Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

UNICIDADE DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA EQUAÇÕES SEMI-LINEARES ELÍPTICAS

por

Cícero Nachtigall

Porto Alegre, 06 de julho de 2006.

Dissertação submetida por Cícero Nachtigall *, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Avila Zingano

*Bolsista da CAPES-Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

dedico a minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado forças para concluir mais esta etapa de meus estudos.

Agradeço especialmente aos meus pais Sidio Nachtigall e Ivone Schleich Nachtigall e a minha irmã Cintia Nachtigall pelo apoio incondicional e por terem sido a coragem que me fez ir em frente.

À querida amiga Marli Mulling pelo carinho, atenção e incentivo.

Aos professores Sérgio Oliveira, Adriana Borda e Lioudmila Bourchtein pelo incentivo dado para que eu continuasse meus estudos.

Ao meu orientador Leonardo Prange Bonorino, pela paciência, boa vontade, sabedoria, pelo exemplo de dedicação à profissão e por ter aceito me orientar.

Ao professor Jaime Bruk Ripoll, pela preocupação com o rigor matemático, clareza nos argumentos e pelo exemplo de profissionalismo.

À funcionária Rosane Reginatto, pela sua competência, organização e amizade.

Aos meus grandes amigos Mauricio Zahn e Elismar Oliveira. O primeiro por ter insistido para que eu continuasse estudando e por ser um dos grandes responsáveis pela minha vinda para Porto Alegre. O segundo, por ter sido um exemplo de seriedade, aplicação ao trabalho, conhecimento, inteligência, sabedoria e principalmente pela sua grande amizade.

Ao curso Desafio Pré-vestibular pela oportunidade.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo indispensável apoio financeiro.

Agradeço a todos os meus amigos, que ao longo destes dois anos e meio me encorajaram, ajudaram ou torceram por mim.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar a unicidade de soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em} \quad B_R \quad \text{e} \quad u > 0 \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial B_R \end{cases} \tag{1}$$

onde B_R é uma bola de raio R em $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ e $f(u) = u^p + u^q$ com $1 < q < p < \dfrac{n+2}{n-2}$ e $\dfrac{p-1}{q+1} \leq \dfrac{2}{n}$.

Assim sendo, temos por finalidade demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 0.1. *Para $f(u) = u^p + u^q$ e $1 < q < p < \dfrac{n+2}{n-2}$, o problema (1) possui uma única solução, se $\dfrac{p-1}{q+1} \leq \dfrac{2}{n}$.*

Abstract

In this work we study the uniqueness of positive solutions of the problem

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{in} \quad B_R \quad \text{and} \quad u > 0 \\ u = 0 & \text{in} \quad \partial B_R \end{cases} \tag{2}$$

where B_R is a ball with radius R in $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, $f(u) = u^p + u^q$, $1 < q < p < \dfrac{n+2}{n-2}$, and $\dfrac{p-1}{q+1} \leq \dfrac{2}{n}$.

Our final goal is to prove the following theorem:

Teorema 0.2. *For $f(u) = u^p + u^q$ and $1 < q < p < \dfrac{n+2}{n-2}$, the problem (2) has a unique positive solution, if $\dfrac{p-1}{q+1} \leq \dfrac{2}{n}$.*

Índice

Introdução

O problema (1) tem sido objeto de estudo de vários autores e a unicidade de solução positiva para o caso geral ainda é um problema em aberto. Para o caso $f(u) = u^p + u$, com $1 < p < \dfrac{n+2}{n-2}$, a unicidade de solução positiva foi provada recentemente por Zhang e também por Kwong e Li. Em alguns casos a unicidade não ocorre. Como ilustração podemos citar o caso $f(u) = \lambda u^p + u^5$ e $1 < q < 3$ e $n = 3$, onde Atkinson e Peletier [1] provam que (1) possui no mínimo duas soluções positivas para $\lambda > \lambda_0$. Outro resultado de não unicidade é dado em [5].

Neste trabalho, mostramos a unicidade de solução positiva para o caso $f(u) = u^p + u^q$, onde $\dfrac{p-1}{q+1} \leq \dfrac{2}{n}$ e $1 < q < p < \dfrac{n+2}{n-2}$, conforme os resultados estabelecidos por Zhang em [8].

No primeiro capitulo são introduzidas algumas definições e enunciados alguns teoremas que serão pré-requisitos as técnicas aplicadas.

No capítulo 2, mostramos que a solução de (1) é uma função de classe C^∞ e que esta é uma função radial e, portanto, basta mostrar que a solução do problema

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r}u' + f(u) = 0 \qquad \text{em} \quad (0, R) \qquad \text{e} \qquad u > 0 \\ u'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(R) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

é única para $f(u) = u^p + u^q$ fazendo certas suposições sobre p e q .

No capítulo 3 são utilizadas algumas técnicas do cálculo variacional e provados alguns lemas auxiliares que tem por objetivo a demonstração do teorema (0.1).

Capítulo 1

Pré-requisitos

O objetivo deste capítulo é introduzir definições e resultados que são utilizados no decorrer deste trabalho.

Definição 1.1. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo:

$$L^p(\Omega) = \{u | u \text{ é mensurável em } \Omega \text{ e } \int_\Omega |u|^p dx < \infty\}.$$

Proposição 1.2. *O espaço L^p, munido da norma*

$$\|u\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |u|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Observação 1.3. *Caso $\Omega = B_1(0)$ e u seja uma função radial,*

$$\|u\|_{L^p} = \left[\int_0^1 |u|^p r^{n-1} dr\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 1.4. *(Desigualdade de Interpolação) Seja $u \in L^r \cap L^p$, então*

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\lambda \|u\|_r^{1-\lambda},$$

onde $p \leq q \leq r$ e $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{1-\lambda}{r}$.

Definição 1.5. Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência $(x_n) \subset H$ converge fracamente a um elemento $x_0 \in H$ se para todo funcional $f \in H^*$ temos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Teorema 1.6. *Toda sequência limitada em um espaço de Hilbert possui uma subseqûencia fracamente convergente.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4], pg. 85.

Definição 1.7. Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Diremos que α é um multi-índice de ordem $|\alpha|$, onde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + ... + \alpha_n$.

Definição 1.8. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma expressão da forma

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), ..., D^1 u(x) = 0, u(x), x) = 0 \quad \text{onde} \quad x \in U \tag{1.1}$$

é chamada de Equação Diferencial Parcial de ordem k, onde

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times .... \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dada e $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é desconhecida.

A equação (1.1) é chamada linear se for da forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x),$$

para dadas funções $a_\alpha(x)$ e f. Esta é chamada de homogênea se $f \equiv 0$.

A equação em (1.1) é chamada de semi-linear se é da forma

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, ..., Du, u, x) = 0.$$

Definição 1.9. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, α um multi-índice e u uma função localmente integrável em Ω. Então a função localmente integráel v é chamada de α-ésima derivada fraca de u se esta satisfaz

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx \quad \forall \quad \varphi \in C_c^{|\alpha|}(\Omega),$$

onde $C_c^{|\alpha|}(\Omega)$ é o espaço das funções de suporte compacto em Ω, $|\alpha|$ vezes diferenciáveis.

Dizemos que u é k vezes fracamente diferenciável em Ω se possui derivadas fracas até a ordem k.

Definição 1.10. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Definimos o espaço $W^k(\Omega)$ como sendo

$$W^k(\Omega) = \{u | u \text{ é } k \text{ vezes fracamente diferenciável em } \Omega\}.$$

Definição 1.11. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u | u \in W^k(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall \quad |\alpha| \leq k\},$$

com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.12. Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$, onde $C_c^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções de suporte compacto em Ω, infinitamente diferenciáveis. Então $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se e somente se existem funções $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tais que

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

Definição 1.13. Dizemos que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de $\triangle u = f$, com $f \in L^2(\Omega)$, se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = -\int_\Omega f(u)\varphi, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definição 1.14. Definimos o espaço $H_0^1(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. Note que se $u \in H_0^1(B_1(0))$ é radial, então

$$u = u(r) \text{ é fracamente diferenciável em } (0,1) \text{ com } u(1) = 0 \text{ e } u' \in L^2.$$

Teorema 1.15. *O espaço H_0^1, munido da norma*

$$\|u\|_{H_0^1} = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert. Caso $\Omega = B_1(0)$ e u seja radial,

$$\|u\|_{H_0^1} = \left[\int_0^1 |u'|^2 r^{n-1} dr\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Neste caso, a função u pode ser identificada com uma função $v : B_1(0) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $v(x) = u(\|x\|)$.

Definição 1.16. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) D_i u + c(x)u$$

um operador diferencial, onde $x = (x_1, ...x_n)$ é um ponto de Ω e $[a^{ij}(x)]$ é uma matriz simétrica. Dizemos que L é elíptico em um ponto x se a matriz $[a^{ij}(x)]$ é positiva definida; isto é, se $\lambda(x), \Lambda(x)$ denotam respectivamente o maior e o menor valor de $[a^{ij}(x)]$, então

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

para todo $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Se $\lambda > 0$ em Ω, então L é elíptico em Ω e se existe $0 < \lambda_0 \leq \lambda$, então dizemos que L é estritamente elíptico em Ω. Se $\frac{\Lambda}{\lambda}$ é limitado em Ω, dizemos que L é uniformemente elíptico em Ω.

Teorema 1.17. *Suponhamos que $1 \leq p < n$. Então existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de p e de n, tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, onde $p^* = \dfrac{np}{n-p}$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2], pg. 263.

Definição 1.18. Dizemos que um domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^n$ possui fonteira $C^{k,\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ se para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe uma bola $B = B(x_0)$ e uma função injetiva $\psi : B \to D \subset \mathbb{R}^n$ tal que

(i) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$ $\quad (ii)$ $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ $\quad (iii)$ $\psi \in C^{k,\alpha}(B), \psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$,

onde o espaço de Holder $C^{k,\alpha}(\Omega)$ é definido como o subconjunto das funções $C^{\alpha}(\Omega)$ tais que as derivadas parciais até a ordem k são funções localmente Holder contínuas com expoente α em Ω. A definição de funções de Hölder é dada na definição 1.26.

Teorema 1.19. *Seja Ω um domínio $C^{1,1}$ em $\mathbb{R}^n$, e seja L um operador estritamente elíptico em Ω com coeficientes $a^{ij} \in C^0(\overline{\Omega}), b^i, c \in L^{\infty}$,onde $i, j = 1, ..., n$ e $c \leq 0$. Então, se $f \in L^p(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, o problema de Dirichlet $Lu = f$ em Ω, $u - \varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$ tem uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Além disso, existe uma constante C (independente de u) tal que*

$$\|u\|_{2,p;\Omega} \leq C\|L(u)\|_{p;\Omega},$$

para toda $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4], pg. 240.

Teorema 1.20. *Seja Ω um domínio $C^{1,1}$ em $\mathbb{R}^n$, e seja L um operador estritamente elíptico em Ω com coeficientes $a^{ij} \in C^0(\overline{\Omega}), b^i, c \in L^{\infty}$,onde $i, j = 1, ..., n$ e $c \leq 0$. Então, se $f \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{n}{2}$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, o problema de Dirichlet $Lu = f$ em Ω, $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, tem uma única solução $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4], pg. 243.

Proposição 1.21. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Então*

$$W^{k,p}_0(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega) \text{ para } kp < n \\ C^m(\overline{\Omega}) \text{ para } 0 \leq m < k - \frac{n}{p} \end{cases}$$

Definição 1.22. Seja Ω uma aberto limiado de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que Ω satisfaz a condição do cone exterior se para todo $\xi \in \partial\Omega$ existe um cone circular finito K, com vértice em ξ e tal que $\overline{K} \cap \overline{\Omega} = \xi$. Dizemos que Ω satisfaz a condição uniforme do cone exterior se Ω satisfaz a condição do cone exterior para todo $\xi \in \Omega$ e os cones K_ξ são todos congruentes a um cone fixo K. Da mesma forma, Ω satisfaz a condição uniforme do cone interior se existe um cone fixo K_Ω tal que para todo $\xi \in \Omega$, existe um cone $K_\Omega(\xi)$ com vértice em ξ e congruente a K_Ω e tal que $K_\Omega(\xi) \subset \overline{\Omega}$.

Proposição 1.23. *Seja Ω um aberto limitado de de $\mathbb{R}^n$ tal que Ω satisfaz a condição uniforme do cone interior. Então*

$$W^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega) \ \textit{para}\ kp < n \\ C_B^m(\Omega) \ \textit{para}\ 0 \leq m < k - \frac{n}{p} \end{cases}$$

onde $C_B^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) | D^\alpha u \in L^\infty(\Omega) \ \textit{para}\ |\alpha| \leq m\}$.

Definição 1.24. Dizemos que uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é superharmônica se $\triangle u \leq 0$ em Ω. Da mesma forma, dizemos que u é subharmônica se $\triangle u \geq 0$ em Ω. Para o caso particular em que $\triangle u = 0$ dizemos que u é harmônica.

Definição 1.25. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dizemos que um ponto $\xi \in \partial\Omega$ é regular se existe uma função $w \in C^0(\overline{\Omega})$ tal que $w > 0$ em Ω, $w(\xi) = 0$ e w é superharmônica em $\Omega - \{\xi\}$.

Definição 1.26. Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos uma função f é Holder contínua em Ω, com expoente $\alpha \in (0, 1]$ se

$$\sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Da mesma forma, dizemos que f é localmente Holder contínua em Ω, com expoente $\alpha \in (0, 1]$ se

$$\sup_{x,y\in\Omega', x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \qquad \forall \quad \Omega' \subset\subset \Omega.$$

No caso particular em que $\alpha = 1$ dizemos que f é Lipschitz contínua.

Teorema 1.27. *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ e suponha que todo ponto de $\partial\Omega$ é regular. Então se f é limitada, localmente Holder contínua em Ω, o problema clássico de Dirichlet $\triangle u = f$ em Ω e $u = \varphi$ em $\partial\Omega$ tem uma única solução para toda função φ contínua e limitada.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4], pg. 56.

Teorema 1.28. *Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$ e seja $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C^\alpha(\Omega)$ satisfazendo a equação $\triangle u = f$ em Ω. Então $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4], pg. 60.

Teorema 1.29. *Seja $u \in C^2(\overline{U})$ solução de*

$$\begin{cases} -\triangle u = f(u) \quad \text{em} \quad B_1(0) \quad \text{e} \quad u > 0 \\ \quad u = 0 \quad \text{em} \quad \partial B_1(0) \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $B_1(0)$ a bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e f é Lipschitz contínua. Então u é radial, isto é

$$u(x) = v(r) \qquad (r = |x|),$$

para alguma função estritamente decrescente $v : [0,1] \longrightarrow [0, +\infty)$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2], pg. 205.

Teorema 1.30. *Seja L um operador dado por*

$$Lu = D^i(a^{i,j}(x)D_iu + b^i(x)u) + c_i(x) + d(x)u,$$

satisfazendo

$$a^{i,j}(x) \geq \lambda|\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a^{i,j}(x)|^2 \leq \Lambda^2 \quad \text{e} \quad \lambda^{-2}\sum_{i=1}^{n}(|b^i(x)|^2 + |c_i(x)|^2) + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2,$$

onde λ *e* Λ *são constantes positivas e* $\nu \geq 0$. *Considere a equação* $Lu = g + D_i f^i$, *onde* g *e* f^i, $i = 1, \ldots, n$ *são funções localmente integráveis em* Ω. *Suponhamos que* $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$ *e que* $g \in L^q(\Omega)$ *para algum* $q > n$ *e suponha que* Ω *satisfaz a condição uniforme do cone exterior em cada porção limitada do domínio* T. *Então se* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *satisfaz* $Lu = g + D_i f^i$ *e existem constantes* $k, \alpha_0 > 0$ *tais que*

$$\sup_{\partial\Omega \cap B_R(x_0)} \| u(x) - u(y) \| \leq k R^{\alpha_0} \qquad \forall x_0 \in T, R > 0$$

temos que $u \in C^{\alpha}(\Omega \cup T)$ *para algum* $\alpha > 0$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4], pg. 205.

Proposição 1.31. *Seja* L *como na proposição acima e seja* $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ *a solução fraca de* $Lu = g + D_i f^i$ *em um domínio limitado* Ω. *Então para todo subdomínio* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *temos*

$$|u|_{1,\alpha;\Omega'} \leq C(|u|_{0;\Omega} + |g|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

onde $C = C(n, \lambda, K, d')$, *e* λ, K *e* d' *são tais que* $a^{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ $\forall x \in \Omega$ *e* $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $d' = dist(\Omega', \partial\Omega)$ *e*

$$\max_{i,j=1,\ldots,n} \{|a^{i,j}, b^i|_{0,\alpha;\Omega}, |c^i, d|_{0;\Omega}\} \leq K.$$

Capítulo 2

Regularidade da solução

Neste capítulo estaremos interessados em provar que toda solução positiva para o problema (1), com $f(u) = u^p + u^q$, é uma função de classe $C^\infty(B_R)$ e que esta solução é uma função radial, e portanto basta considerar a unicidade de solução positiva para o problema (3). Sendo assim, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u + u^p + u^q = 0 & \text{em} \quad B_R \qquad \text{e} \qquad u > 0 \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial B_R \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $1 < q < p < \frac{n+2}{n-2}$ e B_R é uma bola de raio R em $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.

Proposição 2.1. *Seja u solução fraca do problema (2.1). Então $u \in C^\infty(B_R) \cap L^\infty(B_R)$.*

Demonstração: Notemos primeiramente que se $u \in H_0^1(B_R)$, então, pela proposição 1.23, temos que $u \in C^\alpha$ para algum $\alpha > 0$ ou $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(B_R)$. Suponhamos que $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(B_R)$. Desta forma, podemos perguntar se $u^p \in L^\gamma(B_R)$, para algum $\gamma > 1$. Para que isso ocorra, devemos ter

$$\int_\Omega |u^p|^\gamma dx < \infty. \tag{2.2}$$

Para garantir isso, podemos exigir que $p\gamma \leq \dfrac{2n}{n-2}$ ou seja, $\gamma \leq \dfrac{1}{p}\dfrac{2n}{n-2}$.

Note que

$$\frac{1}{p}\frac{2n}{n-2} > \frac{2n}{n-2}\frac{n-2}{n+2} = \frac{2n}{n+2} \geq 1,$$

pois $n \geq 2$. Desta forma, como $\dfrac{1}{p}\dfrac{2n}{n-2} > 1$ temos que existe $\gamma_0 \in (1, \frac{2n}{n-2}\frac{1}{p}]$ tal que $u^p \in L^{\gamma_0}(B_R)$. Analogamente, temos que existe $\gamma_1 > 1$ tal que $u^q \in L^{\gamma_1}(B_R)$, onde $\gamma^1 \in (1, \frac{2n}{n-2}\frac{1}{q}]$. Mas como $q < p$ temos que $(1, \frac{2n}{n-2}\frac{1}{p}] \subset (1, \frac{2n}{n-2}\frac{1}{q}]$ ou seja, podemos considerar que $\gamma_1 = \gamma_0$ e que $f(u) = u^p + u^q \in L^{\gamma_0}(B_R)$, e daí temos que

$$-\triangle u = u^p + u^q \in L^{\gamma_0}, \qquad \gamma_0 > 1. \tag{2.3}$$

Logo, pelo Teorema 1.19, segue que $u \in W^{2,\gamma_0}(B_R)$. Sendo assim, pela Proposição 1.23, temos

$$u \in \begin{cases} L^{\frac{n\gamma_0}{n-2\gamma_0}}(B_R) & \text{para } \; 2\gamma_0 < n \\ C^m_B(B_R) & \text{para } \; 0 \leq m < 2 - \frac{n}{\gamma_0} \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $C^m_B(B_R) = \{u \in C^m(B_R) | D^\alpha u \in L^\infty(B_R) \text{ para } |\alpha| \leq m\}$.

Como $\gamma_0 \in (1, \frac{2n}{n-2}\frac{1}{p}]$ é livre, podemos tomar $\gamma_0 = \frac{2n}{n-2}\frac{1}{p}$.

Defina $h : \left[0, \frac{n}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(\gamma) = \dfrac{1}{p}\dfrac{n\gamma}{n-2\gamma}$ e note que h é contínua em $\left[0, \frac{n}{2}\right)$. Além disso, h é crescente, pois

$$\left(\frac{1}{p}\frac{n\gamma}{n-2\gamma}\right)' = \frac{1}{p}\frac{n(n-2\gamma)+2n\gamma}{(n-2\gamma)^2} = \frac{1}{p}\frac{n^2-2n\gamma+2n\gamma}{(n-2\gamma)^2} = \frac{1}{p}\frac{n^2}{(n-2\gamma)^2} > 0.$$

Afirmação 1: $u \in C^\alpha_B(B_R)$ para algum $\alpha > 0$.

De fato, nosso objetivo será o de mostrar que $u \in W^{2,\gamma}(B_R)$, onde $2\gamma > n$. Caso isto ocorra para γ_0, ou seja, se $2\gamma_0 > n$, pela Proposição 1.23, a afirmação esta demonstrada. Suponhamos que isto não ocorre, ou seja $2\gamma_0 \leq n$. Analisaremos separadamente o caso em que $2\gamma_0 = n$ e $2\gamma_0 < n$.

Consideremos primeiramente o caso em que $2\gamma_0 = n$. Neste caso, como h é uma função contínua em $[0, \frac{n}{2})$ e $h(\gamma) \longrightarrow \infty$ para $\gamma \longrightarrow \frac{n}{2}$, temos que existe $\overline{\gamma}_0 \in [0, \frac{n}{2})$ tal que $2\overline{\gamma}_0 < n$ e $h(\overline{\gamma}_0) > \frac{n}{2}$. Da mesma forma como acima, podemos investigar se $u^p \in L^{\gamma_1}$ para $\gamma_1 > \overline{\gamma}_0$. Para garantir que isso ocorra, podemos exigir que $p\gamma_1 \leq \dfrac{n\overline{\gamma}_0}{n-2\overline{\gamma}_0}$, isto é $\gamma_1 \leq \dfrac{1}{p}\dfrac{n\overline{\gamma}_0}{n-2\overline{\gamma}_0}$. Novamente tomando $\gamma_1 = \dfrac{1}{p}\dfrac{n\overline{\gamma}_0}{n-2\overline{\gamma}_0} = h(\overline{\gamma}_0)$ temos que $u^p \in L^{\gamma_1}$ e pelos Teoremas 1.19 e 1.23 obtemos que

$$u \in \begin{cases} L^{\frac{n\gamma_1}{n-2\gamma_1}}(B_R) & \text{para} \quad 2\gamma_1 < n \\ C_B^m(B_R) & \text{para} \quad 0 \leq m < 2 - \frac{n}{\gamma_1} \end{cases} \tag{2.5}$$

Mas sabemos que $\gamma_1 = h(\overline{\gamma}_0) > \frac{n}{2}$, ou seja, $2\gamma_1 > n$ e, por (2.5), temos que a afirmação está demonstrada.

Consideremos agora o caso em que $2\gamma_0 < n$. Neste caso, podemos também investigar se $u^p \in L^{\gamma_1}$ para $\gamma_1 > \gamma_0$, para garantir que isso ocorra, podemos exigir que $p\gamma_1 \leq \dfrac{n\gamma_0}{n-2\gamma_0}$, isto é $\gamma_1 \leq \dfrac{1}{p}\dfrac{n\gamma_0}{n-2\gamma_0}$. Novamente tomando $\gamma_1 = \dfrac{1}{p}\dfrac{n\gamma_0}{n-2\gamma_0} = h(\gamma_0)$, pelos Teoremas 1.19 e 1.23 temos que

$$u \in \begin{cases} L^{\frac{n\gamma_1}{n-2\gamma_1}}(B_R) & \text{para} \quad 2\gamma_1 < n \\ C_B^m(B_R) & \text{para} \quad 0 \leq m < 2 - \frac{n}{\gamma_1} \end{cases} \tag{2.6}$$

Se $2\gamma_1 > n$ a afirmação esta demonstrada e se $2\gamma_1 = n$, lembrando que $g(\gamma) = h(h(\gamma))$ é também contínua e crescente, utilizando o mesmo raciocínio feito para γ_0, temos que vale a afirmação feita. Portanto, basta analisar o caso em que $2\gamma_1 < n$, isto é $2h(\gamma_0) < n$. Prosseguindo indutivamente, obteremos uma sequência crescente $\gamma_k = h(\gamma_{k-1})$ tal que $u \in L^{\frac{n\gamma_k}{n-2\gamma_k}}$, desde que seja cumprida a condição de que $2\gamma_k < n$. Notemos ainda que

$$\gamma_0 = \frac{1}{p}\frac{2n}{n-2} > \frac{2n}{n-2} > 0,$$

ou seja, $\gamma_k > 0$ para todo k onde se cumpre $2\gamma_k < n$. Mas observemos que $\gamma_1 \leq \frac{1}{p}\frac{n\gamma_0}{n-2\gamma_0}$ e assim temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_1} &= \frac{n-2\gamma}{n\gamma_0}p = \left(\frac{1}{\gamma_0}-\frac{2}{n}\right)p \\
\frac{1}{\gamma_2} &= \frac{n-2\gamma_1}{n\gamma_1}p = \left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{2}{n}\right)p = \left(\left(\frac{1}{\gamma_0}-\frac{2}{n}\right)p-\frac{2}{n}\right)p \\
\frac{1}{\gamma_3} &= \frac{n-2\gamma_2}{n\gamma_2}p = \left(\frac{1}{\gamma_2}-\frac{2}{n}\right)p = \left(\left(\left(\frac{1}{\gamma_0}-\frac{2}{n}\right)p-\frac{2}{n}\right)p-\frac{2}{n}\right)p
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_k} &= \left(...\left(\frac{1}{\gamma_0}-\frac{2}{n}\right)p....-\frac{2}{n}\right)p = \frac{p^k}{\gamma_0}-\frac{2}{n}p^k-\frac{2}{n}p^{k-1}-...-\frac{2}{n}p \\
&= \frac{1}{\gamma_0}p^k-\frac{2}{n}\left[p^k+p^{k-1}+....+p^2+p\right] = \frac{1}{\gamma_0}p^k-\frac{2}{n}\left[\frac{p^{k+1}-1}{p-1}\right] \\
&= \frac{p^k n(p-1)-2\gamma_0(p^{k+1}-1)}{\gamma_0(p-1)n} = \frac{np^{k+1}-np^k-2\gamma_0 p^{k+1}+2\gamma_0}{\gamma_0(p-1)n} \\
&= \frac{p^{k+1}(n-2\gamma_0)-np^k+2\gamma_0}{\gamma_0(p-1)n} = \frac{p^k[pn-2p\gamma_0-n]+2\gamma_0}{\gamma_0(p-1)n}.
\end{aligned}
$$

Ou seja, para $\gamma_k p < n$ temos

$$\frac{1}{\gamma_k} = \frac{p^k[pn-2p\gamma_0-n]+2\gamma_0}{\gamma_0(p-1)n}.$$

E daí segue que

$$\gamma_k = \frac{\gamma_0(p-1)n}{p^k[pn-2p\gamma_0-n]+2\gamma_0}.$$

Mas $\gamma_0(p-1)n > 0$ e $pn-2p\gamma_0-n < 0$ pois, lembrando que $p < \frac{n+2}{n-2}$ e que $\gamma_0 = \frac{2n}{n-2}\frac{1}{p}$ obtemos

$$pn-2p\gamma_0-n < pn-2p\frac{2n}{n-2}\frac{1}{p}-n = pn-2\frac{2n}{n-2}-n$$

$$= \frac{pn(n-2)-4n-n(n-2)}{n-2} = \frac{n(n-2)(p-1)-4n}{n-2}$$

$$< \frac{n(n-2)(\frac{n+2}{n-2}-1)-4n}{n-2} = \frac{n(n-2)(\frac{4}{n-2})-4n}{n-2} = 0.$$

Ou seja, como $p > 1$, tomando k_0 suficientemente grande temos que $\gamma_k < 0$ (basta tomar $k_0 > \frac{log(\frac{2\gamma}{2p\gamma+n-pn})}{log(p)}$), o que seria uma contradição com o fato de que $\gamma_0 > 0$ e $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4 < ... < \gamma_k$. Ou seja, para este inteiro k_0 a relação $2\gamma_{k_0} < n$ não é satisfeita. Sendo assim, da Proposição 1.23 temos que $u \in C^{\alpha}_{B}(B_R)$ para algum $\alpha > 0$ e está demonstrada a nossa afirmação.

Logo u é limitada e $u \in C^{\alpha}$. Denotemos por M o supremo $M = \sup_{B_R} u$ e lembremos que $f(u) = u^p + u^q$. Como $f(t)$ é Lipschitz em $[0, M]$, existe $c > 0$ tal que $|f(t_1) - f(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|$ para todo $t_1, t_2 \in [0, M]$. Defina

$$\overline{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{para} \quad 0 \leq t < M+1 \\ f(M+1) & \text{para} \quad t \geq M+1 \end{cases}$$

Desta forma temos que $\overline{f}$ é Lipchtiz contínua em $[0, +\infty)$.

Afirmação 2: Toda função f Lipschitz contínua em um domínio limitado Ω é também Holder contínua em Ω. De fato, basta notar que se f é Lipschitz contínua vale que

$$\sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}} &= \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}} \frac{|x - y|}{|x - y|} \\ &= \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \frac{|x - y|}{|x - y|^{\alpha}} \\ &= \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} |x - y|^{1-\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Pois Ω é limitado e $1 - \alpha > 0$ e isto demonstra a afirmação 2.

Como a composição de uma função de Lipschitz com uma função de classe C^{α} é uma função de classe C^{α} temos que $f(u) = u^p + u^q \in C^{\alpha}(B_R)$ e é limitada. Sendo assim, pelo Teorema 1.27 temos que $u \in C^2(B_R)$ e, do Teorema 1.28, temos que $u \in C^{2,\alpha}(B_R)$. Como $f(u) = u^p + u^q$, segue que $f(u) \in C^{2,\alpha}(B_R)$ e novamente, pelo Teorema 1.28, temos que $u \in C^{4,\alpha}(B_R)$. Prosseguindo desta forma temos que $u \in C^{\infty}(B_R)$ e isto conclui a demonstração. demonstraï¿½o

□

Corolário 2.2. *Seja u solução do problema (2.1). Então u é uma função radial.*

Demonstração: Basta notar que, da demonstração do teorema anterior, $\overline{f}$ é Lipschitz contínua em $[0, \infty)$. Como $\overline{f} = f$ em $[0, M]$, u também satisfaz o problema

$$\begin{cases} \Delta u + \overline{f}(u) = 0 & \text{em} \quad B_R \qquad \text{e} \qquad u > 0 \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial B_R \end{cases}$$

Desta forma, temos que a demonstração deste corolário é consequência imediata do Teorema 1.29. □

Obs.: O fato de que u é uma função radial também é garantido por [3].

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r} u' + f(u) = 0 \qquad \text{em} \quad (0, R) \quad \text{e} \quad u > 0 \\ u'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(R) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $f(t) = t^p + t^q$.

Lema 2.3. *Para provar a unicidade de solução positiva para o problema (1), basta provar a unicidade de solução positiva para o problema (2.7).*

Demonstração: De fato, notemos primeiramente que, pela proposição (2.2), temos que u é uma função radial, ou seja, fazendo $|x| = r$ temos que $u = u(r)$ e, daí, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u(|x|)}{\partial x_i} = u'(|x|)\frac{x_i}{|x|}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 u(|x|)}{\partial x_i^2} && (2.8) \\
&= u''(|x|)\frac{(x_i)^2}{|x|^2} + u'(|x|)\left(\frac{|x| - \frac{(x_i)^2}{|x|}}{|x|^2}\right) && (2.9) \\
&= u''(|x|)\frac{(x_i)^2}{|x|^2} + u'(|x|)\frac{|x|^2 - (x_i)^2}{|x|^3}.
\end{aligned}$$

De onde temos que

$$\begin{aligned}
\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \sum_{i=1}^{n} \left[u''(|x|)\frac{(x_i)^2}{|x|^2} + u'(|x|)\frac{|x|^2 - (x_i)^2}{|x|^3} \right] \\
&= \frac{u''(|x|)|x|^2}{|x|^2} + u'(|x|)\frac{n}{|x|} - u'(|x|)\frac{1}{|x|} \\
&= u''(|x|) + \frac{(n-1)}{|x|}u(|x|) = u''(r) + \frac{(n-1)}{r}u'(r).
\end{aligned}$$

De modo que

$$\triangle u + f(u) = u''(r) + \frac{(n-1)}{r}u'(r) + f(u).$$

Além disso, como u é radial, temos que $u'(0) = 0$ e, como $u = 0$ em ∂B_R, temos $u(R) = 0$.

Reciprocamente, notando que se $u : [0, R] \to \mathbb{R}$ é solução de (2.7), então definindo

$$v(x) = u(|x|)$$

temos que v é de classe C^2 em $B_R \backslash \{0\}$. Além disso, a hipótese $u'(0) = 0$ implica que v é de classe C^2 também em uma vizinhança da origem. Sendo assim, a função $\triangle v + f(v)$ é contínua em $B_R(0)$ e nula em $B_R(0)$, ou seja, $\triangle v + f(v) = 0$ em $B_R(0)$. Ou seja, no nosso caso, (1) é equivalente a (2.7). $\square$

Capítulo 3

Unicidade de solução para o caso $f(u) = u^p + u^q$

3.1 O Problema Variacional

Nesta seção, fazemos algumas considerações importantes que são utilizadas na secção seguinte e que contribuem para mostrar a unicidade de solução positiva para o problema (1), para o caso $f(u) = u^p + u^q$ e $1 < q < p < \dfrac{n+2}{n-2}$. Sendo assim, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r}u' + u^p + u^q = 0 \quad \text{em} \quad (0, R) \quad \text{e} \quad u > 0 \\ u'(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(R) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $1 < q < p < \dfrac{n+2}{n-2}$, e o seguinte problema de minimização:

$$I = \inf \left\{ I(u) \mid u \in H_0^1, u \text{ é radial}, \ u > 0 \ e \int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr = 1 \right\} \tag{3.2}$$

onde

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr - \frac{t}{p+1}\int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr, \tag{3.3}$$

t é uma constante positiva e H_0^1 é o espaço de Sobolev da definição 1.14.

Definição 3.1. Dizemos que u_0 é um mínimo local para o problema (3.2) se existe um $\tau > 0$, tal que para toda $u \in H_0^1$, e $\|u - u_0\|_{H_0^1} \leq \tau$, $\|u\|_{L^{q+1}} = 1$ vale que

$$I(u_0) \leq I(u).$$

Da mesma forma, dizemos que u_0 é um mínimo local estrito para o problema (3.2) se existe um $\tau > 0$, tal que para toda $u \in H_0^1$, $0 < \|u - u_0\|_{H_0^1} \leq \tau$, $\|u\|_{L^{q+1}} = 1$ vale que

$$I(u_0) < I(u).$$

Lema 3.2. *O problema de minimização construído em (3.2) é inferiormente limitado, supondo que* $\frac{p-1}{q+1} < \frac{2}{n}$ *ou* $\frac{p-1}{q+1} = \frac{2}{n}$ *e* t *suficientemente pequeno. Ademais este possui uma solução positiva.*

Demonstração:

Afirmação 1: A condição $\dfrac{p-1}{q+1} \leq \dfrac{2}{n}$ é necessária e suficiente para a limitação do problema (1.2). De fato, tome $\varphi(r)$ uma função positiva radial em H_0^1 tal que $\displaystyle\int_0^1 [\varphi(r)]^{q+1} r^{n-1} dr = 1$ e defina

$$\varphi_k(r) = \begin{cases} \varphi(kr) k^{\frac{n}{q+1}} & \text{para} \quad 0 < r < \frac{1}{k} \\ 0 \quad \text{para} & \frac{1}{k} \leq r \leq 1 \qquad k = 1, 2, 3, 4, ... \end{cases}$$

Desta forma temos que $\varphi_k \in H_0^1$ e $\displaystyle\int_0^1 \varphi_k^{q+1} r^{n-1} dr = 1$, pois

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_k^{q+1} r^{n-1} dr &= \int_0^{\frac{1}{k}} (\varphi(kr) k^{\frac{n}{q+1}})^{q+1} r^{n-1} dr = \int_0^1 \varphi(s)^{q+1} k^n \left(\frac{s}{k}\right)^{n-1} \frac{1}{k} ds \\ &= \int_0^1 \varphi(s)^{q+1} s^{n-1} ds = \int_0^1 \varphi(r)^{q+1} r^{n-1} dr = 1. \end{aligned}$$

Mas note que

$$I(\varphi_k) = \frac{1}{2} k^{2-n+\frac{2n}{q+1}} \int_0^1 (\varphi')^2 r^{n-1} dr - \frac{t}{p+1} k^{\frac{n(p+1)}{q+1} - n} \int_0^1 \varphi^{p+1} r^{n-1} dr. \quad (3.4)$$

Para ver isso, basta notar que, de (3.3) temos

$$I(\varphi_k) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_k')^2 r^{n-1} dr - \frac{t}{p+1}\int_0^1 \varphi_k^{p+1} r^{n-1} dr. \tag{3.5}$$

Mas notemos que

$$(\varphi(kr)k^{\frac{n}{q+1}})' = \varphi'(kr)kk^{\frac{n}{q+1}},$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_k')^2 r^{n-1} dr &= \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi'(kr)^2 k^2 k^{\frac{2n}{q+1}} r^{n-1} dr \\
&= \frac{1}{2}k^2 k^{\frac{2n}{q+1}} \int_0^1 (\varphi(s)')^2 (\frac{s}{k})^{n-1} \frac{1}{k} ds \\
&= \frac{1}{2}k^2 k^{\frac{2n}{q+1}} \int_0^1 (\varphi'(s))^2 s^{n-1} \left(\frac{1}{k}\right)^n ds \\
&= k^{2-n+\frac{2n}{q+1}} \int_0^1 (\varphi')^2 r^{n-1} dr,
\end{aligned}$$

ou seja, obtemos que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_k')^2 r^{n-1} dr = k^{2-n+\frac{2n}{q+1}} \int_0^1 (\varphi'(r))^2 r^{n-1} dr. \tag{3.6}$$

Da mesma forma, temos que

$$\begin{aligned}
-\frac{t}{p+1}\int_0^1 (\varphi_k)^{p+1} r^{n-1} dr &= -\frac{t}{p+1}\int_0^1 (\varphi(kr)k^{\frac{n}{q+1}})^{p+1} r^{n-1} dr \\
&= -\frac{t}{p+1}\int_0^1 (\varphi(s)k^{\frac{n}{q+1}})^{p+1} \left(\frac{s}{k}\right)^{n-1} \frac{1}{k} ds \\
&= -k^{\frac{n(p+1)}{q+1}-n} \frac{t}{p+1}\int_0^1 (\varphi)^{p+1} r^{n-1} dr.
\end{aligned}$$

Com isso, mostramos que

$$-\frac{t}{p+1}\int_0^1 (\varphi_k)^{p+1} r^{n-1} dr = -k^{\frac{n(p+1)}{q+1}-n} \frac{t}{p+1}\int_0^1 (\varphi(r))^{p+1} r^{n-1} dr. \tag{3.7}$$

Assim, substituindo (3.6) e (3.7) em (3.5) temos que

$$I(\varphi_k) = \frac{1}{2}k^{2-n+\frac{2n}{q+1}} \int_0^1 (\varphi')^2 r^{n-1} dr - \frac{t}{q+1} k^{\frac{n(p+1)}{q+1}-n} \int_0^1 \varphi(r)^{p+1} r^{n-1} dr,$$

ou seja, vale (3.4).

Notemos que, se $\dfrac{p-1}{q+1} > \dfrac{2}{n}$ teríamos

$$\frac{p-1}{q+1} > \frac{2}{n} \iff 2 < n\frac{p-1}{q+1} \iff 2 < \frac{n(p-1+1-1)}{q+1} \iff 2 <$$
$$-\frac{2n}{q+1} + n\frac{p+1}{q+1} \iff 2 + \frac{2n}{q+1} < n\frac{p+1}{q+1} \iff 2 - n + \frac{2n}{q+1} < n\frac{p+1}{q+1} - n.$$

E, desta forma, fazendo $k \to \infty$ em (3.4) teríamos que $I(\varphi_k)$ não seria limitado inferiormente, visto que as integrais independem de k, e a potência de k para o segundo membro da igualdade é maior que a do primeiro.

Para concluir a prova do lema, notemos que tomando $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ e $\overline{\lambda} = \left(\dfrac{\dfrac{1}{q+1} - \dfrac{1}{p+1}}{\dfrac{1}{q+1} - \dfrac{1}{2^*}}\right)$ temos que $\dfrac{1}{p+1} = \dfrac{\overline{\lambda}}{\dfrac{2n}{n-2}} + \dfrac{(1-\overline{\lambda})}{q+1}$, pois

$$\frac{1}{p+1} = \frac{\overline{\lambda}}{\frac{2n}{n-2}} + \frac{(1-\overline{\lambda})}{q+1} \iff \frac{1}{p+1} = \frac{\overline{\lambda}(2-n)}{2n} + \frac{(1-\overline{\lambda})}{q+1} \iff$$
$$\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1} = \overline{\lambda}\left(\frac{n-2}{2n} - \frac{1}{q+1}\right) \iff \overline{\lambda} = \left(\frac{\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}}{\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*}}\right).$$

Além disso, como $q < p$ e $p < \dfrac{n+2}{n-2}$ temos, usando a Desigualdade de Holder, que

$$\|u\|_{p+1} \leq \|u\|_{2^*}^{\overline{\lambda}} \|u\|_{q+1}^{1-\overline{\lambda}}. \tag{3.8}$$

Mas

$$\|u\|_{q+1}^{1-\overline{\lambda}} = \left[\left(\int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr\right)^{\frac{1}{q+1}}\right]^{1-\overline{\lambda}} = 1,$$

para u satisfazendo $\displaystyle\int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr = 1$. Sendo assim, de (3.8) temos que

$$\|u\|_{p+1} \leq \|u\|_{2^*}^{\overline{\lambda}}.$$

Ou seja,

$$\left(\int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr\right)^{\dfrac{1}{p+1}} \leq \|u\|_{2^*}^{\overline{\lambda}} \iff \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr \leq \|u\|_{2^*}^{\overline{\lambda}(p+1)}.$$

De onde temos que vale

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr - \frac{t}{p+1}\int_0^1 u^{p+1}r^{n-1}dr \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr - \frac{t}{p+1}\|u\|_{2^*}^{\overline{\lambda}(p+1)}. \tag{3.9}$$

Como 2 e 2^* são sobolev conjugados, do Teorema 1.17 temos que existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{2^*} \leq c\|u'\|_2,$$

e daí temos que

$$\|u\|_{2^*}^{\overline{\lambda}(p+1)} \leq c\|u'\|_2^{\overline{\lambda}(p+1)} = c\left(\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac{\overline{\lambda}(p+1)}{2}}. \tag{3.10}$$

De modo que, substituindo (3.10) em (3.9) temos

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr - \frac{t}{p+1}\|u\|_{2^*}^{\overline{\lambda}(p+1)}$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr - \frac{t}{p+1}c\left(\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac{\overline{\lambda}(p+1)}{2}}. \tag{3.11}$$

Mas $\overline{\lambda}(p+1) \leq 2$, visto que

$$\overline{\lambda}(p+1) \leq 2 \iff \frac{\frac{p+1-q-1}{(q+1)(p+1)}^{(p+1)}}{\frac{1}{q+1}-\frac{n-2}{2n}} \leq 2 \iff \frac{\frac{p-q}{q+1}}{\frac{2n-(n-2)(q+1)}{(q+1)2n}} \leq 2 \iff$$
$$\frac{(p-q)2n}{2n-(n-2)(q+1)} \leq 2 \iff (p-q)2n \leq 2(2n-(n-2)(q+1)) \iff 2np - 2nq \leq 2(2n-nq-n+2q+2) \iff 2np-2nq \leq 4n-2nq-2n+4q+4 \iff 2np \leq 2n+4q+4 \iff 2n(p-1) \leq 4(q+1) \iff n(p-1) \leq 2(q+1) \iff \frac{p-1}{q+1} \leq \frac{2}{n}.$$

Ou seja, $\frac{\overline{\lambda}(p+1)}{2} \leq 1$. Se $\frac{p-1}{q+1} < \frac{2}{n}$, então $\frac{\overline{\lambda}(p+1)}{2} < 1$ e daí, para $\|u\|_{H_0^1}$ grande,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr - \frac{t}{p+1}c\left(\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac{\overline{\lambda}(p+1)}{2}} \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr - \frac{t}{p+1}c\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr = \left(\frac{1}{2} - c\frac{t}{p+1}\right)\int_0^1 (u')^2 r^{n-1}dr \geq 0.$$

Se $\dfrac{p-1}{q+1} = \dfrac{2}{n}$, então $\dfrac{\overline{\lambda}(p+1)}{2} = 1$. Logo esta desigualdade também é válida para t suficientemente pequeno. Desta forma temos

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr - \frac{t}{p+1}\int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr \geq 0,$$

ou seja, $I(u) \geq 0$ para $\|u\|_{H_0^1}$ grande quando $\frac{p-1}{q+1} < \frac{2}{n}$ ou para t pequeno quando $\frac{p-1}{q+1} = \frac{2}{n}$. Denotemos por

$$I_0 = \inf\left\{ I(u) \mid u \in H_0^1,\ u \text{ é radial}, \int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr = 1 \right\},$$

onde

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr - \frac{t}{p+1}\int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr.$$

Desta forma, podemos tomar uma sequência minimizante $\{u_m\}$ tal que $I(u_m) \to I_0$.

- $\|u_m\|_{H_0^1}$ é limitada. De fato, para isso, notemos primeiramente que, para m suficientemente grande vale que $I(u_m) \leq 2I_0$. Desta forma, no caso $\frac{p-1}{q+1} = \frac{2}{n}$, temos

$$2I_0 \geq I(u_m) \geq \left(\frac{1}{2} - c\frac{t}{p+1}\right)\int_0^1 (u_m')^2 r^{n-1} dr.$$

O outro caso segue por um argumento similar. Assim, temos que

$$\frac{2I_0}{\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{ct}{p+1}\right)} \geq \int_0^1 (u_m')^2 r^{n-1} dr.$$

Ou seja, existe $D > 0$ tal que

$$\int_0^1 (u_m')^2 r^{n-1} dr \leq D.$$

Ou seja, temos que

$$\|u_m\|_{H_0^1} = \left(\int_0^1 (u_m')^2 r^{n-1} dr\right)^{\frac{1}{2}} \leq D^{\frac{1}{2}}.$$

E isto mostra que $\|u_m\|_{H_0^1}$ é limitada. Desta forma, como H_0^1 é um espaço de Hilbert, existe uma subsequência $\{u_{m_k}\}$, que podemos tomar $u_{m_k} \geq 0$, tal que $u_{m_k} \longrightarrow u_0$ fracamente em H_0^1.

• Se $p < \dfrac{n+2}{n-2}$, então o problema de minimização dado tem u_0 como solução. De fato, considerando que $p < \dfrac{n+2}{n-2}$, o funcional I é fracamente semicontínuo inferiormente. Como u_{m_k} converge fracamente a u_0 em H_0^1, então $\liminf I(u_{n_k}) \geq I(u_0)$ e $I(u_{m_k}) \longrightarrow I_0$. Logo $I(u_0) \leq I_0$. Assim, o ínfimo I_0 é assumido em u_0. □

• u_0 satisfaz o problema

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r}u' + tu^p + \lambda u^q = 0 \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

onde λ é um multiplicador de Lagrange. De fato, consideremos

$$G(u) = \frac{1}{q+1}\left(\int_0^1 u^{q+1}r^{n-1}dr - 1\right).$$

Note que u_0 é um mínimo de $I(u)$ com a condição $G(u) = 0$. Como

$$\begin{aligned} I'(u)\varphi &= \lim_{l\to 0}\frac{I(u+\varphi l) - I(u)}{l} \\ &= \int_0^1 u'\varphi' r^{n-1}dr - t\int_0^1 u^p\varphi r^{n-1}dr + \lim_{l\to 0} l\left(\int_0^1 (\varphi'^2 l + O(1))r^{n-1}dr\right) \\ &= \int_0^1 u'\varphi' r^{n-1}dr - t\int_0^1 u^p\varphi r^{n-1}dr, \end{aligned}$$

onde $O(1)$ indica que todos os termos da soma possuem uma potência de l maior ou igual a 1. De onde obtemos que

$$I'(u)\varphi = \int_0^1 u'\varphi' r^{n-1}dr - t\int_0^1 u^p\varphi r^{n-1}dr.$$

Mas

$$u'\varphi' = (u'\varphi')' - u''\varphi.$$

Ou seja,

$$I'(u)\varphi = \int_0^1 ((u'\varphi)' - u''\varphi - tu^p\varphi)r^{n-1}dr.$$

Como

$$\int_0^1 (u'\varphi)'r^{n-1}dr = u'\varphi r^{n-1}|_0^1 - \int_0^1 (n-1)r^{n-2}u'\varphi dr,$$

lembrando que $u'\varphi r^{n-1}|_0^1 = 0$, temos que

$$I'(u)\varphi = \int_0^1 -(u''\varphi + \frac{n-1}{r}u'\varphi + tu^p\varphi)r^{n-1}dr.$$

Da mesma forma, calculando $G'(u)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q+1}G'(u)\varphi &= \lim_{l\to 0}\frac{\frac{1}{q+1}G(u+l\varphi) - \frac{1}{q+1}G(u)}{l} \\
&= \frac{1}{q+1}\lim_{l\to 0}\frac{\int_0^1 (u+l\varphi)^{q+1}r^{n-1}dr - \int_0^1 (u)^{q+1}r^{n-1}dr}{l} \\
&= \frac{1}{q+1}(q+1)\int_0^1 u^q\varphi r^{n-1}dr + \lim_{l\to 0}\frac{\int_0^1 lO(1)r^{n-1}dr}{l} \\
&= \int_0^1 u^q\varphi r^{n-1}dr,
\end{aligned}$$

onde $O(1)$ indica que todos os termos da soma possuem uma potência de l maior ou igual a 1. Sendo λ um multiplicador de Lagrange temos

$$I'(u)\varphi = \lambda G'(u)\varphi.$$

Desta forma

$$\int_0^1 -(u''\varphi + \frac{n-1}{r}u'\varphi + tu^p\varphi)r^{n-1}dr = \lambda\int_0^1 u^q\varphi r^{n-1}dr.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 (u'' + \frac{n-1}{r}u' + tu^p + \lambda u^q)\varphi r^{n-1}dr = 0,$$

para qualquer φ radial em $H_0^1(B_1)$. De onde obtemos

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' + tu^p + \lambda u^q = 0.$$

Além disso, como $u \in H_0^1$, temos que $u(1) = 0$ e pelo princípio do máximo vale que $u'(0) = 0$. Note que, usando o mesmo raciocínio utilizado no capítulo 2, obtemos que u satisfaz (3.12) no sentido clássico.

- O multiplicador de Lagrange λ dado acima é expresso por

$$\lambda = \int_0^1 (u_0')^2 r^{n-1} dr - t \int_0^1 u_0^{p+1} r^{n-1} dr. \tag{3.13}$$

De fato, sabemos que

$$u'' + \frac{n-1}{r} u' + tu^p + \lambda u^q = 0.$$

Multiplicando os termos por r^{n-1} temos

$$u'' r^{n-1} + (n-1) u' r^{n-2} + tu^p r^{n-1} + \lambda u^q r^{n-1} = 0.$$

Mas sabemos que

$$u'' r^{n-1} + (n-1) u' r^{n-2} = (u' r^{n-1})'.$$

De onde temos

$$(u' r^{n-1})' + tu^p r^{n-1} + \lambda u^q r^{n-1} = 0.$$

Multiplicando por u em ambos os lados da igualdade temos

$$(u' r^{n-1})' u + tu^{p+1} r^{n-1} + \lambda u^{q+1} r^{n-1} u = 0.$$

Integrando em relação a r em ambos os lados obtemos

$$\int_0^1 (u' r^{n-1})' u dr + t \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr + \lambda \int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} u dr = 0.$$

Mas por hipótese temos que

$$\int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr = 1.$$

Ou seja, temos

$$\int_0^1 (u' r^{n-1})' u dr + t \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr + \lambda = 0.$$

Além disso, da fórmula de integração por partes temos que

$$\int_0^1 (u' r^{n-1})' u dr = r^{n-1} u' u \mid_0^1 - \int_0^1 r^{n-1} (u')^2 dr.$$

E como

$$r^{n-1} u' u \mid_0^1 = 1^{n-1} u'(1) u(1) - 0^{n-1} u'(0) u(0) = 0,$$

obtemos

$$\int_0^1 (u' r^{n-1})' u dr = - \int_0^1 r^{n-1} (u')^2 dr.$$

Ou seja,

$$- \int_0^1 r^{n-1} (u')^2 dr + t \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr = -\lambda.$$

De onde segue que

$$\lambda = \int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr - t \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr.$$

• Sendo λ o multiplicador de Lagrange dado acima, então $\lambda > 0$ para t suficientemente pequeno. De fato, sabemos que

$$\lambda = \int_0^1 r^{n-1} (u')^2 dr - t \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr.$$

Além disso, já mostramos que vale a desigualdade

$$\|u\|_{p+1} \leq \|u\|_{2^*}^{\overline{\lambda}},$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{p+1} \leq \|u\|_{2^*}^{\overline{\lambda}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left[\int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr\right]^{\frac{1}{p+1}} \leq \left[\int_0^1 u^{2^*} r^{n-1} dr\right]^{\frac{\overline{\lambda}}{2^*}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr \leq \left[\int_0^1 u^{2^*} r^{n-1} dr\right]^{\frac{\overline{\lambda}(p+1)}{2^*}}.
\end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema 1.17, temos que existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{2^*} \leq c\|u'\|_2.$$

Assim, temos

$$\frac{1}{c}\|u\|_{2^*} \leq \|u'\|_2.$$

Ou seja

$$\begin{gathered}
\frac{1}{c}\left[\int_0^1 u^{2^*} r^{n-1} dr\right]^{\frac{1}{2^*}} \leq \left[\int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr\right]^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow \\
\frac{1}{c^2}\left[\int_0^1 u^{2^*} r^{n-1} dr\right]^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr.
\end{gathered}$$

De onde obtemos que

$$\lambda \geq \frac{1}{c^2}\left[\int_0^1 u^{2^*} r^{n-1} dr\right]^{\frac{2}{2^*}} - t\left[\int_0^1 u^{2^*} r^{n-1} dr\right]^{\frac{\overline{\lambda}(p+1)}{2^*}}.$$

Lembrando que

$$\overline{\lambda}(p+1) \leq 2,$$

temos que $\lambda > 0$ para t suficientemente pequeno.

Na discussão seguinte, assumiremos sempre que t é tal que $\lambda > 0$.

Proposição 3.3. *Seja u o minimizante do problema (3.2), então*

$$\forall \varphi \in H_0^1 \text{ e } \int_0^1 u^q \varphi r^{n-1} dr = 0,$$

temos

$$J(\varphi) = \int_0^1 ((\varphi')^2 - ptu^{p-1}\varphi^2 - q\lambda u^{q-1}\varphi^2)r^{n-1}dr \geq 0. \qquad (3.14)$$

Demonstração:

Para $\varphi \in H_0^1$, seja

$$F(\alpha, s) = \int_0^1 |u + \alpha u + s\varphi|^{q+1} r^{n-1} dr - 1. \qquad (3.15)$$

Notemos primeiramente que se u minimiza o problema (3.2), então

- $F(0,0) = 0$. De fato,

$$F(0,0) = \int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr - 1 = 1 - 1 = 0.$$

- $F_\alpha(0,0) \neq 0$. De fato, derivando (3.15) em relação a α

$$F_\alpha(\alpha, s) = \int_0^1 r^{n-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} |u + \alpha u + s\varphi|^{q+1} dr.$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}|u + \alpha u + s\varphi|^{q+1} = (q+1)|u + \alpha u + s\varphi|^q \frac{\partial}{\partial \alpha}|u + \alpha u + s\varphi|$$

e, calculando $\frac{\partial}{\partial \alpha}|u + \alpha u + s\varphi|$ temos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}|u + \alpha u + s\varphi| = \frac{(u + \alpha u + s\varphi)u}{|u + \alpha u + s\varphi|}.$$

De modo que obtemos

$$F_\alpha(\alpha, s) = \int_0^1 [(q+1)|u + \alpha u + s\varphi|^{q-1} u(u + \alpha u + s\varphi)] r^{n-1} dr.$$

E desta forma

$$F_\alpha(0,0) = \int_0^1 [(q+1)|u|^{q-1}u(u)] r^{n-1} dr = (q+1)\int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr = q + 1 \neq 0.$$

Sendo assim, podemos resolver $F(\alpha, s) = 0$ em uma pequena vizinhança de $(0,0)$. Seja $\alpha = \alpha(s)$ a solução resultante e consideremos a função

$$g(s) = I(u + \alpha(s)u + s\varphi).$$

Sendo assim, temos que $g(0) = I(u)$ e $s = 0$ é um ponto de mínimo de g, ou seja $g'(0) = 0$ e $g''(0) \geq 0$. Mas note que

$$g(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\frac{d}{dr}(u+\alpha(s)u+s\varphi)]^2 r^{n-1}dr - \frac{t}{p+1}\int_0^1 (u+\alpha(s)u+s\varphi)^{p+1} r^{n-1}dr.$$

Ou seja,

$$g(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 [u' + \alpha(s)u' + s\varphi']^2 r^{n-1}dr - \frac{t}{p+1}\int_0^1 (u + \alpha(s)u + s\varphi)^{p+1} r^{n-1}dr.$$

De onde temos que

$$\begin{aligned} g'(s) = &\frac{1}{2}\int_0^1 2(u' + \alpha(s)u' + s\varphi')(\alpha'(s)u' + \varphi')r^{n-1}dr \\ -&\frac{t}{p+1}\int_0^1 (p+1)(u + \alpha(s)u + s\varphi)^p(\alpha'(s)u + \varphi)r^{n-1}dr \\ &= \int_0^1 (u' + \alpha(s)u' + s\varphi')(\alpha'(s)u' + \varphi')r^{n-1}dr \\ &-t\int_0^1 (u + \alpha(s)u + s\varphi)^p(\alpha'(s)u + \varphi)r^{n-1}dr \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g''(s) \quad &= \int_0^1 (\alpha'(s)u' + \varphi')(\alpha'(s)u' + \varphi')r^{n-1}dr \\ &+ \int_0^1 (u' + \alpha(s)u' + s\varphi')\alpha''(s)u'r^{n-1}dr \\ &-tp\int_0^1 (u + \alpha(s)u + s\varphi)^{p-1}(\alpha'(s)u + \varphi)^2 r^{n-1}dr \\ &-t\int_0^1 (u + \alpha(s)u + s\varphi)^p(\alpha''(s)u)r^{n-1}dr. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} g''(s) \quad &= \int_0^1 (\alpha'(s)u' + \varphi')^2 r^{n-1} dr + \\ &\int_0^1 (u' + \alpha(s)u' + s\varphi')\alpha''(s)u' r^{n-1} dr \\ &-pt \int_0^1 (u + \alpha(s)u + s\varphi)^{p-1}(\alpha'(s)u + \varphi)^2 r^{n-1} dr \\ &-t \int_0^1 (u + \alpha(s)u + s\varphi)^p \alpha''(s) u r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

Lembrando que $\alpha(0) = 0$ obtemos que

$$\begin{gathered} g''(0) = \int_0^1 (\alpha'(0)u' + \varphi')^2 r^{n-1} dr + \int_0^1 u'\alpha''(0)u' r^{n-1} dr \\ -pt \int_0^1 u^{p-1}(\alpha'(0)u + \varphi)^2 r^{n-1} dr - t \int_0^1 u^p \alpha''(0) u r^{n-1} dr \\ = \int_0^1 (\alpha'(0)u' + \varphi')^2 r^{n-1} dr + \alpha''(0) \int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr - \\ pt \int_0^1 u^{p-1}(\alpha'(0)u + \varphi)^2 r^{n-1} dr - t\alpha''(0) \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr \\ = \int_0^1 (\alpha'(0)u' + \varphi')^2 dr - pt \int_0^1 r^{n-1} u^{p-1}(\alpha'(0)u + \varphi)^2 r^{n-1} dr + \\ \alpha''(0) \left[\int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr - t \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr \right] = \int_0^1 (\alpha'(0)u' + \varphi')^2 r^{n-1} dr \\ -pt \int_0^1 u^{p-1}(\alpha'(0)u + \varphi)^2 r^{n-1} dr + \alpha''(0)\lambda. \end{gathered}$$

De modo que

$$g''(0) = \int_0^1 (\alpha'(0)u' + \varphi')^2 r^{n-1} dr - pt \int_0^1 u^{p-1}(\alpha'(0)u + \varphi)^2 r^{n-1} dr + \alpha''(0)\lambda. \tag{3.16}$$

Para $F(\alpha(s), s) = 0$ temos

$$F(\alpha, s) = \int_0^1 |u + \alpha(s)u + s\varphi|^{q+1} r^{n-1} dr - 1 = 0.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 |u + \alpha(s)u + s\varphi|^{q+1} r^{n-1} dr = 1 = \int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr.$$

E daí segue que

$$\int_0^1 (|u+\alpha(s)u+s\varphi|^{q+1} - u^{q+1})r^{n-1}dr = 0.$$

Derivando em relação a s, obtemos

$$(q+1)\int_0^1 [|u+\alpha(s)u+s\varphi|^{q}(\alpha'(s)u+\varphi)]r^{n-1}dr = 0.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 [|u+\alpha(s)u+s\varphi|^{q}(\alpha'(s)u+\varphi)]r^{n-1}dr = 0. \tag{3.17}$$

Calculando a expressão acima em $s=0$ obtemos

$$\int_0^1 [u^q(\alpha'(0)u+\varphi)]r^{n-1}dr = 0.$$

Derivando novamente (3.17) em relação a s temos que

$$\begin{aligned} q\int_0^1 |u+\alpha(s)u+s\varphi|^{q-1}(\alpha'(s)u+\varphi)^2 r^{n-1}dr \\ +\int_0^1 |u+\alpha(s)u+s\varphi|^{q}(\alpha''(s)u)r^{n-1}dr = 0. \end{aligned}$$

Calculando em $s=0$ obtemos

$$\begin{aligned} q\int_0^1 u^{q-1}(\alpha'(0)u+\varphi)^2 r^{n-1}dr + \int_0^1 u^{q+1}\alpha''(0)r^{n-1}dr \\ = q\int_0^1 u^{q-1}(\alpha'(0)u+\varphi)^2 r^{n-1}dr + \alpha''(0)\int_0^1 u^{q+1}r^{n-1}dr = 0. \end{aligned}$$

Mas sabemos que $\displaystyle\int_0^1 u^{q+1}r^{n-1} = 1$, de modo que

$$\alpha''(0) = -q\int_0^1 u^{q-1}(\alpha'(0)u+\varphi)^2 r^{n-1}dr. \tag{3.18}$$

Substituindo em (3.18) em (3.16) obtemos

$$\begin{aligned} g''(0) = \int_0^1 (\alpha'(0)u'+\varphi')^2 r^{n-1}dr \\ -pt\int_0^1 u^{p-1}(\alpha'(0)u+\varphi)^2 r^{n-1}dr + \alpha''(0)\lambda = \int_0^1 (\alpha'(0)u'+\varphi')^2 r^{n-1}dr \\ -pt\int_0^1 u^{p-1}(\alpha'(0)u+\varphi)^2 r^{n-1}dr - q\lambda\int_0^1 u^{q-1}(\alpha'(0)u+\varphi)^2 r^{n-1}dr. \end{aligned}$$

Ou seja, obtemos que

$$g''(0) = \int_0^1 \{(\alpha'(0)u' + \varphi')^2 - ptu^{p-1}(\alpha'(0)u + \varphi)^2 - qu^{q-1}(\alpha'(0)u + \varphi)^2\lambda\} r^{n-1} dr. \tag{3.19}$$

Afirmação: $\alpha'(0) = 0$. De fato, sabemos que $g''(0) \geq 0$ e que $\varphi \in H_0^1$ em (3.19) é qualquer, ou seja, podemos tomar $\varphi = 0$ e daí temos que

$$\begin{aligned} g''(0) &= \int_0^1 \{(\alpha'(0)u')^2 - ptu^{p-1}(\alpha'(0)u)^2 - qu^{q-1}(\alpha'(0)u)^2\lambda\} r^{n-1} dr \\ &= (\alpha'(0))^2 \int_0^1 \{(u')^2 - ptu^{p-1}u^2 - q\lambda u^{q-1}u^2\} r^{n-1} dr \geq 0. \end{aligned}$$

Suponhamos por absurdo que ocorre $\alpha'(0) \neq 0$. Da expressão acima teríamos

$$\int_0^1 \{(u')^2 - ptu^{p+1} - q\lambda u^{q+1}\} r^{n-1} dr \geq 0,$$

ou seja,

$$\int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr \geq pt \int_0^1 r^{n-1} u^{p+1} r^{n-1} dr + q\lambda \int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr.$$

Lembrando que $\displaystyle\int_0^1 r^{n-1} u^{q+1} dr = 1$ temos

$$\int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr \geq pt \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr + q\lambda. \tag{3.20}$$

Mas de (3.13) temos que

$$\lambda = \int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr - t \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr = \lambda + t \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr. \tag{3.21}$$

Desta forma, substituindo (3.21) em (3.20) temos

$$\lambda + t \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr \geq pt \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr + q\lambda.$$

Ou seja,

$$\lambda(1 - q) \geq (p - 1)t \int_0^1 r^{n-1} u^{p+1} dr.$$

Como $\lambda, t > 0$ e $p, q > 1$ temos que $\lambda(1-q) < 0$ e daí segue que

$$(p-1)t\int_0^1 u^{p+1}r^{n-1}dr < 0.$$

De onde temos um absurdo, pois $u \geq 0$ e $p-1 > 0$ e isto prova a nossa afirmação, ou seja $\alpha'(0) = 0$. Mas desta forma obtemos

$$0 \leq g''(0) = \int_0^1 \{(\alpha'(0)u' + \varphi')^2 - ptu^{p-1}(\alpha'(0)u+\varphi)^2$$
$$-qu^{q-1}(\alpha'(0)u+\varphi)^2\lambda\}r^{n-1}dr = \int_0^1 \{(\varphi')^2 - ptu^{p-1}\varphi^2 - q\lambda u^{q-1}\varphi^2\}r^{n-1}dr.$$

Ou seja, temos que

$$J(\varphi) = \int_0^1 ((\varphi')^2 - ptu^{p-1}\varphi^2 - q\lambda u^{q-1}\varphi^2)r^{n-1}dr \geq 0.$$

Logo vale (3.14) e isto demonstra a proposição. □

3.2 A Estimativa

Consideremos o seguinte problema de minimização

$$J = \inf\left\{J(\varphi) \mid \ \varphi \text{ radial} \in H_0^1, \ \int_0^1 u^q\varphi r^{n-1}dr = 0, \ \int_0^1 u^{q-1}\varphi^2 r^{n-1}dr = 1\right\}, \tag{3.22}$$

onde

$$J(\varphi) = \int_0^1 [(\varphi')^2 - tpu^{p-1}\varphi^2 - q\lambda u^{q-1}\varphi^2]r^{n-1}dr. \tag{3.23}$$

Por (3.14) temos que $J \geq 0$. Nesta seção, vamos mostrar que toda solução positiva de (3.12) satisfaz $J > 0$. Sendo assim, vamos supor por absurdo que $J = 0$.

Afirmação 01: Existe $w \in H_0^1$ tal que $J = 0$ é assumido em w. De fato, suponhamos que $J = 0$. Tomemos $\varphi_m \in H_0^1$ tal que $J(\varphi_m) \longrightarrow 0$ quando

$m \longrightarrow \infty$. Mostraremos que φ_m é limitada em H_0^1. Para isso, basta notar que, para m suficientemente grande temos que $J(\varphi_m) < 1$, de onde temos que

$$\int_0^1 [(\varphi_m')^2 - tpu^{p-1}\varphi_m^2 - q\lambda u^{q-1}\varphi_m^2] r^{n-1} dr < 1.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 (\varphi_m')^2 r^{n-1} dr < 1 + q\lambda + tp \int_0^1 u^{p-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr, \tag{3.24}$$

onde usamos que $\int_0^1 u^{q-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr = 1$. Mas note que existe $D > 0$ tal que $\int_0^1 u^{p-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr < D$. Para mostrar isso, basta notar que, definido os conjuntos A e B por

$$A = \{r \in (0,1) \mid u(r) \leq 1\} \quad \text{e} \quad B = \{r \in (0,1) \mid u(r) > 1\},$$

temos que

$$\int_0^1 u^{p-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr = \int_A u^{p-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr + \int_B u^{p-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr. \tag{3.25}$$

Mas lembrando que $q < p$ temos

$$\int_A u^{p-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr \leq \int_A u^{q-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr \leq \int_0^1 u^{q-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr = 1. \tag{3.26}$$

Além disso,

$$1 = \int_0^1 u^{q-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr \geq \int_B \varphi_m^2 r^{n-1} dr.$$

Ou seja,

$$\int_B \varphi_m^2 r^{n-1} dr \leq 1.$$

Desta forma, como u é limitada, existe $M > 0$ tal que $u(r) \leq M$ $\forall r \in (0,1)$. Sendo assim, temos que

$$\int_B u^{p-1}\varphi_m^2 r^{n-1} dr \leq M^{p-1} \int_B \varphi_m^2 r^{n-1} dr \leq M^{p-1}. \tag{3.27}$$

Ou seja, de (3.25), (3.26) e (3.27) temos que existe $D > 0$ tal que $\int_0^1 u^{p-1}\varphi_m^2 r^{n-1}dr < D$. Semdo assim, de (3.24) temos que existe $K > 0$ (onde $K = 1 + \lambda q + D$) tal que

$$\int_0^1 (\varphi_m')^2 r^{n-1}dr < K,$$

isto é,

$$\|\varphi_m\|_{H_0^1} = \left(\int_0^1 (\varphi_m')^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{2}} < (K)^{\frac{1}{2}}.$$

De onde temos que φ_m é limitada em H_0^1. Sendo assim, como H_0^1 é um espaço de Hilbert, pelo Teorema 1.6, temos que existem $\varphi_{m_k} \subset \varphi_m$ e $w \in H_0^1$ tais que $\varphi_{m_k} \longrightarrow w$ fracamente em H_0^1. Desta forma temos que $J(\varphi_{m_k}) \longrightarrow 0$ e $\underline{lim}\ J(\varphi_{m_k}) \geq J(w)$ e pela definição de infimo, $J = 0$ é assumido em w e isto prova a afirmação 1.

Afirmação 02: Se $J = 0$, seja w o correspondente minimizador. Então este satisfaz

$$\begin{cases} w'' + \dfrac{n-1}{r}w' + tpu^{p-1}w + q\lambda u^{q-1}w = (p-1)t\displaystyle\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr u^q \\ w'(0) = w(1) = 0, \quad \displaystyle\int_0^1 u^q w r^{n-1}dr = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 u^{q-1}w^2 r^{n-1}dr = 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

De fato, se $J = 0$ para $\varphi = w$, de (3.22) e (3.23) temos

$$\int_0^1 [(w')^2 - tpu^{p-1}w^2 - q\lambda u^{q-1}w^2]r^{n-1}dr = 0, \tag{3.29}$$

e

$$\int_0^1 u^q w r^{n-1}dr = 0 \quad e \quad \int_0^1 u^{q-1}w^2 r^{n-1}dr = 1. \tag{3.30}$$

Além disso, como $w \in H_0^1$ temos que $w(1) = 0$. Utilizaremos novamente multiplicadores de Lagrange para mostrar que w satisfaz a equação acima. Sendo assim, denotemos

$$G(\varphi) = \int_0^1 u^q \varphi r^{n-1}dr \quad e \quad H(\varphi) = \int_0^1 u^{q-1}\varphi^2 r^{n-1}dr.$$

Desta forma, obtemos

$$J'(w)\varphi = \int_0^1 \left[w'' + \frac{n-1}{r} w' + tpu^{p-1}w + q\lambda u^{q-1}w \right] \varphi r^{n-1} dr$$

$$G'(w)\varphi = \int_0^1 u^q \varphi r^{n-1} dr \quad e \quad H'(w)\varphi = 2\int_0^1 u^{q-1} w \varphi r^{n-1} dr.$$

Fazendo $J'(w) = \lambda_1 G'(w) + \lambda_2 H'(w)$ temos

$$\int_0^1 \left[w'' + \frac{n-1}{r} w' + tpu^{p-1}w + q\lambda u^{q-1}w \right] \varphi r^{n-1} dr$$

$$= \int_0^1 [\lambda_1 u^q + 2\lambda_2 u^{q-1} w] \varphi r^{n-1} dr.$$

Ou seja, w satisfaz a equação

$$w'' + \frac{n-1}{r} w' + tpu^{p-1}w + q\lambda u^{q-1}w = \lambda_1 u^q + 2\lambda_2 u^{q-1} w. \tag{3.31}$$

Mas note que multiplicando (3.31) por wr^{n-1} e integrando temos

$$\int_0^1 [(w')^2 - tpu^{p-1}w^2 - q\lambda u^{q-1}w^2] r^{n-1} dr$$

$$= \lambda_1 \int_0^1 u^q w r^{n-1} dr + 2\lambda_2 \int_0^1 u^{q-1} w^2 r^{n-1} dr.$$

Assim, de (3.29) e (3.30) obtemos $\lambda_2 = 0$. Além disso, multiplicando (3.31) por ur^{n-1} e integrando obtemos

$$\int (w' r^{n-1})' u dr + tp \int_0^1 u^p w r^{n-1} dr + q\lambda \int_0^1 u^q w r^{n-1} = \lambda_1 \int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr.$$

Novamente de (3.30) e lembrando que $\int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr = 1$ temos que

$$\lambda_1 = \int (w' r^{n-1})' u dr + tp \int_0^1 u^p w r^{n-1} dr. \tag{3.32}$$

Mas de (3.12), (3.30) e usando integração por partes temos

$$\int (w' r^{n-1})' u dr = uw' r^{n-1}|_0^1 - \int_0^1 w' u' r^{n-1} dr = -\int_0^1 w' u' r^{n-1} dr$$

$$= \int_0^1 \left[u'' + \frac{n-1}{r}u'\right] wr^{n-1}dr = -\int_0^1 [tu^p + \lambda u^q]wr^{n-1}dr$$

$$= -t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr - \lambda\int_0^1 u^q wr^{n-1}dr = -t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr. \qquad (3.33)$$

Sendo assim, substituindo (3.33) em (3.32) temos

$$\lambda_1 = -t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr + tp\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr = (p-1)t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.34) em (3.31) e lembrando que $\lambda_2 = 0$ obtemos

$$w'' + \frac{n-1}{r}w' + tpu^{p-1}w + q\lambda u^{q-1}w = (p-1)t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dru^q,$$

e isto prova a afirmação 2.

Afirmação 3: $w \in C^{2,\alpha}[0,1)$. De fato, sabemos que w satisfaz

$$\triangle w + c(x)w = f(x),$$

onde $c(x) = tpu^{p-1} + q\lambda u^{q-1}$ e $f(x) = (p-1)t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dru^q$. Note que $c(x) \in C^\infty$ e que $f(x) \in C^\infty$, ou seja, temos que $\triangle w = g(x)$ onde $g(x) \in L^\infty$. Sendo assim, pelo Teorema 1.30 temos que $w \in C^\alpha$. Denotando por $N(g)$ o Potencial Newtoniano de g temos que $\triangle(N(g) - w) = 0$ no sentido fraco, de onde segue que $N(g) - w$ é harmônica e portando $C^\infty[0,1)$. Como $N(g) \in C^{2,\alpha}[0,1)$, temos que $w \in C^{2,\alpha}[0,1)$ e isto demonstra a afirmação 3.

Lema 3.4. *Seja u uma solução positiva de (3.12) que satisfaz (3.14). Então*

$$\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr \neq 0. \qquad (3.35)$$

Demonstração: Suponhamos por absurdo que

$$\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr = 0. \qquad (3.36)$$

Desta forma, temos que w deve possuir pelo menos um ponto de zero em (0,1), pois do contrário, como $u > 0$, não ocorreria (3.36).

Afirmação: w possui pelo menos dois zeros em (0,1). De fato, suponhamos por absurdo que que w possui somente um zero em (0,1) e denotemos este por $r = a$. Mas desta forma temos

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [u^p(r) - u^{p-q}(a)u^q(r)]w(r)r^{n-1}dr \\ = &\int_0^1 u^p w(r)r^{n-1}dr - u^{p-q}(a)\int_0^1 u^q(r)w(r)r^{n-1}dr = 0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

pois temos que $\int_0^1 u^p r^{n-1}dr = 0$ e estamos supondo $\int_0^1 u^q w r^{n-1}dr = 0$. Mas $u(r)$ é uma função decrescente e notando que $u^p(a) - u^{p-q}(a)u^q(a) = u^p(a) - u^p(a) = 0$ e $w(a) = 0$ temos que w e $u^p(r) - u^{p-q}(a)u^q(r)$ trocam de sinal exatamente no mesmo ponto $r = a$. Se existisse $b \neq a$ tal que $u^p(b) - u^{p-q}(a)u^q(b) = 0$ teríamos que $u(b) = u(a)$, e isto contradiria o fato de u ser decrescente. Mas sendo assim, temos que

$$\int_0^1 u^p w(r)r^{n-1}dr - u^{p-q}(a)\int_0^1 u^q(r)w(r)r^{n-1}dr \neq 0. \tag{3.38}$$

Mas (3.38) contradiz (3.37). E isto prova a afirmação 01.

Desta forma, podemos supor que $w(r)$ possui no mínimo dois zeros no intervalo aberto $(0, 1)$. Denotemos estes dois zeros por $r = a$ e $r = b$. Seja

$$w_1(r) = \begin{cases} w(r) & \text{para } 0 < r < a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$w_2(r) = \begin{cases} w(r) & \text{para } a < r < b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\overline{w}(r) = Aw_1(r) + Bw_2(r)$ onde A e B são tais que

$$\int_0^1 u^q \overline{w} r^{n-1}dr = 0 \quad e \quad \int_0^1 u^{q-1}\overline{w}^2 r^{n-1}dr = 1.$$

De (3.28) temos que

$$\int_0^1 [-(\overline{w}')^2 + tpu^{p-1}\overline{w}^2 + q\lambda u^{q-1}\overline{w}^2]r^{n-1}dr = 0, \tag{3.39}$$

pois, lembrando que $w_1w_2 = w_1'w_2' \equiv 0$ obtemos

$$\int_0^1 [-(\overline{w}')^2 + tpu^{p-1}\overline{w}^2 + q\lambda u^{q-1}\overline{w}^2]r^{n-1}dr =$$

$$A^2 \int_0^1 [-(w_1')^2 + tpu^{p-1}(w_1)^2 + q\lambda u^{q-1}(w_1)^2]r^{n-1}dr +$$

$$B^2 \int_0^1 [-(w_2')^2 + tpu^{p-1}(w_2)^2 + q\lambda u^{q-1}(w_2)^2]r^{n-1}dr,$$

e de (3.28) temos que

$$\int_0^1 [-(w_1')^2 + tpu^{p-1}(w_1)^2 + q\lambda u^{q-1}(w_1)^2]r^{n-1}dr = 0$$

e

$$\int_0^1 [-(w_2')^2 + tpu^{p-1}(w_2)^2 + q\lambda u^{q-1}(w_2)^2]r^{n-1}dr = 0,$$

onde usamos a suposição de que $\displaystyle\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr = 0$. Isto prova (3.39). Mas note que a equação (3.39) mostra que $\overline{w}(r)$ é também um mínimo do problema (3.22) e deve satisfazer a correspondente equação de Euler. Assim, $\overline{w}$ no intervalo $(0, a)$ satisfaz

$$w'' + \frac{n-1}{r}w' + tpu^{p-1}w + q\lambda u^{q-1}w = 0. \tag{3.40}$$

Portanto $\overline{w}(r)$ satisfaz (3.40) em todo o intervalo $(0, 1)$. Mas $\overline{w}(r) \equiv 0$ para $b < r < 1$, ou seja, chegamos novamente em um absurdo e daí temos que vale $\displaystyle\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr \neq 0$ e isto prova o lema 3.4. $\square$

Para a solução $w(r)$ do problema (3.28), seja

$$\triangle_+ = \{r | r \in [0, 1] \text{ e } w(r) > 0\}$$
$$\triangle_- = \{r | r \in [0, 1] \text{ e } w(r) < 0\}$$

Desta forma, podemos notar que $\triangle_+$ e $\triangle_-$ são intervalos abertos e que os pontos que delimitam estes intervalos são os zeros de w e $r = 0$.

Lema 3.5. *Nas mesmas hipóteses do lema (3.4), $\triangle_+$ e $\triangle_-$ não poder ser constituídos , simultaneamente de mais de um intervalo aberto.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que existem intervalos abertos $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \triangle_+$ e $(a_3, b_3), (a_4, b_4) \in \triangle_-$, onde a_i são os pontos de zero de de w ou a origem, para $i = 1, 2, 3, 4$. Novamente seja

$$w_i(r) = \begin{cases} w(r) & para \quad a_i < r < b_i \qquad\qquad i = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pelo lema 3.4, temos que $\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr \neq 0$. Desta forma, suponhamos que $\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr > 0$ e tomemos $\varphi = Aw_1 + w_2$, onde A é escolhido de modo que

$$\int_0^1 u^q \varphi r^{n-1} dr = 0.$$

Então, de (3.14) temos que

$$\int_0^1 [(\varphi')^2 - ptu^{p-1}\varphi^2 - q\lambda u^{q-1}\varphi^2] r^{n-1} dr \geq 0. \tag{3.41}$$

Mas por outro lado, notando que $w_1 w_2 = w_1' w_2' \equiv 0$ um cálculo direto mostra que

$$\begin{gathered}
\int_0^1 [(\varphi')^2 - ptu^{p-1}(\varphi)^2 - q\lambda u^{q-1}(\varphi)^2] r^{n-1} dr \\
= \int_0^1 [((Aw_1 + w_2)')^2 - ptu^{p-1}(Aw_1 + w_2)^2 - q\lambda u^{q-1}(Aw_1 + w_2)^2] r^{n-1} dr \\
= \int_0^1 [A^2(w_1')^2 + 2Aw_1'w_2' + (w_2')^2 - ptu^{p-1}(A^2 w_1^2 + 2Aw_1 w_2 + w_2^2) \\
-q\lambda u^{q-1}(A^2 w_1^2 + 2Aw_1 w_2 + w_2^2)] r^{n-1} dr = \int_0^1 [A^2(w_1')^2 + (w_2')^2 \\
-ptu^{p-1}(A^2 w_1^2 + w_2^2) - q\lambda u^{q-1}(A^2 w_1^2 + w_2^2)] r^{n-1} dr = A^2 \int_0^1 [(w_1')^2 - \\
ptu^{p-1} w_1^2 - q\lambda u^{q-1} w_1^2] r^{n-1} dr + \int_0^1 [(w_2')^2 - ptu^{p-1} w_2^2 - q\lambda u^{q-1} w_2^2] r^{n-1} dr.
\end{gathered}$$

Ou seja,

$$\int_0^1 [(\varphi')^2 - ptu^{p-1}(\varphi)^2 - q\lambda u^{q-1}(\varphi)^2]r^{n-1}dr = A^2 \int_0^1 [(w_1')^2$$

$$- ptu^{p-1}w_1^2 - q\lambda u^{q-1}w_1^2]r^{n-1}dr + \int_0^1 [(w_2')^2 - ptu^{p-1}w_2^2 - q\lambda u^{q-1}w_2^2]r^{n-1}dr. \tag{3.42}$$

Mas da equação

$$w'' + \frac{n-1}{r}w' + tpu^{p-1}w + q\lambda u^{q-1}w = (p-1)t\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr u^q.$$

Obtemos, usando integração por partes e a definição de w_i que

$$\int_{b_1}^{a_1} [-(w')^2 + tpu^{p-1}w^2 + q\lambda u^{q-1}w^2]r^{n-1}dr = (p-1)t\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr \int_{b_1}^{a_1} u^q w r^{n-1}dr$$

e

$$\int_{b_2}^{a_2} [-(w')^2 + tpu^{p-1}w^2 + q\lambda u^{q-1}w^2]r^{n-1}dr = (p-1)t\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr \int_{b_2}^{a_2} u^q w r^{n-1}dr$$

ou, equivalentemente

$$\int_0^1 [(w_1')^2 - tpu^{p-1}w_1^2 - q\lambda u^{q-1}w_1^2]r^{n-1}dr = -(p-1)t\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr \int_0^1 u^q w_1 r^{n-1}dr \tag{3.43}$$

e

$$\int_0^1 [(w_2')^2 - tpu^{p-1}w_2^2 - q\lambda u^{q-1}w_2^2]r^{n-1}dr = -(p-1)t\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr \int_0^1 u^q w_2 r^{n-1}dr. \tag{3.44}$$

Substituindo (3.43) e (3.44) em (3.42) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 [(\varphi')^2 - ptu^{p-1}(\varphi)^2 - q\lambda u^{q-1}(\varphi)^2]r^{n-1}dr = \\
&-(p-1)t\left(A^2\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr \int_0^1 u^q w_1 r^{n-1}dr + \int_0^1 u^p w r^{n-1}dr \int_0^1 u^q w_2 r^{n-1}dr\right) \\
&\quad = -(p-1)t\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr\left(A^2\int_0^1 u^q w_1 r^{n-1}dr + \int_0^1 u^q w_2 r^{n-1}dr\right) < 0,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

pois $-(p-1)<0$ e

$$t\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr\left(A^2\int_0^1 u^q w_1 r^{n-1}dr+\int_0^1 u^q w_2 r^{n-1}dr\right)>0.$$

Mas (3.45) contradiz (3.41). De maneira similar, se $\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr<0$, podemos tomar $\varphi = Aw_3 + w_4$ de tal modo que

$$\int_0^1 u^q \varphi r^{n-1}dr = 0,$$

e obteremos uma contradição com (3.41). Sendo assim, temos que $\triangle_+$ e $\triangle_-$ não podem ser constituídos, simultaneamente de mais de um intervalo aberto, e isto demonstra nosso lema. □

Observemos que, para a solução $w(r)$ do problema (3.28), se $\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr < 0 (> 0)$, então os pontos limite de $\triangle_+(\triangle_-)$ são tais que $w'(r) \neq 0$, onde estamos usando o princípio do máximo forte. Sendo assim, o lema 3.5 está nos dizendo que $w(r)$ possui no mínimo dois pontos de mudança de sinal em $(0,1)$.

Lema 3.6. *Nas mesmas hipóteses do lema (3.4) e supondo que* $\frac{2}{n} \geq \frac{p-1}{p+1}$*, temos que* $w(r)$ *não pode ter exatamente dois pontos de mudança de sinal.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $w(r)$ possui exatamente dois pontos de mudança de sinal em $(0,1)$ e denotemos estes pontos por a_1 e a_2 e suponhamos que $w(r)>0$ para $0<r<a_1$, caso contrário, podemos considerar $-w(r)$. Do Lema 3.4 e da demonstração do Lema 3.5 temos que o caso $\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr \geq 0$ não pode ocorrer. Desta forma, podemos assumir que $\int_0^1 u^p w r^{n-1}dr < 0$. Notemos que u satisfaz a seguinte igualdade

$$(ru')'' + \frac{n-1}{r}(ru')' + tpu^{p-1}(ru') + q\lambda u^{q-1}(ru') = -2(tu^p + \lambda u^q). \quad (3.46)$$

Para ver isso, basta notar que

$$
\begin{aligned}
&(ru')'' + \frac{n-1}{r}(ru')' + tpu^{p-1}(ru') + q\lambda u^{q-1}(ru') \\
&= (u''r + u')' + \frac{n-1}{r}(ru'' + u') + tpu^{p-1}(ru') + q\lambda u^{q-1}(ru').
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
&(ru')'' + \frac{n-1}{r}(ru')' + tpu^{p-1}(ru') + q\lambda u^{q-1}(ru') \\
&= u'''r + u'' + u'' + \frac{n-1}{r}ru'' + \frac{n-1}{r}u' + tpu^{p-1}(ru') + q\lambda u^{q-1}(ru').
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

Mas, de (3.12) temos que $u'' + \frac{n-1}{r}u' + tu^p + \lambda u^q = 0$, ou seja, substituindo em (3.47) obtemos que

$$
\begin{aligned}
&(ru')'' + \frac{n-1}{r}(ru')' + tpu^{p-1}(ru') + q\lambda u^{q-1}(ru') \\
&= u'''r - tu^p - \lambda u^q + nu'' + tpu^{p-1}(ru') + q\lambda u^{q-1}(ru').
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

Além disso, multiplicando $u'' + \frac{n-1}{r}u' + tu^p + \lambda u^q = 0$ por r e derivando temos

$$
u'''r = -nu' - tu^p - \lambda u^q - rtpu^{p-1}u' - \lambda rqu^{q-1}u', \tag{3.49}
$$

de modo que, substituindo (3.49) em (3.48) obtemos

$$
(ru')'' + \frac{n-1}{r}(ru')' + tpu^{p-1}(ru') + q\lambda u^{q-1}(ru') = -2(tu^p + \lambda u^q).
$$

Ou seja, temos que vale (3.46).

Multiplicando (3.46) por wr^{n-1} e integrando obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[(ru')'' + \frac{n-1}{r}(ru')' + tpu^{p-1}(ru') + q\lambda u^{q-1}(ru')\right] wr^{n-1}dr \\
&= \int_0^1 \left[-2(tu^p + \lambda u^q)\right] wr^{n-1}dr = -2t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr,
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

onde usamos que $\int_0^1 u^q wr^{n-1}dr = 0$. Lembrando que $w(1) = 0$ temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[(ru')''wr^{n-1} + (n-1)(ru')'wr^{n-2}\right]dr = \int_0^1 [(ru')'r^{n-1}]'wdr \\
&= (ru')'r^{n-1}w|_0^1 - \int_0^1 (ru')'w'r^{n-1}dr = -\int_0^1 (ru')'w'r^{n-1}dr.
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

De modo que, substituindo (3.51) em (3.50) temos

$$\int_0^1 \left[-(ru')'w'r^{n-1} + tpu^{p-1}(ru')wr^{n-1} + q\lambda u^{q-1}(ru')wr^{n-1}\right] dr$$

$$= -2t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr. \tag{3.52}$$

Mas como

$$\int_0^1 (ru')(w'r^{n-1})'dr = ru'w'r^{n-1}|_0^1 - \int_0^1 w'(ru')'r^{n-1}dr,$$

obtemos que

$$\int_0^1 (ru')'w'r^{n-1}dr = u'(1)w'(1) - \int_0^1 (ru')(w'r^{n-1})'dr. \tag{3.53}$$

E daí, substituindo (3.53) em (3.52) temos

$$2t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr = u'(1)w'(1)$$

$$- \int_0^1 (ru')[(w'r^{n-1})' + tpu^{p-1}w + q\lambda u^{q-1}w]r^{n-1}dr. \tag{3.54}$$

Mas multiplicando (3.28) por $u'r^n$ e integrando obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[w''u'r^n + \frac{n-1}{r}w'u'r^n + tpu^{p-1}wu'r^n + q\lambda u^{q-1}wu'r^n\right] dr \\ = (p-1)t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr\int_0^1 u^q u'r^n dr.\end{aligned} \tag{3.55}$$

Mas

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[w''u'r^n + \frac{n-1}{r}w'u'r^n\right] dr &= \int_0^1 \left[w''r^{n-1} + \frac{n-1}{r}w'r^{n-1}\right](u'r)dr \\ &= \int_0^1 (w'r^{n-1})'(u'r)dr. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Substituindo (3.56) em (3.55) temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[(w'r^{n-1})' + tpu^{p-1}wr^{n-1} + q\lambda u^{q-1}wr^{n-1}\right](u'r)dr \\ = (p-1)t\int_0^1 u^p wr^{n-1}dr\int_0^1 u^q u'r^n dr.\end{aligned} \tag{3.57}$$

De modo que, substituindo (3.57) em (3.54) obtemos

$$2t\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr = u'(1)w'(1) - (p-1)t\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr \int_0^1 u^q u' r^n dr.$$

Ou seja,

$$u'(1)w'(1) = 2t\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr + (p-1)t\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr \int_0^1 u^q u' r^n dr.$$

Ou ainda

$$u'(1)w'(1) = t\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr \left[2 + (p-1)\int_0^1 u^q u' r^n dr\right]. \tag{3.58}$$

Mas $(u^{q+1}r^n)' = (q+1)u^q u' r^n + u^{q+1} n r^{n-1}$, de modo que

$$\int_0^1 (u^{q+1}r^n)' dr = (q+1)\int_0^1 u^q u' r^n dr + \int_0^1 u^{q+1} n r^{n-1} dr.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u^q u' r^n dr &= \frac{1}{q+1}\left[\int_0^1 (u^{q+1}r^n)' dr - n\int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr\right] \\
&= \frac{1}{q+1}\left[u^{q+1}r^n|_0^1 - n\right] = \frac{1}{q+1}\left[u^{q+1}(1) - n\right] \\
&= -\frac{n}{q+1},
\end{aligned} \tag{3.59}$$

onde usamos que $u(1) = 0$ e que $\displaystyle\int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr = 1$. Substituindo (3.59) em (3.58) obtemos

$$u'(1)w'(1) = t\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr \left(2 - \frac{(p-1)n}{q+1}\right).$$

Ou seja,

$$u'(1)w'(1) = tn\left(\frac{2}{n} - \frac{p-1}{q+1}\right)\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr. \tag{3.60}$$

Mas por hipótese temos que $n \geq 2$, $t > 0$, $\displaystyle\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr < 0$ e $\dfrac{p-1}{q+1} \leq \dfrac{2}{n}$ ou seja, o lado direito da igualdade (3.60) é não positivo. Por outro lado, pelo principio do máximo forte temos que $u'(1) < 0$ e $w'(1) < 0$ (já que $w(1) = 0$ e $w(r) > 0$ em $(a_2, 1)$), ou seja o lado, esquerdo de (3.60) é positivo, de onde obtemos um absurdo e isto prova nosso lema. $\square$

Proposição 3.7. *Nas mesmas hipóteses do lema 3.6, o problema (3.28) não tem solução.*

Demonstração:

Da Proposição 3.6, do Lema 3.5 e lembrando que $\int_0^1 u^q w r^{n-1} dr = 0$ deduzimos que $w(r)$ deve ter exatamente um ponto de mudança de sinal no intervalo aberto $(0,1)$. Denotemos por $r = a$ este ponto e podemos assumir, sem perda de generalidade que $w(r) \geq 0$ para $0 < r \leq a$ e $w(r) \leq 0$ para $a \leq r \leq 1$. Sendo assim, afirmamos que vale

$$\int_0^1 [u^p(r) - u^{p-q}(a)u^q(r)]w(r)r^{n-1}dr > 0. \tag{3.61}$$

De fato, do Corolário 2.2 temos que u é radial e estritamente decrescente em r, ou seja, u é injetiva em r, de modo que $u^p(r) - u^{p-q}(a)u^q(r) = 0$ se e somente se $r = a$. Além disso, $u^p(0) - u^{p-q}(a)u^q(0) > 0$ pois se fosse $u^p(0) - u^{p-q}(a)u^q(0) \leq 0$ teríamos $u(0) \leq u(a)$, o que é uma contradição com a hipótese de que u é estritamente decrescente, de modo que as funções $w(r)$ e $u^p(r) - u^{p-q}(a)u^q(r)$ mudam de sinal exatamente no mesmo ponto $r = a$ e ambas são positivas no intervalo $(0,a)$ e negativas em $(a,1)$, de modo que vale (3.61).

Sendo assim, de (3.61) e lembrando que $\int_0^1 u^q w r^{n-1} dr = 0$ temos

$$\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr > 0.$$

Mas na demonstração da Proposição 3.6, obtemos a expressão (3.60) que nos diz

$$u'(1)w'(1) = tn\left(\frac{2}{n} - \frac{p-1}{q+1}\right)\int_0^1 u^p w r^{n-1} dr.$$

Desta forma, de (3.61) e novamente lembrando que $n \geq 2$, $t > 0$ e $\frac{p-1}{q+1} \leq \frac{2}{n}$ temos que o lado direito de (3.60) é não negativo. Por outro lado, pelo princípio do máximo forte temos que $u'(1) < 0$ e $w'(1) > 0$, ou seja, o lado esquerdo de (3.60) é negativo, de onde obtemos um absurdo e desta forma a proposição esta provada. □

Seja $\delta(r)$ a solução da seguinte equação, que é a linearização da equação do problema (3.12)

$$\begin{cases} \delta'' + \dfrac{n-1}{r}\delta' + ptu^{p-1}\delta + q\lambda u^{q-1}\delta = 0 \\ \delta'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \delta(0) = 1 \end{cases} \tag{3.62}$$

Proposição 3.8. *Se a solução positiva do problema (3.12) satisfaz estritamente a desigualdade dada em (3.14), isto é, se* $\forall \varphi \in H_0^1$ *e* $\displaystyle\int_0^1 u^q \varphi r^{n-1} dr = 0$ *vale que:*

$$\int_0^1 ((\varphi')^2 - ptu^{p-1}\varphi^2 - q\lambda u^{q-1}\varphi^2) r^{n-1} dr > 0, \tag{3.63}$$

então a solução $\delta(r)$ *do problema (3.62) possui exatamente um zero no intervalo* $0 \leq r \leq 1$*. Em particular,* $\delta(1) < 0$*.*

Demonstração:

Afirmação 01: δ possui pelo menos um zero no intervalo $0 < r < 1$.

De fato, suponhamos por absurdo que $\delta(r) > 0$ para todo $0 < r < 1$. Por (3.62) temos que

$$\delta'' + \frac{n-1}{r}\delta' + ptu^{p-1}\delta + q\lambda u^{q-1}\delta = 0.$$

Multiplicando por r^{n-1} em ambos os lados temos

$$\delta'' r^{n-1} + (n-1)\delta' r^{n-2} + ptu^{p-1}\delta r^{n-1} + q\lambda u^{q-1}\delta r^{n-1} = 0.$$

Mas

$$\delta'' r^{n-1} + (n-1)\delta' r^{n-2} = (\delta' r^{n-1})',$$

de onde temos que

$$(\delta' r^{n-1})' + ptu^{p-1}\delta r^{n-1} + q\lambda u^{q-1}\delta r^{n-1} = 0.$$

Multiplicando por u em ambos os lados e integrando em $(0,1)$ obtemos

$$\int_0^1 (\delta' r^{n-1})' u dr + pt \int_0^1 u^p \delta r^{n-1} dr + q\lambda \int_0^1 u^q \delta r^{n-1} dr = 0. \tag{3.64}$$

Da fórmula de integração por partes sabemos que

$$\int_0^1 (\delta' r^{n-1})' u dr = u\delta' r^{n-1}|_0^1 - \int_0^1 u'\delta' r^{n-1} dr.$$

Como $u(1) = 0$ temos que $u\delta' r^{n-1}|_0^1 = 0$ e desta forma

$$\int_0^1 (\delta' r^{n-1})' u dr = -\int_0^1 u'\delta' r^{n-1} dr. \tag{3.65}$$

Ou seja, substituindo (3.65) em (3.64) temos que

$$-\int_0^1 u'\delta' r^{n-1} dr + pt \int_0^1 u^p \delta r^{n-1} dr + q\lambda \int_0^1 u^q \delta r^{n-1} dr = 0.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 [-u'\delta' + ptu^p\delta + q\lambda u^q \delta] r^{n-1} dr = 0. \tag{3.66}$$

Além disso, de (3.12) temos que

$$u'' + \frac{n-1}{r} u' + tu^p + \lambda u^q = 0.$$

Novamente, multiplicando por r^{n-1} em ambos os lados da igualdade temos

$$u'' r^{n-1} + (n-1) u' r^{n-2} + tu^p r^{n-1} + \lambda u^q r^{n-1} = 0.$$

Mas como

$$u'' r^{n-1} + (n-1) r^{n-2} u' = (u' r^{n-1})',$$

obtemos

$$(u'r^{n-1})' + tu^p r^{n-1} + \lambda u^q r^{n-1} = 0.$$

Multiplicando por δ em ambos os lados e integrando temos

$$\int_0^1 (u'r^{n-1})'\delta dr + t\int_0^1 u^p\delta r^{n-1}dr + \lambda\int_0^1 u^q\delta r^{n-1}dr = 0. \tag{3.67}$$

Da fórmula de integração por partes temos que

$$\int_0^1 (u'r^{n-1})'\delta dr = u'\delta r^{n-1}|_0^1 - \int_0^1 u'\delta' r^{n-1}dr.$$

Sendo assim, temos que

$$\int_0^1 (u'r^{n-1})'\delta dr = u'(1)\delta(1) - \int_0^1 u'\delta' r^{n-1}dr. \tag{3.68}$$

Substituindo (3.68) em (3.67) obtemos

$$u'(1)\delta(1) - \int_0^1 u'\delta' r^{n-1}dr + t\int_0^1 u^p\delta r^{n-1}dr + \lambda\int_0^1 u^q\delta r^{n-1}dr = 0.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 [-u'\delta' + tu^p\delta + \lambda u^q\delta]r^{n-1}dr = -u'(1)\delta(1). \tag{3.69}$$

Fazendo (3.66)-(3.69) temos

$$\int_0^1 [-u'\delta' + ptu^p\delta + q\lambda u^q\delta]r^{n-1}dr - \int_0^1 [-u'\delta' + tu^p\delta + \lambda u^q\delta]r^{n-1}dr = u'(1)\delta(1).$$

Ou seja,

$$\int_0^1 [ptu^p\delta + q\lambda u^q\delta - tu^p\delta - \lambda u^q\delta]r^{n-1}dr = u'(1)\delta(1),$$

de modo que

$$(p-1)t\int_0^1 u^p\delta r^{n-1}dr + (q-1)\lambda\int_0^1 u^q\delta r^{n-1}dr = u'(1)\delta(1). \tag{3.70}$$

Como estamos supondo que $\delta(r) > 0\ \forall r \in (0,1)$ temos que o lado esquerdo de (3.70) é positivo. Mas o lado direito de (3.70) é não positivo, visto que estamos supondo que $\delta(r) > 0$ e u é estritamente decrescente, e portando $u'(1) < 0$. Temos ai uma contradição e a afirmação 1 fica provada.

Afirmação 2: $\delta(r)$ não possui mais do que um zero em (0,1).

De fato, suponhamos por absurdo que $\delta(r)$ possui mais de um zero em $(0,1)$ e sejam a e b os dois primeiros zeros de δ, em ordem crescente. Sejam:

$$\delta_1(r) = \begin{cases} \delta(r) & \text{para } 0 < r < a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\delta_2(r) = \begin{cases} \delta(r) & \text{para } a < r < b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Tomemos $\varphi = A\delta_1 + \delta_2$, onde A é escolhido de modo que

$$\int_0^1 u^q \varphi r^{n-1} dr = 0.$$

Note que $\varphi \in H_0^1$ e portanto, por hipótese temos que deve valer (3.63). Mas desta forma, notando que $\delta_1(r)\delta_2(r) = \delta_1'(r)\delta_2'(r) \equiv 0$ temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 ((\varphi')^2 - ptu^{p-1}\varphi^2 - q\lambda u^{q-1}\varphi^2) r^{n-1} dr = \int_0^1 [(A\delta_1+\delta_2)^2 - ptu^{p-1}(A\delta_1+\delta_2)^2 \\ -q\lambda u^{q-1}(A\delta_1+\delta_2)^2] r^{n-1} dr = \int_0^1 [A^2(\delta_1')^2 + 2A\delta_1'\delta_2' \\ +(\delta_2')^2 - ptu^{p-1}(A^2\delta_1^2 + 2A\delta_1\delta_2 + \delta_2^2) - q\lambda u^{q-1}(A^2\delta_1^2 + 2A\delta_1\delta_2 + \delta_2^2)] r^{n-1} dr \\ = \int_0^1 [A^2(\delta_1')^2 + (\delta_2')^2 - ptu^{p-1}(A^2\delta_1^2 + \delta_2^2) - q\lambda u^{q-1}(A^2\delta_1^2 + \delta_2^2)] r^{n-1} dr \\ = A^2 \int_0^a [(\delta_1')^2 - ptu^{p-1}\delta_1^2 - q\lambda u^{q-1}\delta_1^2)] r^{n-1} dr \\ + \int_a^b [(\delta_2')^2 - ptu^{p-1}\delta_2^2 - q\lambda u^{q-1}\delta_2^2] r^{n-1} dr,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^1 ((\varphi')^2 - ptu^{p-1}\varphi^2 - q\lambda u^{q-1}\varphi^2) r^{n-1} dr =$$

$$A^2 \int_0^a [(\delta_1')^2 - ptu^{p-1}\delta_1^2 - q\lambda u^{q-1}\delta_1^2)] r^{n-1} dr + \int_a^b [(\delta_2')^2 - ptu^{p-1}\delta_2^2 - q\lambda u^{q-1}\delta_2^2] r^{n-1} dr.$$

Mas de (3.62) temos que

$$\delta'' + \tfrac{n-1}{r}\delta' + ptu^{p-1}\delta + q\lambda u^{q-1}\delta = 0.$$

E daí, lembrando que $\delta'' r^{n-1} + (n-1)\delta' r^{n-2} = (r^{n-1}\delta')'$ obtemos que

$$\int_0^a [(r^{n-1}\delta')'\delta + ptu^{p-1}(\delta)^2 r^{n-1} + q\lambda u^{q-1}(\delta)^2 r^{n-1}]dr = 0.$$

E assim

$$\int_0^a [(r^{n-1}\delta')'\delta dr = \delta\delta' r^{n-1}|_0^a - \int_0^a r^{n-1}(\delta')^2 dr.$$

Mas $\delta(a) = 0$, ou seja

$$\int_0^a [(r^{n-1}\delta')'\delta dr = -\int_0^a r^{n-1}(\delta')^2 dr.$$

De onde temos que

$$\int_0^a [-(\delta')^2 r^{n-1} + ptu^{p-1}(\delta)^2 r^{n-1} + q\lambda u^{q-1}(\delta)^2 r^{n-1}]dr = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^a [(\delta')^2 - ptu^{p-1}(\delta)^2 - q\lambda u^{q-1}(\delta)^2] r^{n-1} dr = 0.$$

Da mesma forma, lembrando que $\delta(a) = \delta(b) = 0$ obtemos

$$\int_a^b [(\delta')^2 - ptu^{p-1}(\delta)^2 - q\lambda u^{q-1}(\delta)^2] r^{n-1} dr = 0,$$

ou seja, para $\varphi = A\delta_1 + \delta_2$ como escolhemos temos que

$$\int_0^1 [(\varphi')^2 - ptu^{p-1}(\varphi)^2 - q\lambda u^{q-1}(\varphi)^2] r^{n-1} dr = 0. \tag{3.71}$$

Mas (3.71) contradiz a desigualdade (3.63). Ou seja, δ tem exatamente um ponto de zero no intervalo $0 < r < 1$ e isto demonstra a afirmação 2. Notemos ainda que, denotando por $r = a$ o ponto em $(0,1)$ tal que $\delta(a) = 0$, temos pelo princípio do máximo que não pode ser $\delta'(a) = 0$, ou seja $r = a$ é o único ponto de mudança de sinal de δ em $(0,1)$ e como $\delta(0) = 1$, temos que $\delta(1) < 0$ e consequentemente a nossa proposição. $\square$

Com isso mostramos que $J > 0$.

3.3 Prova do teorema (0.1)

Nesta seção, vamos provar a unicidade de solução positiva para o problema (2.1) e para isso vamos utilizar os resultados obtidos no capítulo 4. Primeiramente vamos considerar o mínimo local do problema (3.2) com parâmetro t. Novamente seja u_t o mínimo local positivo do problema (3.2). Então u_t satisfaz:

$$\begin{cases} u_t'' + \dfrac{n-1}{r}u_t' + tu_t^p + \lambda_t u_t^q = 0 \\ u_t'(0) = u_t(1) = 0 \end{cases} \tag{3.72}$$

onde λ_t é o multiplicador de Lagrange.

Proposição 3.9. *Para $t > 0$ no problema (3.2), as componentes do mínimo local positivo (u_t, λ_t) dependem continuamente de t em $H_0^1 \times \mathbb{R}_+^n$.*
A prova desta proposição pode ser encontrada em [7].

Seja

$$v_t(r) = \left(\frac{\lambda_t}{l_t^2}\right)^{\frac{1}{q-1}} u_t\left(\frac{r}{l_t}\right), \tag{3.73}$$

onde

$$l_t = \lambda_t^{\frac{p-1}{2(p-q)}} t^{\frac{1-q}{2(p-q)}}. \tag{3.74}$$

Desta forma, temos que $v_t(r)$ satisfaz

$$\begin{cases} v_t'' + \dfrac{n-1}{r}v_t' + v_t^p + v_t^q = 0 \\ v_t'(0) = v_t(l_t) = 0 \end{cases} \tag{3.75}$$

De fato, denotemos $M = \left(\dfrac{\lambda_t}{l_t^2}\right)^{\frac{1}{q-1}}$.
Afirmação 01: $M = \left(\dfrac{\lambda_t}{l_t^2}\right)^{\frac{1}{q-1}} = \left(\dfrac{t}{l_t^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$.
De fato, basta notar que

$$\left(\frac{\lambda_t}{l_t^2}\right)^{\frac{1}{q-1}} = \left(\frac{t}{l_t^2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \Longleftrightarrow \frac{\lambda_t^{\frac{1}{(q-1)}}}{l_t^{\frac{2}{(q-1)}}} = \frac{t^{\frac{1}{(p-1)}}}{l_t^{\frac{2}{(p-1)}}} \Longleftrightarrow$$

$$l_t^{\frac{2}{(p-1)}} l_t^{-\frac{2}{(q-1)}} = \lambda_t^{-\frac{1}{(q-1)}} t^{\frac{1}{(p-1)}} \Longleftrightarrow l_t^{-\frac{2(p-1)-2(q-1)}{(p-1)(q-1)}} = \lambda_t^{-\frac{1}{(q-1)}} t^{\frac{1}{(p-1)}} \Longleftrightarrow$$

$$l_t = \lambda_t^{\frac{p-1}{2(p-q)}} t^{\frac{1-q}{2(p-q)}}.$$

Isto prova a afirmação 01.

Sendo assim, para provar que $v_t(r) = Mu_t\left(\frac{r}{l_t}\right)$ satisfaz a equação (3.75) basta notar que

$$v_t'(r) = \frac{M}{l_t} u_t'\left(\frac{r}{l_t}\right)$$

e

$$v_t''(r) = \frac{M}{l_t^2} u_t''\left(\frac{r}{l_t}\right).$$

Desta forma temos

$$v_t'' + \frac{n-1}{r} v_t' + v_t^p + v_t^q = \frac{M}{l_t^2} u_t''\left(\frac{r}{l_t}\right) + \frac{n-1}{r}\frac{M}{l_t} u_t'\left(\frac{r}{l_t}\right) + M^p u_t^p\left(\frac{r}{l_t}\right) + M^q u_t^q\left(\frac{r}{l_t}\right)$$

$$= \frac{M}{l_t^2} u_t''\left(\frac{r}{l_t}\right) + \frac{n-1}{\frac{r}{l_t}}\frac{M}{l_t^2} u_t'\left(\frac{r}{l_t}\right) + \frac{M^p}{t} t u_t^p\left(\frac{r}{l_t}\right) + \frac{M^q}{\lambda_t}\lambda_t u_t^q\left(\frac{r}{l_t}.\right)$$

Mas note que

$$\frac{M^p}{t} = \frac{M}{l_t^2} \quad \text{e} \quad \frac{M^q}{\lambda_t} = \frac{M}{l_t^2},$$

pois da afirmação 01 temos que $M = \left(\frac{\lambda_t}{l_t^2}\right)^{\frac{1}{q-1}} = \left(\frac{t}{l_t^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. Sendo assim,

$$v_t'' + \frac{n-1}{r} v_t' + v_t^p + v_t^q = \frac{M}{l_t^2}\left(u_t''\left(\frac{r}{l_t}\right) + \frac{n-1}{\frac{r}{l_t}} + t u_t^p\left(\frac{r}{l_t}\right) + \lambda t u_t^q\left(\frac{r}{l_t}\right)\right) = 0,$$

pois de (3.72) temos que

$$u_t''\left(\frac{r}{l_t}\right) + \frac{n-1}{\frac{r}{l_t}} + t u_t^p\left(\frac{r}{l_t}\right) + \lambda t u_t^q\left(\frac{r}{l_t}\right) = 0.$$

Além disso, como $v_t(r) = Mu_t\left(\frac{r}{l_t}\right)$ e de (3.72) temos que $u_t'(0) = u_t(1) = 0$ segue que $v_t'(0) = v_t(l_t) = 0$ e isto prova que $v_t(r)$ satisfaz a equação (3.75).

Da Proposição 3.9 temos que l_t depende continuamente de t. Queremos mostrar que l_t pode abranger todo o intervalo aberto $(0, +\infty)$ para t va- riando em $(0, +\infty)$.

Proposição 3.10. *Existe $t_0 > 0$ tal que*

$$l_t \longrightarrow 0 \qquad \textit{para} \qquad t \longrightarrow t_0$$

$$l_t \longrightarrow +\infty \qquad \textit{para} \qquad t \longrightarrow 0.$$

Demonstração:

Afirmação: I_t é uma função decrescente em t. De fato, tome $t_1 > t_2$. Sabemos que

$$I_{t_1} = \inf_{u \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr - \frac{t_1}{p+1} \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr, \right\},$$

subordinado a

$$\int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr = 1 \qquad \text{e} \qquad \|u - u_{t_1}\|_{H_0^1} < \epsilon_0.$$

Sendo assim, para t_2 suficientemente próximo de t_1, tal que

$$\|u_{t_2} - u_{t_1}\|_{H_0^1} < \epsilon_0,$$

temos

$$\begin{aligned} I_{t_1} &= \frac{1}{2} \int_0^1 (u'_{t_1})^2 r^{n-1} dr - \frac{t_1}{p+1} \int_0^1 u_{t_1}^{p+1} r^{n-1} dr \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'_{t_2})^2 r^{n-1} dr - \frac{t_1}{p+1} \int_0^1 u_{t_2}^{p+1} r^{n-1} dr, \end{aligned} \tag{3.76}$$

e como $t_1 > t_2$, segue que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^1 (u'_{t_2})^2 r^{n-1} dr - \frac{t_1}{p+1} \int_0^1 u_{t_2}^{p+1} r^{n-1} dr \\ \leq &\frac{1}{2} \int_0^1 (u'_{t_2})^2 r^{n-1} dr - \frac{t_2}{p+1} \int_0^1 u_{t_2}^{p+1} r^{n-1} dr = I_{t_2}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

De (3.76) e (3.77) temos que

$$I_{t_1} \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'_{t_2})^2 r^{n-1} dr - \frac{t_1}{p+1} \int_0^1 u_{t_2}^{p+1} r^{n-1} dr \leq I_{t_2},$$

e isto prova a nossa afirmação para t_1 e t_2 próximos. De fato, vale para qualquer $t_1 > t_2$.

Note que λ_t satisfaz

$$\lambda_t = \int_0^1 (u_t')^2 r^{n-1} dr - t \int_0^1 u_t^{p+1} r^{n-1} dr,$$

e como

$$I_t = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_t')^2 r^{n-1} dr - \frac{t}{p+1} \int_0^1 u_t^{p+1} r^{n-1} dr,$$

temos

$$\begin{aligned}
\lambda_t &= \lambda_t + 2I_t - 2I_t = 2I_t + \int_0^1 (u_t')^2 r^{n-1} dr - t \int_0^1 u_t^{p+1} r^{n-1} dr \\
&\quad -2\left(\frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr - \frac{t}{p+1} \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr\right) = 2I_t - t \int_0^1 u_t^{p+1} r^{n-1} dr \\
&\quad + \frac{2t}{p+1} \int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr = 2I_t - \left(1 - \frac{2}{p+1}\right) t \int_0^1 u_t^{p+1} r^{n-1} dr \\
&\quad = 2I_t - \left(\frac{p-1}{p+1}\right) t \int_0^1 u_t^{p+1} r^{n-1} dr.
\end{aligned}$$

Ou seja, obtemos

$$\lambda_t = 2I_t - \left(\frac{p-1}{p+1}\right) t \int_0^1 u_t^{p+1} r^{n-1} dr. \tag{3.78}$$

Da desigualdade de Hölder temos que

$$1 = \int_0^1 u_t^{q+1} r^{n-1} dr \leq \left[\int_0^1 u_t^{p+1} r^{n-1} dr\right]^{\frac{q+1}{p+1}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-q}{p+1}},$$

ou seja,

$$n^{\frac{p-q}{q+1}} \leq \int_0^1 u_t^{p+1} r^{n-1} dr. \tag{3.79}$$

Sendo assim, de (3.78) e de (3.79), temos que

$$\lambda_t \leq 2I_t - t\left(\frac{p-1}{p+1}\right) n^{\frac{p-q}{q+1}}.$$

Lembrando que $\lambda_t > 0$, temos

$$2I_t > t\left(\frac{p-1}{p+1}\right) n^{\frac{p-q}{q+1}}, \tag{3.80}$$

mas do lado direito da desigualdade acima temos uma função crescente em t, pois $\left(\dfrac{p-1}{p+1}\right) n^{\frac{p-q}{q+1}} > 0$ enquanto que do lado esquerdo temos, como já mostramos, uma função decrescente em t. Como da primeira parte do lema temos que I_t é contínua, podemos garantir que existe $t_0 > 0$ tal que

$$2I_t - t\left(\frac{p-1}{p+1}\right) n^{\frac{p-q}{q+1}} \longrightarrow 0 \qquad \text{para} \qquad t \longrightarrow t_0^-. \tag{3.81}$$

Ou seja, temos que existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lambda_t \longrightarrow 0 \qquad\qquad \text{para} \qquad\qquad t \longrightarrow t_0^-. \tag{3.82}$$

De (3.82) e de (3.74) temos que

$$l_t \longrightarrow 0 \qquad\qquad \text{para} \qquad\qquad t \longrightarrow t_0.$$

Para provar a segunda parte do lema, basta notar que $\displaystyle\int_0^1 u^{q+1} r^{n-1} dr = 1$ e, repetindo o argumento feito na seção 3.2, temos que $I_t = I(u_t) > 0$ para t suficientemente pequeno. Somando a isso o fato de que I_t é decrescente em t obtemos que $I_t < \infty$ para $t \longrightarrow 0$. Ou seja, temos que

$$I_t = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 r^{n-1} dr - \frac{t}{p+1}\int_0^1 u^{p+1} r^{n-1} dr \longrightarrow I_0 > 0 \quad \text{para} \quad t \longrightarrow 0.$$

De (3.78) temos que

$$l_t = \lambda_t^{\frac{p-1}{2(p-q)}} t^{\frac{1-q}{2(p-q)}} \longrightarrow +\infty \qquad\qquad \text{para} \qquad\qquad t \longrightarrow 0,$$

visto que

$$\lambda_t \longrightarrow 2I_0 \quad \text{e} \quad t^{\frac{1-q}{2(p-q)}} \longrightarrow \infty \quad \text{para} \quad t \longrightarrow 0,$$

pois $1 - q < 0$ e $p > q$. Isto conclui a demonstração da nossa proposição. $\square$

Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r}u' + u^p + u^q = 0 \\ u'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(0) = u_0 > 0 \end{cases} \tag{3.83}$$

Proposição 3.11. *O problema (3.83) possui uma solução clássica.*

Demonstração: Para isso, basta notar que, como já comentamos no capítulo 2, $f(t) = t^p + t^q$ é localmete Lipschitz. Além disso, para $A \equiv 1$ temos que as hipóteses $H_1 - H_3$ citadas no apêndice são satisfeitas. Sendo assim, da Proposição 3.17 temos que (3.83) possui uma solução em torno da origem. Por outro lado, longe da origem podemos extender esta solução u-sando a teoria classica de Equações Diferenciais Ordinárias e isto demonstra a nossa proposição. $\square$

Proposição 3.12. *Dado $u_0 > 0$ em (3.83) existe $R_0 = R(u_0)$ tal que $u(R(u_0), u_0) = 0$ e $u(r, u_0) > 0$ para $0 < r < R(u_0)$.*

Demonstração: A idéia é utilizar a Identidade de Pohazaev para o caso radial. Comecemos notando que, de (3.83) temos

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' = -u^p - u^q. \tag{3.84}$$

Multiplicando (3.84) por $u'r$ temos

$$u''u'r + (n-1)(u')^2 = -u^p u'r - u^q u'r. \tag{3.85}$$

Mas sendo assim, de (3.85) temos que

$$\left(\frac{(u')^2}{2}\right)' r + (n-1)(u')^2 = -\left(\frac{u^{p+1}}{p+1}\right)' r - \left(\frac{u^{q+1}}{q+1}\right)' r. \tag{3.86}$$

Multiplicando (3.86) por r^{n-1} e integrando em $(0, R)$ temos

$$\begin{aligned} &\int_0^R \left(\frac{(u')^2}{2}\right)' r^n dr + (n-1)\int_0^R (u')^2 r^{n-1} dr \\ &= -\int_0^R \left(\frac{u^{p+1}}{p+1}\right)' r^n dr - \int_0^R \left(\frac{u^{q+1}}{q+1}\right)' r^n dr. \end{aligned} \tag{3.87}$$

Utilizando integração por partes obtemos

$$\frac{(u'(R))^2}{2}R^n - n\int_0^R \frac{(u')^2}{2} r^{n-1} dr + (n-1)\int_0^R (u')^2 r^{n-1} dr$$

$$= -\frac{u^{p+1}(R)}{p+1}R^n + n\int_0^R \frac{u^{p+1}}{p+1}r^{n-1}dr - \frac{u^{q+1}(R)}{q+1}R^n + n\int_0^R \frac{u^{q+1}}{q+1}r^{n-1}dr,$$

ou seja,

$$\frac{(u'(R))^2}{2}R^n + \left(\frac{n}{2}-1\right)\int_0^R (u')^2 r^{n-1}dr$$
$$= -\frac{u^{p+1}(R)}{p+1}R^n + n\int_0^R \frac{u^{p+1}}{p+1}r^{n-1}dr - \frac{u^{q+1}(R)}{q+1}R^n + n\int_0^R \frac{u^{q+1}}{q+1}r^{n-1}dr. \tag{3.88}$$

Além disso, multiplicando (3.84) por r^{n-1} e integrando obtemos

$$\int_0^R (u'r^{n-1})'dr = -\int_0^R u^p r^{n-1}dr - \int_0^R u^q r^{n-1}dr,$$

ou seja,

$$u'(R)R^{n-1} = -\int_0^R u^p r^{n-1}dr - \int_0^R u^q r^{n-1}dr. \tag{3.89}$$

Como u é decrescente, temos que $u(r) \geq u(R)\ \forall r \leq R$, ou seja, temos que

$$\int_0^R u^p r^{n-1}dr \geq u^p(R)\frac{R^n}{n} \qquad \text{e} \qquad \int_0^R u^q r^{n-1}dr \geq u^q(R)\frac{R^n}{n}. \tag{3.90}$$

De (3.90) e (3.89) obtemos

$$u'(R)R^{n-1} \leq -u^p(R)\frac{R^n}{n} - u^q(R)\frac{R^n}{n},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{u'(R)}{R} \leq -\frac{u^p(R)}{n} - \frac{u^q(R)}{n}.$$

Em particular vale que

$$\frac{u'(R)}{R} \leq -\frac{u^p(R)}{n} \qquad \text{e} \qquad \frac{u'(R)}{R} \leq -\frac{u^q(R)}{n}. \tag{3.91}$$

Denotando $R = r$ em (3.91) e integrando novamente em $(0, R)$ obtemos

$$\int_0^R \frac{u'}{u^p}dr \leq -\int_0^R \frac{r}{n}dr. \tag{3.92}$$

De modo que, usando substituição de variáveis temos

$$\frac{u^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{u(0)}^{u(R)} \leq -\frac{r^2}{2n}\Big|_0^R,$$

ou seja,

$$\frac{u^{-p+1}(R)}{-p+1} - \frac{u^{-p+1}(0)}{-p+1} \leq -\frac{R^2}{2n}. \tag{3.93}$$

Multiplicando (3.93) por $-p+1<0$ obtemos

$$u^{-p+1}(R) \geq \frac{R^2(p-1)}{2n} + u^{-p+1}(0).$$

Assim,

$$u(R) \leq \left(\frac{R^2(p-1)}{2n} + u^{-p+1}(0)\right)^{\frac{1}{1-p}}. \tag{3.94}$$

Fazendo $C = \dfrac{p-1}{2n}$ e $D = u^{-p+1}(0)$ temos

$$u(R) \leq (CR^2+D)^{\frac{1}{1-p}} \leq (CR^2)^{\frac{1}{1-p}} = CR^{\frac{2}{1-p}}. \tag{3.95}$$

Utilizando o mesmo raciocínio acima podemos obter

$$u(R) \leq CR^{\frac{2}{1-q}}, \tag{3.96}$$

ou seja, obtemos

$$u(R) \leq CR^{\frac{2}{1-p}} \qquad \text{e} \qquad u(R) \leq CR^{\frac{2}{1-q}}. \tag{3.97}$$

Afirmação 1: $-\dfrac{u^{p+1}(R)}{p+1}R^n \longrightarrow 0$ e $-\dfrac{u^{q+1}(R)}{q+1}R^n \longrightarrow 0$ para $R \longrightarrow \infty$.

De fato, mostraremos que $u^{p+1}R^n \longrightarrow 0$ para $R \longrightarrow \infty$. Usando a estimativa obtida em (3.97), temos que

$$|u^{p+1}R^n| \leq \left(CR^{\frac{2}{p-1}}\right)^{p+1} R^n = CR^{n-\frac{2(p+1)}{p-1}}. \tag{3.98}$$

Mas note que $n - \dfrac{2(p+1)}{p-1} < 0$, pois

$$n - \frac{2(p+1)}{p-1} < 0 \Longleftrightarrow n-2-\frac{4}{p-1} < 0 \Longleftrightarrow n-2 < \frac{4}{p-1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n-2} > \frac{p-1}{4} \Longleftrightarrow \frac{4}{n-2} > p-1 \Longleftrightarrow$$

$$p < \frac{4}{n-2}+1 \Longleftrightarrow p < \frac{4+n-2}{n-2} \Longleftrightarrow p < \frac{n+2}{n-2},$$

ou seja,

$$|u^{p+1}R^n| \leq \frac{C}{R^\alpha} \qquad \text{onde} \qquad \alpha > 0, \tag{3.99}$$

de onde temos que $u^{p+1}R^n \longrightarrow 0$ para $R \longrightarrow \infty$. Analogamente podemos mostrar que $u^{q+1}R^n \longrightarrow 0$ para $R \longrightarrow \infty$.

Afirmação 2:

$$\int_0^R u^{p+1}r^{n-1}dr \quad \text{e} \quad \int_0^R u^{q+1}r^{n-1}dr$$

convergem, isto é

$$\int_0^\infty u^{p+1}r^{n-1}dr < \infty \quad \text{e} \quad \int_0^\infty u^{q+1}r^{n-1}dr < \infty. \tag{3.100}$$

De fato, notemos que de (3.98) temos que

$$u^{p+1}r^{n-1} \leq Cr^{n-1-\frac{2(p+1)}{p-1}},$$

e daí segue que

$$\int_1^R u^{p+1}r^{n-1}dr \leq C\int_1^R r^{n-1-\frac{2(p+1)}{p-1}}dr. \tag{3.101}$$

Note que basta integrar no intervalo $(1, R)$ pois sabemos que $u \in C^\infty$ e portanto a integral acima converge no intervalo $(0, 1)$. Sendo assim, basta mostrar que

$$C\int_1^\infty r^{n-1-\frac{2(p+1)}{p-1}}dr < \infty.$$

Denotando $K = \left(n - \frac{2(p+1)}{p-1}\right)^{-1}$ temos

$$C\int_1^R r^{n-1-\frac{2(p+1)}{p-1}}dr = Kr^{n-\frac{2(p+1)}{p-1}}|_1^R = K + KR^{n-\frac{2(p+1)}{p-1}}.$$

Mas já mostramos que $n - \frac{2(p+1)}{p-1} < 0$ e, portanto,

$$C\int_1^\infty r^{n-1-\frac{2(p+1)}{p-1}}dr < \infty,$$

ou seja, de (3.101) temos que

$$\int_1^\infty u^{p+1}r^{n-1}dr < \infty.$$

Com o mesmo argumento mostra-se que

$$\int_1^\infty u^{q+1} r^{n-1} dr < \infty.$$

Assim, das afirmações 1 e 2 temos que o lado direito de (3.88) converge quando $R \longrightarrow \infty$ e, consequentemente, o lado esquerdo de (3.88) também deve convergir, ou seja

$$\frac{(u'(R))^2}{2} R^n + \Big(\frac{n}{2} - 1\Big) \int_0^R (u')^2 r^{n-1} dr < \infty \quad \text{para} \quad R \longrightarrow \infty.$$

Mas note que o segundo termo da expressão cima é monótono, crescente e limitado em relação a R, de onde temos que

$$\Big(\frac{n}{2} - 1\Big) \int_0^\infty (u')^2 r^{n-1} dr < \infty. \tag{3.102}$$

Portanto, deve valer também que

$$\frac{(u'(R))^2}{2} R^n \quad \text{converge} \quad \text{para} \quad R \longrightarrow \infty.$$

Afirmação 03:

$$\frac{(u'(R))^2}{2} R^n \longrightarrow 0 \quad \text{para} \quad R \longrightarrow \infty.$$

De fato, suponhamos por absurdo que existe $C > 0$ tal que

$$\lim_{R \to \infty} \frac{(u'(R))^2}{2} R^n = C.$$

Sendo assim, deve existir $R_0 > 0$ tal que $\dfrac{(u'(R))^2}{2} R^n > \dfrac{C}{2}$ para $R > R_0$. Ou seja,

$$(u')^2 R^{n-1} > \frac{C}{R} \quad \text{para} \quad R > R_0.$$

E daí temos que

$$\int_{R_0}^\infty (u')^2 R^{n-1} dr \geq \int_{R_0}^\infty \frac{C}{R} dr = C \ln R|_{R_0}^{+\infty} = +\infty. \tag{3.103}$$

Mas (3.103) contradiz (3.102). De onde temos que

$$\lim_{R \to \infty} \frac{(u'(R))^2}{2} R^n = 0, \tag{3.104}$$

e a afirmação 3 está provada.

Assim, das afirmações 1, 2 e 3 provadas acima e de (3.88) temos que

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)\int_0^\infty (u')^2 r^{n-1}dr = \frac{n}{p+1}\int_0^\infty u^{p+1}r^{n-1}dr + \frac{n}{q+1}\int_0^\infty u^{q+1}r^{n-1}dr.$$

Ou, equivalentemente,

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx = \frac{n}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} u^{p+1}dx + \frac{n}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} u^{q+1}dx. \tag{3.105}$$

Por outro lado, sabemos que

$$-u\triangle u = u^{p+1} + u^{q+1},$$

ou seja, denotando $B_R(0) = B_R$ temos

$$-\int_{B_R} u\triangle u dx = \int_{B_R} u^{p+1}dx + \int_{B_R} u^{q+1}dx.$$

Pelo teorema da divergência obtemos que

$$\int_{\partial B_R} -u\frac{\partial u}{\partial n}dS + \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx = \int_{B_R} u^{p+1}dx + \int_{B_R} u^{q+1}dx. \tag{3.106}$$

Mas

$$\int_{\partial B_R} -u\frac{\partial u}{\partial n}dS = \int_{|w|=1} u(r)u'(r)r^{n-1}dw = uu'r^{n-1}C,$$

onde $C = \int_{|w|=1} dw$.

Afirmação 04: $uu'r^{n-1} \longrightarrow 0$ quando $R \longrightarrow \infty$.

De fato, por simplicidade, denotaremos todas as constantes por C. Note que, de (3.104) temos que existe $C > 0$ tal que $(u')^2 r^n < C$, ou seja, $u'r^{\frac{n}{2}} < C$ e daí

$$u'r^{n-1} = u'r^{\frac{n}{2}}r^{n-1-\frac{n}{2}} = u'r^{\frac{n}{2}}r^{\frac{n}{2}-1} \leq Cr^{\frac{n-2}{2}}.$$

Mas, de (3.97), temos que

$$uu'r^{n-1} \leq Cur^{\frac{n-2}{2}} \leq Cr^{\frac{2}{1-p}}r^{\frac{n-2}{2}} = Cr^{\frac{2}{1-p}+\frac{n-2}{2}}.$$

Mas note que $\dfrac{2}{1-p}+\dfrac{n-2}{2}<0$, pois

$$\frac{2}{1-p}+\frac{n-2}{2}<0 \Longleftrightarrow \frac{2}{1-p}<\frac{n-2}{2} \Longleftrightarrow .$$

$$\frac{4}{n-2}>p-1 \Longleftrightarrow p<\frac{4}{n-2}+1 \Longleftrightarrow p<\frac{n+2}{n-2},$$

e isto mostra a nossa afirmação. Sendo assim, de (3.106) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^{p+1}dx + \int_{\mathbb{R}^n} u^{q+1}dx. \tag{3.107}$$

Mas desta forma, de (3.105) e de (3.107) temos que

$$\frac{n-2}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^n} u^{p+1}dx + \int_{\mathbb{R}^n} u^{q+1}dx\right] = \frac{n}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} u^{p+1}dx + \frac{n}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} u^{q+1}dx.$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^{p+1}dx\left[\frac{n-2}{2}-\frac{n}{p+1}\right] + \int_{\mathbb{R}^n} u^{q+1}dx\left[\frac{n-2}{2}-\frac{n}{q+1}\right] = 0. \tag{3.108}$$

Mas note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^{p+1}dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} u^{q+1}dx > 0,$$

e que $\dfrac{n-2}{2}-\dfrac{n}{p+1}<0$, pois

$$\frac{n-2}{2}-\frac{n}{p+1}<0 \Longleftrightarrow \frac{n-2}{2}<\frac{n}{p+1} \Longleftrightarrow p+1<\frac{2n}{n-2}$$

$$\Longleftrightarrow p<\frac{2n}{n-2}-1 \Longleftrightarrow p<\frac{n+2}{n-2}.$$

Analogamente temos $\dfrac{n-2}{2}-\dfrac{n}{q+1}<0$. Ou seja, (3.108) gera um absurdo. Isto mostra que, dado $u_0>0$ em (3.83), existe $R=R(u_0)$ tal que $u(R(u_0))=0$ e $u(r,u_0)>0$ para $r<R(u_0)$. □

Proposição 3.13. *O problema (3.83) possui uma única solução.*

Demonstração: De fato, denotando $f(u)=u^p+u^q$ e suponhamos que existem u_1 e u_2 satisfazendo (3.83). Desta forma, denotando por $v = u_1 - u_2$ obtemos que

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = (u_1 - u_2)'' + \frac{n-1}{r}(u_1 - u_2)$$
$$= u_1'' + \frac{n-1}{r}u_1' - u_2'' - \frac{n-1}{r}u_2' = -f(u_1) + f(u_2),$$

ou seja,

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = -f(u_1) + f(u_2). \tag{3.109}$$

Multiplicando (3.109) por r^{n-1} e integrando em $(0, R)$ temos

$$|v'(R)| \leq \int_0^R |f(u_1) - f(u_2)| \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}} dr \leq \sup_{r \leq R} |f(u_1) - f(u_2)| \frac{R}{n}. \tag{3.110}$$

Mas note que, como já mostramos anteriormente, f é localmente de Lipschitz, de onde temos que existe $C > 0$ tal que

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq C|u_1 - u_2| = C|v|. \tag{3.111}$$

Além disso, temos

$$|v(r)| = |v(r) - v(0)| = |\int_0^r v'(s)ds| \leq \int_0^r |v'(s)|ds. \tag{3.112}$$

De (3.111) e de (3.112)

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq C \int_0^r |v'(s)|ds \leq C \int_0^R |v'(s)|ds. \tag{3.113}$$

De onde temos que

$$\sup_{r \leq R} |f(u_1) - f(u_2)| \leq C \int_0^R |v'(s)|ds. \tag{3.114}$$

Substituindo (3.114) em (3.110) temos

$$|v'(R)| \leq C\frac{R}{n} \int_0^R |v'(s)|ds. \tag{3.115}$$

Fazendo $\psi(R) = \displaystyle\int_0^R |v'(s)|ds$ temos $\psi'(R) = |v'(R)|$. Ou seja, (3.115) implica

$$\psi'(R) \leq C\frac{R}{n}\psi(R) \Longleftrightarrow \psi'(R) - C\frac{R}{n}\psi(R) \leq 0.$$

Usando um fator integrante obtemos que

$$\psi'(R)e^{-C\frac{R^2}{2n}} - C\frac{R}{n}\psi(R)e^{-C\frac{R^2}{2n}} \leq 0 \Longleftrightarrow (\psi(R)e^{-C\frac{R^2}{2n}})' \leq 0.$$

De onde temos que, para $0 \leq R_0 \leq R$ vale

$$\int_0^{R_0} (\psi(r)e^{-C\frac{r^2}{2n}})'dr \leq 0 \Longleftrightarrow \psi(R_0)e^{-C\frac{R_0^2}{2n}} - \psi(0)e^0 \leq 0. \tag{3.116}$$

Mas $\psi(0) = 0$, ou seja, de (3.123) temos que $\psi(R_0) \leq 0$, mas desta forma, da definição de $\psi(R)$ temos que $\psi(R_0) = 0$, ou seja, $\psi \equiv 0$. Assim, temos $|v'(R)| \equiv 0$ e daí $v' \equiv 0$, ou seja, existe $K > 0$ tal que $v(r) = K$ para todo r. Lembrando que $v(0) = u_1(0) - u_2(0) = 0$ temos que $K = 0$ e, portanto, $u_1 = u_2$ mostrando a unicidade de solução para (3.83). □

Observação 3.14. Note que com o mesmo raciocínio utilizado nas proposições 3.11 e 3.13 e utilizando o Teorema 3.18 do apêndice, podemos garantir a existência e unicidade de solução para a equação (3.62).

Proposição 3.15. *Seja $u = u(t, u_0)$ solução de (3.83). Então u satisfaz (3.62) com $t = \lambda_t = 1$.*

Demonstração: Mostremos primeiramente que $u = u(t, u_0)$ depende continuamente da condição inicial u_0. Para isso, consideremos os seguintes problemas

$$\begin{cases} u_1'' + \dfrac{n-1}{r}u_1' = -f(u_1) \\ u_1'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u_1(0) = u_1^0 > 0 \end{cases} \tag{3.117}$$

$$\begin{cases} u_2'' + \dfrac{n-1}{r}u_2' = -f(u_2) \\ u_2'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u_2(0) = u_2^0 > 0, \end{cases} \tag{3.118}$$

onde $f(u) = u^p + u^q$. Desta forma, fazendo $v(r) = u_1(r, u_1^0) - u_2(r, u_2^0)$ temos que v satisfaz

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = f(u_2) - f(u_1). \tag{3.119}$$

De (3.119) obtemos que

$$|v'(r)| \leq \int_0^R |f(u_2) - f(u_1)| \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}} dr \leq \sup_{r \leq R} |f(u_1) - f(u_2)| \frac{R}{n}. \qquad (3.120)$$

Mas f é de Lipschitz, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq C|u_1 - u_2| = c|v|.$$

Além disso, note que

$$|v(r)| \leq |v(r) - v(0)| + |v(0)| \leq \int_0^R |v'(s)| ds + |v(0)|,$$

ou seja,

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq C \left(\int_0^R |v'(s)| ds + |v(0)| \right),$$

de onde obtemos

$$\sup_{r \leq R} |f(u_1) - f(u_2)| \leq C \left(\int_0^R |v'(s)| ds + |v(0)| \right). \qquad (3.121)$$

Substituindo (3.121) em (3.120) temos

$$|v'(r)| \leq \frac{CR}{n} \left(\int_0^R |v'(s)| ds + |v(0)| \right). \qquad (3.122)$$

Fazendo $\psi(R) = \displaystyle\int_0^R |v'(s)| ds + |v(0)|$ temos $\psi'(R) = |v'(R)|$. Ou seja, (3.122) se transforma em

$$\psi'(R) \leq C\frac{R}{n}\psi(R) \Longleftrightarrow \psi'(R) - C\frac{R}{n}\psi(R) \leq 0.$$

Usando um fator integrante obtemos que

$$\psi'(R)e^{-C\frac{R^2}{2n}} - C\frac{R}{n}\psi(R)e^{-C\frac{R^2}{2n}} \leq 0 \Longleftrightarrow (\psi(R)e^{-C\frac{R^2}{2n}})' \leq 0.$$

De onde temos que, para $0 \leq R_0 \leq R$ vale

$$\int_0^{R_0} (\psi(r)e^{-C\frac{r^2}{2n}})' dr \leq 0 \Longleftrightarrow \psi(R_0)e^{-C\frac{R_0^2}{2n}} - \psi(0)e^0 \leq 0, \qquad (3.123)$$

ou seja,

$$\psi(R_0) \leq \psi(0) e^{C\frac{R_0^2}{2n}}. \tag{3.124}$$

Mas

$$\psi(R_0) = \int_0^{R_0} |v'(s)|ds + |v(0)| \quad \text{e} \quad \psi(0) = |v(0)|. \tag{3.125}$$

Substituindo (3.125) em (3.124 obtemos

$$\int_0^{R_0} |v'(s)|ds \leq |v(0)| \left(e^{C\frac{R_0^2}{2n}} - 1 \right) = C(R_0)|v(0)|. \tag{3.126}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_0^{R_0} |v'(s)|ds \geq |\int_0^{R_0} v'(s)ds|$$

$$= |v(R_0) - v(0)| \geq ||v(R_0)| - |v(0)|| \geq |v(R_0)| - |v(0)|, \tag{3.127}$$

ou seja, de (3.126) e (3.127) obtemos

$$|v(R_0)| \leq C(R_0)|v(0)|. \tag{3.128}$$

Lembrando que

$$|v(R_0)| = |u_1(R_0, u_1^0) - u_2(R_0, u_2^0)| \quad \text{e} \quad |v(0)| = |u_1(0) - u_2(0)|,$$

temos que

$$|u_1(R_0, u_1^0) - u_2(R_0, u_2^0)| \leq C(R_0)|u_1(0) - u_2(0)|, \tag{3.129}$$

ou seja, temos que $u(R(u_0), u_0)$ é de Lipschitz em relação a u_0. Além disso, note que dado $\delta > 0$ temos que

$$\triangle \frac{u(x, u_0 + \delta) - u(x, u_0)}{\delta} = -\frac{f(u(x, u_0 + \delta)) - f(u(x, u_0))}{\delta},$$

ou seja,

$$|\triangle \frac{u(x, u_0 + \delta) - u(x, u_0)}{\delta}| = |\frac{f(u(x, u_0 + \delta)) - f(u(x, u_0))}{\delta}|.$$

Como f é localmente de Lipschitz, temos que existe $C > 0$ tal que

$$|f(u(x, u_0 + \delta)) - f(u(x, u_0))| \leq C|u(x, u_0 + \delta) - u(x, u_0)|,$$

e de (3.129) temos que

$$|u(x, u_0 + \delta) - u(x, u_0)| \leq C(R_0)|\delta|,$$

ou seja, obtemos que

$$|\triangle \frac{u(x, u_0 + \delta) - u(x, u_0)}{\delta}| \leq C(R_0).$$

Seja

$$v_n = \frac{u(x, u_0 + \frac{1}{n}) - u(x, u_0)}{\frac{1}{n}}. \tag{3.130}$$

Assim temos que $|v_n(x)| \leq C(R_0) = C$ e $|\triangle v_n| \leq D$ para $R_0 \leq R_1$ fixo. Note que $v_n \in C^{2,\alpha}$ e pelo Teorema 1.31 temos que

$$|v_n|_{1,\alpha} \leq K(|v_n|_0 + |\triangle v_n|) \leq K(C + D) = K_0,$$

ou seja, v_n é uma família equicontínua e pelo Teorema de Arzel-Ascoli, temos que existe $v \in C^{1,\alpha}$ tal que $v_n(x) \longrightarrow v(x)$ em C^1. Além disso, note que

$$\triangle v_n = \frac{f(u(x, u_0 + \frac{1}{n})) - f(u(x, u_0))}{\frac{1}{n}} := g_n.$$

Sendo assim, tomando $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ onde $\Omega = B_{R_1}(0)$ temos

$$\int_\Omega \triangle v_n \varphi = -\int_\Omega g_n \varphi,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla \varphi = \int_\Omega g_n \varphi.$$

Além disso, como $v_n \longrightarrow v$ em C^1 temos que

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla \varphi \longrightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi,$$

ou seja, temos

$$\int_\Omega \triangle v_n \varphi \longrightarrow -\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi. \tag{3.131}$$

Por outro lado, temos que

$$\triangle v_n = g_n = \frac{f(u(x, u_0 + \frac{1}{n})) - f(u(x, u_0))}{\frac{1}{n}}.$$

Passando ao limite para $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\triangle v_n \longrightarrow -f'(u(x, u_0))u_{u_0}(x, u_0),$$

de onde temos que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi = \int_\Omega f'(u(x, u_0))u_{u_0}(x, u_0)\varphi.$$

Mas de (3.130) temos que $v = u_{u_0}(x, u_0)$, ou seja, $u_{u_0}(x, u_0)$ é solução fraca de $\triangle v = -f'(u)v$. Além disso, como

$$v(0) = \lim_{n\to\infty} v_n(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{u(0, u_0 + \frac{1}{n}) - u(0, \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_0 + \frac{1}{n} - u_0}{\frac{1}{n}} = 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty} v_n'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{u_x(0, u_0 + \frac{1}{n}) - u_x(0, u_0)}{\frac{1}{n}} = 0,$$

temos que $v = u_{u_0}(x, u_0)$ também satisfaz o problema (3.62). □

Sendo assim, da Observação (3.14) e da Proposição 3.15 temos que $u_{u_0}(x, u_0) = \delta$.

Teorema 3.16. *Para $f(u) = u^p + u^q$ e $1 < q < p < \dfrac{n+2}{n-2}$, o problema (1) possui uma única solução, se $\dfrac{p-1}{q+1} \leq \dfrac{2}{n}$.*

Demonstração: Se u_t é um mínimo positivo da proposição (3.9), pela proposição (3.7), temos que u_t satisfaz as hipóteses da proposição (3.8). Então a solução $\delta(r)$ da equação correspondente linearizada do problema (3.75) satisfaz $\delta_t(1) < 0$. Seja

$$\delta(r) = \delta_t \left(\frac{r}{l_t} \right), \tag{3.132}$$

onde $\delta(r)$ depende de u_t. Note que $\delta(r)$ satisfaz

$$\begin{cases} \delta'' + \dfrac{n-1}{r}\delta' + pv_t^{p-1}\delta + qv_t^{q-1}\delta = 0 \\ \delta'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \delta(0) = 1 \end{cases} \tag{3.133}$$

onde v_t é obtida de u_t através da substituição (3.73).

De fato, note que

$$\delta'(r) = \frac{1}{l_t}\delta_t'\left(\frac{r}{l_t}\right)$$

e

$$\delta''(r) = \frac{1}{l_t^2}\delta_t''\left(\frac{r}{l_t}\right)$$

e, lembrando que $v_t(r) = Mu_t\left(\dfrac{r}{l_t}\right)$, obtemos

$$\delta'' + \frac{n-1}{r}\delta' + pv_t^{p-1}\delta + qv_t^{q-1}\delta$$

$$= \frac{1}{l_t^2}\delta_t''\left(\frac{r}{l_t}\right) + \frac{n-1}{r}\frac{1}{l_t}\delta_t'\left(\frac{r}{l_t}\right) + pM^{p-1}u_t^{p-1}\left(\frac{r}{l_t}\right) + qM^{q-1}u_t^{q-1}\left(\frac{r}{l_t}\right)$$

$$= \frac{1}{l_t^2}\delta_t''\left(\frac{r}{l_t}\right) + \frac{n-1}{\frac{r}{l_t}}\frac{1}{l_t^2}\delta_t'\left(\frac{r}{l_t}\right) + p\frac{M^{p-1}}{t}tu_t^{p-1}\left(\frac{r}{l_t}\right) + q\frac{M^{q-1}}{\lambda_t}\lambda_t u_t^{q-1}\left(\frac{r}{l_t}\right).$$

Mas novamente note que $\dfrac{M^{p-1}}{t} = \dfrac{1}{l_t^2}$ e $\dfrac{M^{q-1}}{\lambda_t} = \dfrac{1}{l_t^2}$, pois já mostramos anteriormente que $M = \left(\dfrac{\lambda_t}{l_t^2}\right)^{\frac{1}{q-1}} = \left(\dfrac{t}{l_t^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$.

Sendo assim, temos que

$$\delta'' + \frac{n-1}{r}\delta' + pv_t^{p-1}\delta + qv_t^{q-1}\delta =$$

$$\frac{1}{l_t^2}\left(\delta_t''\left(\frac{r}{l_t}\right) + \frac{n-1}{\frac{r}{l_t}} + \delta_t'\left(\frac{r}{l_t}\right) + ptu_t^{p-1}\left(\frac{r}{l_t}\right) + q\lambda_t\lambda_t u_t^{q-1}\left(\frac{r}{l_t}\right)\right) = 0,$$

pois, de (3.62), temos que

$$\delta_t''\left(\frac{r}{l_t}\right) + \frac{n-1}{\frac{r}{l_t}} + \delta_t'\left(\frac{r}{l_t}\right) + ptu_t^{p-1}\left(\frac{r}{l_t}\right) + q\lambda_t\lambda_t u_t^{q-1}\left(\frac{r}{l_t}\right) = 0.$$

Além disso, como $\delta(r) = \delta_t\left(\frac{r}{l_t}\right)$ e como de (3.62) temos que $\delta'(0) = 0$ e $\delta(0) = 1$ mostrando que $\delta(r)$ satisfaz o problema (3.133). Novamente, consideremos a solução $v_t(r)$ obtida de u_t pela substituição (3.73). Sabemos pela Proposição 3.10 que fazendo t variar, $R(u_0)$ cobre todo o intervalo aberto $(0, \infty)$. De (3.133), podemos deduzir que, para toda $u_0 > 0$, a correspondente solução da equação linearizada $\delta(r, u_0)$ satisfaz

$$\delta(R(u_0), u_0) < 0. \tag{3.134}$$

Da Proposição 3.15 temos que $\delta = \dfrac{\partial u}{\partial u_0}$. Como $u(R(u_0), u_0) = 0$, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial R}(R(u_0), u_0)R'(u_0) + \frac{\partial u}{\partial u_0}(R(u_0), u_0) = 0, \tag{3.135}$$

ou seja, pelo exposto acima, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial R}(R(u_0), u_0)R'(u_0) + \delta(R(u_0), u_0)) = 0. \tag{3.136}$$

Lembrando que $u'_r < 0$ e que $\delta(R(u_0)) < 0$, deduzimos que $R'(u_0) < 0$ para toda u_0. Sendo assim, estamos em condições de provar a unicidade de solução positiva para o problema (1) dado por

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r}u' + u^p + u^q = 0 \\ u'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(R) = 0 \end{cases} \tag{3.137}$$

Suponhamos que existam duas soluções para (3.137) e denotemos estas soluções por u_1 e u_2. Note que devemos ter $u_1(0) = u_2(0)$, pois se fosse $u_1(0) \neq u_2(0)$ teríamos uma contradição com o fato de que $R'(u_0) < 0$. Mas desta forma temos que u_1 e u_2 seriam duas soluções de

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r}u' + u^p + u^q = 0 \\ u'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.138}$$

Mas, pela Proposição 3.13, o problema (3.138) possui uma única solução, ou seja, temos que $u_1 = u_2$. $\square$

Apêndice

Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (Au')' + \dfrac{n-1}{r} Au' + f(u) = 0 \\ u'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(0) = \xi > 0 \end{cases} \tag{3.139}$$

e consideremos as hipóteses

(H_1) f é contínua em $[0,\infty)$ e $f(0) = 0$,

(H_2) A é contínua em $(0,\infty)$ e $pA(p)$ converge para $p \longrightarrow 0$,

(H_3) $pA(p)$ é estritamente crescente para $p > 0$.

Proposição 3.17. *Suponhamos que as hipóteses $H_1 - H_3$ são satisfeitas. Então o problema (3.139) possui uma solução clássica em torno da origem.*

Proposição 3.18. *Suponhamos que A é de classe C^1 em $(0,\infty)$ e que f é Lipschitz contínua para $u \in J$, onde J é um subintervalo de $(0,\infty)$ contendo ξ. Assuma também que a derivada da (crescente) função Ω é limitada por zero em todo subconjunto limitado de $(0,\infty)$, onde $\Omega(p) = pA(|p|)$. Então a solução para (3.1) é única ao longo do intervalo J.*

A demonstração das Proposições 3.17 e 3.18 podem ser encontradas em [6]

Referências Bibliográficas

[1] F. V. Atkinson and L. A. Peletier *"Emden-fowler equations involving critical exponents"*, J. Nonlinear Anal 10 (1988), 755-771.

[2] L. C. Evans. *"Partial Differential Equations"*, Graduate Studies in Mathematics. Vol 19. American Mathematical Society, 1998.

[3] B. Gidas, Wei-Ming Ni, and L. Niremberg *"Symmetry and related properties via the maximum principle"*, Comm. Math. Phys. 68 (1979), 209-243.

[4] D. Gilbarg e N. S. Trudinger. *"Elliptic Partial Differential Equations of Second Order."*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Vol 224, Segunda Edição. Springer 1997.

[5] W. -M. Ni and R. Mussbaum *"Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of $\triangle u + f(u,r) = 0$ "*, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1983), 69-108.

[6] James Serrin *"Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in $\mathbb{R}^n$"*, Advances in Mathematics 118 (1996),177-243.

[7] Liqun Zhang *"Uniqueness of positive solutions of $\triangle u + u + u^p$ in finite ball"*, Commun. in Partial Differential Equations 17 (7 & 8) (1992), 1141-1164.

[8] Liqun Zhang *"Uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic equations"*, Journal of Differential Equations 115 (1995), 1-23.