2.1: Circuito que modela a equação \dot{V}_X .

Segundo a definição 1, todas as correntes que entram em um nó serão positivas e todas que saírem, negativas. Vamos recordar também que a corrente segue o sentido do potencial maior para o menor, tendo-se então para as correntes da figura 2.1:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_c = 0. \quad (2.6)$$

Também na figura 2.1, observamos que a saída não-inversora do amplificador está aterrada; logo, pela definição 3, $V_+ = V_- = 0$. Sabemos também que para um capacitor a corrente que passa por ele é da forma:

$$i_c = C \frac{dV}{dt}$$

e então escrevemos a equação (2.6) em função das tensões e resistências:

$$\begin{aligned} \frac{V_Y - V_-}{R_1} + \frac{V_Z - V_-}{R_2} + \frac{V_X - V_-}{R_3} + C \frac{d}{dt} (V_X - V_-) &= 0 \\ \frac{V_Y}{R_1} + \frac{V_Z}{R_2} + \frac{V_X}{R_3} + C \frac{dV_X}{dt} &= 0 \\ \frac{dV_X}{dt} &= - \left[\frac{V_X}{R_3} + \frac{V_Y}{R_1} + \frac{V_Z}{R_2} \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

É conveniente definir a constante α :

$$\alpha \equiv \frac{R_6}{R_5 R_7 C_2}.$$

Multiplicamos ela no lado direito de (2.7) no denominador e numerador, estabelecendo em seguida

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv \frac{1}{\alpha R_3 C} \\ \beta &\equiv \frac{1}{\alpha R_1 C} \\ \lambda &\equiv \frac{1}{\alpha R_2 C} \end{aligned}$$

e chegaremos a equação em V_X :

$$\frac{dV_X}{dt} = -\alpha [\Gamma V_X + \beta V_Y + \lambda V_Z]. \quad (2.8)$$

2.2.2 O circuito para a equação \dot{V}_Y

O circuito que modela a equação (2.1)b está representado na figura 2.2 logo a seguir:

Aplicando as definições para o amplificador operacional ideal, conjugadas com

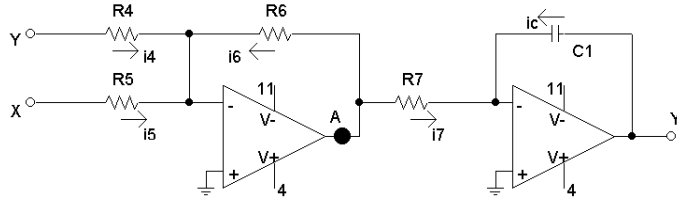


Fig. 2.2: Circuito que modela a equação \dot{V}_Y .

as leis de Kirchoff, ao circuito da figura obtemos:

$$i_4 + i_5 + i_6 = 0 \quad (2.9)$$

$$-i_6 - i_7 = 0 \quad (2.10)$$

$$i_C + i_7 = 0. \quad (2.11)$$

onde, para um amplificador operacional ideal, a corrente em sua saída será nula. Portanto, no nó A da figura 2.2, teremos somente as correntes i_6 e i_7 , como observamos na equação (2.10).

Reescrevemos a equação (2.9) em termos das tensões e resistências, sendo V_A a tensão no nó identificado na figura 2.2:

$$\begin{aligned} \frac{V_Y - 0}{R_4} + \frac{V_X - 0}{R_5} + \frac{V_A - 0}{R_6} &= 0 \\ V_A &= -R_6 \left(\frac{V_Y}{R_4} + \frac{V_X}{R_5} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Agora, pela equação (2.11), sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{V_A - 0}{R_7} + C \frac{d}{dt} (V_Y - 0) &= 0 \\ V_A &= -CR_7 \frac{dV_Y}{dt} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Juntando (2.12) e (2.13), teremos

$$\begin{aligned} -CR_7 \frac{dV_Y}{dt} &= -R_6 \left(\frac{V_Y}{R_4} + \frac{V_X}{R_5} \right) \\ \frac{dV_Y}{dt} &= \frac{R_6}{CR_7} \left(\frac{V_Y}{R_4} + \frac{V_X}{R_5} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Definindo

$$\gamma \equiv \frac{R_5}{R_4}$$

e substituindo em (2.14) junto com α , obtemos finalmente a equação para \dot{V}_Y :

$$\frac{dV_Y}{dt} = \alpha [V_X + \gamma V_Y]. \quad (2.15)$$

2.2.3 O circuito para a equação \dot{V}_Z

O circuito que modela a equação 2.1c está representado na figura 2.3.

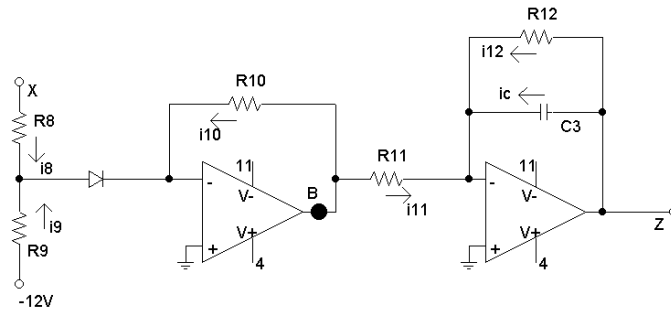


Fig. 2.3: Circuito que modela a equação \dot{V}_Z .

Deveremos, de agora em diante, considerar o fato de que o diodo tem um comportamento não-linear no modelamento de \dot{V}_Z : ele funciona como uma chave ideal. Ou seja: para tensões aplicadas sobre o diodo menores que a sua tensão de junção (V_D) ele não conduz; para tensões maiores que V_D ele é um condutor perfeito. Usamos diodos de silício e assim $V_D = 0,69V$. A tensão sobre o diodo é dada pelo divisor de tensão à esquerda na figura 2.3. Considerando que a entrada do amplificador operacional tem uma impedância infinita, é como se o diodo estivesse ligado a um terra virtual e daí

se obtém a figura 2.4. Escrevendo a equação para a malha dessa figura, obtemos um

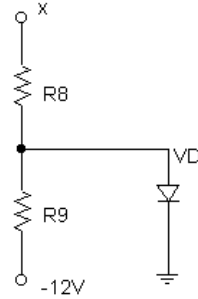


Fig. 2.4: Divisor de tensão.

valor para V_X que satisfaça a condição de que $V_D = 0,69V$:

$$0,69 = -12 + \frac{(x + 12)R_9}{R_8 + R_9}. \quad (2.16)$$

O valor de V_X obtido é $V_X = 2,56V$. Para $V_X \geq 2,56$ o diodo pode ser considerado como um curto circuito e assim a figura 2.3 pode ser simplificada como mostrado na figura 2.5. Aplicando então a definição 1 ao amplificador mais à esquerda

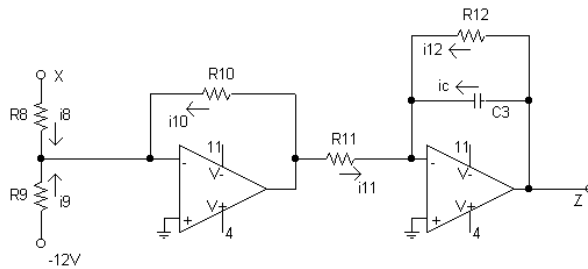


Fig. 2.5: O diodo foi substituído por um fio condutor.

da figura 2.5, temos

$$i_8 + i_9 + i_{10} = 0. \quad (2.17)$$

Escrevendo em termos das tensões, sendo V_B a tensão no nó identificado na

figura 2.5:

$$\begin{aligned} \frac{(V_X - 2, 56)}{R_8} + \left(\frac{-12 - 0}{R_9} \right) + \frac{V_B - 0}{R_{10}} &= 0 \\ V_B &= -R_{10} \left[\frac{(V_X - 2, 56)}{R_8} + \frac{12}{R_9} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

O último termo na equação acima é somente um nível de tensão contínua, podendo ser desprezado pois nós só estamos interessados em variações de tensão.

Por outro lado, temos para o outro amplificador, mais à direita da figura 2.5:

$$\begin{aligned} i_{11} + i_{12} + i_C &= 0 \\ \frac{V_B - 0}{R_{11}} + \frac{V_Z - 0}{R_{12}} + C \frac{d}{dt} (V_Z - 0) &= 0 \\ V_B &= -R_{11} \left(\frac{V_Z}{R_{12}} + C \frac{dV_Z}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Unindo (2.18) e (2.19), obteremos (desprezando o termo de tensão contínua):

$$\begin{aligned} R_{11} \left(\frac{V_Z}{R_{12}} + C \frac{dV_Z}{dt} \right) &= \frac{R_{10}}{R_8} (V_X - 2, 56) \\ \frac{dV_Z}{dt} &= \frac{1}{R_{12}C} \left[\frac{R_{10}R_{12}}{R_8R_{11}} (V_X - 2, 56) - V_Z \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Definimos

$$\begin{aligned} \mu &\equiv \frac{R_{10}R_{12}}{R_8R_{11}} \\ \delta &\equiv \frac{R_5R_7}{R_6R_{12}} \end{aligned}$$

e notando que

$$\frac{1}{R_{12}C} = \frac{R_5R_7}{R_6R_{12}} \alpha = \delta\alpha$$

poderemos reescrever (2.20) na forma

$$\frac{dV_Z}{dt} = \delta\alpha [\mu (V_X - 2, 56) - V_Z] \quad (2.21)$$

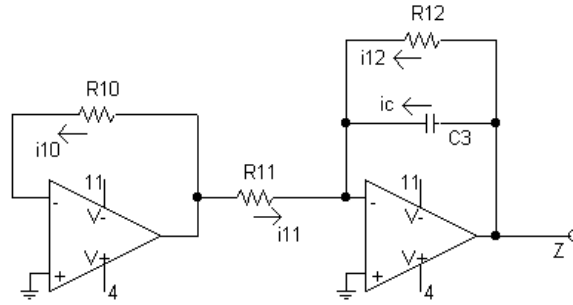


Fig. 2.6: O diodo foi substituído por um circuito aberto.

Agora, se $V_X < 2,56$, o diodo não conduzirá e; portanto, o circuito pode ser redesenhado tal como na figura 2.6. Então, $i_{10} = i_{11} = 0$, e teremos:

$$\begin{aligned}
 i_{12} + i_C &= 0 \\
 \frac{V_Z - 0}{R_{12}} + C \frac{d}{dt} (V_Z - 0) \\
 \frac{dV_Z}{dt} &= -\delta\alpha V_Z
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Unindo as equações (2.21) e (2.22), poderemos chegar a uma expressão geral da forma:

$$\frac{dV_Z}{dt} = \alpha\delta [g(V_X) - V_Z] \tag{2.23}$$

onde

$$g(V_X) = \begin{cases} \mu(V_X - 2,56), & \text{se } V_X > 2,56 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.24}$$

Essa equação corresponde à última das equações do sistema (2.1). A tabela 2.1 resume as constantes obtidas. Os valores dos componentes que serão utilizados são dados pela tabela 2.2. Não colocamos o valor de R_{11} nesta tabela, pois o seu valor é variável tal que tenhamos um parâmetro ajustável no circuito (o parâmetro correspondente é $\mu \propto 1/R_{11}$). O diodo é do tipo BA316 e os amplificadores operacionais são do tipo TL072. As resistências empregadas têm tolerância de 1%.

$\alpha = \frac{R_6}{R_5 R_7 C}$	$\Gamma = \frac{1}{\alpha C R_3}$
$\beta = \frac{1}{\alpha C R_1}$	$\lambda = \frac{1}{\alpha C R_2}$
$\gamma = \frac{R_5}{R_4}$	$\mu = \frac{R_{10} R_{12}}{R_8 R_{11}}$
$\delta = \frac{R_5 R_7}{R_6 R_{12}}$	

Tab. 2.1: Constantes em função dos componentes do circuito.

$R_1 = 100 \text{ k}\Omega$	$R_2 = 200 \text{ k}\Omega$
$R_3 = 2 \text{ M}\Omega$	$R_4 = 75 \text{ k}\Omega$
$R_5 = 15 \text{ k}\Omega$	$R_6 = 10 \text{ k}\Omega$
$R_7 = 100 \text{ k}\Omega$	$R_8 = 10 \text{ k}\Omega$
$R_9 = 68 \text{ k}\Omega$	$R_{10} = 150 \text{ k}\Omega$
$C = 220 \text{ pF}$	$R_{12} = 100 \text{ k}\Omega$

Tab. 2.2: Valores dos componentes utilizados na montagem experimental.

Agora, juntando-se os três circuitos anteriores, que representam as equações para \dot{V}_X , \dot{V}_Y e \dot{V}_Z , num só circuito teremos finalmente o circuito correspondente ao sistema de Rössler modificado. Ele está representado na figura 2.7.

2.3 Validação do circuito equivalente

Um ponto importante é saber se o nosso sistema experimental implementado corresponde realmente ao modelo adotado. Nesse aspecto devemos ter especial atenção ao modelo usado para o diodo.

O comportamento do diodo quando submetido à tensão está ilustrado na figura 2.8. Esta curva foi obtida experimentalmente, digitalizando a corrente conduzida pelo diodo em função da tensão aplicada sobre ele. Como podemos ver da figura, o diodo BA316, que é um diodo de silício, começa a conduzir aproximadamente ao redor da tensão $V_D = 0.69V$. A figura mostra claramente que o diodo não se comporta como uma chave perfeita e desse fato devemos suspeitar que pode haver discrepâncias entre o resultado experimental e aquele obtido numericamente do modelo. Uma breve análise sobre esta questão pode ser encontrada nas referências [12] e [13].

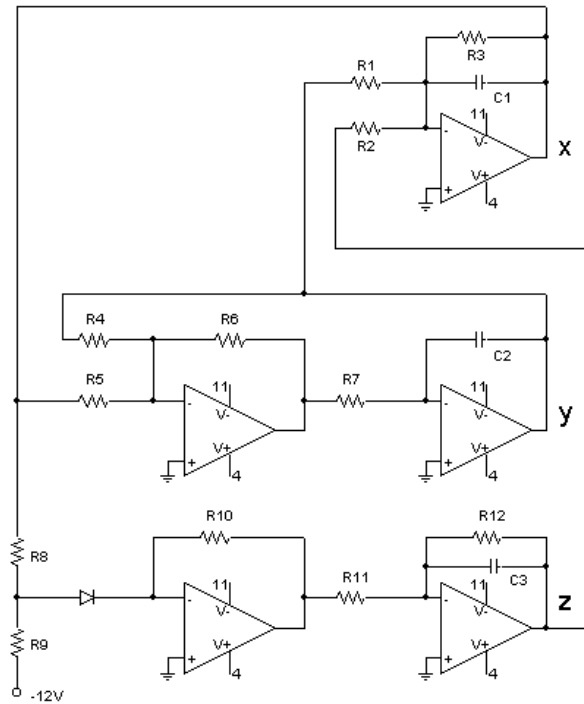


Fig. 2.7: Esquema do circuito correspondente ao sistema de Rössler modificado (2.1)

Aqui queremos ilustrar essas discrepâncias em termos do diagrama de bifurcação. Ele é obtido alterando-se um parâmetro do sistema e tomando os valores de máximo de uma das variáveis. Realizamos tal diagrama experimentalmente para o circuito de

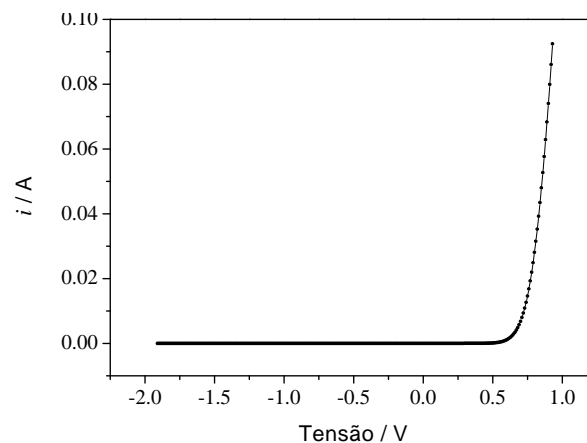


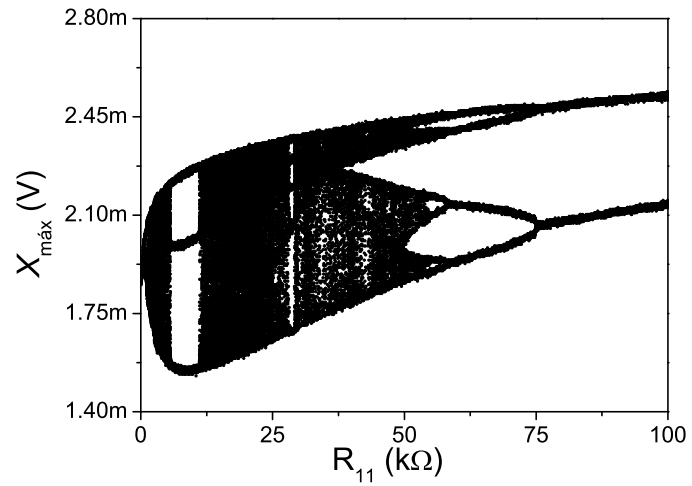
Fig. 2.8: Curva característica do diodo BA316. O eixo vertical é a corrente conduzida pelo diodo e o eixo horizontal é a tensão aplicada sobre ele.

Rössler variando a resistência R_{11} . Isto é equivalente a variarmos o parâmetro μ . O resultado é mostrado na figura 2.9(a).

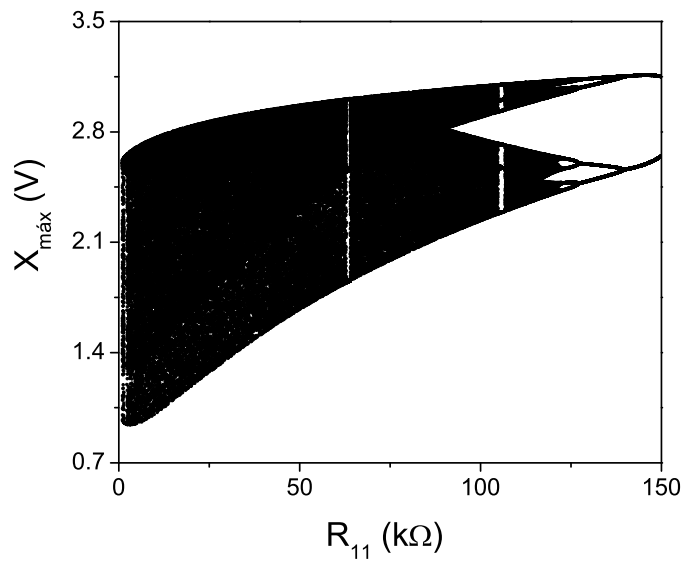
Por sua vez, integrando-se o sistema modificado 2.1 e adotando o mesmo procedimento anterior, obtemos o cor No modelo integrado numericamente assumimos uma $g(V_X)$ dada por (2.24), isto é, estamos assumindo uma função que passa abruptamente do valor zero para um valor $\mu(V_X - 2,56)$ quando V_X passa de $2,56V$. Implícito a isso está a suposição de que o diodo, o qual na experiência simula a função linear por partes, é uma chave perfeita, ou seja, não conduz corrente até uma tensão de $0,69V$, sendo que para uma tensão superior a essa ele passa a conduzir uma corrente infinita. Porém, o diodo possui uma curva característica dada pela figura 2.8 e a função que descreve esse tipo de curva possui a seguinte forma [14]:

$$i = a(e^{bV} - 1) , \quad (2.25)$$

onde a e b são constantes que dependem do material do qual é feito o diodo; i é a corrente que o diodo conduz quando aplica-se a tensão V . Portanto, para gerar uma melhor concordância entre os diagramas de bifurcação obtidos numérica e experimentalmente precisamos melhorar a descrição do diodo no modelo numérico.



(a)



(b)

Fig. 2.9: Diagramas de bifurcação (a) experimental e (b) numérico obtidos para o circuito de Rössler da figura 2.1 e modelado pelas equações 2.7. Os componentes eletrônicos considerados são os constantes na tabela 2.2. O parâmetro de controle é o valor da resistência R_{11} .

3. TÓPICOS EM SISTEMAS DINÂMICOS

O nosso intuito aqui não é fazer uma revisão exaustiva das propriedades de sistemas dinâmicos caóticos. Pretendemos apenas recordar alguns tópicos que julgamos importantes para um melhor entendimento da análise experimental da intermitência modulacional em dois circuitos de Rössler acoplados.

3.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico é chamado determinístico quando a sua evolução é descrita por uma regra bem definida. Ele será, então, caracterizado pela especificação:

- do estado do sistema, que contém toda informação essencial acerca dele;
- da sua dinâmica, que fornece a regra segundo a qual um estado evolui com o passar do tempo.

Uma classe de regras muito importante para a descrição de fenômenos naturais são as equações diferenciais. Mais especificamente, utiliza-se como regra um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mu) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ; \mu \in \mathbb{R} . \quad (3.1)$$

O campo vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) = [f_1(\mathbf{x}, \mu), f_2(\mathbf{x}, \mu), \dots, f_n(\mathbf{x}, \mu)]^T$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, constitui um conjunto de funções diferenciáveis, o qual descreve a evolução temporal do

sistema (3.1)¹. Em geral, e obrigatoriamente para sistemas caóticos, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ é não linear. O vetor n -dimensional $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ é chamado de estado do sistema num certo tempo t e μ é um parâmetro.

Como o tempo não aparece explicitamente em (3.1), esse sistema é chamado de autônomo. Isto não é uma restrição, pois um sistema não autônomo pode sempre ser transformado em autônomo introduzindo-se variáveis adicionais [15]. Também não é restrição o fato de (3.1) ser um sistema de equações de primeira ordem, pois uma equação diferencial de ordem superior pode ser colocada nessa forma. A solução do sistema (3.1), com a condição inicial $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$, é chamada trajetória ou órbita do sistema e é denotada por $\phi_t(\mathbf{x}_0)$, onde $\phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. O conjunto de todas as trajetórias que o sistema pode assumir é chamado de fluxo. Quando o parâmetro, μ , é variado, podem ocorrer mudanças na estrutura qualitativa das soluções para certos valores desses parâmetros (por exemplo, o sistema que apresentava um ponto fixo passa a apresentar um ciclo limite). Estas mudanças são chamadas bifurcações e os valores dos parâmetros nos quais ocorrem as bifurcações são chamados de pontos de bifurcação. Para cada condição inicial, \mathbf{x}_0 , existe uma trajetória no espaço que é originado pelo conjunto de variáveis $\mathbf{x}(t)$ e que é chamado de **espaço de estados** ou **espaço de fase** do sistema (3.1). Como veremos na próxima seção, o espaço de fase de um sistema caótico apresenta propriedades muito interessantes.

3.1.1 Atratores Estranhos

Na mecânica clássica os sistemas dinâmicos são separados em duas grandes classes: sistemas conservativos e sistemas não conservativos. Os sistemas conservativos são aqueles para o qual o teorema de Liouville é aplicável,

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = 0. \quad (3.2)$$

¹ T é matriz transposta.

O que a equação (3.2) nos informa é que o volume do espaço de fase não se contrai e nem se expande, ou ainda, a energia do sistema se conserva. Por outro lado, sistemas não conservativos são aqueles que apresentam atritos internos que dissipam a energia de forma a não conservá-la. Portanto, a esses sistemas o teorema de Liouville não é aplicável. Neste trabalho daremos ênfase a sistemas não conservativos, já que o sistema Rössler é desse tipo.

Nos sistemas dissipativos uma certa região $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ irá se contrair sob a ação do fluxo, pois $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0$. O comportamento assintótico para um sistema n -dimensional tem que recair sobre uma superfície de dimensão menor do que n . Esta superfície é chamada de **atrator**. Um atrator é um subconjunto \mathcal{A} do espaço de fase, atraindo pontos vizinhos de $\mathbf{x}(t)$. Isto significa que $\phi_t(\mathbf{x})$ tende para \mathcal{A} quando $t \rightarrow \infty$. Sistemas não-lineares típicos podem ter mais de um atrator, cada um com diferentes bacias de atração. A bacia de atração de \mathcal{A} é o conjunto dos estados no espaço de fase que se aproximam de \mathcal{A} quando $t \rightarrow \infty$. As condições iniciais determinam em qual atrator o sistema se acomoda. Exemplos simples de atratores são pontos fixos e órbitas periódicas assintoticamente estáveis.

Não há uma definição final e única para caos determinístico. A diferença entre as várias definições encontradas na literatura reside no enfoque que se dá ao problema. Para os nossos propósitos é suficiente considerar que caos determinístico é um movimento irregular, aperiódico, proveniente de equações determinísticas. Na evolução de um sistema dinâmico caótico, o seu movimento é caracterizado pelas seguintes propriedades: é limitado (no sentido que as variáveis dinâmicas não podem assumir valor infinito); é completamente aperiódico e é sensível a pequenas variações nas variáveis dinâmicas. O comportamento caótico é essencialmente devido a essa sensibilidade a pequenas variações que, quando existe, resulta da não-linearidade do sistema dinâmico. Na prática, isto significa que a distância entre as órbitas que se originam de duas condições iniciais infinitesimalmente próximas diverge exponencialmente no tempo. Por outro lado, como o atrator deve permanecer num domínio limitado do espaço de fase, duas trajetórias não podem divergir para sempre. Estas duas condições, aparente-

mente antagônicas, dão origem ao **atrator estranho**. A divergência de duas trajetórias arbitrárias se dá apenas por pequenas distâncias no espaço de fase e é seguida de um dobramento do atrator. Novas divergências e dobramentos aparecem devido a ação do fluxo, de tal forma que o aspecto final do atrator estranho é o de uma camada dobrada nela mesma muitas vezes e com dimensão fractal (dimensão fracionária) menor que a dimensão do espaço de fase do sistema.

Sistemas do tipo (3.1) com $n \leq 2$ não podem ser caóticos. Para $n = 1$, como as trajetórias não podem se cruzar, o movimento fica restrito a uma linha no espaço de fase que se aproxima ou se afasta de um ponto fixo quando $t \rightarrow \infty$. Para $n = 2$, o teorema de Poincaré-Bendixson [15, 16] diz que uma trajetória limitada pode se aproximar somente de um ponto fixo ou então de um ciclo limite. Pontos fixos e ciclos limites representam movimento regular. Portanto, sistemas do tipo (3.1) podem apresentar comportamento caótico somente para $n \geq 3$. Além disso, o comportamento caótico não ocorre para todos os conjuntos de parâmetros das equações que modelam o sistema dinâmico. Para algum conjunto de parâmetros a solução é regular e para outros é caótica.

Para finalizar, como exemplo de atrator estranho, reproduzimos na figura 3.1 o atrator do sistema de Rössler modificado (2.1), correspondente a um conjunto de parâmetros para o qual a evolução do sistema é caótica.

3.1.2 Variedades Invariantes

Uma formulação geométrica da teoria de equações diferenciais conceitua a equação diferencial como um campo vetorial sobre uma variedade. Intuitivamente, uma **variedade** (*manifold*)² l -dimensional em \mathbb{R}^n ($l < n$) pode ser visualizada como uma superfície suave formando um subconjunto de \mathbb{R}^n . Podemos citar como exemplos de variedade unidimensional uma linha reta infinita ou uma circunferência definidas em \mathbb{R}^n , com $n \geq 2$. Exemplos de variedades bi-dimensionais são as superfícies de um

² Para uma descrição completa e cuidadosa, ver referência [17].

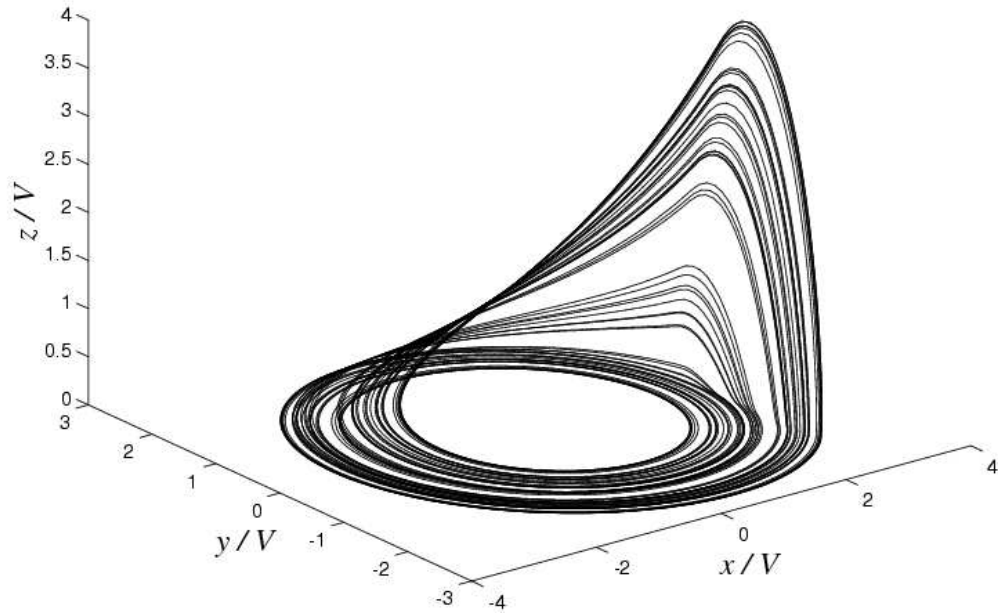


Fig. 3.1: Espaço de fase do sistema de Rössler modificado (2.1) para $R_{11} = 70k\Omega$. Os valores dos demais componentes são os da tabela 2.2.

cilindro infinito, de uma esfera, de um toro e de um plano real infinito em \mathbb{R}^n , com $n \geq 3$. Já a superfície de um cubo não é uma variedade, pois os vértices do cubo não satisfazem a condição de suavidade. Variedades tridimensionais em \mathbb{R}^n , com $n \geq 4$, são mais difíceis de serem visualizadas. O exemplo mais simples é o espaço tridimensional, \mathbb{R}^3 , infinito. Uma **variedade invariante** é uma variedade com a condição adicional de que órbitas iniciando sobre ela permaneçam na variedade através do curso de sua evolução dinâmica. Adicionalmente, o conjunto das órbitas as quais se aproximam ou se afastam de uma variedade invariante, \mathcal{M} , assintoticamente no tempo, são também variedades invariantes, as quais são chamadas de variedades estáveis e instáveis, respectivamente, de \mathcal{M} . O conhecimento das variedades invariantes de um sistema dinâmico, tanto quanto as interações de suas respectivas variedades estáveis e instáveis é absolutamente vital a fim de obtermos um completo entendimento da dinâmica global. Variedades invariantes também possuem a propriedade de persistirem sob pequenas perturbações [18]. Como veremos mais à frente, estaremos interessados principalmente

na variedade de sincronização de um sistema acoplado, que é uma variedade invariante. O conhecimento da estabilidade dessa variedade é de crucial importância na teoria de sincronização.

3.2 Análise de Estabilidade

Nesta seção introduziremos conceitos importantes relacionados à estabilidade de pontos fixos e ciclos limites. Para caracterizarmos estruturas mais complexas, tais como atratores estranhos, introduziremos os expoentes de Liapunov. No capítulo 4 veremos que a sincronização de um conjunto de sistemas acoplados pode ser analisada estudando-se a estabilidade de um ponto fixo na origem da variedade transversal à variedade de sincronização.

3.2.1 Pontos Fixos

Um ponto fixo³ \mathbf{x}^* do sistema (3.1) é uma solução constante tal que,

$$\left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^*} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0 . \quad (3.3)$$

Estamos interessados na estabilidade do ponto fixo \mathbf{x}^* . Para isso, linearizaremos o sistema (3.1) em torno de \mathbf{x}^* , assumindo um deslocamento infinitesimal em relação a esse ponto, $\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$. A pergunta que se faz é se o deslocamento irá crescer ou convergir para zero. Para isso, substituímos no sistema (3.1) $\mathbf{x}(t)$ por $\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}(t)$, obtendo:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}) . \quad (3.4)$$

Podemos fazer uma expansão em série de Taylor de $\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta})$ em torno de \mathbf{x}^* , como segue:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\boldsymbol{\eta} + \Theta(\boldsymbol{\eta}^2) , \quad (3.5)$$

³ Também chamados pontos de equilíbrio, pontos estacionários ou pontos singulares.

onde $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ é uma matriz quadrada de ordem n , que é chamada matriz **jacobiana**. Ela possui os seguintes elementos:

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)]_{ij} \equiv \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^*}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

Fazendo a análise próxima ao ponto fixo temos $|\boldsymbol{\eta}| \ll 1$, donde podemos manter em (3.5) apenas os termos lineares em $\boldsymbol{\eta}$. Lembrando, ainda, que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, obtemos a seguinte aproximação linear para o sistema (3.4):

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\eta}. \quad (3.7)$$

A estabilidade é determinada pelos autovalores da matriz jacobiana. Se a parte real de pelo menos um autovalor é maior do que zero, o ponto fixo é instável. Por outro lado, se a parte real de todos os autovalores é menor do que zero, o ponto fixo é estável. Se algum dos autovalores tem parte real igual a zero, então a estabilidade não pode ser determinada pela linearização.

3.2.2 Ciclos Limites

O ciclo limite é uma oscilação auto-sustentada e isolada, isto é, trajetórias vizinhas não são fechadas; essas trajetórias se aproximam ou se afastam do ciclo limite. Ciclos limites são fenômenos inerentemente não-lineares. Podemos descrever um ciclo limite do sistema (3.1) da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T), \quad (3.8)$$

para todo t e algum período mínimo $T > 0$. Em outras palavras, a trajetória no espaço de fase retorna ao ponto de partida depois de um tempo T . O conjunto atrator correspondendo ao ciclo limite é a curva traçada por $\phi_t(\mathbf{x})$ num período. O espectro de Fourier de uma solução periódica consiste de picos discretos na frequência fundamental

$\nu = 1/T$ e seus harmônicos $2\nu, 3\nu, \dots$. A amplitude de algum destes componentes pode ser zero. Ciclos limites estáveis são muito importantes fisicamente; eles modelam sistemas que apresentam, como já foi dito, oscilações auto-sustentadas, ou em outras palavras, estes sistemas oscilam sem a necessidade de uma força externa periódica. Alguns exemplos são: a batida do coração; ritmos diários da temperatura do corpo humano e secreção hormonal.

Consideremos, agora, uma órbita periódica do sistema (3.1). Se \mathbf{x}_0 é um ponto da órbita periódica, então é possível construir uma superfície com dimensão $(n - 1)$ que intercepta transversalmente a órbita, denominada seção de Poincaré. Uma vez escolhida a seção, observam-se os pontos de consecutivas intersecções da trajetória com esta, sendo que a seqüência discreta de pontos resultantes origina um mapa, chamado de mapa de Poincaré. Portanto, a seção de Poincaré associa ao fluxo de um sistema dinâmico contínuo no tempo um mapa. Dado um ponto sobre a seção de Poincaré,

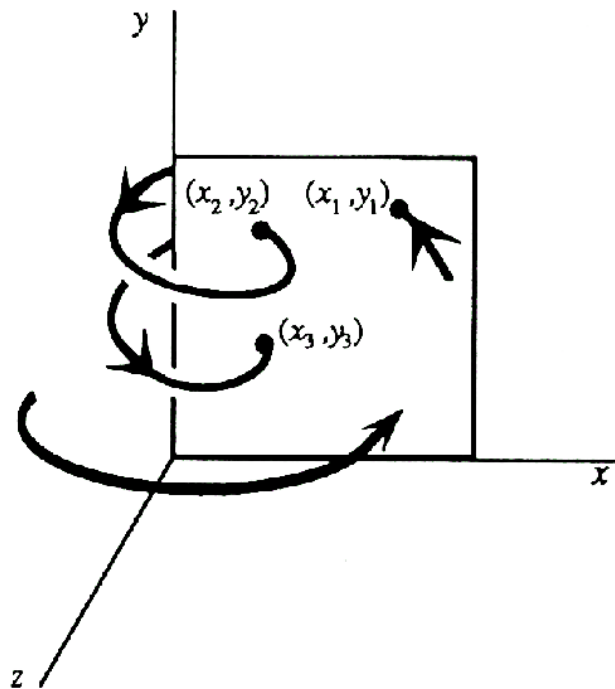


Fig. 3.2: Seção de Poincaré.

podemos nos perguntar qual será o próximo ponto sobre a mesma que a trajetória irá

originar a cada vez que ela intercepta a seção no mesmo sentido. Dessa forma estaremos reduzindo a análise da estabilidade de uma órbita periódica à análise da estabilidade de um ponto fixo do mapa gerado por essa órbita. Uma seção de Poincaré para o sistema (3.1) origina o seguinte mapa:

$$\mathbf{x}_{k+1} = P(\mathbf{x}_k), \quad (3.9)$$

onde \mathbf{x}_k representa a k -ésima interseção da trajetória com a seção de Poincaré. Observamos que um órbita periódica corresponde a um ponto fixo no mapa de Poincaré. Então, a análise da estabilidade linear de um ciclo limite corresponde àquela de um ponto fixo do mapa de Poincaré. Seja \mathbf{x}^* um ponto fixo do mapa P , isto é, $P(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. Então, uma trajetória que parte de \mathbf{x}^* retorna a \mathbf{x}^* após um certo tempo T . Usando procedimento análogo ao da seção 3.2.1, podemos definir um deslocamento infinitesimal, ξ_k , em relação a \mathbf{x}^* , e escrever a seguinte relação (seguindo a regra (3.9)):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* + \xi_{k+1} &= P(\mathbf{x}^* + \xi_k) \\ &= P(\mathbf{x}^*) + DP(\mathbf{x}^*) \xi_k + \Theta(\xi_k^2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde realizamos uma expansão em série de Taylor da função $P(\mathbf{x}^* + \xi_k)$ em torno do ponto fixo \mathbf{x}^* . Assumindo que termos $O(|\xi_k^2|)$ são desprezíveis e lembrando que $\mathbf{x}^* = P(\mathbf{x}^*)$ podemos escrever o mapa linearizado como

$$\xi_{k+1} = DP(\mathbf{x}^*) \xi_k. \quad (3.11)$$

A estabilidade vai ser determinada pelos autovalores λ_j da matriz $DP(\mathbf{x}^*)$: a órbita periódica vai ser estável se e somente se $|\lambda_j| < 1$ para todos os j , onde $j = 1, \dots, n-1$. Os autovalores λ_j são chamados de **multiplicadores de Floquet** da órbita periódica. Em geral, os multiplicadores de Floquet só podem ser obtidos numericamente [18].

3.2.3 Expoentes de Liapunov

Os dois atratores citados até aqui (ponto fixo e ciclo limite) são exemplos de estruturas muito regulares e suas dimensões tomam valores inteiros. Esses dois tipos de atratores possuem a propriedade de que pontos próximos no espaço de fase permanecem próximos na evolução temporal, isto é, pequenos desvios nas condições iniciais permanecem pequenos quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, quando a evolução de duas trajetórias, para um determinado conjunto de parâmetros do sistema, inicialmente muito próximas, divergem exponencialmente para $t \rightarrow \infty$, o atrator é chamado estranho ou caótico, isto é, o sistema é caótico. Tais sistemas possuem sensível dependência às condições iniciais. Para quantificar tais sistemas, temos a necessidade de introduzir um método que seja capaz de caracterizá-los. Isto é possível através dos expoentes de Liapunov .

Expoentes de Liapunov, tanto de sistemas dissipativos quanto de sistemas conservativos, caracterizam o comportamento global, isto é, o comportamento assintótico de trajetórias. Eles medem a razão da divergência ou convergência de órbitas inicialmente próximas no espaço de fase. Suponha que um certo tempo transiente tenha passado tal que a trajetória esteja sobre o atrator e $\mathbf{x}(t)$ é um ponto qualquer desse atrator num tempo t . Considere um deslocamento infinitesimal $\delta(0)$. Para sistemas caóticos vale a seguinte propriedade:

$$|\delta(t)| \approx |\delta_0| e^{\lambda t}, \quad (3.12)$$

que pode ser observada qualitativamente na figura (3.3). Consideremos a evolução de uma esfera infinitesimal de condições iniciais definida no espaço de fase do sistema (3.1). Sob a ação do fluxo, essa esfera vai ficar distorcida na forma de um elipsóide. Seja δ_k , $k = 1, \dots, n$, o comprimento do k -ésimo eixo principal do elipsóide. Então, após um tempo t , $\delta_k(t) \approx \delta_k(0) e^{\lambda_k t}$, onde λ_k são os expoentes de Liapunov (um sistema n -dimensional possui n expoentes de Liapunov). Para t grande, o diâmetro do elipsóide vai ser controlado pelo λ_k mais positivo, como pode ser visto qualitativamente na figura

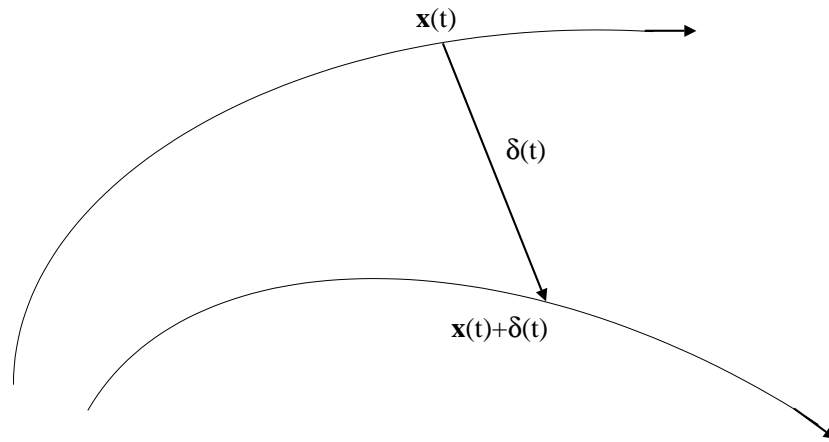


Fig. 3.3: Divergência de órbitas próximas.

(3.4). Os expoentes de Liapunov são números reais e podem ser ordenados em ordem

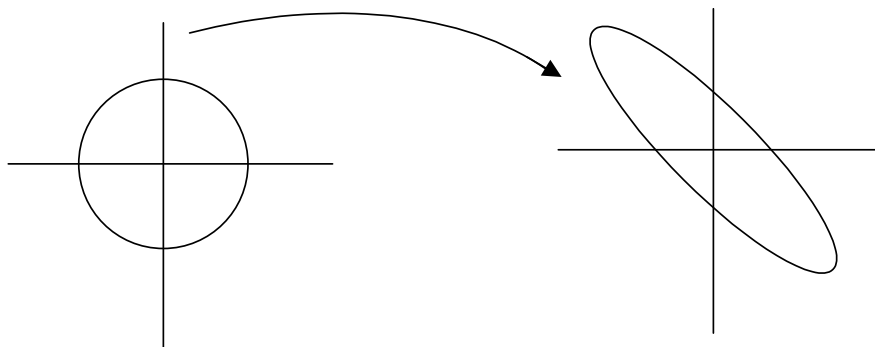


Fig. 3.4: Evolução da esfera de condições iniciais.

decrecente: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Os expoentes positivos representam as direções de estiramento no espaço de fase; os negativos as direções de contração e os expoentes nulos representam a direção marginal. Se a trajetória não termina em um ponto fixo, então pelo menos um expoente de Liapunov é nulo. A razão para isto é que a trajetória evolui com o tempo sem ir para um final, não havendo contração nem divergência ao longo desta. A soma dos n expoentes do espectro de Liapunov mede a razão da contração do espaço de fase. Mas pela equação (3.2) a razão da contração do espaço de fase também

é dada pelo divergente do campo vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) . \quad (3.13)$$

Conseqüentemente, para sistemas dissipativos a soma é negativa, refletindo a contração do espaço de fase; para sistemas conservativos a soma é zero.

Um dos algoritmos mais utilizados para o cálculo numérico do espectro de Liapunov de sistemas de equações diferenciais é o de Wolf *et al.* [19], baseado nas técnicas desenvolvidas independentemente por Shimada e Nagashima [20] e Benettin *et al.* [21]. Ambas basearam-se na técnica desenvolvida por Benettin *et al.* [22] para o cálculo do máximo expoente de Liapunov. Uma técnica diferente é dada por Eckmann e Ruelle [23].

3.2.3.1 Definição de Expoentes de Liapunov

A diferença infinitesimal $\boldsymbol{\xi}(t)$ de duas trajetórias vizinhas evolui no tempo de acordo com a equação variacional

$$\dot{\xi}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \xi_k , \quad i = 1, \dots, n , \quad (3.14)$$

onde $\partial f_i / \partial x_k$ são os elementos da matriz jacobiana do campo vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, e que em geral é dependente do tempo. O sistema variacional (3.14) é o termo linear de uma expansão em série de Taylor. Quando a solução é estacionária, isto é, $\dot{\mathbf{x}} = 0$ em (3.1), a matriz jacobiana correspondente é independente do tempo e seus autovalores podem ser calculados analiticamente. Os expoentes de Liapunov de um ponto estacionário são iguais a parte real de seus autovalores. No caso geral não existe solução estacionária, e a equação variacional tem que ser resolvida numericamente. A linearização transfere a dinâmica do espaço de fase para o espaço tangente. Seguindo a evolução do vetor tangente, $\boldsymbol{\xi}(t)$, ao longo da trajetória, constata-se que seu comprimento pode crescer

ou diminuir a uma razão exponencial. Esta razão determina o expoente de Liapunov,

$$\lambda \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\boldsymbol{\xi}(t)|, \quad (3.15)$$

onde $|\cdot|$ significa a norma euclidiana,

$$|\boldsymbol{\xi}| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}. \quad (3.16)$$

No que se refere a qual dos n possíveis expoentes será obtido em (3.15), observaremos que, devido ao efeito do estiramento, todos os vetores tangentes irão alinhar-se na direção de maior crescimento, levando ao maior expoente de Liapunov. Os valores de λ_i poderiam depender do ponto inicial $\mathbf{x}(t=0)$, mas isso foi excluído pelo teorema de Oseledec [24], que justifica o uso de uma direção arbitrária no espaço de fase se existir uma medida ergódica do sistema. Pode-se esperar (com probabilidade 1) que duas condições iniciais escolhidas aleatoriamente, irão divergir exponencialmente a uma razão dada pelo maior expoente de Liapunov.

3.3 Rotas para o caos - intermitência no cenário de Pomeau-Maneville

Existem três rotas básicas já amplamente estudadas para o caos. São elas:

- a) Quasiperiodicidade;
- b) Dobramento de período;
- c) Intermitência.

Descrevemos a seguir algumas características da rota para o caos denominada intermitência. Esta rota foi descoberta em 1980 por Pomeau e Manneville [4] e as suas principais propriedades são detalhadas em [25].

3.3.1 Comportamento característico

Os sistemas que estão em regime intermitente se caracterizam basicamente por uma resposta linear num certo intervalo de tempo - as denominadas fases laminares - mas que é abruptamente modificada por estouros caóticos de rápida duração que ocorrem a intervalos irregulares. Um exemplo é o comportamento intermitente apresentado pelo sistema analisado nesta dissertação, como podemos observar na figura 3.5. Nela,

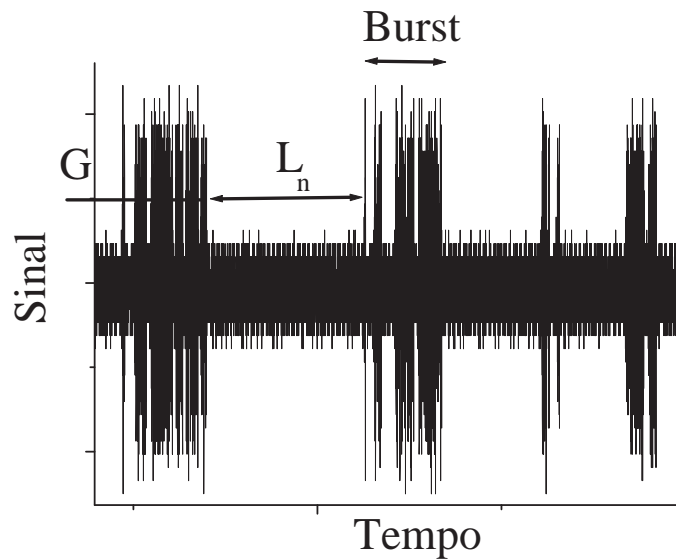


Fig. 3.5: Exemplo de sinal intermitente

estabelecemos que G é o limiar que define a ocorrência de um estouro se a amplitude do sinal for maior que G ou de uma fase laminar se a amplitude do sinal for menor que G . Também definiremos que L_n será o tamanho da n -ésima fase laminar.

3.3.2 O mecanismo que provoca a intermitência

Para um sistema dinâmico qualquer, vamos impor que ele possua um parâmetro de controle que passaremos a denominar a partir de agora por ε . Para certos valores de ε , este sistema dinâmico possuirá um ciclo limite atrator. Portanto, nesta situação,

o sistema em questão estará oscilando e será estável frente a pequenas perturbações. No entanto, à medida que aumentarmos este parâmetro de controle, chegar-se-á em um determinado valor crítico do parâmetro de controle - ε_c - onde aparecerão estouros caóticos. Ao nos afastarmos deste parâmetro crítico, estes estouros serão cada vez mais freqüentes, até a resposta do sistema se tornar completamente caótica.

Pomeau e Manneville pensaram em termos da seção de Poincaré para explicar este mecanismo que leva um sistema dinâmico ao comportamento intermitente. Deste ponto de vista, para $\varepsilon < \varepsilon_c$, teremos que as oscilações estáveis corresponderão a um ponto fixo estável na seção de Poincaré. Já quando tivermos $\varepsilon > \varepsilon_c$, este ponto fixo se tornará instável. Pelo fato de haver apenas três modos de um ponto fixo poder perder sua estabilidade (em todos eles o módulo dos autovalores do mapa de Poincaré linearizado⁴ torna-se maior que a unidade), Pomeau e Manneville distingüiram três tipos de intermitência, identificadas como tipo I, II e III. Em todos eles a intermitência inicia com uma bifurcação na qual os multiplicadores de Floquet da órbita periódica (ponto fixo na seção de Poincaré) passam de $|\lambda_j| < 1$ ($\varepsilon < \varepsilon_c$) para $|\lambda_j| > 1$ ($\varepsilon > \varepsilon_c$). Podemos então imaginar um círculo de raio unitário no plano complexo de modo que os λ_j possam atravessá-lo de três maneiras diferentes: pelo eixo real (por $+1$ e -1) e por um número complexo qualquer ($\alpha \pm i\beta$ com $\alpha, \beta \neq 0$). De uma forma ou de outra, quando o λ_j atravessa o círculo unitário, a órbita periódica se desestabiliza e, associado a um mecanismo de reinjeção aleatório, a intermitência se estabelece. Pomeau e Manneville criaram então a seguinte classificação:

Intermitência tipo I : passagem pelo círculo unitário por $+1$;

Intermitência tipo II : passagem pelo círculo unitário por $\alpha \pm i\beta$ com $\alpha, \beta \neq 0$;

Intermitência tipo III : passagem pelo círculo unitário por -1 .

Pensando em termos do espaço de fase, podemos compreender que o que ocorre é a resposta do sistema “explodir” em um grande atrator, onde a antiga órbita periódica

⁴ Os autovalores são os multiplicadores de Floquet da seção 3.2.2

limite será um subconjunto deste novo atrator caótico quando $\varepsilon = \varepsilon_c$. Portanto, como resultado da bifurcação, uma órbita periódica torna-se fracamente instável. Em consequência, durante os estouros, a trajetória se afasta da órbita periódica que existia para $\varepsilon < \varepsilon_c$. Existem três tipos genéricos de bifurcações que atendem estes requisitos:

- a) Bifurcação tangente;
- b) Bifurcação de Hopf subcrítica;
- c) Bifurcação de dobramento de período subcrítica.

A cada uma destas bifurcações foi associado um dos três tipos de intermitência: tipo I – a), tipo II – b) e tipo III – c). Entretanto, é importante salientar que somente a perda de estabilidade por uma destas três bifurcações não é condição necessária para que ocorra a rota para o caos através da intermitência. É necessário que também tenhamos um mecanismo de reinjeção ou “relaminarização”, isto é, um mecanismo que reinjete repetidamente a trajetória em uma vizinhança próxima à órbita periódica original. Portanto, os estouros corresponderão a afastamentos da órbita no espaço de fase da trajetória original e as fases laminares, aos instantes em que ela permanecer próxima a ela. Este mecanismo é obviamente necessário pois, se não ocorresse, a trajetória jamais visitaria novamente a órbita original e não teríamos as fases laminares tão características do comportamento intermitente.

3.3.3 Leis de escala

Os três tipos de intermitência do cenário de Pomeau-Manneville apresentam transições distintas próximo a ε_c devido aos seus respectivos mecanismos de bifurcação. Em função disso, podemos esperar um comportamento distinto para cada tipo de sinal intermitente no que se refere à distribuição dos estouros e das fases laminares no sinal. De fato, para cada tipo de intermitência existem duas leis de potência: a probabilidade de encontrarmos uma fase laminar de tamanho n , $P(n)$, e o tamanho médio da fase laminar, $\langle n \rangle$, e que assumem o seguinte comportamento [25]:

a) Intermitência tipo I:

$$P(n) \sim n^{-1/2}$$
$$\langle n \rangle \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1/2}$$

b) Intermitência tipo II:

$$P(n) \sim n^{-2}$$
$$\langle n \rangle \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1}$$

c) Intermitência tipo III:

$$P(n) \sim n^{-3/2}$$
$$\langle n \rangle \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1}$$

Alguns exemplos de estudos sobre a teoria de transição para a intermitência são os artigos de Hu e Rudnick [26] que utilizaram teoria de renormalização de grupos, Hirsch *et al.* [27] que caracterizou o comportamento intermitente na presença de ruído e Ben-Mizrachi *et al.*[28].

4. SINCRONIZAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS

É usual se falar na área de sistemas dinâmicos em sincronização, mas, o que é, ou melhor, o que significa sincronização? Queremos encaminhar a resposta a esta questão neste capítulo, seguindo a linha desenvolvida recentemente por Pikovsky, Rosenblum e Kurths [29].

4.1 O conceito de sincronização

A palavra sincronização é a junção de duas palavras gregas: $\xi\rho\acute{o}\nu\acute{o}\zeta$ (chronos, significando tempo) e $\sigma\acute{\upsilon}\nu$ (sin, significando mesmo, comum), ou seja, sincronização pode ser compreendida como “compartilhando o mesmo tempo”, ou “ocorrendo ao mesmo tempo” [29].

Em dicionários podemos também encontrar outras definições. Por exemplo, para a palavra sincronizar:

- tornar síncrono (ação, movimento, exercício), ..., estabelecer uma relação entre acontecimentos ocorridos ao mesmo tempo, ..., produzir-se ao mesmo tempo, ocorrer ao mesmo tempo, ser contemporâneo ou simultâneo [30];

e para a palavra sincronização:

- condição de duas quantidades periódicas de terem a mesma frequência cuja diferença de fase é constante ou varia em torno de um valor médio [31];

- dois osciladores ou fontes alternadas estão sincronizados se possuem frequências e ângulos de fase idênticos [32].

Entretanto, talvez a melhor e mais atual definição para sincronização seja dada por Pikovsky, Roseblum e Kurths [29] que estabelecem que podemos entender sincronização “como um ajuste dos ritmos de objetos oscilantes devido à sua fraca interação”. Esta definição, por sua vez, merece uma análise um tanto mais detalhada. Por exemplo, quando nos referimos a objetos oscilantes, devemos estender este conceito ao modelo de oscilador auto-suficiente que possui três características básicas:

- a) o oscilador é um sistema ativo, isto é, possui uma fonte interna de energia que é transformada em movimento oscilante. Matematicamente, é descrito por um sistema dinâmico autônomo (sem dependência explícita do tempo);
- b) a forma de oscilação é determinada pelos parâmetros do sistema, e não de como ele iniciou seu movimento;
- c) as oscilações são estáveis frente a pequenas perturbações.

Do ponto de vista experimental, quando se acoplam dois osciladores auto-suficientes, temos que ter em mente que estes dois sistemas sempre possuirão mínimas diferenças entre si, por mais que pareçam semelhantes. Então, quando estabelecemos alguma forma de interação entre eles, isto é, um acoplamento, estamos, na verdade, esperando que ocorra uma modificação do comportamento oscilante, por parte de apenas um dos sistemas - ajustando seu ritmo ao de outro - ou de ambos. Portanto, a função do acoplamento é fazer um oscilador “sentir” a presença do outro. Esta interação deverá ser praticamente imperceptível de tal forma que o sistema não seja modificado significativamente; entretanto, ela deverá alterar os ritmos de cada um dos sistemas.

Quando falamos em ritmos, entendemos que nos referimos à frequência e o período de um oscilador. Disto temos dois conceitos importantes: a frequência natural e o chaveamento (travamento) de frequências. A frequência natural de um oscilador é definida como a frequência de um sistema isolado, sem acoplamento. Já o conceito

de travamento de frequências está relacionado com a interação de dois osciladores não-lineares que, possuindo frequências distintas f_1 e f_2 , quando acoplados, eles poderão começar a oscilar com uma frequência comum f . O fato de eles sincronizarem, ou não, dependerá de dois fatores primordiais:

- a) Intensidade do acoplamento: o quão forte (ou fraca) a interação é. Esta é uma quantidade que varia de acordo com cada sistema e, em geral, de difícil medida em experimentos.
- b) Diferença de frequência: quantifica o quão diferente são os dois osciladores quando desacoplados. Matematicamente, é descrito por:

$$\Delta f = f_1 - f_2$$

Ao contrário da intensidade do acoplamento, esta quantidade é facilmente mensurável experimentalmente.

Podemos entender então que, quando falamos em ajuste dos ritmos, estamos na verdade falando de travamento de frequência. Agora se temos dois osciladores funcionando travados na mesma frequência, isto não necessariamente significa que seus movimentos sejam idênticos. Por exemplo, os dois osciladores podem estar travados tal que as “cristas” e os “vales” das respectivas oscilações coincidam. Por outro lado, eles podem estar travados tal que a “crista” de um oscilador coincida com o “vale” do outro. Um importante conceito para diferenciar esta situação é a **fase** de um oscilador. Matematicamente, a fase é uma quantidade que aumenta em 2π para cada período completado de um sistema oscilante. Daí resulta sua funcionalidade: ela apenas parametriza a forma de onda num ciclo. Quando consideramos dois osciladores, podemos medir a diferença de fase de um com relação ao outro, ela ajuda a distinguir entre os dois regimes de sincronização diferentes referidos acima - a sincronização em fase e a em anti-fase.

Devemos ficar atentos a algumas restrições ao tentarmos identificar o fenômeno

de sincronização num sistema. Por exemplo, não podemos confundir ressonância com sincronização. **Ressonância** é um fenômeno exibido por um sistema oscilante sujeito a uma força externa e periódica, onde a amplitude de oscilação do sistema físico torna-se maior quanto mais a frequência da força externa se aproxima da frequência natural do sistema oscilante. No entanto, ao retirarmos a força externa periódica, as oscilações do sistema cessam, não caracterizando um oscilador auto-suficiente.

É necessário também que possamos distinguir no sistema em questão dois osciladores auto-suficientes para não correr o risco de apenas se analisar duas variáveis pertencentes a um mesmo sistema e que obviamente oscilarão com a mesma frequência.

Uma última ressalva deve ser feita quanto ao acoplamento. Como fora dito anteriormente, a intensidade do acoplamento deve ser fraca, mas qual é o critério para um acoplamento ser forte ou fraco? A resposta está na própria análise do sistema e no critério anterior de se poder distinguir dois osciladores auto-suficientes fracamente acoplados, de tal forma que cada um mantenha sua identidade.

Em suma, em um experimento, se observarmos duas quantidades que oscilam aparentemente sincronizadas, não necessariamente tratar-se-á de um caso de sincronização. Para denominarmos este fenômeno de sincronização, as seguintes condições têm que ser satisfeitas:

- a) Deveremos ter dois osciladores auto-suficientes;
- b) os sistemas deverão ajustar seus ritmos devido à fraca interação;
- c) o ajuste dos ritmos ocorre para um intervalo de parâmetros, isto é, se a frequência natural de um oscilador varia lentamente, o outro, que está acoplado, acompanhará esta variação até um certo ponto em que ambos dessincronizarão.

Portanto, uma simples observação não serve de conclusão para a comprovação da ocorrência de sincronização. Sincronização é, então, um processo dinâmico complexo, e não apenas um estado.

No nosso trabalho consideramos como exemplo de oscilador auto-suficiente o circuito de Rössler como o descrito no capítulo 2. Empregamos dois circuitos montados

da mesma maneira e que, portanto, dentro da resolução experimental, representam dois osciladores idênticos. A seguir veremos como estes dois circuitos podem ser acoplados para que se estabeleça uma interação entre eles.

4.2 Formas de acoplamento

Existem inúmeras formas de realizarmos o acoplamento entre uma ou mais equações que definem a dinâmica de determinado sistema composto, entretanto, muitas delas não possuem interesse prático. Basicamente podemos subdividir as formas de acoplamento em duas grandes classes: acoplamento unidirecional e acoplamento bidirecional. No acoplamento unidirecional, somente um dos sistemas recebe a influência

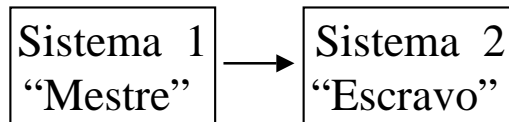


Fig. 4.1: Acoplamento unidirecional.

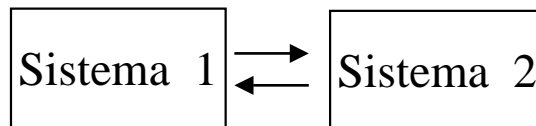


Fig. 4.2: Acoplamento bidirecional.

do outro. O sistema composto pode ser classificado como um sistema do tipo mestre-escravo [3, 33], onde o sistema 1 é o mestre, que dirige o sistema 2 que é chamado de escravo. A dinâmica do sistema escravo é alterada pela influência do sistema mestre, porém, o inverso não ocorre, isto é, o sistema mestre evolui de forma isolada. Já no acoplamento bidirecional ocorre um intercâmbio de informações entre dois ou mais sistemas acoplados. Quanto à forma como é realizado o acoplamento nas equações que descrevem o sistema dinâmico, também podemos distinguir dois casos principais: acoplamento na variável e acoplamento na equação. Lembramos que um sistema dinâmico

pode ser genericamente representado pela equação vetorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad (4.1)$$

onde \mathbf{f} expressa a regra dinâmica; \mathbf{x} , as variáveis dinâmicas e ε , as variáveis estáticas, incluindo o parâmetro de controle. Seja \mathbf{h} a função que irá realizar o acoplamento entre dois sistemas dinâmicos; ela pode ter como argumentos as variáveis dinâmicas dos dois sistemas ou de apenas um deles. Então, o acoplamento na equação é definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) + \mathbf{h}. \quad (4.2)$$

O acoplamento nas variáveis define-se como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \varepsilon). \quad (4.3)$$

Na literatura especializada os estudos relacionados à sincronização de caos empregam em sua grande maioria o acoplamento na equação. Pouca ou nenhuma ênfase é dada ao acoplamento na variável. Por considerarmos que há muitas situações em que, do ponto de vista prático, esse último acoplamento é mais interessante do que o anterior, queremos abordar primordialmente o acoplamento na variável neste trabalho. Sem acoplamento, isto é, quando $\mathbf{h} = 0$, a evolução dinâmica de cada oscilador ocorre de forma independente no seu espaço de fase, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, onde n é a dimensão do sistema. Por último, vamos definir sistemas idênticos. Sejam dois sistemas dinâmicos: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ e $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \varepsilon)$ com $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Estes sistemas são idênticos se forem descritos por campos vetoriais idênticos, isto é, $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g}$. Experimentalmente, essa definição não pode ser seguida à risca, pois sempre existem pequenas diferenças na implementação física do modelo. Por exemplo, na montagem dos circuitos que modelam o sistema de Rössler descrito no capítulo 2, as melhores resistências que pode-se encontrar no mercado atualmente - e que foram usadas no experimento - apresentam uma variação de 1% em seu valor nominal. Realizando o acoplamento entre esses dois sistemas, ob-

teremos um novo sistema composto que terá sua dinâmica descrita no espaço de fase, $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+n}$. Portanto, o acoplamento de vários sistemas acarreta um aumento significativo da dimensão do espaço de fase no qual irá evoluir a dinâmica do sistema composto, tornando difícil a análise, por exemplo, da estabilidade dos seus estados de equilíbrio.

4.3 Sincronização em sistemas caóticos

Quando falamos em sistemas caóticos e na sincronização entre eles, estaremos nos referindo a osciladores auto-suficientes e caóticos acoplados entre si, com todas as características para sincronização descritas anteriormente. Assim, em função da intensidade do acoplamento entre os osciladores, esperamos caracterizar duas situações distintas. Para um acoplamento fraco, a interação faz os dois sistemas oscilarem com uma frequência média aproximadamente igual, mas que não afete a natureza caótica das oscilações, ou seja, as evoluções temporais são distintas. Já para um acoplamento forte, além da frequência média ser a mesma, as amplitudes caóticas também são afetadas pela interação e tendem a ser iguais. O primeiro caso denominamos de **sincronização de fase** e o segundo, **sincronização de amplitudes** ou **idêntica**.

Para ilustrarmos os conceitos de sincronização de fase, sincronização idêntica, variedade de sincronização e variedade transversal, descreveremos a seguir uma montagem com dois circuitos de Rössler acoplados. O sistema acoplado é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -\alpha\Gamma(x_1 + \beta y_1 + \lambda z_1) \\
 \frac{dy_1}{dt} &= \alpha(x_1 + \gamma y_1) \\
 \frac{dz_1}{dt} &= \delta\alpha(g(x_1) - z_1)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_2}{dt} &= -\alpha(\Gamma x_2 + \beta y_2 + \lambda z_2) - \varepsilon(x_1 - x_2) \\
 \frac{dy_2}{dt} &= \alpha(x_2 + \gamma y_2) \\
 \frac{dz_2}{dt} &= \delta\alpha(g(x_2) - z_2),
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde ε é o parâmetro de acoplamento. As constantes são dadas em termos dos componentes dos circuitos, como foi visto no capítulo 2. O sistema composto (4.4)-(4.5) pode ser classificado como um sistema do tipo mestre-escravo [3, 33], onde o sistema 1 é o mestre, que dirige o sistema 2 que é chamado de escravo. O acoplamento é unidirecional, já que somente o sistema 2 recebe influência do sistema 1, sendo que o inverso não ocorre. O circuito que simula esta situação pode ser observado na figura 4.3.

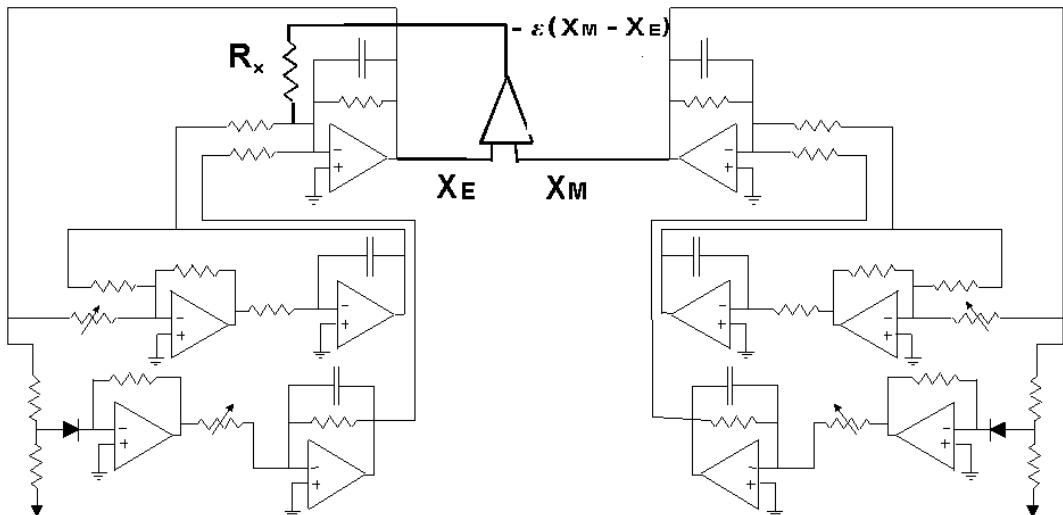


Fig. 4.3: Circuito que simula o sistema composto (4.4)-(4.5). A intensidade do acoplamento é controlada pelo valor de ε . Observe que $X_M \equiv x_1$ e $X_E \equiv x_2$.

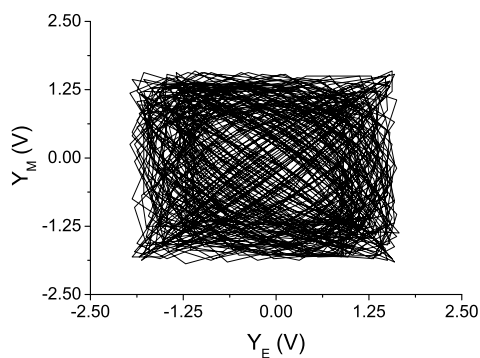
Na figura 4.4 observa-se o resultado experimental obtido, plotando $y_1 \equiv Y_M$ contra $y_2 \equiv Y_E$ para diferentes valores do parâmetro de acoplamento ε . Na figura 4.4(a) $\varepsilon = 0$ e os dois sistemas estão desacoplados. Eles não estão sincronizados, pois percebemos do gráfico que as evoluções de Y_M e Y_E estão totalmente descorrelacionadas. O espaço de fase do sistema composto possui 6 dimensões; a figura mostra uma projeção bidimensional deste. Agora, quando a interação entre os circuitos se torna ativa ($\varepsilon \neq 0$), o gráfico Y_M contra Y_E (figuras 4.4(a) e(b)) muda. Passaremos a explicar a seguir estas mudanças em termos de sincronização de fase e sincronização idêntica.

4.3.1 Sincronização de fase em sistemas caóticos

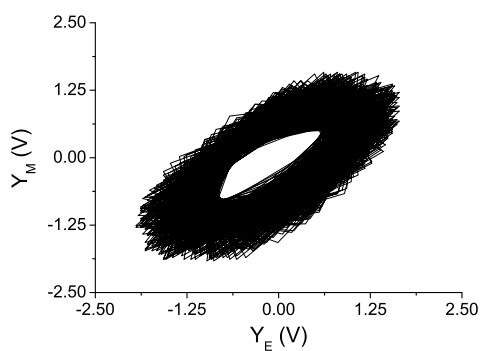
Inicialmente a sincronização era considerada como a completa coincidência dos estados individuais dos sistemas. Isto significava que dois osciladores estão sincronizados quando eles oscilam em fase e suas amplitudes são as mesmas, o que recebe o nome de sincronização idêntica ou ainda de amplitude. Mas de forma geral, pode-se considerar um sistema sincronizado com outro quando existe uma relação entre as suas fases, tal que $n\phi_1 - m\phi_2 = \text{const}$, (m, n são números inteiros e const é uma constante arbitrária), sendo que as amplitudes podem ser bem diferentes. Neste caso temos a sincronização de fase [34–38].

Analisemos a figura 4.4(b) neste contexto. Agora os sinais dos dois osciladores já apresentam uma correlação, uma vez que a figura mostra uma estrutura que nos faz lembrar uma figura de Lissajous. Figuras de Lissajous são geradas num osciloscópio quando se aplicam aos canais vertical e horizontal, respectivamente, as saídas de dois osciladores independentes e que mantém uma diferença de fase constante no tempo. Portanto, na figura 4.4(b), a relação $n\phi_1 - m\phi_2 = \text{const}$ (onde ϕ_1 é a fase de Y_M e ϕ_2 a de Y_E) deve estar sendo satisfeita e, assim, estamos visualizando nesta figura a sincronização de fase de dois sinais caóticos.

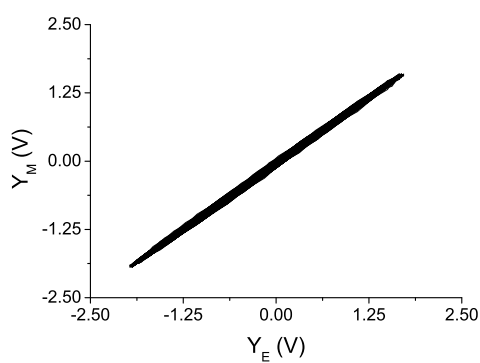
Para investigar essa forma de sincronização, uma variável de fase, bem definida, deve ser identificada em ambos os sistemas acoplados. Isso pode ser feito heurística-



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.4: Resultado experimental obtido para o sistema mestre-escravo (4.4)-(4.5) para (a) $\varepsilon = 0$, (b) $\varepsilon = 0,05$, (c) $\varepsilon = 0,75$ e $R_{11} = 35k\Omega$ em ambos circuitos. Observe que $Y_M \equiv y_1$ e $Y_E \equiv y_2$.

mente para atratores estranhos que espiralam em torno de algum ponto em particular numa projeção bidimensional, como no caso do atrator de Rössler. Mas de modo geral, é difícil obtermos uma variável de fase bem definida para sistemas caóticos.

4.3.1.1 A definição de fase em sistemas caóticos

A fase é a variável que corresponde ao movimento ao longo do ciclo limite (órbita periódica), isto é, ao longo da direção na qual não ocorre contração e nem expansão do espaço de fase [37]. Portanto, queremos definir a fase como sendo a variável que corresponde ao expoente de Liapunov nulo para um fluxo dinâmico contínuo com comportamento caótico. A seguir apresentamos três possíveis definições para a fase de um sistema caótico.

a) Seja um sinal representado pela variável $s(t)$. Temos que determinar a amplitude e a fase de tal sinal. Podemos seguir o método introduzido por Gabor [39], que usa o conceito de sinal analítico e é baseado na transformada de Hilbert. O sinal analítico $\psi(t)$ é uma função complexa do tempo definida por

$$\psi(t) = s(t) + i\tilde{s}(t) = A(t)e^{i\phi_H(t)}, \quad (4.6)$$

onde a função $\tilde{s}(t)$ é a transformada de Hilbert de $s(t)$,

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (4.7)$$

onde *V.P.* significa *Valor Principal de Cauchy*. A fase instantânea, $\phi_H(t)$, e a amplitude, $A(t)$, são definidas univocamente por (4.6).

b) Muitas vezes é possível encontrar uma projeção do atrator em algum plano que lembra um ciclo limite, isto é, a trajetória gira em torno da origem (ou outro ponto que pode ser tomado como sendo a origem). Isto significa que é possível tomarmos de uma forma adequada uma certa seção de Poincaré. Com o mapa gerado pela seção de Poincaré, podemos definir a fase (atribuindo a cada volta

completa um aumento de 2π) da seguinte forma:

$$\phi_M = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad (4.8)$$

com $t_n \leq t < t_{n+1}$ e t_n é o tempo da n -ésima interseção com a superfície secante. Note que para oscilações periódicas, esta definição recai na forma usual da definição de fase. Definida da forma acima, a fase corresponde a uma função do tempo linear por partes. Fica claro que deslocamentos na fase não divergem nem convergem no tempo, portanto, isto corresponde à direção à qual está associada o expoente de Liapunov nulo. Porém, existe uma ambigüidade na escolha da seção de Poincaré a ser utilizada, e conseqüentemente, essa ambigüidade se reflete na definição da fase. Apesar disso, essa definição é particularmente interessante quando trabalhamos com o sistema de Rössler. O atrator desse sistema possui uma projeção no plano (x, y) que é algo próximo de um círculo no qual o raio oscila aleatoriamente em torno de um certo valor.

- c) Se a projeção, que foi mencionada acima, for encontrada, podemos introduzir a fase como sendo o ângulo entre uma certa direção de referência fixa (na projeção) e o vetor traçado desde a origem até o ponto para o qual queremos determinar a fase, isto é,

$$\phi_P = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4.9)$$

Segundo Pikovsky *et. al.* [37], para o sistema de Rössler as três definições de fase anteriormente apresentadas dão resultados equivalentes.

4.3.2 Sincronização idêntica

Finalmente analisemos o resultado da figura 4.4(c). Nota-se uma forte correlação entre os valores de Y_M e Y_E , tanto é que eles tendem a ser iguais. Nesta condição dizemos que Y_M e Y_E estão sincronizados em amplitude. Em conseqüência há uma redução do espaço de fase do sistema composto para 3 dimensões. A figura 4.4(c) mostra uma

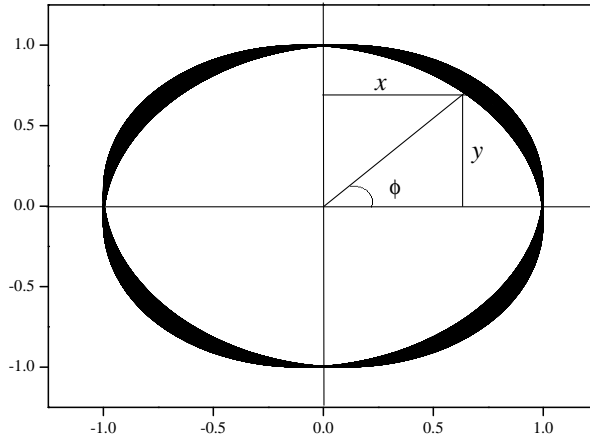


Fig. 4.5: Exemplo de um atrator hipotético que possui uma projeção bidimensional na qual pode-se obter a fase pela relação $\phi = \arctan(y/x)$.

projeção bidimensional. Note-se que a evolução dinâmica do estado sincronizado se dá sobre uma linha nesta projeção. Podemos definir **sincronização idêntica** da seguinte forma. Seja

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \quad (4.10)$$

o campo vetorial que descreve um sistema 1 e

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1), \quad (4.11)$$

o campo vetorial que descreve o sistema 2. Se existir um conjunto de condições iniciais dado por uma região \mathcal{B} no espaço de fase do sistema composto, isto é, para $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tal que para $\forall(\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0)) \in \mathcal{B}$ tenhamos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| = 0, \quad (4.12)$$

então, os sistemas acoplados 1 e 2 estarão sincronizados idênticamente. A sincronização idêntica surge quando a órbita do sistema mestre e a órbita do sistema escravo se aproximam assintoticamente e se fundem numa única órbita, que irá descrever a evolução do sistema composto sincronizado. Em sistemas experimentais, devido ao ruído e a

pequenas diferenças inerentes na montagem experimental, o critério para sincronização idêntica é dado por $|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \leq \xi$, sendo ξ um valor pequeno. O espaço de fase do sistema composto possui 6 dimensões e é formado pelas coordenadas x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 e z_2 . Porém, quando os sistemas estão sincronizados, a evolução se dá sobre uma superfície (variedade) de dimensão menor, definida pelas igualdades: $x_2 = x_1, y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1$. Essa superfície recebe o nome de **variedade de sincronização** [3].

4.3.2.1 Estabilidade: a Variedade Transversal

Continuando a análise do nosso exemplo, chegamos à questão da estabilidade da variedade de sincronização. A propriedade de um sistema acoplado possuir uma variedade de sincronização é independente do fato de o sistema convergir ou divergir para essa variedade durante a sua evolução [3]. Para fazermos a análise da estabilidade introduziremos a seguinte transformação de coordenadas: $x_{\perp} = x_1 - x_2; x_{\parallel} = x_1 + x_2; y_{\perp} = y_1 - y_2; y_{\parallel} = y_1 + y_2; z_{\perp} = z_1 - z_2; z_{\parallel} = z_1 + z_2$. O que fizemos foi passar para um sistema de coordenadas onde três coordenadas estão na variedade de sincronização, $\{x_{\parallel}, y_{\parallel}, z_{\parallel}\}$, e três delas são coordenadas transversais à variedade de sincronização, $\{x_{\perp}, y_{\perp}, z_{\perp}\}$ (essas coordenadas somente são bem definidas próximo à variedade de sincronização). O último conjunto de coordenadas define a **variedade transversal**. Podemos observar essa decomposição esquematicamente na figura (4.6). A estabilidade é garantida quando x_{\perp}, y_{\perp} e z_{\perp} tendem a zero para $t \rightarrow \infty$. O ponto $\{0, 0, 0\}$, na variedade transversal, deve ser um ponto fixo assintoticamente estável. Aplicando a transformação de coordenadas proposta, temos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{\perp} \\ \dot{y}_{\perp} \\ \dot{z}_{\perp} \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \quad (4.13)$$

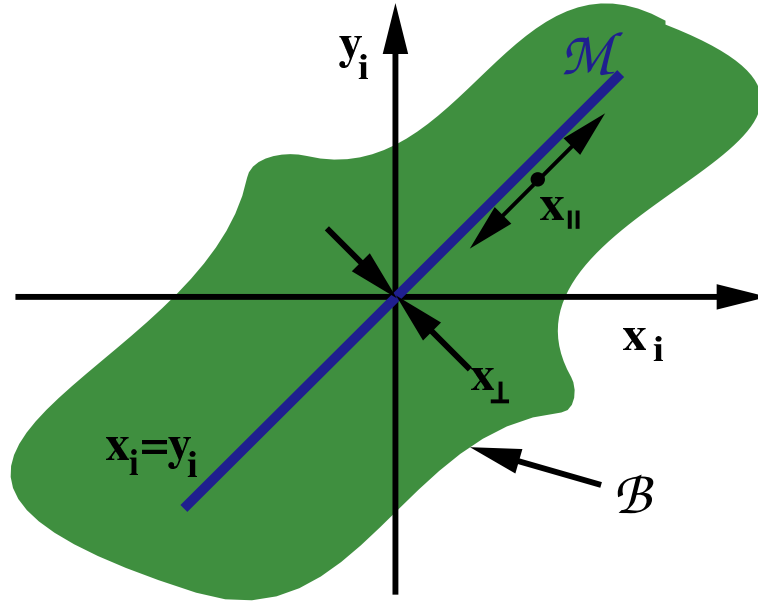


Fig. 4.6: Diagrama esquemático das variedades de sincronização e transversal. Adaptado de L. Junge [40].

Tomando o lado direito dos sistemas (4.4) e (4.5), obtemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_\perp \\ \dot{y}_\perp \\ \dot{z}_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\Gamma - \varepsilon' & -\alpha\beta & -\alpha\lambda \\ \alpha & \alpha\gamma & 0 \\ \delta\alpha\phi & 0 & -\delta\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\perp \\ y_\perp \\ z_\perp \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

onde,

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{se } x_2 < 2,56 \\ \mu & \text{se } x_2 \geq 2,56. \end{cases} \quad (4.15)$$

Portanto, para que a sincronização ocorra, o máximo expoente de Liapunov, obtido da forma usual a partir do sistema (4.14), deve ser negativo. Por outro lado, tomando as equações variacionais do sistema 2 (escravo), obtém-se um conjunto de equações idêntico ao sistema (4.14), implicando por sua vez, que o sistema escravo apresente o máximo expoente de Liapunov negativo. Isto se torna evidente quando atenta-se para o fato de que o sistema 1 (mestre) está dirigindo a dinâmica do sistema 2 (escravo), e

para que a sincronização ocorra entre os dois sistemas, o comportamento dinâmico do sistema escravo deve convergir para o comportamento dinâmico do sistema mestre. Mas isto só é possível se o máximo expoente de Liapunov do sistema escravo for negativo. Estes expoentes certamente dependerão de x_1 e, portanto, são chamados de **expoentes de Liapunov condicionais** [33]. Porém, a condição de que o máximo expoente de Liapunov condicional seja negativo não é suficiente para garantir sincronização de alta qualidade. Novos critérios tem sido propostos para garantir tal sincronização [41, 42].

4.4 Sincronização na presença de ruído

Nos últimos anos, despertou interesse a seguinte questão: qual o papel do ruído na sincronização de caos? Neste aspecto normalmente considera-se o ruído gaussiano de média nula. No campo dos processos estocásticos, um dos resultados mais interessantes foi a descoberta de que flutuações (muitas vezes denominadas de ruído) podem, de fato, induzir algum grau de ordem em uma grande variedade de sistemas não-lineares [43].

O primeiro exemplo de tal efeito é a ressonância estocástica [44], onde um sistema biestável responde melhor a um sinal externo (não necessariamente periódico) sob a presença de flutuações do que sob a dinâmica intrínseca do sistema. Outros exemplos em sistemas puramente dinâmicos temporais incluem fenômenos como transições induzidas pelo ruído [45] e transporte induzido pelo ruído [46]. Em todos estes exemplos observa-se que a mera presença de ruído induz uma certa ordem no sistema.

O papel do ruído na sincronização de sistemas caóticos foi considerado em [47, 48]. Existem muitas divergências quanto à importância do papel do ruído na sincronização de sistemas frente ao sinal dos expoentes de Liapunov. O que mais têm-se aceito é o fato de que a presença do ruído permite ao sistema permanecer por mais tempo na região de convergência, onde o expoente de Liapunov local é negativo, fornecendo então um expoente de Liapunov global negativo. Outra divergência que ocorre diz respeito ao fato de o ruído ter, ou não, média nula. Inicialmente, acreditava-se que somente o ruído com média diferente de zero pudesse sincronizar dois sistemas;

entretanto, recentemente obteve-se um resultado contrário [43].

5. INTERMITÊNCIA MODULACIONAL E SINCRONIZAÇÃO

5.1 A intermitência modulacional

A intermitência modulacional tem se tornado cada vez mais difundida entre estudiosos do caos pelo fato dela aparecer em muitos sistemas sujeitos a ruído, principalmente nos experimentais, nos quais há muito ainda a se estudar e conhecer.

5.1.1 A descoberta da intermitência modulacional

Existiram duas correntes principais que trilharam as características da intermitência modulacional paralelamente ao longo dos anos. A primeira foi a de Fujisaka e Yamada [5] que, de início, não deram tanta atenção a este fenômeno, mas que estabeleceram as principais ferramentas para o cálculo das leis de potência descobertas por Platt, Spiegel e Tresser [6] que a denominaram inicialmente em inglês técnico de *on-off intermittency*.

Por termos descoberto primeiro a linha de Platt, Spiegel e Tresser, seguiremos nesta dissertação seus passos e sua linha de raciocínio; entretanto, usaremos a denominação criada por Fujisaka e Yamada.

A intermitência modulacional se diferencia qualitativamente e quantitativamente das intermitências do cenário de Pomeau-Manneville [49]. Qualitativamente falando, verifica-se que seu parâmetro de bifurcação exibe uma dependência temporal, enquanto que no cenário de Pomeau-Manneville isto não acontece. É neste ponto que

reside a característica fundamental que separa a intermitência modulacional das demais para as quais o parâmetro de bifurcação é estático. No cenário de Pomeau-Manneville a intermitência é induzida pela desestabilização de um ciclo-limite, comportamento que não apresenta dependência temporal. Por sua vez, o mecanismo responsável pela intermitência modulacional é devido a uma força, que depende do tempo, atuante no parâmetro de bifurcação. Já pelo lado quantitativo, podemos construir um modelo estatístico para a distribuição das fases laminares ao longo de um sinal intermitente, independentemente de qual for a sua origem. Este fato implica que poderemos usar então todas as ferramentas da Mecânica Estatística para deduzir as leis de potência associadas aos diferentes tipos de intermitência. Para cada tipo temos leis de potência distintas, exceção feita para as intermitências tipo III e modulacional que apresentam as mesmas leis de potência. Portanto, para diferenciar estas duas últimas, temos que olhar se os respectivos mecanismos de bifurcação exibem uma dependência temporal ou não.

Quando olhamos para o espaço de fase, o sistema dinâmico sujeito a intermitência modulacional apresenta uma variedade invariante. Abaixo do valor do parâmetro crítico, o sistema dinâmico tem um comportamento caótico, mas completamente confinado a esta variedade que possui dimensão inteira menor que a do espaço de fase. No valor para o parâmetro crítico, a variedade perde sua estabilidade e uma bifurcação do tipo *blowout* ocorre. Conseqüentemente as trajetórias próximas à variedade são repelidas [50]. Para valores próximos, mas acima do parâmetro de controle crítico, trajetórias caóticas poderão permanecer longos períodos perto desta variedade repelente. Se não existirem outros atratores caóticos no espaço de fase, teremos então intermitência modulacional [51].

5.1.2 O modelo de mapa para intermitência modulacional

Vamos, como dissemos anteriormente, seguir a linha desenvolvida por Platt *et al.* em [6, 52], onde iniciaremos com um estudo de um mapa de forma geral

$$y_{n+1} = z_n f(y_n), \quad (5.1)$$

e onde vamos impor as condições

$$f(0) = 0 \quad e \quad \left. \left(\frac{\partial f(y_n)}{\partial y_n} \right) \right|_{y_n=0} \neq 0. \quad (5.2)$$

A variável z_n vem de um processo aleatório ou caótico com uma função densidade $\rho_z(z)$. Feitas estas escolhas, estaremos cobrindo uma grande variedade de mapas amplamente estudados e difundidos na área de sistemas dinâmicos como, por exemplo, os mapas logístico e da tenda.

Desejamos, neste momento, compreender as condições para o início do comportamento intermitente no mapa (5.1). Pelas condições (5.2), um ponto fixo será $y = 0$, e ele será instável se e somente se

$$z_n \left. \left(\frac{\partial f(y_n)}{\partial y_n} \right) \right|_{y_n=0} > 1, \quad (5.3)$$

e caso esta condição não seja satisfeita, ela poderá ser imposta renormalizando z . Poderemos sempre fazer a escolha (sem perda de generalidade)

$$\left. \left(\frac{\partial f(y_n)}{\partial y_n} \right) \right|_{y_n=0} \equiv 1. \quad (5.4)$$

Poderemos expandir (5.1) em série de Taylor em torno de seu ponto fixo $y_n = 0$

$$y_{n+1} = z_n \left[f(0) + y_n \left. \left[\frac{df(y_n)}{dy_n} \right] \right|_{y_n=0} + \frac{1}{2!} y_n^2 \left. \left[\frac{d^2 f(y_n)}{dy_n^2} \right] \right|_{y_n=0} + \dots \right].$$

Utilizando (5.2) e (5.4), obteremos

$$y_{n+1} = z_n [y_n + O(y_n^2)]. \quad (5.5)$$

onde $O(y_n^2)$ representa termos de ordem de y^2 e de ordens superiores.

O comportamento intermitente ao longo desta seção será assumido como que controlado pela estabilidade, ou instabilidade, do ponto fixo em $y = 0$. Portanto, para a análise da estabilidade, vamos tomar somente os termos de ordem significativa na expansão de Taylor anterior.

Se tomarmos somente o termo de ordem linear na expansão anterior, teremos:

$$y_{n+1} = z_n y_n. \quad (5.6)$$

Fazendo suas iterações

- $y_1 = z_0 y_0$
- $y_2 = z_1 y_1 = z_1 z_0 y_0$
- $y_3 = z_2 y_2 = z_2 z_1 z_0 y_0$
- \vdots
- $y_n = z_{n-1} y_{n-1} = z_{n-1} z_{n-2} \cdots z_1 z_0 y_0$

veremos que

$$y_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} z_k \right) y_0. \quad (5.7)$$

O comportamento assintótico de y_n será determinado então pelo produtório

$$Z_n \equiv \prod_{k=0}^{n-1} z_k. \quad (5.8)$$

Tomando seu logaritmo natural

$$\begin{aligned}\ln(Z_n) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} z_k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln(z_k).\end{aligned}$$

Aplicando a lei dos grandes números para esta soma, saberemos que, no limite em que para um $\epsilon > 0$ e $n \rightarrow \infty$, a seguinte probabilidade P tende a zero

$$P\left(\left|\frac{\ln z_0 + \ln z_1 + \dots + \ln z_{n-1}}{n} - \langle \ln z \rangle\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0, \quad (5.9)$$

e poderemos escrever

$$\ln(Z_n) \sim n \langle \ln z \rangle$$

assumindo-se que $\ln z$ exista. Neste caso, ele será dado por

$$\langle \ln z \rangle = \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz \ln z \rho_z(z), \quad (5.10)$$

onde $\rho_z(z)$ será a função densidade da variável z .

O comportamento assintótico de y_n será dado então por

$$y_n \sim e^{n \langle \ln z \rangle} y_0. \quad (5.11)$$

Aqui, temos que compreender que y_n é pequeno o suficiente para que possa ser governado pelo mapa linearizado. De (5.11), segue que a condição para o início do comportamento intermitente é de que $\langle \ln z \rangle = 0$. Para $\langle \ln z \rangle > 0$, $y = 0$ é, em média, exponencialmente instável, e é esta instabilidade responsável pelo aparecimento dos estouros. Entretanto, devido à natureza estatística do sinal controlador, a instabilidade não descarta a ocorrência de longos segmentos de órbita na vizinhança de $y = 0$, isto é, fases laminares. Para o caso em que $\rho_z(z) = 1$ (distribuição uniforme), temos pela

equação (5.10)

$$\langle \ln z \rangle = \int_0^1 dz \ln z = \ln a - 1, \quad (5.12)$$

obtendo-se

$$y_n \sim \left(\frac{a}{e}\right)^n y_0. \quad (5.13)$$

Portanto, o valor crítico a_c para o qual ocorre o comportamento intermitente será

$$a_c = e = 2,71828\dots \quad (5.14)$$

Podemos, neste instante, analisar como um exemplo da equação (5.1), $y_{n+1} = z_n f(y_n)$, o mapa logístico para $f(y_n)$ sujeito a uma perturbação aleatória x_n multiplicada por um parâmetro de intensidade a de controle aleatório, isto é,

$$f(y_n) = y_n(1 - y_n), \quad z_n = ax_n \quad (5.15)$$

Aqui, a será um parâmetro de intensidade e $x_n \in [0, 1]$ variará aleatoriamente. Os resultados podem ser vistos na figura 5.1.

Observamos então que, conforme deduzimos o valor do parâmetro crítico em (5.14), o surgimento dos estouros ocorre para valores de $a > e$, e a conseqüente diminuição da duração do tamanho das fases laminares com o aumento do parâmetro de controle.

5.1.3 Leis de potência

Continuando a análise do mapa $y_{n+1} = z_n f(y_n)$, e vamos tomar o limiar para a classificação de um estouro como τ . A fase laminar de duração n será definida então pelo conjunto

$$\{y_1 \leq \tau, y_2 \leq \tau, \dots, y_n \leq \tau, y_{n+1} > \tau\},$$

e estaremos interessados na seguinte questão: dada uma fase laminar, qual será a probabilidade de ela possuir uma duração n ? Matematicamente, esta questão se traduz

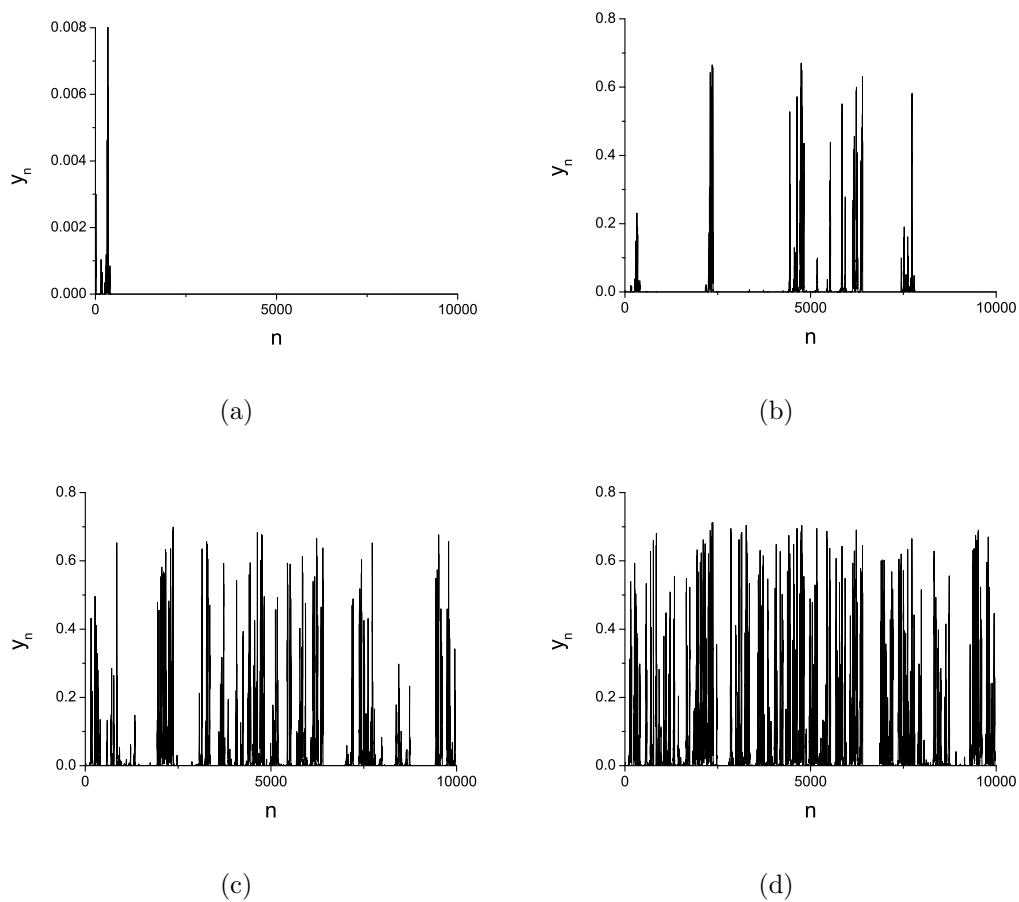


Fig. 5.1: a) $a = 2,67$; b) $a = 2,72$; c) $a = 2,80$; d) $a = 2,90$

na forma

$$\Lambda_n = P \left(\bigcap_{j=1}^n y_j \leq \tau \cap y_{n+1} > \tau | y_1 \leq \tau \right). \quad (5.16)$$

Uma fase laminar é um evento local para o ponto fixo em $y = 0$ [52]. Por esta razão, assumiremos que as fases laminares podem ser previstas a partir do mapa linearizado (5.5). Para limiares τ que são pequenos o suficiente para estarem dentro do domínio linear deste mapa, isto é,

$$\tau \ll \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dx^2} f(0) \right] \tau^2,$$

esta suposição é válida. Para modelos do mapa (5.1), podemos escrever esta probabilidade em função do produtório Z_n , definido em (5.8), se tomarmos o limiar como $\tau \equiv y_0$, obtendo-se então que para uma fase laminar de duração n teremos um evento em que o produtório Z_n permanecerá menor ou igual à unidade por exatas n iterações, e será maior que a unidade na iteração $n + 1$. A probabilidade (5.16) poderá ser escrita então na forma:

$$\Lambda_n = P \left(\bigcap_{j=1}^n Z_j \leq 1 \cap Z_{n+1} > 1 | Z_1 \leq 1 \right). \quad (5.17)$$

Usando a regra de decomposição da probabilidade condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

para eventos A e B , teremos

$$\Lambda_n = \frac{P \left(\bigcap_{j=1}^n Z_j \leq 1 \cap Z_{n+1} > 1 \right)}{P(Z_1 \leq 1)}. \quad (5.18)$$

É conveniente neste instante definirmos o evento

$$E_n \equiv \bigcap_{j=1}^n Z_j \leq 1, \quad (5.19)$$

e sua correspondente probabilidade

$$\lambda_n \equiv P(E_n) \quad (5.20)$$

tendo-se então

$$\Lambda_n = \frac{P(E_n \cap P_{n+1} > 1)}{P(Z_1 \leq 1)}. \quad (5.21)$$

Fazendo uso da identidade

$$P(E_n \cap Z_{n+1} > 1) + P(E_n \cap Z_{n+1} \leq 1) = P(E_n), \quad (5.22)$$

e notando que

$$\begin{aligned} P(E_n \cap Z_{n+1} \leq 1) &= P\left(\bigcap_{j=1}^n Z_j \leq 1 \cap Z_{n+1} \leq 1\right) \\ &= P\left(\bigcap_{j=1}^{n+1} Z_j \leq 1\right) \\ &= P(E_{n+1}) \\ &= \lambda_{n+1}, \end{aligned}$$

substituimos ambas em (5.22)

$$P(E_n \cap Z_{n+1} > 1) = \lambda_n - \lambda_{n+1} \quad (5.23)$$

e segue que

$$\Lambda_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\lambda_1}. \quad (5.24)$$

O problema se resume então a encontrarmos a probabilidade λ_n .

5.1.3.1 Caso $z_n = ax_n$

Vamos considerar a variável de controle nesta seção dada por $z_n = ax_n$, onde x_n será uma variável aleatório que assume valores no intervalo $[0,1]$ e possui função densidade $\rho(x)$. Vamos admitir que o conjuntos das variáveis aleatório $\{x_n\}$ sejam independentes uma da outra, podendo-se escrever sua densidade de probabilidade conjunta como o produto de suas densidades de probabilidade separadas. Como na seção anterior, estabeleceremos que $\rho \equiv 1$.

Os cálculos para esta lei de potência se encontram no apêndice ao final desta dissertação. Lá, chegaremos que, quando $a = a_c$, a probabilidade de uma fase laminar de tamanho n ocorrer será

$$\Lambda_n(a) \sim \frac{e}{2\sqrt{2\pi}} n^{-3/2}$$

Já quando o parâmetro de controle for um pouco maior que a , digamos $a = a_c + \delta$, onde $\delta \ll 1$, teremos uma expressão da forma:

$$\Lambda_n(a) \sim \frac{e}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2\right) n^{-3/2}$$

Observamos então que, para o início dos estouros ($a = a_c$), a distribuição das fases laminares obedece a uma lei de potência de expoente $-3/2$. Segue também que não existe um tempo de escala característico nem fases laminares de comprimento arbitrariamente longo. Já para valores do parâmetro de controle acima do crítico, encontramos um decaimento exponencial com tempo característico n_c dado por

$$n_c = \frac{2e^2}{\delta^2} \tag{5.25}$$

tal que, se $n < n_c$, a lei de potência de $-3/2$ dominará a distribuição das fases laminares, do contrário, teremos a queda exponencial.

Como exemplo para a distribuição das fases laminares, usamos de novo o mapa logístico sujeito a uma perturbação aleatória, como feito em [52]. Os resultados estão

na figura 5.2. Para cada gráfico, coletamos um bilhão de fases laminares com um limiar de 0,01 e variando o parâmetro de controle a . Para uma melhor visualização, os eixos se encontram em escala logarítmica e a reta indicada em cada figura possui declividade de $-3/2$.

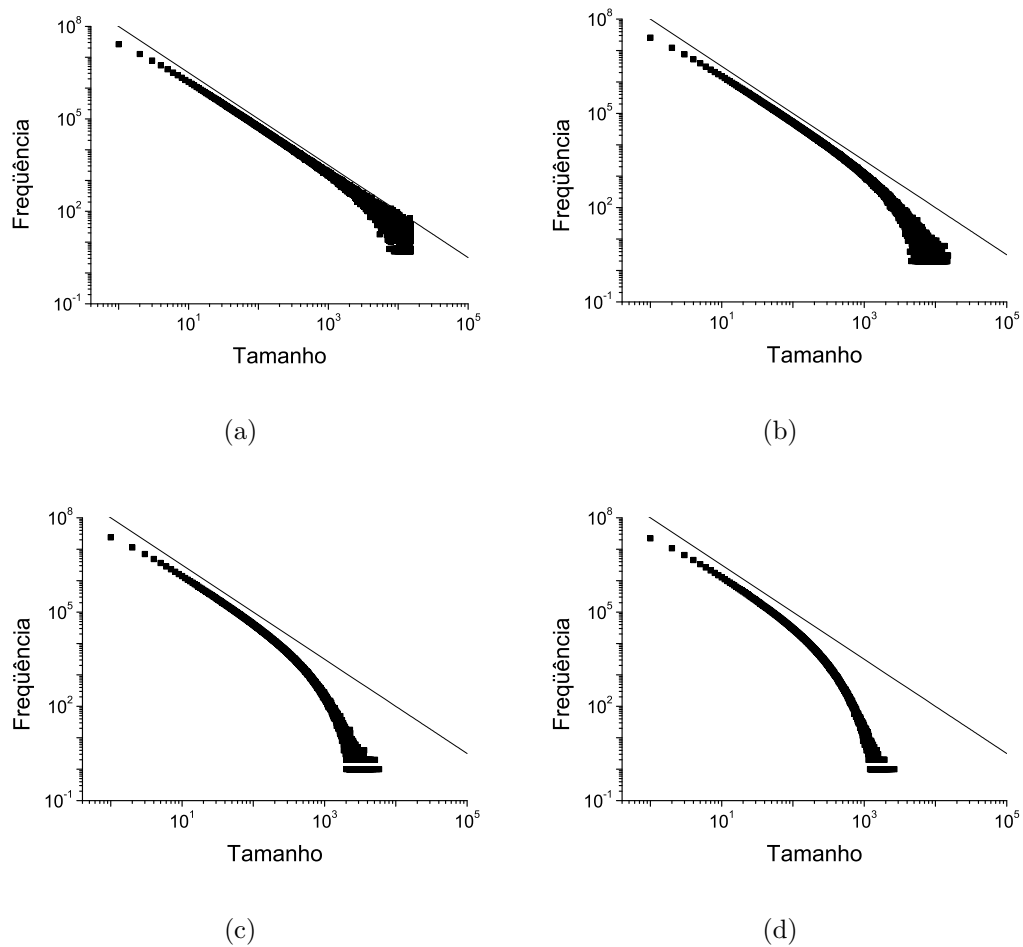


Fig. 5.2: Na simulação numérica para a distribuição das fases laminares do mapa logístico sujeito a uma perturbação aleatória (5.15) [52], a reta possui declividade de $-3/2$ e a) $a = 1,75$; b) $a = 1,80$; c) $a = 1,90$; d) $a = 3,00$

5.1.3.2 Parâmetro de controle geral

Para a nossa relação $y_{n+1} = z_n (y_n + \Theta(y_n^2))$, temos que no domínio logarítmico ela descreve um passeio aleatório uma vez que estabeleçamos $s_n \equiv \ln y_n$ e $q_n \equiv \ln z_n$

$$s_{n+1} = q_n + s_n, \quad (5.26)$$

onde a variável q_n terá função densidade $\rho_q(q) = e^q \rho_z(z)$.

Nesta situação, não existe perda de generalidade se escolhermos $s_0 = 0$ em (5.26), e a distribuição das fases laminares será da forma:

$$\Lambda_n = P \left(\bigcap_{j=1}^n s_j \leq 0 \cup s_{n+1} > 0 \mid s_1 \leq 0 \right). \quad (5.27)$$

Se definirmos o evento

$$g_n \equiv P \left(\bigcap_{j=1}^n s_j \leq 0 \right), \quad (5.28)$$

poderemos seguir um procedimento similar ao da seção anterior e escrever Λ_n em função de g_n

$$\Lambda_n = \frac{g_n - g_{n+1}}{g_1}. \quad (5.29)$$

A fim de encontrarmos g_n , definimos uma função geratriz para essa probabilidade

$$G(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n,$$

e então o seguinte teorema valerá [53]:

$$\ln [G(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} P(s_n \leq 0). \quad (5.30)$$

Vamos considerar, em um primeiro momento, que $\rho_q(q)$ é simétrica, isto é, $\rho_q(-q) = \rho_q(q)$. Nesta situação, a probabilidade de que estejamos no lado esquerdo

da origem é igual à probabilidade de que estejamos do lado direito após a n -ésima iterada, ou seja

$$P(s_n \leq 0) = \frac{1}{2},$$

e para o somatório, basta lembrarmos do cálculo fundamental que

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \quad (5.31)$$

para encontrarmos

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

Os coeficientes g_n serão dados pela relação

$$g_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} G(t) \right) \Big|_{t=0}$$

fornecendo g_n

$$g_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Então

$$\begin{aligned} g_n - g_{n+1} &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} - \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)} ((n+1)!)^2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} - \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^{2n+2} (n+1)^2 (n!)^2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left[1 - \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \right] \\ &= \frac{g_n}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Utilizando a aproximação de Stirling, obteremos

$$\begin{aligned} g_n - g_{n+1} &= \frac{1}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \\ &\sim \frac{1}{2n} \frac{\sqrt{4\pi n} e^{-2n} (2n)^{2n}}{2^{2n} (\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{-3/2}, \end{aligned}$$

como obtido anteriormente para o caso particular $z_n = ax_n$.

Este resultado pode ser estendido para todas densidades de probabilidade ρ_q com média zero e variância finita. Estas densidades obedecem à seguinte relação [53]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[P(s_n \leq 0) - \frac{1}{2} \right] = c, \quad (5.32)$$

onde c é uma constante finita (para densidades simétricas, $c = 0$) [53].

Subtraindo (5.31) de (5.30), obteremos

$$\ln [G(t) \sqrt{1-t}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \left[P(s_n \leq 0) - \frac{1}{2} \right].$$

No limite em que $t \rightarrow 1$, o lado direito da equação acima é c , portanto, quando $t \rightarrow 1$:

$$G(t) \sim \frac{e^c}{\sqrt{1-t}}.$$

A fim de encontrarmos g_n , usaremos um outro teorema da análise assintótica: seja o somatório para $G(t)$ convergente para $0 \leq t < 1$ e a seqüência $\{g_n\}$ monotônica com $g_n \geq 0$, então as relações

$$G(t) \sim \frac{\alpha}{(1-t)^l}$$

e

$$g_n \sim \frac{1}{\alpha \Gamma(l)} n^{l-1},$$

onde $l \geq 0$, $0 < \alpha < \infty$ e Γ é a função gama, implicam uma a outra [53]. Aplicando

este teorema à nossa situação, teremos $\alpha = e^c$ e $l = \frac{1}{2}$, obtendo para g_n

$$g_n \sim \frac{e^{-c}}{\sqrt{\pi}} n^{-1/2}.$$

Finalmente, para o numerador de Λ_n , teremos

$$\begin{aligned} g_n - g_{n+1} &\sim \frac{e^{-c}}{\sqrt{\pi}} n^{-1/2} - \frac{e^{-c}}{\sqrt{\pi}} (n+1)^{-1/2} \\ &= \frac{e^{-c}}{\sqrt{\pi}} n^{-1/2} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \right] \\ &= \frac{e^{-c}}{\sqrt{\pi}} n^{-1/2} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \Theta \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right] \\ &\sim \frac{e^{-c}}{2\sqrt{\pi}} n^{-3/2}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\Lambda_n \sim \frac{e^{-c}}{2\sqrt{\pi}} n^{-3/2} \quad (5.33)$$

que possui a mesma forma da expressão encontrada anteriormente, juntamente com a queda exponencial.

5.1.3.3 Média das fases laminares

Uma lei de escala muito estudada nas intermitências é o comprimento médio da fase laminar. Para um controle aleatório, o comprimento médio da fase laminar é dado pela relação (utilizando a fórmula (7.1) do apêndice)

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} n \Lambda_n \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Sabemos das deduções anteriores que o somatório acima não pode ser expresso

em uma forma simples; entretanto, para valores próximos ao parâmetro crítico, uma expressão aproximada para o tamanho médio da fase laminar pode ser obtida como segue. Estamos interessados em comportamentos na região $\delta = a - e$. Uma vez que δ controla a queda exponencial da distribuição das fases laminares, é razoável esperarmos que o comportamento dos termos dominantes pode ser obtido pela substituição da equação (5.33) em (5.34) e convergindo a soma a uma integral:

$$\begin{aligned}
 \langle n \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} n \Lambda_n \\
 &\approx \frac{e}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^{\infty} dn n^{-1/2} \exp\left(-\frac{n}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2\right) \\
 &= \frac{e^2}{2\delta} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{e\sqrt{2}}\right)\right] \\
 &= \frac{e^2}{2\delta} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\delta}{e\sqrt{2}} + \Theta\left(\frac{\delta}{e\sqrt{2}}\right)^3\right)\right] \\
 &\approx \frac{e^2}{2\delta} - \frac{e}{\sqrt{2\pi}}.
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Vemos então que o comprimento médio das fases laminares, fora uma constante aditiva, obedece a uma lei de potência da forma:

$$\langle n \rangle \sim \delta^{-1} \tag{5.36}$$

5.1.4 Leis de escala - parâmetro de controle caótico

Quando trabalharmos com parâmetros de controle caóticos, a análise feita anteriormente para a distribuição das fases laminares não poderá mais ser aplicada a estes casos uma vez que a suposição de independência entre os eventos não mais valerá para o controle caótico bem como as correlações estarão sempre presentes em séries temporais caóticas. O que podemos fazer, de início, é tomar por base um exemplo mostrado a seguir: um mapa logístico $y_{n+1} = ax_n y_n (1 - y_n)$ sujeito a um parâmetro de controle x_n que varia de acordo com um outro mapa logístico da forma $x_{n+1} = \alpha x_n (1 - x_n)$. A

variação do parâmetro a é mostrada na figura 5.3.

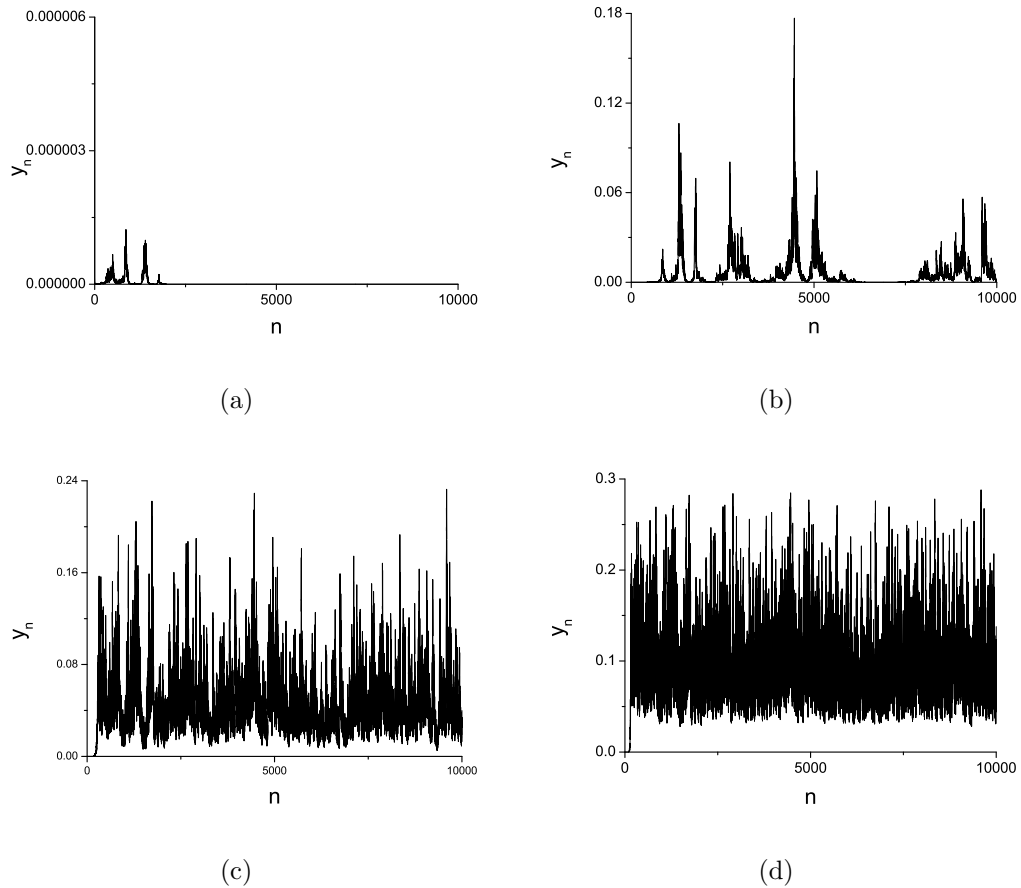


Fig. 5.3: Para todos os mapas estabelecemos $\alpha = 3,75$ e a) $a = 1,66$; b) $a = 1,68$; c) $a = 1,75$ e d) $a = 1,80$

A lei de potência de $-3/2$, também foi observada para vários valores do parâmetro de acoplamento, como podemos observar na figura 5.4.

5.2 A sincronização entre mapas e intermitência modulacional

Nesta seção, iremos analisar o comportamento de dois mapas acoplados, procurando obter o máximo de informação possível das deduções, seguindo a proposta

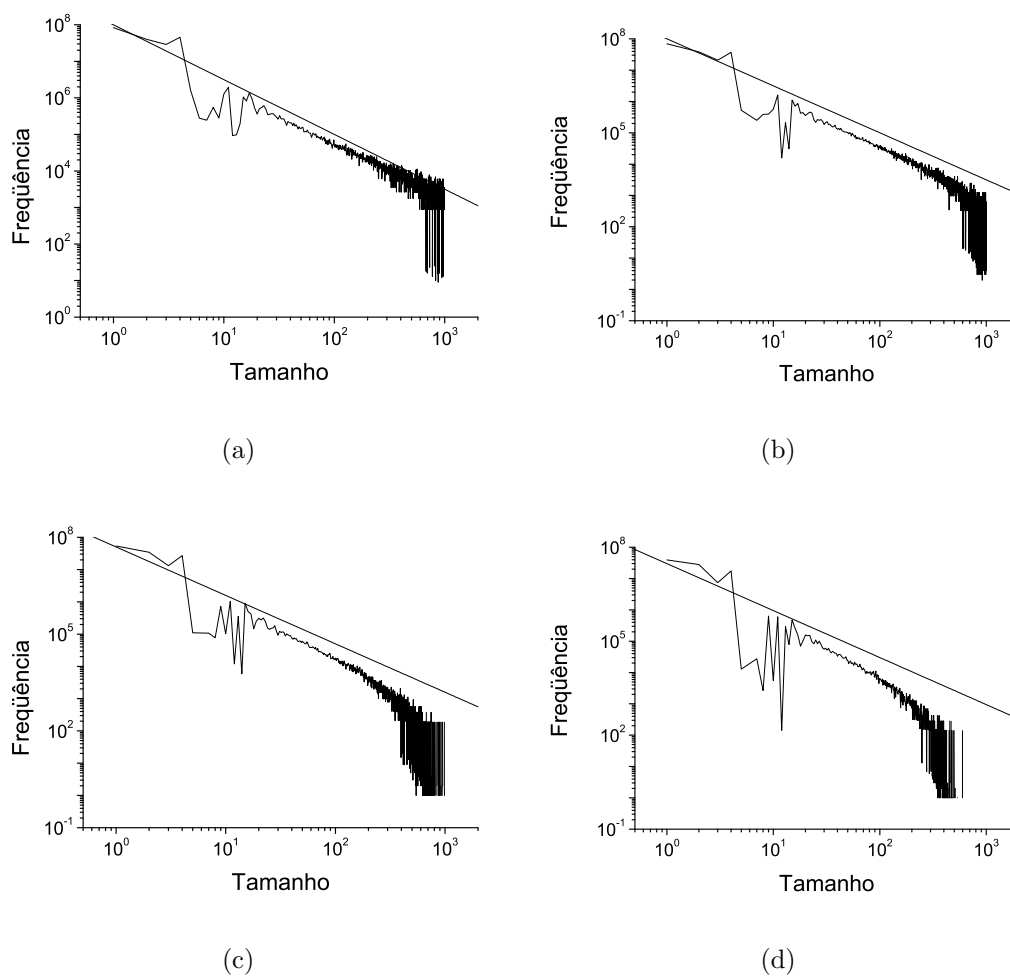


Fig. 5.4: Simulação numérica para distribuição das fases laminares do mapa logístico sujeito a uma perturbação caótica onde estabelecemos $\alpha = 3,75$ e a reta indicada possui declividade de $-3/2$, tendo-se a) $a = 1,68$; b) $a = 1,69$; c) $a = 1,70$ e d) $a = 1,71$

apresentada em Pikovsky [29]. Estaremos interessados em modelos de mapa da forma

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (5.37)$$

Ao trabalharmos com dois mapas, digamos x_n e y_n , estabeleceremos um acoplamento entre eles que deverá ter duas características básicas:

i o acoplamento é contrativo, isto é, ele tende a fazer os estados x e y próximos um do outro e

ii o acoplamento não afeta a simetria do estado de sincronização $x = y$.

Escrevendo-se estes dois mapas em uma forma vetorial, poderemos definir uma matriz de acoplamento L tal que

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} f(x_n) \\ f(y_n) \end{pmatrix}.$$

Uma matriz de acoplamento que satisfaz estas condições *i* e *ii* anteriores será

$$L = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Aplicando o acoplamento (5.38) para o nosso modelo de mapa (5.37), teremos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_n) \\ f(y_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon) f(x_n) + \varepsilon f(y_n) \\ \varepsilon f(x_n) + (1 - \varepsilon) f(y_n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

É importante notar que o sistema (5.39) é completamente simétrico com relação à troca das variáveis $x \leftrightarrow y$ devido à escolha do nosso acoplamento. Analisando-se um pouco este acoplamento, podemos observar alguns casos limites. Por exemplo, se

$\varepsilon = 0$, obtemos um desacoplamento entre os dois sistemas; se $\varepsilon = 1/2$, então logo após uma iteração os dois sistemas estarão sincronizados, com $y = x$ (o valor de $\varepsilon = 1/2$ corresponde ao ponto de acoplamento máximo).

Podemos, neste instante, fazer uma troca de variáveis da forma

$$u_n \equiv \frac{x_n + y_n}{2}, \quad v_n \equiv \frac{x_n - y_n}{2}.$$

Observamos então que, quando os dois sistemas estiverem sincronizados, a variável v_n será nula; e, para estados próximos à sincronização, será de pequeno módulo. Invertendo então esta transformação

$$x_n = u_n + v_n, \quad y_n = u_n - v_n$$

e substituindo-a em nosso sistema (5.39):

$$u_{n+1} + v_{n+1} = (1 - \varepsilon) f(u_n + v_n) + \varepsilon f(u_n - v_n)$$

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \varepsilon f(u_n + v_n) + (1 - \varepsilon) f(u_n - v_n).$$

Isolando u_{n+1} e v_{n+1} , temos:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} [f(u_n + v_n) + f(u_n - v_n)] \quad (5.40)$$

$$v_{n+1} = \frac{1 - 2\varepsilon}{2} [f(u_n + v_n) - f(u_n - v_n)]. \quad (5.41)$$

Linearizando este sistema em torno do estado de sincronização u_n e $v_n = 0$, teremos

$$f(u_n \pm v_n) = f(u_n) + \left(\frac{df}{du_n} \right)_{u_n, v_n=0} u_n \pm \left(\frac{df}{dv_n} \right)_{u_n, v_n=0} v_n + \dots$$

Pelo fato de estarmos trabalhando com a mesma função para ambos sistemas, suas derivadas serão iguais, denotando-as então simplesmente por $f'(u_n)$, onde u_n é o

estado de sincronização, obtendo-se, após a substituição em (5.40) e (5.41).

$$u_{n+1} = f'(u_n) u_n \quad (5.42)$$

$$v_{n+1} = (1 - 2\varepsilon) f'(u_n) v_n \quad (5.43)$$

onde deveremos resolver conjuntamente a equação

$$u_{n+1} = f(u_n). \quad (5.44)$$

Pelo fato de as equações linearizadas não dependerem mais uma da outra, a perturbação longitudinal - u_n - e transversa - v_n - podem ser tratadas separadamente. Conseqüentemente, pelo fato de estarmos agora trabalhando com equações linearizadas que governam o crescimento, ou decrescimento, das perturbações do estado caótico, poderemos fazer uso dos expoentes de Liapunov que medem quantitativamente estas variações. Pelo fato de nosso sistema ser bidimensional, teremos dois expoentes de Liapunov, e pelo fato da dinâmica de u e v serem separadas, estes expoentes podem simplesmente ser definidos como a taxa de crescimento média logarítmica de u e v :

$$\lambda_{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n| - \ln |u_0|}{n}$$

$$\lambda_{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |v_n| - \ln |v_0|}{n}.$$

Se admitirmos que a hipótese ergódica seja válida para estes mapas, poderemos escrever

$$\lambda_{u_n} = \langle \ln |f'(u)| \rangle$$

$$\lambda_{v_n} = \ln |1 - 2\varepsilon| + \langle \ln |f'(u)| \rangle.$$

Das equações do sistema linearizadas (5.42) e (5.43), podemos ver que a perturbação simétrica u é a perturbação do mapa caótico (5.44), e então o expoente de

Liapunov longitudinal λ_{u_n} é o próprio expoente de Liapunov λ do sistema caótico desacoplado. O expoente de Liapunov transverso λ_{\perp} será

$$\lambda_{\perp} = \ln |1 - 2\varepsilon| + \lambda. \quad (5.45)$$

Portanto, o crescimento ou decrescimento médio da perturbação transversa v é governado pelo expoente de Liapunov transverso λ_{\perp} , e o critério de estabilidade do estado de sincronização pode ser expresso na forma:

- $\lambda_{\perp} > 0$: estado sincronizado instável;
- $\lambda_{\perp} < 0$: estado sincronizado estável.

O limiar de estabilidade será dado pela condição $\lambda_{\perp} = 0$, de onde obtemos, através da equação (5.45), o parâmetro de acoplamento crítico ε_c

$$\varepsilon_c = \frac{1 - e^{\lambda}}{2}$$

5.2.1 Perturbação como um passeio aleatório

Introduzindo as variáveis

$$w_n \equiv |v_n|; \quad z_n \equiv \ln |v_n|$$

a equação para w_n será

$$\begin{aligned} w_n &= |1 - 2\varepsilon| |f'(u_n)| w_n \\ &= w_n e^{\lambda_{\perp} - \lambda} |f'(u_n)| \\ &\equiv w_n e^{\lambda_{\perp}} e^{g(u_n)} \end{aligned} \quad (5.46)$$

onde denotamos $g(u_n) \equiv \ln |f'(u_n)| - \lambda$ pelo fato do expoente de Liapunov transverso determinar a estabilidade linear e descrever a dependência da dinâmica da intensidade

do acoplamento ε , usando-o então como parâmetro de bifurcação.

Podemos notar que a média de g é nula, mas seus valores instantâneos flutuam. Nestas duas equações, o processo caótico força a variável w_n na equação (5.46). Aqui, a “força caótica” aparece na forma de um termo multiplicativo $\exp(g + \lambda_\perp)$. Também podemos afirmar que este termo modula a taxa de crescimento de w - a variável w cresce se este termo é maior do que um e decresce caso contrário.

A equação para a variável z_{n+1} pode ser então escrita na forma

$$z_{n+1} = z_n + g(u_n) + \lambda_\perp, \quad (5.47)$$

e então a força caótica aparecerá como um termo aditivo. A principal idéia por trás disto tudo é a de descrever o início da sincronização através do tratamento das equações (5.46) e (5.47) como se fossem excitadas pelo ruído. Portanto, entenderemos o sinal caótico u_n como um processo aleatório, podendo considerar a equação (5.47) como um passeio aleatório unidimensional com passo $g + \lambda_\perp$. Sabemos que a média de g é nula; portanto, o expoente de Liapunov transversal λ_\perp determinará onde o passeio aleatório será limitado. Uma importante característica é o fato de que se os valores de g fossem números aleatórios independentes, poderíamos relacionar, usando a lei dos grandes números, o coeficiente de difusão com a variância de g . Entretanto, o processo g é oriundo de um sistema dinâmico e os valores de u podem ser correlacionados, devendo-se então tomar cuidado no tratamento deste passeio aleatório dinâmico.

A solução da equação (5.47) poderá ser expressa, após N passos, na forma

$$z_N = z_0 + N\lambda_\perp + \sum_{k=0}^{N-1} g(u_k).$$

Utilizando o teorema central do limite para o somatório, podemos definir

$$\Lambda_N \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(u_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln |f'(u_k)| - \lambda.$$

A quantidade Λ_N é denominada de **expoente de Liapunov local**. Pelo teorema central do limite, a densidade de distribuição de probabilidade de Λ_N deverá obedecer uma lei de escala da forma

$$p(\Lambda; N) \propto \exp[N s(\Lambda)], \quad (5.48)$$

onde $s(\Lambda)$ é uma função de escala. Esta é uma função côncava com um máximo simples em zero. O primeiro termo na expansão próximo ao máximo $s(\Lambda) \approx -\Lambda^2/2D$ fornece uma distribuição gaussiana de Λ . O coeficiente D determina a largura da distribuição. A variância de Λ decresce com o número de passos N de acordo com a lei dos grandes números

$$\langle \Lambda \rangle \approx \frac{D}{N}.$$

Podemos escrever então para a variável z_{n+1}

$$z_N = z_0 + N\lambda_{\perp} + N\Lambda \quad (5.49)$$

Para a média de z_N teremos

$$\langle z_N \rangle = z_0 + N\lambda_{\perp} + N \langle \Lambda \rangle \quad (5.50)$$

e para a variância, teremos então

$$\langle (z_N - \langle z_N \rangle)^2 \rangle \propto ND$$

5.2.2 Intermitência modulacional: distribuições de leis de potência

Através dos expoentes de Liapunov locais, poderemos escrever a equação (5.47) na forma geral

$$z_{n+N} = z_n + N\lambda_{\perp} + N\Lambda \quad (5.51)$$

Para valores grandes de N , poderemos negligenciar as correlações dos subseqüentes Λ_N e considerar estas quantidades como variáveis aleatórias independentes. Isto nos permite escrever uma equação para a densidade de distribuição de probabilidade $W(z; n)$. Esta densidade, no passo $n + N$, será a convolução de duas probabilidades:

$$W(z, n + N) = \int d\Lambda p(\Lambda; N) W(z - N\lambda_{\perp} - N\Lambda; n) \quad (5.52)$$

Podemos usar também a analogia do passeio aleatório para encontrar uma descrição quantitativa das propriedades de correlação temporais da intermitência modulacional. Para tanto, modelaremos este passeio aleatório discreto da variável z como um processo de difusão a tempo contínuo com um arrasto médio λ_{\perp} e constante de difusão D . A equação de Fokker-Planck correspondente será então

$$\frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = -\lambda_{\perp} \frac{\partial W(z, t)}{\partial z} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W(z, t)}{\partial z^2} \quad (5.53)$$

Para esta equação, deveremos impor condições de contorno através das condições z_{min} e z_{max} . Sabemos que um estouro ocorre se a variável z se encontra próxima a z_{max} . Para estimar quando um novo estouro ocorrer, poderemos tomar um valor $z_0 < z_{max}$ e considerar o tempo até que o passeio aleatório chegue a z_{max} . Em se tratando da teoria dos processos aleatórios, este é o tempo de primeira passagem. Para o processo de difusão descrito pela equação de Fokker-Planck (5.53) a estatística do tempo de primeira passagem é bem conhecida [53], sendo que a densidade de probabilidade para os intervalos de tempo τ entre os estouros - ou seja, fases laminares - será

$$W(\tau) = \frac{|z_{max} - z_{min}|}{\sqrt{2\pi D\tau^3}} \exp\left(-\frac{(z_{max} - z_0 - \lambda_{\perp}\tau)^2}{2D\tau}\right) \quad (5.54)$$

Próximo ao parâmetro crítico as fases laminares serão extremamente grandes, podendo escrever:

$$W(\tau) \sim \tau^{-3/2} \exp\left(-\frac{\lambda_{\perp}^2}{2D}\tau\right) \quad (5.55)$$

5.3 Sistemas a tempo contínuo e intermitência modulacional

Existem muitos artigos de sistemas a tempos contínuos que comprovam o fenômeno de intermitência modulacional, como observações de sincronização em sistemas de Lorenz acoplados [54], em sistemas de sólitons acoplados [55], sistemas genéricos que possuem subespaços invariantes simétricos [56], osciladores de Kramers sujeitos à ruído [57], osciladores de Duffing acoplados [58], travamento de fase entre osciladores caóticos [59] e mesmo sistemas estocásticos sujeitos a ruído [60].

Em linhas gerais, podemos explicar a relação entre a intermitência modulacional em sistemas dinâmicos e mapas. Na maioria dos sistemas citados acima, existe um invariante instável. Analisando o comportamento destes sistemas quando suas variáveis estão perto deste invariante, pode-se observar que elas divergem dele na média mas, para algumas ocasiões especiais, elas podem permanecer perto deste invariante por longos períodos de tempo. A distância ($\delta(t)$) entre este invariante e as variáveis do sistema pode ser modelada por uma equação do tipo:

$$\dot{\delta}(t) = h(t)\delta(t), \quad (5.56)$$

onde $h(t)$ varia caoticamente ou mesmo aleatoriamente (dependendo do sistema em questão). Esta variação é governada pelas órbitas no invariante, fazendo com que sua média seja igual à h_{\perp} , representando a divergência média exponencial do invariante. Deixando isto mais explícito:

$$\dot{\delta}(t) = (h_{\perp} + \eta(t))\delta(t), \quad (5.57)$$

onde $\eta(t)$ é um processo de média zero, aleatório ou caótico.

Sobre esta última equação, é que se inspiram muitos físicos quando proclamam a existência de intermitência modulacional em sistemas dinâmicos a tempo contínuo

[61, 62], mesmo quando estes sistemas sejam completamente determinísticos. Eles, tal como nós, argumentam que para escalas de tempo distintas das escalas características de $\eta(t)$, o sistema deve apresentar o comportamento que já foi descrito para mapas. Há também a alternativa de tornar a equação discreta, desta maneira obtendo-se mais diretamente o paralelo com os mapas.

6. INTERMITÊNCIA MODULACIONAL NO CIRCUITO DE RÖSSLER

Este capítulo será dedicado à observação experimental do comportamento intermitente em dois circuitos de Rössler acoplados na forma mestre-escravo como veremos logo adiante. Descreveremos aqui o acoplamento realizado entre os dois circuitos, os sinais intermitentes encontrados e a caracterização deste fenômeno como intermitência modulacional com base no que foi visto até agora.

Antes de apresentarmos os nossos resultados, queremos mencionar outros resultados experimentais de intermitência modulacional relatados na literatura. Eles podem ser divididos em duas classes. Numa, o sistema experimental recai numa configuração de sincronização de caos. Exemplos são: dois osciladores não-lineares acoplados unidirecionalmente [63] e bidirecionalmente [64], e, ainda, circuitos modelando o oscilador de Duffing [65]. A outra classe engloba sistemas numa configuração tipo oscilador não-linear sob a ação de uma força estocástica ou caótica. Como exemplos temos: osciladores RLC sofrendo influência de um circuito $R_N C$, onde R_N é um resistor não-linear [49], um oscilador não-linear perturbado quase-periodicamente [66], um circuito que modela as equações do oscilador de Kramers sujeito a ruído externo [67] e ainda lasers de Nd:YAG [68]. Em suma, não há muitos resultados experimentais focando a intermitência modulacional, o que justifica o nosso interesse no estudo de dois circuitos de Rössler acoplados.

6.1 O acoplamento entre os circuitos

O acoplamento escolhido entre os dois circuitos foi o do tipo mestre-escravo de tal forma que perturbávamos a variável V_Z na equação de \dot{V}_X do circuito escravo. Nesta equação, a perturbação consistia em subtrair uma fração do sinal V_Z do mestre na variável V_Z do escravo. Segundo a nomenclatura introduzida na seção 4.2, temos então um acoplamento unidirecional na variável. Passaremos, de agora em diante, a adotar a convenção de $V_k \equiv (k)_{M/E}$, $k = X, Y, Z$, onde M representará o circuito mestre e E representará o circuito escravo.

Para o acoplamento definido pelas especificações do parágrafo anterior, obtém-se o seguinte sistema de equações

$$\frac{dX_M}{dt} = -\alpha(\Gamma X_M + \beta Y_M + \lambda Z_M) \quad (6.1a)$$

$$\frac{dY_M}{dt} = \alpha(X_M + \gamma Y_M) \quad (6.1b)$$

$$\frac{dZ_M}{dt} = \delta\alpha(g(X_M) - Z_M) \quad (6.1c)$$

$$\frac{dX_E}{dt} = -\alpha[\Gamma X_E + \beta Y_E + \lambda(Z_E - \varepsilon Z_M)] \quad (6.1d)$$

$$\frac{dY_E}{dt} = \alpha(X_E + \gamma Y_E) \quad (6.1e)$$

$$\frac{dZ_E}{dt} = \delta\alpha(g(X_E) - Z_E). \quad (6.1f)$$

onde o parâmetro de controle será ε . Ele regula a intensidade do acoplamento.

Para obtermos um circuito eletrônico equivalente ao sistema de equações da forma (6.1), foi necessário a implementação de um circuito acoplador mostrado na figura 6.1, onde a presença do primeiro amplificador operacional, funcionando apenas como um seguidor de tensão, não permitirá a fuga de correntes a partir de Z_M , importando apenas sua tensão. O parâmetro de acoplamento ε determina a quantidade de sinal injetado no circuito escravo e, matematicamente descrevendo-o, será dado por

$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad (6.2)$$

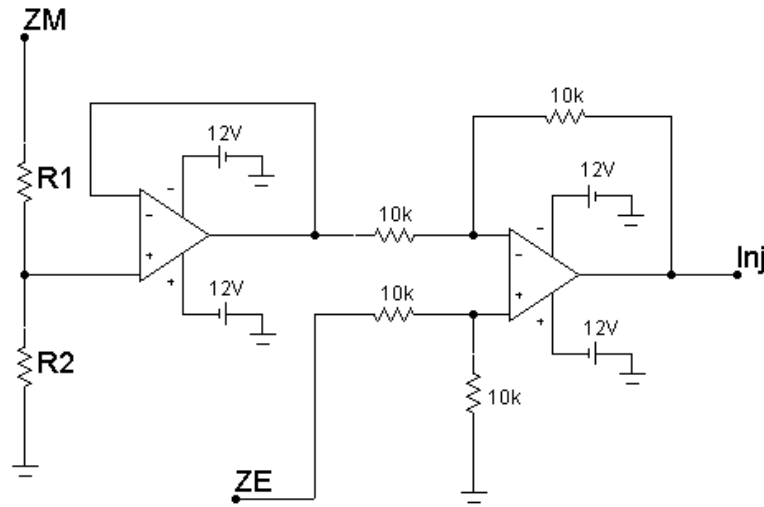


Fig. 6.1: Circuito que faz o acoplamento

que nada mais é do que o divisor de tensão formado pelas resistências R_1 e R_2 ($R_1 + R_2 = 5k\Omega$) na figura 6.1. A tensão de saída do acoplador será

$$V_{inj} = Z_E - \varepsilon Z_M. \quad (6.3)$$

A implementação deste circuito acoplador entre os dois circuitos de Rössler modificados pode ser vista na figura 6.2. Este acoplamento foi inspirado numa experiência de sincronização com dois lasers com absorvedor saturável [69]. O acoplamento era realizado injetando-se uma fração da intensidade de um laser na cavidade do outro laser. A expressão matemática desse acoplamento é similar à equação (6.3). Nesta experiência com lasers não foi relatada a ocorrência de intermitência modulacional.

6.2 Observações preliminares

A caracterização da intermitência modulacional foi em sua totalidade feita em cima do sinal $Y_E - Y_M$. O trabalho foi iniciado a partir de observações preliminares de comportamentos intermitentes para diferentes valores do parâmetro de acoplamento, como podemos ver na figura 6.3. Nela, podemos observar que, à medida que variamos

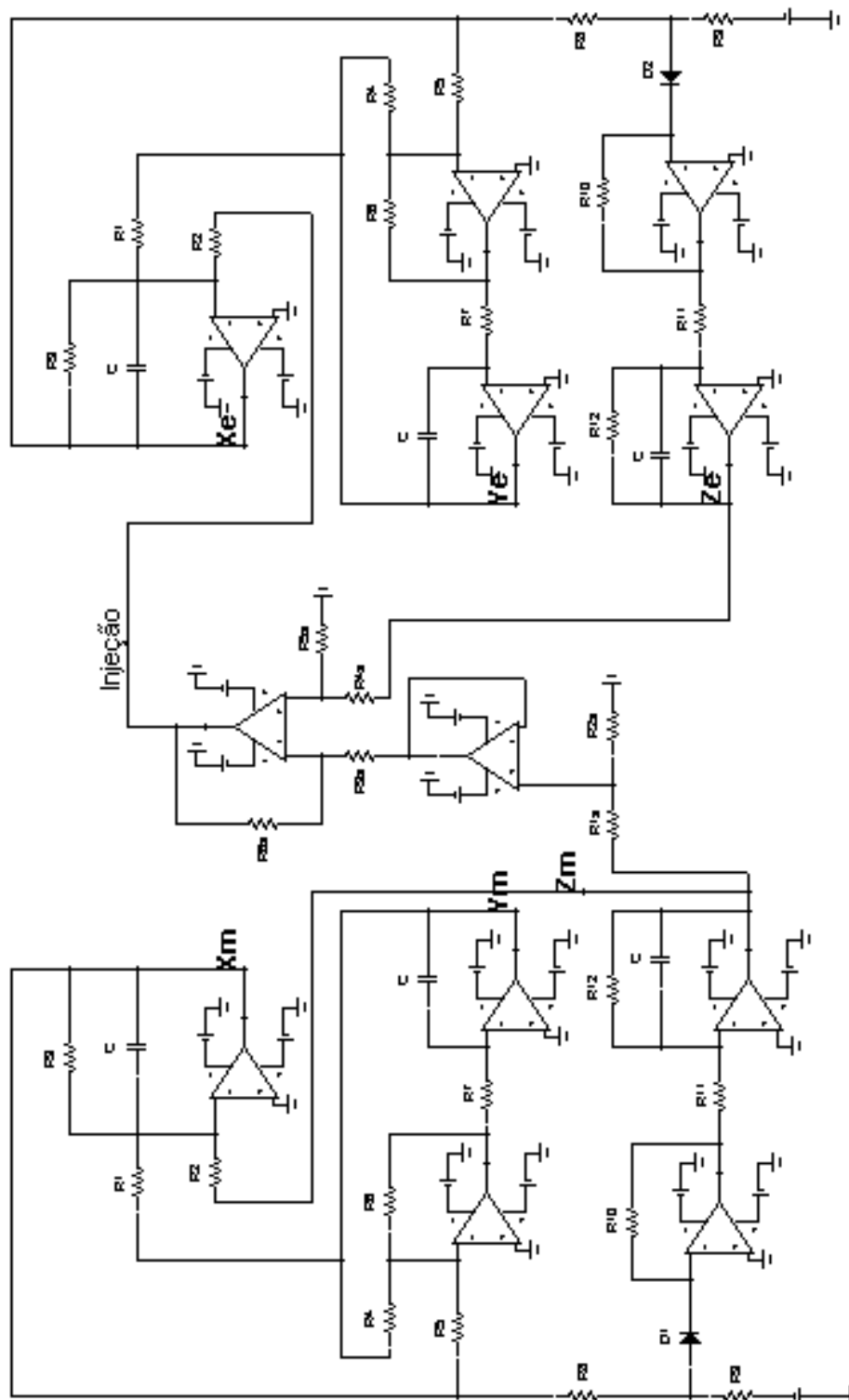


Fig. 6.2: Circuito acoplador conectando os dois circuitos de Rössler. Doravante $R_{11} = 4,8k\Omega$ para todos os resultados obtidos com esta montagem.

o parâmetro de acoplamento ε , o comportamento intermitente - caracterizado pelos estouros - tem a frequência de seus estouros diminuída com o crescimento de ε , até o ponto em que os estouros cessam por completo, recomeçando após um certo intervalo de ε um tanto pequeno. Na nossa montagem experimental estamos restritos a valores de ε tal que $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Dada a escolha do sinal analisado, $Y_M - Y_E$, observamos que a fase laminar corresponderá aos instantes em que esta diferença é minimizada. Dizemos, por enquanto, que ambas as variáveis Y_M e Y_E estarão sincronizadas, pois, como indica a figura 6.4, o gráfico $Y_M \times Y_E$ está praticamente alinhado ao longo da diagonal (reta identidade). Por sua vez, os estouros corresponderão a uma quebra deste estado de sincronização, representando, num mesmo gráfico, uma “fuga” da diagonal, como podemos observar na figura 6.5.

6.2.1 Sincronização entre os dois circuitos

A seguir, podemos observar o comportamento para as seis variáveis $X_M \times X_E$, $Y_M \times Y_E$ e $Z_M \times Z_E$ nas figuras 6.6, 6.7 e 6.8 quando os dois circuitos se encontram sincronizados. As retas mostradas possuem declividade unitária.

Podemos observar a sincronização para as variáveis X e Y ; entretanto, quanto à variável Z , devemos levar em conta que, pela forma de acoplamento, estamos perturbando-a no circuito escravo. Em função disso, Z_M e Z_E não apresentam o mesmo grau de sincronização das demais variáveis. É nesse ponto que reside a dificuldade de denominar este processo de sincronização (idêntica), uma vez que ela não se manifesta em todas as variáveis. Mais adiante retornaremos a esta questão.

6.2.2 Espaço de fase durante o acoplamento

A seguir, podemos observar na figura 6.9 os espaços de fase para o circuito mestre e para o circuito escravo durante o acoplamento, sendo o parâmetro de acoplamento $\varepsilon = 0,8$. Nota-se claramente que a dinâmica do circuito escravo não é significativa-

6. INTERMITTÊNCIA MODULACIONAL NO CIRCUITO DE RÖSSLER 85

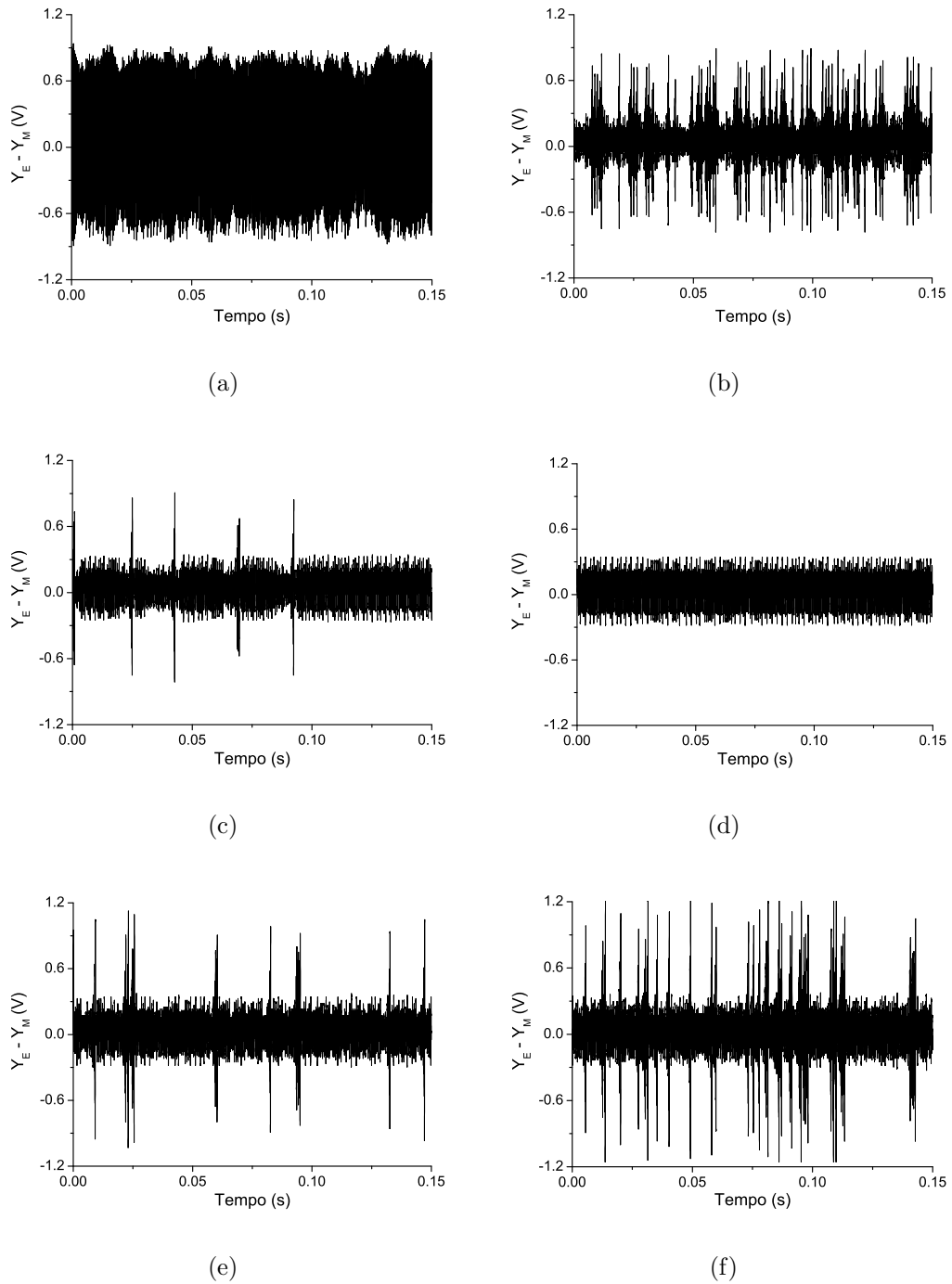


Fig. 6.3: a) $\varepsilon = 0,473$; b) $\varepsilon = 0,634$; c) $\varepsilon = 0,719$; d) $\varepsilon = 0,772$; e) $\varepsilon = 0,938$; f) $\varepsilon = 1,000$

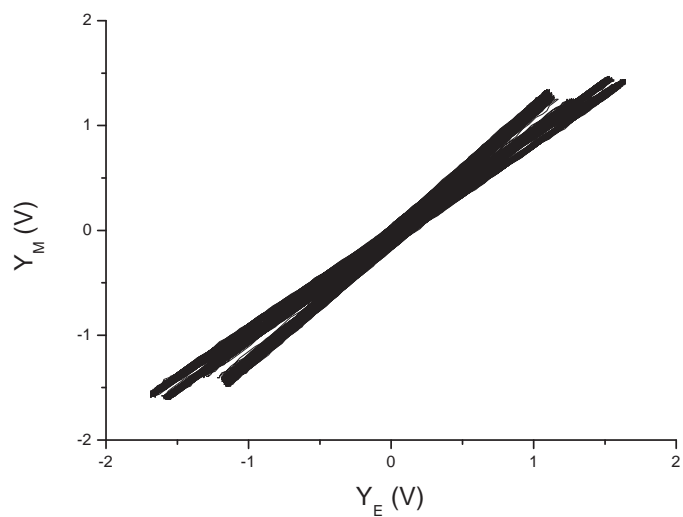


Fig. 6.4: Ocorrência de um estado sincronizado.

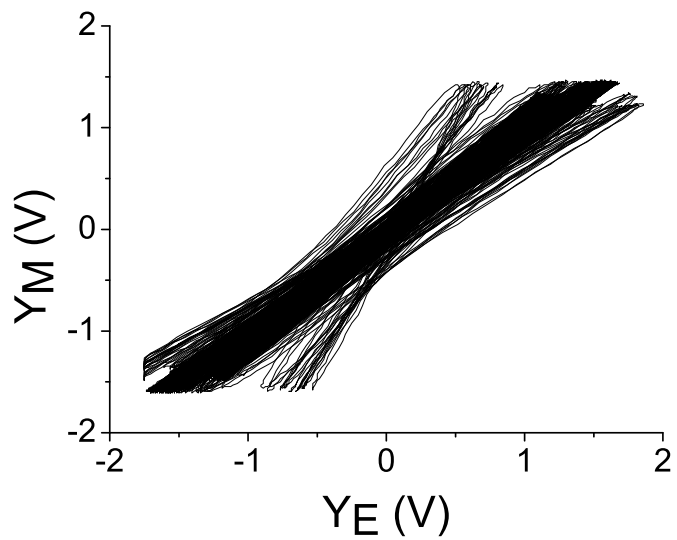


Fig. 6.5: Ocorrência de estouros (compare com a figura 6.4).

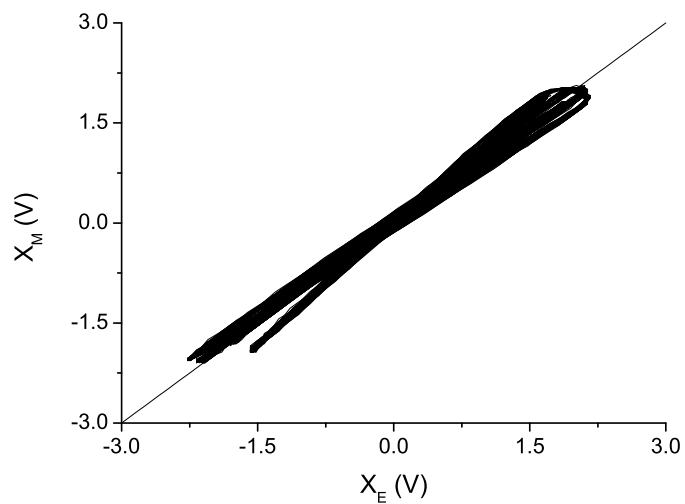


Fig. 6.6: Sinal em X

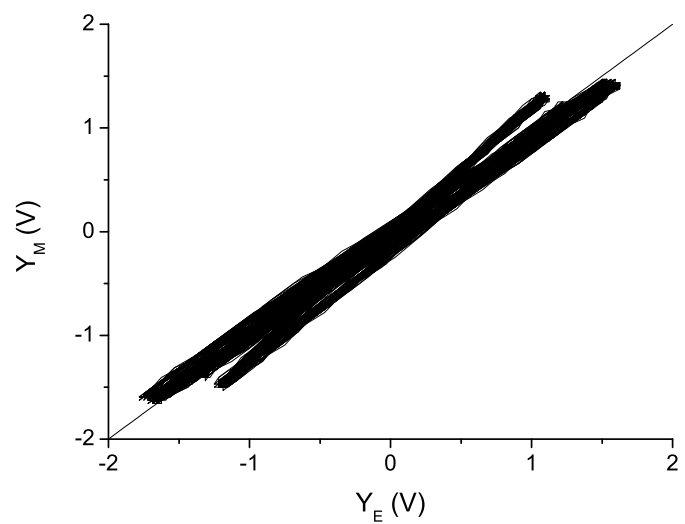


Fig. 6.7: Sinal em Y

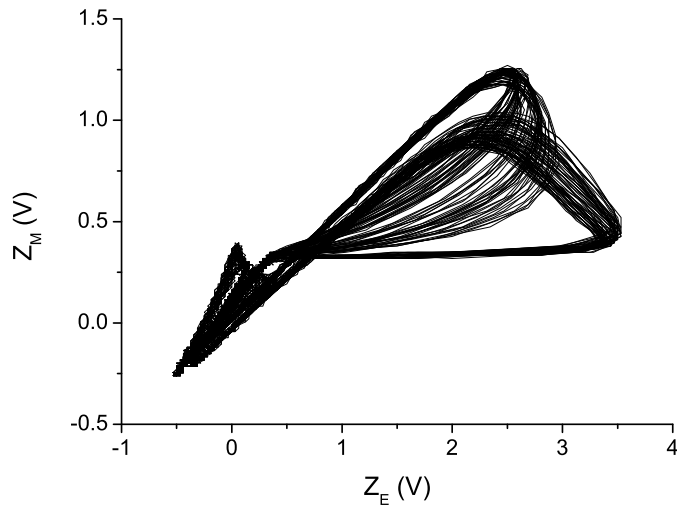


Fig. 6.8: Sinal em Z

mente alterada pela influência do circuito mestre. As respectivas projeções XY são praticamente idênticas.

6.3 A medida das fases laminares

Para caracterizar a intermitência modulacional no circuito de Rössler, queremos obter, experimentalmente, as leis de potência descritas no capítulo anterior. Para tanto, é essencial medir o tamanho das fases laminares.

Esta medida foi feita através de um circuito subtrator (utilizando amplificadores operacionais) onde o sinal de saída é a diferença $Y_E - Y_M$ que segue então direto para um sistema de aquisição de dados construído pelo professor Jorge Amoretti Lisboa. Este sistema está baseado em um microcontrolador 80C52, o qual dispõe de um interpretador BASIC (BASIC-52) em sua EEPROM interna. Conectados externamente ao microcontrolador existem 64 KB de memória, um conversor analógico digital (ADC) de 12 bits (dois canais de entrada), uma interface serial RS232 e um comparador cujo nível de referência pode ser ajustado entre 0-5V. O tempo entre transições na saída

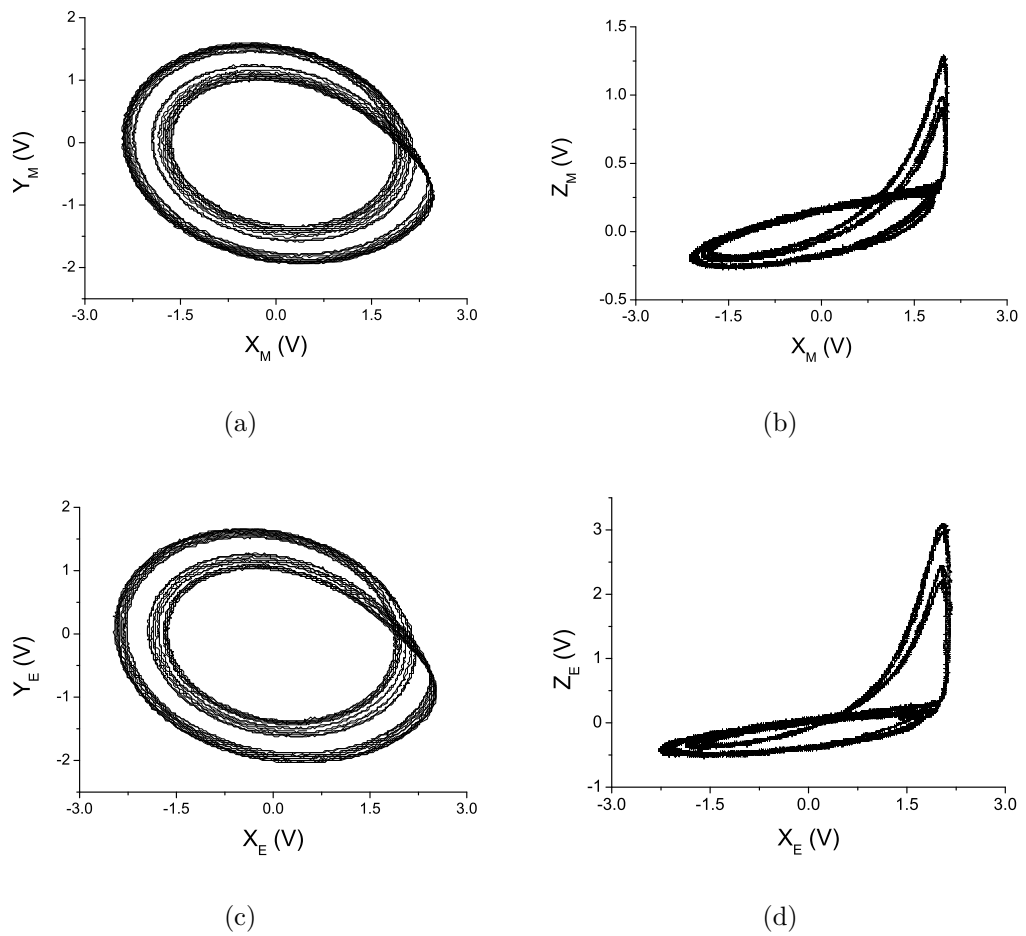


Fig. 6.9: Espaço de fase para o sistema com $R_{11} = 4,82k\Omega$ (Mestre) e $R_{11} = 4,85k\Omega$ (Escravo).

deste comparador é medido através de uma rotina feita em ASSEMBLER, usando a base de tempo (em inglês técnico, clock) do microprocessador como padrão temporal. Esta rotina é chamada a partir de um programa em BASIC que se encarrega também de medir o nível de referência aplicado ao comparador, através de uma das entradas analógicas do conversor ADC. O mesmo programa se encarrega de transferir os dados obtidos para um microcomputador via comunicação serial, onde os mesmos podem ser gravados em arquivos do tipo texto, utilizando no microcomputador o programa de comunicações Hyperterminal do Windows. A figura 6.10 apresenta um diagrama de blocos deste sistema de aquisição de dados

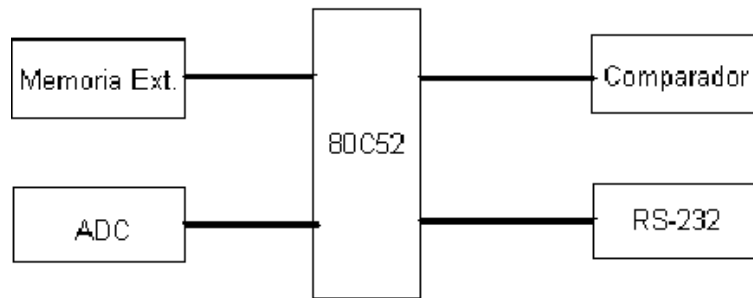


Fig. 6.10: Sistema de aquisição de dados

O procedimento para realizar as medidas era o seguinte: inicialmente, observar a evolução temporal do sinal intermitente $Y_E - Y_M$ num osciloscópio. Definia-se então um valor adequado para o limiar G (veja a figura 3.5). Este valor de tensão G é usado para acertar o nível de referência do comparador do sistema de aquisição de dados. Quando o sinal assume amplitudes abaixo desse valor, inicia uma fase laminar e o comparador aciona a rotina de contagem do tempo; quando o sinal volta a ter amplitudes maiores que G , começa um estouro e o comparador encerra a contagem do tempo. Esta medida da duração da fase laminar é transferida para o computador e armazenada num arquivo em disco. Assim, o número de medidas de fases laminares é limitado pelo tamanho do disco rígido do computador e, portanto, é possível deixar a montagem fazendo medidas ininterruptamente por vários dias. Para cada tamanho da fase laminar gravado, também gravamos o valor de G correspondente. Durante o

tempo em que as medidas são gravadas no computador, o sistema não consegue efetuar uma nova medida. Em consequência, não podemos registrar fases laminares consecutivas. Isto não é um problema, pois o nosso propósito é analisar as fases laminares em termos estatísticos e, para isso, não precisamos de todas as fases laminares, mas uma amostragem já é suficiente. Medidas de fases laminares muito pequenas (tipicamente da ordem do pseudo-período do sinal intermitente) são desprezadas.

6.4 Leis de potência para as fases laminares

Para obter a lei de distribuição do tamanho das fases laminares (5.33), registramos, conforme especificado na seção anterior, a duração de um número muito grande de fases laminares para diferentes valores do acoplamento ε . Em média, a obtenção de uma quantidade de dados da ordem de 50.000 a 100.000 fases laminares levava de um a dois dias, dependendo do quão grande as fases laminares se encontravam. De modo geral, as fases laminares podem variar de cerca de poucas unidades de milissegundos, como na figura 6.11, a algumas centenas de milissegundos, como podemos observar na figura 6.12, embora tenham ocorrido raríssimas ocasiões em que as fases laminares podiam durar até segundos; entretanto, o contador não estava ajustado na ocasião.

Um gráfico inicial é mostrado na figura 6.13. Então, procedemos um levantamento estatístico da frequência das fases laminares que ocorrem dentro de um certo intervalo de tempo Δt pré-estabelecido. O objetivo é construir um histograma onde a largura de cada caixa é o Δt e a altura o número de fases laminares com esta duração. Por definição, a probabilidade de um evento E ocorrer em N tentativas, dado que este evento ocorreu N_E vezes, será $P(E) = N_E/N$, portanto, o gráfico obtido representa a distribuição de probabilidade de ocorrência das fases laminares em função do seu tamanho. Um gráfico típico é o da figura 6.13. Neste gráfico, foram usadas cerca de 100.000 fases laminares com um parâmetro de acoplamento $\varepsilon = 0.81$, $R_{11} = 4,89k\Omega$ para o circuito mestre, $R_{11} = 4,81k\Omega$ para o circuito escravo e um limiar de $400mV$ (os eixos se encontram em escala logarítmica para observarmos melhor a lei de potência $-3/2$).

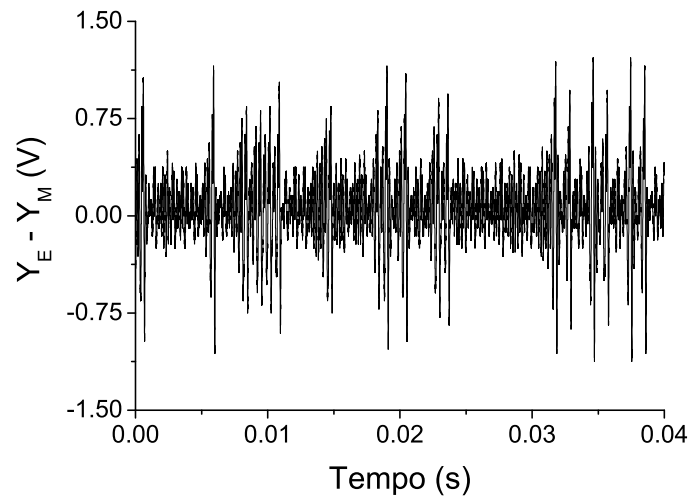


Fig. 6.11: Fases laminares de tamanhos pequenos para $\varepsilon = 0,92$.

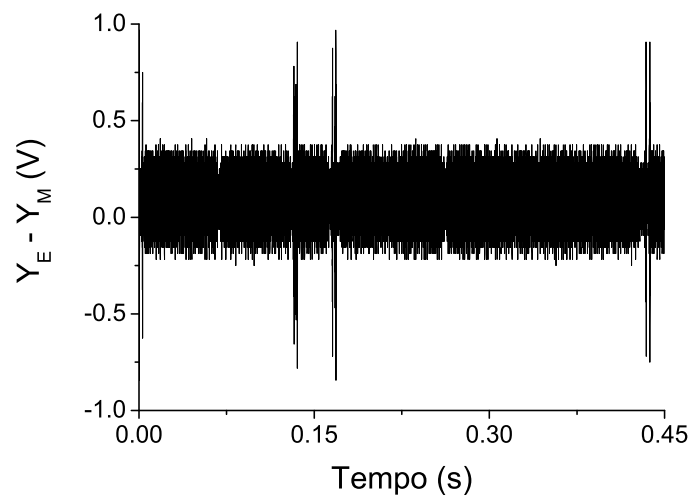


Fig. 6.12: Fases laminares de tamanhos grandes para $\varepsilon = 0,80$.

Para os valores de R_{11} considerados, o circuito de Rössler começa a apresentar um comportamento caótico (observe a figura 2.9). A reta indicada possui uma declividade de $-3/2$.

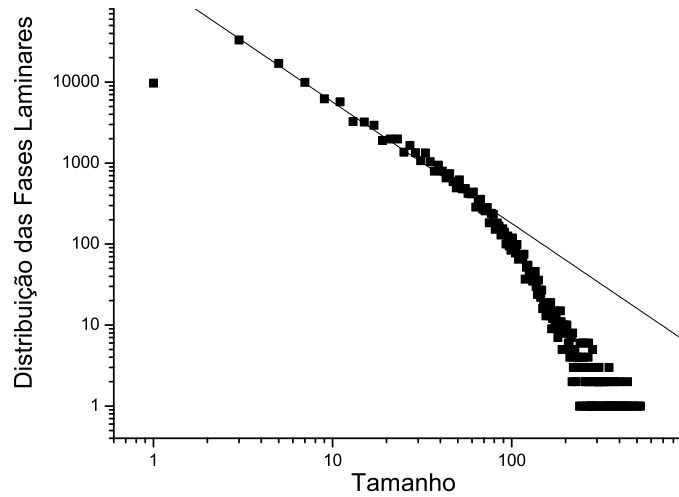
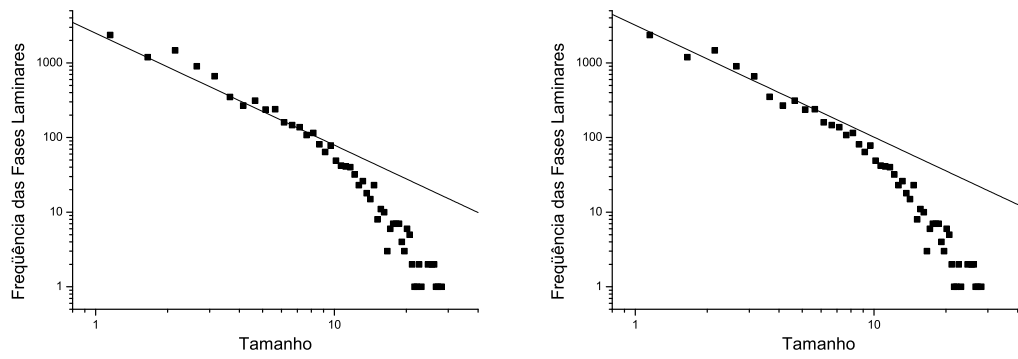


Fig. 6.13: Gráfico típico para a lei de distribuição das fases laminares. A reta indica declividade de $-3/2$ e $\varepsilon = 0.81$

Obtemos também a distribuição das fases laminares para os valores $\varepsilon = 0,62$; $0,69$; $0,72$; $0,81$ e $0,90$, $R_{11} = 68,5k\Omega$ para o circuito mestre, $R_{11} = 68,9k\Omega$ para o circuito escravo e um limiar de $400mV$ como mostrado na figura 6.14. Todas as retas possuem declividade de $-3/2$. Para estes valores de R_{11} , o circuito de Rössler está levemente caótico, de tal modo que, para um valor um pouco maior ele deixa de apresentar caos.

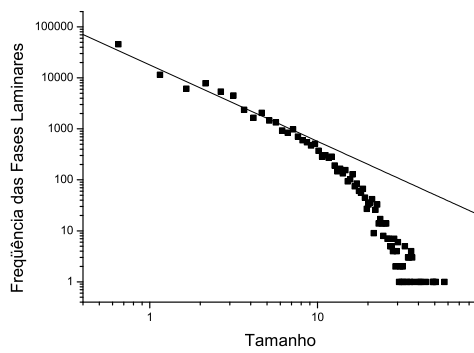
Um fato que ocorreu muitas vezes foram distribuições de fases laminares onde apareciam duas curvas, como podemos observar na figura 6.15. Uma suspeita inicial foi que pequenas variações no limiar ocasionassem estas variações. Elas seriam induzidas por pequenas flutuações na tensão de referência do comparador do sistema de aquisição de dados. Para demonstrar isto, mostramos na figura 6.16 o gráfico da distribuição das fases laminares para diferentes valores de limiar. Uma solução foi a implantação de

6. INTERMITÊNCIA MODULACIONAL NO CIRCUITO DE RÖSSLER 94

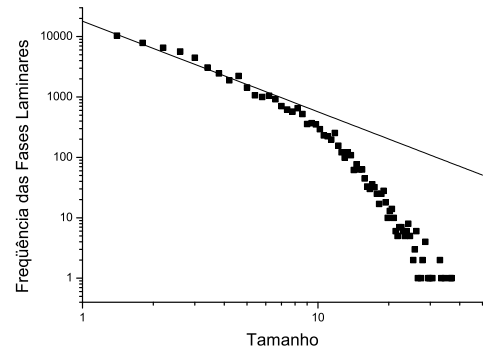


(a)

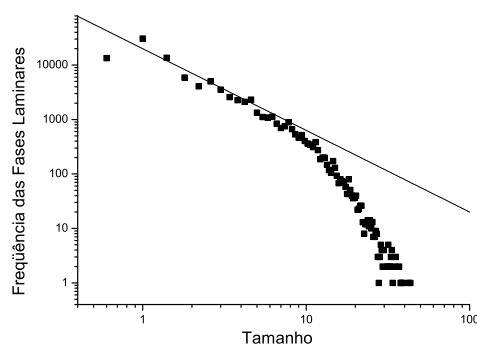
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. 6.14: Todas as retas possuem declividade de $-3/2$ e a) $\varepsilon = 0,62$; b) $\varepsilon = 0,69$; c) $\varepsilon = 0,72$; d) $\varepsilon = 0,81$; e) $\varepsilon = 0,90$

um capacitor em paralelo e de valor mais alto no aterramento do potenciômetro que controlava o limiar, o que, de fato, estabilizou muito o limiar (variações de $1\mu V$), bem como melhorou os gráficos das distribuições das fases laminares. Um segundo fator que poderia ser responsável pela estrutura dupla nos gráficos é o ruído na eletrônica dos circuitos devido a flutuações da temperatura ambiente. A alternativa foi fazer um isolamento térmico do sistema. Entretanto, observamos então que este isolamento não melhorou a qualidade do processo de coleta de dados, como podemos observar na figura 6.17. Surpreendentemente, com isolamento térmico, as fases laminares apresentavam uma flutuação muito maior em tamanho, muitas vezes, os circuitos chegavam a sincronizar - o que implica uma fase laminar de tamanho infinito. As duas séries (com e sem isolamento térmico) foram obtidas uma pós a outra, cada uma demorando aproximadamente 24h para ser coletada.

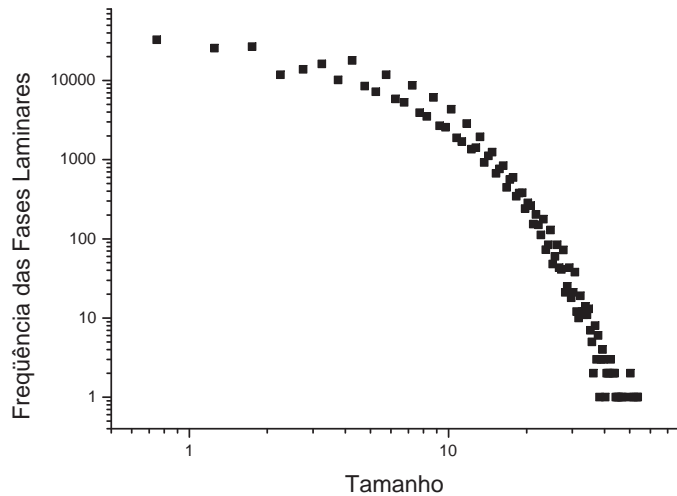


Fig. 6.15: Distribuição das fases laminares com duas curvas.

A segunda lei a se provar é a das médias das fases laminares enunciada no capítulo anterior na (5.36)

$$\langle n \rangle \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1}. \quad (6.4)$$

Experimentalmente, foi determinado que para os valores de R_{11} próximos a

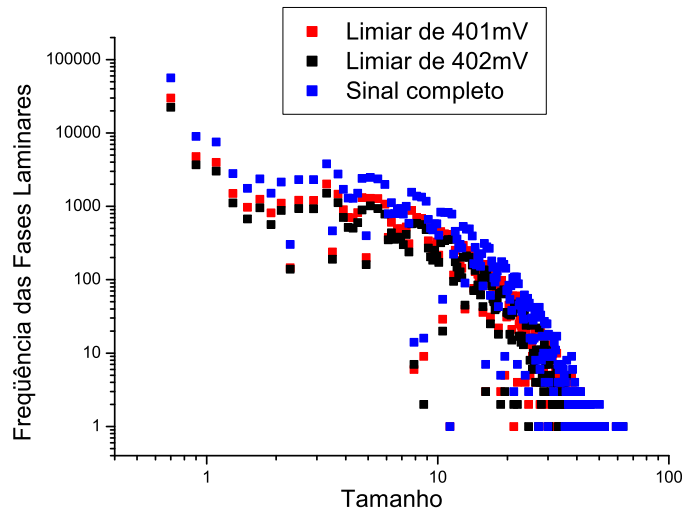


Fig. 6.16: Comparação entre valores diferentes de limiares.

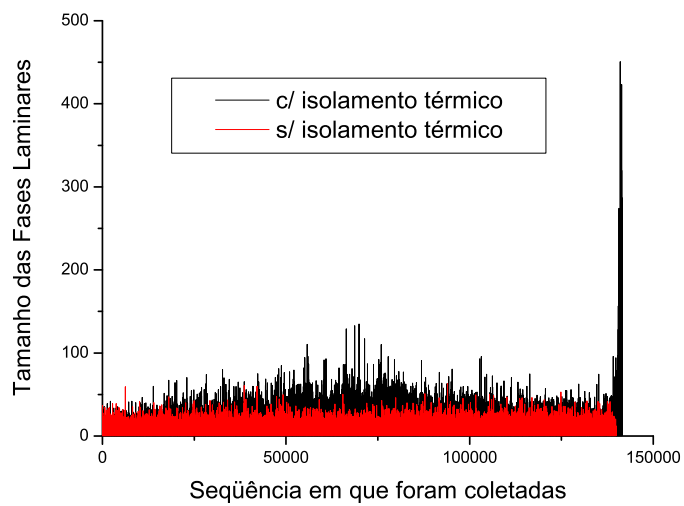


Fig. 6.17: Comparação entre as seqüências de fases laminares coletadas

4,8kΩ obtivemos $\varepsilon_c = 0,72$, obtendo-se o gráfico da figura 6.18 onde cada ponto corresponde a uma média de 30.000 fases laminares.

6.5 Considerações sobre a natureza da intermitência modulacional apresentada

A primeira questão seria se perguntar se temos intermitência do tipo III ou intermitência modulacional, uma vez que ambas possuem leis de potência idênticas. Uma resposta inicial se encontra no próprio tipo de acoplamento que consiste na injeção da fração εZ_M do sinal do mestre, que estava em um estado caótico, na equação \dot{X}_E do escravo. Assim, podemos considerar que a configuração do nosso sistema (6.1) se enquadra na classe de sistemas que são do tipo oscilador não-linear (no nosso caso é o circuito escravo) sob a ação de uma força caótica (o sinal do mestre) que perturba um parâmetro do oscilador ($\lambda \varepsilon Z_M$ na equação (6.1d) do escravo). Este tipo de sistema que tem um parâmetro dependente do tempo é uma condição necessária para a ocorrência de intermitência modulacional. No nosso caso as leis de potência para o sinal intermitente, obtidas na seção anterior, confirmam isso.

Por outro lado, é muito tentadora a idéia de considerar o nosso sistema como exemplo de uma configuração tipo sincronização de caos entre dois circuitos. Um problema seria o comportamento da variável Z pois, conforme observamos na figura 6.8, não obtivemos sincronização na amplitude desta variável. Como já mencionamos, isto é devido ao acoplamento na variável adotado. Em relação a este aspecto, enfatizamos que o termo de acoplamento ($\lambda \varepsilon Z_M$ na equação (6.1d) não se anula nem quando houvesse sincronização ($X_M = X_E, Y_M = Y_E, Z_M = Z_E$). Com essa característica, não poderemos aplicar no sistema (6.1) a técnica de transformação de coordenadas que permite desacoplar, próximo da sincronização, a dinâmica do sistema em movimentos ao longo da variedade de sincronização e movimentos transversais à mesma variedade. Esta técnica funciona muito bem para acoplamentos que se anulam na sincronização (tipo

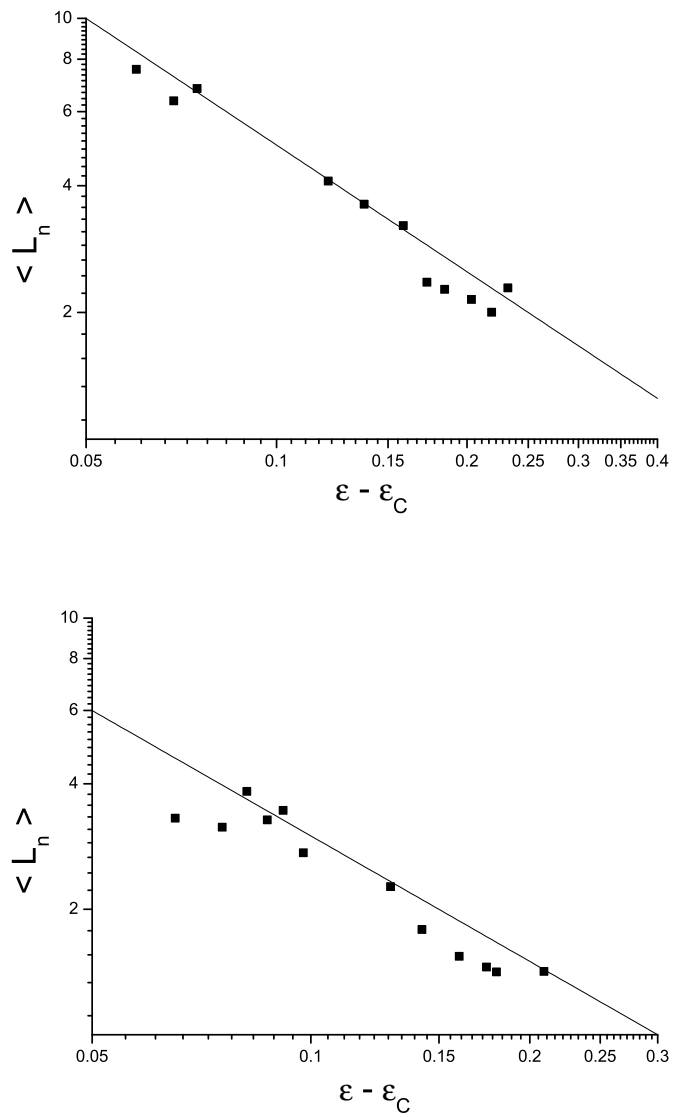


Fig. 6.18: Comportamento da média das fases laminares. A reta possui declividade de -1 .

$-\varepsilon(X_M - X_E)$), como no exemplo empregado na seção 4.3. Poderíamos tentar aplicar o formalismo da variedade de sincronização ao plano definido por $X_M = X_E, Y_M = Y_E$, portanto, não incluindo a variável Z na variedade de sincronização. Não prosseguimos nessa abordagem devido à inerente dificuldade e não temos notícia de uma abordagem semelhante na literatura.

6.5.1 O sistema similar

O exemplo introduzido na seção 4.3 foi implementado experimentalmente, doravante o chamamos de sistema similar. Usamos nos circuitos $R_{11} = 35k\Omega$ e as demais resistências nos dois circuitos têm os valores usuais. Para fazer o acoplamento usamos $R_x = 68\Omega$ (veja-se a figura 4.3). Como mostra a figura 4.4, este sistema apresenta a sincronização idêntica para $\varepsilon = 0,75$. Para valores menores do parâmetro ε , intermitência modulacional é observada e corroborada pela análise numérica do sistema similar. Medindo-se as fases laminares como antes, podemos também observar, na figura 6.19, a lei de potência de $-3/2$ na distribuição das fases laminares para este sistema similar. Para uma análise do comportamento deste circuito na variável Y ,

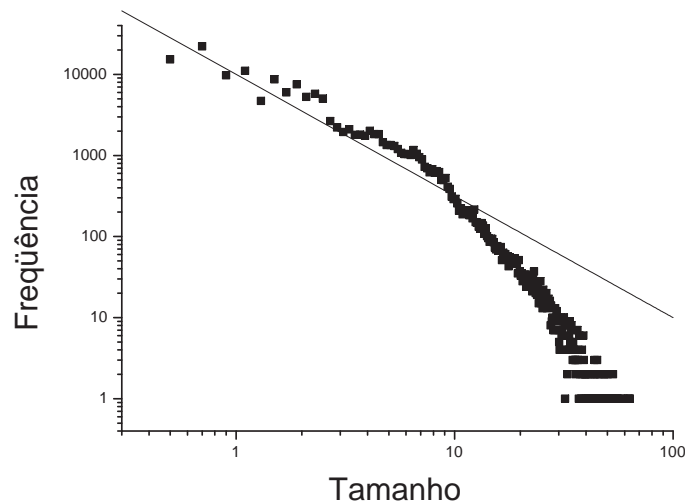


Fig. 6.19: Distribuição das fases laminares para o sistema similar.

podemos observar a figura 6.20. A estabilidade do sistema similar é determinada nu-

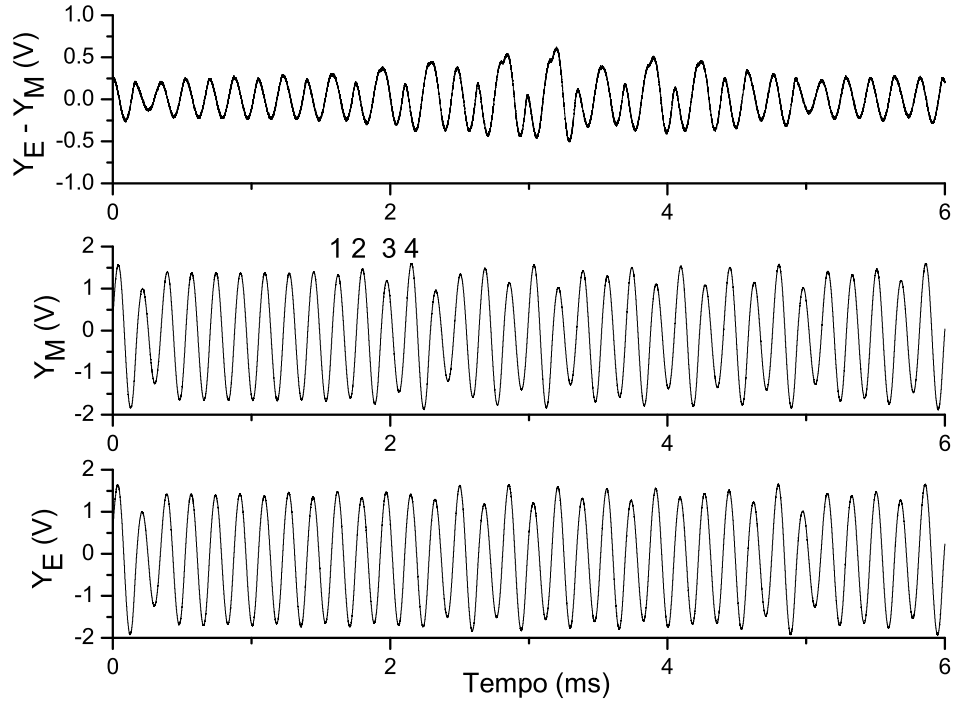


Fig. 6.20: Comparação entre Y_M , Y_E e $Y_E - Y_M$ para o sistema similar.

mericamente pela condição de que o máximo expoente de Liapunov condicional seja negativo. No entanto, esta condição não é suficiente para garantir sincronização de alta qualidade. Mesmo o máximo expoente de Liapunov condicional sendo negativo, podem ocorrer eventos de completa dessincronização (ou seja, estouros), dando origem a intermitência modulacional. A explicação que se dá para o aparecimento dos eventos de dessincronização é que podem existir conjuntos invariantes no atrator caótico (por exemplo: pontos fixos ou órbitas periódicas instáveis) que possuem um expoente de Liapunov transversal positivo, mesmo que o máximo expoente de Liapunov seja negativo. À medida que as trajetórias se aproximam de algum desses conjuntos invariantes, elas são fortemente repelidas da variedade de sincronização, originando o evento de dessincronização. Evidências experimentais são dadas nas referências [49, 63, 64].

Em nosso sistema (6.1) não achamos evidências conclusivas que os estouros são induzidos por conjuntos invariantes no atrator caótico (pontos fixos ou órbitas periódicas instáveis).

6.5.2 Sincronização de fase e a sua quebra

Voltamos a analisar o sistema (6.1) e as evoluções temporais de suas variáveis. Por dispormos apenas de um osciloscópio de dois canais no laboratório, tivemos que analisar as quantidades aos pares. Por inspeção visual, podemos observar a sincronização de fase em todas as variáveis durante as fases laminares como demonstram as figuras 6.21, 6.22 e 6.23 .

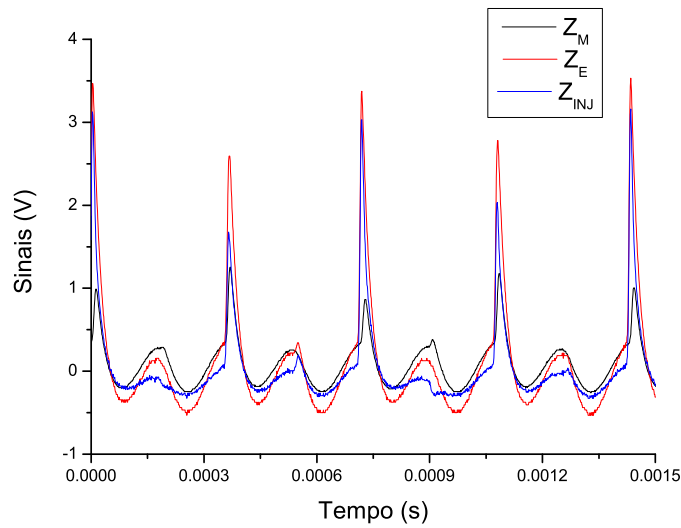


Fig. 6.21: Sincronização de fase de Z_M , Z_E e Z_{Inj}

Por outro lado, vamos agora analisar o comportamento dos sinais durante os momentos em que ocorre um estouro. Comparamos as evoluções temporais entre as diversas variáveis do circuito. Principalmente, analisaremos Z_M , Z_E e $Y_E - Y_M$. Novamente, por dispormos apenas de um osciloscópio de dois canais no laboratório, tivemos que analisar as quantidades aos pares. Inicialmente, observemos Y_M e Y_E na figura

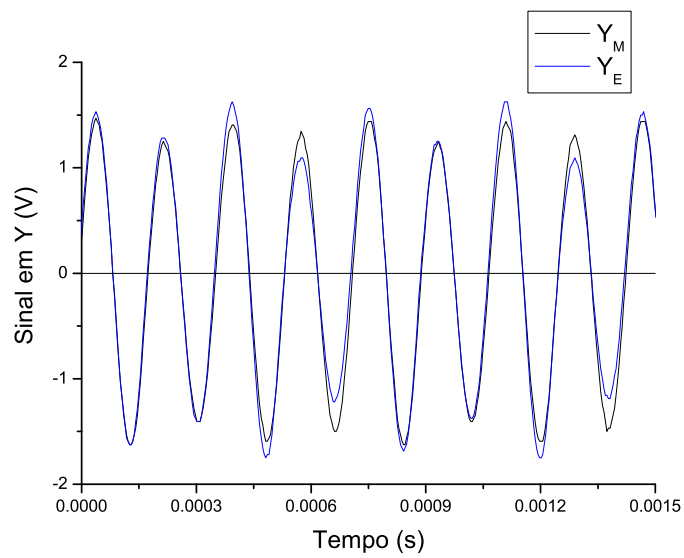


Fig. 6.22: Sincronização de fase de Y_M e Y_E

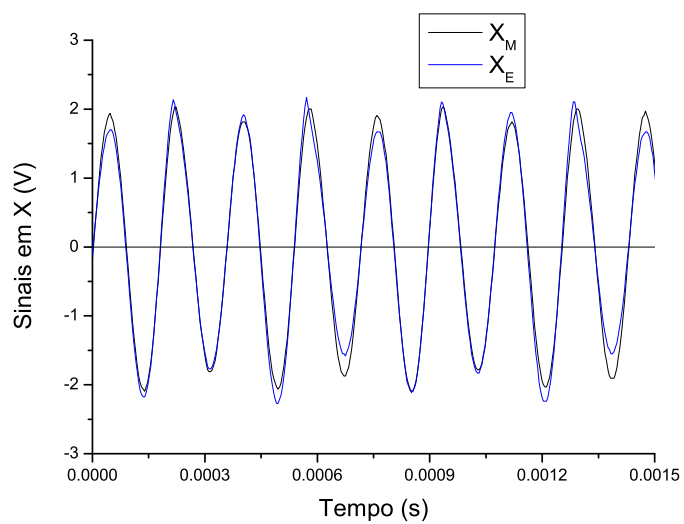


Fig. 6.23: Sincronização de fase de X_M e X_E

6.24 .

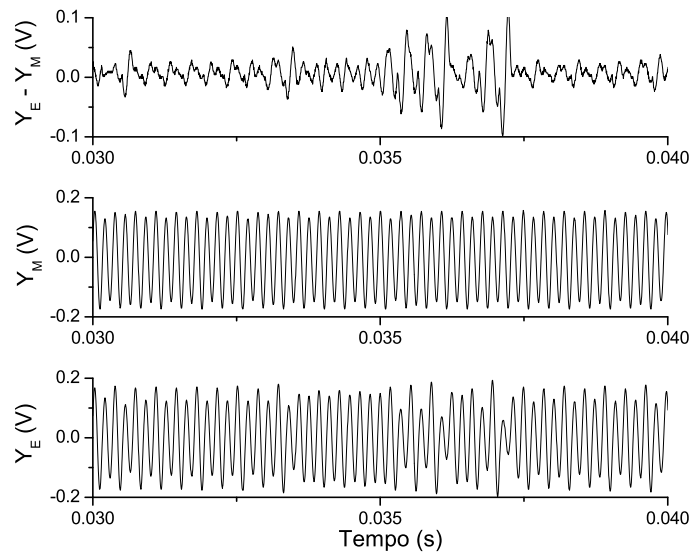
Observa-se que a ocorrência dos estouros está vinculada ao aparecimento de uma queda de tensão no sinal de Y_E . Portanto a diferença de tensão entre os dois sinais aumenta em módulo. Este fato é esperado, uma vez que pela forma de nosso sistema 6.1 o circuito mestre permanece inalterado. Analisando mais de perto estes sinais, observamos que durante o estouro temos uma dessincronização de fase, como podemos observar na figura 6.25.

Seguindo a análise do comportamento de nosso sistema durante os estouros, podemos observar a presença do comportamento pouco antes dos estouros em Z_E e $Z_E - Z_M$ nas figuras 6.26 e 6.27 .

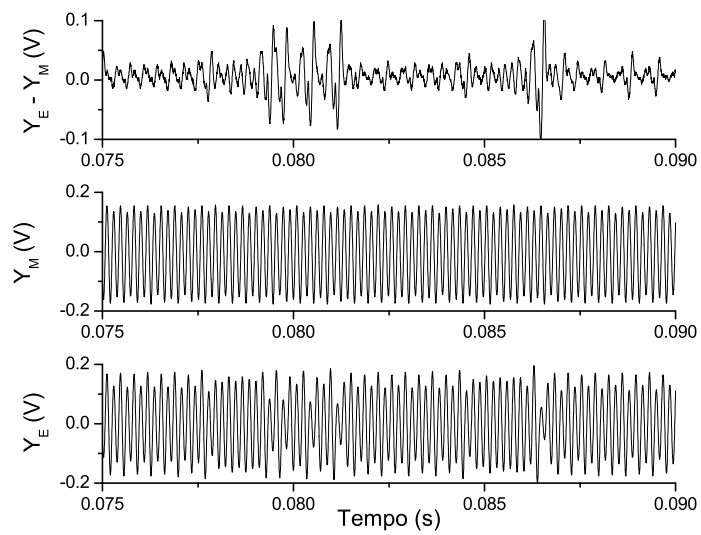
Analisando estes dois gráficos, observamos que existe uma relação entre o sinal Z_E e a diferença $Y_E - Y_M$ no instante em que ocorrem os estouros.

Simulamos também o comportamento destes circuitos no software Microcap (que é uma interface gráfica para o programa SPICE que modela numericamente, mas de forma mais realista, o comportamento de circuitos eletrônicos). Obtivemos um comportamento similar ao dos circuitos acoplados; entretanto, as fases laminares são consideravelmente menores. Uma possível explicação para este acontecimento poderia ser o próprio ruído dentro do sistema experimental e que aumentaria a estabilidade do sistema, resultando em fases laminares de tamanho maior. Agora, a quebra da sincronização de fase ocorre junto com os estouros, como podemos observar no gráfico da figura 6.28. A fase ϕ foi calculada, seguindo o procedimento explicado em 4.3.1.1 b), para os sinais Y_M e Y_E e então calcula-se $\Delta\phi$.

Finalizando, podemos concluir que, tanto pela inspeção visual da evolução temporal das variáveis, bem como por uma análise mais acurada baseada no cálculo das fases, a intermitência modulacional pode ser entendida como uma alternância “estocástica” entre eventos de sincronização (fases laminares) e outros de quebra de sincronização (estouros).

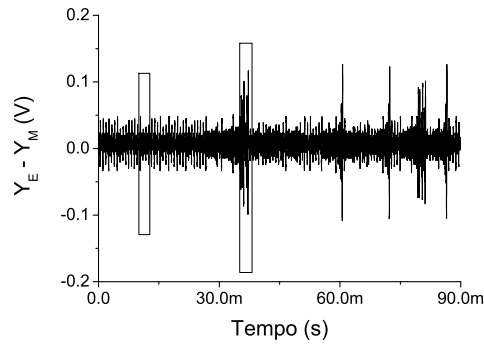


(a)

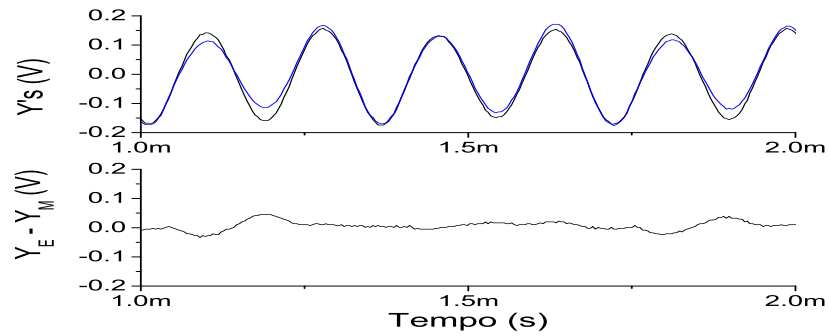


(b)

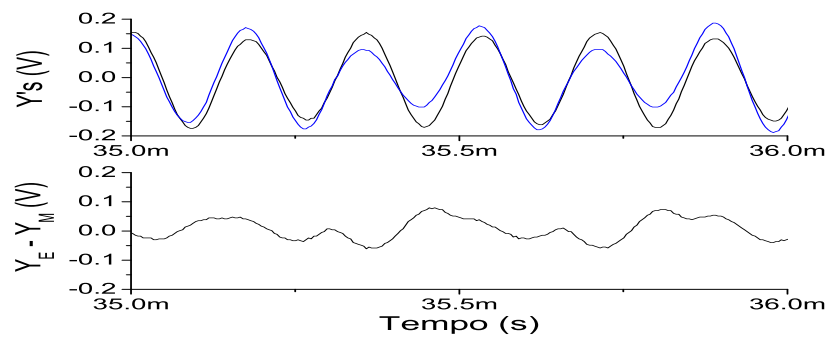
Fig. 6.24: Ocorrência dos estouros



(a)



(b)



(c)

Fig. 6.25: (a) Sinal intermitente para o sistema (6.1); (b) Ampliação de uma fase laminar (corresponde ao retângulo mais à esquerda em (a)), nota-se a sincronização de fase; (c) Ampliação de um estouro (corresponde ao retângulo mais à direita em (a)), nota-se a dessincronização de fase. Em preto, o mestre, e, em azul, o escravo.

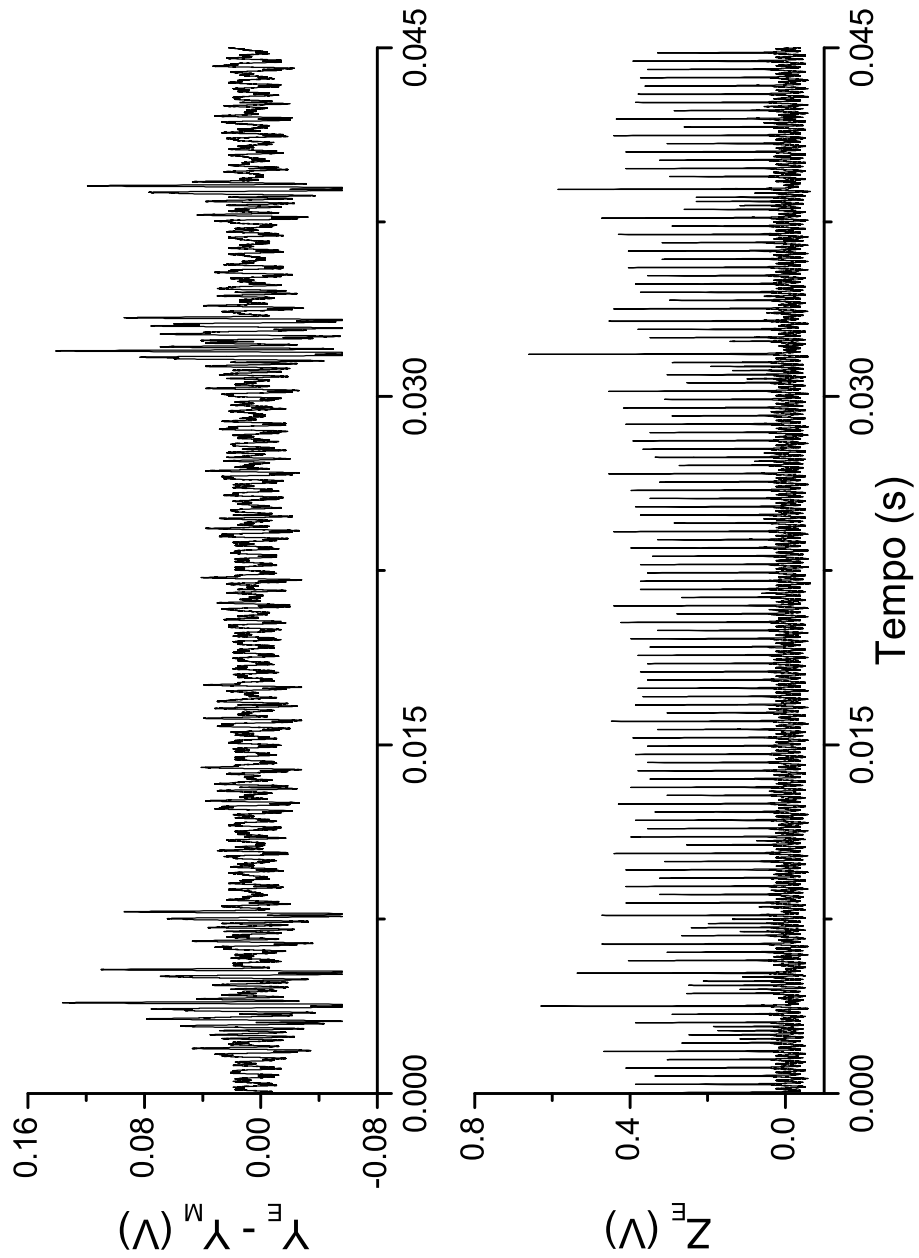


Fig. 6.26: Comparação entre Z^E e $Y^E - Y^M$

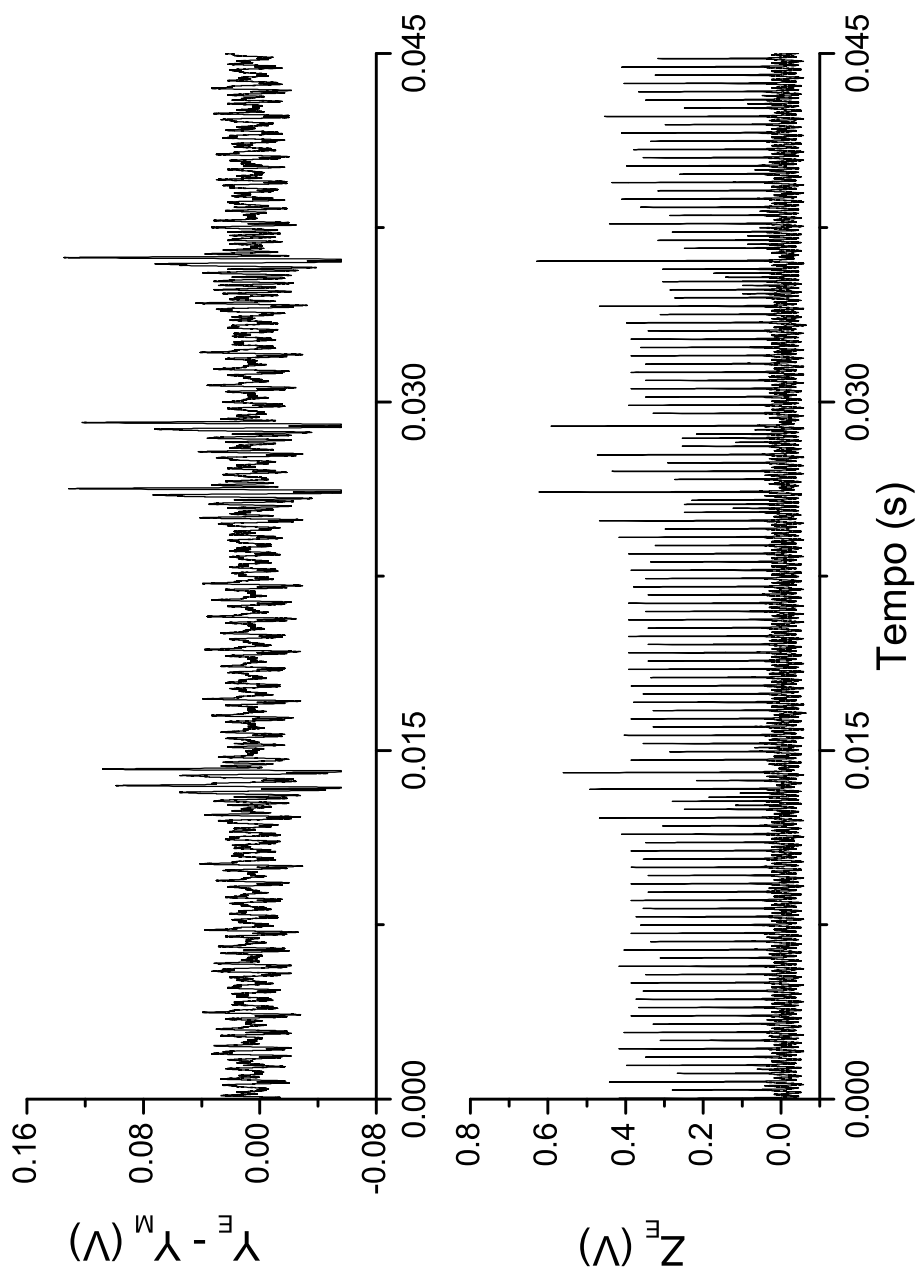


Fig. 6.27: Comparação entre Z_E e $Y_E - Y_M$

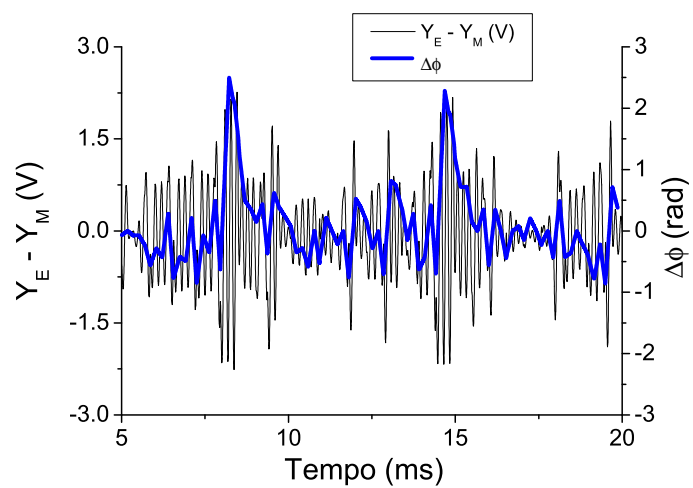


Fig. 6.28: Um estouro implica a quebra da sincronização de fase.

7. CONCLUSÃO

Neste trabalho, demonstramos a ocorrência de intermitência modulacional em um sistema dinâmico consistindo em dois circuitos acoplados que simulam o conjunto de equações de Rössler. Este sistema possui uma não linearidade dada por uma função linear por partes e apresenta comportamento caótico para certos valores de parâmetros. Utilizamos um acoplamento unidirecional do tipo mestre escravo onde, no sistema de três equações para cada circuito, perturbávamos apenas uma equação de um sistema - sendo então este denominado de escravo. O circuito perturbador passa então a ser o mestre. Experimentalmente, acoplamos os dois circuitos através de um circuito seguidor de tensão e um somador, para depois reinjetar o sinal no circuito escravo.

Vimos que a intermitência modulacional difere qualitativamente e quantitativamente das intermitências clássicas descobertas por Pomeau e Manneville. Apesar de possuir leis de potência idênticas às da intermitência do tipo III, seus mecanismos são extremamente diferentes, como pudemos observar no capítulo 5. Uma das principais características é a própria perturbação do parâmetro de controle (aleatória ou caótica), que em nosso sistema se apresentava na forma de um parâmetro de controle ε - proveniente de um divisor de tensão do circuito acoplador - multiplicado pelo sinal de Z_M . Em seguida, observamos que suas leis de potência podem ser deduzidas a partir de mapas e podem ser estendidas para sistemas a tempo contínuo, sendo confirmadas por muitos artigos.

Quanto à caracterização da intermitência, deduzimos as duas leis de potência - a da distribuição das fases laminares e do tamanho médio das fases laminares. Embora as deduções tenham sido feitas para sistemas discretos e aleatórios, existe a comprovação da presença de intermitência modulacional em sistemas contínuos e, em alguns casos, a

sincronização entre dois sistemas dinâmicos, como apresentado nesta dissertação. Uma teoria de intermitência modulacional em sistemas contínuos já foi encontrada com base na equação de Fokker-Planck, e, mais recentemente, tem-se dedicado muito interesse na área de sincronização com ruído, apontando-se uma estreita relação com a intermitência modulacional neste sentido.

Experimentalmente, comprovamos as duas leis que caracterizam a intermitência modulacional para vários parâmetros de controle, como observamos no capítulo anterior. Verificamos igualmente a lei da distribuição das fases laminares para o sistema similar onde observamos a lei de potência de $-3/2$ e a queda exponencial. No sistema original, observamos também que existe uma queda de tensão de Z_E pouco antes dos estouros ocorrerem. Numericamente, verificamos que a simulação do circuito de Rössler não apresenta um comportamento de fases laminares tão grandes quanto o apresentado experimentalmente. Uma possibilidade é a explicação da presença do ruído no sistema experimental que, como tem se observado em muitos artigos, ele é capaz de induzir uma certa ordem em sistemas dinâmicos.

Uma investigação por órbitas periódicas seria uma alternativa para nos aprofundarmos mais no mecanismo que provoca a intermitência modulacional, visto que não existem trabalhos experimentais focalizando este assunto. Verificamos que a dessincronização dos circuitos é acompanhada por uma dessincronização de fase, tanto para o circuito de Rössler quanto para o circuito similar.

APÊNDICE — CÁLCULO DA LEI DE POTÊNCIA

Neste apêndice, desejamos calcular a probabilidade Λ dada por

$$\Lambda_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\lambda_1}. \quad (7.1)$$

Vamos considerar a variável de controle dada por $z_n = a x_n$, onde x_n será uma variável aleatória que assume valores no intervalo $[0,1]$ e possui função densidade $\rho(x)$.

Vamos fazer então a mudança de variável

$$w_1 = -\ln x_0$$

$$w_2 = -(\ln x_0 + \ln x_1)$$

$$w_3 = -(\ln x_0 + \ln x_1 + \ln x_2)$$

\vdots

$$w_n = -(\ln x_0 + \ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_{n-1}).$$

Calculando-se o valor da probabilidade λ_n :

$$\begin{aligned}
 \lambda_n &= P\left(\bigcap_{j=0}^n Z_j \leq 1\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{j=0}^n \left(\prod_{k=0}^{j-1} z_k\right) \leq 1\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{j=0}^n \left(\prod_{k=0}^{j-1} ax_k\right) \leq 1\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{j=0}^n a^j \left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right) \leq 1\right). \tag{7.2}
 \end{aligned}$$

Para descobrir qual o resultado do produtório em x_k , notemos que para a inversão das variáveis

- x_0

$$w_1 = -\ln x_0 \longrightarrow x_0 = \exp\{-w_1\}$$

- x_1

$$\begin{aligned}
 w_2 &= -(\ln x_0 + \ln x_1) \longrightarrow x_0 x_1 = \exp\{-w_2\} \\
 \exp\{-w_1\} x_1 &= \exp\{-w_2\} \\
 x_1 &= \exp\{w_1 - w_2\}
 \end{aligned}$$

- x_2

$$\begin{aligned}
 w_3 &= -(\ln x_0 + \ln x_1 + \ln x_2) \longrightarrow x_0 x_1 x_2 = \exp\{-w_3\} \\
 \exp\{-w_1\} \exp\{w_1 - w_2\} x_2 &= \exp\{-w_3\} \\
 \exp\{-w_2\} x_2 &= \exp\{-w_3\} \\
 x_2 &= \exp\{w_2 - w_3\}
 \end{aligned}$$

- x_3

$$\begin{aligned} w_4 &= -(\ln x_0 + \ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3) \longrightarrow x_0 x_1 x_2 x_3 = \exp \{-w_4\} \\ \exp \{-w_1\} \exp \{w_1 - w_2\} \exp \{w_2 - w_3\} x_3 &= \exp \{-w_4\} \\ \exp \{-w_3\} x_3 &= \exp \{-w_4\} \\ x_3 &= \exp \{w_3 - w_4\} \end{aligned}$$

- \vdots

- x_{n-1}

$$\begin{aligned} w_j &= -(\ln x_0 + \ln x_1 + \dots + \ln x_{j-1}) \longrightarrow x_0 x_1 x_2 \dots x_{j-1} = \exp \{-w_j\} \\ \exp \{-w_1\} \exp \{w_1 - w_2\} \exp \{w_2 - w_3\} \times \dots \\ &\dots \times \exp \{w_{j-2} - w_{j-1}\} x_{j-1} = \exp \{-w_j\} \\ x_{j-1} &= \exp \{w_{j-1} - w_j\}. \end{aligned}$$

Então, para o produtório em (7.2)

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{j-1} x_k &= x_0 x_1 x_2 \dots x_{j-2} x_{j-1} \\ &= \exp \{-w_1\} \exp \{w_1 - w_2\} \exp \{w_2 - w_3\} \times \dots \\ &\dots \times \exp \{w_{j-2} - w_{j-1}\} \exp \{w_{j-1} - w_j\} \\ &= \exp \{-w_j\}. \end{aligned}$$

Substituindo em nossa probabilidade λ_n

$$\begin{aligned}
 \lambda_n &= P\left(\bigcap_{j=1}^n a^j \prod_{k=0}^{j-1} x_k \leq 1\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{j=1}^n a^j \exp\{-w_j\} \leq 1\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{j=1}^n \ln[a^j \exp\{-w_j\}] \leq \ln(1)\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{j=1}^n j \ln a - w_j \leq 0\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{j=1}^n w_j \geq j \ln a\right). \tag{7.3}
 \end{aligned}$$

Para calcularmos a probabilidade (7.3), teremos que levar sua densidade de probabilidade conjunta $F_w(w_1, w_2, \dots, w_n)$ em conta. Ela é obtida a partir densidade de probabilidade conjunta das variáveis x_n , $F_x(x_1, x_2, \dots, x_n)$, através da transformação

$$F_w(w_1, w_2, w_3, \dots, w_n) = \frac{1}{|J|} F_x(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{7.4}$$

onde J é o jacobiano dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_0} & \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_0} & \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial w_2}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_n}{\partial x_0} & \frac{\partial w_n}{\partial x_1} & \frac{\partial w_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial w_n}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{x_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{x_0} & -\frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{x_0} & -\frac{1}{x_1} & -\frac{1}{x_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{x_0} & -\frac{1}{x_1} & -\frac{1}{x_2} & -\frac{1}{x_2} & \cdots & -\frac{1}{x_{n-1}} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{(-1)^n}{x_0 x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \\
 &= (-1)^n \exp \{-w_n\}.
 \end{aligned}$$

Assumiremos que as variáveis x são independentes, então sua densidade de probabilidade conjunta será dada por

$$F_x(x_1, x_2, \dots, x_n) = \rho(x_0) \rho(x_1) \rho(x_2) \cdots \rho(x_{n-1}). \quad (7.5)$$

A densidade de probabilidade conjunta F_w será dada então por

$$\begin{aligned}
 F_w(w_1, w_2, w_3, \dots, w_n) &= \frac{1}{|J|} \rho(x_0) \rho(x_1) \rho(x_2) \cdots \rho(x_{n-1}) \\
 &= e^{-w_n} \rho(e^{-w_1}) \rho(e^{w_1-w_2}) \cdots \rho(e^{w_{n-1}-w_n}); \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \int_{\ln a}^{\infty} dw_1 e^{-w_1} \rho(e^{-w_1}) \\
 \lambda_2 &= \int_{2 \ln a}^{\infty} dw_2 e^{-w_2} \int_{\ln a}^{w_2} dw_1 \rho(e^{-w_1}) \rho(e^{-(w_2-w_1)}) \\
 &\vdots \\
 \lambda_n &= \int_{n \ln a}^{\infty} dw_n e^{-w_n} \int_{(n-1) \ln a}^{w_n} dw_{n-1} \rho(e^{-(w_n-w_{n-1})}) \\
 &\quad \times \int_{(n-2) \ln a}^{w_{n-1}} dw_{n-2} \rho(e^{-(w_{n-2}-w_{n-1})}) \cdots \int_{\ln a}^{w_2} dw_1 \rho(e^{-(w_1-w_2)}) \rho(e^{-w_1}).
 \end{aligned}$$

Podemos escrever esta equação, para $n \geq 2$, na forma

$$\lambda_n = \int_{n \ln a}^{\infty} dw e^{-w} \theta_{n-1}(w), \quad (7.7)$$

onde a função $\theta_n(w)$ satisfaz a equação integro-diferencial do tipo Volterra [70]

$$\theta_n(w) = \int_{n \ln a}^w d\xi \rho(e^{-(w-\xi)}) \theta_{n-1}(\xi), \quad (7.8)$$

com o estabelecimento de

$$\theta_1(w) = \int_{\ln a}^w d\xi \rho(e^{-(w-\xi)}) \rho(e^{-\xi}). \quad (7.9)$$

Não podemos simplificar ou encontrar uma expressão melhor para esta solução. A única alternativa que nos resta é escolher uma função $\rho(x)$ apropriada. Vamos escolher o caso trivial

$$\rho(x) \equiv 1,$$

e teremos então

$$\theta_1(w) = \int_{\ln a}^w d\xi = w - \ln a. \quad (7.10)$$

Para uma relação geral, teremos

$$\theta_n(w) = \int_{n \ln a}^w d\xi \theta_{n-1}(\xi) \quad (7.11)$$

e derivando com relação a w , teremos a equação diferencial

$$\frac{d}{dw} \theta_n(w) = \theta_{n-1}(w) \quad (7.12)$$

com a condição inicial de que

$$\theta_n(n \ln a) = 0. \quad (7.13)$$

Usando a transformada de Laplace de uma função $F(t)$ como

$$\mathcal{L}\{F(t)\} \equiv \int_0^{\infty} dt e^{st} F(t)$$

teremos a transformada de Laplace de $\theta_n(w)$ como

$$H_n(s) \equiv \mathcal{L}\{\theta_n(w)\} = \int_0^{\infty} dw e^{sw} \theta_n(w).$$

A derivada de $\theta_n(w)$ com respeito a w será dada por

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dw} \theta_n(w)\right\} = sH_n(s) - \theta_n(0).$$

Aplicando então a transformada de Laplace à equação (7.12), obteremos

$$sH_n(s) - \theta_n(0) = H_{n-1}(s). \quad (7.14)$$

Vamos então analisar para diferentes valores de n :

- **n=2**

$$H_2(s) = \frac{1}{s} [H_1(s) + \theta_2(0)]$$

- **n=3**

$$\begin{aligned} H_3(s) &= \frac{1}{s} [H_2(s) + \theta_3(0)] \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \left[\frac{1}{s} [H_1(s) + \theta_2(0)] \right] (s) - \theta_3(0) \right\} \\ &= \frac{1}{s^2} H_1(s) + \frac{1}{s^2} \theta_2(0) + \frac{1}{s} \theta_3(0) \end{aligned}$$

- $n=4$

$$\begin{aligned} H_4(s) &= \frac{1}{s} [H_3(s) + \theta_4(0)] \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \left[\frac{1}{s^2} H_1(s) + \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} \theta_2(0) + \theta_3(0) \right) \right] + \theta_4(0) \right\} \\ &= \frac{1}{s^3} H_1(s) + \frac{1}{s^3} \theta_2(0) + \frac{1}{s^2} \theta_3(0) + \frac{1}{s} \theta_4(0) \end{aligned}$$

- \vdots

- n

$$\begin{aligned} H_n(s) &= \frac{1}{s} [H_{n-1}(s) + \theta_n(0)] \\ &= \frac{1}{s^{n-1}} H_1(s) + \frac{1}{s^{n-1}} \theta_2(0) + \frac{1}{s^{n-2}} \theta_3(0) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{s^2} \theta_{n-1}(0) + \frac{1}{s} \theta_n(0) \\ &= \frac{1}{s^{n-1}} H_1(s) + \sum_{k=2}^n \frac{\theta_k(0)}{s^{n+1-k}} \end{aligned} \tag{7.15}$$

Podemos encontrar $H_1(s)$ pois conhecemos $\theta_1(w)$ como havíamos anteriormente

deduzido em (7.10)

$$\begin{aligned}
 H_1(s) &= \mathcal{L}\{\theta_1(w)\} \\
 &= \int_0^\infty dw e^{-sw} \theta_1(w) \\
 &= \int_0^\infty dw e^{-sw} (w - \ln a) \\
 &= \int_0^\infty dw w e^{-sw} - \ln a \int_0^\infty dw e^{-sw} \\
 &= \left(\frac{1}{s} - \ln a\right) \int_0^\infty dw e^{-sw} \\
 &= \left(\frac{1}{s} - \ln a\right) \left(-\frac{1}{s} e^{-sw}\right) \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} - \ln a\right).
 \end{aligned}$$

Substituindo em (7.15), obtemos

$$H_n(s) = \frac{1}{s^{n+1}} - \frac{\ln a}{s^n} + \sum_{k=2}^n \frac{\theta_k(0)}{s^{n+1-k}}. \tag{7.16}$$

Aplicando neste instante a transformação inversa de Laplace

$$\theta_n(w) = \frac{w^n}{n!} - \ln a \frac{w^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=2}^n \theta_k(0) \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}, \tag{7.17}$$

e utilizando a condição inicial (7.13)

$$\underbrace{\frac{(n \ln a)^n}{n!} - \frac{n^{n-1} (\ln a)^n}{(n-1)!}}_{=0} + \sum_{k=2}^n \theta_k(0) \frac{(n \ln a)^{n-k}}{(n-k)!} = 0$$

$$\sum_{k=2}^n \theta_k(0) \frac{(n \ln a)^{n-k}}{(n-k)!} = 0,$$

e vemos então que $\theta_n(0) = 0$ para $\forall n \geq 2$. A solução da equação diferencial (7.12)

será então

$$\theta_n(w) = \frac{w^n}{n!} - \ln a \frac{w^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (7.18)$$

Retornando para λ_n :

$$\begin{aligned} \lambda_n \rightarrow \lambda_n(a) &= \int_{n \ln a}^{\infty} dw e^{-w} \theta_{n-1}(w) \\ &= \int_{n \ln a}^{\infty} dw e^{-w} \left\{ \frac{w^{n-1}}{(n-1)!} - \ln a \frac{w^{n-2}}{(n-2)!} \right\} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{n \ln a}^{\infty} dw e^{-w} w^{n-1} - \frac{\ln a}{(n-2)!} \int_{n \ln a}^{\infty} dw e^{-w} w^{n-2} \end{aligned}$$

Sendo a fórmula da referência [71], número 3.351-2, pg. 310

$$\int_u^{\infty} dx x^n e^{-\mu x} = e^{-u\mu} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{u^k}{\mu^{n-k+1}},$$

teremos

$$\begin{aligned} \lambda_n(a) &= \frac{1}{(n-1)!} \left\{ e^{-n \ln a} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)! (n \ln a)^k}{k!} \right\} \\ &\quad - \frac{\ln a}{(n-2)!} \left\{ e^{-n \ln a} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)! (n \ln a)^k}{k!} \right\} \\ &= \frac{1}{a^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n \ln a)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n^k (\ln a)^{k+1}}{k!} \right\} \\ &= \frac{1}{a^n} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n \ln a)^k}{k!} + \frac{(n \ln a)^{n-1}}{(n-1)!} \right] - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n^k (\ln a)^{k+1}}{k!} \right\} \\ &= \frac{1}{a^n} \left\{ \frac{n^n (\ln a)^{n-1}}{n!} + (1 - \ln a) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n \ln a)^k}{k!} \right\}. \quad (7.19) \end{aligned}$$

Retornando finalmente para a nossa probabilidade Λ_n , teremos

$$\begin{aligned} P(Z_1 \leq 1) &= P(ax_0 \leq 1) \\ &= P\left(x_0 \leq \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Se x_0 for uma variável randômica tal que $x_0 \in [0, 1]$, então a probabilidade de encontrá-la antes de $1/a$ será

$$P\left(x_0 \leq \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}.$$

Substituindo em (7.1), obteremos

$$\Lambda_n = a(\lambda_n - \lambda_{n+1}). \quad (7.20)$$

Vamos, de início, calcular (7.20) para o parâmetro $a = e$. Substituindo em (7.19)

$$\begin{aligned} \lambda_n(e) &= \frac{1}{e^n} \left\{ \frac{n^n (\ln e)^{n-1}}{n!} + (1 - \ln e) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n \ln e)^k}{k!} \right\} \\ &= \frac{n^n}{e^n n!}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

e logo

$$\lambda_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1} (n+1)!}. \quad (7.22)$$

Substituindo (7.21) e (7.22) em (7.20)

$$\begin{aligned} \Lambda_n(e) &= e(\lambda_n - \lambda_{n+1}) \\ &= e \left[\frac{n^n}{e^n n!} - \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1} (n+1)!} \right] \\ &= \frac{1}{e^{n-1} n!} \left[n^n - \frac{(n+1)^n}{e} \right] \\ &= \frac{n^n}{e^{n-1} n!} \left[1 - \frac{(1+1/n)^n}{e} \right]. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Na prática, sabemos que trabalharemos com valores grandes de n e; portanto, poderemos aplicar na relação acima a aproximação de Stirling para $n!$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n, \quad (7.24)$$

e utilizando o mesmo argumento para a fração dentro dos colchetes, podemos fazer a aproximação

$$(1 + 1/n)^n \approx e \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \quad (7.25)$$

Substituindo estas duas relações em (7.23)

$$\begin{aligned} \Lambda_n(e) &= \frac{n^n}{e^{n-1}n!} \left[1 - \frac{(1 + 1/n)^n}{e}\right] \\ &\approx \frac{e}{\sqrt{2\pi n}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right] \\ \Lambda_n(e) &\approx \frac{e}{2\sqrt{2\pi}} n^{-3/2}, \end{aligned}$$

ou seja, no início do comportamento intermitente, a distribuição das fases laminares obedece a uma lei de potências com expoente $-3/2$. Após o início, Λ_n pode ser encontrado tomando-se somente o maior termo do somatório em (7.19), que para $a \geq e$ será o termo com $k = n - 2$. Teremos então

$$\begin{aligned} \lambda_n(a) &\approx \frac{1}{a^n} \left\{ \frac{(\ln a)^{n-1} n^n}{n!} + (1 - \ln a) \frac{(n \ln a)^{n-2}}{(n-2)!} \right\} \\ &= \frac{1}{a^n} \frac{(\ln a)^{n-1} n^n}{n!} \left\{ 1 + [(1 - \ln a) n (n-1) (n^{-2} (\ln a)^{-1})] \right\} \\ &= \frac{1}{a^n} \frac{(\ln a)^{n-1} n^n}{n!} \left\{ 1 + \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{\ln a} - 1\right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{a^n} \frac{(\ln a)^{n-1} n^n}{n!} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{\ln a} - 1 - \frac{1}{n \ln a} + \frac{1}{n} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{a^n} \frac{(\ln a)^{n-1} n^n}{n!} \left\{ \frac{1}{\ln a} + \Theta(n^{-1}) \right\}, \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{a^{n+1}} \frac{(\ln a)^n (n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ \frac{1}{\ln a} + \Theta((n+1)^{-1}) \right\}.$$

Substituindo ambas relações em (7.20)

$$\begin{aligned}
 \Lambda_n(a) &= a(\lambda_n - \lambda_{n+1}) \\
 &= a \left\{ \frac{1}{a^n} \frac{(\ln a)^{n-1} n^n}{n!} \left[\frac{1}{\ln a} + \Theta(n^{-1}) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{a^{n+1}} \frac{(\ln a)^n (n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \left[\frac{1}{\ln a} + \Theta((n+1)^{-1}) \right] \right\} \\
 &= a \frac{(\ln a)^n}{a^n n!} \left\{ \frac{n^n}{\ln a} \left[\frac{1}{\ln a} + \Theta(n^{-1}) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{a} (n+1)^n \left[\frac{1}{\ln a} + \Theta((n+1)^{-1}) \right] \right\} \\
 &\approx \frac{a}{(\ln a)^2} \frac{(\ln a)^n n^n}{a^n n!} \left[1 - \frac{\ln a}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]
 \end{aligned}$$

Usando a aproximação de Stirling e a relação assintótica (7.25), obteremos

$$\begin{aligned}
 \Lambda_n(a) &= \frac{a}{(\ln a)^2} \frac{(\ln a)^n n^n}{a^n n!} \left[1 - \frac{\ln a}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \\
 &\approx \frac{a}{(\ln a)^2} \frac{(\ln a)^n n^n}{a^n} \left(\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n} n^n} \right) \left[1 - \frac{e \ln a}{a} \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \right] \\
 &= \frac{a}{(\ln a)^2} \frac{\exp \{n [1 + \ln(\ln a) - \ln a]\}}{\sqrt{2\pi n}} \left[1 - \frac{e \ln a}{a} \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \right]. \quad (7.26)
 \end{aligned}$$

Uma vez que estamos interessados em casos próximos ao parâmetro crítico, vamos escrever nosso parâmetro a na forma $a \equiv e + \delta$ onde $\delta \ll 1$ e expandir a

equação acima em ordens deste fator. Para o logaritmo de a

$$\begin{aligned}
 \ln a &= \ln(e + \delta) \\
 &= 1 + \ln\left(1 + \frac{\delta}{e}\right) \\
 &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{\delta}{e}\right)^n \\
 &= 1 + \frac{\delta}{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2 + \Theta\left(\left(\frac{\delta}{e}\right)^3\right), \tag{7.27}
 \end{aligned}$$

e para o logaritmo do logaritmo de a que aparece na exponencial

$$\begin{aligned}
 \ln(\ln a) &= \ln\left[1 + \frac{\delta}{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2 + \Theta\left(\left(\frac{\delta}{e}\right)^3\right)\right] \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[1 + \frac{\delta}{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2 + \Theta\left(\left(\frac{\delta}{e}\right)^3\right)\right]^n \\
 &= -\left[-\frac{\delta}{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2 + \dots\right] - \left[-\frac{\delta}{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2 + \dots\right]^2 + \dots \\
 &= \frac{\delta}{e} - \left(\frac{\delta}{e}\right)^2 + \Theta\left(\left(\frac{\delta}{e}\right)^3\right). \tag{7.28}
 \end{aligned}$$

Substituindo (7.27) no primeiro termo que a aparece à direita em (7.26)

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{(\ln a)^2} &= \frac{e + \delta}{\left[1 + \frac{\delta}{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2 + \Theta\left(\left(\frac{\delta}{e}\right)^3\right)\right]^2} \\
 &\approx e \left(1 + \frac{\delta}{e}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{e}\right) \\
 &\approx e, \tag{7.29}
 \end{aligned}$$

onde vamos procurar manter somente os termos de menor ordem. Para o último termo

de (7.26)

$$\begin{aligned} \frac{e \ln a}{a} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) &\approx \frac{e \left(1 + \frac{\delta}{e}\right)}{e \left(1 + \frac{\delta}{e}\right)} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Já para o exponenciando de (7.26)

$$\begin{aligned} 1 + \ln(\ln a) - \ln a &= 1 + \left[\frac{\delta}{e} - \left(\frac{\delta}{e}\right)^2 + \Theta\left(\left(\frac{\delta}{e}\right)^3\right) \right] \\ &\quad - \left[1 + \frac{\delta}{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2 + \Theta\left(\left(\frac{\delta}{e}\right)^3\right) \right] \\ &\approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Substituindo (7.29), (7.30) e (7.31) em (7.26), teremos:

$$\begin{aligned} \Lambda_n(a) &= \frac{a}{(\ln a)^2} \frac{e^{n(1+\ln(\ln a)-\ln a)}}{\sqrt{2\pi n}} \left[1 - \frac{e \ln a}{a} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right] \\ &\approx e \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{n}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2\right) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right] \\ \Lambda_n(a) &\approx \frac{e}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n}{2} \left(\frac{\delta}{e}\right)^2\right) n^{-3/2}, \end{aligned}$$

ou seja, teremos uma queda exponencial a partir do momento em que n se tornar grande.

REFERÊNCIAS

- 1 HUYGENS, C. *The pendulum clock*. Iowa: State University Press, 1986.
- 2 POL, B. V. D. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. *Philos. Mag.*, London, v. 3, n. 1, p. 64–80, Dec. 1927.
- 3 PECORA, L. M.; CARROLL, T. L.; JOHNSON, G. A.; MAR, D. J.; HEAGY, J. F. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, Woodbury, v. 7, n. 4, p. 520–543, Dec. 1997.
- 4 POMEAU, Y.; MANNEVILLE, P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Commun. Math. Phys.*, Berlin, v. 74, n. 2, p. 189–197, June 1980.
- 5 FUJISAKA, H.; YAMADA, T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems IV. *Prog. Theor. Phys.*, Kyoto, v. 74, n. 5, p. 918–4680, Nov. 1985.
- 6 PLATT, N.; SPIEGEL, E. A.; TRESSER, C. On-off intermittency: a mechanism for bursting. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 70, n. 3, p. 279–282, Jan. 1993.
- 7 RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 57, n. 5, p. 397–398, July 1976.
- 8 RÖSSLER, O. E. The chaotic hierarchy. *Z. Naturforsch. A*, Tübingen, v. 38, n. 7, p. 788–801, Dez. 1983.
- 9 LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, Boston, v. 20, n. 2, p. 130–141, Mar. 1963.
- 10 CARROLL, T. L. A simple circuit for demonstrating regular and synchronized chaos. *Am. J. Phys.*, Woodbury, v. 63, n. 4, p. 377–379, Apr. 1995.
- 11 HOROWITZ, P. *The art of electronics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- 12 HEISLER, I. A. *A sincronização de osciladores de Rössler acoplados*. 2002. 110 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

- 13 HEISLER, I. A.; BRAUN, T.; ZHANG, Y.; HU, G.; CERDEIRA, H. A. Experimental investigation of partial synchronization in coupled chaotic oscillators. *Chaos*, Melville, v. 13, n. 1, p. 185–194, Mar. 2003.
- 14 SEDRA, A. S.; SMITH, K. C. *Microelectronic circuits*. New York: Oxford University Press, 1998.
- 15 HILBORN, R. C. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. Oxford: Oxford University Press, 1994.
- 16 GLENDINNING, P. *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- 17 GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- 18 CRAWFORD, J. D. Introduction to bifurcation theory. *Rev. Mod. Phys.*, Woodbury, v. 63, n. 4, p. 991–1037, Oct. 1991.
- 19 WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time-series. *Physica D*, Amsterdam, v. 16, n. 3, p. 285–317, July 1985.
- 20 SHIMADA, I.; NAGASHIMA, T. Numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, Kyoto, v. 61, n. 6, p. 1605–1616, June 1979.
- 21 BENETTIN, G.; GALGANI, L.; GIORGILLI, A.; STRELCYN, J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: a method for computing all of them. *Meccanica*, Bologna, v. 15, n. 17, p. 9–20, Mar. 1980.
- 22 BENETTIN, G.; GALGANI, L.; STRELCYN, J. M. Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev. A*, New York, v. 14, n. 6, p. 2338–2345, Dec. 1976.
- 23 ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, Woodbury, v. 57, n. 3, p. 617–656, July 1985.
- 24 OSELEDEC, V. I. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers from dynamical systems. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, Providence, v. 19, p. 197–231, 1968.
- 25 SCHUSTER, H. G. *Deterministic chaos: an introduction*. 2. ed. Weinheim: VCH, 1988.

- 26 HU, B.; RUDNICK, J. Exact solution of the feigenbaum renormalization group equations for intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 48, n. 24, p. 1645–1649, June 1982.
- 27 HIRSCH, J. E.; NAUENBERG, M.; SCALAPINO, D. J. Intermittency in the presence of noise: a renormalization group formulation. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 87, n. 8, p. 391–393, June 1982.
- 28 BEN-MIZRACHI, A.; PROCACCIA, I.; ROSENBERG, N.; SCHIMDT, A.; SCHUSTER, A. G. Real and apparent divergences in low frequency spectra of nonlinear dynamical systems. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 31, n. 1, p. 975–980, June 1985.
- 29 PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- 30 HOUAISS, A. *Dicionário Houaiss da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.
- 31 PARKER, S. P. *McGraw-Hill dictionary of physics*. New York: McGraw-Hill, 1997.
- 32 MICHELS, W. C. *The international dictionary of physics and electronics*. Princeton: Van Nostrand, 1961.
- 33 CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 44, n. 4, p. 2374–2383, Aug. 1991.
- 34 ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 76, n. 11, p. 1804–1807, Mar. 1996.
- 35 STONE, E. F. Frequency entrainment of a phase coherent attractor. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 163, n. 5/6, p. 367–374, Mar. 1992.
- 36 ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 78, n. 22, p. 4193–4196, June 1997.
- 37 PIKOVSKY, A. S.; ROSENBLUM, M. G.; OSIPOV, G. V.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. *Physica D*, Amsterdam, v. 104, n. 3/4, p. 219–238, June 1997.
- 38 PIKOVSKY, A. S.; ROSENBLUM, M. G.; KURTHS, J. Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators. *Europhys. Lett.*, Les Ulis, v. 34, n. 3, p. 165–170, Apr. 1996.
- 39 GABOR, D. Theory of communication. *J. IEE*, London, v. 93, n. 3, p. 429–457, 1946.

- 40 JUNGE, L. *Synchronisation nichtlinearer dynamischer Systeme*. 1997. 97 f. Diplomarbeit (Diplomstudiengang in Physik) - Dritten Physikalischen Institut, Georg-August-Universität, Göttingen, 1997.
- 41 HEAGY, J. F.; CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Desynchronization by periodic orbits. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 52, n. 2, p. 1253–1256, Aug. 1995.
- 42 GAUTHIER, D. J.; BIENFANG, J. C. Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: toward a new criterion for high-quality synchronization. *Phys. Rev. Lett*, Woodbury, v. 77, n. 9, p. 1751–1754, Aug. 1996.
- 43 TORAL, R.; MIRASSO, R.; HERNÁNDEZ-GARCIA, E.; PIRO, O. Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems. *Chaos*, Melville, v. 11, n. 3, p. 665–673, Sept. 2001.
- 44 BENZI, R.; SUTERA, A.; VULPIANI, A. The mechanism of stochastic resonance. *J. Phys. A*, Bristol, v. 14, n. 11, p. L453–L457, Nov. 1981.
- 45 HORSTHEMKE, W.; LEFEVER, R. *Noise-induced transitions*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- 46 HÄNGGI, P.; BARTUSSEK, R. *Nonlinear physics of complex systems*. New York: Springer, 1999.
- 47 ALI, M. K. Synchronization of a chaotic map in the presence of common noise. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 55, n. 4, p. 4804–4805, Apr. 1997.
- 48 ANDRADE, V.; DAVIDCHACK, R. L.; LAI, Y. Noise scaling of phase synchronization of chaos. *Phys. Rev. E*, Melville, v. 61, n. 3, p. 3230–3233, Mar. 2000.
- 49 HAMMER, P. W.; PLATT, N.; HAMMEL, S. M.; HEAGY, J. F.; LEE, B. D. Experimental observation of on-off intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 73, n. 8, p. 1095–1098, Aug. 1994.
- 50 CENYS, A.; LUSTFELD, H. Statistical properties of the noise on-off intermittency. *J. Phys. A*, Bristol, v. 29, n. 1, p. 11–20, Jan. 1996.
- 51 CENYS, A.; ANAGNOSTOPOULOS, A. N.; BLERIS, G. L. Symmetry between laminar and burst phases for on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 56, n. 3, p. 2592–2596, Sept. 1997.
- 52 HEAGY, J. F.; PLATT, N.; HAMMEL, S. M. Characterization of on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 49, n. 2, p. 1140–1150, Feb. 1994.
- 53 FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications*. 2. ed. New York: John Wiley, 1971.

- 54 STEFANSKI, A.; KAPITANIAK, T.; BRINDLEY, J.; ASTAKHOV, V. Torus on-off intermittency in coupled lorenz systems. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 57, n. 1, p. 1175–1177, Jan. 1998.
- 55 FUKUSHIMA, K.; YAMADA, T. On-off intermittency observed in a system of coupled sine-gordon solitons. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 237, n. 1, p. 141–145, Jan. 1998.
- 56 LAI, Y.; GREBOGI, C. Intermingled basins and two-state on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 52, n. 4, p. R3313–R3316, Oct. 1995.
- 57 GINZBURG, S. L.; PUSTOVOIT, M. A. Noise-induced hypersensitivity to small time-dependent signals. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 80, n. 22, p. 4840–4842, June 1998.
- 58 YANG, H. L.; DING, E. J. Synchronization of chaotic systems and on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 54, n. 2, p. 1361–1365, Aug. 1996.
- 59 ZHAN, M.; HU, G.; HE, D.; MA, W. Phase locking in on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 64, n. 1, p. 66203–66203, Aug. 1996.
- 60 STEPIEN, L.; KRAWIECKI, A.; KOSINSKI, R. A. Stochastic resonance in spatiotemporal on-off intermittency. *Chaos, Solitons Fractals*, Oxford, v. 64, n. 1, p. 1–5, Aug. 2003.
- 61 VENKATARAMANI, S. C.; ANTONSEN, T. M.; OTT, E.; SOMMERER, J. C. Characterization of on-off intermittent time series. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 207, n. 3/4, p. 173–179, Oct. 1995.
- 62 VENKATARAMANI, S. C.; ANTONSEN, T. M.; OTT, E.; SOMMERER, J. C. On-off intermittency: power spectrum and fractal properties of time series. *Physica D*, Amsterdam, v. 96, n. 1, p. 66–99, Jan. 1996.
- 63 YU, Y. H.; KWACK, K.; LIM, T. K. On-off intermittency in an experimental synchronization process. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 198, n. 1, p. 34–38, Feb. 1995.
- 64 CENYS, A.; NAMAJUNAS, A.; TAMASEVICIUS, A.; SCHNEIDER, T. On-off intermittency in a chaotic synchronization experiment. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 29, n. 1, p. 269–264, Apr. 1996.
- 65 KIM, C. Mechanism of chaos synchronization and on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 56, n. 3, p. 3697–3700, Sept. 1997.
- 66 HUN, Y. Y.; KIM, D. C.; KWACK, K.; LIM, T. K.; JUNG, W. On-off intermittency in a quasiperiodic driven nonlinear oscillator. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 247, n. 1, p. 70–74, Oct. 1998.

-
- 67 GERASHCHENKO, O. V.; GINZBURG, S. L.; PUSTOVOIT, M. A. Experimental observation of noise-induced sensitivity to small signals in a system with on-off intermittency. *Eur. Phys. J. B*, Berlin, v. 15, n. 2, p. 335–338, Mar. 2000.
- 68 GONG, S.; KIM, C. On-off intermittency in the threshold of a continuous-wave Nd:YAG laser. *J. Opt. Soc. Am. B*, Washington, v. 18, n. 9, p. 1285–1287, Sept. 2001.
- 69 MORAES, R. M.; OLIVEIRA, L.; LEITE, J. R. R. Analog circuits simulation of communication with chaotic lasers. *Appl. Phys. Lett.*, Woodbury, v. 70, n. 11, p. 1357–1359, Mar. 1997.
- 70 SAATY, T. L. *Modern nonlinear equations*. New York: Dover, 1981.
- 71 GRADSHTEYN, I.; RYSHEK, I. M. *Table of integrals, series and products*. New York: Academic Press, 1965.