

**ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DA INTERAÇÃO SOLO-
ESTRUTURA EM FUNDAÇÕES DE CONCRETO ARMADO PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Diogo Soliman Medeiros

**Porto Alegre
Novembro 2006**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

DIOGO SOLIMAN MEDEIROS

**ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DA INTERAÇÃO SOLO-
ESTRUTURA EM FUNDAÇÕES DE CONCRETO ARMADO PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de *Mestre em Engenharia*, na modalidade Acadêmico.

Área de Concentração: Estruturas

Porto Alegre
Novembro 2006

M488a Medeiros, Diogo Soliman
Análise tridimensional da interação solo-estrutura em fundações de concreto armado pelo método dos elementos finitos / Diogo Soliman Medeiros. – 2006.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2006.

Orientação : Prof. Dr. Américo Campos Filho, Prof. Dr. Nilo César Consoli, Prof. Dr. Alexandre Rodrigues Pacheco.

1. Elementos finitos. 2. Fundações. 3. Interação solo-estrutura. 4. Concreto armado. I. Campos Filho, Américo, orient. II. Consoli, Nilo César, orient. III. Pacheco, Alexandre Rodrigues, orient. IV. Título.

CDU-624.15(043)

DIOGO SOLIMAN MEDEIROS

**ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA EM
FUNDAÇÕES DE CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre, Novembro de 2006

Prof. Américo Campos Filho

Dr. pela Escola Politécnica da USP

Orientador

Prof. Nilo César Consoli

PhD. pela Concórdia University, Canadá

Orientador

Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco

PhD. pela Pennsylvania State University,
EUA

Orientador

Prof. Fernando Schnaid

Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Fernando Schnaid

PhD. pela University of Oxford,

Inglaterra

UFRGS

Prof. Mauro de Vasconcellos Real

Dr. pelo PPGEC/UFRGS

FURG

Prof. Antônio Thomé

Dr. pelo PPGEC/UFRGS

UPF

DEDICATÓRIA

*Aos meus pais,
Anacleto e Maria Dolores.*

*À minha esposa,
Alessandra.*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Américo Campos Filho pelo incentivo, orientação e amizade. O seu incentivo e apoio desde a graduação, quando a perspectiva do mestrado ainda era um sonho, foram fundamentais para que eu pudesse concretizar essa importante etapa da minha vida.

Ao Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco pela orientação, amizade e vontade de ajudar. Suas contribuições e o seu bom humor foram valiosos para o desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Nilo César Consoli pela orientação, amizade e apoio à realização deste trabalho. Mesmo à distância, foi um grande incentivador.

Ao Prof. Ruy Carlos Ramos de Menezes e ao Prof. Guilherme Creus pela amizade e incentivo à realização do mestrado.

Ao Prof. João Ricardo Masuero pelo inestimável auxílio na realização dos exemplos finais desta dissertação.

Aos demais professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelos conhecimentos transmitidos e pelos cordiais momentos que compartilhamos.

Aos colegas de Pós-Graduação pela amizade, em especial ao colega Daniel Jost, parceiro dos bons e maus momentos da modelagem numérica tridimensional.

À CAPES que proporcionou a bolsa de estudos, sem a qual não teria condições de realizar o curso de mestrado.

Aos colegas da Companhia Estadual de Energia Elétrica, pelo incentivo e apoio à conclusão do trabalho.

Aos meus pais, Anacleto e Maria Dolores, e ao meu irmão, Rafael, pelo incentivo, apoio e paciência.

À minha esposa, Alessandra, pelo amor e companheirismo.

RESUMO

O estudo da interação solo-estrutura em fundações é um tema que certamente necessita de pesquisas mais aprofundadas, já que as soluções empíricas, semi-empíricas ou mesmo as analíticas disponíveis na literatura têm aplicabilidade bastante limitada. Em contrapartida, os modelos computacionais têm a característica intrínseca de abrirem o leque de possibilidades de análise, segundo as mais diversas situações, e da forma mais abrangente possível. Desta forma, o objetivo deste trabalho foi o de desenvolver um programa computacional que realizasse análises elastoplásticas tridimensionais da interação solo-estrutura de fundações rasas de concreto armado. Para tanto o método dos elementos finitos foi utilizado no desenvolvido deste programa computacional. Os elementos finitos empregados na modelagem do concreto e do solo foram elementos isoparamétricos hexaédricos, lineares ou quadráticos. Na modelagem da armadura, a mesma foi considerada através de um modelo incorporado, admitindo-se aderência perfeita entre o concreto e o aço. O comportamento dos materiais foi representado através de modelos elastoplásticos. Para a representação do concreto fissurado, foi utilizado um modelo de fissuras distribuídas. O programa computacional foi implementado na linguagem FORTRAN 90 e as etapas de pós-processamento foram feitas com o uso do programa GiD®. Os resultados obtidos através da aplicação do programa para a simulação do comportamento de fundações rasas em diferentes situações mostram a complexidade de tais problemas.

ABSTRACT

The study of soil-structure interaction on foundations is a topic that certainly needs more in-depth research, since empirical, semi-empirical, or even analytical solutions available in the literature have very limited applicability. On the other hand, computational models have the intrinsic characteristic of opening a spectrum of possibilities when analyzing structures, considering any situation and in a more comprehensive way. Considering this, the objective of this work was the development of a computational program for three-dimensional elastoplastic analyses of soil-structure interaction problems on reinforced concrete shallow foundations. To accomplish this, the finite element method was used in the development of the computational program. The finite elements used in the modeling of both reinforced concrete and soil were either the linear or the quadratic isoparametric hexahedron. For the modeling of the reinforcing steel bars, they were considered through an incorporated model, which assumes perfect bonding between concrete and steel rebars. Material behavior was represented through elastoplastic models. A smeared crack model was used to represent cracked concrete. The computational program was implemented in FORTRAN 90 while the post-processing tasks were carried out through the software GiD[®]. The results obtained through the application of the program to simulate the behavior of shallow foundations in different situations show the complexity of such problems.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	19
1.1	GENERALIDADES.....	19
1.2	OBJETIVOS.....	20
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	21
2	MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA CONCRETO, SOLO E ARMADURA.....	22
2.1	ELEMENTOS FINITOS PARA CONCRETO E SOLO.....	23
2.1.1	Hexaedro linear.....	23
2.1.2	Hexaedro linear com funções bolha.....	23
2.1.3	Hexaedro quadrático.....	24
2.1.4	Integração numérica.....	25
2.2	ELEMENTOS FINITOS PARA ARMADURA.....	27
2.2.1	Formulação geométrica.....	29
2.2.2	Segmentos de armadura no interior dos elementos de concreto.....	33
2.2.3	Funções de forma.....	40
2.2.4	Matriz de rigidez para a armadura.....	41
3	MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESTRUTURA COM COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO.....	43
3.1	MODELOS REOLÓGICOS.....	43
3.1.1	Modelo elástico.....	43
3.1.2	Modelo plástico.....	44
3.1.3	Modelo elastoplástico.....	45
3.2	EXPRESSÕES PARA O COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO.....	47
3.2.1	Relação constitutiva no domínio elástico.....	47
3.2.2	Critério de escoamento.....	48
3.2.3	Relação constitutiva no domínio plástico.....	49
3.2.4	Controle do estado de carga – retorno radial.....	51
3.3	ALGORITMO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR.....	52
4	MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS.....	56

4.1	CARACTERÍSTICAS DO COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS SUBMETIDOS À CARGAS DE CURTA DURAÇÃO	56
4.2	FORMA ALTERNATIVA PARA O CRITÉRIO DE ESCOAMENTO....	58
4.2.1	Determinação do vetor de fluxo plástico e do vetor plástico	59
4.3	MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO	60
4.3.1	Modelo para a compressão no concreto.....	60
4.3.1.1	<i>Critério de escoamento</i>	60
4.3.1.2	<i>Regra de endurecimento</i>	62
4.3.1.3	<i>Critério de ruptura</i>	62
4.3.2	Modelo para o concreto fissurado.....	63
4.3.2.1	<i>Colaboração do concreto entre fissuras</i>	66
4.3.2.2	<i>Rigidez transversal do concreto fissurado</i>	72
4.4	MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS SOLOS.....	74
4.4.1	Modelo para a compressão no solo.....	74
4.4.1.1	<i>Critério de escoamento</i>	74
4.4.1.2	<i>Regra de endurecimento</i>	76
4.4.1.3	<i>Critério de ruptura</i>	76
4.5	MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O AÇO.....	77
4.5.1	Critério de escoamento.....	77
4.5.2	Regra de endurecimento	78
4.5.3	Critério de ruptura	78
5	VALIDAÇÃO DO MODELO.....	80
5.1	COMPRESSÃO UNIFORME	80
5.2	FLEXÃO SIMPLES	81
5.3	DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NOS SOLOS	83
5.4	FISSURAÇÃO.....	89
5.5	INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA	91
6	APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....	95
6.1	SAPATA ISOLADA COM VARIAÇÃO NOS PARÂMETROS DO SOLO.....	95
6.1.1	Configuração 1.....	98
6.1.1.1	<i>Deslocamentos verticais nos elementos de concreto e solo</i>	99

6.1.1.2	<i>Tensões normais verticais nos elementos de concreto e solo.....</i>	101
6.1.1.3	<i>Deformações específicas normais verticais no concreto e solo.....</i>	103
6.1.1.4	<i>Tensões nos elementos de armadura</i>	105
6.1.1.5	<i>Comparação entre as respostas para o concreto, o solo e a armadura.....</i>	107
6.1.2	<i>Configuração 2.....</i>	110
6.1.2.1	<i>Deslocamentos verticais nos elementos de concreto e solo.....</i>	110
6.1.2.2	<i>Tensões normais verticais nos elementos de concreto e solo.....</i>	112
6.1.2.3	<i>Deformações específicas normais verticais no concreto e no solo.....</i>	114
6.1.2.4	<i>Tensões nos elementos de armadura</i>	116
6.1.2.5	<i>Comparação entre as respostas para o concreto, o solo e a armadura.....</i>	119
6.1.3	<i>Configuração 3.....</i>	120
6.1.3.1	<i>Deslocamentos verticais nos elementos de concreto e solo.....</i>	120
6.1.3.2	<i>Tensões normais verticais nos elementos de concreto e solo.....</i>	122
6.1.3.3	<i>Deformações específicas normais verticais no concreto e solo.....</i>	125
6.1.3.4	<i>Tensões nos elementos de armadura</i>	127
6.1.3.5	<i>Comparação entre deformações específicas normais específicas verticais e tensões normais verticais nos elementos de concreto e solo e tensões na armadura.....</i>	129
6.1.4	<i>Comparação entre os resultados obtidos para as Configurações 1, 2 e 3.....</i>	130
6.1.4.1	<i>Deslocamentos verticais – escala unificada</i>	131
6.1.4.2	<i>Tensões normais verticais – escala unificada.....</i>	132
6.1.4.3	<i>Tensões na interface entre o solo e a fundação</i>	134
6.1.4.4	<i>Fissuração da fundação</i>	138

6.2	DUAS SAPATAS ISOLADAS.....	138
6.2.1.1	<i>Deslocamentos verticais nos elementos de concreto e solo.....</i>	141
6.2.1.2	<i>Tensões normais verticais nos elementos de concreto e solo.....</i>	144
6.2.1.3	<i>Deformações específicas normais verticais nos elementos de concreto e de solo</i>	149
6.2.1.4	<i>Tensões nos elementos de armadura</i>	152
6.2.1.5	<i>Fissuração da fundação</i>	154
7	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES GERAIS	156
7.1	CONCLUSÕES.....	156
7.2	CONSIDERAÇÕES GERAIS	157
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	159
	ANEXO A – ARQUIVOS DE ENTRADA DE DADOS.....	162
	ANEXO B – UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA GID	168
	ANEXO C – SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES NODAIS....	169

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

Letras romanas maiúsculas:

A – coeficiente para integração reduzida do elemento quadrático; constante

A_S – área da seção transversal da barra de armadura

B – matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto; coeficiente para integração reduzida do elemento quadrático

B_S – matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de aço

C – peso para o ponto de integração; coeficiente para integração reduzida do elemento quadrático; função de posição ao longo da barra; constantes para o fluxo plástico

D – matriz constitutiva elástica

D_{ep} – matriz constitutiva elastoplástica

E – módulo de elasticidade longitudinal

E_p – inclinação da fase plástica do diagrama tensão-deformação

E_S – módulo de elasticidade longitudinal do aço

F – superfície de escoamento

G_f – a energia de fratura

G_c – módulo de elasticidade transversal reduzido

H – funções de interpolação para os elementos de barra; polinômios de Lagrange

I – invariante das tensões principais

l_c – comprimento característico da fissura

J – matriz jacobiana; invariante das tensões desviadoras

K_C – matriz de rigidez do concreto

K^e – matriz de rigidez de um elemento

K_G – matriz de rigidez global

K_{G0} – matriz de rigidez global inicial

K_S – matriz de rigidez do aço

N – funções de interpolação para os hexaedros

R – rotação

V_S – volume da barra de aço

Letras romanas minúsculas:

a – coordenadas do ponto de integração; fluxo plástico

b – forças de volume; semi-largura

c – constante

d_D – vetor plástico

f – forças nodais; função de interpolação

f_{cm} – resistência média à compressão uniaxial do concreto

f_{ck} – resistência característica à compressão uniaxial do concreto

f^e – forças aplicadas em um elemento

f_{tm} – resistência média à tração uniaxial do concreto

g – função de interpolação

h – função de interpolação; altura

k – parâmetro do material; relação entre f_{cm} e f_{ck}

k_q – peso para a integração do polinômio de Gauss-Legendre

nb – número de barras no interior do elemento de concreto

s – coordenada cartesiana

t – forças de superfície; variável

u – deslocamentos de um ponto qualquer do elemento finito

u^e – deslocamentos dos nós do elemento finito

x – coordenadas de um ponto qualquer do elemento finito; coordenada cartesiana

x^e – coordenadas dos nós do elemento finito

y – coordenada cartesiana

z – coordenada cartesiana

w – abertura de fissura

Letras gregas maiúsculas:

Δ – incremento

Σ – somatório

Π – operador

Γ_u – domínio da superfície de um corpo onde os deslocamentos são prescritos

Γ_t – domínio da superfície de um corpo onde as forças de contato são prescritas

Ω – domínio do volume de um corpo

Letras gregas minúsculas:

α – ângulo de orientação da barra; constante; parâmetro de amolecimento

β – ângulo de orientação da barra; parâmetro; fator de redução

χ – coordenada normalizada

δ – variação

$\delta\varepsilon$ – vetor associado às deformações virtuais

δu – vetor associado aos deslocamentos virtuais

ε – deformação específica total; deformação específica longitudinal; coordenada de Haigh-Westergaard

ε_c – deformação específica de fissura equivalente

ε_p – deformação específica plástica

$\bar{\varepsilon}_p$ – deformação específica efetiva

ϕ – polinômio de Gauss-Legendre; ângulo de atrito

γ – ângulo de orientação da barra

η – coordenada normalizada

κ – parâmetro de endurecimento; constante

λ – constante de Lamé; multiplicador plástico; função

μ – constante de Lamé

ν – coeficiente de Poisson

ρ – coordenada de Haigh-Westergaard

θ – coordenada de Haigh-Westergaard

σ – tensão interna em um corpo; tensões principais

$\bar{\sigma}$ – tensão efetiva

σ_s – tensão na armadura

σ_{ef} – tensão uniaxial equivalente

σ_Y – tensão de plastificação

ξ – coordenada normalizada

ζ – coordenada normalizada

Símbolos especiais:

$\{ \}$ – vetor coluna

$\{ \}^T$ – vetor coluna transposto

$\langle \rangle$ – vetor linha

$[]$ – matriz

$[]^T$ – matriz transposta

$[]^{-1}$ – matriz inversa

ÍNDICE DE FÍGURAS

Figura 1.1 – Exemplos de modelos para estudo da interação solo-estrutura...	20
Figura 2.1 – Tipos de elementos finitos para concreto e solo	24
Figura 2.2 – Pontos de integração para cada tipo de elemento	26
Figura 2.3 – Modelo incorporado de armadura	28
Figura 2.4 – Barra curva em elementos lineares de concreto	29
Figura 2.5 – Coordenadas naturais da barra de armadura	30
Figura 2.6 – Coordenada ao longo do eixo da armadura	31
Figura 2.7 – Curva que passa pelos pontos de definição da barra de armadura	35
Figura 2.8 – Ponto P_1 dentro do elemento e P_{np} fora do elemento de concreto	37
Figura 2.9 – Pontos P_1 e P_{np} contidos no elemento de concreto.....	38
Figura 2.10 – Segmento que liga P_1 e P_{np} intercepta o elemento	38
Figura 2.11 – Segmento que liga P_1 e P_{np} não intercepta o elemento	39
Figura 2.12 – Adição de ponto intermediário no segmento de armadura.....	39
Figura 3.1 – Modelo elástico	43
Figura 3.2 – Relações constitutivas elásticas do caso uniaxial	44
Figura 3.3 – Modelos plásticos.....	45
Figura 3.4 – Relações constitutivas plásticas do caso uniaxial	45
Figura 3.5 – Modelos elastoplásticos	46
Figura 3.6 – Relações constitutivas elastoplásticas do caso uniaxial.....	46
Figura 3.7 – Algoritmo de solução da rigidez inicial para um caso uniaxial.....	53
Figura 3.8 – Fluxograma das operações básicas para resolução do problema elastoplástico	55
Figura 4.1 – Diagrama carga-deslocamento típico para peças fletidas de concreto armado	56
Figura 4.2 – Diagrama tensão-deformação típico	57
Figura 4.3 – Superfície de ruptura de Ottosen	63
Figura 4.4 – (a) Fissuras discretas; (b) Fissuras distribuídas	64
Figura 4.5 – Comprimento característico em um volume de controle prismático	68
Figura 4.6 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado segundo o modelo de Hinton (1988).....	70
Figura 4.7 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado segundo o modelo de Prates Júnior (1992)	70
Figura 4.8 – Ilustração do critério de ruptura de Mohr-Coulomb	74
Figura 4.9 – Superfícies de ruptura de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager	77
Figura 4.10 – Superfícies de ruptura de Tresca e Von Mises	78
Figura 5.1 – Compressão uniforme.....	81
Figura 5.2 – Flexão simples.	82
Figura 5.3 – Fundação flexível em diferentes solos – Distribuição de tensões..	84
Figura 5.4 – Fundação flexível em diferentes solos – Comparação de tensões normalizadas com aquelas encontradas por Vitoretti (2003), no detalhe..	84
Figura 5.5 – Fundação rígida em diferentes solos – Distribuição de tensões. .	85
Figura 5.6 – Fundação rígida em diferentes solos – Comparação de tensões normalizadas com aquelas encontradas por Vitoretti (2003), no detalhe..	85

Figura 5.7 – Fundação de diferentes alturas (rigidezes) em solo pouco rígido – Distribuição de tensões.	86
Figura 5.8 – Fundação de diferentes alturas (rigidezes) em solo pouco rígido – Comparação de tensões normalizadas com aquelas encontradas por Vitoretta (2003), no detalhe.	87
Figura 5.9 – Fundações de diferentes alturas (rigidezes) em solo rígido – Distribuição de tensões.	88
Figura 5.10 – Fundações de diferentes alturas (rigidezes) em solo rígido – Comparação de tensões normalizadas com aquelas encontradas por Vitoretta (2003), no detalhe.	89
Figura 5.11 – Tensões no concreto e na armadura em elemento de concreto armado submetido à tração e apresentando fissuração.	90
Figura 5.12 – Detalhe das tensões somente no elemento de concreto: visualização dos ramos ascendente e descendente no diagrama tensão- deformação no momento da fissuração no concreto.	90
Figura 5.13 – Malha de elementos finitos tridimensionais utilizada no programa ISE3D, reproduzindo aquela de Cudmani (1994).	92
Figura 5.14 – Deslocamentos verticais (recalques): deformada da malha para o estágio final de carga.	92
Figura 5.15 – Tensões normais verticais para o estágio final de carga.	93
Figura 5.16 – Comparação dos resultados em prova de carga em sapata assente sobre solo residual do programa ISE3D com os resultados obtidos por Cudmani (1994).	93
Figura 6.1 – Geometria e simetria utilizada na simulação de sapata isolada (fora de escala).	96
Figura 6.2 – Vista em planta (XY) da malha utilizada.	97
Figura 6.3 – Vista frontal (XZ) da malha utilizada.	98
Figura 6.4 – Configuração 1 – Distribuição dos deslocamentos verticais.	100
Figura 6.5 – Configuração 1 – Distribuição das tensões normais verticais. ...	102
Figura 6.6 – Configuração 1 – Distribuição das deformações específicas normais verticais.	105
Figura 6.7 – Configuração 1 – Distribuição de tensões na armadura.	107
Figura 6.8 – Configuração 1: Comparação entre as deformações específicas normais verticais, as tensões normais verticais no solo e no concreto e tensões na armadura.	109
Figura 6.9 – Configuração 2 – Distribuição dos deslocamentos verticais.	111
Figura 6.10 – Configuração 2 – Distribuição das tensões normais verticais. .	113
Figura 6.11 – Configuração 2 – Distribuição das deformações específicas normais verticais.	116
Figura 6.12 – Configuração 2 – Distribuição das tensões na armadura.	118
Figura 6.13 – Configuração 2: Comparação entre deformações específicas normais verticais, as tensões normais verticais no solo e no concreto e as tensões na armadura.	120
Figura 6.14 – Configuração 3 – Distribuição dos deslocamentos verticais	122
Figura 6.15 – Configuração 3 – Distribuição de tensões normais verticais	124
Figura 6.16 – Configuração 3 – Distribuição de deformações específicas normais verticais.	126
Figura 6.17 – Configuração 3 – Distribuição de tensões na armadura.	128
Figura 6.18 – Configuração 3 – Comparação entre deformações específicas normais verticais, tensões normais verticais e tensões na armadura	130

Figura 6.19 – Comparação da distribuição dos deslocamentos verticais para as Configurações 1, 2 e 3 com escala unificada.....	132
Figura 6.20 – Comparação da distribuição das tensões normais verticais para as Configurações 1, 2 e 3 com escala unificada	133
Figura 6.21 – Tensões normais verticais no eixo O-A: Carga 1700 kN.....	134
Figura 6.22 – Tensões normais verticais no eixo O-A: Carga 2000 kN.....	135
Figura 6.23 – Tensões normais verticais no eixo O-A: Carga 2300 kN.....	135
Figura 6.24 – Tensões normais verticais no eixo A-B: Carga 1700 kN	136
Figura 6.25 – Tensões normais verticais no eixo A-B: Carga 2000 kN	136
Figura 6.26 – Tensões normais verticais no eixo A-B: Carga 2300 kN	137
Figura 6.27 – Elemento da fundação que apresentou fissuração.	138
Figura 6.28 – Geometria e simetria da simulação de duas sapatas isoladas.	139
Figura 6.29 – Vista em planta (XY) da malha utilizada.....	140
Figura 6.30 – Vista frontal (XZ) da malha utilizada.....	140
Figura 6.31 – Vista lateral (YZ) da malha utilizada.....	141
Figura 6.32 – Distribuição dos deslocamentos verticais.....	144
Figura 6.33 – Distribuição das tensões normais verticais	146
Figura 6.34 – Distribuição das tensões normais verticais com escala modificada.....	149
Figura 6.35 – Distribuição das deformações específicas normais verticais ...	151
Figura 6.36 – Distribuição de tensões na armadura.....	154
Figura 6.37 – Elementos da fundação que apresentaram fissuração.	155
Figura A.1 – Numeração das faces do elemento	166
Figura A.2 – Cargas nodais equivalentes para pressão uniforme.....	167
Figura C.1 – Tensões nodais suavizadas e não-suavizadas	169

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 – Coeficientes para integração dos elementos lineares	26
Tabela 2.2 – Coeficientes para integração completa do elemento quadrático .	27
Tabela 2.3 – Coeficientes para integração reduzida do elemento quadrático ..	27
Tabela 5.1 – Parâmetros utilizados na simulação numérica (Tessari, 1998) ...	91
Tabela 6.1 – Propriedades do concreto e do aço	95
Tabela 6.2 – Parâmetros dos solos utilizados	97

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Nas últimas décadas, com a evolução dos recursos computacionais, o método dos elementos finitos tem tido ampla aplicabilidade em diversos setores da engenharia. Os grupos de pesquisadores que estudam o comportamento de fundações de concreto armado têm procurado se valer dos recursos disponíveis pelo método para aprofundar o conhecimento sobre o desempenho dessas estruturas.

Contudo, trabalhar com solos requer atenção redobrada. Caputo (1988), por exemplo, salienta que a falta de conhecimento sobre o terreno de fundação é um dos maiores riscos de uma construção. Assim, a simulação computacional desse material também deve ser conduzida com especial consideração.

No estudo do comportamento mecânico de fundações de concreto armado, a consideração da interação solo-estrutura é fundamental para que o modelo seja o mais próximo possível da realidade.

Porém, o estudo da interação solo-estrutura em fundações é um tema que necessita ainda de pesquisas mais aprofundadas, pois as soluções analíticas, encontradas na literatura, têm aplicabilidade limitada.

Atualmente, muitos pesquisadores têm investigado a interação solo-estrutura, porém com enfoque na análise dinâmica de estruturas. São os trabalhos que tratam de simulações sobre a contribuição da massa de solo na atenuação da resposta das superestruturas frente à ação de sismos, como por exemplo, Chao e Borja (1995), Borja et al (1999), Celebi e Crouse (2001).

Neste trabalho, entende-se por interação solo-estrutura como o estudo bi ou tridimensional da distribuição das tensões e das deformações específicas na interface entre a fundação de concreto armado e o solo, tais como os

realizados por Vitoretti (2003) e Maharaj (2004), ambos bidimensionais. A figura 1.1, a seguir ilustra algumas situações.

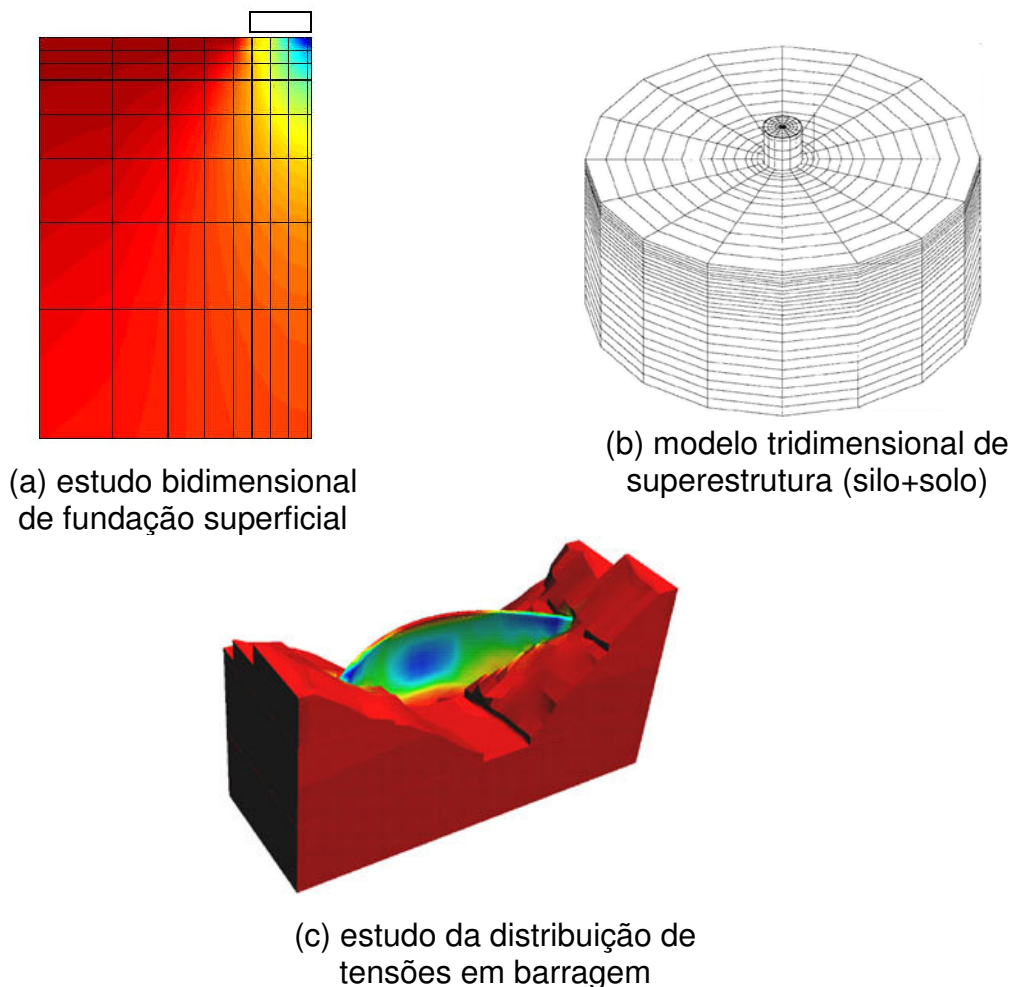


Figura 1.1 – Exemplos de modelos para estudo da interação solo-estrutura

Assim, o presente trabalho trata da consideração da interação solo-estrutura nos modelos de fundações, de forma a introduzir uma nova concepção para o projeto da edificação, onde é fundamental que a análise leve em conta o comportamento conjunto de todas as estruturas envolvidas no processo, inclusive o da massa de solo do entorno.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um programa computacional para realizar a análise elastoplástica tridimensional da interação

solo-estrutura de fundações rasas ou superficiais de concreto armado, através do método dos elementos finitos.

Pretende-se estudar a distribuição das tensões e deformações específicas na interface entre o solo e a estrutura para modelos de fundações rasas ou superficiais submetidos a diferentes tipos de carregamentos. Os resultados gerados pelo modelo computacional são comparados com resultados experimentais disponíveis na literatura.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este texto foi dividido em sete capítulos, incluindo o presente. O capítulo 2 apresenta os modelos em elementos finitos utilizados para modelar o problema, abordando os tipos de elementos adequados para cada material. O capítulo 3 aborda o modelo para a análise de uma estrutura com comportamento elastoplástico. Já no capítulo 4, são apresentados os modelos constitutivos para o concreto, o solo e a armadura. No capítulo 5 são apresentadas aplicações específicas para validar o programa computacional. O capítulo 6 apresenta os resultados da aplicação do programa computacional para a resolução de exemplos mais complexos e gerais. Finalmente, o capítulo 7 traz as conclusões e considerações gerais acerca do trabalho desenvolvido.

Informações adicionais estão nos anexos deste texto. O anexo A, apresenta o arquivo de entrada de dados. O anexo B apresenta em linhas gerais o pós-processamento utilizando o programa GiD. No anexo C, é apresentado o procedimento para a suavização de tensões e deformações nodais.

2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA CONCRETO, SOLO E ARMADURA

O modelo de elementos finitos adotado é baseado em Zienkiewicz (2000) e implementado através da utilização do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) em conjunto com funções de interpolação para elementos isoparamétricos. O PTV é a forma integral da equação de equilíbrio do corpo submetido à ação de forças externas (Equação 2.1).

$$\int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \{\delta u\}^T \cdot \{b\} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_t} \{\delta u\}^T \cdot \{t\} \cdot d\Gamma \quad (2.1)$$

Como funções de interpolação para os elementos finitos isoparamétricos, são utilizadas as mesmas funções de interpolação para definir a geometria do elemento e as incógnitas do problema (Equações 2.2 e 2.3).

$$\{x\} = \{N\} \cdot \{x^e\} \quad (2.2)$$

$$\{u\} = \{N\} \cdot \{u^e\} \quad (2.3)$$

onde $\{x\}$ e $\{u\}$ representam as coordenadas e os deslocamentos de qualquer ponto dentro do elemento; $\{x^e\}$ e $\{u^e\}$ representam as coordenadas e os deslocamentos dos nós dos elementos; e $\{N\}$ representa as funções de interpolação utilizadas. Do emprego conjunto dessas equações, decorre a necessidade de resolver um sistema de equações lineares do tipo:

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} \quad (2.4)$$

onde $[K^e]$ é a matriz de rigidez do elemento e $\{f^e\}$ é o vetor de forças aplicadas no elemento, sendo dados pelas Equações 2.5 e 2.6.

$$[K^e] = \int_{\Omega} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d\Omega \quad (2.5)$$

$$\{f^e\} = \int_{\Omega} \{N\}^T \cdot \{b\} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_t} \{N\}^T \cdot \{t\} \cdot d\Gamma \quad (2.6)$$

2.1 ELEMENTOS FINITOS PARA CONCRETO E SOLO

Os elementos finitos utilizados para realizar a análise tridimensional deste trabalho são os hexaedros da família Serendipity e que possuem três graus de liberdade por nó. A escolha desse tipo de elemento é função da sua praticidade no processo de modelagem de estruturas tridimensionais geometricamente bem comportadas. Nesse sentido, optou-se por modelar três tipos de hexaedros: hexaedro linear; hexaedro linear com funções bolha; e hexaedro quadrático, sendo, cada um, comentado a seguir.

2.1.1 Hexaedro linear

O hexaedro linear possui oito nós de canto (Figura 2.1-a) e usa funções de interpolação linear. Dessa forma, apresenta um campo de deslocamento com variação linear e os campos de tensão e deformação específica constantes. As funções de seus nós (de canto) são dadas na Equação 2.7.

$$N_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \quad (\xi = \pm 1; \eta = \pm 1; \zeta = \pm 1) \quad (2.7)$$

2.1.2 Hexaedro linear com funções bolha

Este elemento é idêntico ao hexaedro linear, pois também possui oito nós de canto. Porém, além das funções de interpolação linear, usa outras três funções de interpolação que representam modos de flexão extras, denominadas funções bolha. Essas funções não estão relacionadas aos nós do elemento, e sim ao seu sistema de coordenadas local. Para as funções dos nós de canto, tem-se a Equação 2.8-a.

$$N_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \quad (\xi = \pm 1; \eta = \pm 1; \zeta = \pm 1) \quad (2.8-a)$$

e para as funções bolha, as expressões da Equação 2.8-b.

$$\begin{aligned} N_i &= (1 - \xi^2) \\ N_i &= (1 - \eta^2) \\ N_i &= (1 - \zeta^2) \end{aligned} \quad (2.8-b)$$

2.1.3 Hexaedro quadrático

Este elemento possui vinte nós ao todo, sendo oito nós de canto e doze nós intermediários (Figura 2.1-b) e utiliza funções de interpolação quadrática. Dessa forma, apresenta um campo de deslocamento com variação quadrática e os campos de tensão e deformação com variação linear. Para as funções dos nós de canto, têm-se as expressões da Equação 2.9.

$$N_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + \zeta) \cdot (\xi + \eta + \zeta - 2) \quad (\xi = \pm 1; \eta = \pm 1; \zeta = \pm 1) \quad (2.9)$$

enquanto que as funções dos nós intermediários são dados pelas Equações 2.10, 2.11 e 2.12.

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + \zeta) \quad (\xi = 0; \eta = \pm 1; \zeta = \pm 1) \quad (2.10)$$

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1 - \eta^2) \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \zeta) \quad (\xi = \pm 1; \eta = 0; \zeta = \pm 1) \quad (2.11)$$

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1 - \zeta^2) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + \xi) \quad (\xi = \pm 1; \eta = \pm 1; \zeta = 0) \quad (2.12)$$

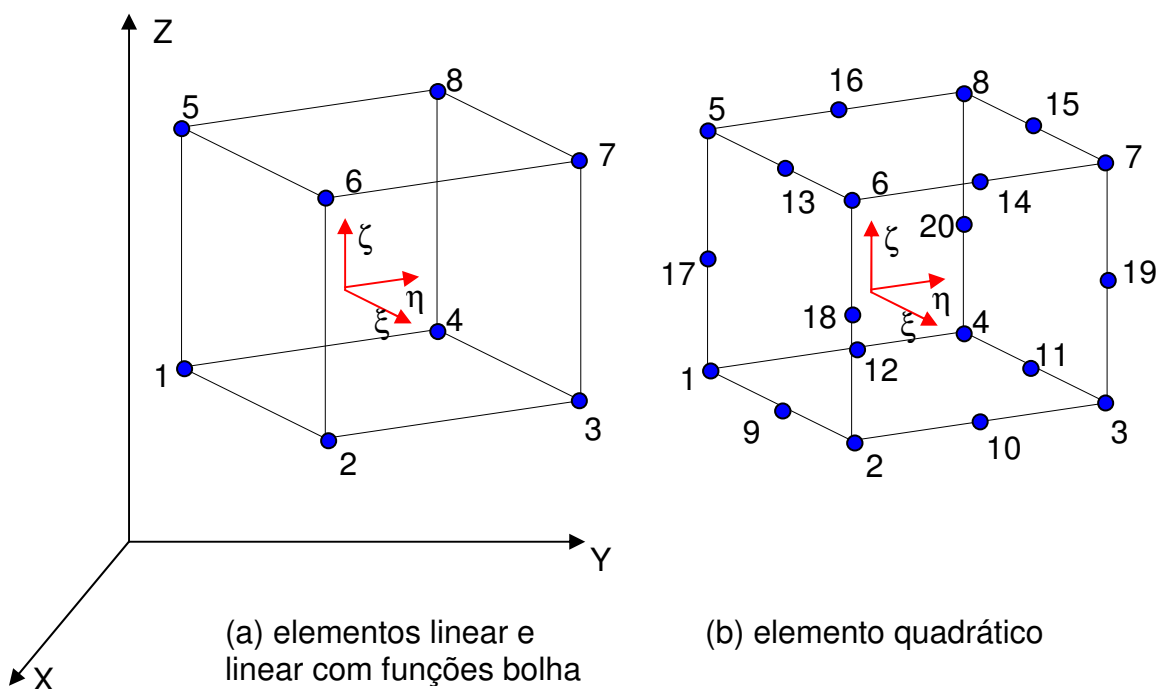


Figura 2.1 – Tipos de elementos finitos para concreto e solo

2.1.4 Integração numérica

O processo de integração utilizado é a integração numérica com polinômio de Gauss-Legendre. Basicamente, para realizar a integração sobre o volume do hexaedro, deve-se utilizar a expressão da Equação 2.13.

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n C_i C_j C_l f(a_i, a_j, a_l) = \sum_{q=1}^{n^3} k_q f(a_i, a_j, a_l) \quad (2.13)$$

onde q é o ponto de integração com coordenadas $\xi = a_i$, $\eta = a_j$, $\zeta = a_l$ e cujo peso é dado por $k_q = C_i C_j C_l$.

Neste trabalho, em função da utilização de elementos finitos lineares e quadráticos, utilizou-se a integração numérica adequada para cada tipo de elemento, ou seja, para os elementos linear e linear com funções bolha foi utilizada apenas a integração completa (2x2x2), que resulta em oito pontos de integração, conforme é apresentado na Figura 2.2-a. Para o elemento quadrático, além da integração completa (3x3x3), que resulta em vinte e sete pontos, há a possibilidade de se utilizar o processo de integração reduzida sugerido por Hinton (1988), que resulta em quinze pontos de integração. É interessante a disponibilidade desta opção de forma que se possa, eventualmente, otimizar o tempo de processamento, com perda mínima, ou mesmo sem perda, na qualidade dos resultados.

As figuras 2.2-b e 2.2-c apresentam as distribuições dos pontos para o elemento quadrático.

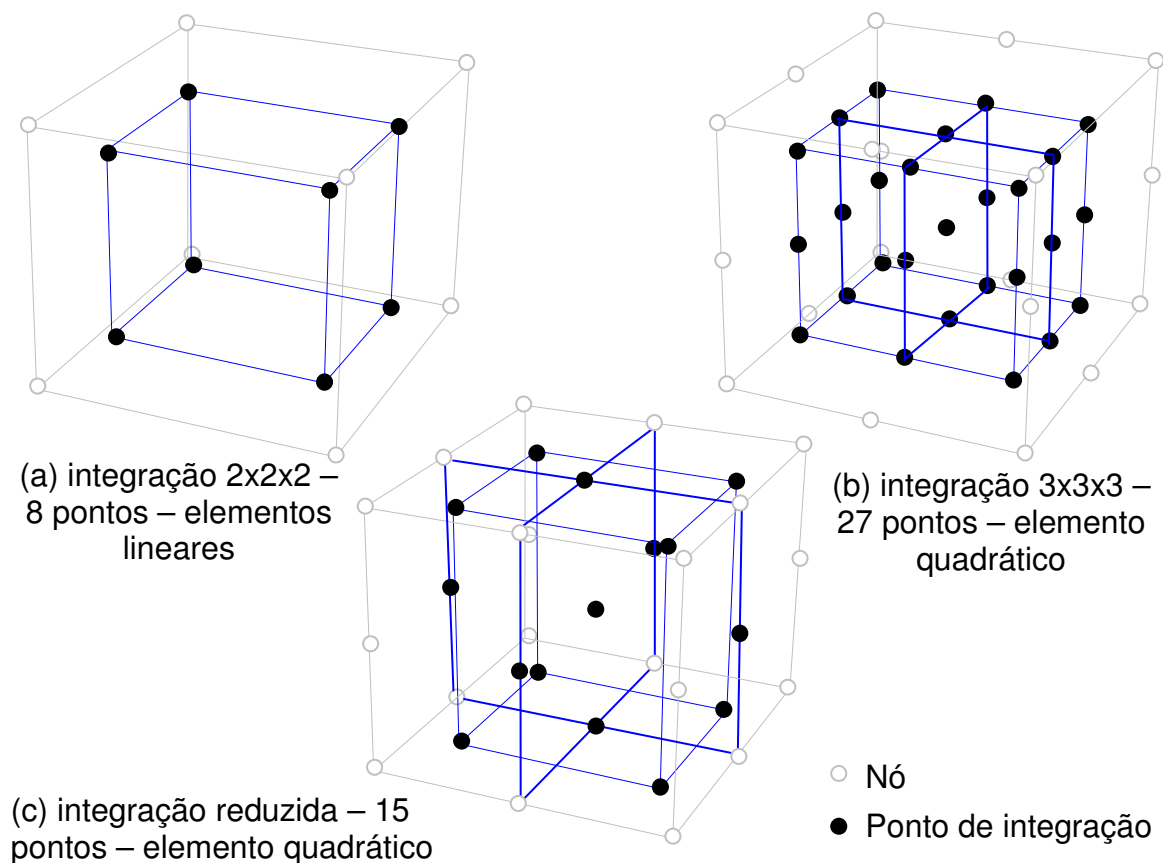


Figura 2.2 – Pontos de integração para cada tipo de elemento

Os coeficientes aplicáveis à integração completa dos elementos lineares são apresentados na Tabela 2.1, a seguir.

Tabela 2.1 – Coeficientes para integração dos elementos lineares

<i>a (coordenada do ponto)</i>	<i>C (peso)</i>
+0.57735027	1.00000000
-0.57735027	1.00000000

Tal como os elementos lineares, os coeficientes aplicáveis à integração completa do elemento quadrático são apresentados na tabela 2.2, a seguir.

Tabela 2.2 – Coeficientes para integração completa do elemento quadrático

a (coordenada do ponto)	C (peso)
+0.77459667	0.55555556
0.00000000	0.88888889
-0.77459667	0.55555556

Já para a integração reduzida do elemento quadrático é necessário que se efetue uma pequena modificação na Equação 2.13, resultando na Equação 2.14.

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi(\xi, \eta, \zeta) = A.\phi(0,0,0) + B.[\phi(-b,0,0), \phi(b,0,0), \phi(0,-b,0), \dots] + C[\phi(-c,-c,-c), \phi(c,-c,-c), \dots] \quad (2.14)$$

onde os coeficientes aplicáveis são apresentados na tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Coeficientes para integração reduzida do elemento quadrático

A	B	C	b	c
1.56444444	0.35555556	0.53777778	1.00000000	0.67410000

2.2 ELEMENTOS FINITOS PARA ARMADURA

No presente trabalho é utilizado um modelo de elementos finitos para armadura denominado modelo incorporado. Esse modelo, apresentado inicialmente por Elwi e Hrudey (1989), apresenta geometria consistente com a geometria do elemento de concreto, resultando em um único campo de deslocamentos no domínio do elemento, pois os segmentos das barras de armadura estão referenciados aos nós dos elementos de concreto, implicando em aderência perfeita entre o concreto e a armadura.

No âmbito do PPGEC\UFRGS, vários trabalhos têm utilizado esse modelo com sucesso, destacando Prates Júnior (1992), Claire (1994) e Martinelli (2003), além do já citado trabalho de Vitoretti (2003).

Nessa forma incorporada, considera-se a barra de armadura como uma linha de material mais rígido no interior do elemento de concreto. Assim, a armadura não necessita estar uniformemente distribuída, podendo ocorrer várias barras de aço no interior de um mesmo elemento de concreto, tal como apresentado na Figura 2.3. Nessa figura, observa-se a malha formada pelos elementos e a indicação dos seus nós de canto.

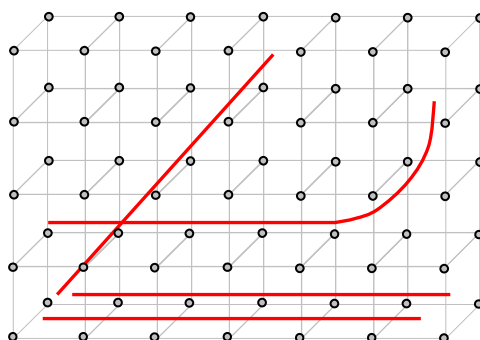


Figura 2.3 – Modelo incorporado de armadura

Portanto, a matriz de rigidez da armadura tem dimensão idêntica à da matriz de rigidez do elemento de concreto e a matriz de rigidez total resulta da superposição termo a termo das duas matrizes. A expressão final da matriz de rigidez do elemento é dada pela Equação 2.15.

$$[K^e] = [K_c] + \sum_{i=1}^{nb} [K_s] \quad (2.15)$$

onde nb denota o número de segmentos de barra de armadura no interior do elemento de concreto. A matriz de rigidez de cada barra de armadura é dada pela Equação 2.16.

$$[K_s] = A_s E_s \int_s \{B_s\}^T \langle B_s \rangle ds \quad (2.16)$$

onde E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço; A_s é a área da seção transversal da barra de armadura; e $\{B_s\}$ é o vetor das relações deformações-deslocamento para a armadura.

As barras de armadura são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos, permitindo a modelagem de barras retas e

curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que para as barras curvas são necessários três pontos para a sua definição.

É importante ressaltar que as barras curvas incorporadas em elementos finitos lineares de concreto aparecem como uma sucessão de segmentos retos, pois os segmentos de armadura em elementos lineares de concreto somente podem ser definidos por dois pontos apenas. A Figura 2.4 ilustra os nós criados nas barras de armadura para delimitar os segmentos.

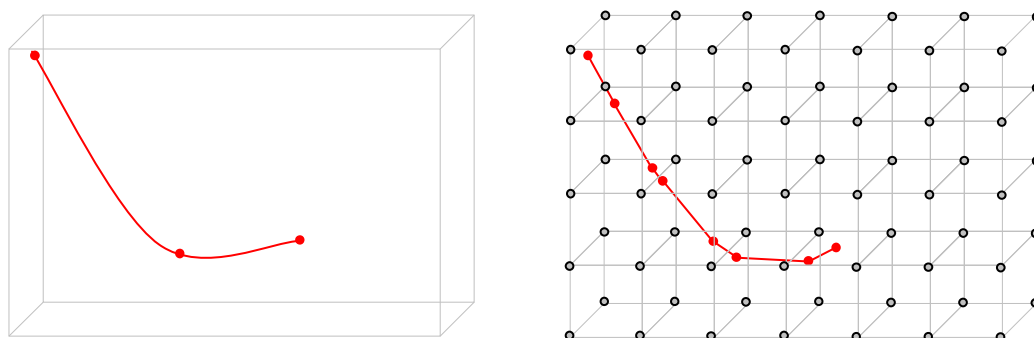


Figura 2.4 – Barra curva em elementos lineares de concreto

2.2.1 Formulação geométrica

Neste item é apresentada a formulação para incorporar barras de aço ao elemento tridimensional de concreto. As barras de armadura são posicionadas em coordenadas globais cartesianas, independentemente da malha de elementos finitos. Durante o processo de determinação da matriz de rigidez da armadura é necessário utilizar coordenadas naturais locais, como será visto mais adiante.

O elemento de concreto, mostrado na Figura 2.5, é descrito usando coordenadas globais (x,y,z) . As coordenadas naturais do elemento são ξ , η , e ζ . A geometria no interior e bordos dos elementos de concreto é representada em função dos valores nodais das coordenadas, empregando as mesmas funções de interpolação para as variáveis incógnitas, ou seja:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i y_i$$

$$z = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i z_i \quad (2.17)$$

Os correspondentes diferenciais são dados pela Equação 2.18.

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

onde

$$[\mathbf{J}] = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \eta}, \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \zeta} \right\rangle \quad (2.19)$$

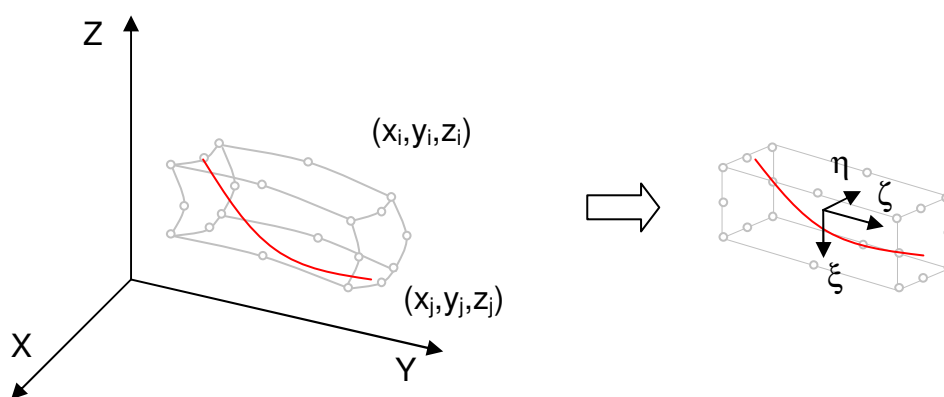


Figura 2.5 – Coordenadas naturais da barra de armadura

Uma importante vantagem desta formulação é que a malha global de elementos finitos pode ser gerada sem considerar previamente a localização e a geometria da barra de armadura. Uma vez estabelecida a malha de elementos de concreto, a armadura deve ser especificada por um conjunto de pontos nodais. As coordenadas dos nós da barra de aço, entre os nós de definição dentro do elemento de concreto, são obtidas por interpolação. Sendo $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ e $\{z_j\}$ os vetores que contém as coordenadas globais dos nós da barra, associados com um único elemento, as coordenadas de qualquer outro ponto na barra são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} H_j & 0 & 0 \\ 0 & H_j & 0 \\ 0 & 0 & H_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

As funções de interpolação unidimensionais $H(\chi)$ são expressas em termos de uma coordenada normalizada independente χ . O grau destas funções, e desse modo o número de pontos nodais, depende da complexidade da geometria do elemento de armadura bem como da compatibilidade requerida com o elemento de concreto.

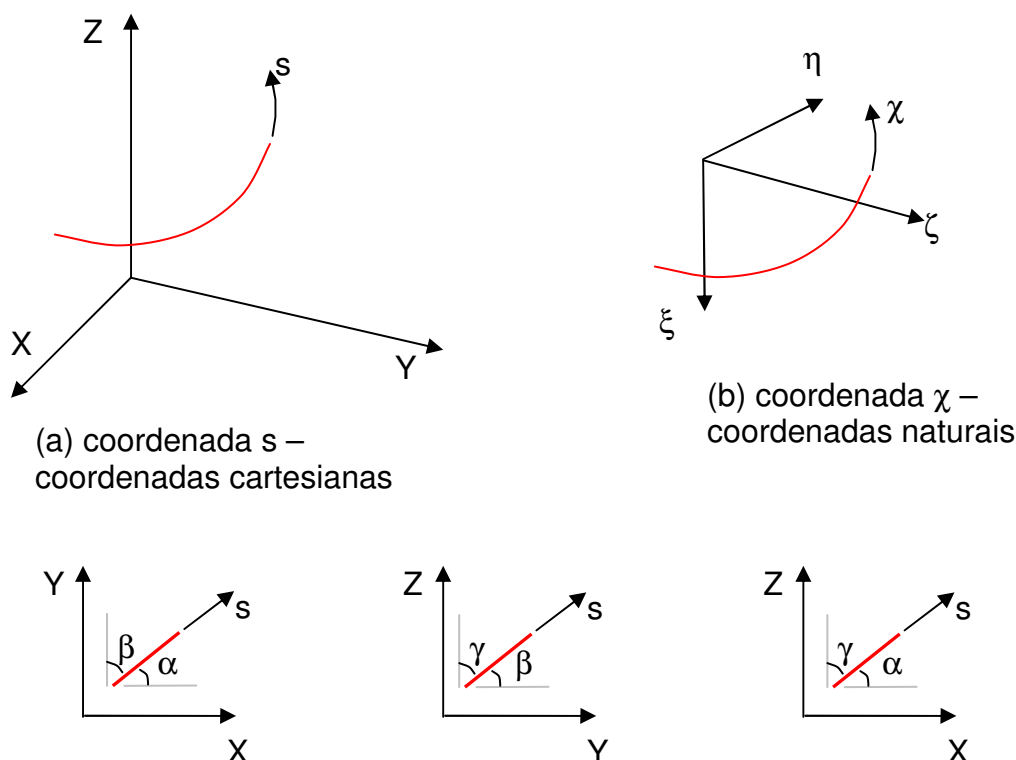


Figura 2.6 – Coordenada ao longo do eixo da armadura

Para determinar a rigidez associada com armadura, é necessário fazer integrações ao longo da mesma. Para isto, precisa-se de um elemento diferencial de comprimento ds , ao longo da armadura, que pode ser obtido de (2.20). Conforme a Figura 2.6, a orientação da tangente à barra é dada pelos ângulos α , β e γ , especificados na Equação 2.21.

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}$$

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} \\ \cos \gamma &= \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}\end{aligned}\tag{2.21}$$

onde:

$$\frac{ds}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\chi}\right)^2}\tag{2.22}$$

e também:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{d\chi} \\ \frac{dy}{d\chi} \\ \frac{dz}{d\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{Bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix}\tag{2.23}$$

Assim, resulta que:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{dx}{ds} \\ \cos \beta &= \frac{dy}{ds} \\ \cos \gamma &= \frac{dz}{ds}\end{aligned}$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{dz}{ds}}{\frac{d\chi}{ds}} \quad (2.24)$$

Dessa forma, os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, bem como o fator de mapeamento $ds/d\chi$, podem ser facilmente calculados.

Um elemento diferencial de volume dV_s para uma barra de aço, pode ser expresso em termos de ds e da área da seção transversal da barra da seguinte forma:

$$dV_s = A_s ds \quad (2.25)$$

Usando-se o fator de mapeamento descrito na Equação 2.22, as integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura podem ser escritas em termos da coordenada normalizada χ como:

$$\int_{V_s} C \cdot dV_s = \int_{\chi} C \cdot A_s \frac{ds}{d\chi} d\chi \quad (2.26)$$

na qual C é uma função de posição ao longo da barra de armadura.

2.2.2 Segmentos de armadura no interior dos elementos de concreto

As barras de armadura são posicionadas pelas coordenadas globais (x,y,z) de seus pontos de extremidade. Para a obtenção da matriz de rigidez total (concreto-aço) de um determinado elemento, precisa-se saber quais barras interceptam este elemento, atribuindo-lhe uma rigidez adicional. De forma análoga, as forças internas associadas com a armadura são integradas e adicionadas àquelas do elemento de concreto para obter o vetor total de forças internas do elemento.

O programa computacional implementado nesse trabalho calcula de forma automática os segmentos destas barras que ficam situados no interior do elemento de concreto.

Como primeira etapa, deve-se proceder a transformação de coordenadas cartesianas globais $P_j(x,y,z)$, dos pontos que definem as extremidades da barra, para as respectivas coordenadas naturais locais $P_j(\xi,\eta,\zeta)$. A relação entre estas coordenadas para elementos isoparamétricos é dada pela Equação 2.27.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i(\xi,\eta,\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_i(\xi,\eta,\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_i(\xi,\eta,\zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

onde x , y , e z são as coordenadas globais de um ponto qualquer; x_i , y_i , e z_i são as coordenadas globais dos nós do elemento de concreto; e $\mathbf{N}_i(\xi,\eta,\zeta)$ são suas funções de forma.

A forma explícita para a relação inversa àquela mostrada na Equação 2.27, em geral, não é facilmente encontrada. Entretanto, o mapeamento inverso pode ser feito numericamente através do algoritmo de Newton-Raphson, como sugerem Elwi e Hrudey (1989). Dessa forma, a determinação aproximada das coordenadas ξ , η , e ζ está baseada no fato de que essas coordenadas são as raízes do seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\{f(\xi,\eta,\zeta)\} = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.28)$$

Usando o método de Newton-Raphson, tem-se, após $k+1$ iterações,

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}_p^k + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} \quad (2.29)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = [\mathbf{J}^k]^{-1} \left[\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \right] \quad (2.30)$$

com $[J]=[J(\xi,\eta,\zeta)]$ sendo a matriz Jacobiana e $\{N_i\}=\{N_i(\xi,\eta,\zeta)\}$, as funções de forma do elemento de concreto na iteração k .

Determinadas as coordenadas naturais dos pontos de definição da geometria da barra, referenciadas ao sistema natural do elemento de concreto em análise, parte-se para uma segunda etapa de definição da curva que passa por esses pontos, como ilustrado na Figura 2.7.

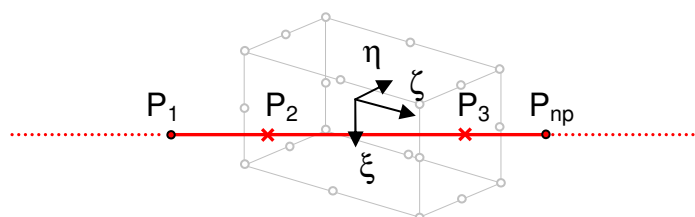


Figura 2.7 – Curva que passa pelos pontos de definição da barra de armadura

Essa etapa consiste, mais especificamente, em se determinar as coordenadas naturais da interseção do plano que contém a face do elemento de concreto com a barra de armadura. Os lados do elemento de concreto são definidos fixando-se uma das coordenadas naturais como -1 ou +1. Portanto, cada lado é definido por uma coordenada natural fixa, enquanto as outras podem assumir valores entre -1 e +1.

Segundo Zienkiewicz, quando a coordenada ξ é conhecida, calculam-se η e ζ pelas expressões:

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_{i=1}^{np} f_i(\xi) \eta_i \\ \zeta &= \sum_{i=1}^{np} f_i(\xi) \zeta_i\end{aligned}\quad (2.31)$$

De forma análoga, quando a coordenada η é conhecida, calculam-se ξ e ζ pelas expressões:

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_{i=1}^{np} g_i(\eta) \xi_i \\ \zeta &= \sum_{i=1}^{np} g_i(\eta) \zeta_i\end{aligned}\quad (2.32)$$

Por último, quando a coordenada ζ é conhecida, calculam-se ξ e η pelas expressões:

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_{i=1}^{np} h_i(\zeta) \xi_i \\ \eta &= \sum_{i=1}^{np} h_i(\zeta) \eta_i\end{aligned}\quad (2.33)$$

onde np é o número de pontos que definem a barra de armadura.

As funções f_i , g_i e h_i que aparecem nas equações anteriores são calculadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}f_i(\xi) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{np} \frac{(\xi - \xi_i)}{(\xi_i - \xi_j)} \\ g_i(\eta) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{np} \frac{(\eta - \eta_i)}{(\eta_i - \eta_j)} \\ h_i(\zeta) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{np} \frac{(\zeta - \zeta_i)}{(\zeta_i - \zeta_j)}\end{aligned}\quad (2.34)$$

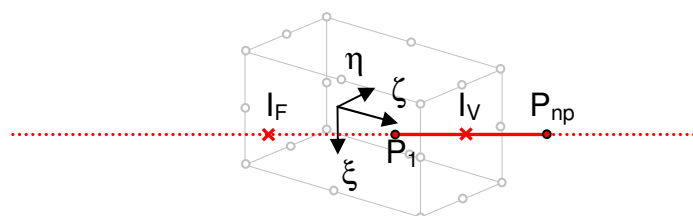
A terceira etapa consiste em verificar se existe interseção da curva $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{np}$, com cada uma das seis faces que definem o elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada $\xi = \pm 1$ do elemento de concreto e calculam-se as coordenadas η e ζ da interseção face do concreto com a curva da barra. Caso $-1 \leq \eta \leq 1$ e $-1 \leq \zeta \leq 1$ implica dizer que a barra intercepta esta face do elemento. Define-se, então, um elemento unidimensional representativo da parte de armadura situada no interior desse elemento de concreto. Repete-se o procedimento de maneira análoga, fixando-se a

coordenada $\eta = \pm 1$ ou $\zeta = \pm 1$ e verificando-se os limites das coordenadas que variam na face em análise do elemento de concreto.

Neste estágio do programa, considera-se a possibilidade de existir um único ponto de interseção com o elemento de concreto. Essa situação corresponde ao caso em que a barra intercepta somente um vértice do elemento. Neste caso, o programa considera que a barra não intercepta o elemento de concreto.

A quarta etapa consiste na verificação do trecho de armadura efetivamente contido no elemento de concreto. Destacam-se os seguintes casos possíveis:

- a) um dos nós, que definem as extremidades do elemento de armadura, encontra-se localizado dentro do elemento de concreto. Isto se evidencia quando as coordenadas naturais de P_1 ou P_{np} , em módulo, são menores que 1. Nesse caso, o programa se encarrega de distinguir a interseção verdadeira da falsa e assim obter, de forma correta, o comprimento real do segmento de armadura contido no interior do elemento de concreto. A Figura 2.8 ilustra essa situação.



I_V : interseção verdadeira
 I_F : interseção falsa

Figura 2.8 – Ponto P_1 dentro do elemento e P_{np} fora do elemento de concreto

- b) os dois nós que definem a geometria da barra encontram-se localizados no interior do elemento de concreto. Nesse caso, o programa toma para as coordenadas naturais dos pontos de interseção as mesmas coordenadas naturais dos pontos P_1 e P_{np} já obtidas anteriormente. A Figura 2.9 ilustra essa situação.

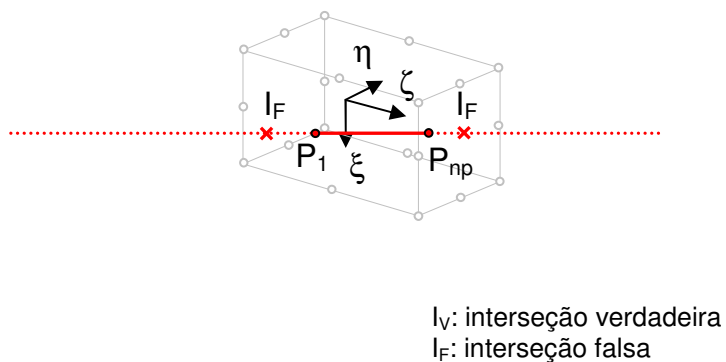


Figura 2.9 – Pontos P_1 e P_{np} contidos no elemento de concreto

c) nenhum dos nós de definição da barra está situado dentro do elemento de concreto. Nesse caso cabe salientar duas possibilidades: a primeira, quando o segmento que liga os dois pontos P_1 e P_{np} intercepta o elemento (Figura 2.10); e a segunda, em caso contrário (Figura 2.11).

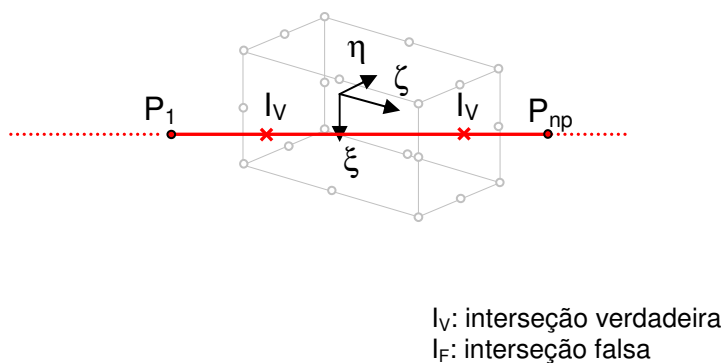


Figura 2.10 – Segmento que liga P_1 e P_{np} intercepta o elemento

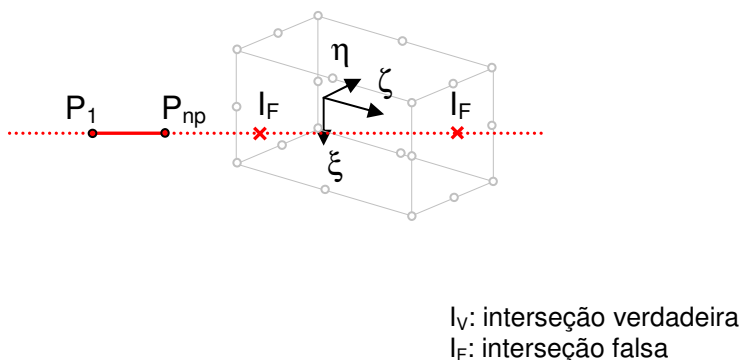


Figura 2.11 – Segmento que liga P_1 e P_{np} não intercepta o elemento

A quinta etapa consiste na criação, se necessário, de um nó intermediário no segmento de armadura contido no interior do elemento de concreto e posterior determinação das coordenadas globais e naturais dos nós extremos do segmento, bem como do nó intermediário. Quando o elemento isoparamétrico em análise for o linear, não se processa a geração do nó intermediário. A Figura 2.12 ilustra essa operação.

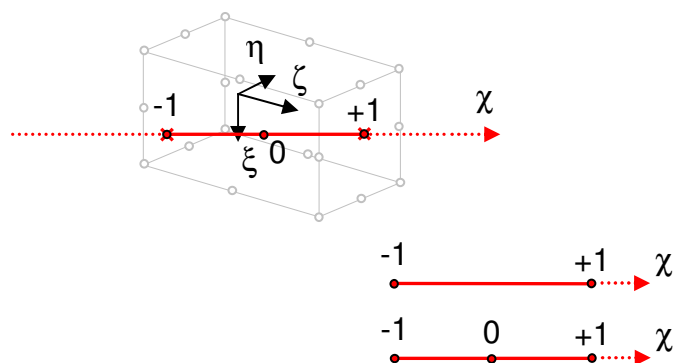


Figura 2.12 – Adição de ponto intermediário no segmento de armadura

A sexta e última etapa desse item consiste em verificar se a barra se encontra disposta ao longo de uma face ou ao longo de uma aresta, num determinado elemento. Desse modo, é possível prever se a rigidez associada com a armadura será distribuída a dois ou a quatro elementos de concreto.

2.2.3 Funções de forma

As funções de interpolação para o elemento de armadura são polinômios de Lagrange, conforme proposto por Zienkiewicz (2000), e são geradas pela expressão:

$$H_k^m(\chi) = \frac{(\chi - \chi_1) \dots (\chi - \chi_{k-1}) (\chi - \chi_{k+1}) \dots (\chi - \chi_m)}{(\chi_k - \chi_1) \dots (\chi_k - \chi_{k-1}) (\chi_k - \chi_{k+1}) \dots (\chi_k - \chi_m)} \quad (2.35)$$

Essa função é um polinômio de grau $m=n-1$ em χ . Nota-se que a Equação 2.35 possui valor unitário quando χ é igual a χ_k , e possui valor igual a zero quando χ é igual a $\chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \chi_{k+1}, \dots, \chi_m$, onde n é o número de nós do elemento.

Assim, para um elemento de armadura formado por dois nós, resulta:

$$H_1(\chi) = \frac{1 - \chi}{2} \quad (2.36)$$

$$H_2(\chi) = \frac{1 + \chi}{2} \quad (2.37)$$

Um segmento de armadura formado por um elemento de dois nós é utilizado conjuntamente com elementos finitos lineares de concreto.

Para um elemento de armadura formado por três nós, resulta:

$$H_1(\chi) = \frac{\chi^2 - \chi}{2} \quad (2.38)$$

$$H_2(\chi) = 1 - \chi^2 \quad (2.39)$$

$$H_3(\chi) = \frac{\chi^2 + \chi}{2} \quad (2.40)$$

Um segmento de armadura formado por um elemento de três nós é utilizado conjuntamente com elementos finitos quadráticos de concreto.

2.2.4 Matriz de rigidez para a armadura

O campo de deformações específicas, dentro de um elemento de armadura, pode ser definido de diversas maneiras. Segundo Elwi e Hruday (1989), a deformação específica ao longo da barra de aço é igual à deformação específica normal, no elemento de concreto, na direção tangente à barra. Sendo assim, considerando aderência perfeita entre o concreto e o aço, a expressão para a deformação específica, em uma forma incremental, conforme proposto por Elwi e Hruday, fica:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_s = \Delta \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \Delta \varepsilon_y \cos^2 \beta + \Delta \varepsilon_z \cos^2 \gamma + \Delta \gamma_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \\ + \Delta \gamma_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + \Delta \gamma_{yz} \cos \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.41)$$

Os incrementos de deformação específica $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_y$, $\Delta \varepsilon_z$, $\Delta \gamma_{xy}$, $\Delta \gamma_{xz}$, $\Delta \gamma_{yz}$ são obtidos diretamente do campo de incremento de deslocamentos do elemento de concreto. Da equação anterior segue que o incremento de deformação específica na armadura pode ser expressa como:

$$\Delta \varepsilon_s = \langle \mathbf{B}_s \rangle \{ \Delta \mathbf{u} \} \quad (2.42)$$

onde $\{ \Delta \mathbf{u} \}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto e

$$\mathbf{B}_s = \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \cos \alpha \cos \beta \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} + \cos \alpha \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \\ \cos^2 \beta \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} + \cos \alpha \cos \beta \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \cos \beta \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \\ \cos^2 \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} + \cos \alpha \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \cos \beta \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

é o vetor deformações-deslocamento para a armadura. As derivadas das funções de forma em relação às coordenadas cartesianas x, y e z são dadas por:

$$\delta \Delta W = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta \sigma_s) \delta \Delta \varepsilon_s dV \quad (2.44)$$

na qual σ_s é a tensão normal na armadura e V_s o seu volume.

A forma incremental da relação constitutiva para a armadura pode ser escrita como segue:

$$\Delta \sigma_s = E_s \Delta \varepsilon_s \quad (2.45)$$

Assim:

$$\delta\Delta W = \int_S (\delta\Delta\varepsilon_s E_s \Delta\varepsilon_s A_s) dS + \int_S (\delta\Delta\varepsilon_s \sigma_s A_s) dS \quad (2.46)$$

ou

$$\delta\Delta W = \langle \delta\Delta u \rangle [K_s] \{\Delta_s\} + \{Q_s\} \langle \delta\Delta u \rangle \quad (2.47)$$

onde

$$\{Q_s\} = \int_{\chi} \{B_s\} \sigma_s \frac{dS}{d\chi} A_s d\chi \quad (2.48)$$

é o vetor de forças nodais equivalentes e

$$[K_s] = \int_{\chi} \{B_s\} E_s \langle B_s \rangle \frac{dS}{d\chi} A_s d\chi \quad (2.49)$$

é a matriz de rigidez para a armadura.

A integração da equação anterior é realizada numericamente, de forma semelhante à utilizada nos elementos de concreto. A diferença agora, é que a integração é feita apenas em uma direção, usando as mesmas coordenadas e fatores de peso aplicados anteriormente.

3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESTRUTURA COM COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO

3.1 MODELOS REOLÓGICOS

Para efetuar a análise do comportamento de uma estrutura, é essencial o conhecimento das equações constitutivas dos materiais que a compõem. Através da Reologia, ciência que estuda o comportamento dos materiais por meio das suas equações constitutivas, é possível relacionar as tensões, as deformações e o tempo.

Assim, o comportamento dos materiais reais pode ser descrito com maior ou menor precisão pela combinação dos três tipos básicos de comportamento reológico: elástico, plástico ou viscoso. Contudo, é conveniente procurar associar a esses materiais vários modelos reológicos, de modo que cada um deles possa descrever satisfatoriamente o comportamento do material em determinadas circunstâncias.

No presente capítulo, apresentam-se apenas dois dos modelos básicos: o elástico e o plástico, não estando no âmbito deste trabalho o modelo viscoso. Além desses, apresenta-se a combinação entre ambos que resulta em um modelo conjugado para representar o comportamento de um material elastoplástico.

3.1.1 Modelo elástico

Para um caso de estado uniaxial de tensões, o comportamento elástico pode ser representado por uma mola, conforme ilustrado na Figura 3.1.



Figura 3.1 – Modelo elástico

Um material elástico linear segue a lei de Hooke:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (3.1)$$

onde σ é a tensão, E é o módulo de elasticidade longitudinal e ε é a deformação específica longitudinal.

O diagrama tensão-deformação de um material elástico se caracteriza por deformações imediatas, isto é, por deformações que não variam com o tempo quando a tensão permanecer constante, e também por uma curva de descarga que coincide com a curva de carga. Conforme a Figura 3.2, na elasticidade linear existe proporcionalidade entre tensões e deformações específicas. Na elasticidade não-linear, não existe esta proporcionalidade, porém existe uma função que dá univocamente o valor da tensão para cada valor de deformação específica.

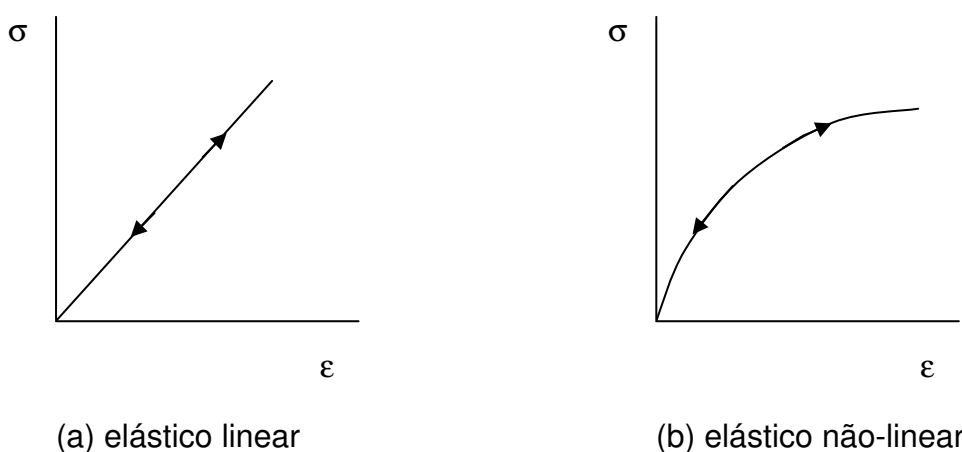


Figura 3.2 – Relações constitutivas elásticas do caso uniaxial

3.1.2 Modelo plástico

Este modelo apresenta a propriedade da plasticidade, que é a capacidade de um material apresentar deformações imediatas e não-reversíveis. Ou seja, as deformações não desaparecem ao serem removidas as forças que lhe deram origem.

Esse comportamento pode ser representado por um bloco sobre uma superfície com atrito, conforme a Figura 3.3.

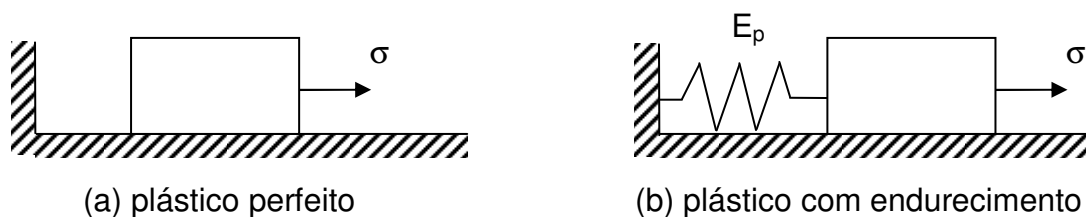


Figura 3.3 – Modelos plásticos

O limite entre os domínios elástico e plástico para o caso uniaxial é caracterizado pela tensão σ_y (tensão de escoamento ou tensão de plastificação), a partir da qual começam a aparecer as deformações plásticas ou permanentes. Conforme a Figura 3.4, é possível observar que um corpo rígido-plástico não se deforma para tensões menores que a tensão de plastificação. Além disso, a descarga ocorre sem reversibilidade das deformações.

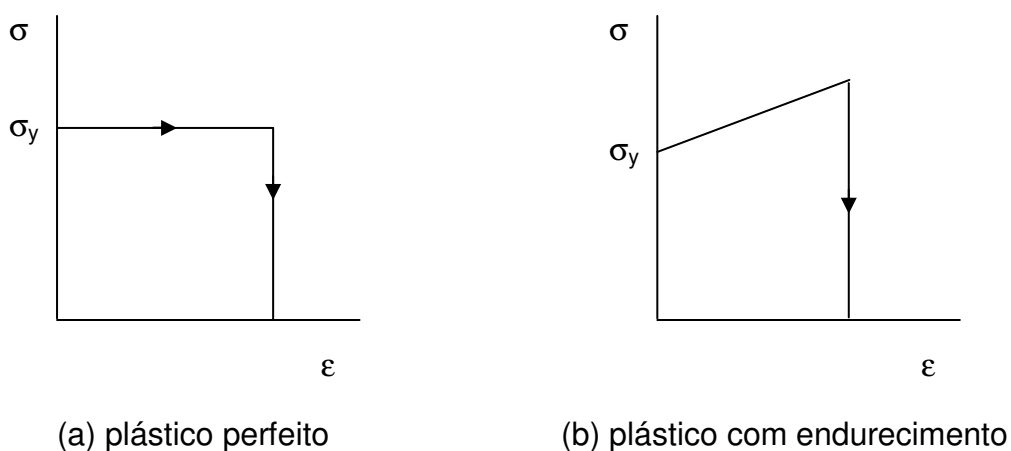


Figura 3.4 – Relações constitutivas plásticas do caso uniaxial

3.1.3 Modelo elastoplástico

Pela combinação dos modelos elástico e plástico, obtém-se o modelo elastoplástico, que é representado na Figura 3.5.

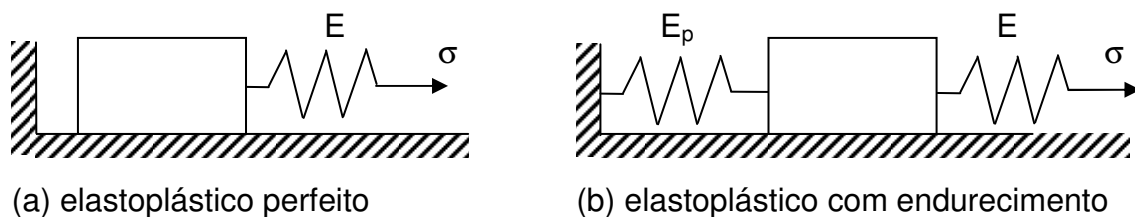


Figura 3.5 – Modelos elastoplásticos

Esse modelo apresenta um comportamento elástico para tensões menores que a tensão de escoamento e um comportamento plástico após atingida essa tensão, tal como é apresentado nos diagramas do caso uniaxial na Figura 3.6.

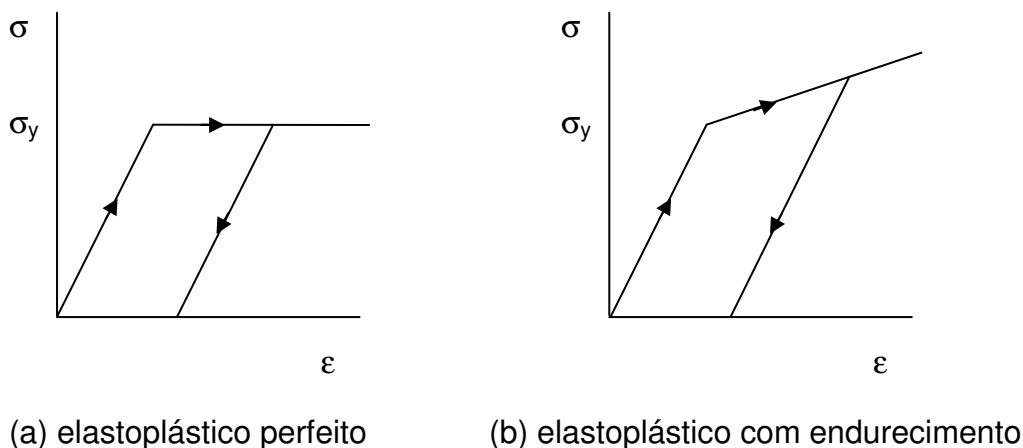


Figura 3.6 – Relações constitutivas elastoplásticas do caso uniaxial

3.2 EXPRESSÕES PARA O COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO

Neste item, é apresentada a formulação básica para a análise tridimensional não-linear, através do método dos elementos finitos, de um material isotrópico homogêneo de comportamento elastoplástico, de acordo com o modelo reológico das Figuras 3.5 e 3.6.

Conforme Creus (1983), para caracterizar o comportamento elastoplástico de um estado de tensão multiaxial é necessário que as relações constitutivas tenham três componentes principais:

- a) uma relação constitutiva válida no domínio elástico;
- b) um critério de escoamento que permita distinguir o domínio elástico do domínio plástico;
- c) uma relação constitutiva válida no domínio plástico.

3.2.1 Relação constitutiva no domínio elástico

A expressão que caracteriza a relação constitutiva no domínio elástico de um material isotrópico e homogêneo é dada por:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.2)$$

onde $\{\sigma\}$ é o vetor de tensão, $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_e\}$ é o vetor de deformação específica, e $[D]$ é a matriz das constantes elásticas para um material isotrópico e homogêneo, possuindo a seguinte forma:

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.4)$$

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = G \quad (3.5)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson do material.

3.2.2 Critério de escoamento

A existência de uma superfície de escoamento é uma hipótese básica da teoria da plasticidade. As deformações plásticas, geralmente, produzem endurecimento e, conseqüentemente, mudanças no domínio elástico. Assim, existirão diferentes superfícies de escoamento conforme o estado do material. Essas superfícies poderão ser descritas mediante o emprego de um critério de escoamento.

O critério de escoamento define o limite entre os domínios elástico e plástico de um material submetido a um estado de tensão $\{\sigma\}$, ou seja, define o limite da superfície de escoamento para um determinado estado de tensão. Esse critério pode ser expresso por:

$$f(\{\sigma\}) = k(\kappa) \quad (3.6)$$

onde k é um parâmetro do material a ser determinado experimentalmente e que pode ser uma função do parâmetro κ de endurecimento.

Para materiais isotrópicos, a orientação das tensões principais é independente do material, e os valores das três tensões principais são suficientes para descrever o estados de tensão completamente. Assim, o critério pode ser expresso por:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k(\kappa) \quad (3.7)$$

Para que o critério de escoamento seja independente do sistema de coordenadas, as tensões principais podem ser expressas em termos das combinações dos três invariantes I_1 , J_2 e J_3 , onde I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensões σ_{ij} e J_2 e J_3 são o segundo e o terceiro invariantes do tensor de tensões desviadoras, s_{ij} . Dessa maneira, substitui-se o critério anterior por:

$$f(I_1, J_2, J_3) = k(\kappa) \quad (3.8)$$

É possível relacionar esses três invariantes principais com as coordenadas de Haigh-Westergaard ε , ρ , θ no espaço das tensões, resultando em:

$$f(\varepsilon, \rho, \theta) = k(\kappa) \quad (3.9)$$

A partir desse ponto é necessário saber se o material é dependente ou independente da pressão hidrostática. Estudos experimentais realizados por Bridgman, conforme Chen (1988), indicam que o escoamento nos materiais dúteis, como os metais, independe da pressão hidrostática. Contudo, materiais frágeis, tais como solos, rochas e concreto, apresentam dependência da pressão hidrostática atuante.

Dessa forma, materiais frágeis, como o concreto, devem ter como critério de escoamento uma função tal como a da Equação 3.8 e os materiais dúteis, como o aço, podem ter o seu critério de escoamento reduzido para:

$$f(J_2, J_3) = k(\kappa) \quad (3.10)$$

3.2.3 Relação constitutiva no domínio plástico

Através da formulação matricial proposta por Owen e Hinton (1980), tem-se que:

$$f(\{\sigma\}) = k(\kappa) \quad (3.11)$$

de onde, tem-se:

$$F(\{\sigma\}, \kappa) = f(\{\sigma\}) - k(\kappa) \quad (3.12)$$

Através da diferenciação, resulta:

$$dF = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\rangle \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (3.13)$$

ou

$$\{a\}^T \{d\sigma\} - A d\lambda = 0 \quad (3.14)$$

onde $\{a\}$ é o chamado vetor de fluxo plástico e A é uma constante,

$$\{a\}^T = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right\rangle \quad (3.15)$$

e

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa \quad (3.16)$$

Assim, pode-se escrever:

$$\{d\varepsilon\} = [D]^{-1} \{d\sigma\} + d\lambda \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\rangle \quad (3.17)$$

onde $d\lambda$ é o multiplicador plástico. Pré-multiplicando ambos os lados por $\{d_D\}^T = \{a\}^T [D]$, que é conhecido como vetor plástico, e eliminando-se $\{a\}^T \{d\sigma\}$, obtém-se:

$$d\lambda = \frac{1}{[A + \{a^T\} [D] \{a\}]} \{a^T\} [D] d\varepsilon \quad (3.18)$$

Através das Equações 2.18 e 2.19, finalmente chega-se a:

$$\{d\sigma\} = [D_{ep}] \{d\varepsilon\} \quad (3.19)$$

sendo essa a expressão que caracteriza a relação constitutiva no domínio plástico, onde $[D_{ep}]$ é a matriz de relações constitutivas elastoplásticas para o caso multiaxial, sendo dada por:

$$[D_{ep}] = [D] - \frac{\{d_D\} \{d_D\}^T}{[A + \{d_D\}^T \{a\}]} \quad (3.20)$$

onde $[D_{ep}]$ possui as mesmas dimensões da Equação 3.3.

A forma explícita do termo escalar A pode ser obtida considerando-se:

$$d\kappa = \sigma^T d\varepsilon_P \quad (3.21)$$

e reescrevendo-se a Equação 3.12 como:

$$F(\{\sigma\}, \kappa) = f(\{\sigma\}) - \sigma_Y(\kappa) \quad (3.22)$$

uma vez que $\sigma_Y = \sqrt{3} k$. Assim, a equação 3.16 pode ser escrita como:

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \kappa} d\kappa \quad (3.23)$$

Empregando-se o princípio da normalidade na Equação 3.19 para expressar $d\varepsilon_P$, tem-se:

$$d\kappa = \sigma^T d\varepsilon_P = \sigma^T d\lambda a = d\lambda a^T \sigma \quad (3.24)$$

Para um caso uniaxial $\sigma = \bar{\sigma} = \sigma_Y$ e $d\varepsilon_P = d\bar{\varepsilon}_P$, onde $\bar{\sigma}$ e $\bar{\varepsilon}_P$ são, respectivamente, a tensão e deformação específica efetivas. Resulta que a Equação 3.24 fica:

$$d\kappa = \sigma_Y d\bar{\varepsilon}_P = d\lambda a^T \sigma \quad (3.25)$$

tal que:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_P} = \frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}_P} = E_p \quad (3.26)$$

Através do teorema de Euler, aplicável a todas as funções homogêneas de primeira ordem, pode-se escrever a Equação 3.22 como:

$$\frac{df}{d\sigma} \sigma = \sigma_Y \quad (3.27)$$

A partir das Equações 3.15 e 3.27, pode-se escrever a Equação 3.28.

$$a^T \sigma = \sigma_Y \quad (3.28)$$

Resulta que, trabalhando as expressões (3.23), (3.26), (3.27) e (3.28), obtém-se:

$$d\lambda = d\bar{\varepsilon}_P \quad (3.29)$$

e finalmente:

$$A = E_p \quad (3.30)$$

Dessa forma, A é obtido como E_p , ou seja, a inclinação da fase plástica do diagrama tensão-deformação e pode ser determinada experimentalmente.

3.2.4 Controle do estado de carga – retorno radial

Durante a aplicação de um incremento de carga, um elemento ou mesmo uma parte deste pode plastificar. Para cada incremento de carga é necessário determinar qual proporção é elástica e qual parte produz a deformação plástica e, conseqüentemente, promover o ajuste das tensões e deformações até que o critério de plastificação seja satisfeito. A forma pela qual o mecanismo de ajuste é implementado é através do retorno radial, utilizado no algoritmo de Owen e Hinton (1980).

3.3 ALGORITMO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR

A análise por elementos finitos de uma estrutura de concreto armado com comportamento elastoplástico, envolve a solução de um problema não-linear do tipo:

$$[K_G(\{u\})] \{u\} = \{f\} \quad (3.31)$$

onde $[K_G(\{u\})]$ é a matriz de rigidez global do sistema, que é função do estado de deformação da estrutura; $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos nodais; e $\{f\}$ é o vetor de forças nodais equivalentes externas.

Esse problema é dito não-linear, pois para se determinar $\{u\}$, é necessário conhecer $[K_G]$, que por sua vez é função de $\{u\}$.

Existe uma variedade de algoritmos para resolver um problema desse tipo. O trabalho de Owen e Hinton (1980) destaca os métodos da rigidez inicial, das aproximações sucessivas (rigidez secante) e de Newton-Raphson (rigidez tangente), além da possibilidade de utilizar algoritmos com combinações entre eles. O algoritmo adotado na resolução do problema não-linear deste trabalho é o método da rigidez inicial. Nesse algoritmo, a matriz de rigidez global $[K_G]$ é determinada apenas uma vez (na primeira iteração do primeiro incremento de cargas) e independe do vetor deslocamentos $\{u\}$. Esse algoritmo envolve menor número de passos de fatorização em relação aos demais, porém, converge linearmente. Isto se traduz em um maior número de iterações para atingir a convergência. Entretanto, em vista do comportamento do concreto fissurado, que inviabiliza a atualização da matriz de rigidez dentro do incremento de carga, julga-se adequado a sua utilização. A Figura 3.10 apresenta um diagrama representando o funcionamento do algoritmo para um caso uniaxial.

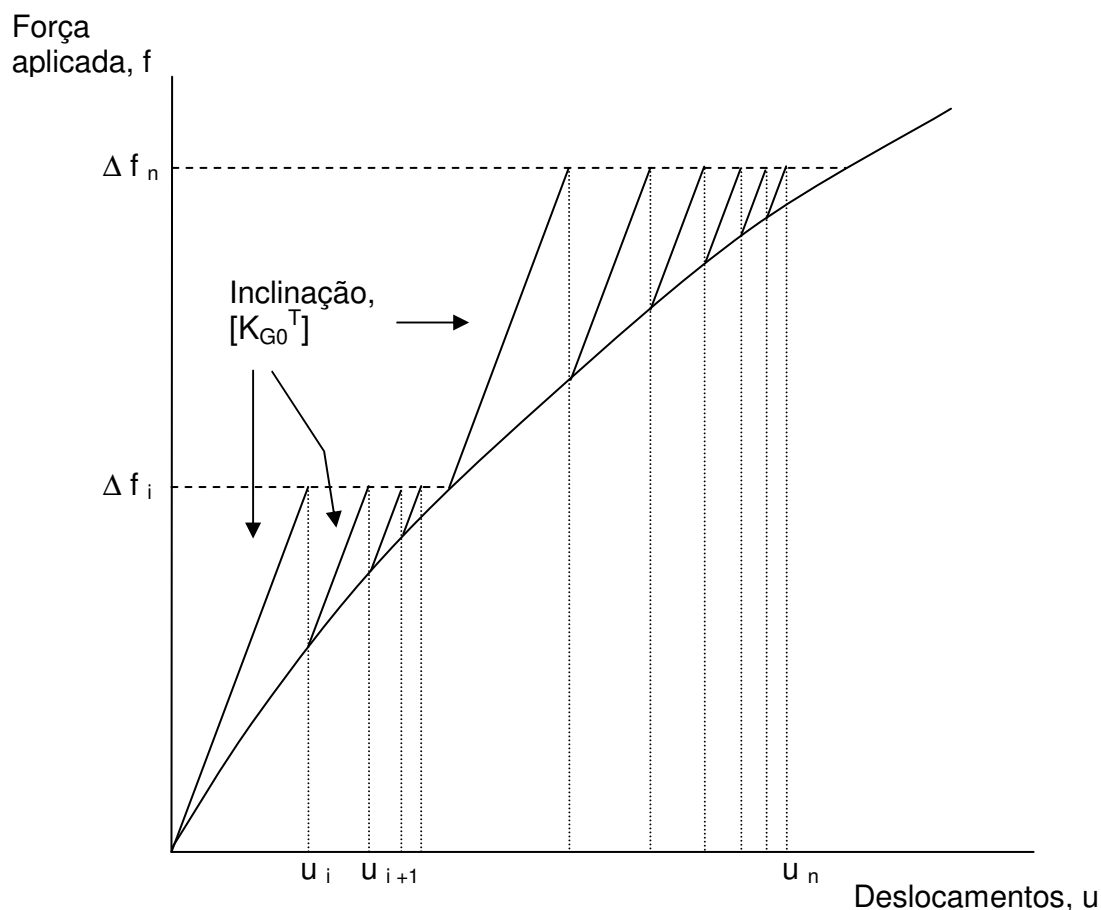


Figura 3.7 – Algoritmo de solução da rigidez inicial para um caso uniaxial

Para um estado multiaxial de tensões (caso tridimensional), o algoritmo de solução utilizado no programa computacional segue as seguintes etapas:

- calcula-se a matriz de rigidez inicial tangente, $[K_{G0}^T]$, em função do estado de deslocamentos iniciais, $\{u_0\}$;
- estabelece-se que o vetor inicial de forças não-equilibradas $\{\Delta f_0\}$ é o próprio vetor de forças nodais $\{f\}$ (iteração inicial $i = 1$);
- determina-se o incremento de deslocamentos

$$\{\Delta u_i\} = [K_{G0}^T]^{-1} \{\Delta f_{i-1}\}; \quad (3.32)$$

- determina-se a nova estimativa de deslocamentos

$$\{u_i\} = \{u_{i-1}\} + \{\Delta u_i\}; \quad (3.33)$$

- determina-se o vetor de forças nodais equilibradas por

$$\{f^{eq}_i\} = \int [B]^T \{\sigma\} dV; \quad (3.34)$$

f) determina-se o novo vetor de forças nodais não-equilibradas

$$\{\Delta f_i\} = \{f\} - \{f^{eq}_i\}; \quad (3.35)$$

g) verifica-se a convergência

$$\frac{\sqrt{(\{\Delta f_i\})^T \{\Delta f_i\}}}{\sqrt{(\{f_i\})^T \{f_i\}}} < \text{tolerância}. \quad (3.36)$$

Partes do programa básico para a solução do problema elastoplástico utilizado como referência na realização deste trabalho são encontradas nos trabalhos de Owen e Hinton (1980) e de Hinton (1988).

A seguir, na Figura 3.11, apresenta-se o fluxograma básico das operações realizadas do programa computacional desenvolvido neste trabalho.

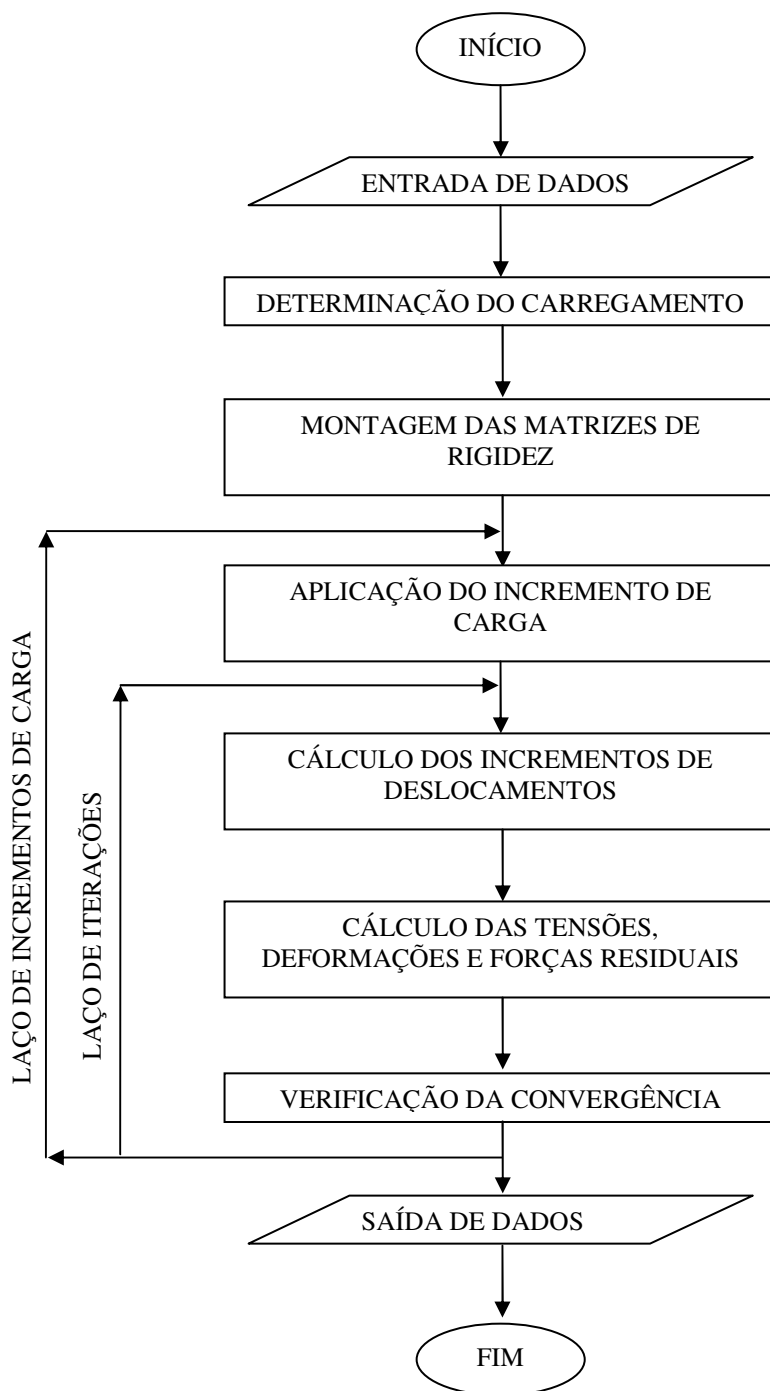


Figura 3.8 – Fluxograma das operações básicas para resolução do problema elastoplástico

4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

4.1 CARACTERÍSTICAS DO COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS SUBMETIDOS À CARGAS DE CURTA DURAÇÃO

Os estados característicos do comportamento de uma peça fletida de concreto armado podem ser ilustrados por um diagrama como o da Figura 4.1. Nesse diagrama, observam-se três fases distintas: uma elástica linear, com o concreto não-fissurado; uma de formação de fissuras; e uma plástica.

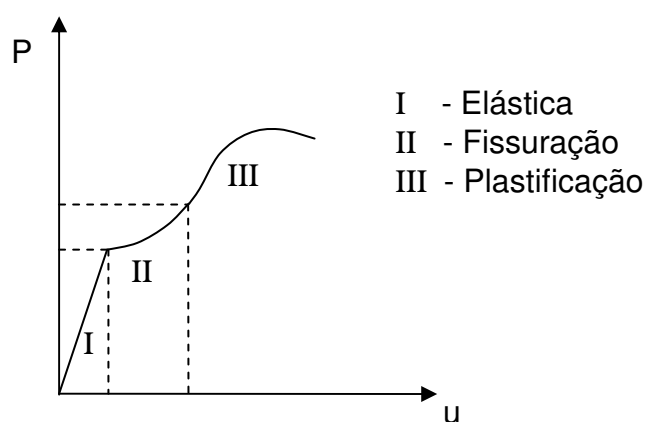


Figura 4.1 – Diagrama carga-deslocamento típico para peças fletidas de concreto armado

A resposta não-linear é causada, principalmente, por dois efeitos: a fissuração do concreto e a plastificação do aço e esmagamento do concreto comprimido. Outras não-linearidades independentes do tempo podem surgir nos materiais como: o deslizamento das barras de aço na matriz do concreto; o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço no concreto fissurado. Os efeitos dependentes do tempo, como fluência e retração do concreto e relaxação do aço, também contribuem na resposta não-linear, porém não são objetos de estudo do presente trabalho, pois o modelo elastoplástico utilizado considera apenas a aplicação de cargas instantâneas e, conseqüentemente, os efeitos dependentes do tempo não são levados em consideração.

Para os solos, por sua natureza mais complexa que os outros materiais, não é fácil caracterizar nitidamente os regimes elástico, plástico e de ruptura, tal é o tipo de resposta não-linear desses materiais. Velloso et al (1998), salientam que o solo não é um contínuo, mas sim um aglomerado de partículas de tamanho variável, desde partículas microscópicas de argila aos pedregulhos e matações. Tanto Caputo (1988), quanto Velloso et al (1998) ressaltam que a aplicação das teorias da elasticidade e da plasticidade é uma simplificação da realidade, porém, ainda assim, é usual aplicar essas teorias clássicas em solos, tendo-se sempre presentes suas limitações e o caráter aproximado das conclusões obtidas. Nesse caso desconsidera-se a anisotropia dos solos, utilizando também um modelo isotrópico para solos.

A Figura 4.2 ilustra diagramas tensão-deformação obtidos de ensaios triaxiais com areias e argilas, nos quais se distingue um trecho linear (regime elástico), seguido de um trecho curvo (regime plástico) até atingir a ruptura.

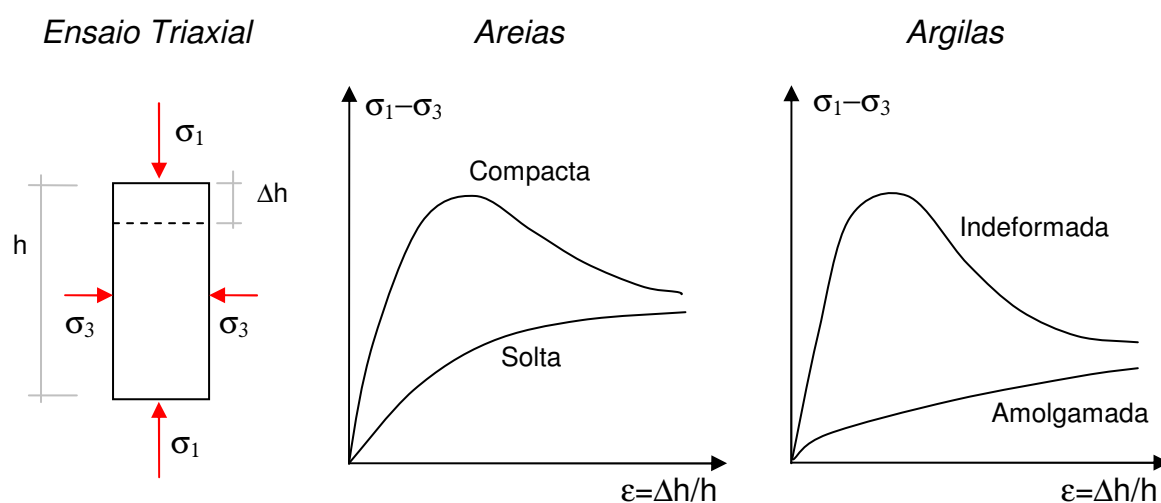


Figura 4.2 – Diagrama tensão-deformação típico

Há que se considerar, ainda, que em outras situações os solos se enquadram no âmbito mais complexo de comportamentos viscoelásticos e, em geral, viscoplásticos. Porém, da mesma forma que foi feito para o concreto armado, efeitos decorrentes da ação do tempo não foram considerados neste trabalho.

4.2 FORMA ALTERNATIVA PARA O CRITÉRIO DE ESCOAMENTO

Para a implementação numérica dos critérios de escoamento, Owen e Hinton (1980) sugerem a formulação de Nayak, que possibilita o cálculo de uma forma mais geral e apenas requer a especificação de três constantes para qualquer critério utilizado.

As tensões principais desviadoras são dadas como as raízes da equação cúbica:

$$t^3 - J_2 t - J_3 = 0 \quad (4.1)$$

Através da identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^3 \theta - \frac{3}{4} \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3\theta = 0 \quad (4.2)$$

e substituindo $t = r \operatorname{sen}(\theta)$ na Equação 4.1 resulta:

$$\operatorname{sen}^3 \theta - \frac{J_2}{r^2} \operatorname{sen} \theta - \frac{J_3}{r^3} = 0 \quad (4.3)$$

Comparando a Equação 4.2 com a Equação 4.3 tem-se que:

$$r = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \quad (4.4)$$

$$\operatorname{sen} 3\theta = -\frac{4J_3}{r^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \quad (4.5)$$

A primeira raiz da Equação 4.5, com θ determinado para 3θ na faixa $\pm \pi/2$ é uma alternativa conveniente para o terceiro invariante, J_3 . Pela natureza cíclica de $\operatorname{sen}(3\theta + 2n\pi)$ resulta imediatamente os três (e somente três) valores possíveis para $\operatorname{sen}(\theta)$ que definem as três tensões principais. As tensões desviadoras principais são dadas por $t = r \operatorname{sen}(\theta)$ em substituição aos três valores de $\operatorname{sen}(\theta)$. Substituindo-se para r a partir da Equação 4.4, e adicionando-se o componente da tensão hidrostática média, as tensões principais se tornam:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

onde $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ e $-\pi/6 \leq \theta \leq +\pi/6$.

4.2.1 Determinação do vetor de fluxo plástico e do vetor plástico

Para poder calcular $[D_{ep}]$ na Equação 3.20 de uma maneira mais eficiente, é interessante expressar o vetor de fluxo plástico $\{a\}$, dado pela Equação 3.15, da seguinte forma:

$$\{a\}^T = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\rangle = \frac{\partial F}{\partial J_1} \left\langle \frac{\partial J_1}{\partial \sigma} \right\rangle + \frac{\partial F}{\partial (J_2)^{1/2}} \left\langle \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \sigma} \right\rangle + \frac{\partial F}{\partial \theta} \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right\rangle \quad (4.7)$$

onde

$$\{\sigma\}^T = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy} \rangle \quad (4.8)$$

A partir da diferenciação da Equação 4.5 obtém-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left[\frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} - \frac{3J_3}{(J_2)^2} \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \sigma} \right] \quad (4.9)$$

A substituição da Equação 4.8 na Equação 4.7, com o auxílio da Equação 4.5, resulta na expressão do vetor de fluxo plástico:

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} + C_3 \{a_3\} \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \{a_1\}^T &= \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \langle 1, 1, 1, 0, 0, 0 \rangle \\ \{a_2\}^T &= \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2(J_2)^{1/2}} \langle s_x, s_y, s_z, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{xy} \rangle \\ \{a_3\}^T &= \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left\langle \left(s_y s_z - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left(s_x s_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left(s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \right. \\ &\quad \left. 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - s_x \tau_{yz}), 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xz}), 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - s_z \tau_{xy}) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

e

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial J_1}, C_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial (J_2)^{1/2}} - \frac{\tan 3\theta}{(J_2)^{1/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), C_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (4.12)$$

Os valores das constantes C_1 , C_2 e C_3 variam em função do critério de escoamento a ser utilizado. Assim, fica evidente que bastam três constantes, I_1 , J_2 e θ , para definir o vetor de fluxo plástico $\{a\}$.

O vetor plástico $\{d_p\}$ é obtido facilmente pela multiplicação entre a matriz das relações constitutivas elásticas $[D]$ pelo vetor $\{a\}$.

4.3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

4.3.1 Modelo para a compressão no concreto

Para representar o modelo do concreto comprimido é utilizado um modelo elastoplástico com endurecimento, formado por um critério de escoamento, uma regra de endurecimento e um critério de ruptura. A formulação para tal segue o que foi exposto no capítulo 3. A superfície de escoamento escolhida para modelar o comportamento do concreto é aquela proposta por Ottosen (1977).

4.3.1.1 Critério de escoamento

Admite-se, neste trabalho, que o concreto possui endurecimento isotrópico e que as superfícies de escoamento tenham a mesma forma da superfície de ruptura.

Considerando a tensão efetiva ou uniaxial equivalente $\sigma_{ef} = f_{cm}$, tem-se a expressão para a superfície de escoamento de Ottosen:

$$F = \left[\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 + \sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2} \right] / 2 = \sigma_{ef} \quad (4.13)$$

onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto, α e β são parâmetros.

A função λ depende do ângulo θ , de acordo com:

$$\begin{cases} \lambda = c_1 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos(-c_2 \operatorname{sen}3\theta)\right], \text{ para } \operatorname{sen}3\theta \leq 0 \\ \lambda = c_1 \cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(c_2 \operatorname{sen}3\theta)\right], \text{ para } \operatorname{sen}3\theta > 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

onde $\operatorname{sen}(3\theta)$ é dado na Equação 4.5.

Os parâmetros α , β , c_1 e c_2 são determinados a partir de f_{cm} e da resistência média à tração uniaxial do concreto f_{tm} , dada por:

$$f_{tm} = \kappa \left[\frac{f_{cm} - 8}{10} \right]^{2/3}, \text{ em MPa} \quad (4.15)$$

onde κ pode variar entre $0,95 \leq \kappa \leq 1,85$.

Segundo código modelo CEB/1990, a resistência à tração do concreto é mais variável que sua resistência à compressão e pode ser reduzida substancialmente por efeitos ambientais. Assim, o valor médio é cauteloso e, em virtude de comparações com valores experimentais, prefere-se adotar $\kappa=1,85$. Dessa forma, a diferença de 8 MPa entre f_{cm} e f_{ck} , é exagerada para concretos de baixa resistência. Adotou-se para esse valor, uma fração de f_{cm} (20%). Sendo assim, a resistência média à tração adotada no modelo é:

$$f_{tm} = 1,85 \left[\frac{0,8 f_{cm}}{10} \right]^{2/3} \quad (4.16)$$

Os parâmetros do critério de Ottosen são então calculados por:

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}}, \quad \beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}}, \quad c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}}, \quad c_2 = 1 - 6,8[k - 0,07]^2 \quad (4.17)$$

onde $k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}}$

As derivadas da função de escoamento F em relação aos invariantes de tensão I_1 , J_2 e θ são:

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = \frac{\beta}{2} \left[1 + \frac{\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right] \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial (J_2)^{1/2}} = \frac{1}{2} \left[\lambda + \frac{\lambda(\lambda\sqrt{J_2} + \beta I_1) + 4\alpha\sqrt{J_2}}{\sqrt{(\lambda\sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right] \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \quad (4.20)$$

em que para $\text{sen}(3\theta) \leq 0$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\theta \text{sen} \left[\frac{1}{3} \arccos(-c_2 \text{sen} 3\theta) \right]}{\text{sen}[\arccos(-c_2 \text{sen} 3\theta)]} \quad (4.21)$$

e para $\text{sen}(3\theta) > 0$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\theta \text{sen} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(c_2 \text{sen} 3\theta) \right]}{\text{sen}[\arccos(c_2 \text{sen} 3\theta)]} \quad (4.22)$$

onde

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = \frac{\sqrt{J_2}}{2} \left[1 + \frac{\lambda\sqrt{J_2} + \beta I_1}{\sqrt{(\lambda\sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right] \quad (4.23)$$

4.3.1.2 Regra de endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das superfícies de escoamento subseqüentes durante a deformação plástica. Admite-se para o concreto comprimido, um endurecimento isotrópico, onde a superfície de plastificação é uma expansão da superfície original sem translação.

Para representar o endurecimento do concreto, utiliza-se a Equação 3.30, onde o mesmo fica caracterizado apenas pela inclinação do segundo trecho reto do diagrama tensão-deformação bilinear, ou seja, E_p . A Figura 3.6-b apresenta um diagrama típico:

4.3.1.3 Critério de ruptura

A forma geral de uma superfície de ruptura, no espaço tridimensional de tensões, pode ser visualizada por suas seções em planos transversais e

meridianos. Considerando o concreto como um material isotrópico, torna-se necessário apenas o estudo do setor $-\pi/6 \leq \theta \leq +\pi/6$ da superfície de ruptura. O critério de Ottosen, ilustrado na Figura 4.3, apresenta todas as características observadas experimentalmente para a superfície de ruptura do concreto: a curva de ruptura é suave, convexa (ao menos para tensões de compressão), é aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão (valores de ξ pequenos, próximo ao plano π), ficando mais circular a medida que as tensões de compressão aumentam (crescimento de ξ).

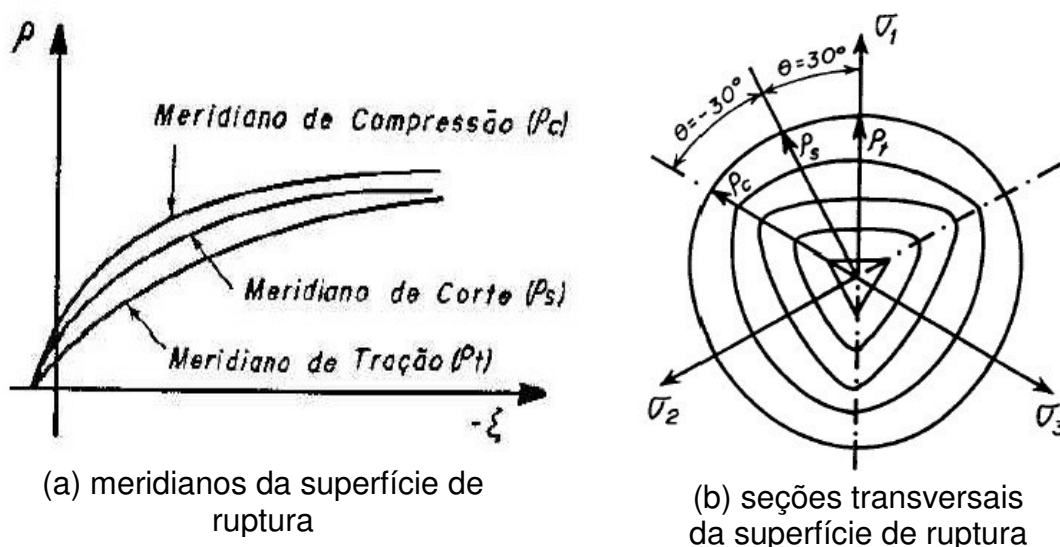


Figura 4.3 – Superfície de ruptura de Ottosen

O critério de ruptura de Ottosen é dado por:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (4.24)$$

4.3.2 Modelo para o concreto fissurado

O concreto possui a característica de apresentar resistência à tração inferior a sua resistência à compressão. Decorrência disso é que as estruturas de concreto armado, já em condições de serviço, apresentam fissuras. Assim, a consideração da fissuração do concreto, notadamente um comportamento não-linear, é significativa para uma análise precisa do comportamento de uma

estrutura de concreto armado e os modelos utilizados para o concreto fissurado consideram uma perda da capacidade de carga causada pela fissura.

Em elementos finitos, basicamente, são utilizadas duas aproximações para representar o fenômeno de fissuração, conforme Figura 4.4:

- a) Modelo de fissuras discretas;
- b) Modelo de fissuras distribuídas.

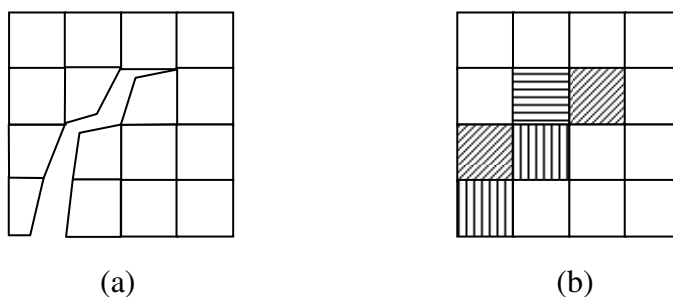


Figura 4.4 – (a) Fissuras discretas; (b) Fissuras distribuídas

O modelo de fissuras discretas representa cada fissura individualmente como uma descontinuidade real da malha de elementos finitos. Essa abordagem foi utilizada pela primeira vez por Ngo e Scordelis (1967), para analisar uma viga de concreto armado. As fissuras foram modeladas pela separação dos nós que, inicialmente, ocupavam o mesmo lugar no espaço. Pelo fato das fissuras estarem restritas às bordas entre os elementos, o modelo possuía limitações de modo que apenas os contornos dos elementos poderiam aparecer fissurados. Dessa forma, a geometria da fissura era fortemente dependente da geometria da malha. Também esse modelo requer procedimentos de atualização da malha, que consomem muito tempo computacional. Para solucionar esse problema surgiram métodos de refinamento da malha denominados auto-adaptativos, de forma que novos elementos de fronteira são inseridos ao longo da propagação das fissuras. Muito embora essa implementação reduza a dependência da malha, o custo computacional decorrente é elevado.

Já o modelo de fissuras distribuídas não considera descontinuidades da malha. Ao contrário do modelo anterior, o concreto fissurado permanece contínuo e as suas propriedades materiais é que são modificadas para que

seja possível considerar o dano devido à fissuração. O concreto é inicialmente isotrópico. Porém, após a fissuração, o concreto passa a apresentar anisotropia, com os eixos materiais principais orientados no sentido das direções da fissuração. As propriedades materiais variam dependendo do estado de deformação e de tensão. O módulo de elasticidade longitudinal é reduzido na direção perpendicular ao plano da fissura e o efeito de Poisson é usualmente desprezado. O módulo de elasticidade transversal, paralelo ao plano da fissura, também é reduzido. O modelo de fissuras distribuídas (smeared crack) é computacionalmente atrativo, uma vez que a geometria da malha não é modificada ao longo da análise e somente a relação tensão-deformação deve ser atualizada quando ocorre a fissuração.

O modelo de fissuras distribuídas proposto por Hinton (1988) é o modelo que foi adotado neste trabalho. Para estabelecer esse modelo foi necessário estabelecer: um critério de fissuração; uma regra para consideração da colaboração do concreto entre fissuras (tension stiffening); e um modelo para transferência de tensões tangenciais (shear transfer). Além disso, nesse modelo é permitido um número máximo de dois conjuntos de fissuras para cada ponto de integração.

A resposta do concreto sob tensões de tração é elástica linear até que a superfície de ruptura seja atingida, sendo calculada pela Equação 3.2. Uma vez atingida a superfície de ruptura, o nível de tensão em cada ponto de integração é avaliado. Assim, o primeiro passo é determinar a tensão principal σ_1 de tração, conforme a Equação 4.26, utilizando os invariantes de tensão I_1 , J_2 e o ângulo θ .

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \quad (4.25)$$

A seguir, para distinguir se o ponto atingiu a superfície de ruptura por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o critério proposto pelo boletim número 156 do CEB (1983), ou seja:

- i) se $\sigma_1 > \frac{f_m}{2}$, o ponto de integração fissurou;

ii) se $\sigma_1 \leq \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração esmagou.

Caso o ponto de integração tenha fissurado, admite-se que uma fissura tenha se formado num plano ortogonal à tensão σ_1 . Portanto, o comportamento do concreto não é mais isotrópico e sim ortotrópico, e os eixos materiais locais coincidem com as direções principais.

Para carregamentos posteriores, uma fissura secundária pode ocorrer no ponto de integração que estava previamente fissurado em uma direção. Utiliza-se o chamado procedimento da fissura fixa, onde se mantém fixa a direção do primeiro conjunto de fissuras e se determina a máxima tensão de tração no plano paralelo à fissura existente. Se esta tensão exceder a resistência do concreto à tração, então um novo conjunto de fissuras está formado perpendicular ao já existente e todas as componentes de tensão serão zeradas.

4.3.2.1 Colaboração do concreto entre fissuras

O comportamento carga-deslocamento do concreto armado é fortemente influenciado pela interação dos seus dois componentes: o concreto e o aço. A aderência entre estes materiais é o que torna possível a transmissão de esforços.

O efeito da aderência é evidenciado a partir da fissuração do concreto. No estado não-fissurado, o carregamento produz tensões principais de tração e compressão nos materiais. Com o aumento da carga, atinge-se a resistência à tração do concreto. Neste momento, ocorre uma ruptura local do material e a fissura se forma. Após a fissuração, o concreto entre as fissuras continua resistindo a esforços de tração. Estes esforços são transmitidos ao concreto pelos mecanismos de aderência. Negligenciar esta capacidade de carga implica em subestimar significativamente a rigidez pós-fissuração a níveis de carga de serviço. Este fenômeno é conhecido como “efeito da rigidez à tração” (tension stiffening effect). Portanto, na análise de estruturas de concreto armado sob cargas de serviço, é fundamental a consideração da capacidade resistente do concreto entre as fissuras.

A qualidade da aderência é decisiva para a distribuição e para a abertura das fissuras. Ela depende das características das barras da armadura (conformação superficial e diâmetro), da história da carga (especialmente se ocorrem carregamentos cíclicos), da resistência do concreto e das tensões normais à superfície da barra.

A incorporação da aderência nos cálculos através do método dos elementos finitos depende da forma de conectar os elementos de aço aos de concreto. Existem duas formas distintas para se modelar esta ligação. Na primeira, usam-se elementos especiais de aderência. Nestes, as propriedades da aderência são modeladas por suas relações tensões-deslocamentos. Na segunda forma, admite-se completa compatibilidade entre o aço e o concreto, e se modifica a lei do material (concreto ou aço), para se considerarem os mecanismos de interação.

A escolha da forma de modelar aderência depende do problema específico a ser analisado. O uso de elementos especiais de aderência requer intenso esforço computacional. Portanto seu emprego só se justifica nos casos em que a determinação das tensões de aderência não pode prescindir de um estudo minucioso (por exemplo, análise de zonas de ancoragem).

No presente trabalho, considera-se aderência perfeita entre o concreto e o aço. Em geral, a degradação da aderência é considerada indiretamente, modificando-se a lei material para o concreto ou para o aço. Desta forma, modelou-se indiretamente este efeito, pela introdução de um ramo descendente suave na curva tensão-deformação do concreto tracionado. Desse modo, admite-se que as perdas de resistência à tração no concreto ocorrem gradualmente depois da fissuração. Isto é equivalente a considerar o concreto como um material com amolecimento em tração.

Admitindo-se que a tensão σ , transmitida através da fissura, é uma função de sua abertura de fissura w , a energia de fratura é definida como

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(w) dw \quad (4.26)$$

onde G_f representa a energia necessária para propagar uma fissura de tração de área unitária.

O modelo de fissuras distribuídas não representa fissuras individuais. Sendo assim, a abertura de fissura w deve ser distribuída, ao longo de um certo comprimento, na forma de uma deformação específica de fissura equivalente, ϵ_c . Esta deformação específica está relacionada com o quociente da abertura de fissura física pelo seu comprimento característico, l_c . Obtém-se esta relação idealizando um volume de concreto V contendo uma fissura com área S , conforme ilustrado na Figura 4.5.

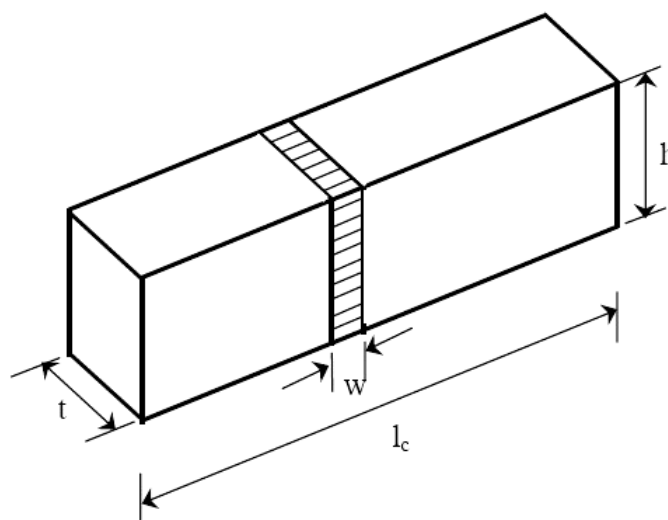


Figura 4.5 – Comprimento característico em um volume de controle prismático

Admite-se que, uma vez formada a fissura, toda deformação inelástica, sob o volume de controle, ocorre na fissura e o resto do volume mantém-se elástico. A taxa de energia dissipada por unidade de superfície na fissura é dada por

$$\pi_s = \int_s \sigma w ds \quad (4.27)$$

Pela hipótese de que o volume de controle fica submetido ao mesmo estado de tensões que a fissura, mas afetado pela deformação específica equivalente ϵ_c , a taxa de dissipação de energia por unidade de volume é

$$\pi_v = \int_v \sigma \epsilon_c dv \quad (4.28)$$

Supõe-se que a tensão e as taxas de deformação e de abertura de fissura são constantes no volume a considerar. Então, as equações da taxa de energia dissipada na fissura e no volume de controle fornecem a relação entre a taxa de abertura de fissura e a taxa de deformação de fissura.

$$w \cdot s = \varepsilon \cdot v \Rightarrow dw = (v/s)d\varepsilon = l_c d\varepsilon \quad (4.29)$$

Essa relação define o comprimento característico como o quociente entre o volume de controle e a superfície da fissura.

Hinton (1988) propõe a utilização de uma função exponencial para simular o efeito de amolecimento (strain-softening) como a indicada na Equação 4.30 e apresentada na Figura 4.6.

$$\sigma = E\varepsilon \left(\exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\alpha}\right) \right), \text{ para } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m \quad (4.30)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, ε é a deformação específica na fissura; α é o parâmetro de amolecimento; e $\varepsilon_0 = f_t/E$ é a deformação específica de tração nominal na zona fissurada. O parâmetro de amolecimento α fica determinado pelo cálculo da integral da Equação 4.31 e pela introdução da relação entre a abertura de fissura w e a deformação específica de fissura ε_c ,

$$\alpha = (G_f - E_0 \varepsilon_0^2 l_c / 2) / E_0 \varepsilon_0 l_c > 0 \quad (4.31)$$

No cálculo por elementos finitos, o volume de controle, correspondente à fissura, é o volume associado com o ponto de integração em um dado elemento. No presente trabalho, o comprimento característico é determinado, para cada ponto de integração, por $l_c = dV^{1/3}$, onde dV é o volume de concreto representado pelo ponto de integração.

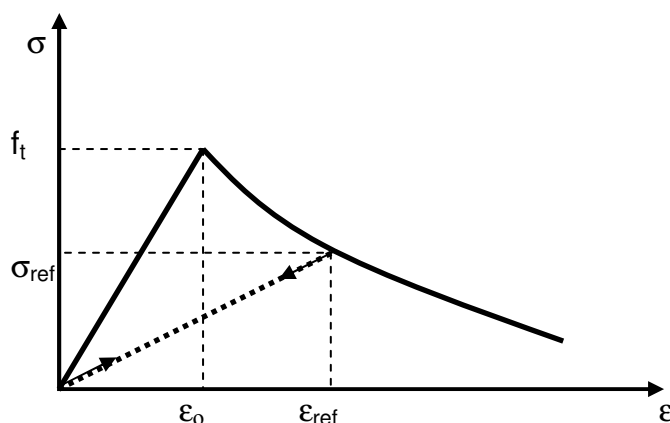


Figura 4.6 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado segundo o modelo de Hinton (1988)

A redistribuição de tensões, devido à fissuração em outros pontos de integração ou carregamentos posteriores, pode, eventualmente, forçar algum ponto previamente fissurado a fechar total ou parcialmente. Esta possibilidade é considerada no modelo. Se a deformação específica atual, ε , é pequena comparada com a deformação específica ε_{ref} , armazenada como a máxima deformação específica de tração alcançada através da fissura pelo ponto de integração em questão, então a tensão normal à fissura é calculada por

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \varepsilon \quad (4.32)$$

onde σ_{ref} é a tensão interpolada correspondente à deformação específica ε_{ref} . A trajetória desta “descarga” secante é visualizada na Figura 4.6. A reabertura da fissura segue a mesma trajetória até ε_{ref} ser excedida. Depois a tensão é calculada pela Equação 4.32.

Já Prates Júnior (1992) propôs uma função linear para o ramo descendente correspondente ao amolecimento do concreto, conforme a Equação 4.33, apresentada no gráfico da Figura 4.7. Na Equação 4.33, são adotados $\gamma = 0,6$ e $\varepsilon_m = 0,002$.

$$\sigma = \gamma \cdot f_{tm} (1 - \varepsilon / \varepsilon_m), \text{ para } \varepsilon_i \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m \quad (4.33)$$

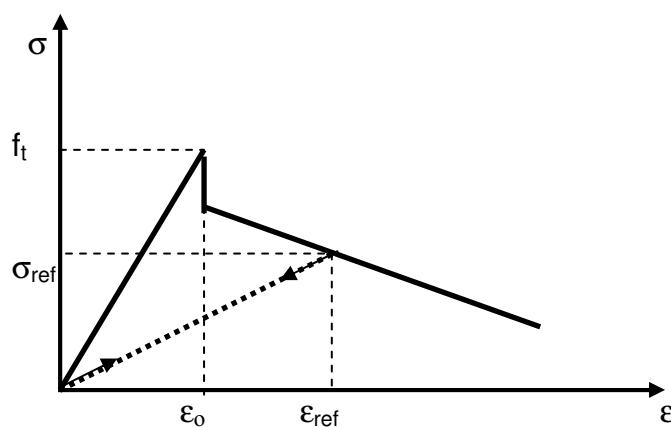


Figura 4.7 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado segundo o modelo de Prates Júnior (1992)

Neste trabalho foram implementados ambos os modelos no programa computacional e os parâmetros de cada um deles foram ajustados através de um estudo paramétrico. Martinelli (2003), apresentou um estudo comparativo entre ambos os modelos computacionais com resultados experimentais em vigas bi-apoiadas, apontando o modelo de Prates Júnior como mais adequado.

No processo computacional, as componentes de tensão e deformação específica para um ponto no interior de uma peça de concreto são expressas em função do sistema de coordenadas x , y , e z . Para a obtenção da tensão no concreto fissurado, deve-se determinar as direções principais de deformações específicas, visto que, tanto a Equação 4.30, quanto a Equação 4.33, são válidas somente no sistema local dos eixos materiais. Torna-se, portanto, necessária a rotação para a direção da fissura. Determinam-se as deformações específicas principais através de

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \\ \varepsilon_2 &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(\theta) + \frac{I_1}{3} \\ \varepsilon_3 &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3}\end{aligned}\quad (4.34)$$

onde

$$\begin{aligned}I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ J_2 &= \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right] \\ J_3 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \\ \theta &= \frac{1}{3} \operatorname{arcsen}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) + \frac{I_1}{3}\end{aligned}\quad (4.35)$$

Calcula-se, então, a direção da máxima deformação específica principal de tração. Feito isso, é possível determinar, a partir das componentes de tensão, referidas ao sistema x - y - z , as componentes de tensão para a direção

da fissura, através da matriz de rotação do sistema global para o sistema local, como indica a Equação 4.36.

$$\{\sigma^L\} = [R^L]\{\sigma^G\} \quad (4.36)$$

$$R^L = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & (\sin 2\alpha)/2 \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -(\sin 2\alpha)/2 \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Nas equações 4.36 e 4.37, onde o índice L denota o sistema local e o índice G denota o global.

No sistema local, aplicam-se as Equações 4.30, 4.32 e 4.33 para calcular as tensões normais. A componente tangencial local é $\tau_{xy}^L = G_c \gamma_{xy}^L$, onde G_c é o módulo de elasticidade transversal reduzido, que é definido no próximo item. Com as tensões ajustadas do ponto fissurado, retomam-se as componentes de tensões no sistema global, onde a matriz de rotação global é

$$R^G = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ (\sin 2\alpha)/2 & -(\sin 2\alpha)/2 & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\{\sigma^G\} = [R^G]\{\sigma^L\} \quad (4.39)$$

4.3.2.2 Rigidez transversal do concreto fissurado

Experimentos mostram que uma considerável quantidade de tensão tangencial pode ser transferida ao longo das superfícies rugosas do concreto fissurado. Em concreto simples, o principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados e as principais variáveis envolvidas são o tamanho do agregado e sua granulometria. Em concreto estrutural, o efeito de pino desempenha um importante papel, sendo as principais variáveis a taxa de armadura, o tamanho da barra e o ângulo entre o aço e a fissura. Ambos os mecanismos são controlados pela abertura

das fissuras, sendo a capacidade de transferência de corte reduzida com o aumento da abertura da fissura.

A inclusão direta destes mecanismos em um modelo de fissuras distribuídas é complexa. Uma aproximação simplificada para contornar este problema consiste em atribuir ao módulo de elasticidade transversal, correspondente ao plano fissurado, um valor reduzido G_c definido por Hinton (1988), como:

$$G_c = \beta G_o \quad (4.40)$$

onde G_o é o módulo de elasticidade transversal do concreto e β é um fator de redução compreendido entre 0 e 1. Se a fissura fechar, um novo valor para o módulo G_o é adotado novamente.

Segundo Hinton (1988), um valor constante para o fator de redução foi usado em diversas análises. É o caso de Prates Júnior (1992) que considera a Equação 4.40 da seguinte forma

$$G_c = 0,25G_o \left(1 - \frac{\varepsilon}{0,004} \right) \quad (4.41)$$

Contudo, Hinton (1988) considera mais coerente relacionar o valor de β com uma medida distribuída da abertura da fissura, ou seja, com a deformação de tração normal ao plano da fissura.

$$\beta = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{0,005} \right)^{k_1} \quad (4.42)$$

Na Equação 4.42, ε é a deformação de tração fictícia normal ao plano da fissura e k_1 é um parâmetro que varia entre 0,3 e 1,0.

No presente trabalho foram implementadas as duas considerações para o parâmetro β .

4.4 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS SOLOS

4.4.1 Modelo para a compressão no solo

Da mesma maneira que o concreto comprimido, é adotado para os solos um modelo elastoplástico com endurecimento. Para os solos foram implementados dois critérios de escoamento para materiais frágeis: Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

4.4.1.1 Critério de escoamento

Em Mecânica dos Solos, o critério de Mohr-Coulomb é o tradicionalmente utilizado, assimilando-se a reta de Coulomb à envoltória de Mohr. Simplificadamente, haverá ruptura do maciço (de características c e ϕ , coesão e ângulo de atrito interno, respectivamente) quando em cada ponto P ao longo da superfície de ruptura, ilustrada na Figura 4.8, a “tensão” de cisalhamento igualar a “resistência” ao cisalhamento, isto é, quando:

$$\tau = \tau_r + \sigma \tan \phi \quad (4.43)$$

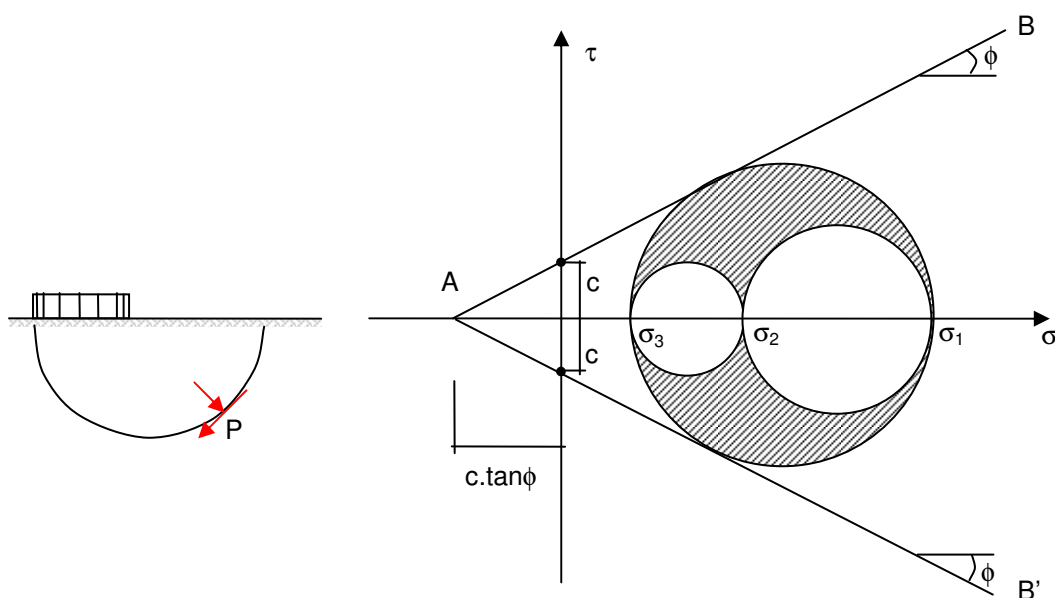


Figura 4.8 – Ilustração do critério de ruptura de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb para um estado multiaxial de tensões é uma generalização da Equação 4.43. Utilizando a forma alternativa para o critério de escoamento, o critério é dado por:

$$\frac{1}{3}I_1 \operatorname{sen} \phi + (J_2)^{1/2} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \phi \right) = c \cdot \cos \phi \quad (4.44)$$

As constantes C_1 , C_2 e C_3 para formação do vetor de fluxo plástico, obtidas a partir da Equação 4.12, são dadas por:

$$C_1 = \frac{1}{3} \operatorname{sen} \phi; \quad C_2 = \cos \theta \left[(1 + \tan \theta \tan 3\theta) + \frac{\operatorname{sen} \phi (\tan 3\theta - \tan \theta)}{\sqrt{3}} \right];$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \operatorname{sen} \phi}{2J_2 \cos 3\theta} \quad (4.45)$$

A superfície de Mohr-Coulomb apresenta descontinuidades ao longo da seção transversal em um plano desviador, o que pode causar problemas para implementações numéricas. Dessa forma, é necessário considerar:

$$\frac{1}{3}I_1 \operatorname{sen} \phi + (J_2)^{1/2} \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right) - c \cdot \cos \phi = 0, \quad \text{para } \theta = 30^\circ \quad (4.46)$$

$$\frac{1}{3}I_1 \operatorname{sen} \phi + (J_2)^{1/2} \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{\operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right) - c \cdot \cos \phi = 0, \quad \text{para } \theta = -30^\circ \quad (4.47)$$

e as constantes ficam:

$$C_1 = \frac{1}{3} \operatorname{sen} \phi; \quad C_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right); \quad C_3 = 0, \quad \text{para } \theta = 30^\circ \quad (4.48)$$

$$C_1 = \frac{1}{3} \operatorname{sen} \phi; \quad C_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{\operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right); \quad C_3 = 0, \quad \text{para } \theta = -30^\circ \quad (4.49)$$

O critério de Drucker-Prager é utilizado como uma alternativa ao critério de Mohr-Coulomb, por se tratar de uma aproximação suave do mesmo, pois a superfície de Drucker-Prager apresenta seções transversais sem descontinuidades nos planos desviadores. Problemas numéricos como os anteriormente descritos não ocorrem.

O critério de escoamento de Drucker-Prager, já na forma alternativa, é dado por:

$$\alpha I_1 + (J_2)^{1/2} = k \quad (4.50)$$

onde α e k são parâmetros para fazer coincidir a superfície com os picos externos da superfície de Mohr-Coulomb.

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)}; k = \frac{6c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (4.51)$$

As constantes C_1 , C_2 e C_3 para formação do vetor de fluxo plástico, obtidas a partir da Equação 4.12, são dadas por:

$$C_1 = \alpha; C_2 = 1; C_3 = 0 \quad (4.52)$$

Dessa forma, verifica-se que o estudo do comportamento elastoplástico para os solos neste trabalho difere do concreto apenas na necessidade do fornecimento dos parâmetros c e ϕ ., além, é claro, de uma regra de endurecimento própria.

4.4.1.2 Regra de endurecimento

A regra adotada para os solos é a mesma adotada para o concreto e ilustrada pela figura 3.6-b, excetuando-se a adoção de valores adequados de E_p para os solos em questão.

4.4.1.3 Critério de ruptura

Para os solos, a mesma definição dada para o concreto é válida. As superfícies de ruptura para Mohr-Coulomb e Drucker-Prager são apresentadas na Figura 4.9 e demonstram a coincidência entre alguns pontos de ambas, particularmente nos vértices externos da seção transversal da superfície de Mohr-Coulomb.

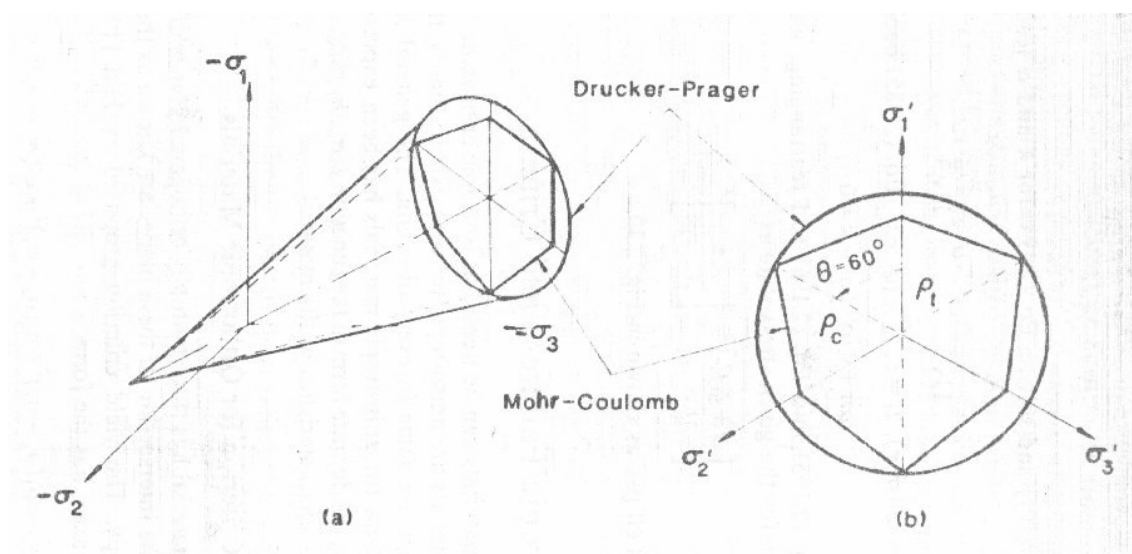


Figura 4.9 – Superfícies de ruptura de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager

4.5 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O AÇO

4.5.1 Critério de escoamento

Basicamente, neste trabalho, o critério de escoamento utilizado para as barras de armadura é o critério uniaxial. Contudo, dentro do processo de desenvolvimento da pesquisa, para poder modelar placas metálicas, julgou-se apropriado implementar também outros critérios de escoamento para as barras de aço, aqueles apropriados para metais. Neste trabalho, além do critério uniaxial, existem outros dois modelos: Tresca e Von Mises.

O critério de Tresca, já na forma alternativa, é dado por:

$$2(J_2)^{1/2} \cos \theta = \sigma_Y (\kappa) \quad (4.53)$$

e as constantes são:

$$C_1 = 0; C_2 = 2 \cos \theta (1 + \tan \theta \tan 3\theta); C_3 = \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta}{J_2 \cos 3\theta} \quad (4.54)$$

Tresca, assim como Mohr-Coulomb, também possui discontinuidades na seção transversal dos planos desviadores. Para contornar esse obstáculo, a solução utilizada é adotar os seguintes valores para as constantes:

$$C_1 = 0; C_2 = \sqrt{3}; C_3 = 0, \quad \text{para } \theta = \pm 30^\circ \quad (4.55)$$

Já o critério de Von Mises pode ser assumido como uma suavização do critério de Tresca, pois não possui as descontinuidades descritas anteriormente. O critério de escoamento de Von Mises, também na forma alternativa, é dado por:

$$\sqrt{3}(J_2)^{1/2} = \sigma_Y(\kappa) \quad (4.56)$$

e as constantes para Von Mises são dadas pela Equação 4.55. Isto significa que existem pontos das superfícies de ambas as superfícies de escoamento que são coincidentes, como será apresentado adiante.

4.5.2 Regra de endurecimento

Ao contrário do concreto e do solo, onde o endurecimento é uma simplificação, o aço deve adotar um modelo constitutivo uniaxial, pois as barras de armadura resistem apenas a esforços na direção longitudinal. Do mesmo modo que os outros materiais, a Figura 3.6-b ilustra o caso do endurecimento do aço, bastando especificar o valor de E_p para os elementos de barra.

4.5.3 Critério de ruptura

As superfícies de ruptura para o aço, Tresca e Von Mises, são apresentadas na figura 4.10.

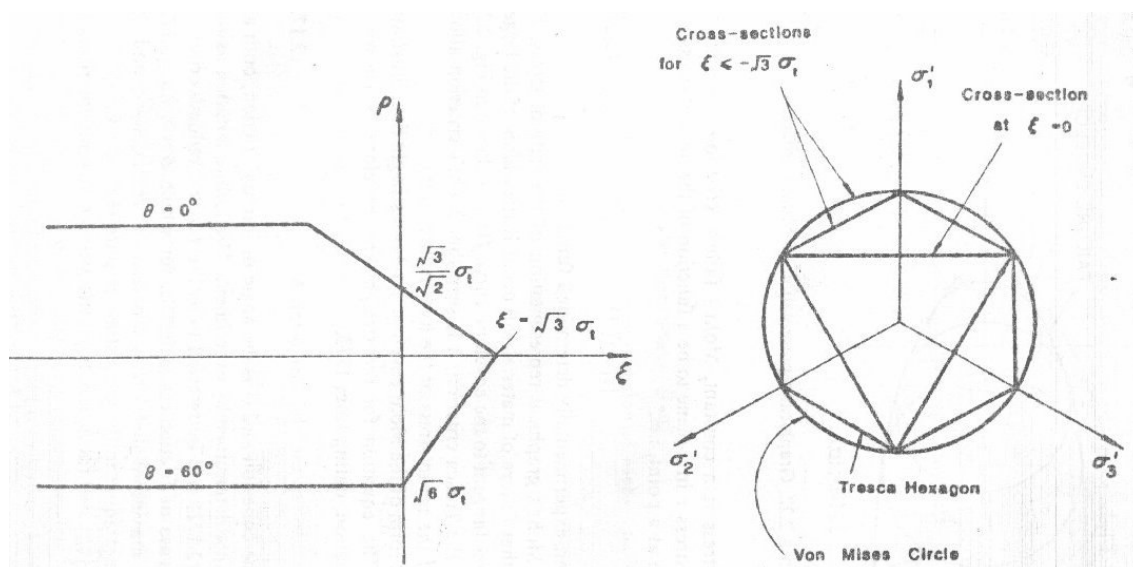


Figura 4.10 – Superfícies de ruptura de Tresca e Von Mises

Verifica-se a coincidência entre as superfícies nos pontos onde $\theta = \pm 30^\circ$, considerando somente a simetria em função da isotropia do material.

5 VALIDAÇÃO DO MODELO

O programa computacional desenvolvido neste trabalho recebeu o nome de Interação Solo-Estrutura 3D (ISE3D), tendo sido totalmente desenvolvido em linguagem Fortran 90. Neste programa, em sua parte de pré-processamento, foi desenvolvida uma linguagem orientada que é apresentada em detalhes no Anexo A. Já a etapa de pós-processamento utiliza o programa GiD[®], desenvolvido no International Center for Numerical Methods in Engineering – CIMNE, Barcelona, Espanha, também sendo apresentada em detalhes no Anexo B.

No presente capítulo, são apresentados os resultados de uma série de casos estudados para validar o programa computacional e testar suas características principais. Assim, são apresentados exemplos de compressão uniforme, de flexão simples, de distribuição de tensões elásticas na massa de solo e de fissuração. Além destes exemplos mais simples, para a validação completa do programa computacional, foi modelado o exemplo estudado por Cudmani (1999), que simula o comportamento elastoplástico de um conjunto solo-fundação com consideração de fissuração do concreto.

5.1 COMPRESSÃO UNIFORME

Trata-se de um elemento isolado, formado por um material elastoplástico qualquer, submetido a uma carga de compressão uniforme, conforme apresentado na Figura 5.1, a seguir. Dada uma tensão de plastificação σ_y , um módulo de elasticidade E e um módulo de endurecimento, E_p , é possível obter o comportamento elastoplástico do elemento segundo um diagrama bilinear.

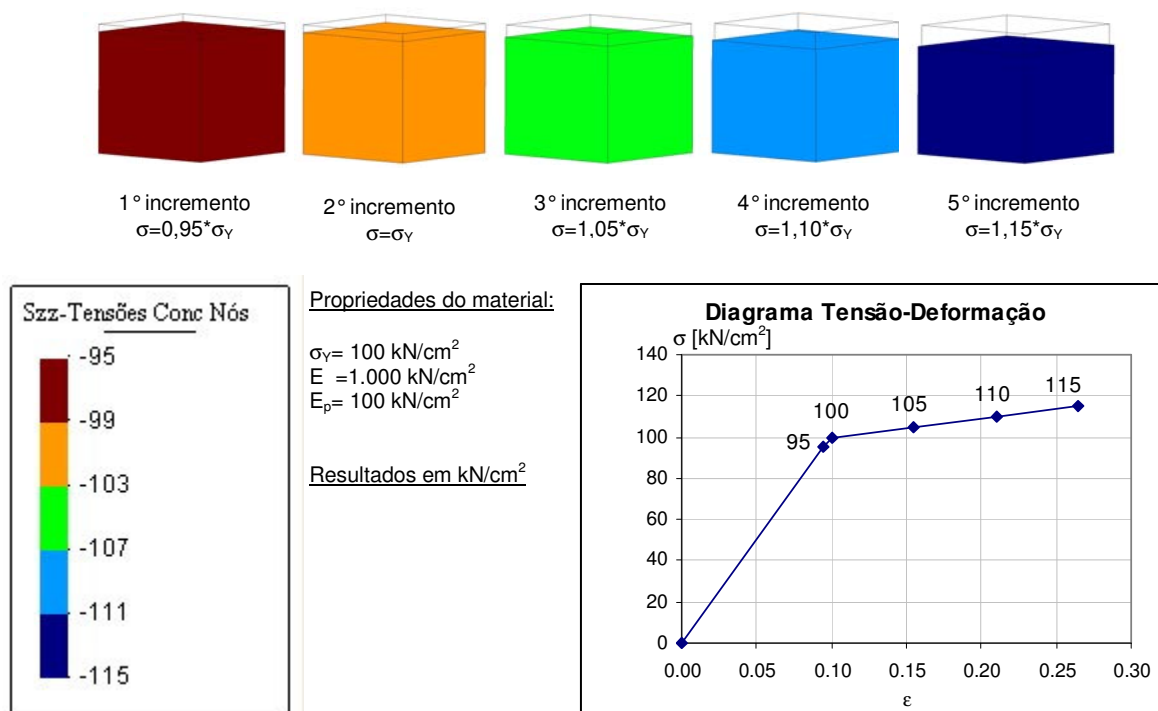


Figura 5.1 – Compressão uniforme.

Nessa figura é apresentada a distribuição da tensão vertical σ_{zz} no elemento, por meio da escala de cores, para cinco incrementos de carga. Os pontos correspondentes a esses incrementos estão indicados no diagrama tensão-deformação.

5.2 FLEXÃO SIMPLES

Nesta seção é apresentado um exemplo de análise elástica de uma viga de concreto armado bi-apoiada e que está submetida à flexão simples devido a uma carga concentrada no meio do vão. Basicamente, esse exemplo tem o objetivo de testar o comportamento de um modelo com armadura incorporada.

O exemplo é formado por dez elementos hexaédricos, dispostos em duas camadas de cinco elementos. Além desses, há uma barra de armadura embutida na camada inferior. A simetria da estrutura e das cargas permite a modelagem de apenas meio vão, conforme a Figura 5.2-a.

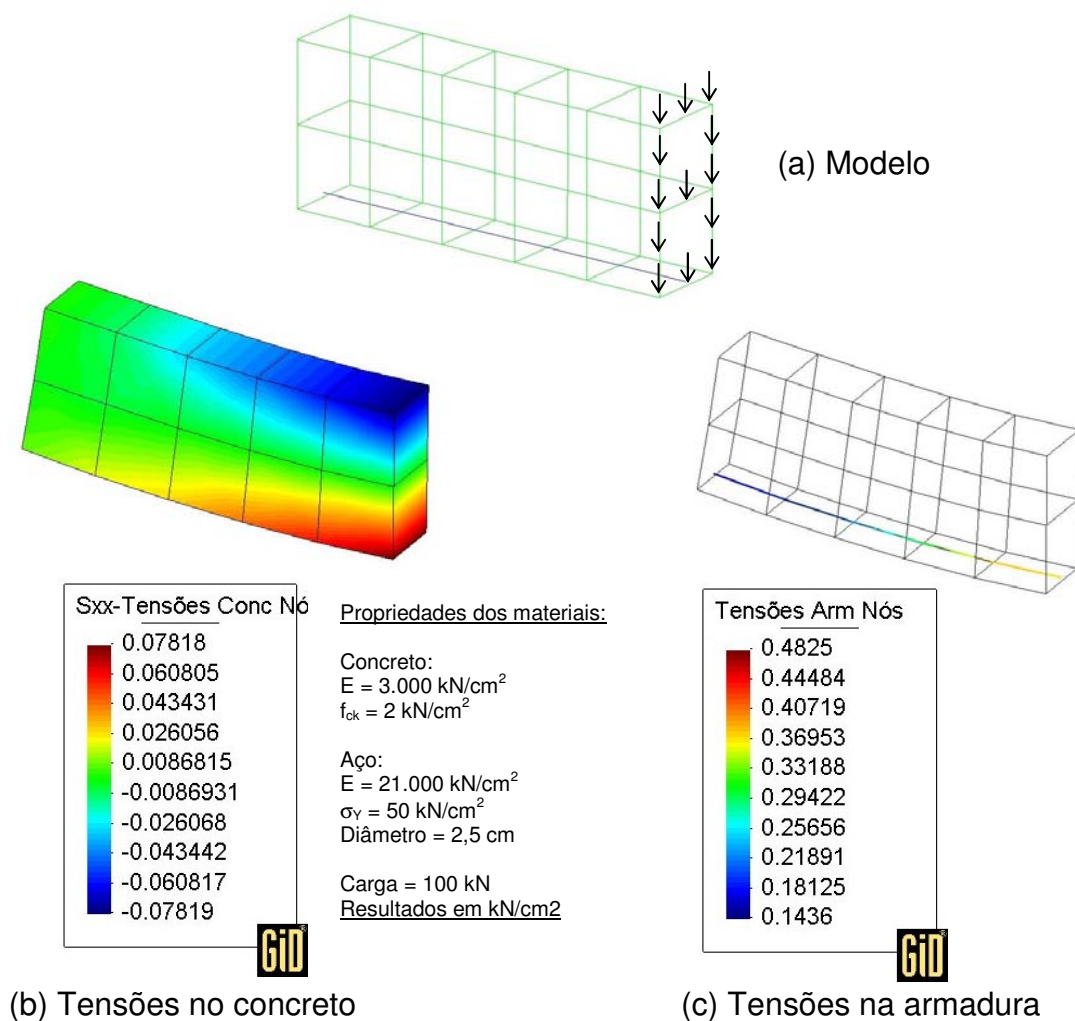


Figura 5.2 – Flexão simples.

O efeito da contribuição da armadura na viga é percebido através dos diferentes valores limites – inferior e superior – da escala das tensões nos nós de concreto, Figura 5.2-b. Isso evidencia um deslocamento da linha neutra da viga, pois, caso não houvesse armadura, a linha neutra estaria situada sobre o eixo de simetria longitudinal da viga e os limites de tensão seriam iguais. Mostra-se, na Figura 5.2-c, que a barra de armadura encontra-se tracionada.

5.3 DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NOS SOLOS

Vitorette (2003) realizou um estudo paramétrico da distribuição de tensões em uma massa de solo com malhas de elementos finitos para estado plano de deformações. Em seu trabalho ele apresentou o efeito da rigidez relativa do conjunto solo-fundação na distribuição das tensões na interface e comparou essa distribuição com os resultados teóricos existentes na literatura. Entende-se por rigidez relativa como a combinação da relação entre as dimensões de altura e de largura da fundação, com a relação entre os módulos de elasticidade da fundação e do solo.

Neste trabalho, como forma de avaliar a capacidade computacional do programa ISE3D, foi realizado um estudo paramétrico de cunho semelhante ao realizado por Vitorette (2003). Assim, foi adotada uma malha tridimensional de características semelhantes às malhas bidimensionais utilizadas pelo referido autor, simulando-se diversas condições de rigidez relativa do conjunto.

No presente trabalho, diferentemente de Vitorette, não foi realizada simulação para um solo com módulo de elasticidade igual ao infinito.

Nas figuras seguintes são apresentados os resultados obtidos pelo programa desenvolvido e também aqueles obtidos por Vitorette (2003).

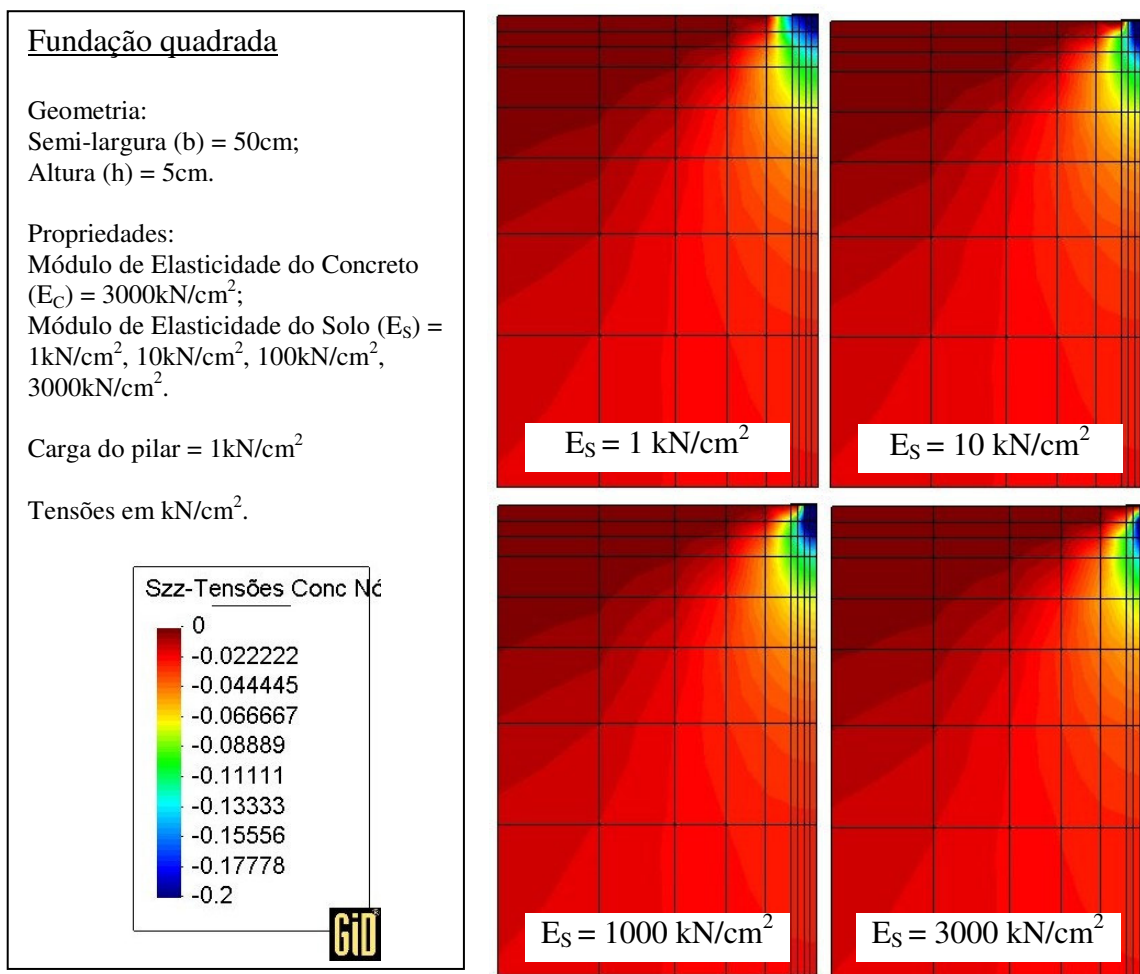


Figura 5.3 – Fundação flexível em diferentes solos – Distribuição de tensões.

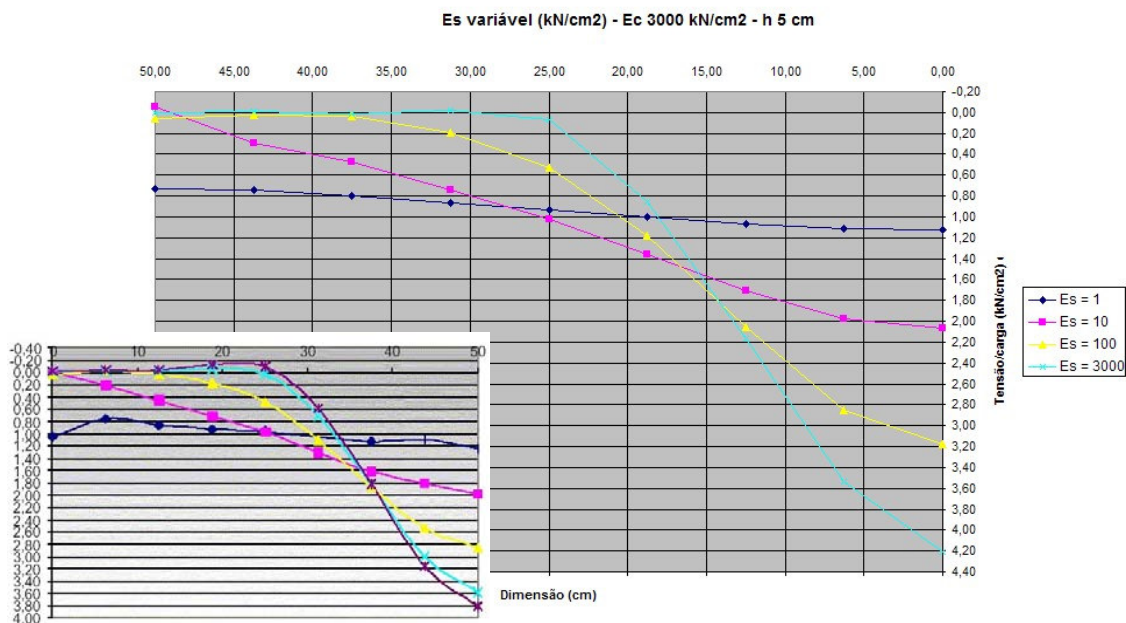


Figura 5.4 – Fundação flexível em diferentes solos – Comparação de tensões normalizadas com aquelas encontradas por Vitoretti (2003), no detalhe.

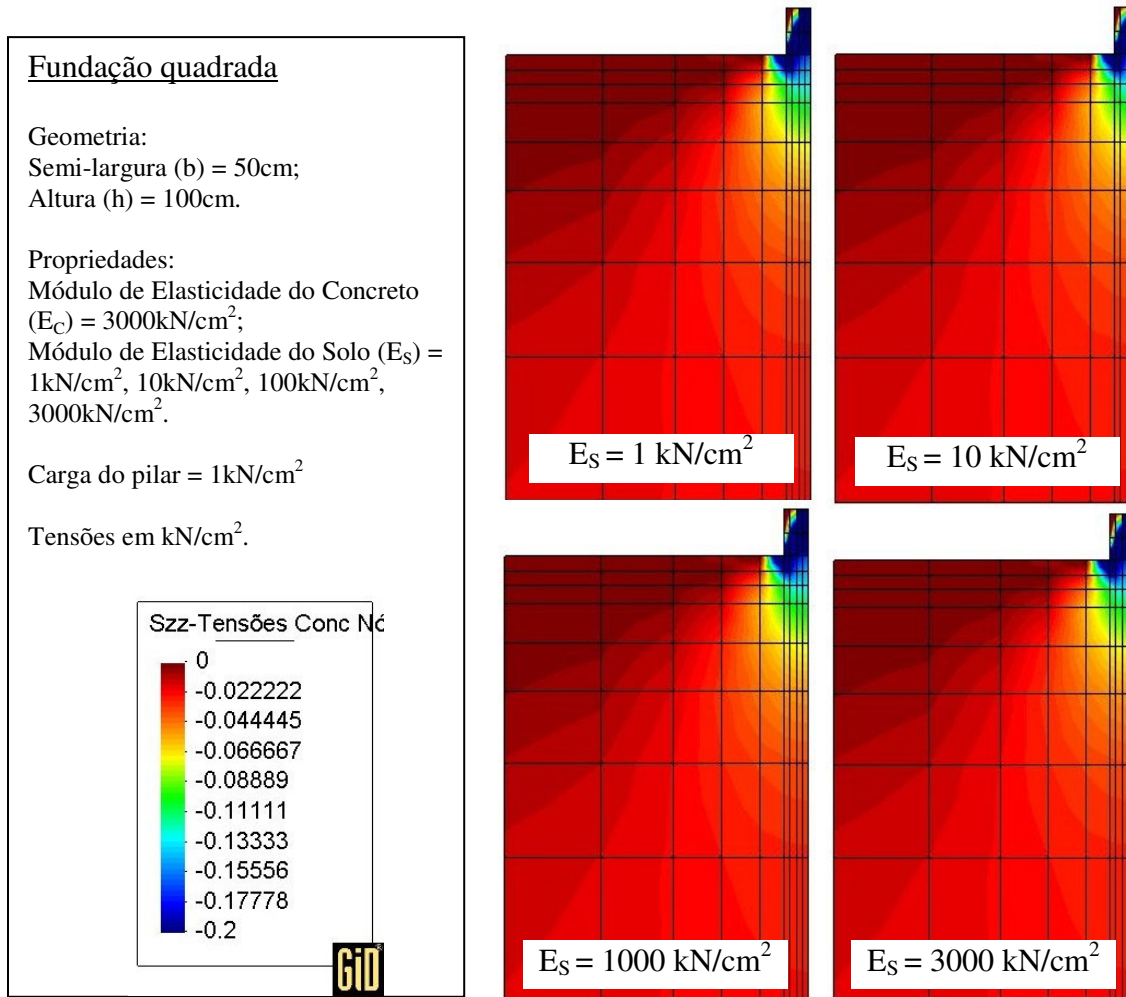


Figura 5.5 – Fundação rígida em diferentes solos – Distribuição de tensões.

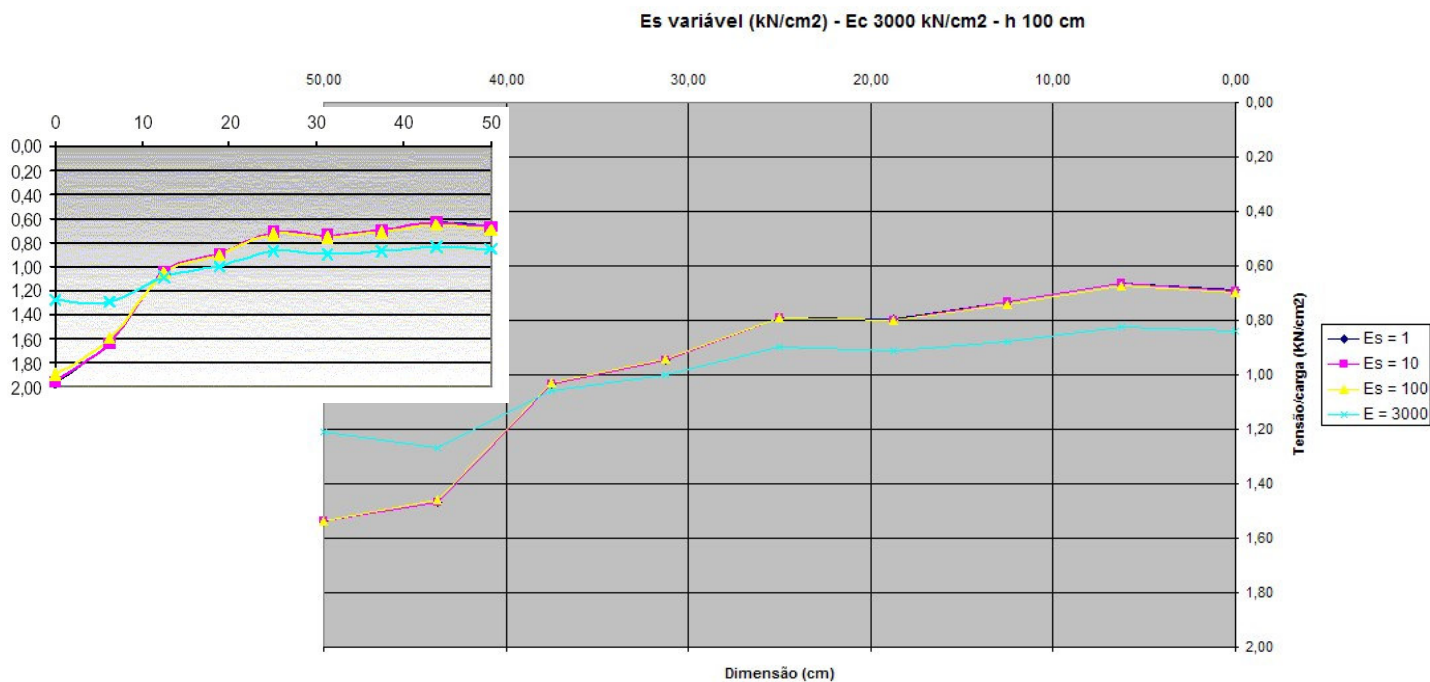


Figura 5.6 – Fundação rígida em diferentes solos – Comparação de tensões normalizadas com aquelas encontradas por Vitoretti (2003), no detalhe.

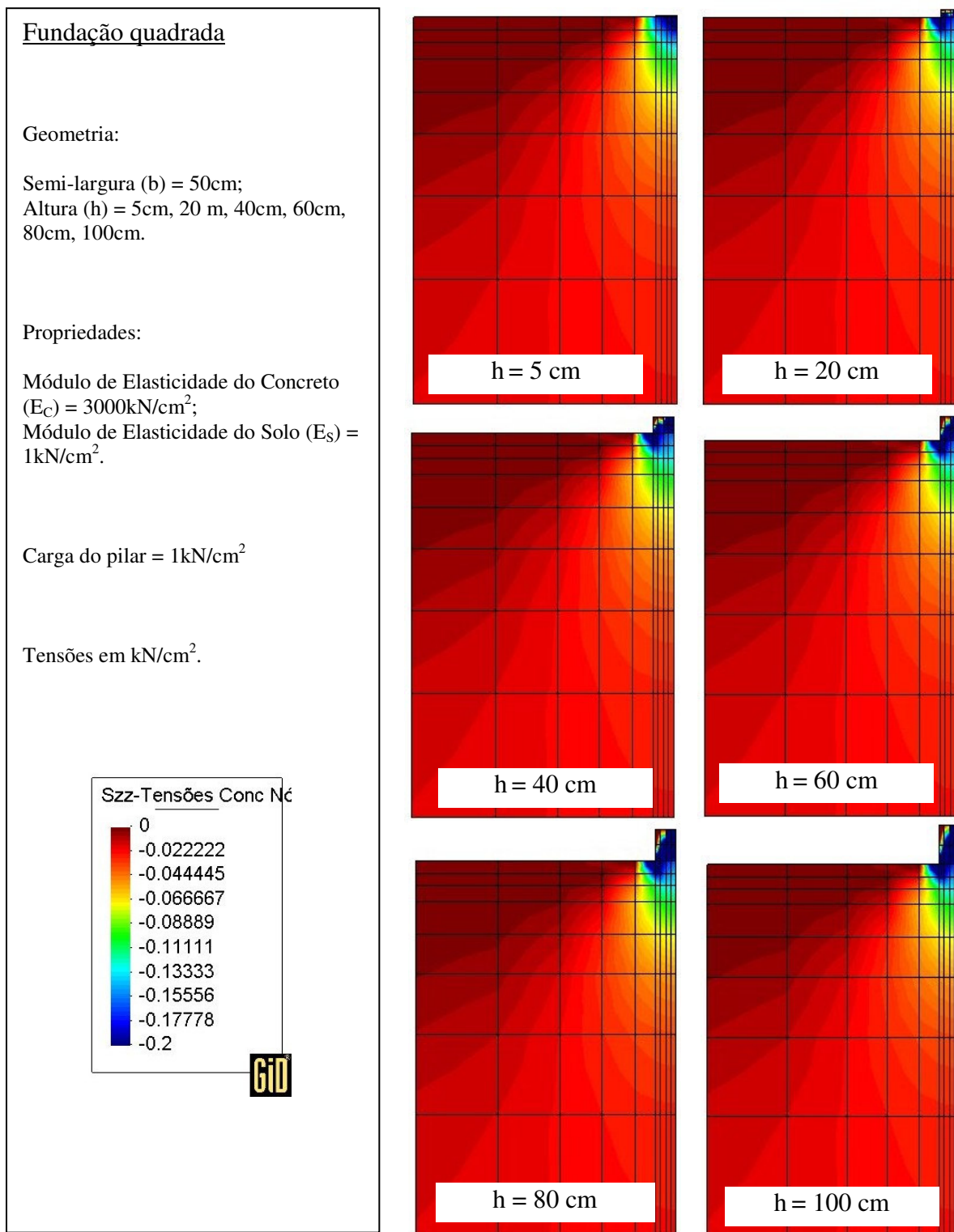


Figura 5.7 – Fundação de diferentes alturas (rigidezes) em solo pouco rígido – Distribuição de tensões.

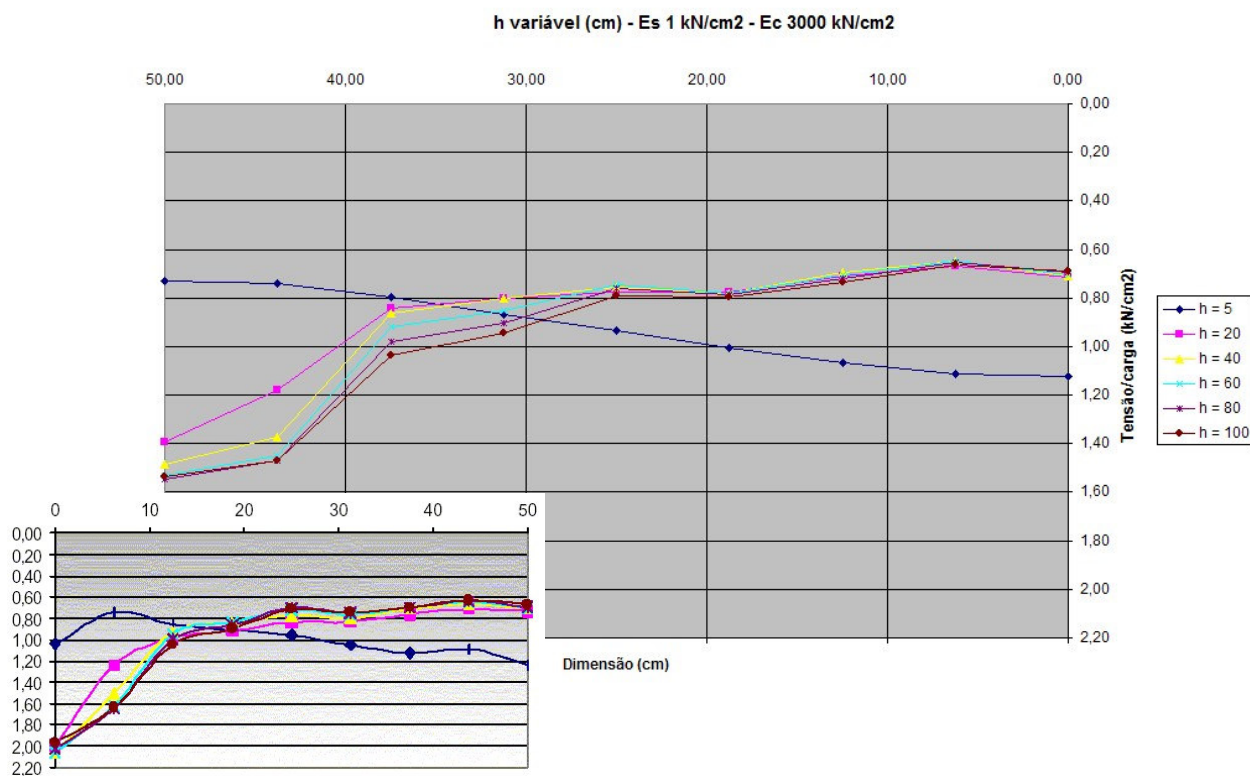


Figura 5.8 – Fundação de diferentes alturas (rigidezes) em solo pouco rígido – Comparação de tensões normalizadas com aquelas encontradas por Vitoretti (2003), no detalhe.

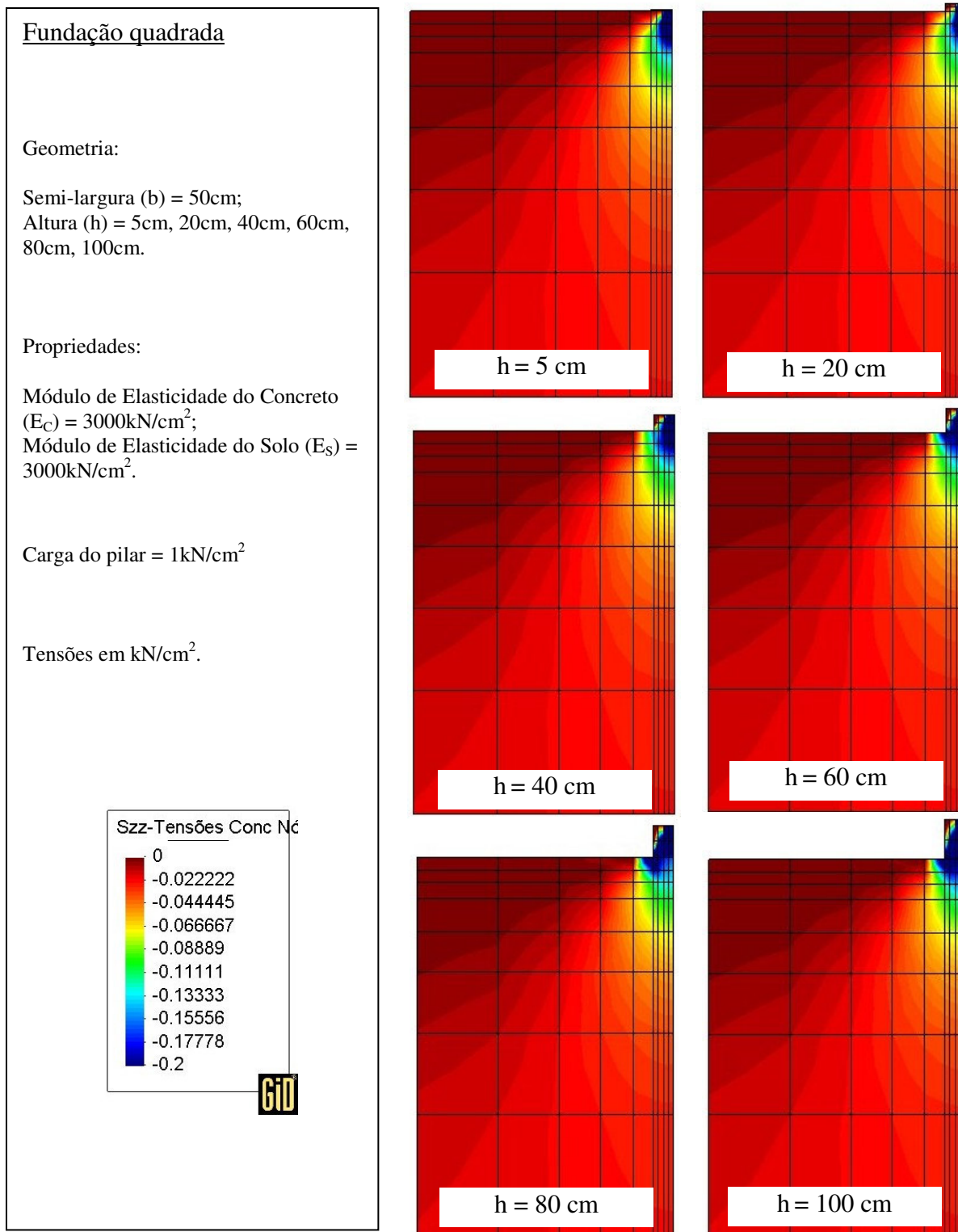


Figura 5.9 – Fundações de diferentes alturas (rigidezes) em solo rígido –
 Distribuição de tensões.

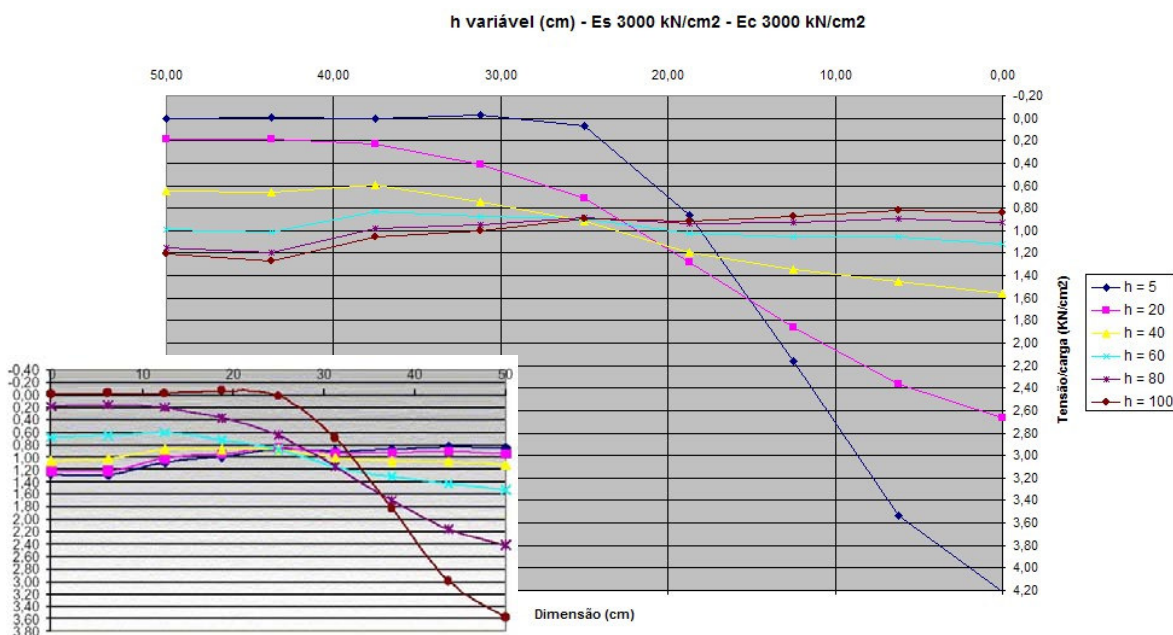


Figura 5.10 – Fundações de diferentes alturas (rigidezes) em solo rígido – Comparação de tensões normalizadas com aquelas encontradas por Vitoretti (2003), no detalhe.

Os resultados obtidos nesses exemplos aproximam-se bem da distribuição obtida por Vitoretti (2003), indicando que o programa está preparado para a realização de estudos mais aprofundados de conjuntos solo-fundação.

5.4 FISSURAÇÃO

Como exemplo de aplicação e validação do modelo de fissuração é apresentado um elemento de concreto, que contém uma barra de armadura incorporada, submetido a um esforço de tração uniforme. A barra que, comportando-se como um tirante, com a perda de resistência progressiva do concreto passa a resistir à totalidade do esforço de tração. A Figura 5.11, a seguir, apresenta a distribuição das tensões, tanto no elemento de concreto, quanto no elemento de barra.

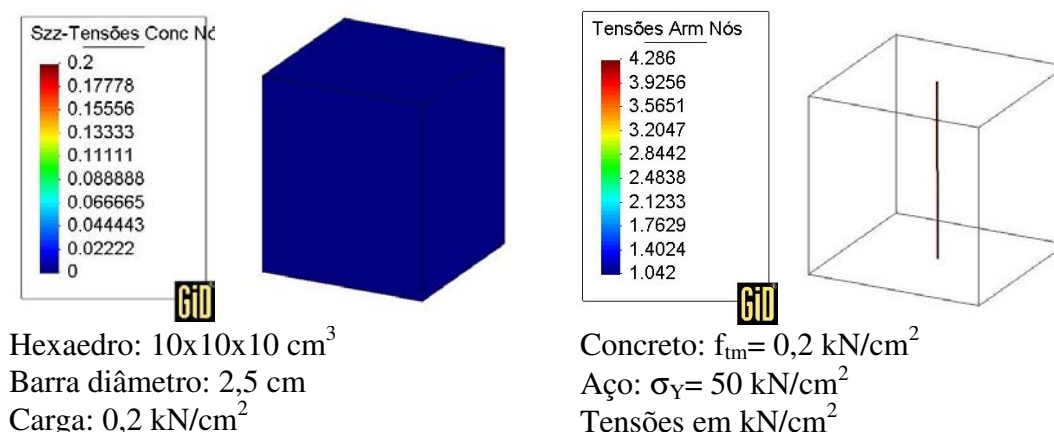


Figura 5.11 – Tensões no concreto e na armadura em elemento de concreto armado submetido à tração e apresentando fissuração.

É importante ressaltar que, através dos incrementos de carga, não é possível visualizar o comportamento pós-fissuração do concreto (ramo descendente nas Figuras 4.6 e 4.7). Com este propósito, foi implementada uma rotina computacional para permitir a análise com aplicação de incrementos de deslocamentos. Pode-se, desta forma, visualizar a fissuração do elemento tracionado. A Figura 5.12 apresenta esse comportamento para o exemplo da Figura 5.11.

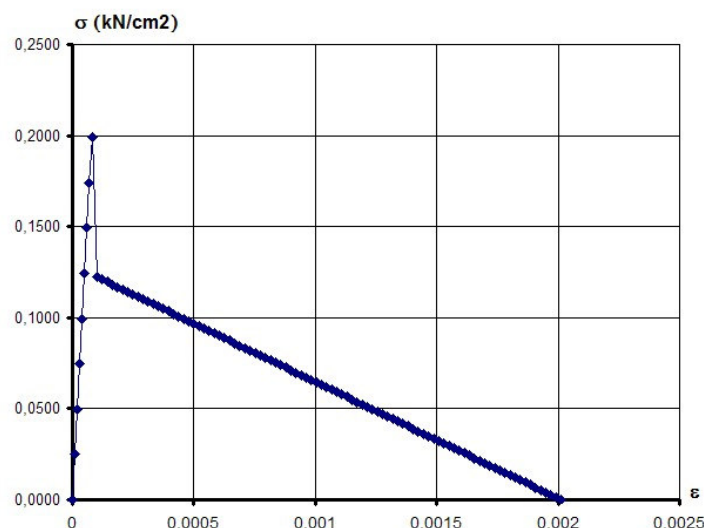


Figura 5.12 – Detalhe das tensões somente no elemento de concreto: visualização dos ramos ascendente e descendente no diagrama tensão-deformação no momento da fissuração no concreto.

5.5 INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

Cudmani (1994), através de ensaios de placa e de provas de carga em sapatas construídas em verdadeira grandeza, realizou um estudo experimental sobre o comportamento de fundações superficiais assentes sobre um solo residual do município de Cachoeirinha-RS. Tessari (1998), também através de ensaios de placa, investigou o comportamento desse mesmo solo residual. A partir dos resultados apresentados nesses dois trabalhos é desenvolvida a última etapa de validação do programa ISE3D.

Do trabalho de Cudmani (1994) foi escolhido o resultado de uma prova de carga realizada em uma sapata quadrada de concreto armado com 70 cm de lado e 35 cm de altura, assente a 120 cm de profundidade. Já do trabalho de Tessari (1998) foram obtidos os parâmetros do solo residual para a realização da simulação numérica. A Tabela 5.1 apresenta o resumo dos parâmetros utilizados na simulação.

Tabela 5.1 – Parâmetros utilizados na simulação numérica (Tessari, 1998)

<i>Propriedade</i>	<i>Concreto</i>	<i>Solo</i>
Módulo de Elasticidade (kN/cm ²)	3.000	4,5
Coesão (kN/cm ²)	-	0,0017
Ângulo de atrito (graus)	-	26
Coefficiente de Poisson	0,25	0,20

A partir do exposto, modelou-se no programa ISE3D uma malha tridimensional formada por 952 elementos finitos lineares e 1322 nós. O modelo constitutivo da fundação de concreto foi um modelo elastoplástico com fissuração. Já para o modelo constitutivo do solo foi utilizado um modelo elastoplástico perfeito, com critério de plastificação de Mohr-Coulomb. A fundação foi submetida a um esforço de compressão simples através de incrementos de carga. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16.

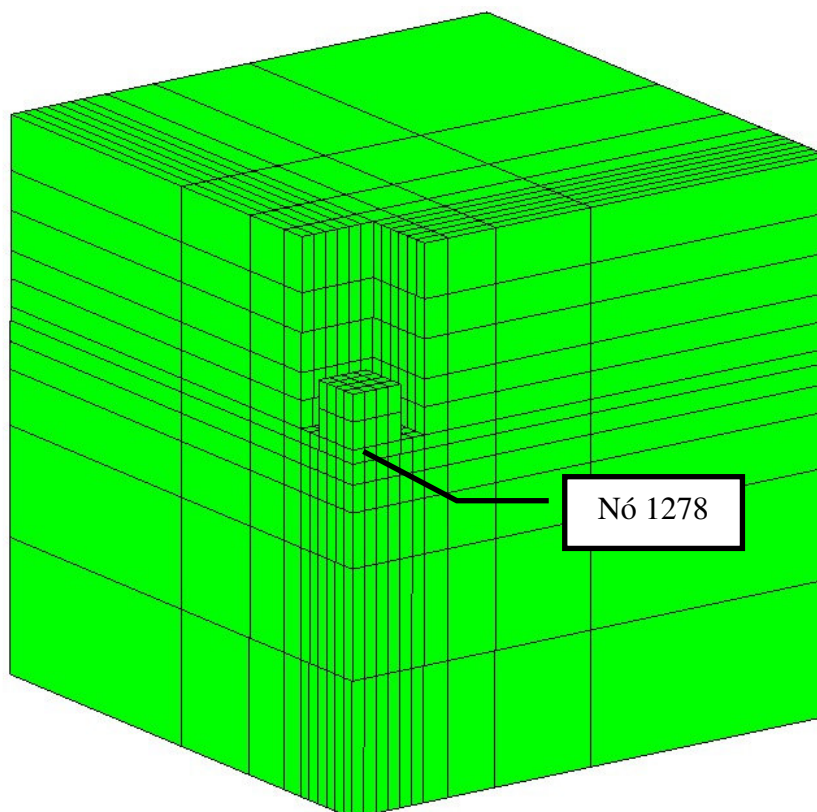


Figura 5.13 – Malha de elementos finitos tridimensionais utilizada no programa ISE3D, reproduzindo aquela de Cudmani (1994).

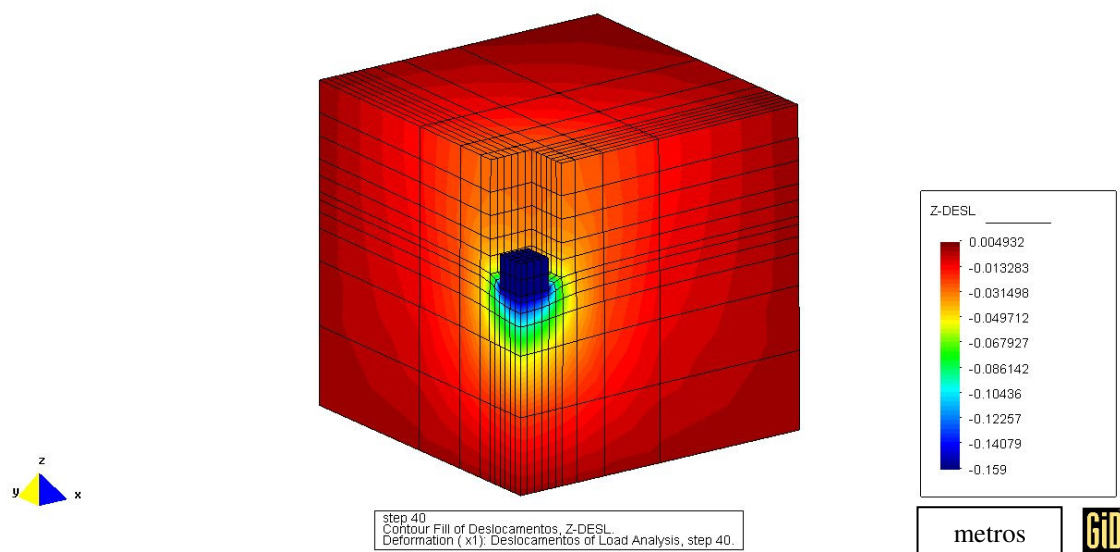


Figura 5.14 – Deslocamentos verticais (recalques): deformada da malha para o estágio final de carga.

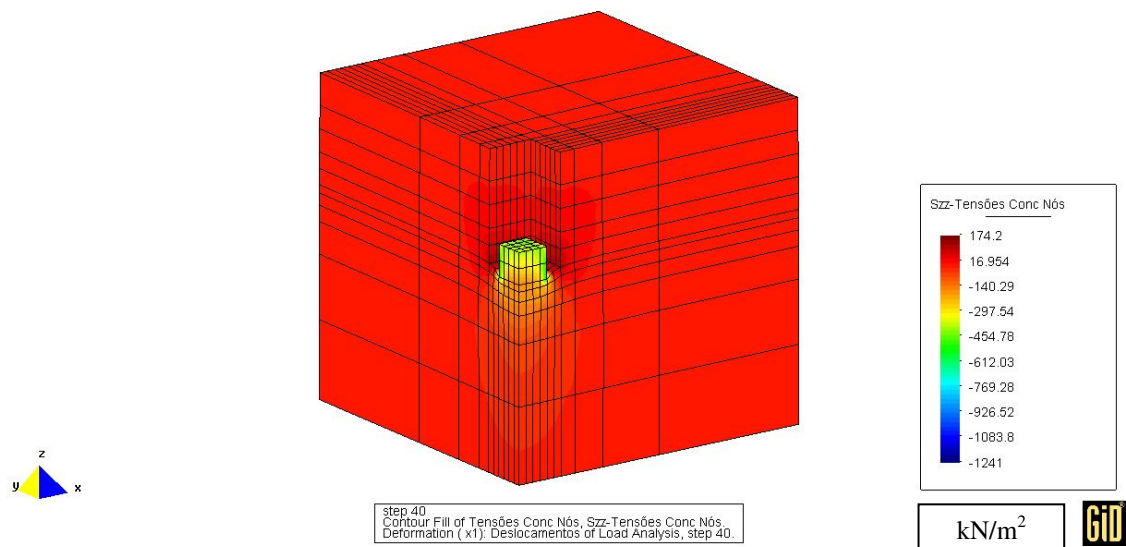


Figura 5.15 – Tensões normais verticais para o estágio final de carga.

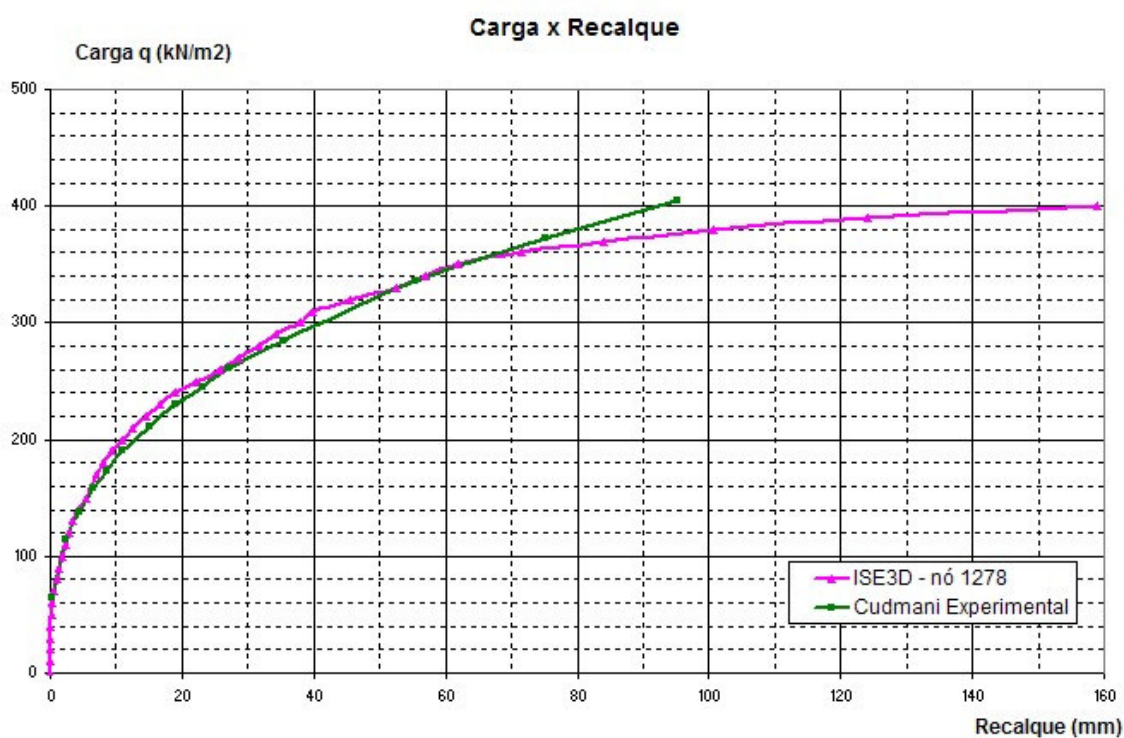


Figura 5.16 – Comparação dos resultados em prova de carga em sapata assente sobre solo residual do programa ISE3D com os resultados obtidos por Cudmani (1994).

A Figura 5.16 apresenta o resultado da simulação numérica elastoplástica com consideração da fissuração do concreto implementada no programa ISE3D e o compara com o resultado experimental da prova de carga realizada por Cudmani (1994). Nota-se que a sobreposição das curvas é exata na fase elástica do gráfico, apresentando pouca dispersão na fase elastoplástica. Apenas próximo à ruptura, que confirmou o puncionamento do solo, é que os resultados começam a apresentar diferenças um pouco mais significativas.

6 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo apresenta aplicações numéricas mais complexas do programa ISE3D através de dois exemplos. O primeiro deles é o que estuda o comportamento de uma fundação isolada diante do reforço da camada de solo onde ela é assente. O outro exemplo é o que estuda o comportamento de duas fundações, também isoladas, porém assentes muito próximas uma da outra.

6.1 SAPATA ISOLADA COM VARIAÇÃO NOS PARÂMETROS DO SOLO.

Neste item são apresentados os resultados para três simulações realizadas para um problema de igual geometria. Trata-se de uma fundação superficial do tipo sapata em concreto armado, assente ao nível do terreno e submetida a uma carga de compressão uniforme centrada representativa da carga de um pilar.

Ela possui barras de aço dispostas no plano da base (plano XY) e, segundo Calavera (1991), trata-se de uma fundação rígida. A Tabela 6.1 apresenta os parâmetros utilizados para o concreto e as barras de aço da armadura.

Tabela 6.1 – Propriedades do concreto e do aço

<i>Material</i>	<i>Modulo de Elasticidade (kN/cm²)</i>	<i>Coefficiente de Poisson</i>
Concreto	3.000	0,25
Aço	21.000	-

A Figura 6.1 apresenta a geometria da fundação, onde a região mais clara do solo identifica a região modelada, aproveitando-se a simetria do problema. Observa-se que as dimensões utilizadas atendem às especificações de Zienkiewicz (2000) para as questões dos efeitos de vinculação do modelo, pois, em planta e em profundidade, a massa de solo modelada tem dimensão igual a dez vezes a maior dimensão da fundação.

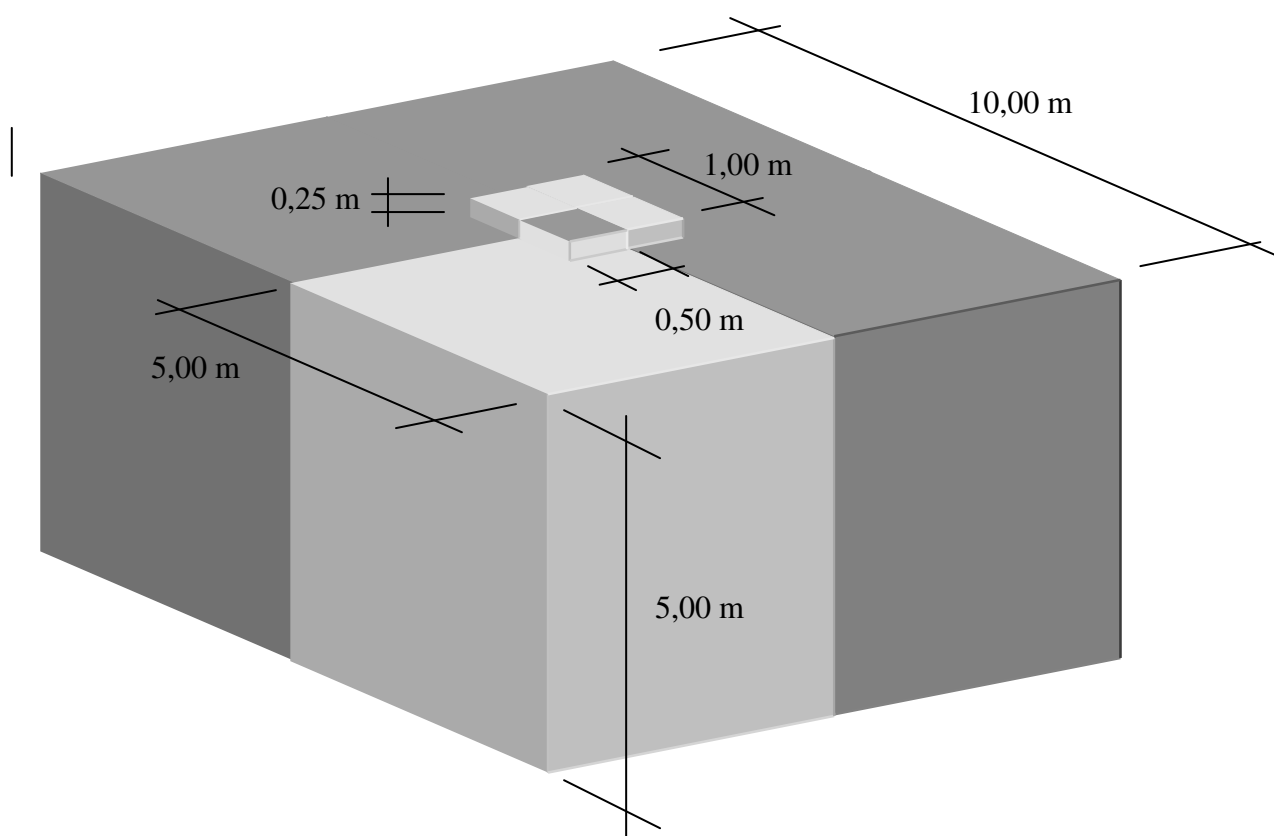


Figura 6.1 – Geometria e simetria utilizada na simulação de sapata isolada (fora de escala).

As três simulações realizadas utilizaram três tipos de solos, sendo eles: um solo residual, denominado “Solo 1”, e um solo reforçado com cinza pesada de carvão, denominado “Solo 2”, ambos utilizados no trabalho de Tessari (1998); e um solo reforçado com cimento, denominado “Solo 3”, estudado originalmente por Vendruscolo (2003).

A primeira simulação considerou toda a massa de solo como sendo do tipo “Solo 1” (primeira configuração). As outras duas simulações consideraram a quase totalidade da massa de solo como sendo “Solo 1”, exceto por uma pequena camada de solo situada imediatamente abaixo da região onde está assente a fundação, onde foi utilizado o “Solo 2” (segunda configuração) ou o “Solo 3” (terceira configuração).

A Tabela 6.2, a seguir, apresenta um resumo das propriedades dos solos utilizados.

Tabela 6.2 – Parâmetros dos solos utilizados

Tipo de solo	Módulo de Elasticidade (kN/cm ²)	Coefficiente de Poisson	Ângulo de Atrito (graus)	Coesão (kN/cm ²)
Solo 1	4,5	0,3	26	0,0017
Solo 2	46,0	0,3	35	0,006
Solo 3	160,0	0,3	52	0,017

A malha de elementos finitos utilizada é apresentada nas Figuras 6.2 e 6.3, a seguir. Nessas figuras, tanto a geometria da fundação, quanto a região de elementos onde foram utilizados parâmetros de um “Solo 2” ou “Solo 3”, apresentam-se destacadas.

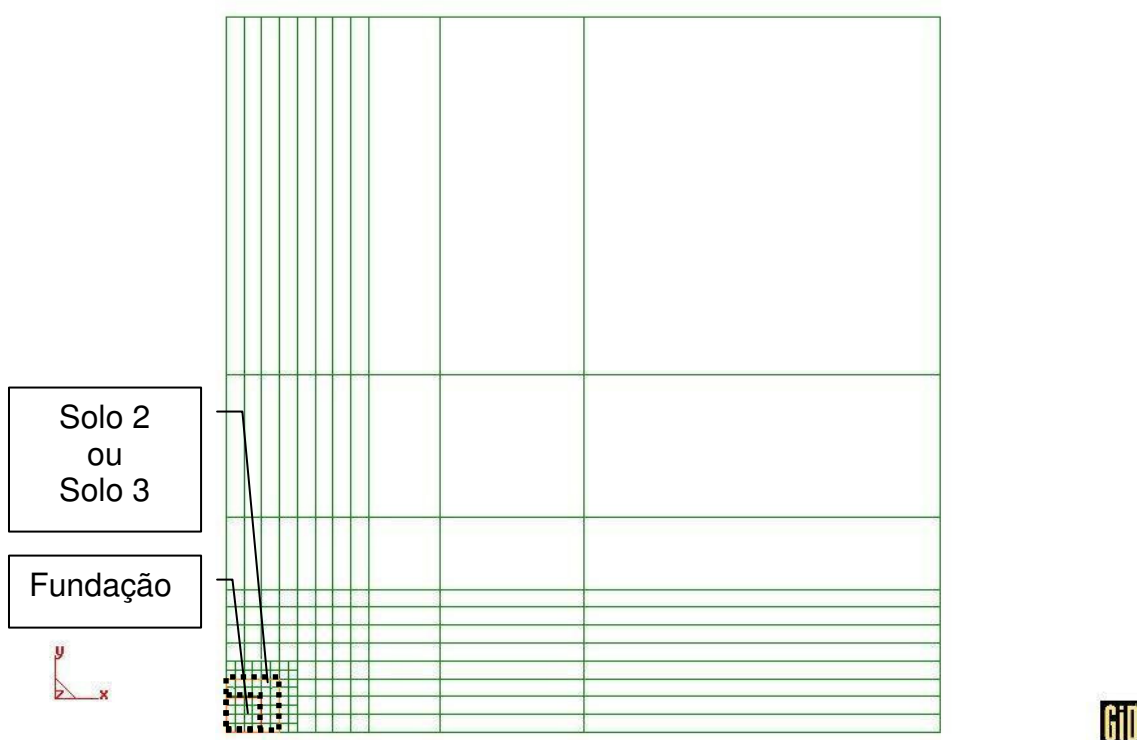


Figura 6.2 – Vista em planta (XY) da malha utilizada.

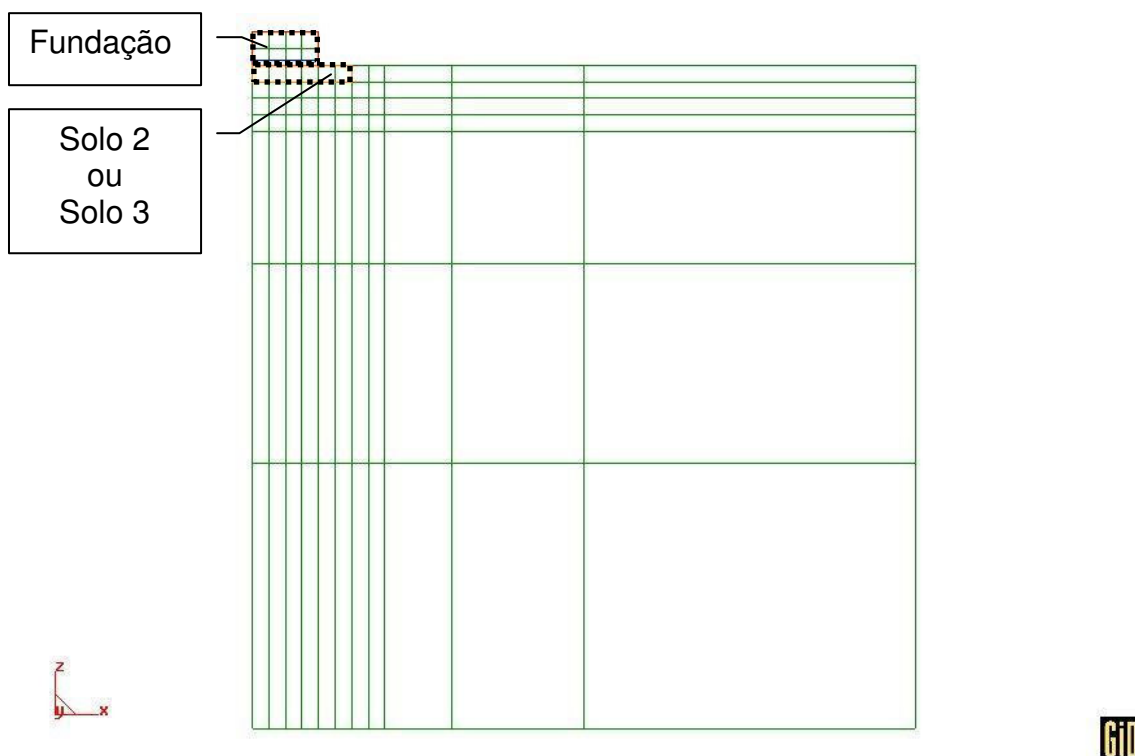


Figura 6.3 – Vista frontal (XZ) da malha utilizada.

Ao todo, este problema foi modelado com 924 elementos finitos quadráticos, 892 hexaedros e 32 elementos de barra. No total, essa malha possui 4524 nós, onde 4428 são nós de hexaedros e 96 são nós de barras. Para a resolução do problema, utilizou-se integração reduzida.

6.1.1 Configuração 1

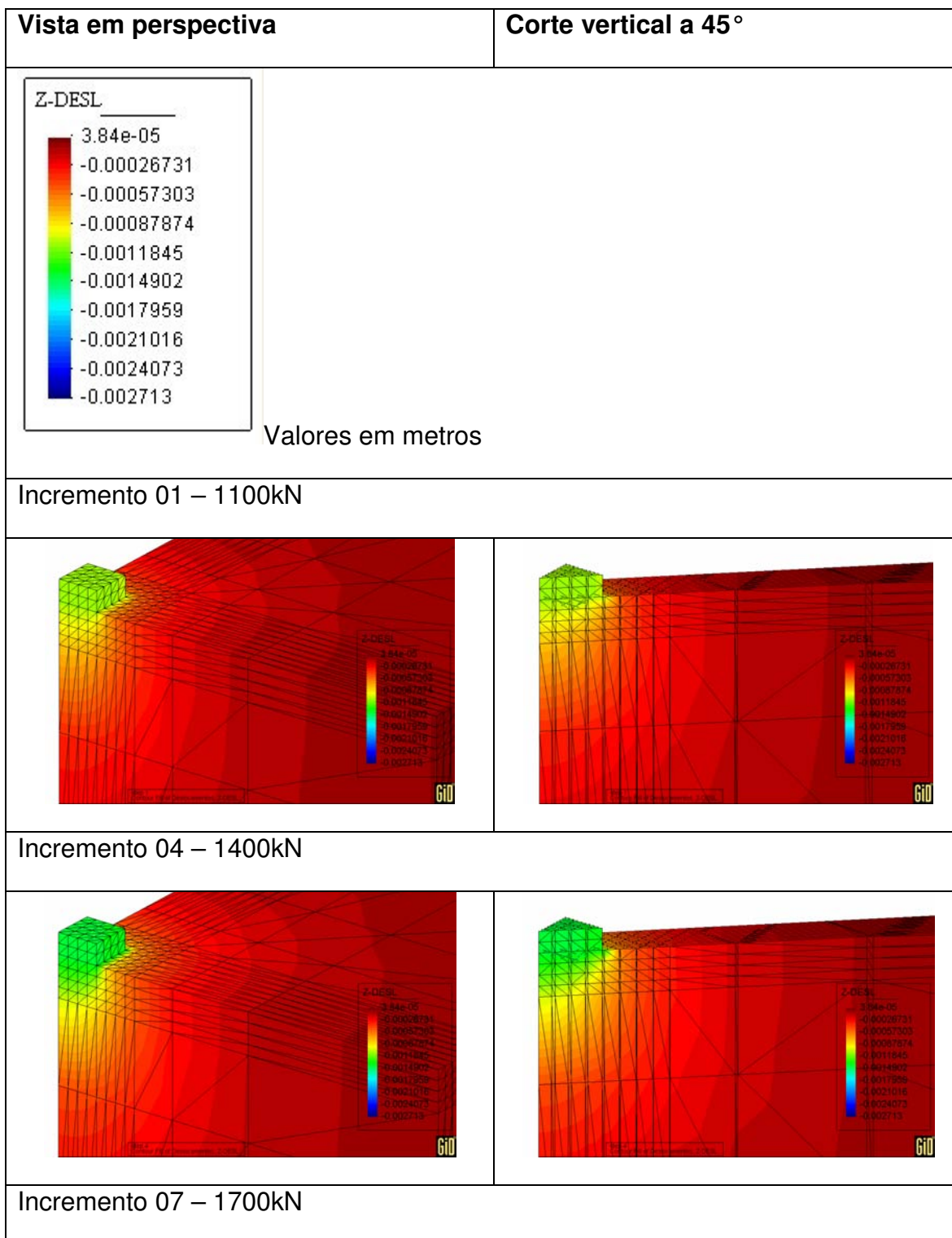
Este exemplo utilizou uma massa de solo formada exclusivamente por elementos com parâmetros do “Solo 1”, inclusive aquela camada destacada nas Figuras 6.2 e 6.3.

A seguir, apresenta-se a distribuição dos deslocamentos nodais, tensões principais e deformações específicas principais na direção vertical para o conjunto fundação-solo, onde cada incremento é representado em duas figuras: vista em perspectiva e corte vertical a 45°. Além desses, apresentam-se também as tensões nas barras de armadura.

Optou-se por apresentar o intervalo de carga correspondente aos estágios finais da simulação.

6.1.1.1 Deslocamentos verticais nos elementos de concreto e solo

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução dos deslocamentos verticais em função do aumento da carga aplicada pelo pilar que supostamente se apoiaria na sapata. A escala, apresentada inicialmente, é válida para os resultados dos cinco incrementos de carga apresentados.



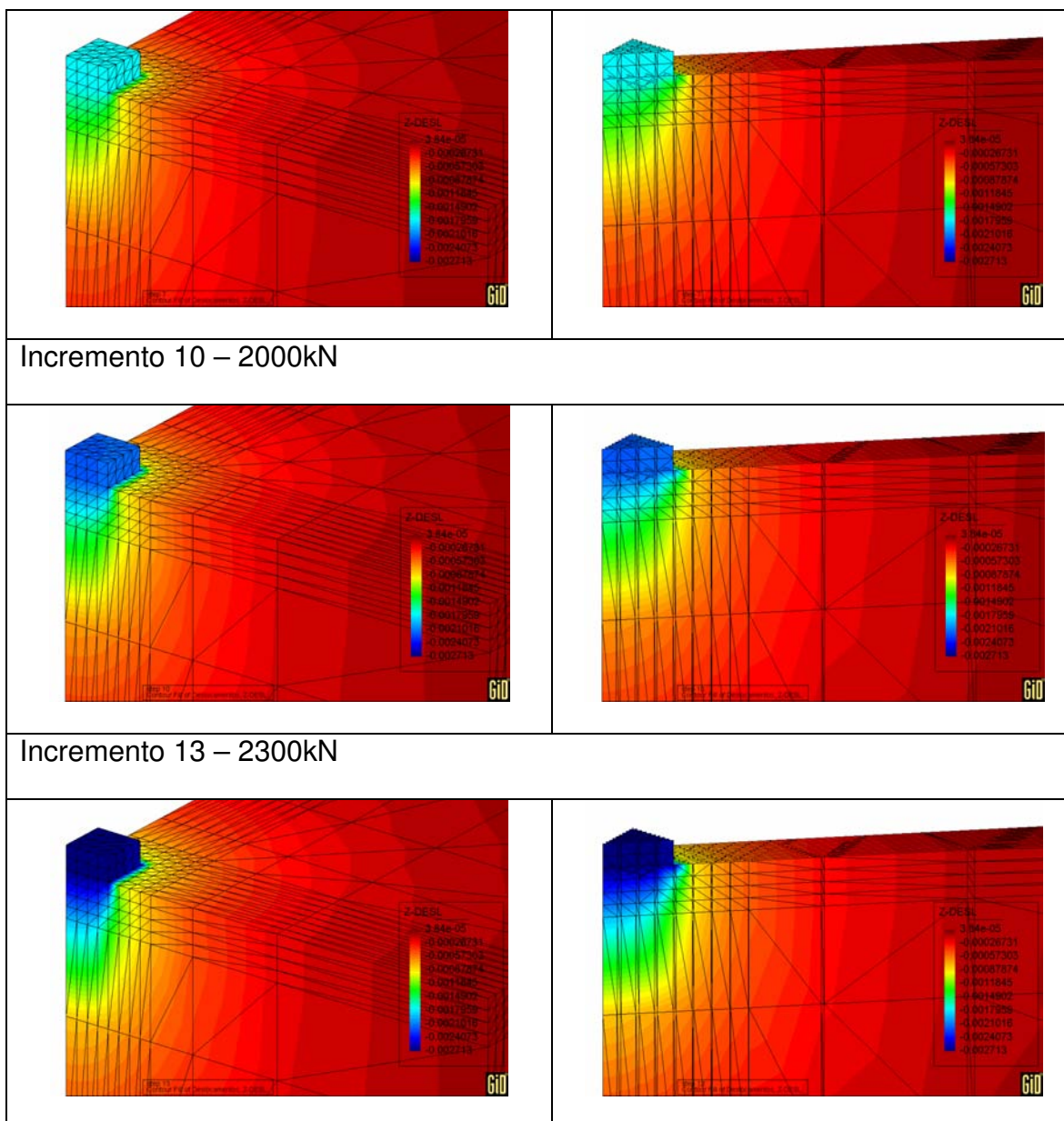


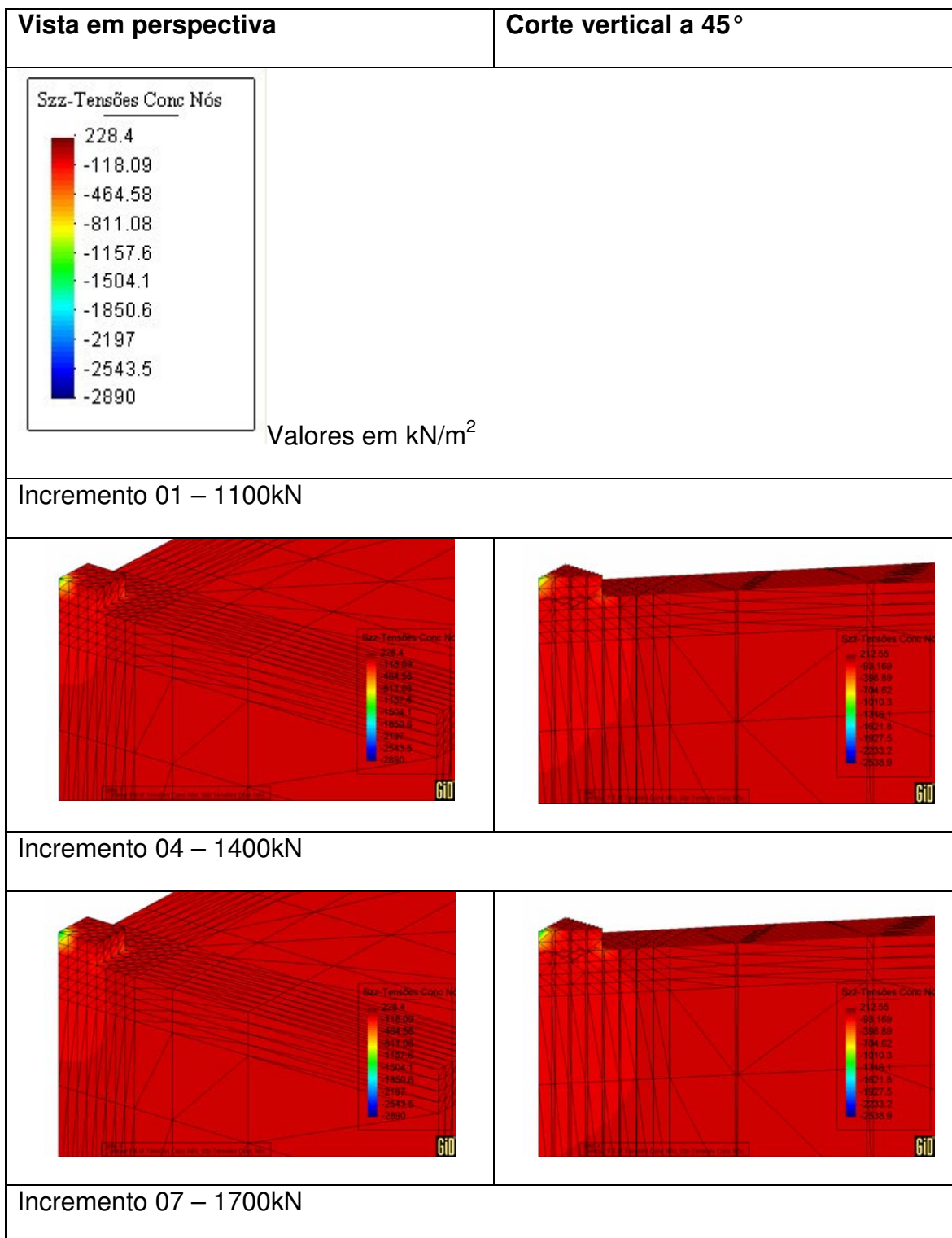
Figura 6.4 – Configuração 1 – Distribuição dos deslocamentos verticais.

Esses resultados são importantes para confirmar o comportamento da fundação, pois, como era de se esperar de uma sapata considerada rígida, esta apresenta um deslocamento uniforme em toda a sua extensão.

Além disso, é possível observar a formação de bulbos de deslocamento no interior da massa de solo. A magnitude do máximo deslocamento é da ordem de 3 mm.

6.1.1.2 Tensões normais verticais nos elementos de concreto e solo

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das tensões normais verticais em função do aumento da carga aplicada por um suposto pilar sobre a sapata. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos cinco incrementos de carga apresentados.



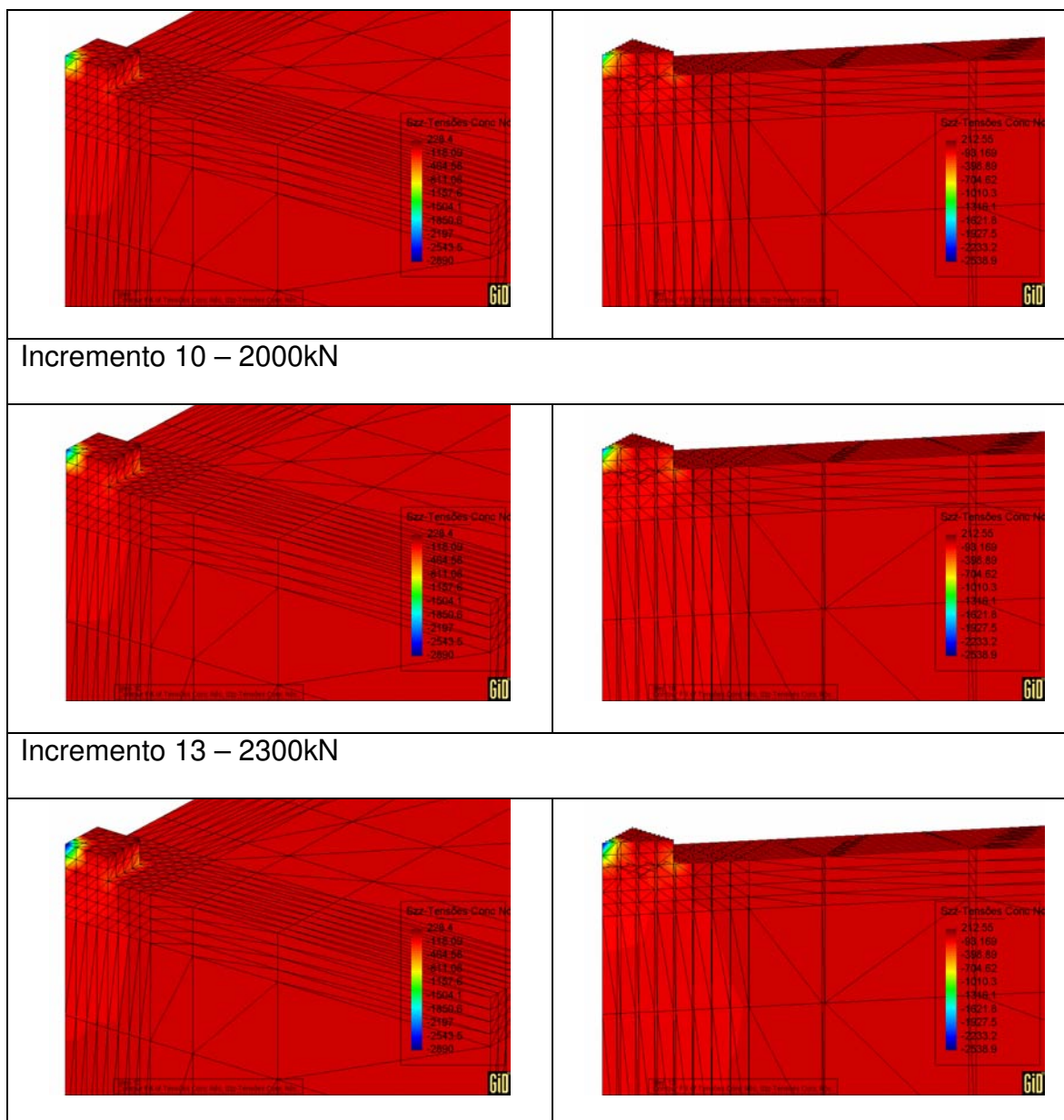


Figura 6.5 – Configuração 1 – Distribuição das tensões normais verticais.

Inicialmente, é possível destacar que o ponto de aplicação da carga do pilar é o local onde há o nível mais elevado de tensões do conjunto fundação-solo. Porém essa concentração de tensões não é surpreendente, pois, sendo a diferença entre os módulos de elasticidade dos materiais muito elevada, era esperado que a fundação apresentasse as tensões mais elevadas.

Contudo, existem outras regiões que merecem maior destaque na série de resultados apresentada. Trata-se das bordas da fundação junto à interface com o solo, especialmente a quina, onde também aparecem níveis de tensão

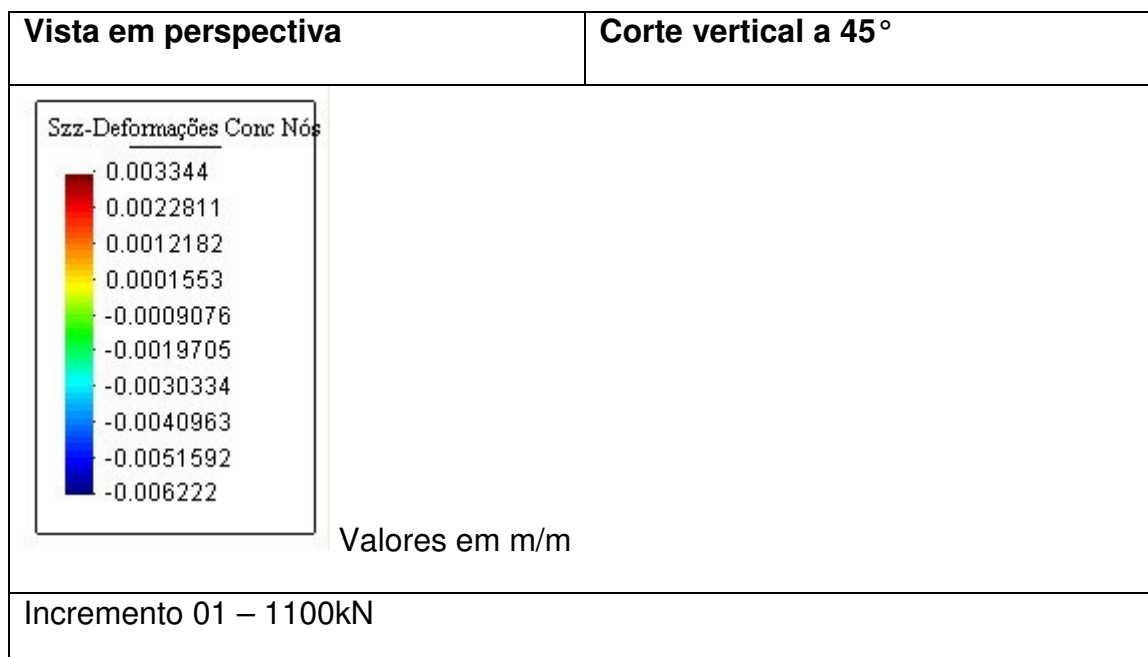
mais elevados do que no restante da massa de solo, inclusive superiores às tensões na região central da fundação junto ao solo. Nos incrementos apresentados, todas essas regiões se encontram plastificadas.

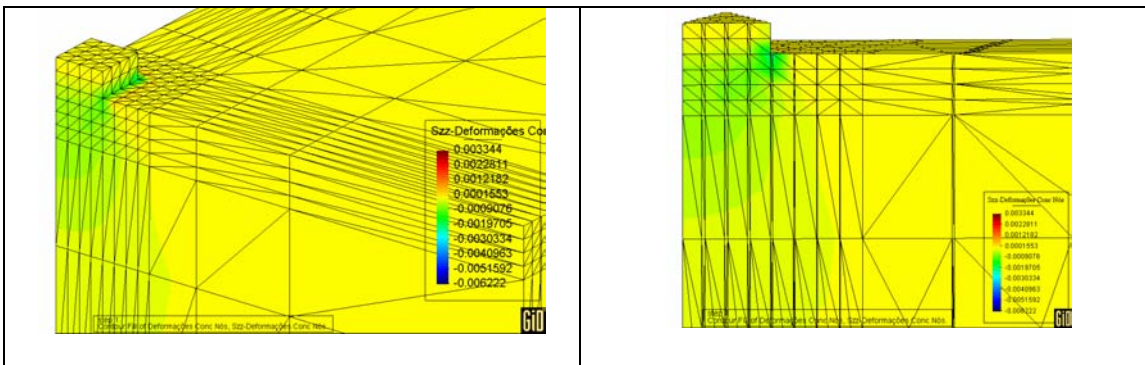
Esse tipo de distribuição de tensões mais elevadas nas bordas do que no centro da interface fundação-solo se deve também a grande diferença entre os módulos de elasticidade do material, conforme foi verificado também por Vitoretti (2003).

Finalmente, também é importante destacar o aparecimento de bulbos de tensão na massa de solo. Entretanto, em função da escala utilizada para a visualização das tensões ser muito abrangente, a magnitude das tensões que formam os bulbos não permite identificar mais do que um ou dois níveis de tensão no restante da massa de solo.

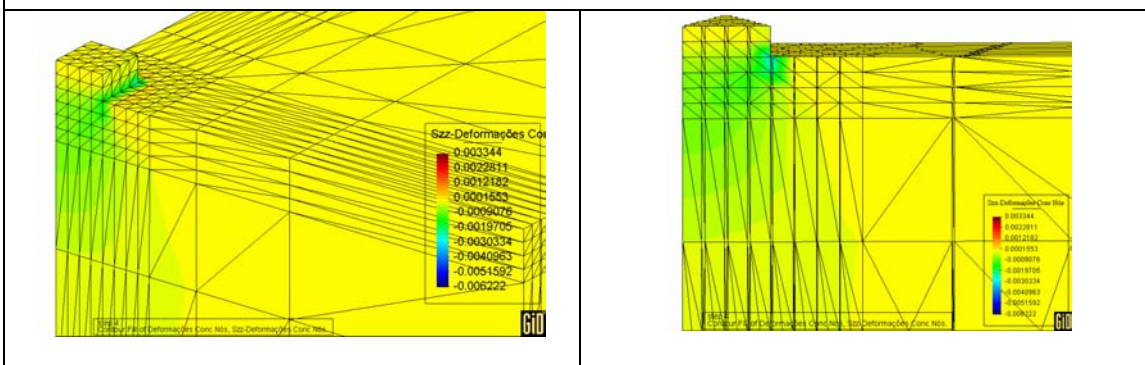
6.1.1.3 Deformações específicas normais verticais no concreto e solo

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das deformações específicas normais verticais ϵ_{zz} em função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos cinco incrementos de carga apresentados.

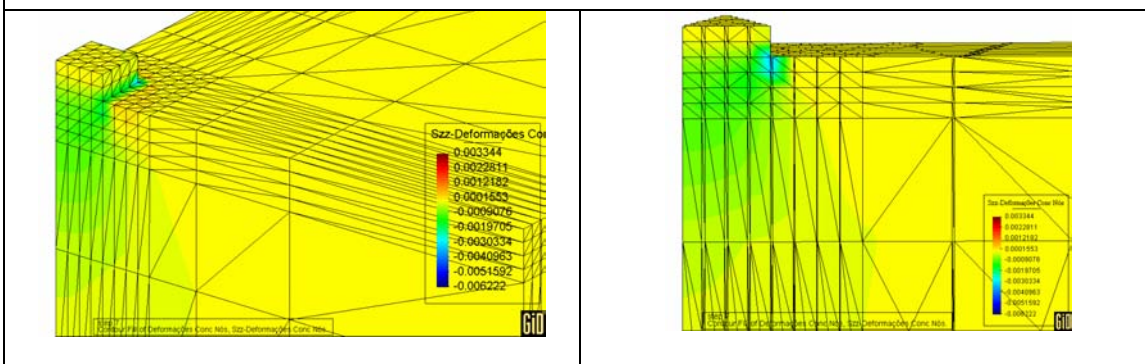




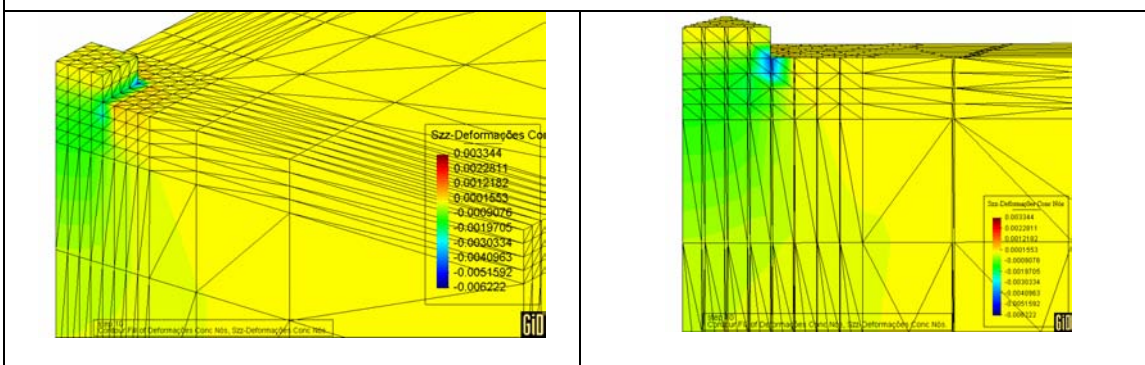
Incremento 04 – 1400kN



Incremento 07 – 1700kN



Incremento 10 – 2000kN



Incremento 13 – 1900kN

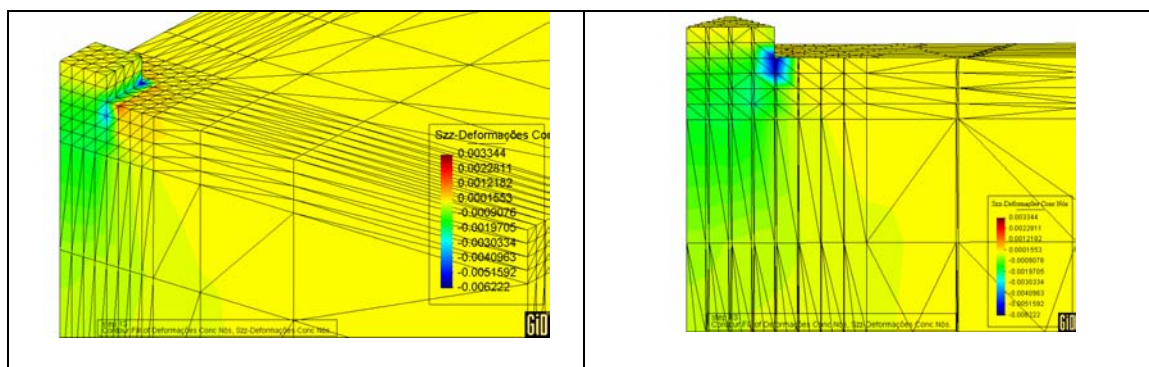


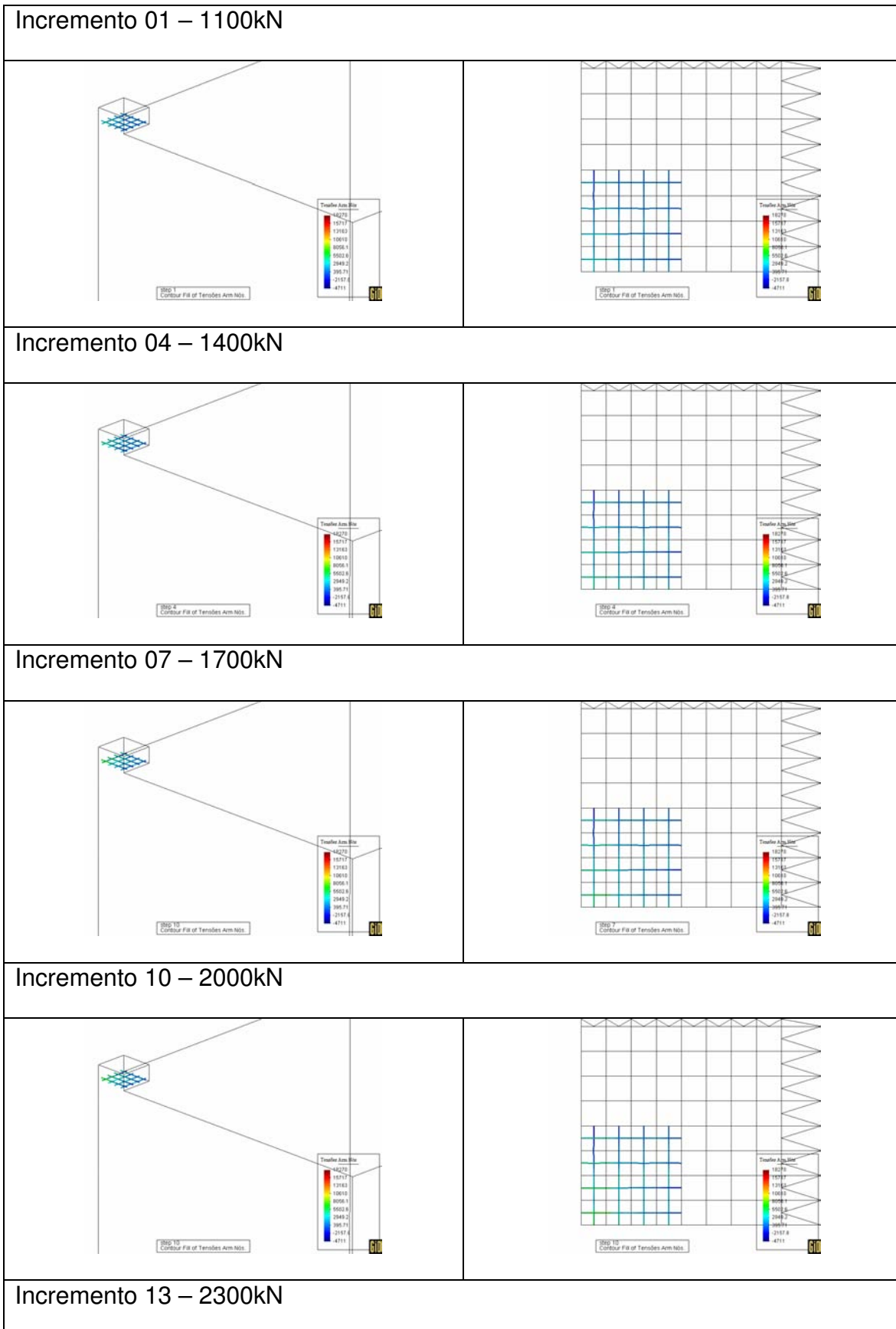
Figura 6.6 – Configuração 1 – Distribuição das deformações específicas normais verticais.

A importância de se apresentar a evolução dessas deformações fica evidente, pois é possível identificar claramente as regiões de plastificação do solo nas regiões da borda da fundação. Assim, distingue-se a forma de falha do conjunto fundação-solo através da perda da capacidade resistente do solo, enquanto a fundação permanece íntegra.

6.1.1.4 Tensões nos elementos de armadura

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das tensões na armadura função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos cinco incrementos de carga deste item.

Vista em perspectiva	Vista em planta
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px;"> <p>Tensões Arm Nós</p> <p>18270 15717 13163 10610 8056.1 5502.6 2949.2 395.71 -2157.8 -4711</p> </div> <div> <p>Valores em kN/m²</p> </div> </div>	



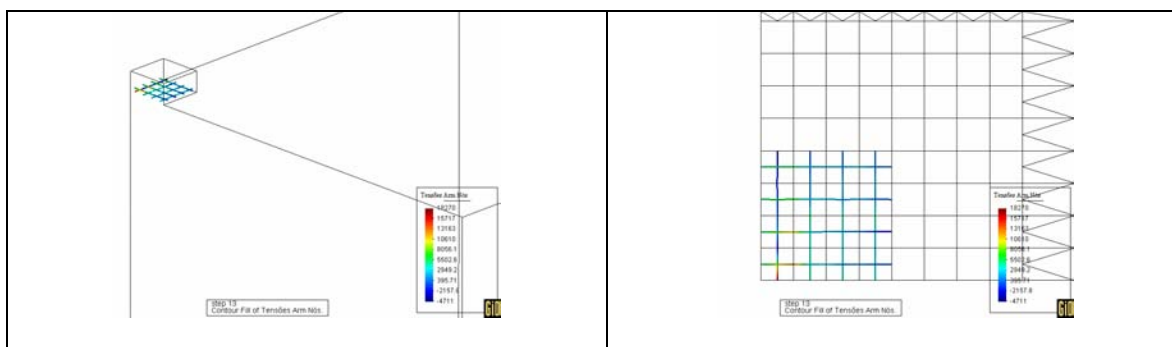


Figura 6.7 – Configuração 1 – Distribuição de tensões na armadura.

Como é possível notar, a armadura da fundação é muito pouco solicitada, atingindo valores máximos em torno de $1,8 \text{ kN/cm}^2$. Esse fato confirma que a fundação permanece íntegra durante a perda da capacidade resistente do solo, sendo que apenas nos incrementos finais é que ocorre alguma mobilização das barras.

6.1.1.5 Comparação entre as respostas para o concreto, o solo e a armadura

Este item, diferentemente dos anteriores, tem o intuito de propiciar a visão global da simulação realizado para a Configuração 1, permitindo a comparação, de maneira imediata, entre os resultados da deformação específica normal vertical, os resultados da tensão normal vertical e os resultados da tensão na armadura.

Concreto e solo		Armadura
<i>Deformações específicas normais verticais</i>	<i>Tensões normais verticais</i>	<i>Tensões</i>
<p>Szz-Deformações Conc Nós</p> <p>0.003344 0.0022811 0.0012182 0.0001553 -0.0009076 -0.0019705 -0.0030334 -0.0040963 -0.0051592 -0.006222</p> <p>Valores em m/m</p>	<p>Szz-Tensões Conc Nós</p> <p>228.4 -118.09 -464.58 -811.08 -1157.6 -1504.1 -1850.6 -2197 -2543.5 -2890</p> <p>Valores em kN/m²</p>	<p>Tensões Arm Nós</p> <p>18270 15717 13163 10610 8056.1 5502.6 2949.2 395.71 -2157.8 -4711</p> <p>Valores em kN/m²</p>
Incremento 01 – 1100kN		
<p>Contour Plot of Deformations Conc Nós. Top: Deformações Conc Nós</p>	<p>Contour Plot of Tensões Conc Nós. Top: Tensões Conc Nós</p>	<p>Contour Plot of Tensões Arm Nós. Top: Tensões Arm Nós</p>
Incremento 04 – 1400kN		
<p>Contour Plot of Deformations Conc Nós. Top: Deformações Conc Nós</p>	<p>Contour Plot of Tensões Conc Nós. Top: Tensões Conc Nós</p>	<p>Contour Plot of Tensões Arm Nós. Top: Tensões Arm Nós</p>
Incremento 07 – 1700kN		

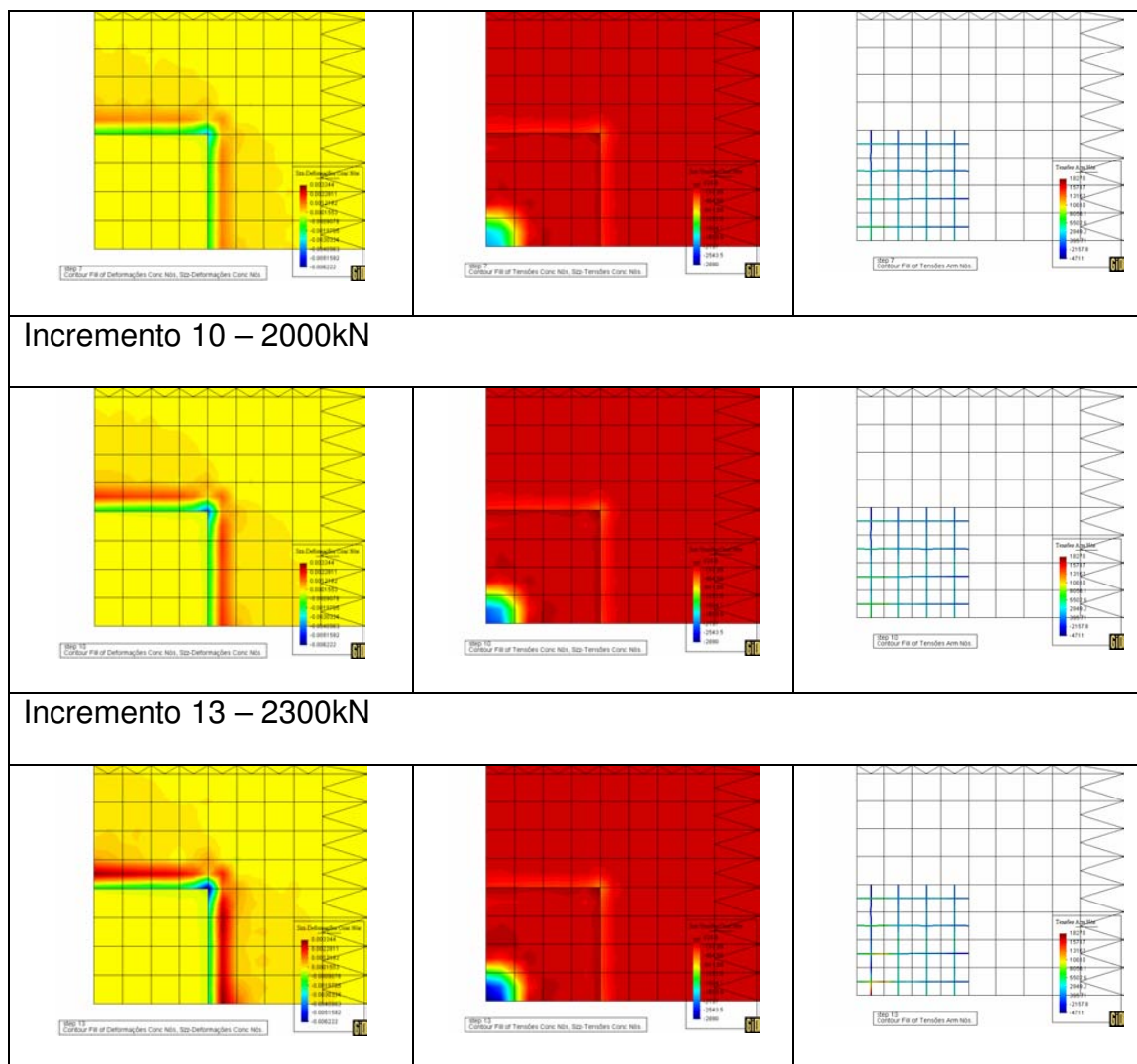


Figura 6.8 – Configuração 1: Comparação entre as deformações específicas normais verticais, as tensões normais verticais no solo e no concreto e tensões na armadura.

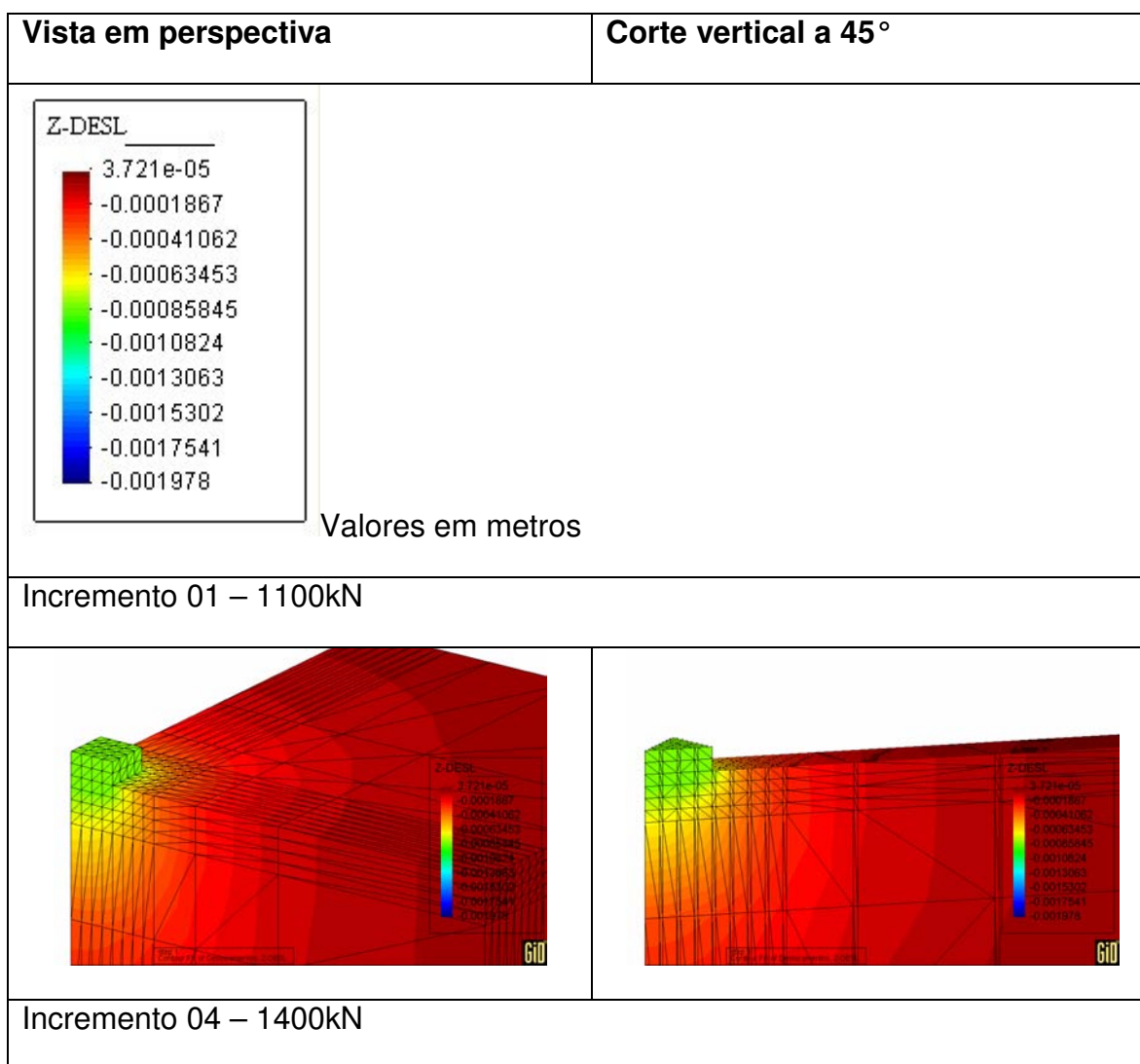
A importância da comparação entre esses resultados permite esclarecer e validar as constatações realizadas individualmente nos itens anteriores do presente exemplo. Nota-se que, de fato, a região da borda da fundação, onde há o excesso de deformações, é também a região onde há a concentração de tensões. Percebe-se, também, que a armadura se comporta quase que de forma indiferente à plastificação, pois em razão desta, quase não é mobilizada.

6.1.2 Configuração 2

Este exemplo utilizou uma camada formada por elementos com parâmetros do “Solo 2”, conforme indicado pelas Figuras 6.2 e 6.3, e o restante da massa de solo formada por elementos com parâmetros do “Solo 1”.

6.1.2.1 Deslocamentos verticais nos elementos de concreto e solo

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução dos deslocamentos verticais em função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida para os resultados dos cinco incrementos de carga.



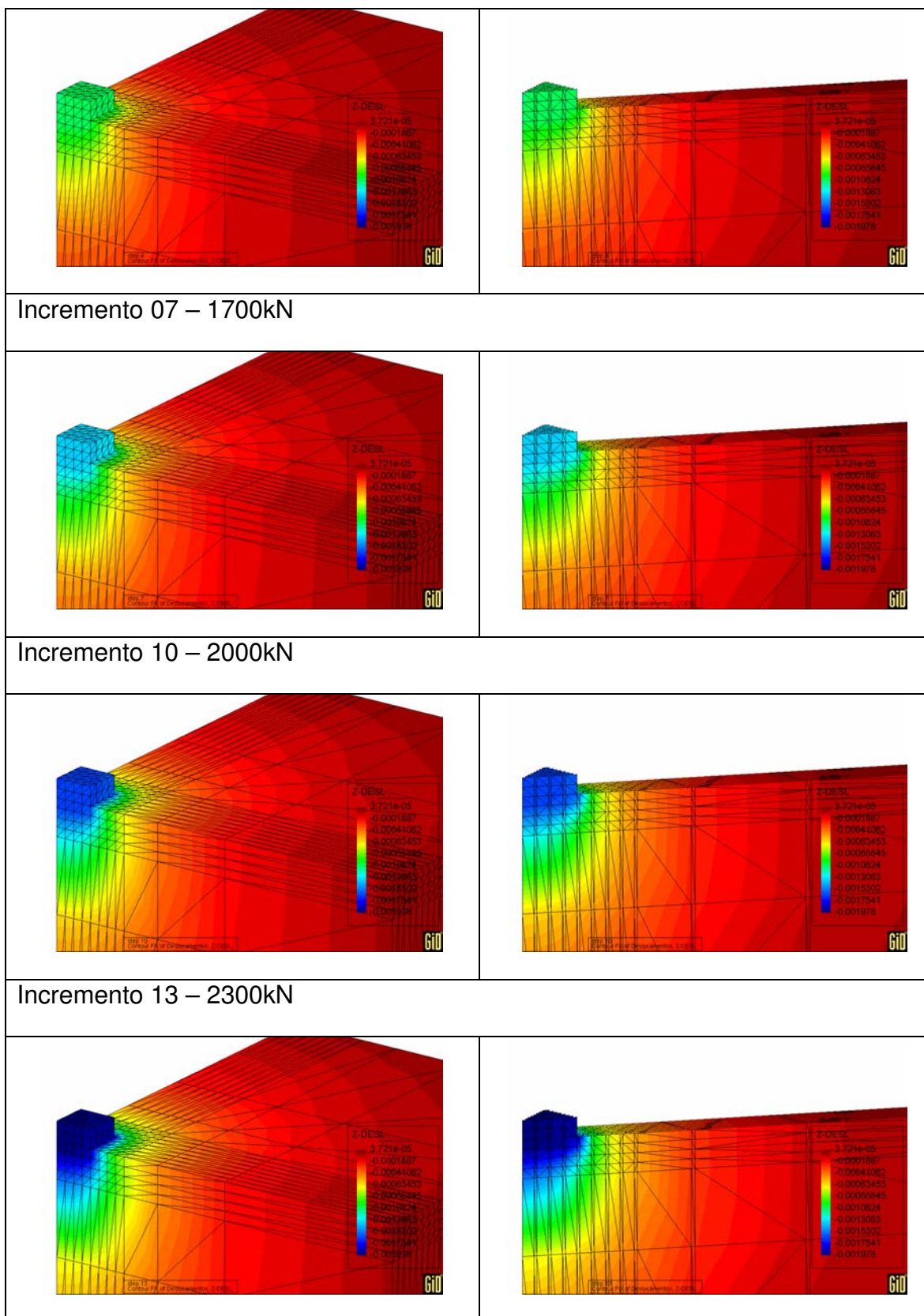
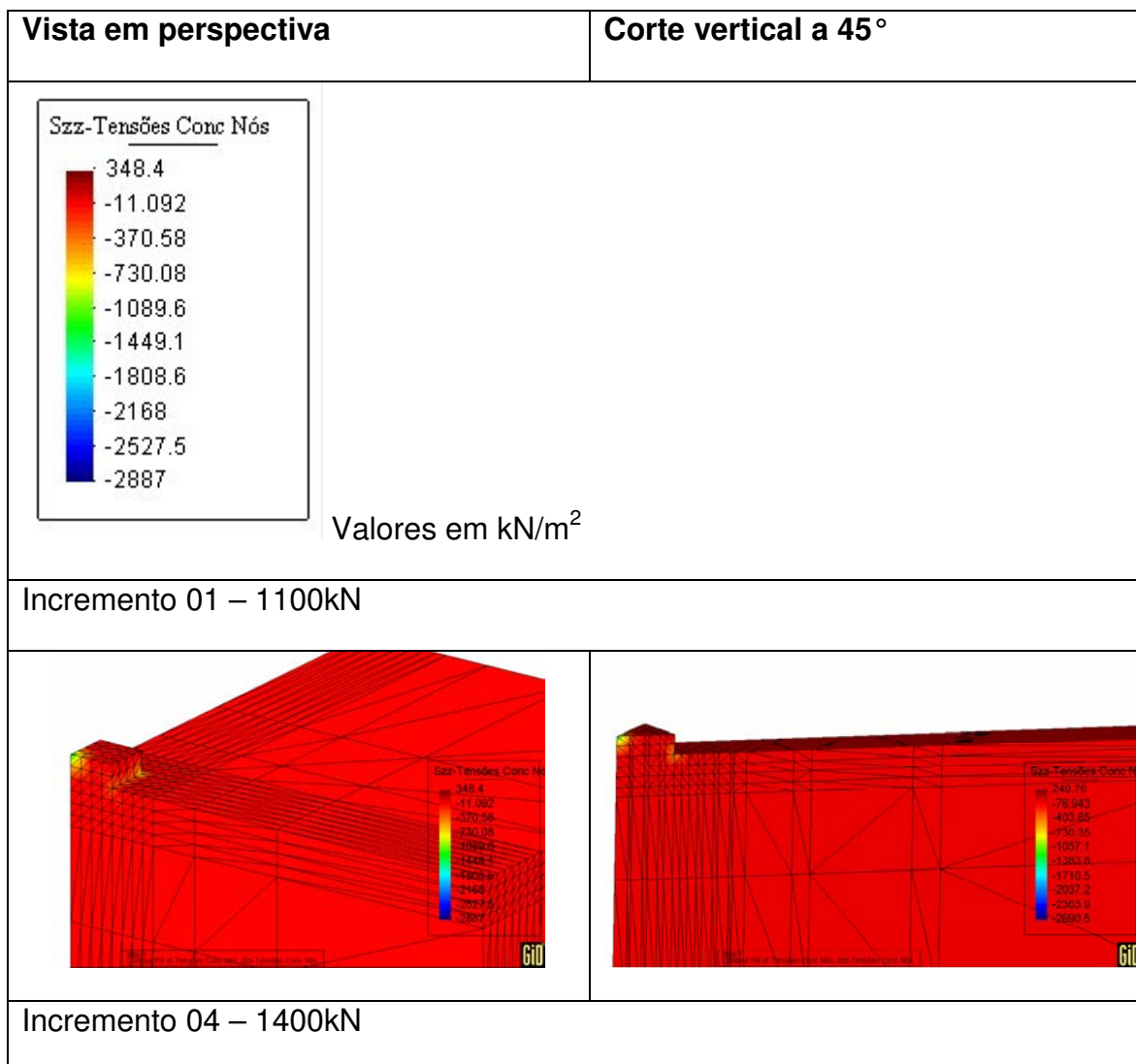


Figura 6.9 – Configuração 2 – Distribuição dos deslocamentos verticais.

Assim como o exemplo anterior, a sapata, considerada rígida, apresenta deslocamento uniforme em toda sua extensão. Também se observa nitidamente a formação dos bulbos de deslocamento no interior da massa de solo, onde a magnitude do máximo deslocamento é da ordem de 2 mm. Nesse caso, é possível inferir que uma pequena camada de “Solo 2” já atua na redução do recalque da fundação.

6.1.2.2 Tensões normais verticais nos elementos de concreto e solo

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das tensões normais verticais em função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos cinco incrementos de carga.



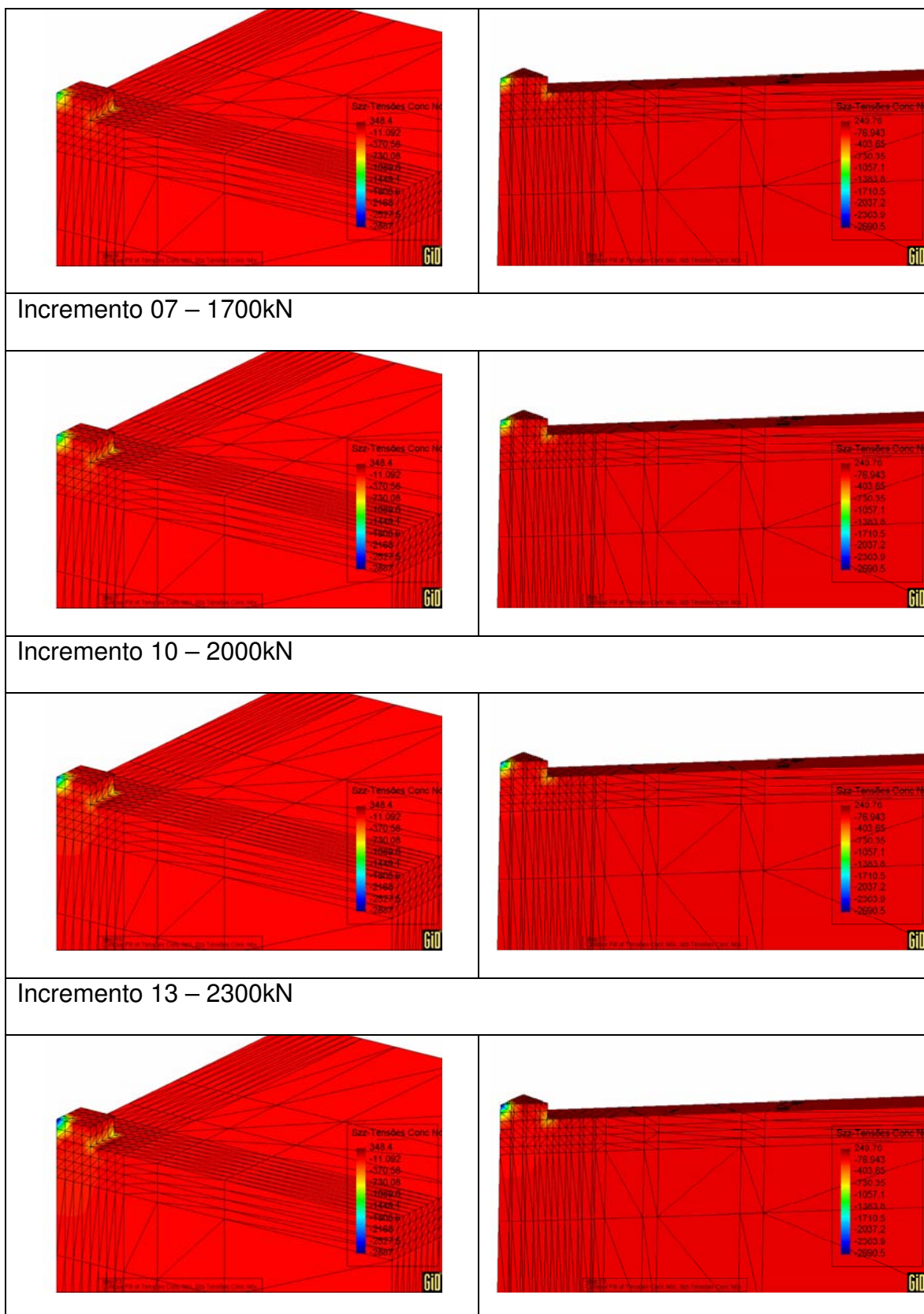


Figura 6.10 – Configuração 2 – Distribuição das tensões normais verticais.

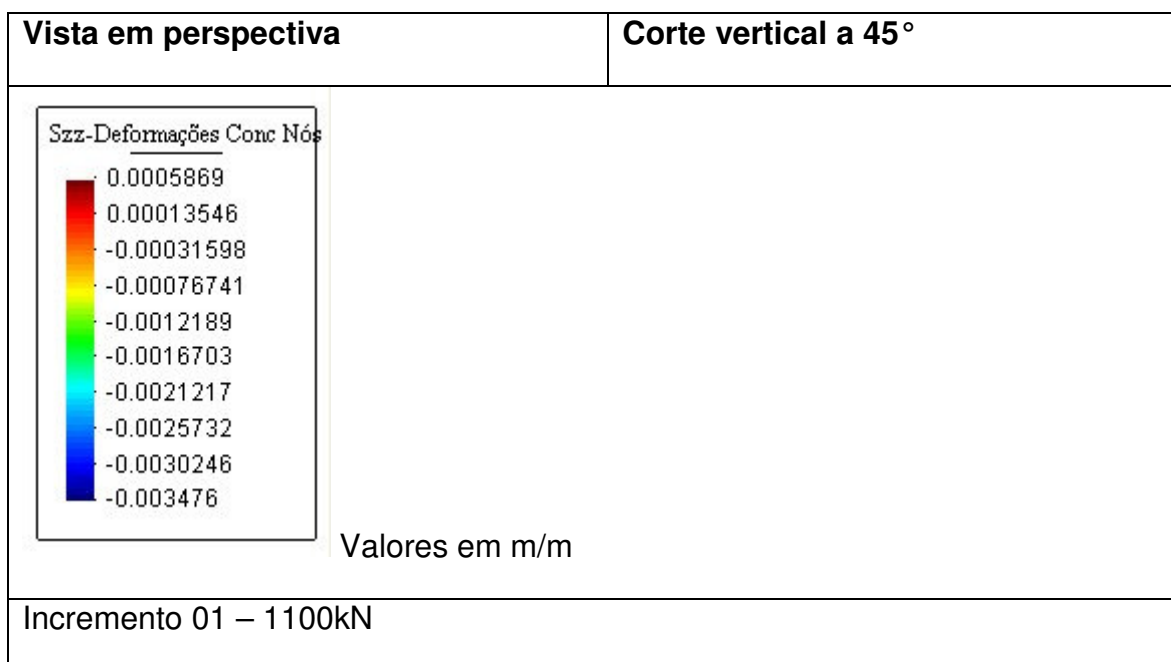
Neste exemplo, novamente ocorreu concentração de tensões no ponto de aplicação da carga do pilar.

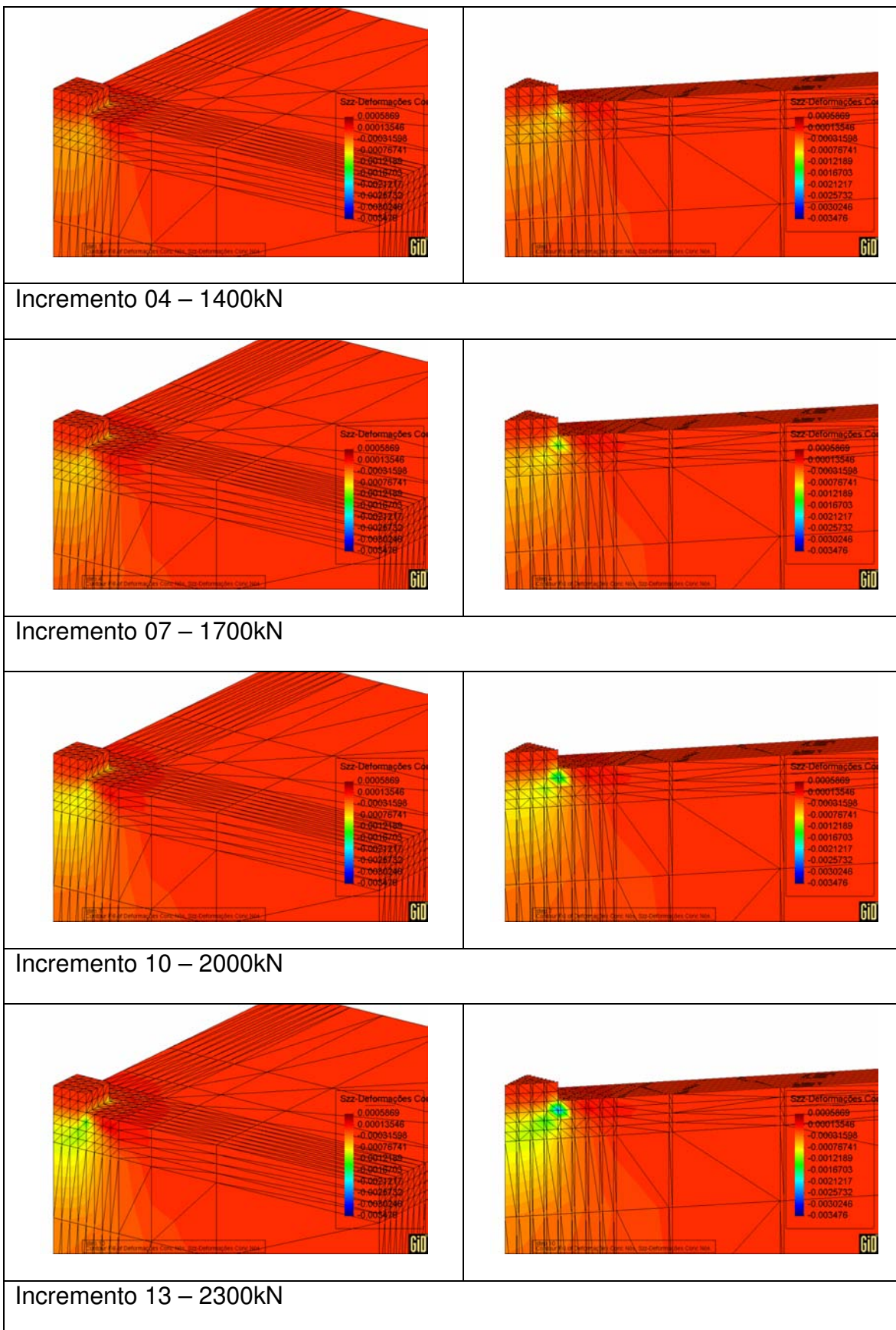
Porém, mais uma vez, destacam-se as bordas da fundação junto à interface com o solo. Em função do aumento da rigidez do solo, devido ao acréscimo de uma camada mais resistente, a magnitude das tensões aumentou nestas regiões. Desta forma, acentuou-se a distribuição de tensões observada no exemplo anterior. Nos incrementos apresentados, todas as regiões de borda se encontram plastificadas.

Os bulbos de tensão na massa de solo são distinguíveis apenas nos últimos incrementos de carga, pois a camada de “Solo 2” acaba retardando o aparecimento de níveis mais elevados de tensão na região central da fundação para os incrementos iniciais.

6.1.2.3 Deformações específicas normais verticais no concreto e no solo

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das deformações específicas normais verticais em função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos cinco incrementos de carga.





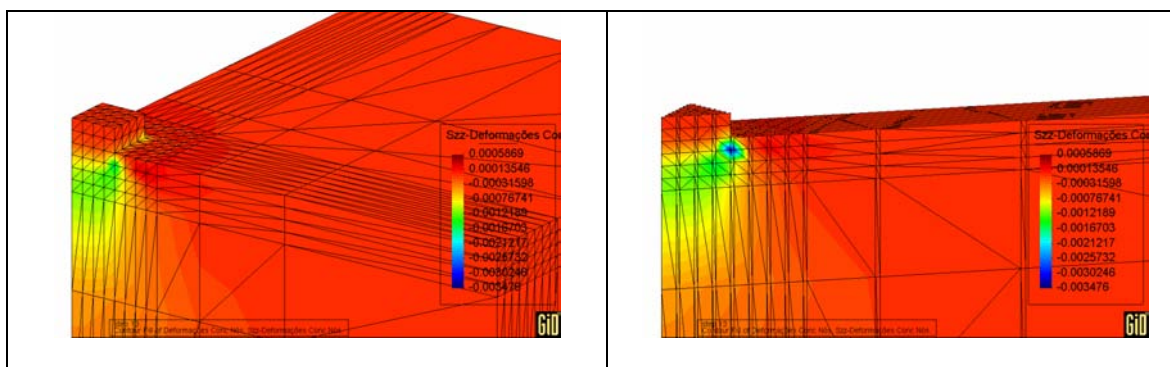
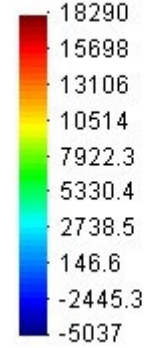
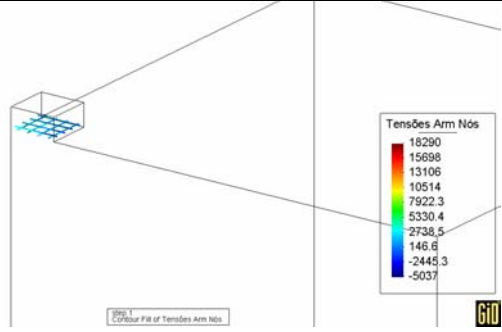
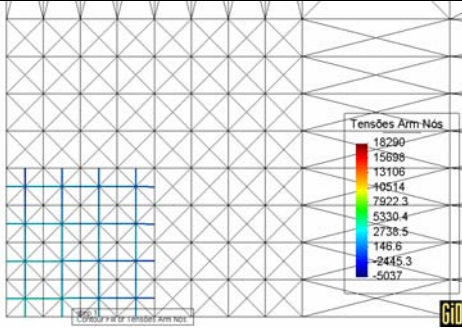
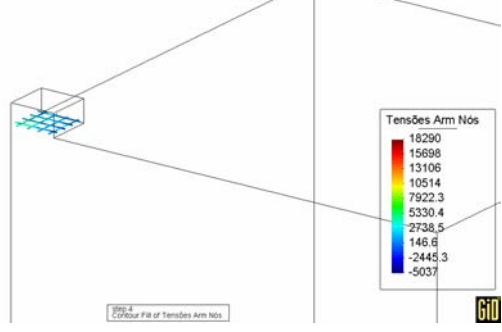
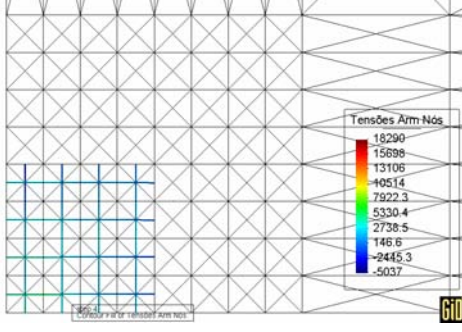


Figura 6.11 – Configuração 2 – Distribuição das deformações específicas normais verticais.

Nesse caso, novamente se evidencia a região de plastificação do solo nas regiões da borda da fundação, contudo uma magnitude menor. Aparentemente, a camada resistente de “Solo 2” resulta em uniformizar um pouco essa plastificação, porém, como anteriormente, distingue-se a forma de falha do conjunto fundação-solo através da perda da capacidade resistente do solo, enquanto a fundação permanece íntegra.

6.1.2.4 Tensões nos elementos de armadura

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das tensões na armadura função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos cinco incrementos de carga deste item.

Vista em perspectiva	Vista em planta
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px;"> <p>Tensões Arm Nós</p>  </div> <div> <p>Valores em kN/m²</p> </div> </div>	
<p>Incremento 01 – 1100kN</p>	
	
<p>Incremento 04 – 1400kN</p>	
	
<p>Incremento 07 – 1700kN</p>	

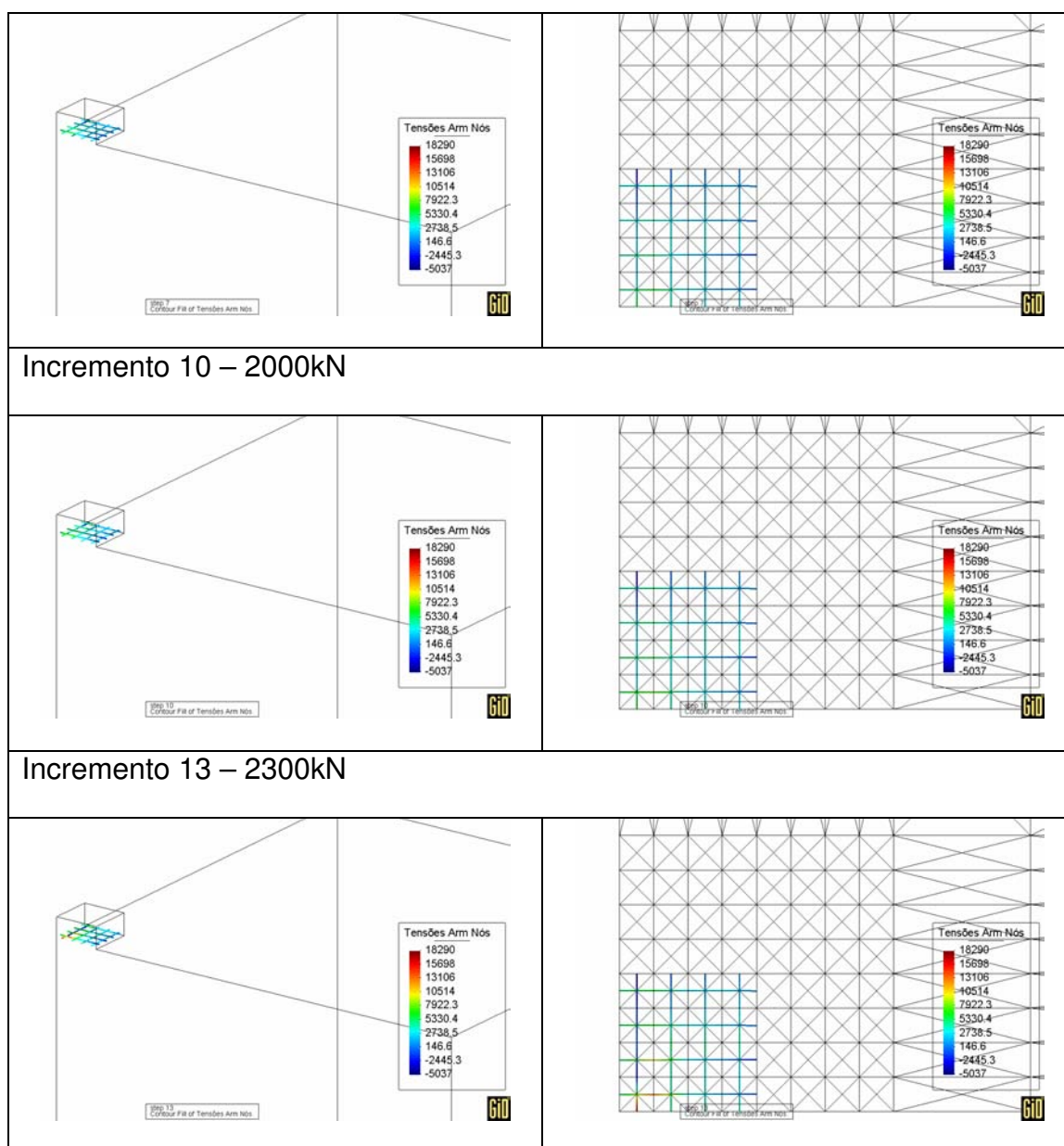
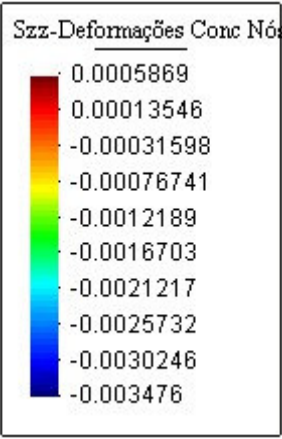
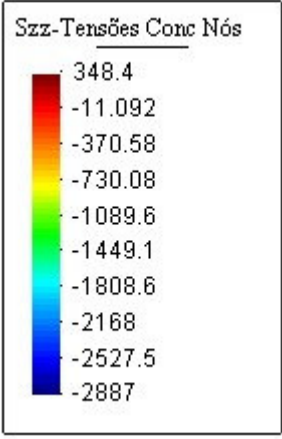
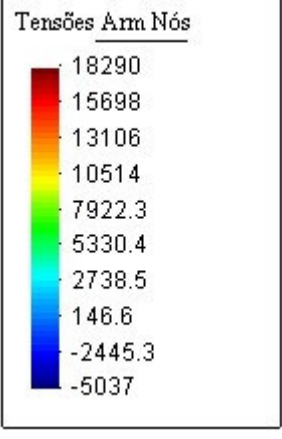
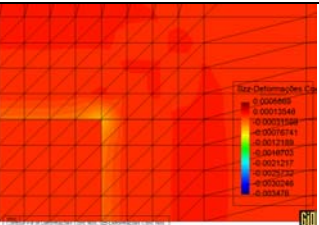
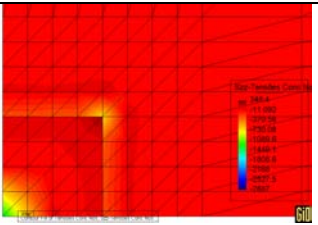
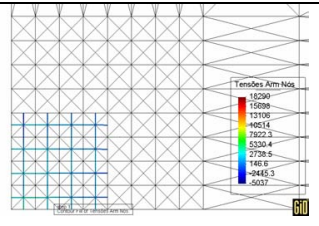
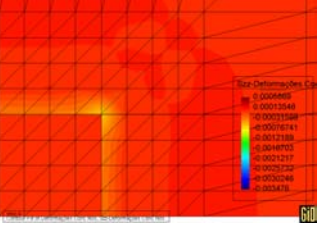
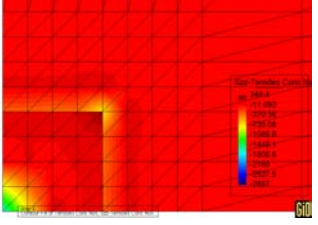
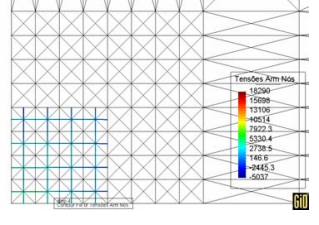


Figura 6.12 – Configuração 2 – Distribuição das tensões na armadura.

Assim como o exemplo anterior, as barras de armadura são muito pouco solicitadas, atingindo valores máximos de magnitude em torno de $1,8 \text{ kN/cm}^2$. Também apenas nos incrementos finais é que ocorre alguma mobilização das barras.

6.1.2.5 Comparação entre as respostas para o concreto, o solo e a armadura

Este item apresenta a comparação dos resultados entre as deformações específicas normais verticais, as tensões normais verticais e as tensões na armadura para a Configuração 2.

Concreto e solo		Armadura
Deformações específicas normais verticais	Tensões normais verticais	Tensões
 <p>Szz-Deformações Conc Nós</p> <p>Valores em m/m</p>	 <p>Szz-Tensões Conc Nós</p> <p>Valores em kN/m²</p>	 <p>Tensões Arm Nós</p> <p>Valores em kN/m²</p>
Incremento 01 – 1100kN		
		
Incremento 04 – 1400kN		
		
Incremento 07 – 1700kN		

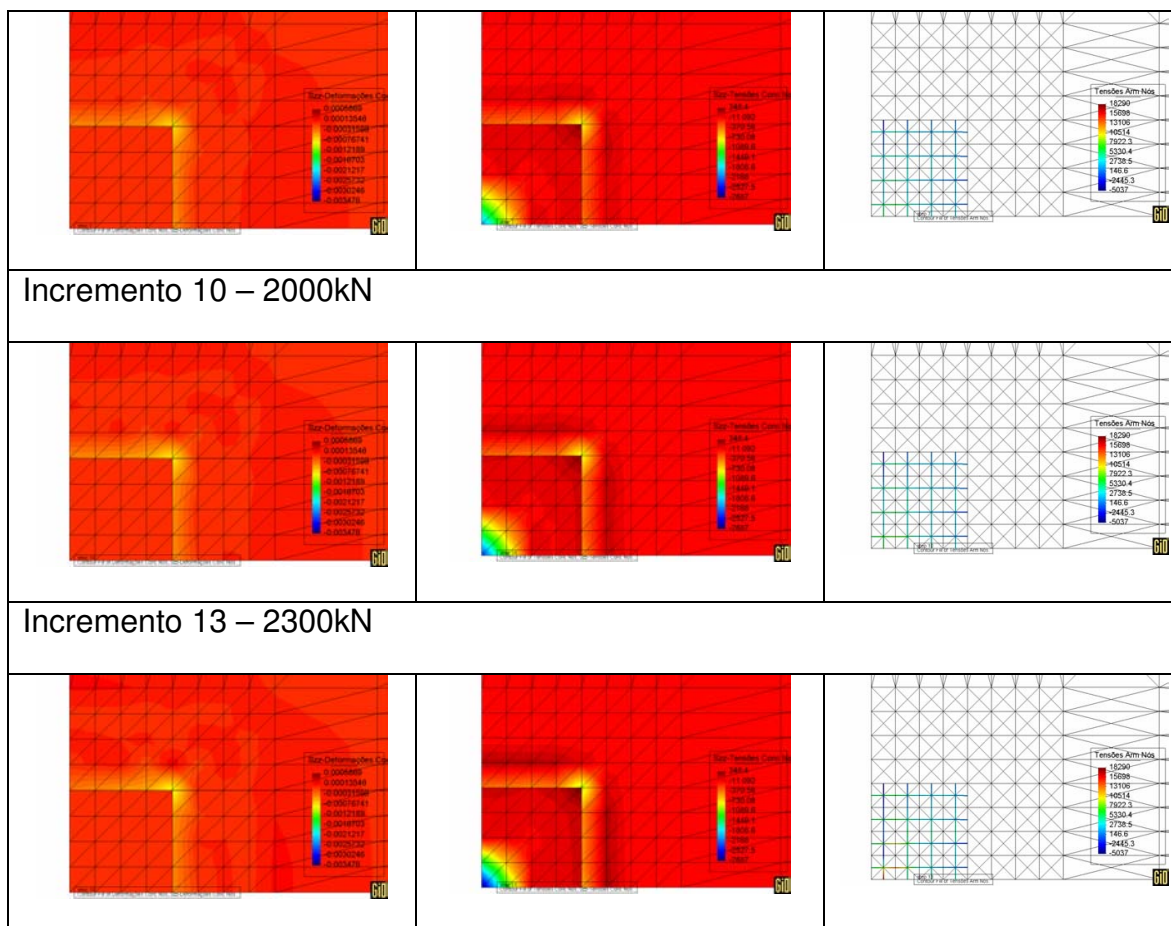


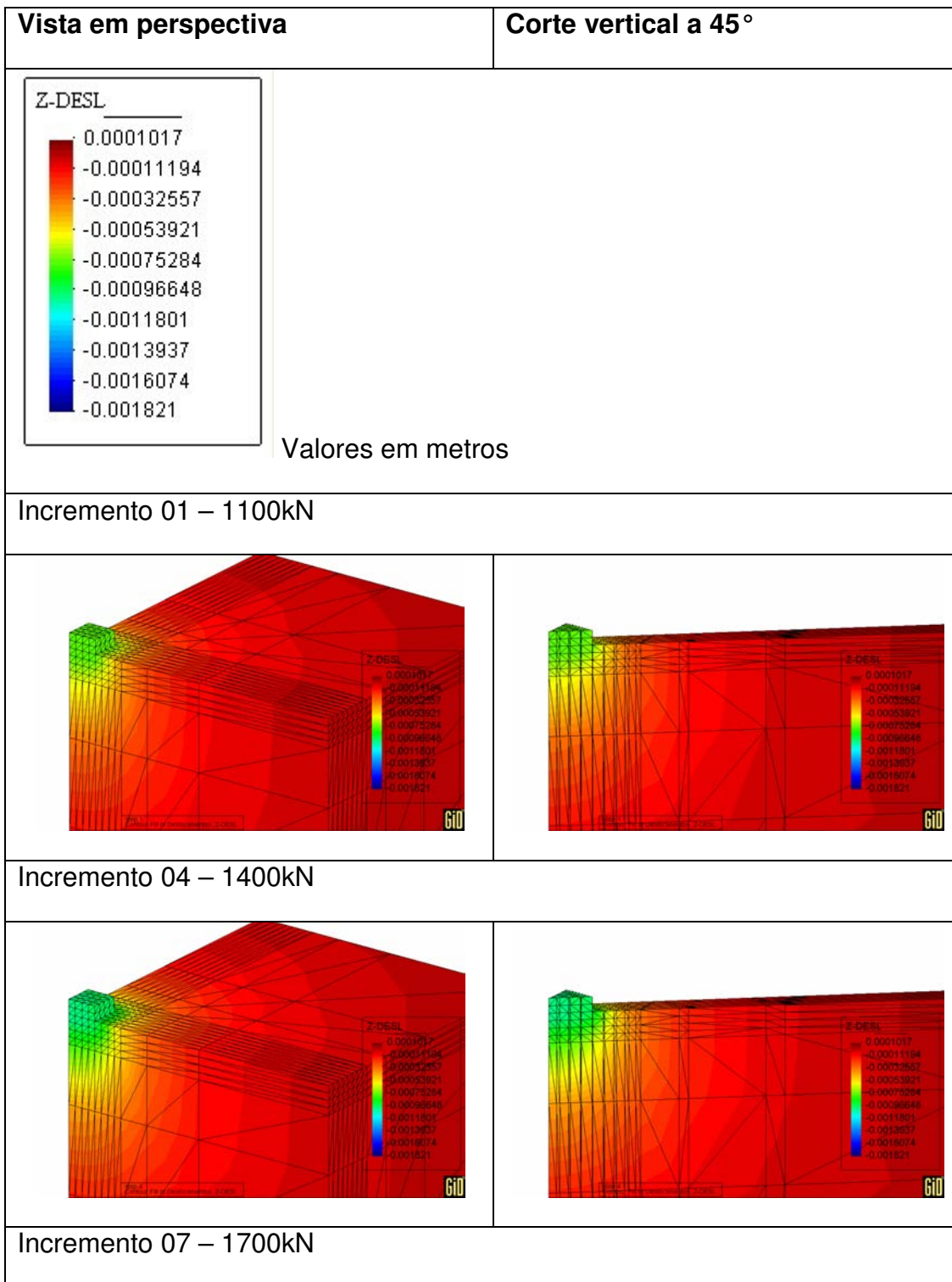
Figura 6.13 – Configuração 2: Comparação entre deformações específicas normais verticais, as tensões normais verticais no solo e no concreto e as tensões na armadura

6.1.3 Configuração 3

Este exemplo utilizou uma camada formada por elementos com parâmetros do “Solo 3”, conforme indicado pelas figuras 6.2 e 6.3, e o restante da massa de solo formada por elementos com parâmetros do “Solo 1”.

6.1.3.1 Deslocamentos verticais nos elementos de concreto e solo

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução dos deslocamentos verticais em função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida para os resultados dos cinco incrementos de carga mostrados.



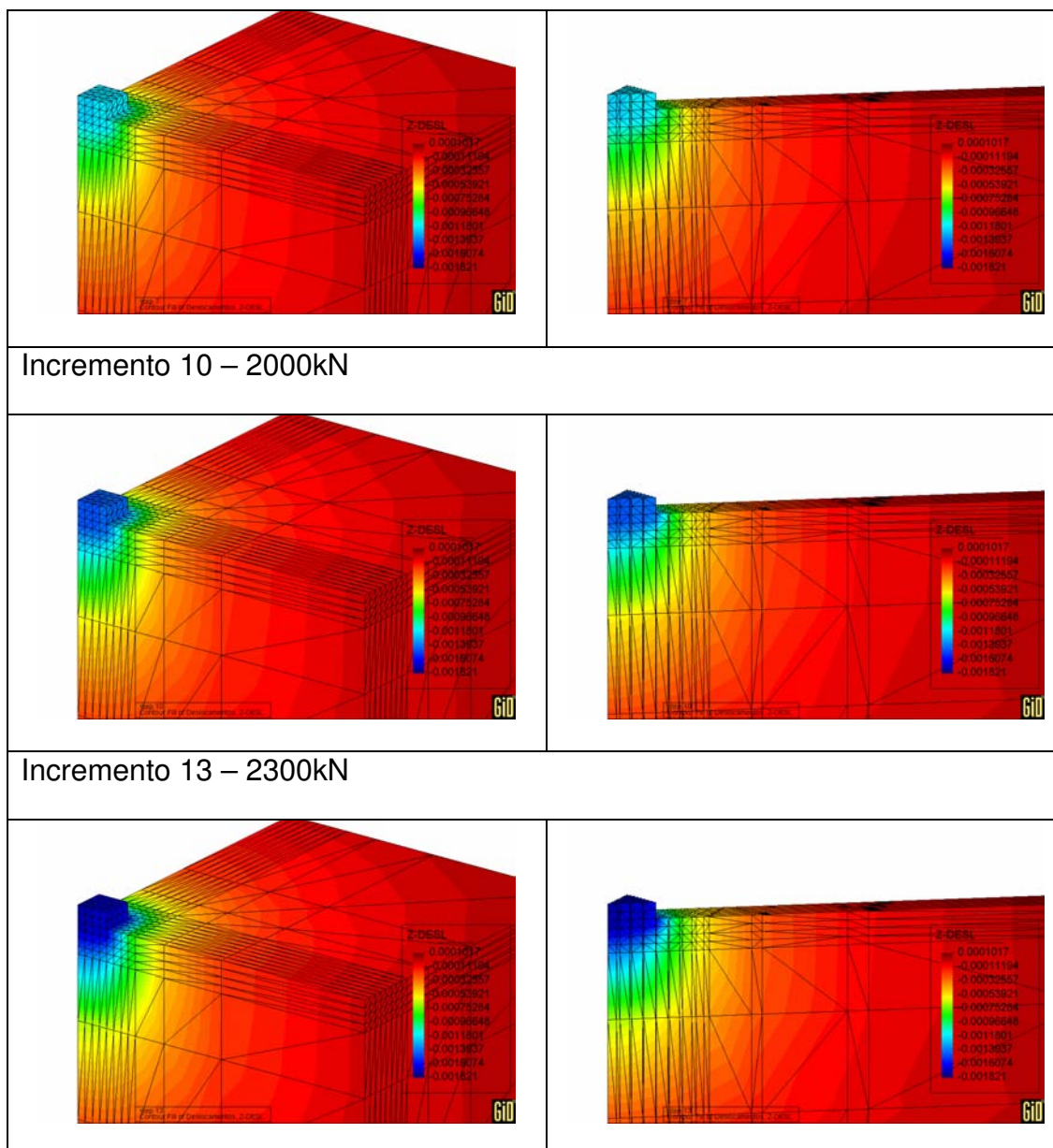


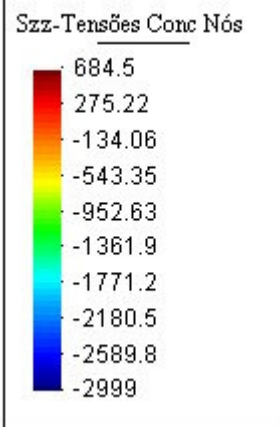
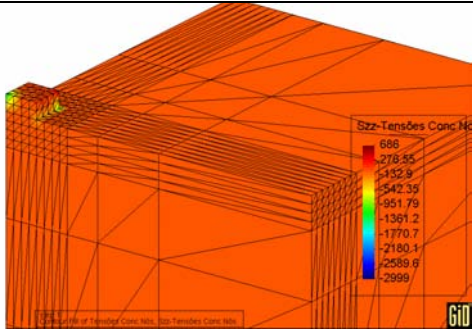
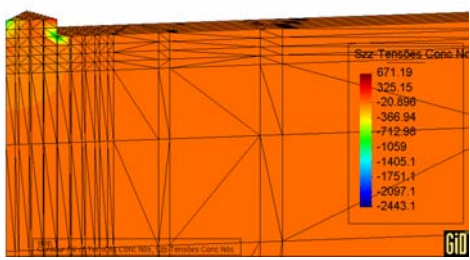
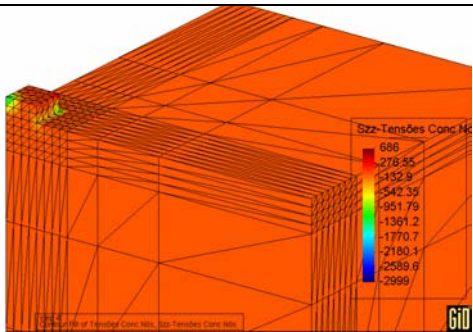
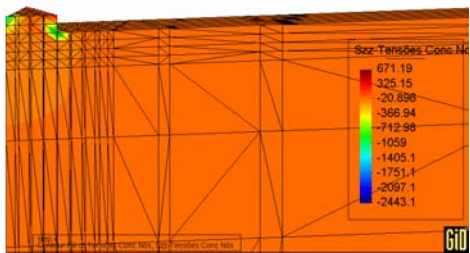
Figura 6.14 – Configuração 3 – Distribuição dos deslocamentos verticais

Novamente, a fundação apresenta deslocamento uniforme em toda sua extensão e há a formação de bulbos de deslocamento no interior da massa de solo. A magnitude dos deslocamentos permanece por volta de 2 mm, resultando em pouca alteração em relação ao exemplo anterior.

6.1.3.2 Tensões normais verticais nos elementos de concreto e solo

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das tensões normais verticais em função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala,

apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos cinco incrementos de carga mostrados.

Vista em perspectiva	Corte vertical a 45°
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px;"> <p>Szz-Tensões Conc Nós</p>  </div> <div> <p>Valores em kN/m²</p> </div> </div>	
<p>Incremento 01 – 1100kN</p>	
	
<p>Incremento 04 – 1400kN</p>	
	
<p>Incremento 07 – 1700kN</p>	

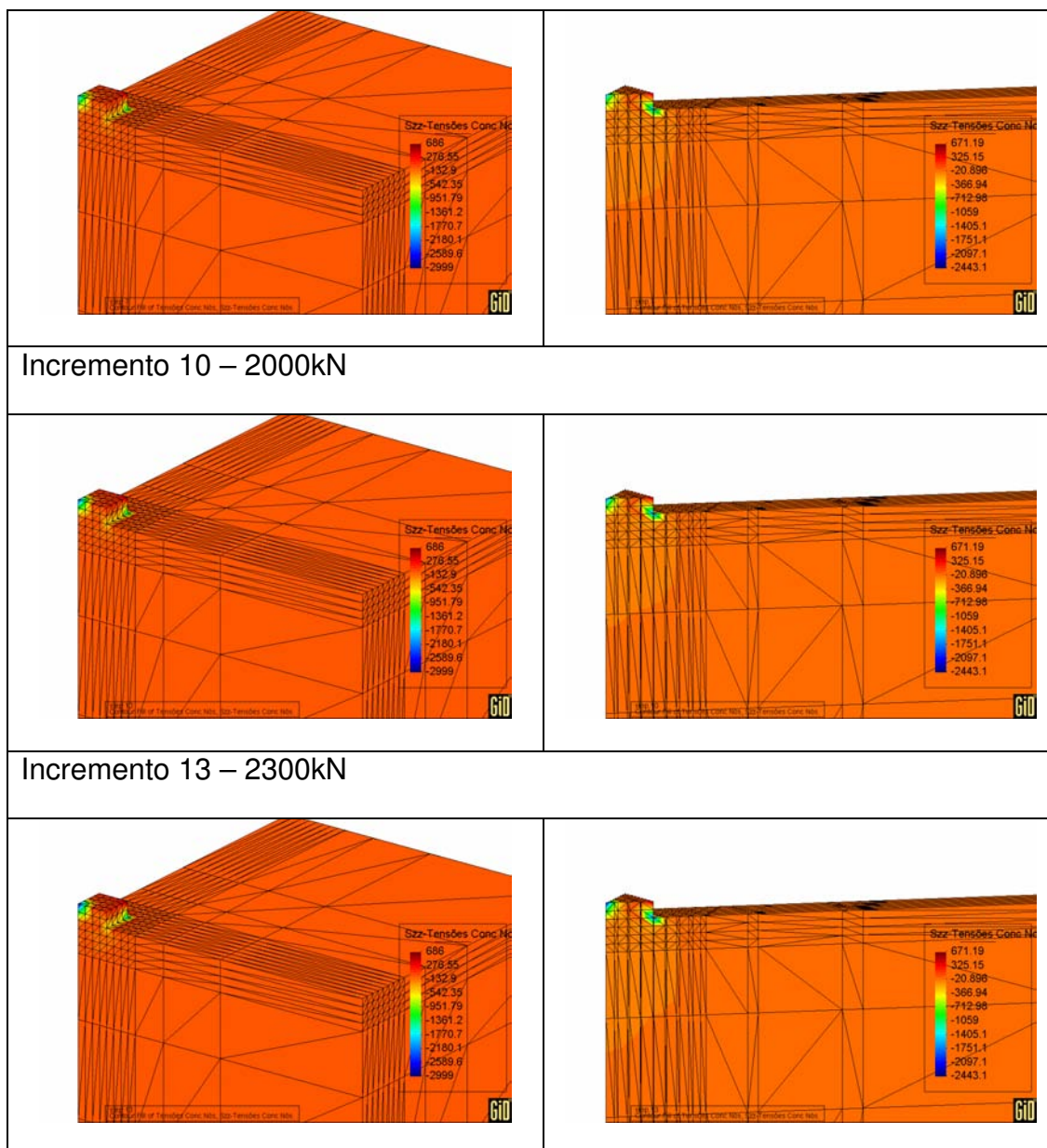


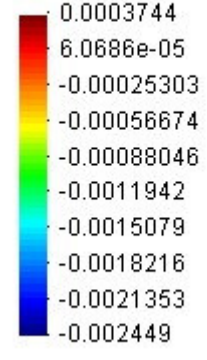
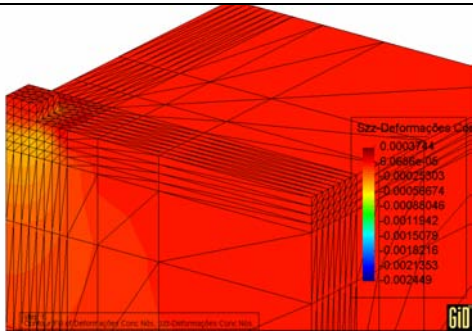
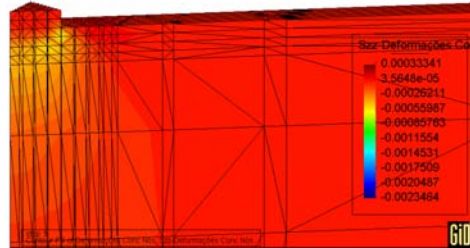
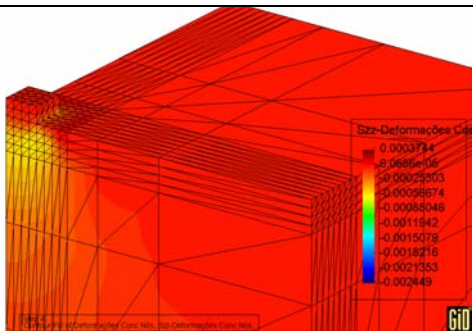
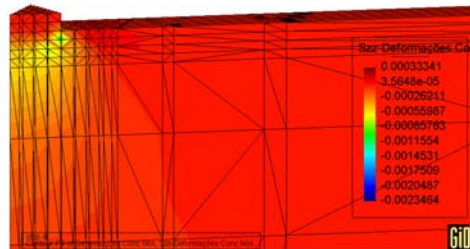
Figura 6.15 – Configuração 3 – Distribuição de tensões normais verticais

Além da concentração de tensões no ponto de aplicação da carga do pilar, as bordas da fundação junto à interface com o solo continuaram apresentando elevados níveis de tensão. Da mesma forma, persistiu e se acentuou a distribuição de tensões já observada nos outros exemplos e todas as regiões de borda se encontram plastificadas nos incrementos apresentados.

Assim como ocorreu com a camada de “Solo 2” da configuração anterior, a camada de “Solo 3” acaba retardando o aparecimento de níveis mais elevados de tensão na região central da fundação para os incrementos iniciais.

6.1.3.3 Deformações específicas normais verticais no concreto e solo

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das deformações específicas normais verticais em função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos cinco incrementos de carga mostrados.

Vista em perspectiva	Corte vertical a 45°
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px;"> <p>Szz-Deformações Conc Nós</p>  <p>0.0003744 6.06886e-05 -0.00025303 -0.00056674 -0.00088046 -0.0011942 -0.0015079 -0.0018216 -0.0021353 -0.002449</p> </div> <div> <p>Valores em m/m</p> </div> </div>	
<p>Incremento 01 – 1100kN</p>	
	
<p>Incremento 04 – 1400kN</p>	
	
<p>Incremento 07 – 1700kN</p>	

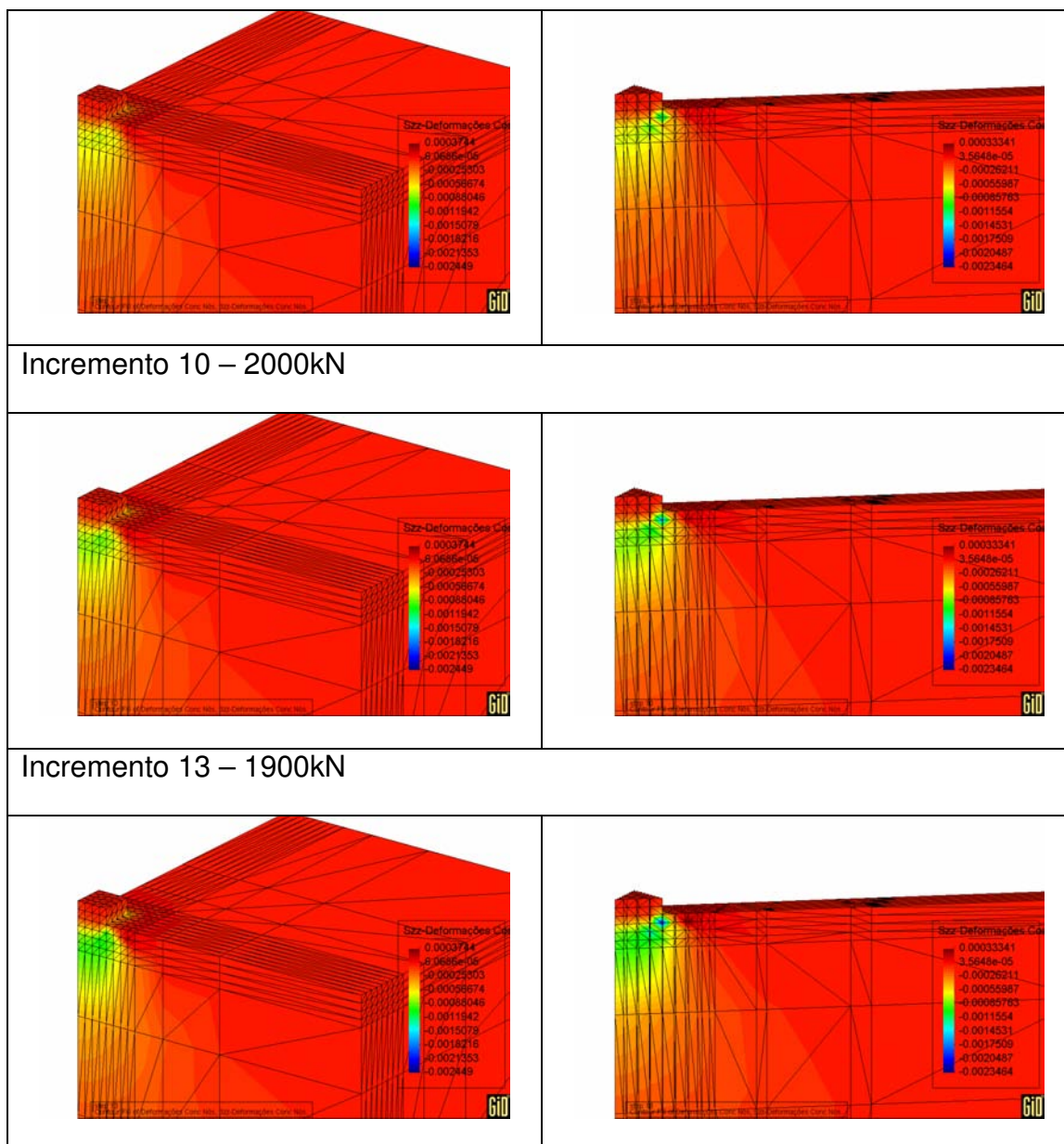
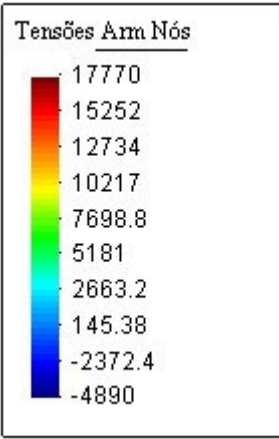
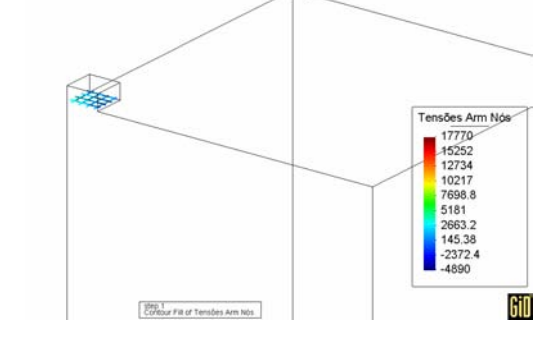
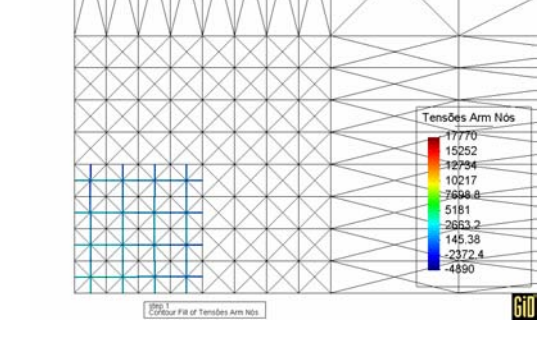
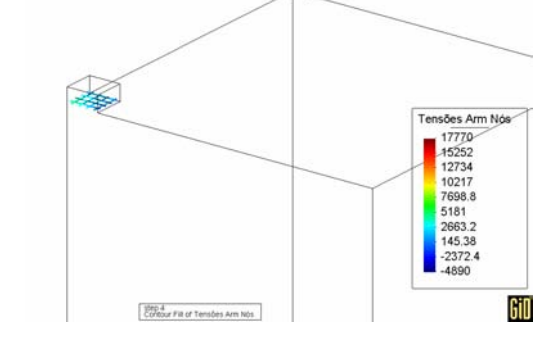
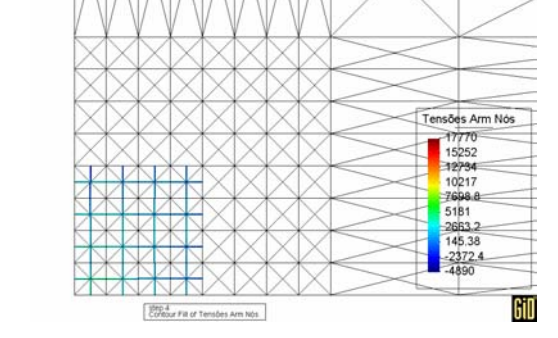


Figura 6.16 – Configuração 3 – Distribuição de deformações específicas normais verticais

Mais uma vez a região de plastificação do solo nas regiões da borda da fundação é destaque e a camada resistente de “Solo 3” também tende a uniformizar essa plastificação na interface. Como a configuração anterior, a falha do conjunto fundação-solo ocorre em razão da perda da capacidade resistente do solo.

6.1.3.4 Tensões nos elementos de armadura

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das tensões na armadura função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos cinco incrementos de carga deste item.

Vista em perspectiva	Vista em planta
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px;"> <p>Tensões Arm Nós</p>  </div> <div> <p>Valores em kN/m²</p> </div> </div>	
<p>Incremento 01 – 1100kN</p>	
	
<p>Incremento 04 – 1400kN</p>	
	
<p>Incremento 07 – 1700kN</p>	

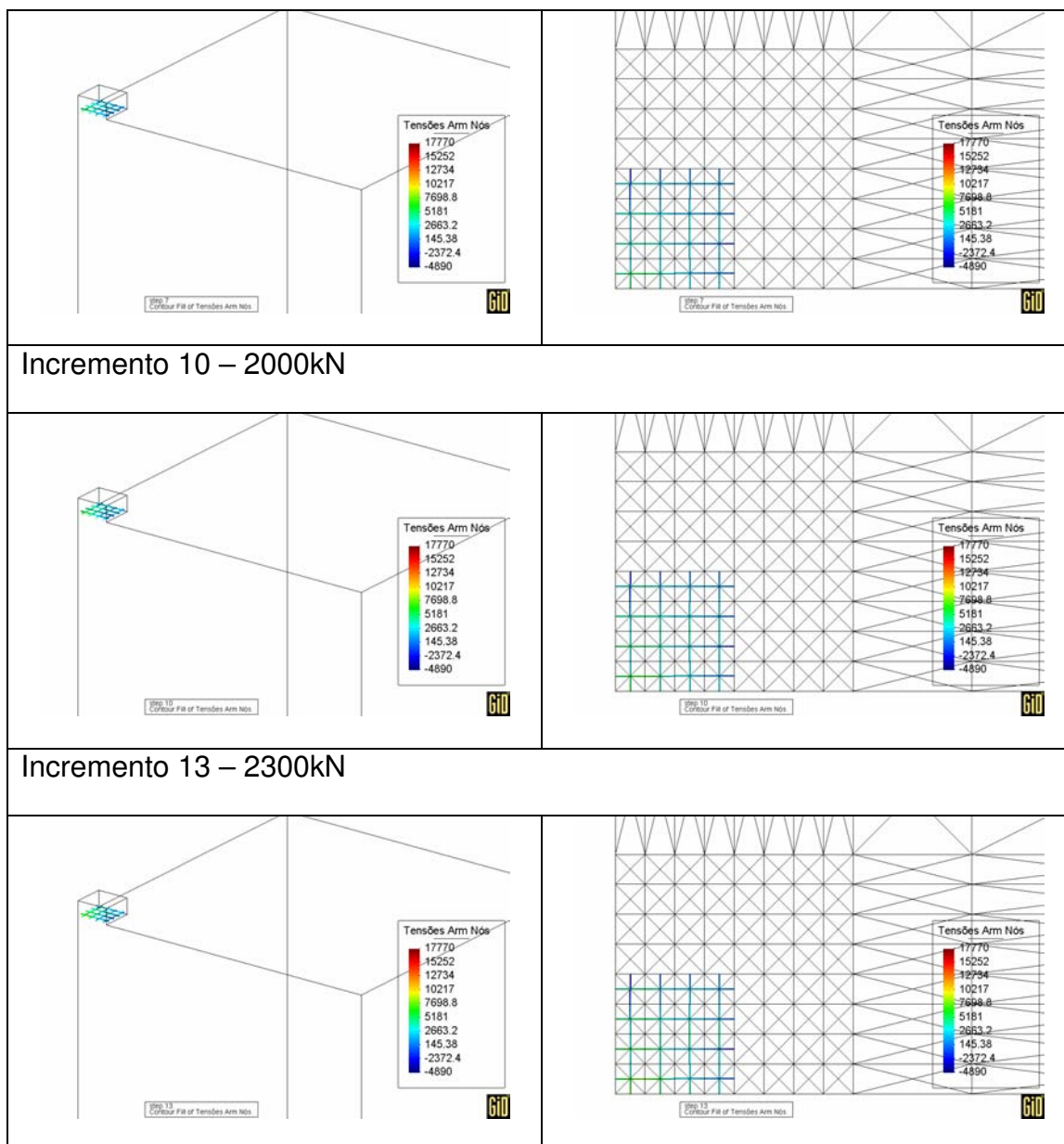
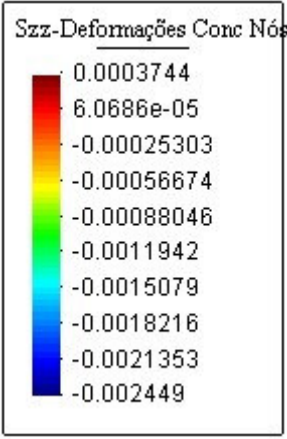
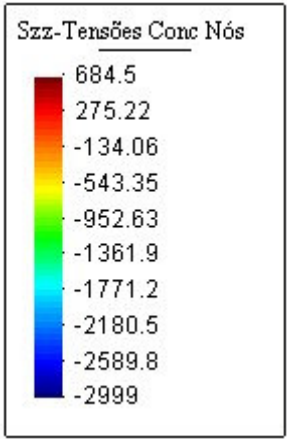
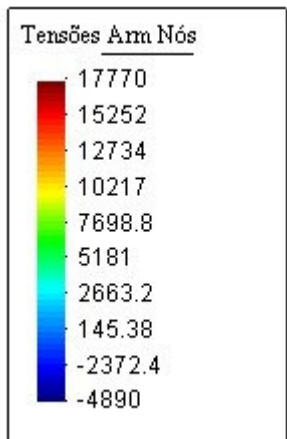
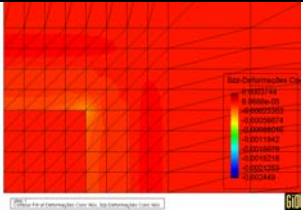
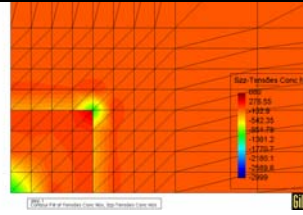
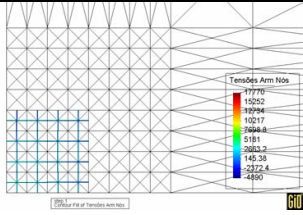
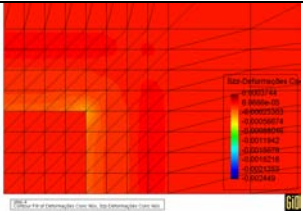
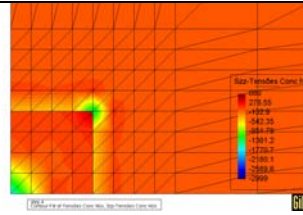
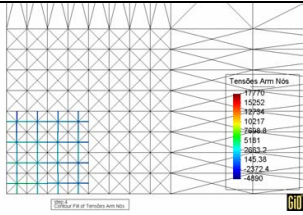


Figura 6.17 – Configuração 3 – Distribuição de tensões na armadura

Como as configurações anteriores, valores máximos de magnitude em torno de $1,7 \text{ kN/cm}^2$ foram observados. São valores igualmente baixos e não há praticamente mobilização alguma das barras.

6.1.3.5 Comparação entre deformações específicas normais específicas verticais e tensões normais verticais nos elementos de concreto e solo e tensões na armadura

Neste item são comparados os resultados entre as deformações específicas normais verticais, as tensões normais verticais e as tensões na armadura para a Configuração 3.

Concreto e solo		Armadura
Deformações específicas normais verticais	Tensões normais verticais	Tensões
 <p>Szz-Deformações Conc Nós</p> <p>Valores em m/m</p>	 <p>Szz-Tensões Conc Nós</p> <p>Valores em kN/m²</p>	 <p>Tensões Arm Nós</p> <p>Valores em kN/m²</p>
Incremento 01 – 1100kN		
		
Incremento 04 – 1400kN		
		
Incremento 07 – 1700kN		

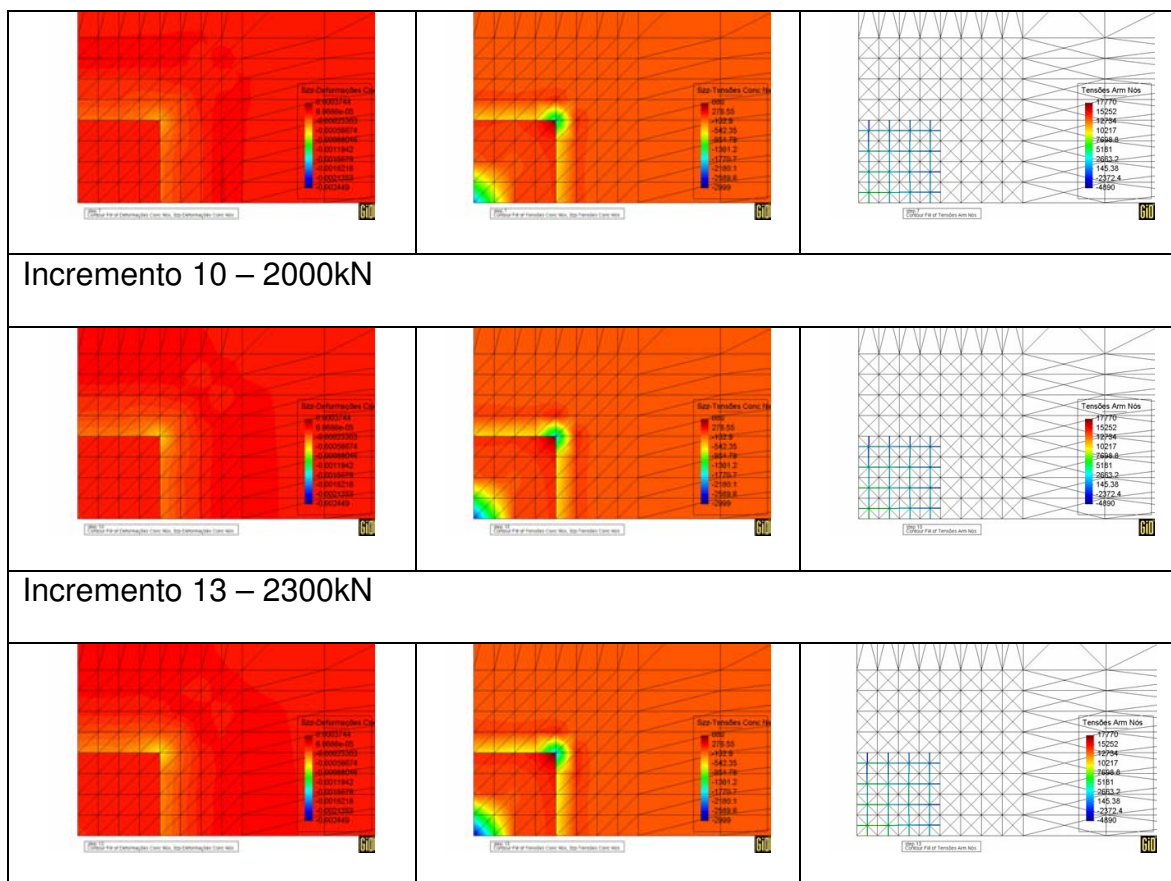


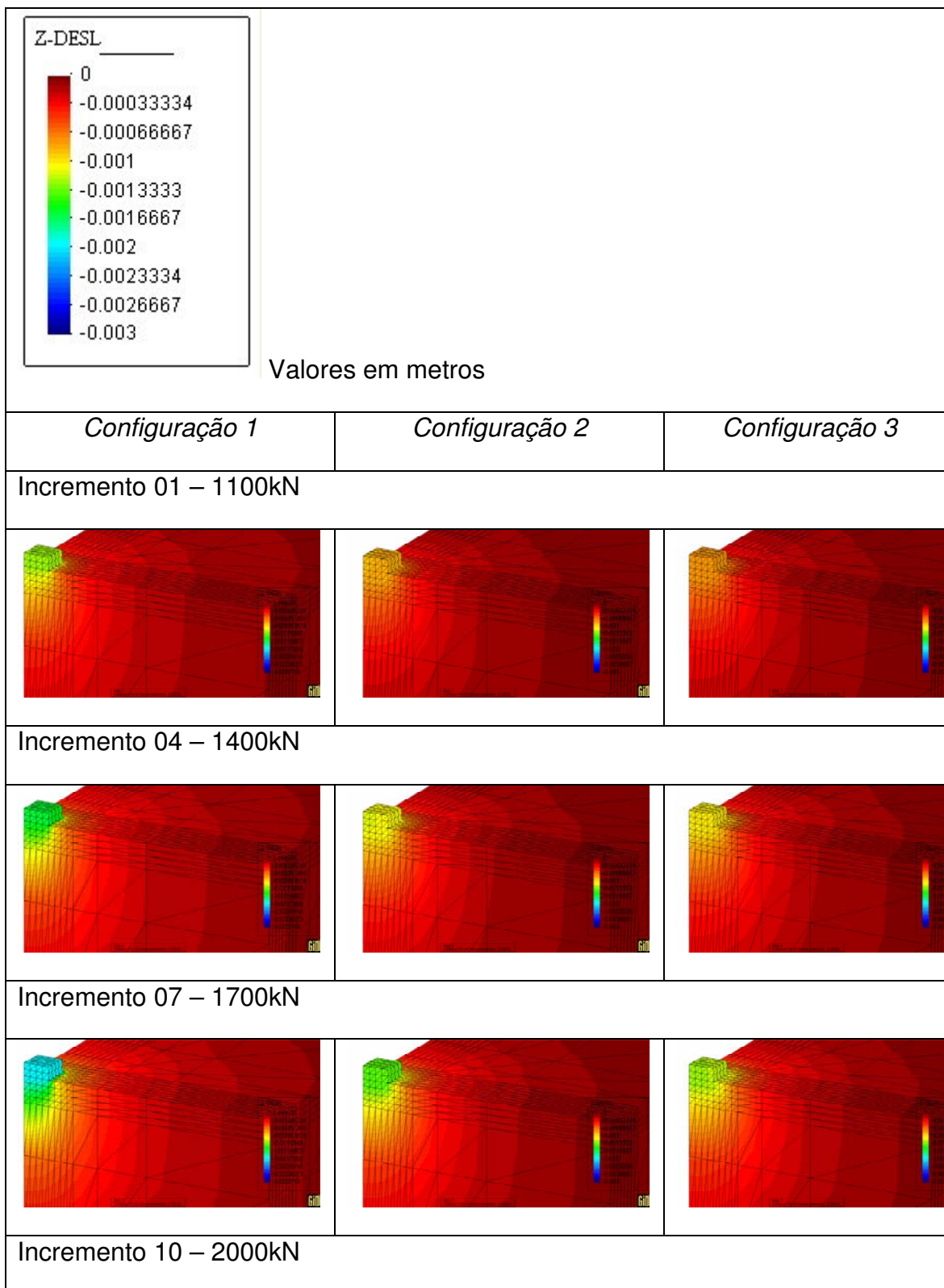
Figura 6.18 – Configuração 3 – Comparação entre deformações específicas normais verticais, tensões normais verticais e tensões na armadura

6.1.4 Comparação entre os resultados obtidos para as Configurações 1, 2 e 3

O presente item tem o objetivo de permitir a comparação de um mesmo tipo de resultado entre os três exemplos estudados com sapata isolada. Desta forma, são apresentados os resultados dos deslocamentos verticais e das tensões normais verticais. A escala unificada para os deslocamentos possui como limites os valores máximos encontrados ao longo dos três exemplos. Já para as tensões, a escala foi definida para que, dessa vez, os bulbos de tensão na massa de solo e, principalmente, na interface, possam ser visualizados adequadamente.

6.1.4.1 Deslocamentos verticais – escala unificada

Este item apresenta o resultado dos deslocamentos verticais para as Configurações 1, 2 e 3.



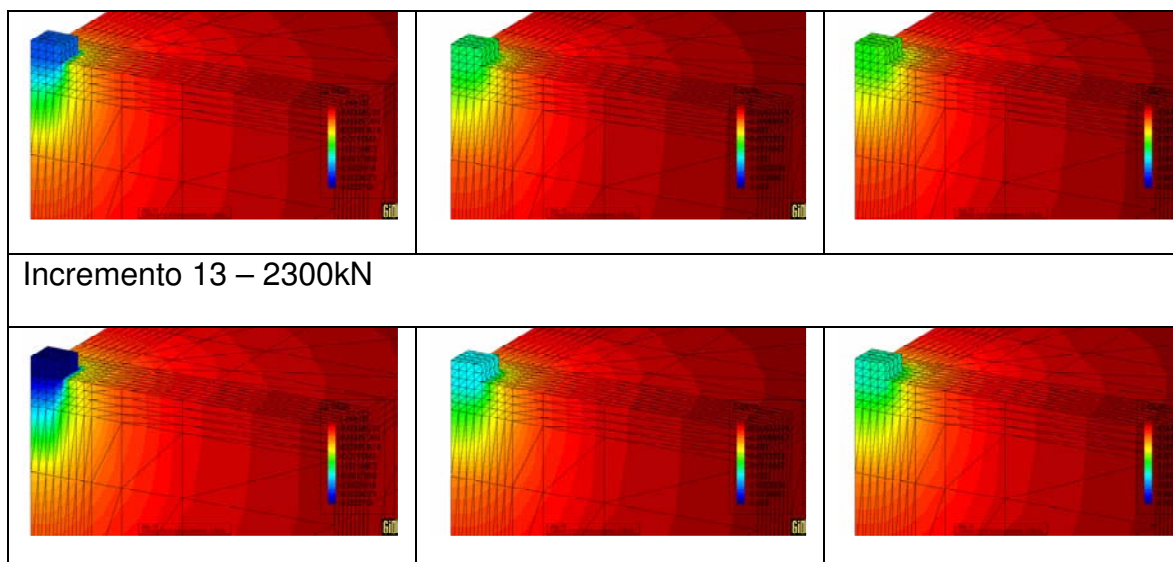
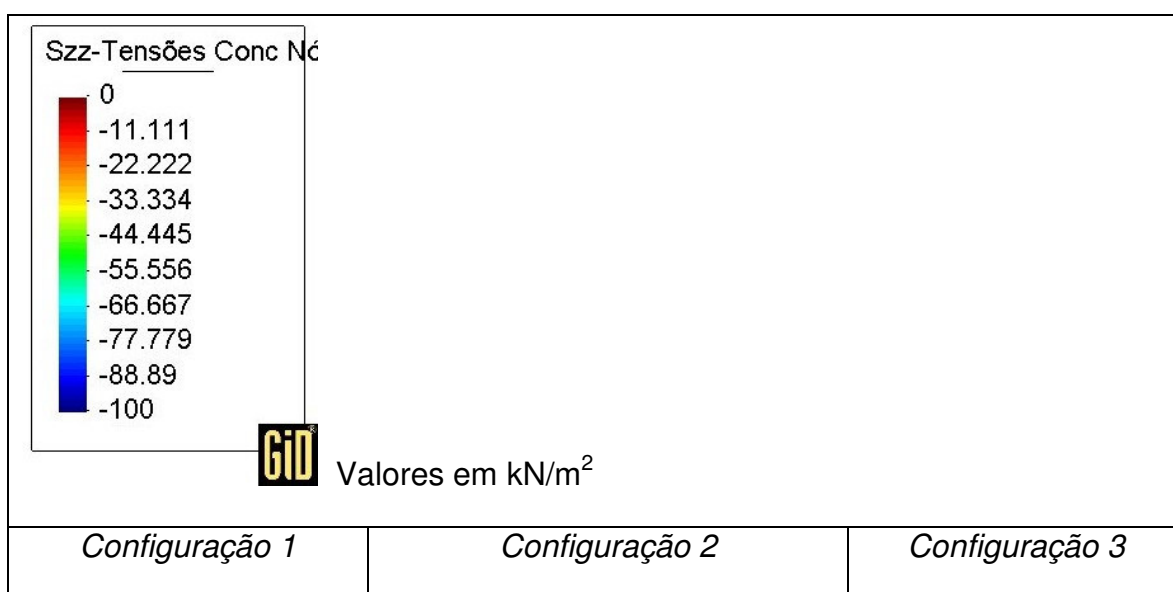


Figura 6.19 – Comparação da distribuição dos deslocamentos verticais para as Configurações 1, 2 e 3 com escala unificada.

A observação desta série de resultados indica a redução dos deslocamentos para as Configurações 2 e 3 em relação à Configuração 1, como resultado imediato do aumento da rigidez do solo.

6.1.4.2 Tensões normais verticais – escala unificada

Este item apresenta o resultado das tensões normais verticais para as Configurações 1, 2 e 3.



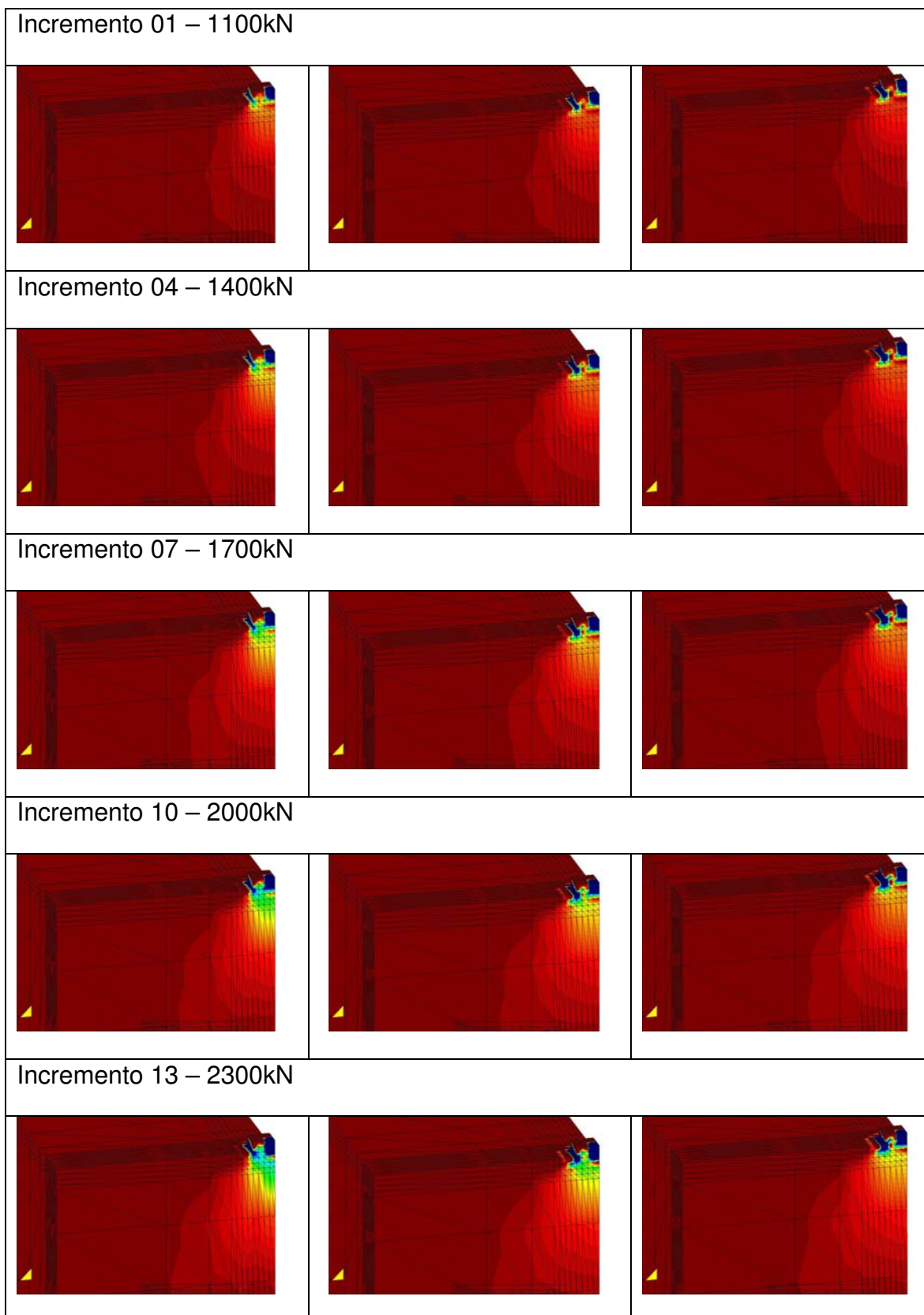


Figura 6.20 – Comparação da distribuição das tensões normais verticais para as Configurações 1, 2 e 3 com escala unificada

Agora é possível distinguir com clareza os bulbos de tensão associados às diferentes configurações estudadas. As regiões escuras são regiões nas quais os valores da tensão extrapolam os limites da escala adotada para a visualização.

Ao se observar essa seqüência de resultados, pode-se perceber que há uma relação proporcional entre o aumento de rigidez do solo e os níveis de tensão na borda e na região central da fundação. O aumento de rigidez do solo resulta em um aumento nos níveis das tensões na borda da fundação e em uma redução nos níveis das tensões na região central da sapata.

6.1.4.3 Tensões na interface entre o solo e a fundação

A distribuição das tensões normais verticais na interface entre o solo e a fundação é apresentada para três estágios de carregamento. As Figuras 6.21, 6.22, 6.23, 6.24, 6.25 e 6.26, a seguir, apresentam os valores das tensões nodais para os nós localizados nas semi-larguras da fundação, identificadas pelos eixos O-A e A-B, no detalhe.

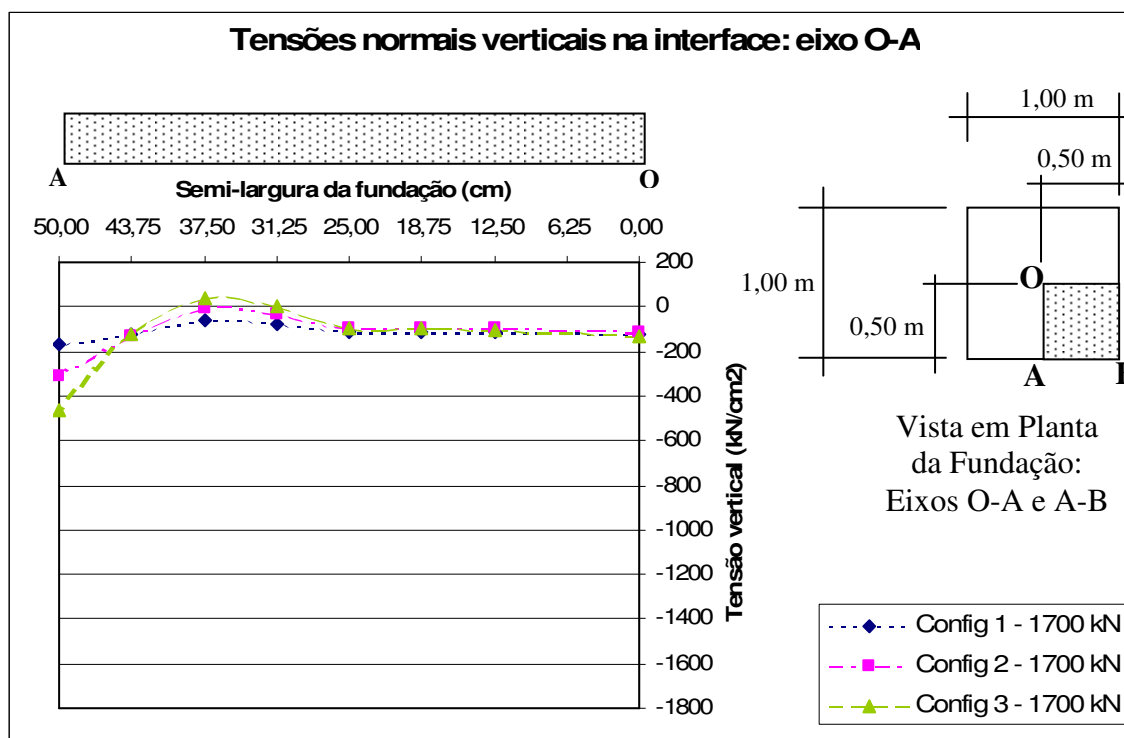


Figura 6.21 – Tensões normais verticais no eixo O-A: Carga 1700 kN/cm².

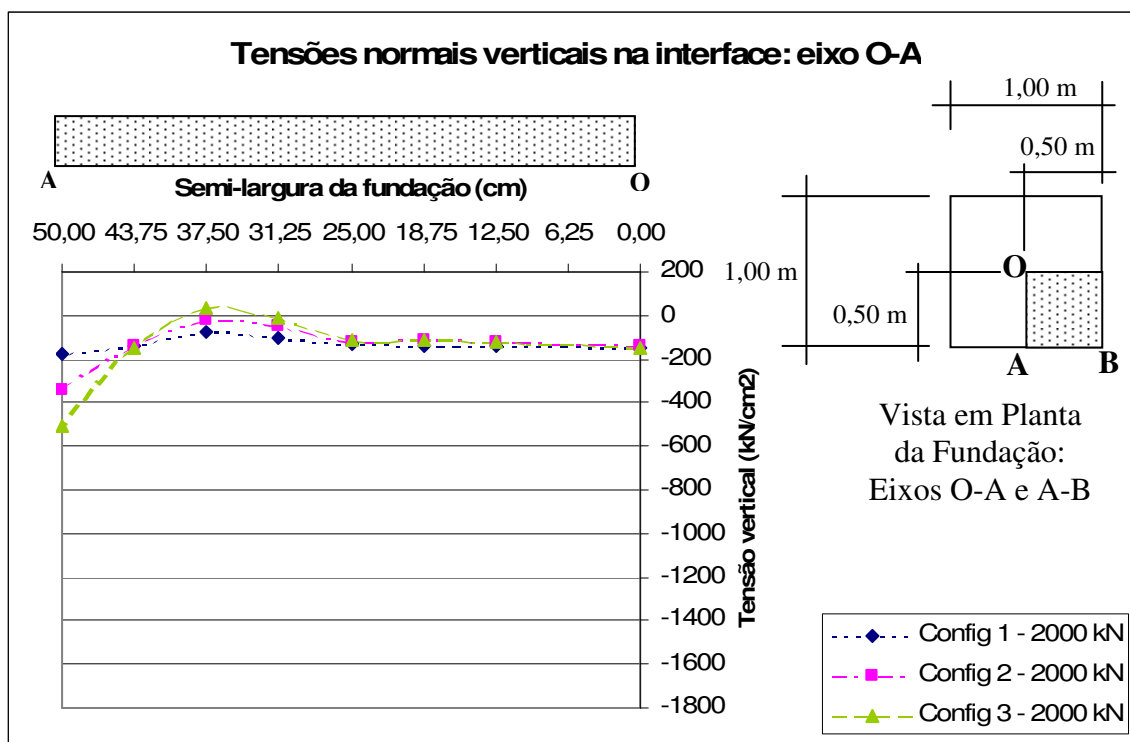


Figura 6.22 – Tensões normais verticais no eixo O-A: Carga 2000 kN/cm².

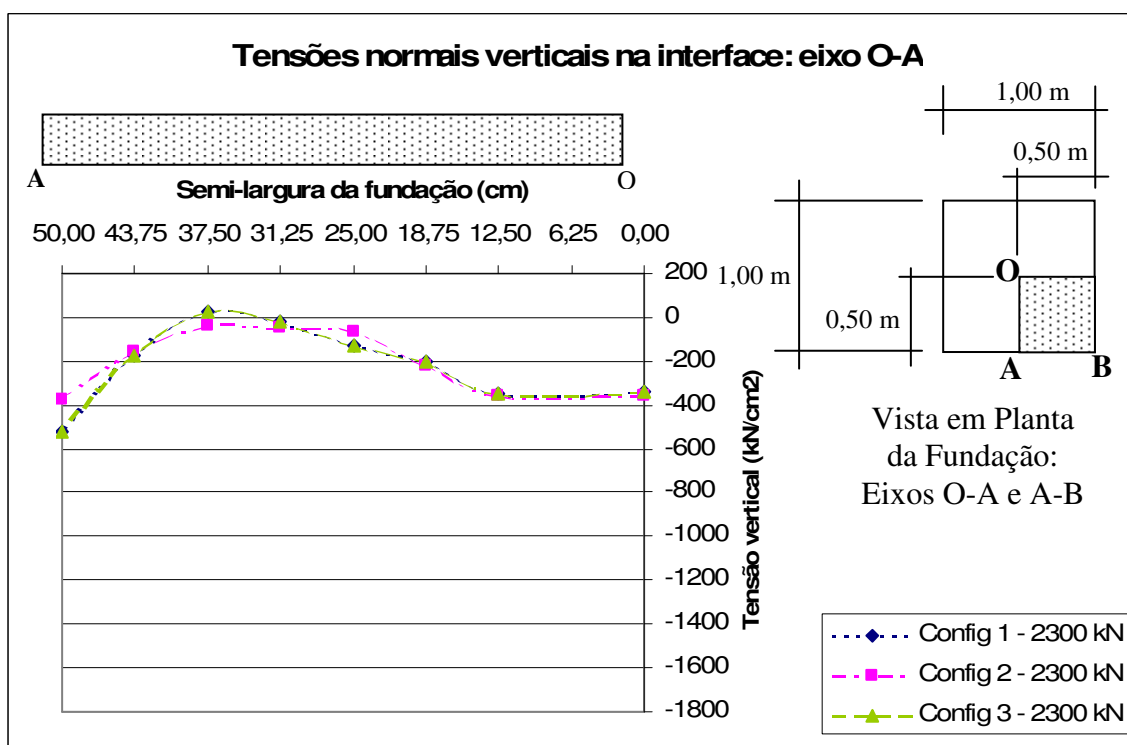


Figura 6.23 – Tensões normais verticais no eixo O-A: Carga 2300 kN/cm².

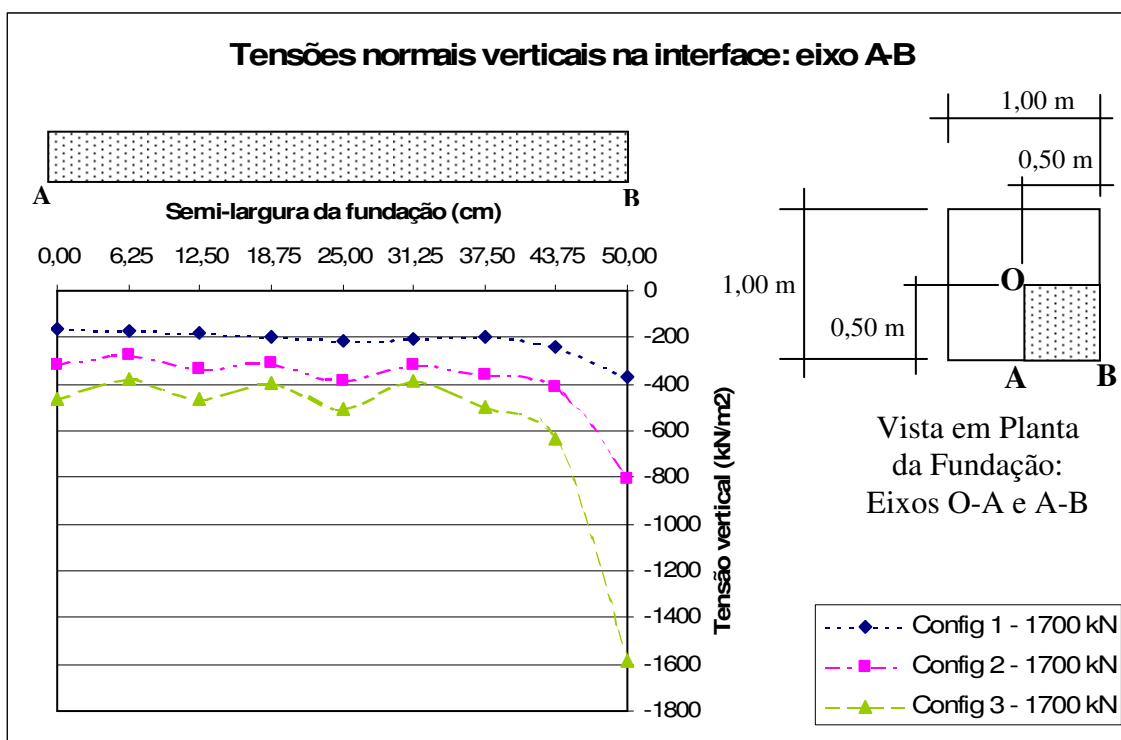


Figura 6.24 – Tensões normais verticais no eixo A-B: Carga 1700 kN/cm².

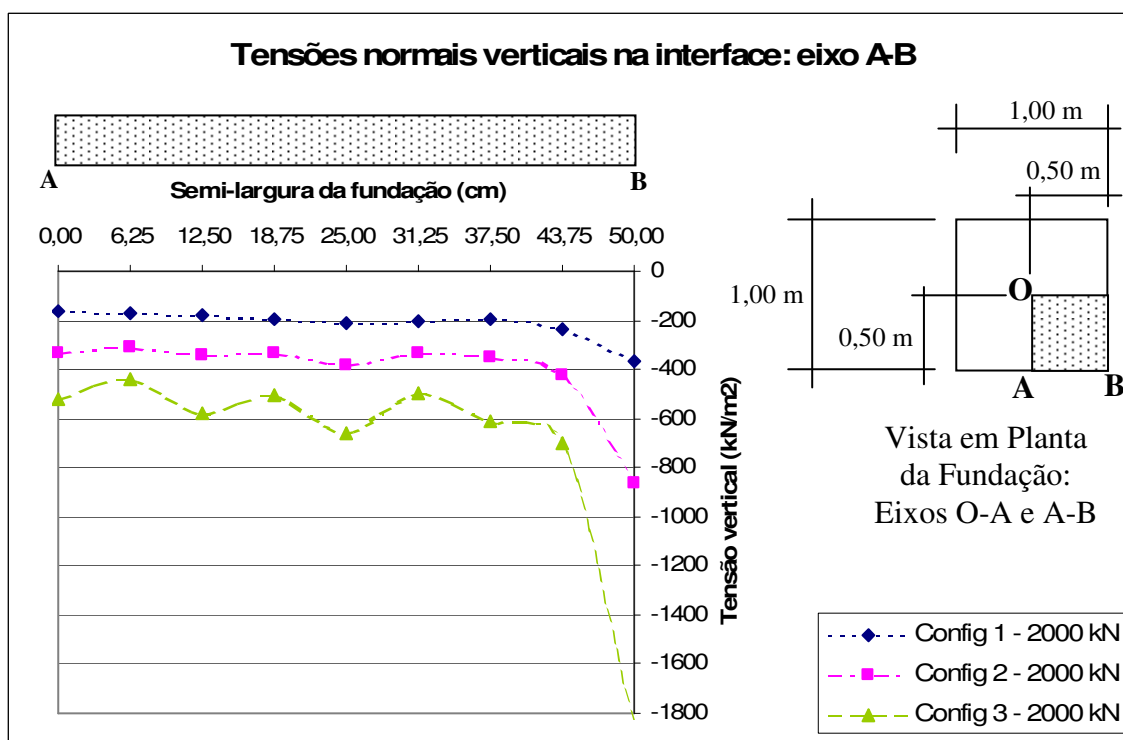


Figura 6.25 – Tensões normais verticais no eixo A-B: Carga 2000 kN/cm².

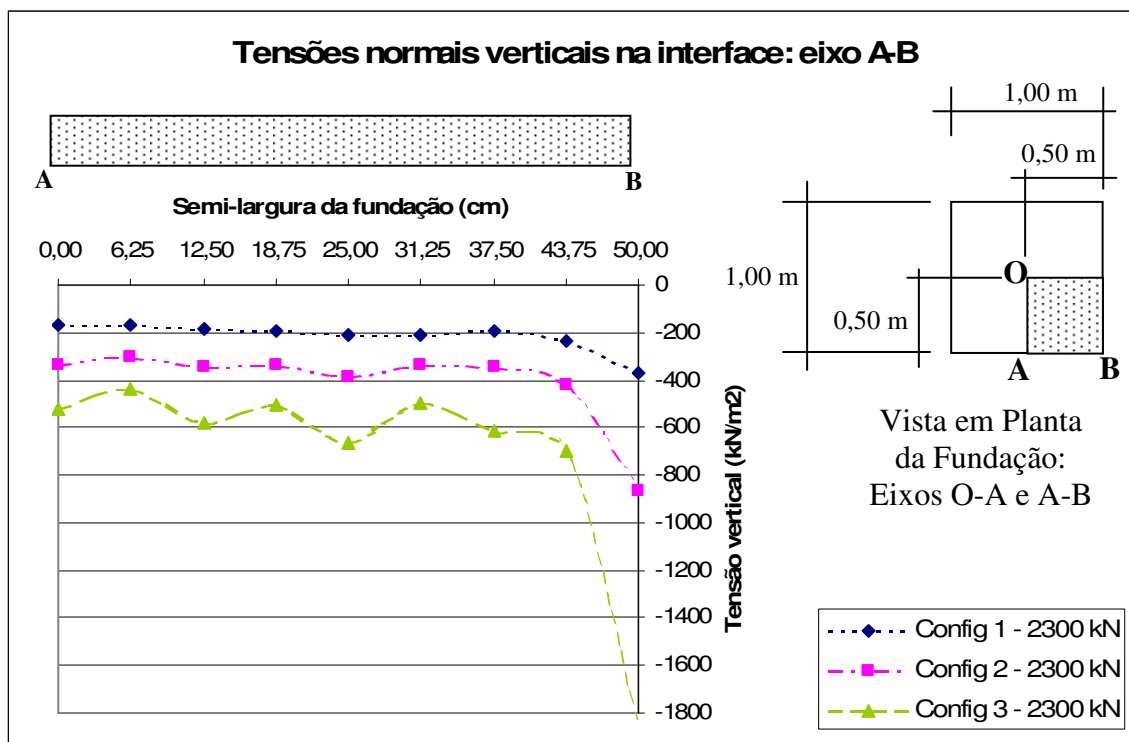


Figura 6.26 – Tensões normais verticais no eixo A-B: Carga 2300 kN/cm².

Observa-se, através das Figuras 6.21, 6.22 e 6.23, que a distribuição das tensões na interface, ratificando as observações do item anterior, tende a aumentar na borda da fundação com o aumento da rigidez da camada de solo imediatamente abaixo da fundação.

Já as Figuras 6.24, 6.25 e 6.26 permitem identificar que a concentração de tensões não só ocorre nas bordas da fundação, mas, sobretudo, nos seus cantos.

6.1.4.4 Fissuração da fundação

Em todos os exemplos a fundação apresentou pequena fissuração no elemento indicado na Figura 6.27.

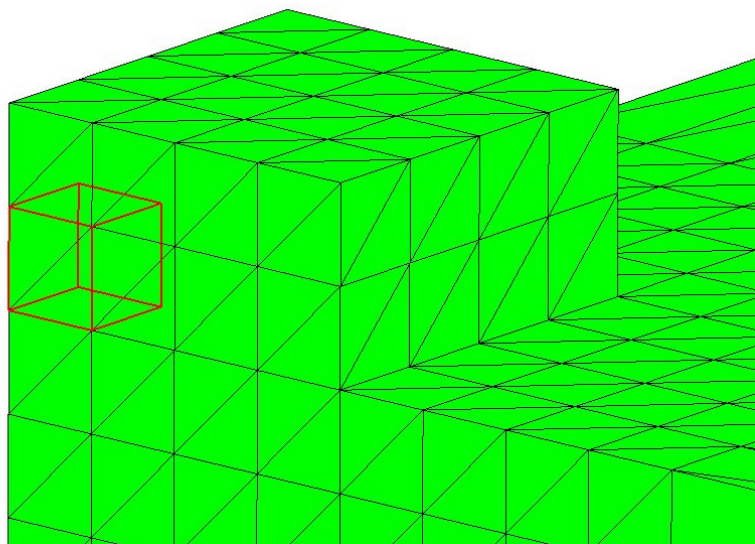


Figura 6.27 – Elemento da fundação que apresentou fissuração.

Nota-se que se trata do elemento situado exatamente na zona central da sapata, imediatamente abaixo da carga do pilar. A pouca fissuração da fundação era esperada em função da elevada diferença de rigidez entre os materiais. Apenas na Configuração 3 é que mais pontos de integração apresentaram fissuração, porém também restritos ao elemento da Figura 6.27.

6.2 DUAS SAPATAS ISOLADAS

Neste item são apresentados os resultados da simulação de duas sapatas isoladas, de constituição e geometria iguais, que são submetidas simultaneamente ao mesmo carregamento. Tratam-se de fundações superficiais do tipo sapata assentes ao nível do terreno e submetidas a uma carga de compressão uniforme.

Assim como no exemplo anterior, essas fundações possuem barras de aço dispostas no plano da base e também podem ser consideradas como fundações rígidas. As propriedades dos materiais são as mesmas da Tabela 6.1, apresentada anteriormente.

A Figura 6.28 apresenta a geometria do problema, onde a região mais clara do solo identifica a região modelada através da simetria do problema. Novamente, é possível observar que as dimensões utilizadas atendem às especificações de Zienkiewicz (2000) para as questões dos efeitos de vinculação do modelo.

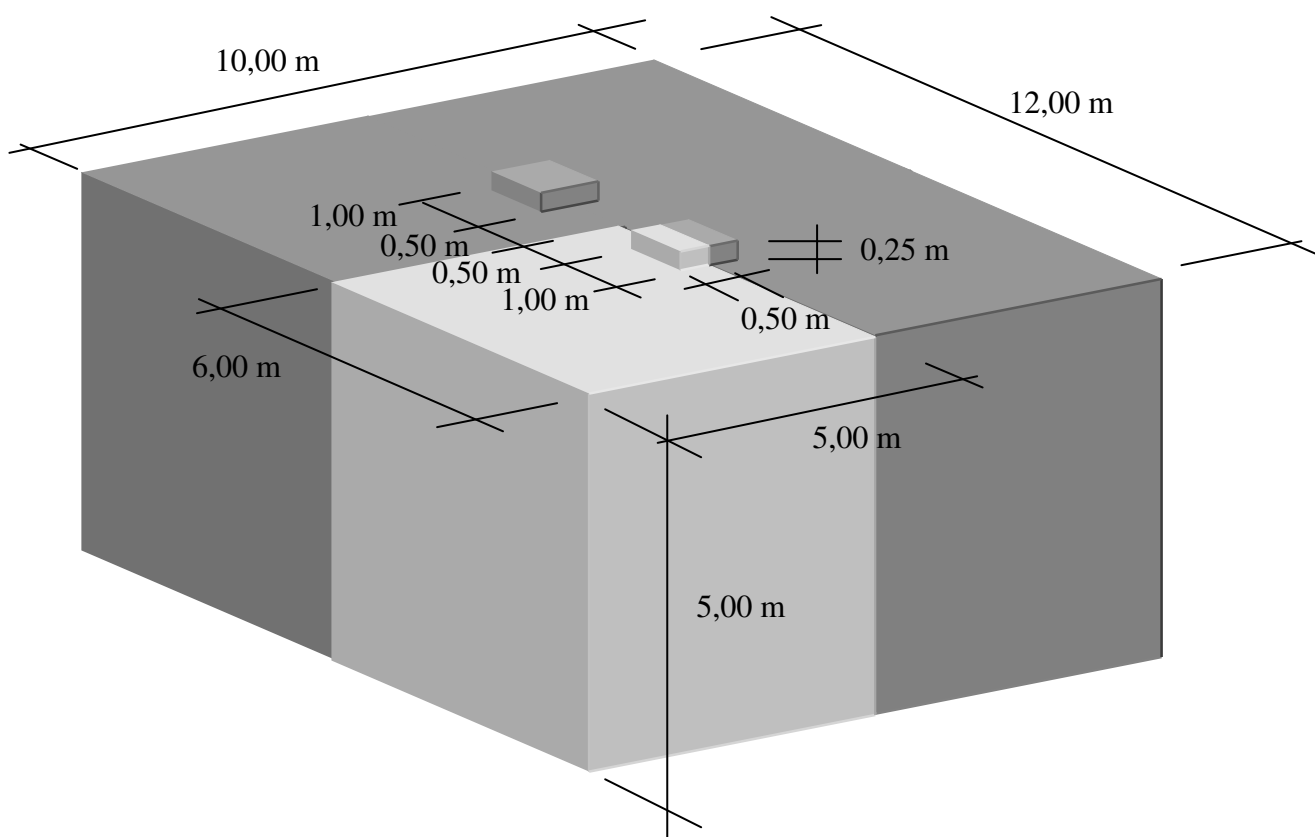


Figura 6.28 – Geometria e simetria da simulação de duas sapatas isoladas.

A simulação utilizou apenas o solo residual, denominado “Solo 1”, do trabalho de Tessari (1998), cujas propriedades foram apresentadas na Tabela 6.2.

A malha de elementos finitos utilizada é apresentada nas Figuras 6.29, 6.30 e 6.31, a seguir, e, da mesma forma que anteriormente, a geometria da fundação, em relação à malha, está destacada.

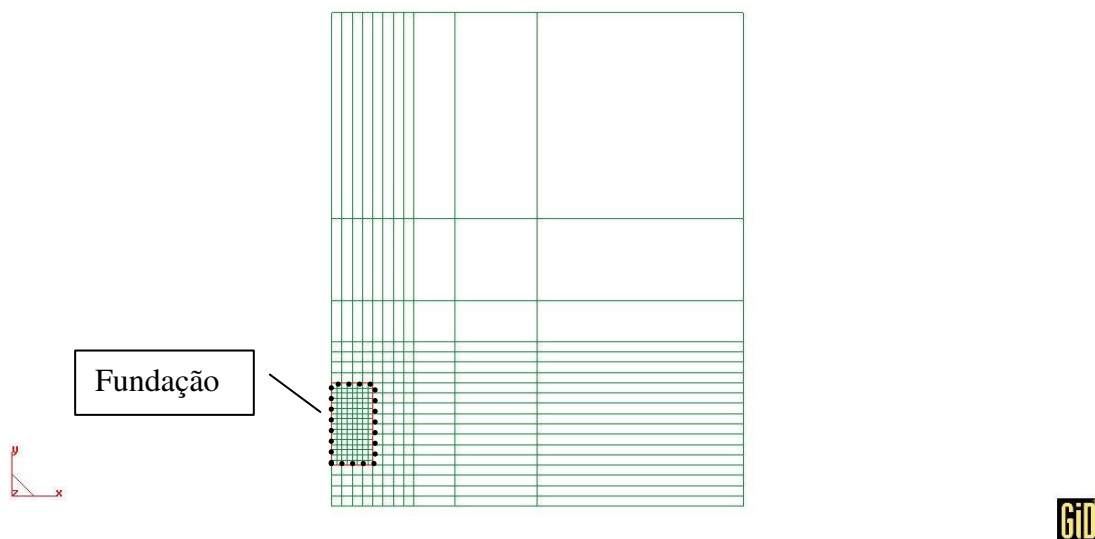


Figura 6.29 – Vista em planta (XY) da malha utilizada

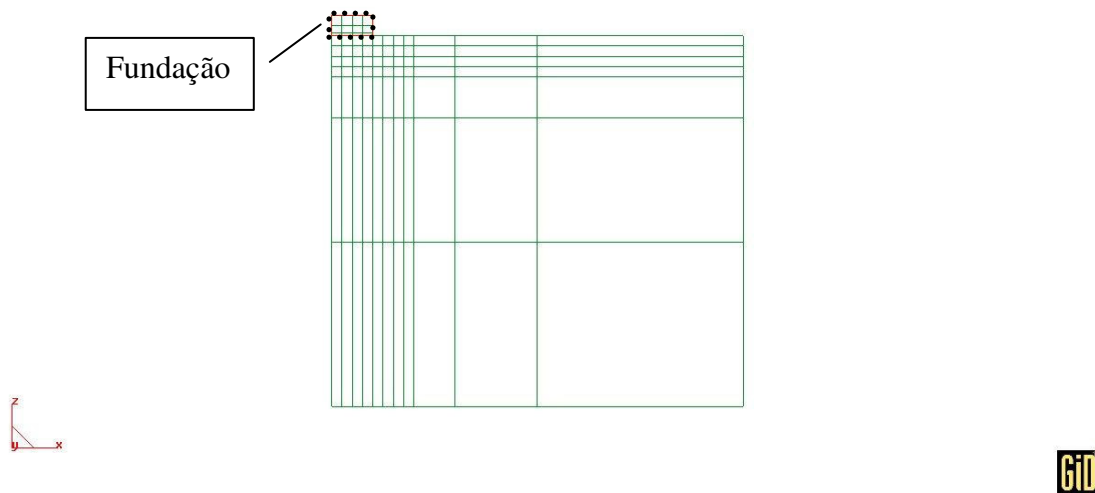


Figura 6.30 – Vista frontal (XZ) da malha utilizada

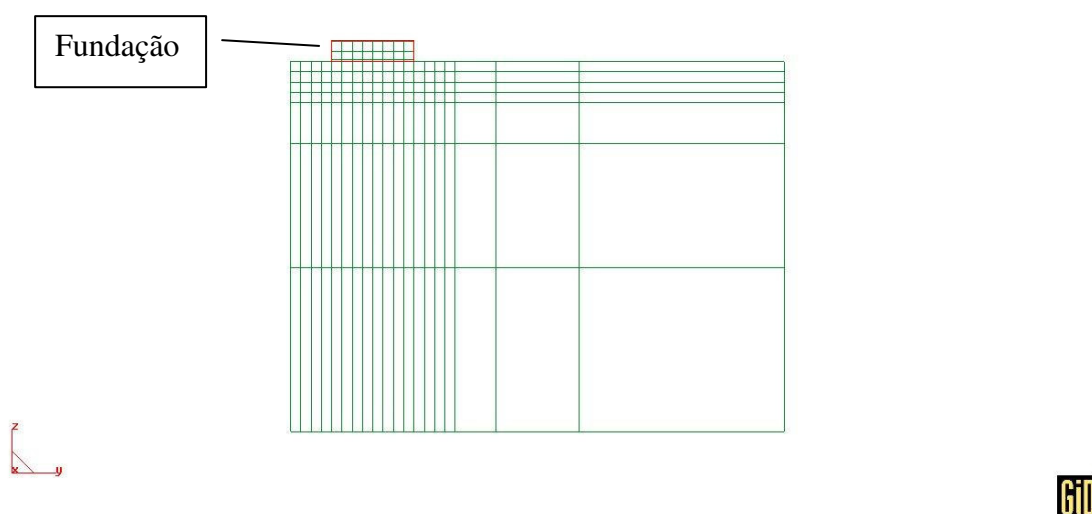


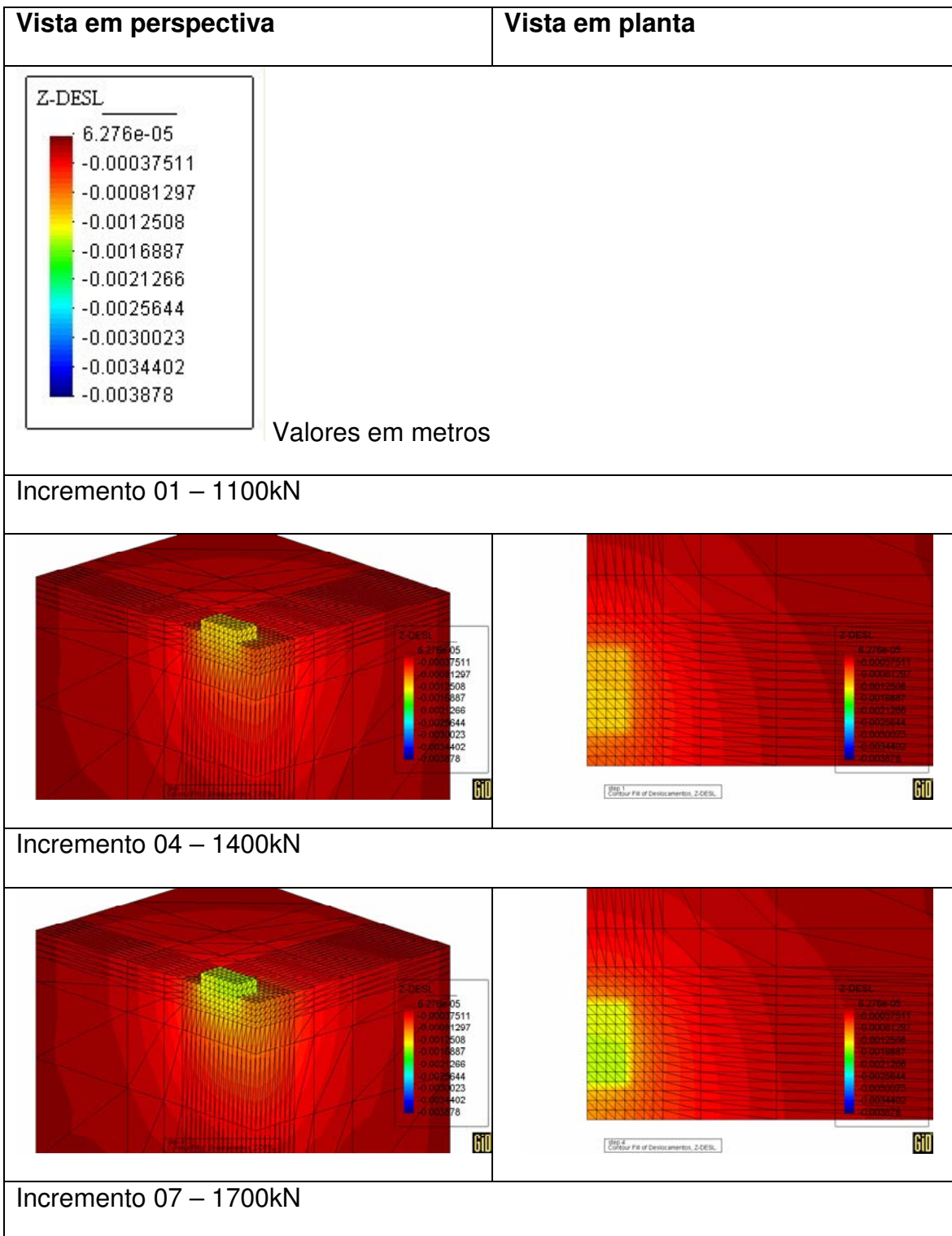
Figura 6.31 – Vista lateral (YZ) da malha utilizada

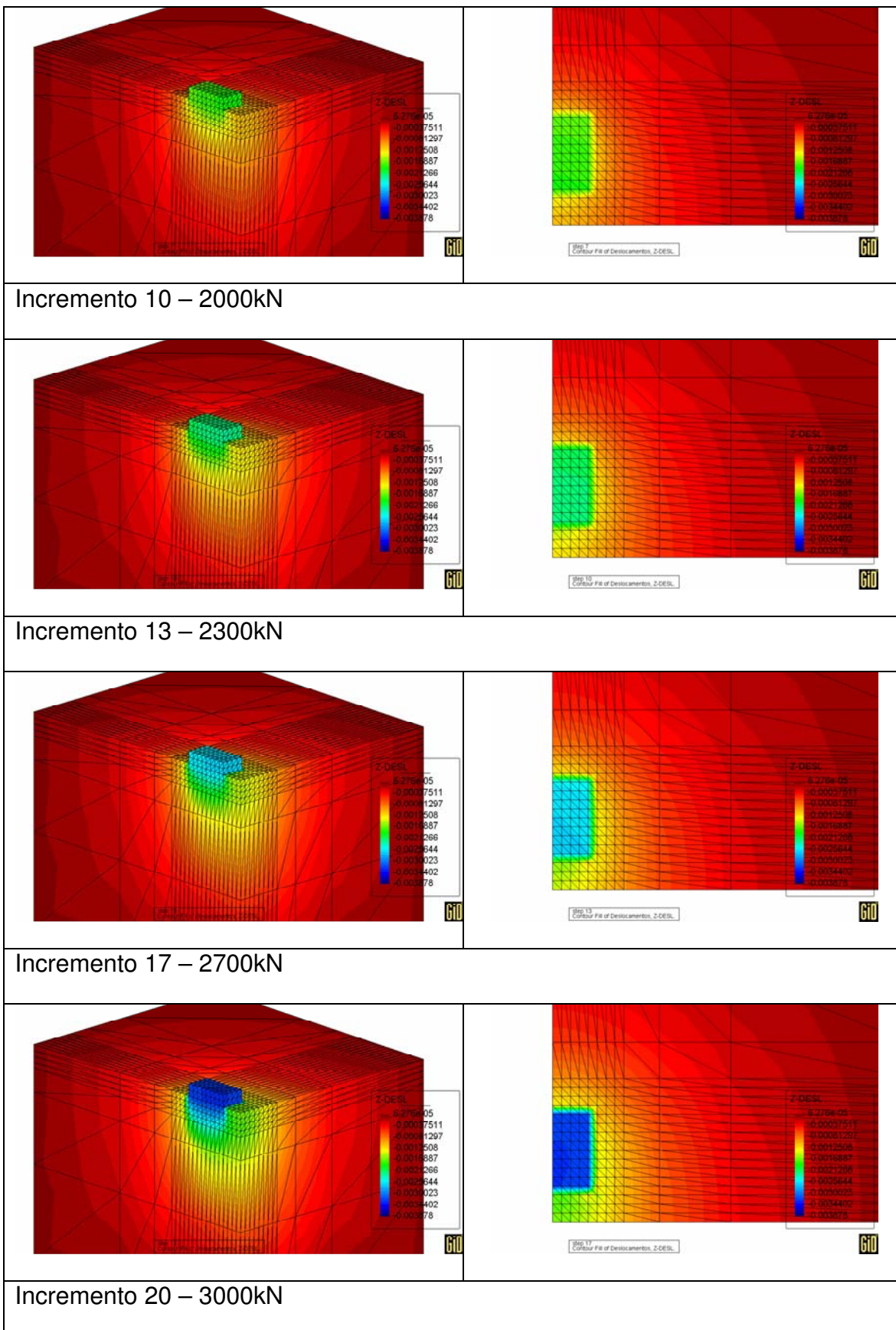
Ao todo, este problema foi modelado com 1539 elementos finitos lineares, 1527 hexaedros e 12 barras. No total essa malha possui 2034 nós, onde 2010 são nós de hexaedros e 24 são nós de barras. A utilização de elementos lineares neste exemplo é resultado da dificuldade que se teve em modelar igual geometria de malha utilizando elementos finitos quadráticos, pois a memória disponível para a simulação computacional era insuficiente.

Para o caso desse elemento linear apenas pode ser adotada a integração completa na resolução do problema.

6.2.1.1 Deslocamentos verticais nos elementos de concreto e solo

Nesta série de resultados é apresentada a evolução dos deslocamentos verticais em função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida para os resultados dos incrementos de carga mostrados.





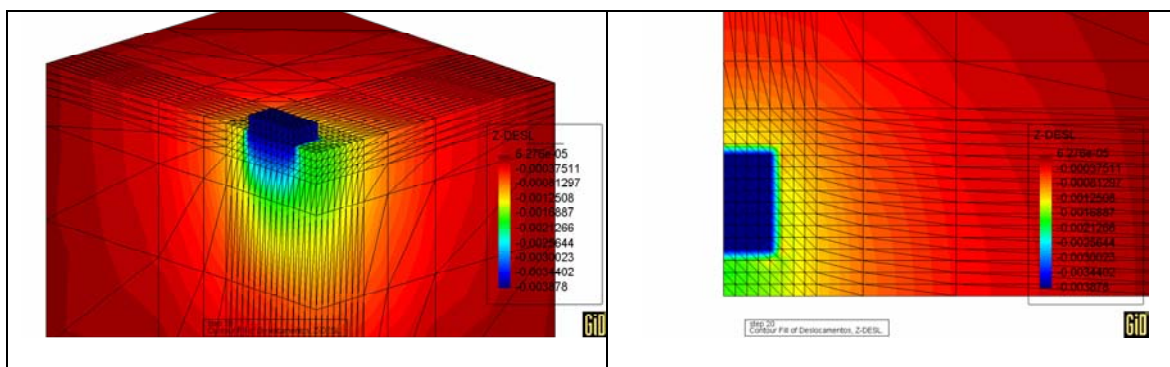


Figura 6.32 – Distribuição dos deslocamentos verticais

Essa série de resultados permite observar que a região entre as sapatas apresenta deslocamentos significativos. A comparação com a Configuração 1 do exemplo anterior demonstra que a magnitude do máximo deslocamento no presente exemplo é superior. Naquele exemplo foi obtido um valor máximo em torno de 3 mm, enquanto neste foi atingido em torno de 4 mm. Isto indica, como esperado, que a proximidade de outra fundação afeta os níveis de deslocamentos obtidos em relação a uma sapata isolada.

Os bulbos de deslocamento agora aparecem de forma diferenciada. Imediatamente abaixo da fundação há um bulbo de deslocamentos que concentra as maiores magnitudes, abrangendo valores em torno de 2 a 4 mm. Contudo, quanto maior a profundidade, mais é possível notar a formação de um bulbo de deslocamentos resultante do efeito das duas sapatas, abrangendo valores inferiores a 2 mm.

A fundação, como nas três configurações anteriores, continua apresentando deslocamento uniforme em toda sua extensão.

6.2.1.2 Tensões normais verticais nos elementos de concreto e solo

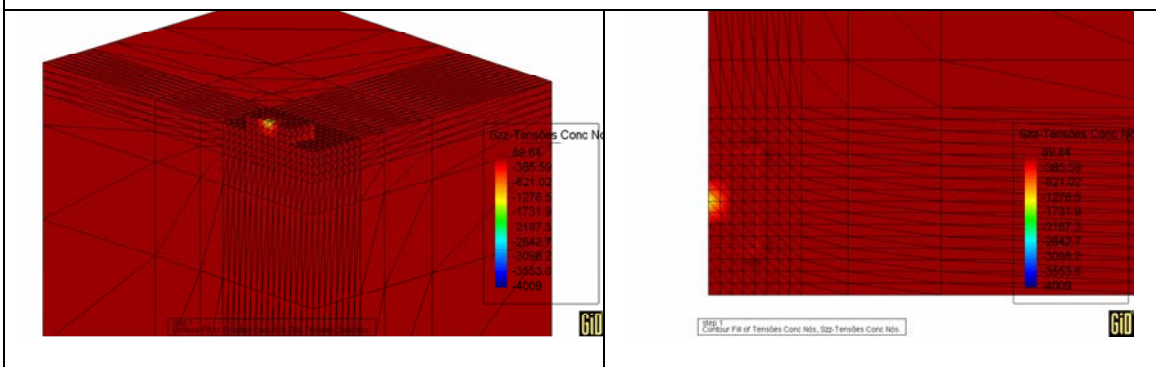
Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das tensões normais verticais em função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos cinco incrementos de carga deste item.

Vista em perspectiva

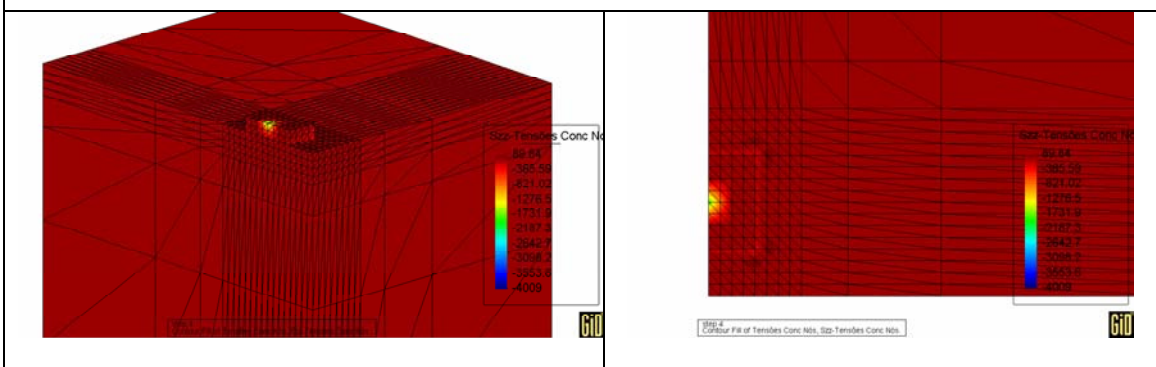
Vista em planta



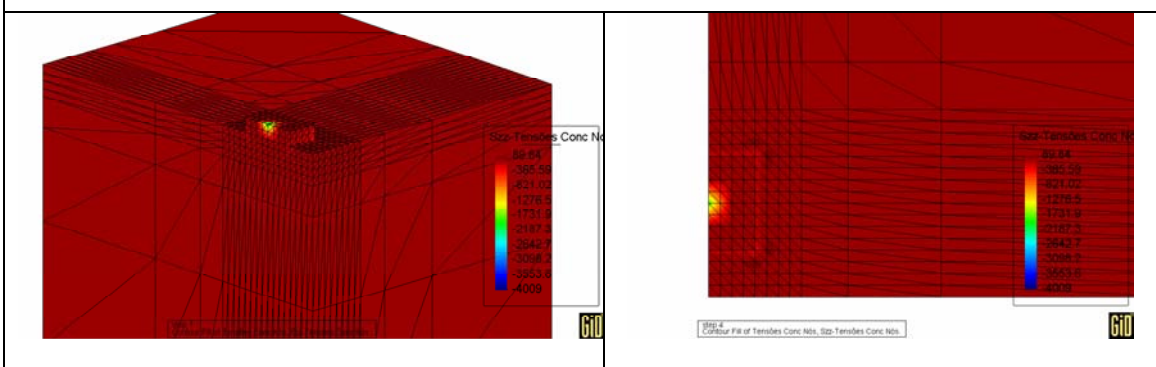
Incremento 01 – 1100kN



Incremento 04 – 1400kN



Incremento 07 – 1700kN



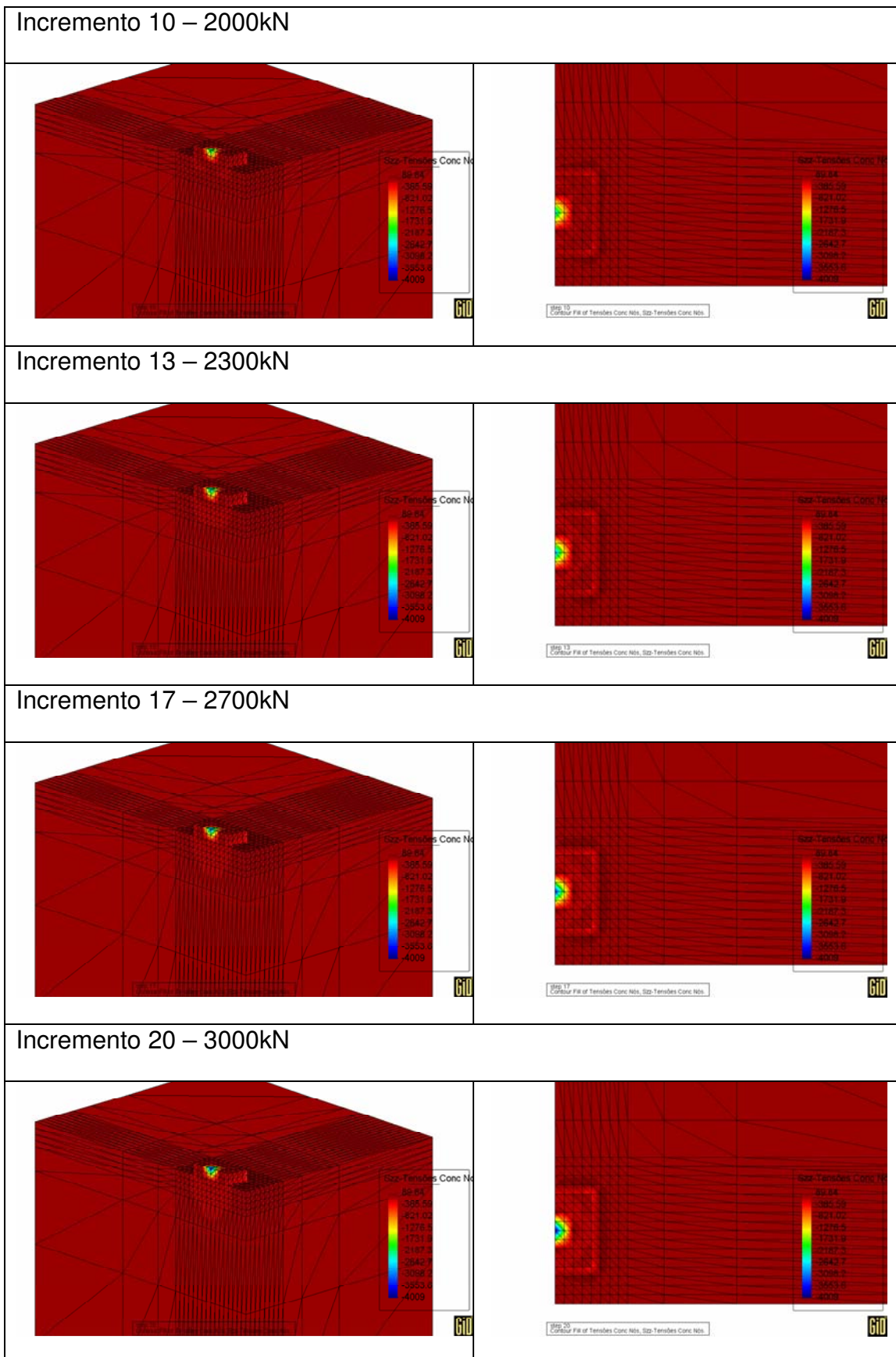
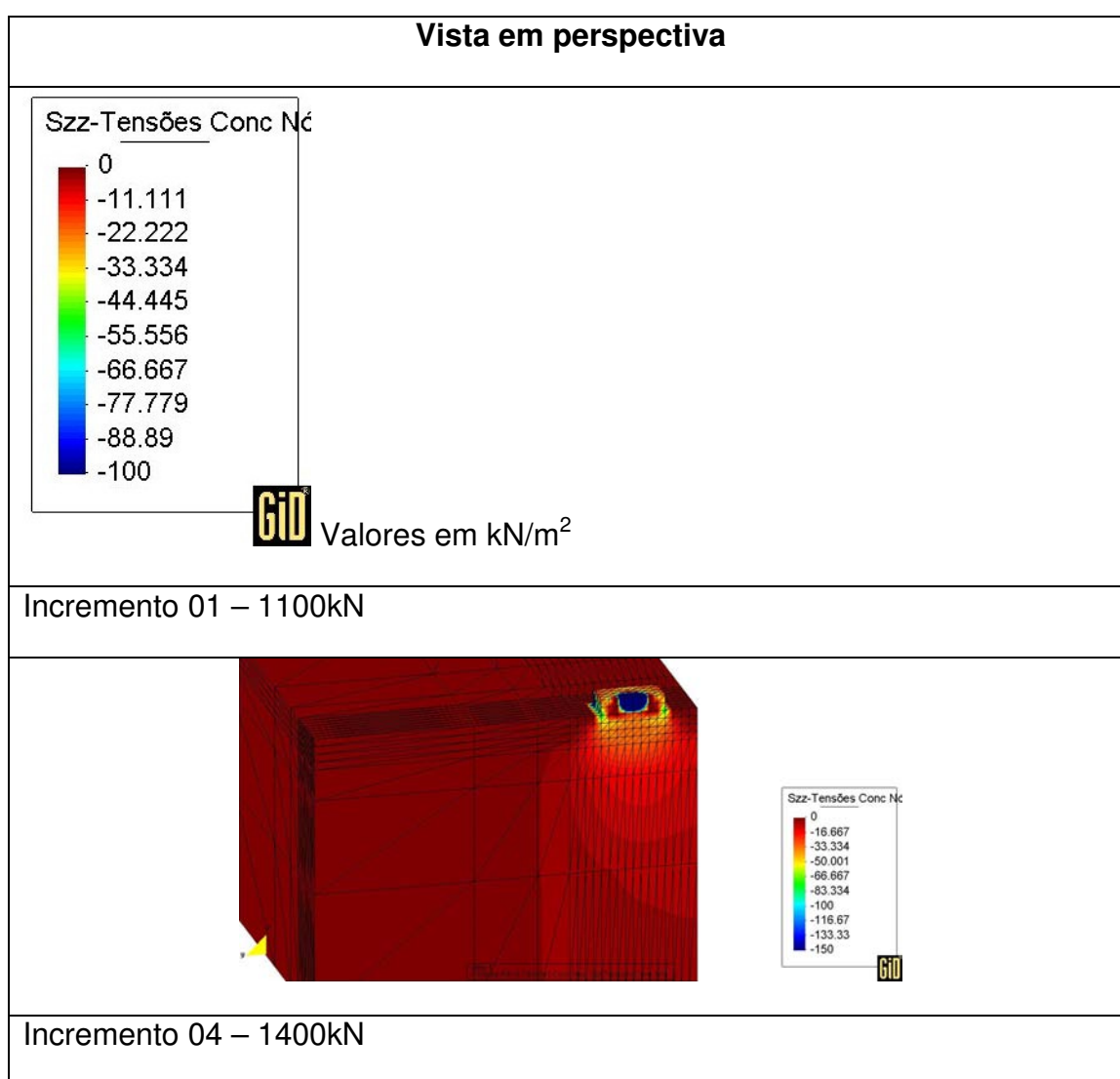
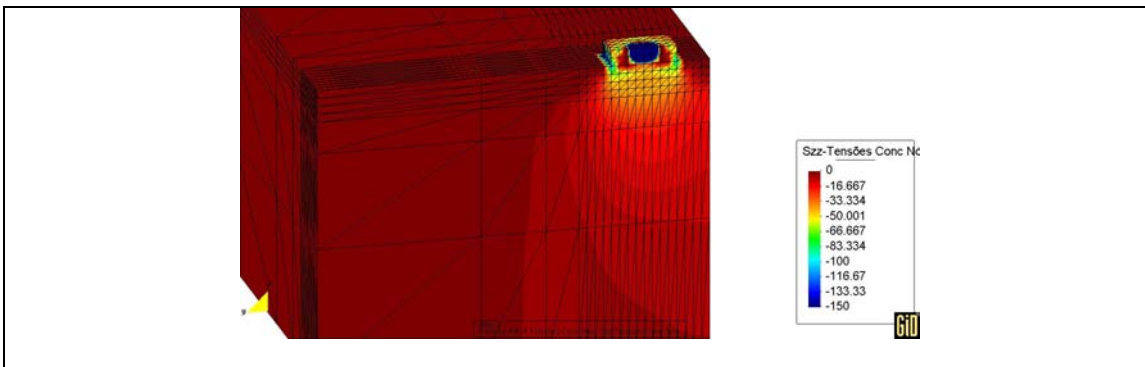


Figura 6.33 – Distribuição das tensões normais verticais

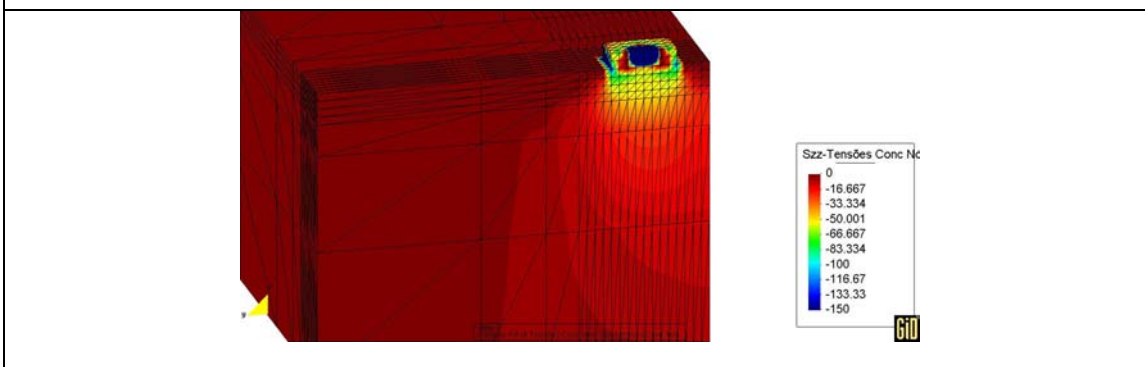
Também neste exemplo o ponto de aplicação da carga do pilar é o local onde há o nível mais elevado de tensões do conjunto fundação-solo. Também, assim como no exemplo da sapata isolada, as bordas da fundação junto à interface com o solo, especialmente as quinas, aparecem níveis de tensão mais elevados do que no restante da massa de solo e superiores às tensões na região central da fundação junto ao solo.

Em função da impossibilidade de se visualizar adequadamente a distribuição de tensões na massa de solo nos resultados anteriores, apresenta-se, a seguir, essa mesma série de resultados com a escala modificada.

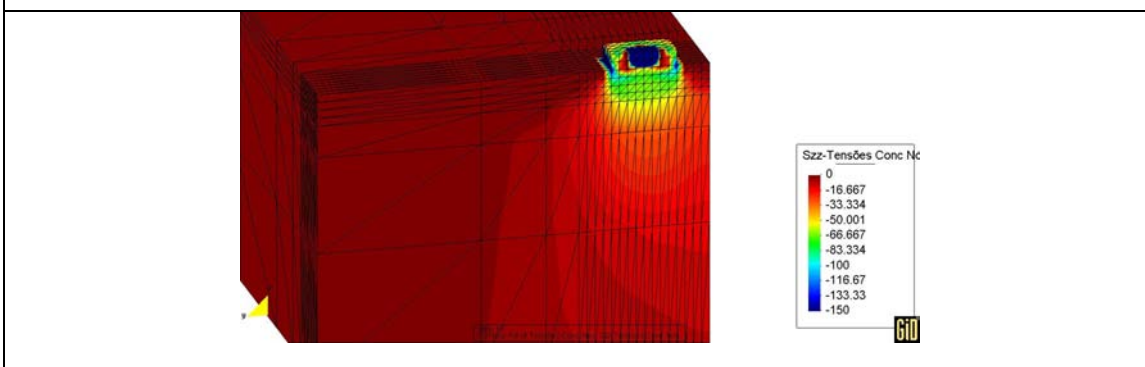




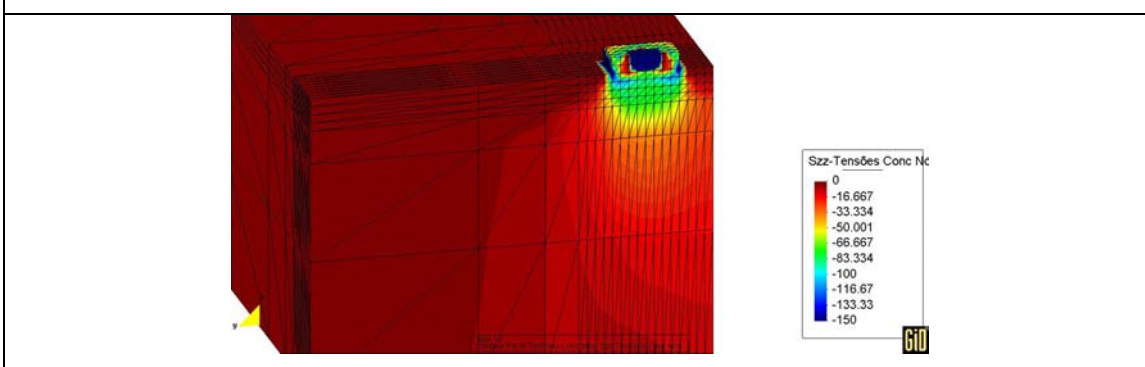
Incremento 07 – 1700kN



Incremento 10 – 2000kN



Incremento 13 – 2300kN



Incremento 17 – 2700kN

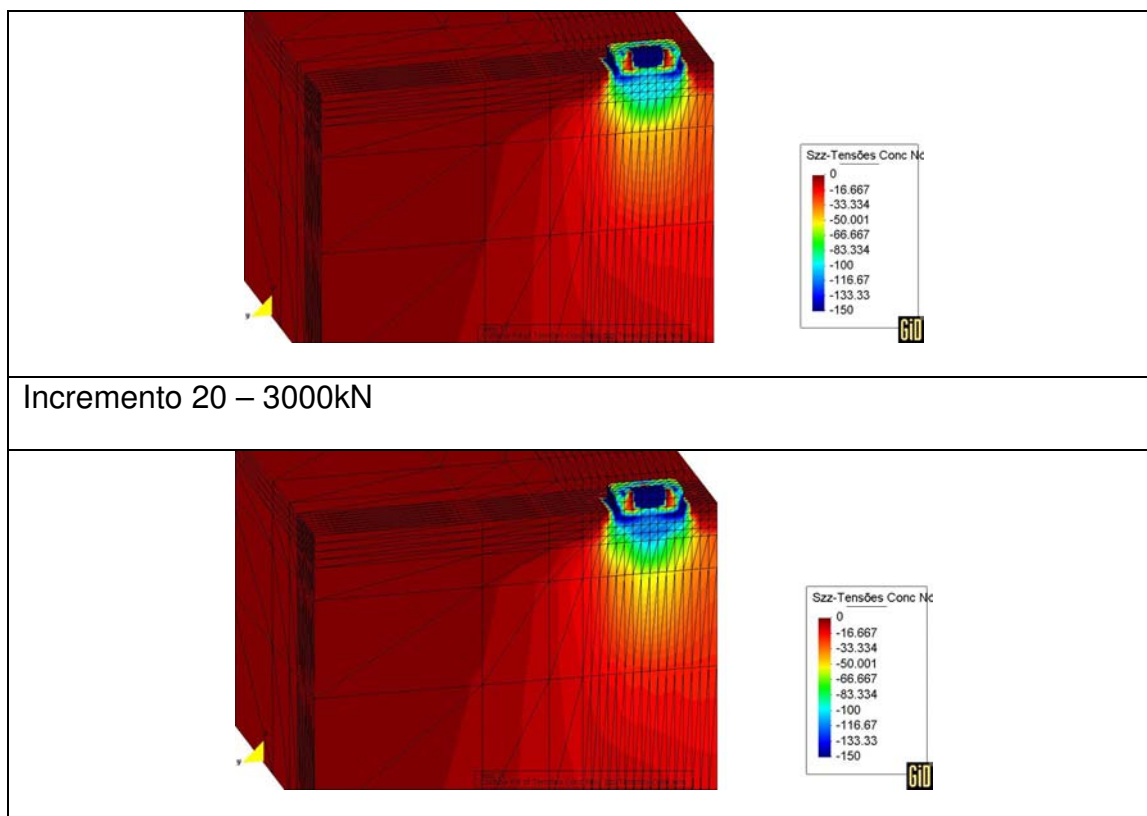


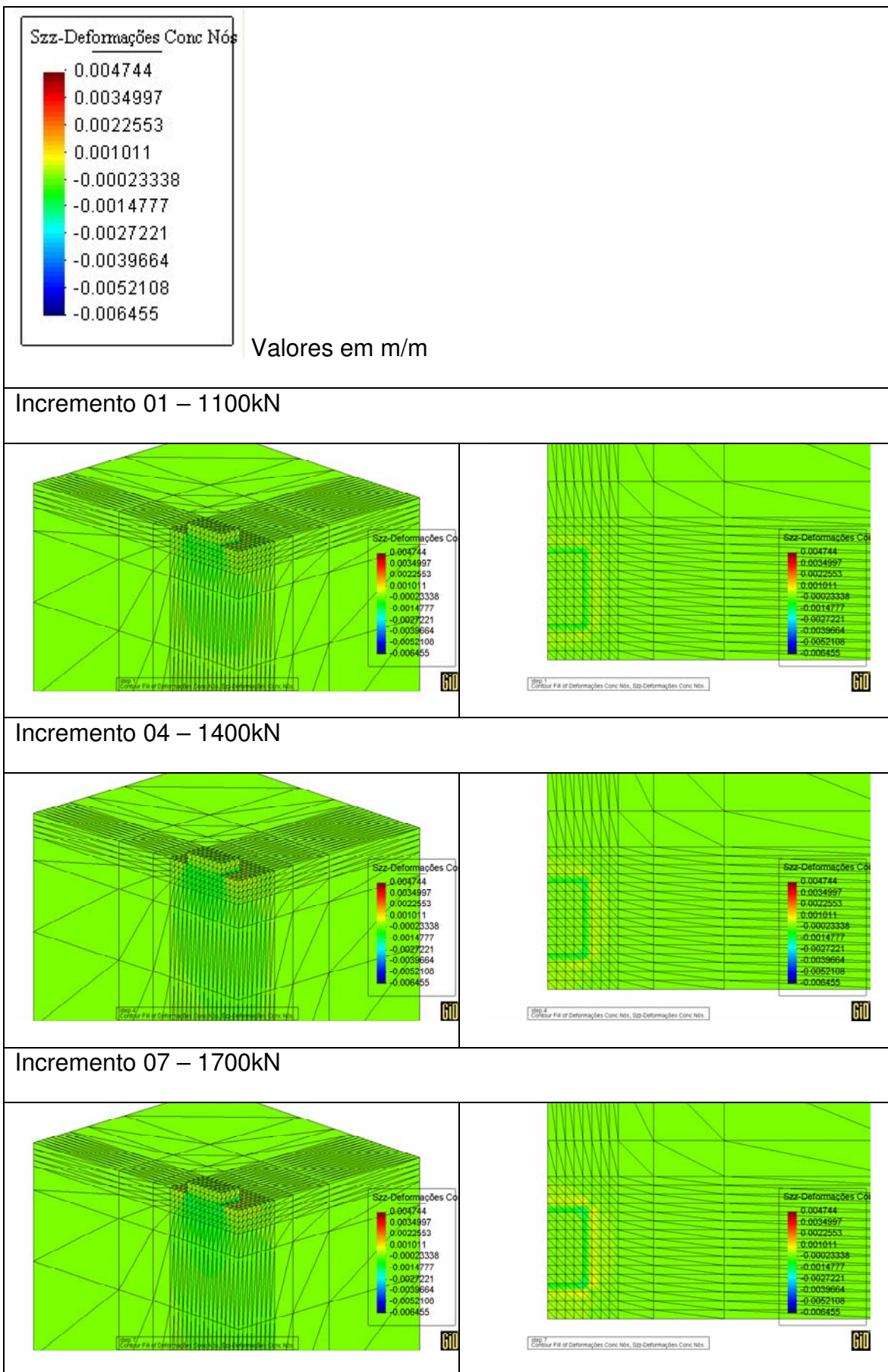
Figura 6.34 – Distribuição das tensões normais verticais com escala modificada.

Agora é possível observar para as tensões o mesmo comportamento observado para os deslocamentos. Há um bulbo de tensões imediatamente abaixo da fundação e, em maiores profundidades, há uma sobreposição entre os bulbos de tensão das duas sapatas.

6.2.1.3 Deformações específicas normais verticais nos elementos de concreto e de solo

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das deformações específicas normais verticais em função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos incrementos de carga mostrados.

Vista em perspectiva	Vista em planta
-----------------------------	------------------------



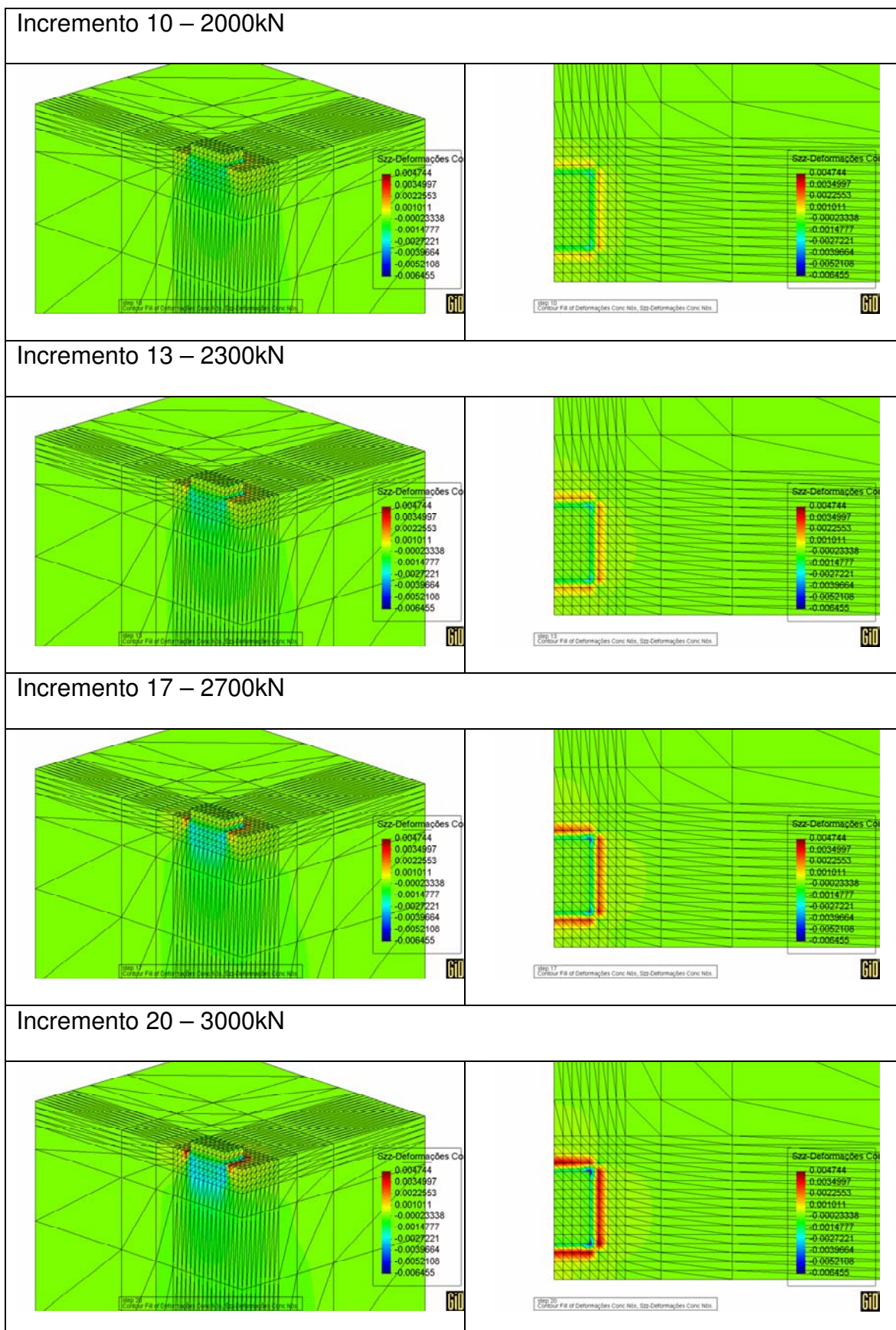
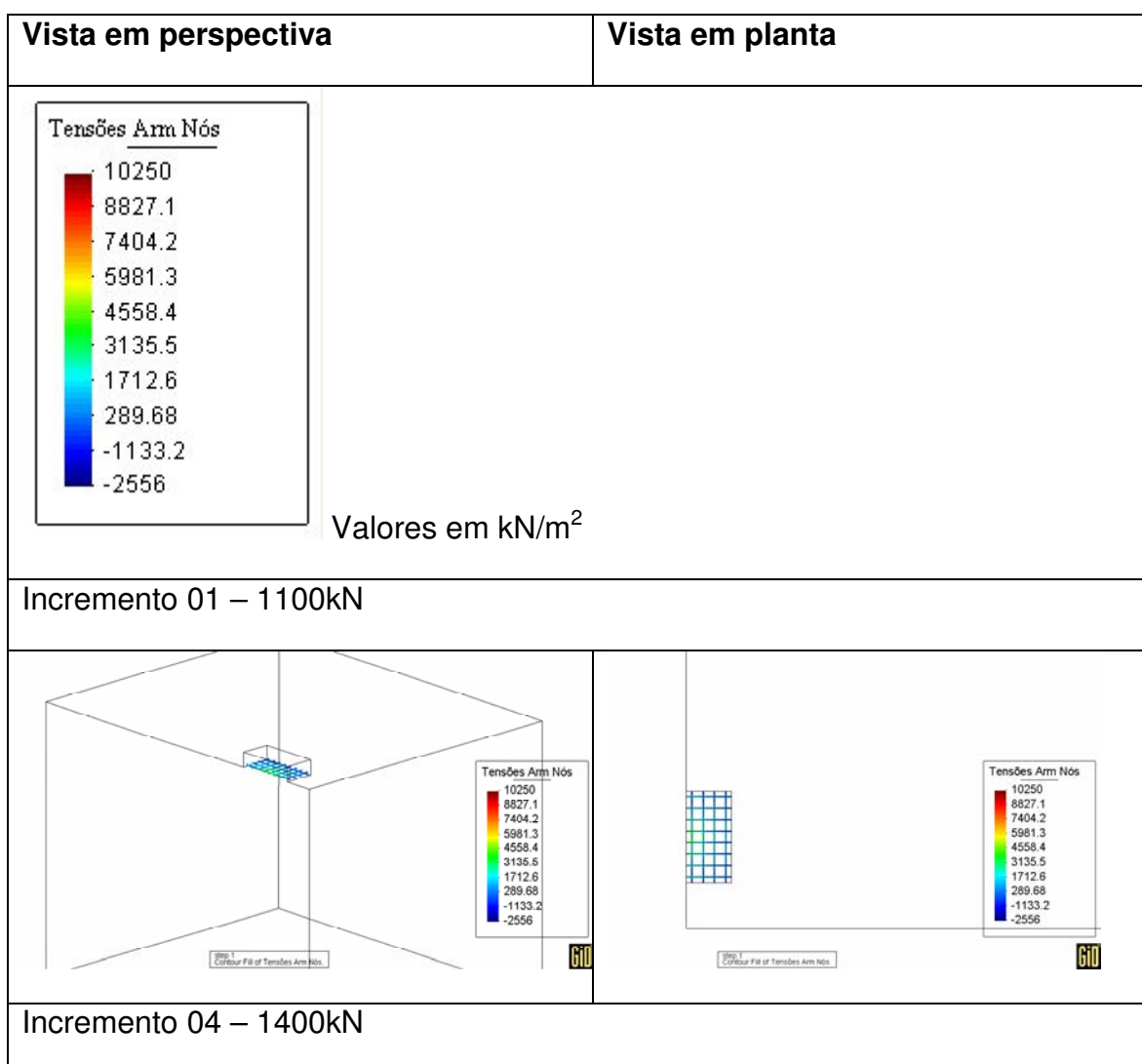


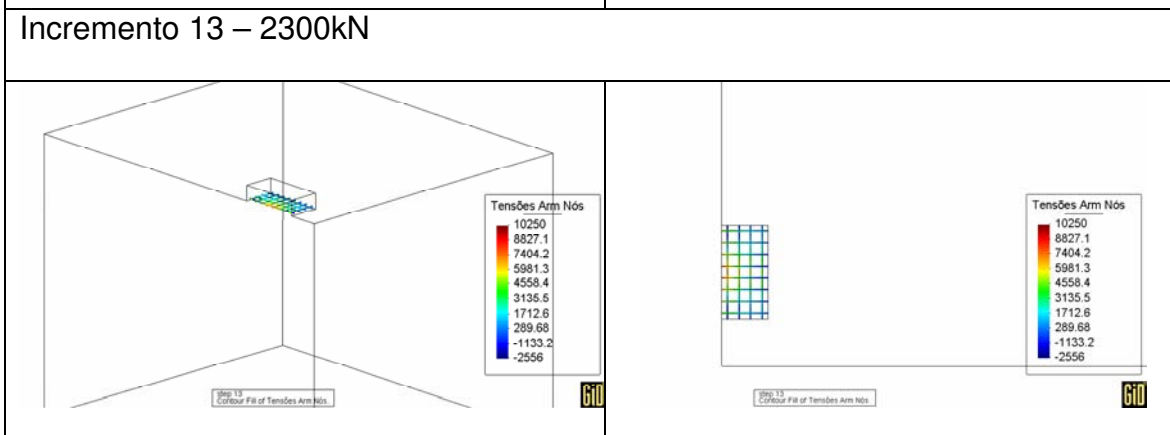
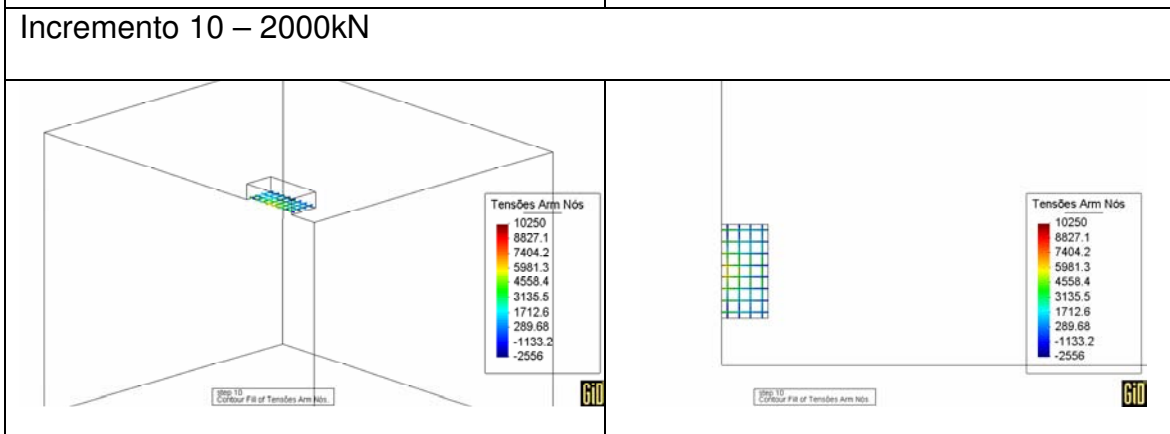
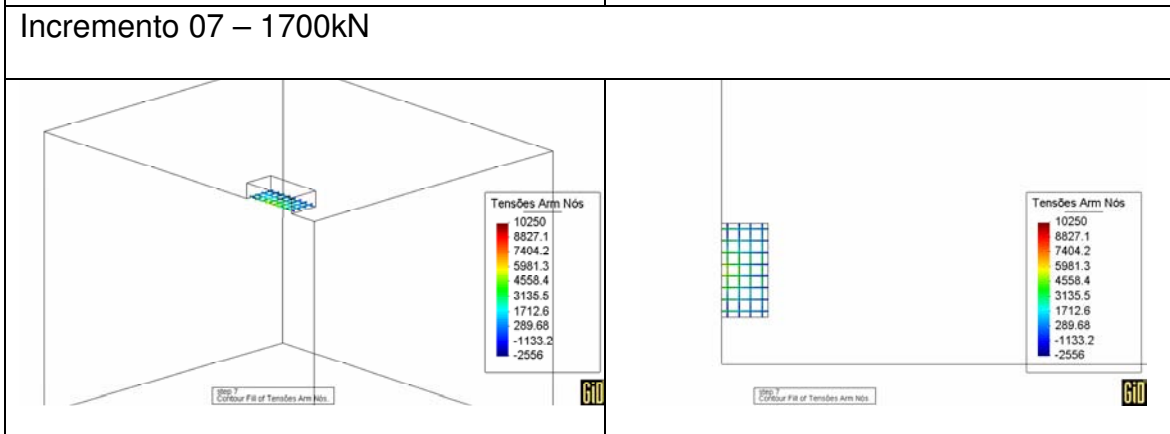
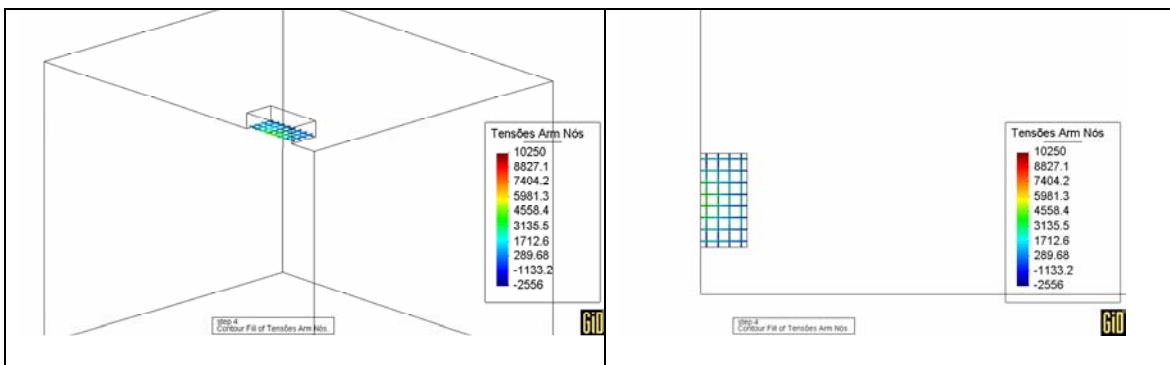
Figura 6.35 – Distribuição das deformações específicas normais verticais

Nessa série de resultados é possível caracterizar bem um outro aspecto da região no entorno das bordas da fundação. O solo imediatamente abaixo da borda apresenta um afundamento em função da plastificação da região onde está assente a fundação, porém o solo próximo à borda sofre uma pequena elevação. Isto indicar que, apesar da falha ser bem característica como um puncionamento do solo, há uma pequena região do entorno que acaba por apresentar deformação específica de elevação, mesmo que seja mínima.

6.2.1.4 Tensões nos elementos de armadura

Na série de resultados a seguir é apresentada a evolução das tensões na armadura função do aumento da carga aplicada pelo pilar. A escala, apresentada inicialmente, é válida somente para os resultados dos incrementos de carga mostrados.





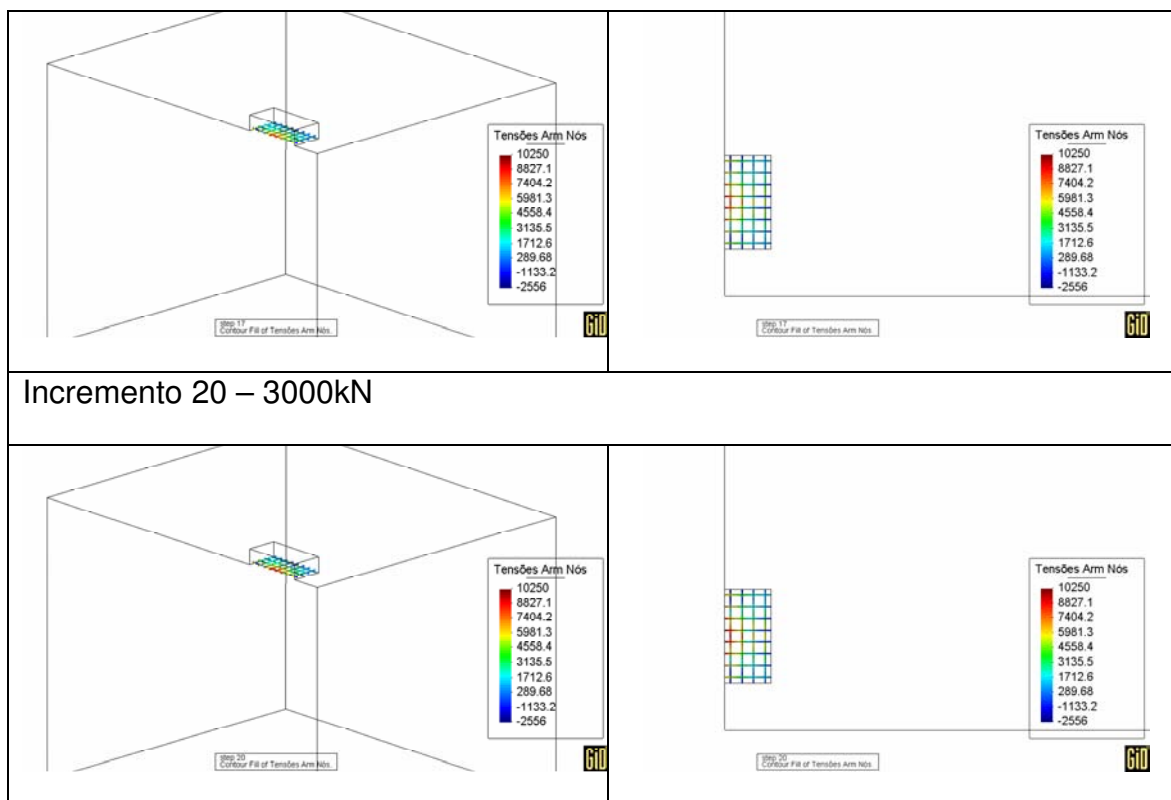


Figura 6.36 – Distribuição de tensões na armadura

Neste exemplo também a armadura é muito pouco utilizada. A magnitude das tensões nas barras é no máximo em torno de 1 kN/cm². Mesmo assim, através da escala utilizada é possível notar o correto funcionamento do modelo, pois as barras são tracionadas imediatamente abaixo do local de aplicação da carga do pilar.

6.2.1.5 Fissuração da fundação

Neste exemplo, a fissuração do concreto ocorreu, em pequena magnitude, em dois elementos situados abaixo do ponto de aplicação da carga do pilar, conforme indicado na Figura 6.37.

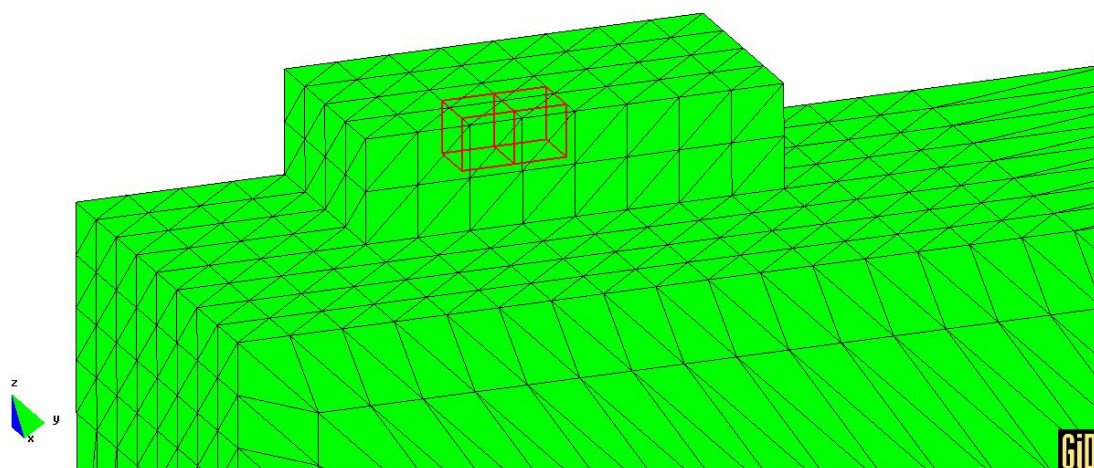


Figura 6.37 – Elementos da fundação que apresentaram fissuração.

7 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES GERAIS

7.1 CONCLUSÕES

A modelagem numérica tridimensional de grandes volumes, situação típica em problemas que envolvem solo e fundação, exige muito em termos de recursos computacionais. Apesar disso, dentro do espectro de alternativas disponíveis aos profissionais que se dedicam ao estudo da interação solo-estrutura, a modelagem de tais problemas pelo método dos elementos finitos tem se mostrado não somente uma alternativa viável, mas de grande contribuição científica.

Neste trabalho, a análise tridimensional não-linear de problemas de interação solo-fundação permitiu uma modelagem mais próxima do que acontece na realidade, propiciando análises muito mais complexas do que seria possível, por exemplo, em modelagens bidimensionais.

Dentre todas as variáveis do problema, a rigidez relativa entre a fundação e o solo provou ser a que mais significativamente afeta a distribuição das tensões e deformações na interface. Portanto, a adoção de parâmetros adequados, principalmente no que se refere ao solo, permite a obtenção de resultados mais confiáveis.

Outro aspecto observado ao longo do desenvolvimento desta pesquisa é que, no campo do estudo da interação solo-estrutura, os trabalhos com resultados computacionais, e mesmo experimentais, são escassos e, quando existentes, têm aplicabilidade limitada. Mesmo assim, considera-se que os resultados obtidos neste trabalho, ao serem comparados com dados da literatura, foram consistentes e satisfatórios, validando o programa computacional desenvolvido.

A linguagem Fortran 90 se mostrou adequada às necessidades de desenvolvimento computacional e o programa GiD se mostrou fundamental para a visualização dos resultados obtidos nas simulações.

Porém, ao final deste trabalho, conclui-se que o objetivo principal de desenvolver um programa computacional para realizar a análise tridimensional da interação solo-estrutura foi alcançado.

7.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Algumas limitações computacionais se impuseram no desenvolvimento do presente trabalho. A principal delas, a quantidade de memória utilizada em cada simulação, deve-se à necessidade da montagem da matriz de rigidez global. Foram utilizados diversos esquemas de otimização das matrizes, porém, ainda assim, a memória requerida para os problemas é considerável. Soma-se a esse fato a constatação de que há uma limitação para a memória virtual disponível quando o computador ou algum dos programas computacionais empregados na simulação utiliza uma arquitetura de memória de 32 bits. Esse é justamente o caso do sistema operacional Windows®, do ambiente de compilação Fortran 90 e da arquitetura de memória da maioria dos computadores produzidos atualmente. Na prática, isto significa que, desde que um desses componentes utilize arquitetura de memória de 32 bits, a memória virtual utilizável estará limitada a 2 Gigabytes, mesmo que a quantidade de memória RAM existente no computador seja superior a esse valor. Por essa razão, por inúmeras vezes, essa limitação se constituiu como um dos principais obstáculos ao desenvolvimento das simulações. A única forma de extrapolar esse limite é a adoção de todos os componentes com arquitetura de memória de 64 bits: computador, sistema operacional e ambiente de compilação. Nesse caso, pode-se chegar a um limite de 16 Terabytes de memória virtual utilizável, ou seja, 8000 vezes maior. Dadas essas limitações, talvez um outro tipo de arranjo para a resolução do sistema, em que não houvesse necessidade de montar essa matriz, fosse mais indicado para problemas tridimensionais.

Outra dificuldade diz respeito à resolução do problema elastoplástico através do método da rigidez inicial que resulta em um tempo de processamento bastante elevado. À medida que o problema se aproxima da situação de colapso, mais tempo é consumido na simulação. Cada um dos exemplos apresentados no capítulo seis demorou em torno de nove dias para

completar a simulação. Aqui também se fazem necessários desenvolvimentos futuros com o intuito de minimizar o tempo de processamento.

O conjunto dessas limitações e dificuldades acabou por reduzir o escopo inicial do trabalho, sendo excluídos os casos de fundações profundas e mistas. Dessa forma, como sugestão para futuros trabalhos nesta linha de pesquisa, pode-se destacar:

- A modelagem da massa de solo, considerando mais de duas camadas diferentes (perfis/horizontes);
- A modelagem de fundações mistas e profundas;
- A realização de um estudo experimental complementar para aumentar a confiabilidade do modelo;
- A ampliação do modelo computacional, utilizando elementos de interface, para considerar tração na base da fundação;
- A extensão do modelo computacional para poder considerar também a fissuração de matrizes cimentícias para o caso de estudos com solos tratados com cimento;
- A extensão do modelo para viabilizar a modelagem de solos reforçados com fibras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BORJA, R. I., C. H., M. F. J., L. C. **SSI effects on ground motion at Lotung LSST site**. Journal of Geotechnical e Geoenvironmental Engineering, ASCE, v.125, n.9, p.760-770, Set 1999.
2. CAMPOS FILHO, A. **Análise teórico-experimental de elementos de concreto armado para obtenção de modelo matemático**. São Paulo: USP, 1987, 293p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.
3. CALAVERA, J. **Calculo de Estructuras de Cimentación**. Espanha. Torreangulo Artes Gráficos, 3^a.ed.
4. CAPUTO, H. P. **Mecânica dos solos e suas aplicações**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1988. v.1, 6^a ed, 235p.
5. CELEBI, M. & CROUSE, C. B., **Recommendations for soil-structure interaction (SSI) instrumentation**. California, EUA. Workshop on Structural Instrumentations, 2001.
6. CHAO, H. Y. & BORJA, R. I. **Nonlinear dynamic soil-structure interaction analysis and application to Lotung problem**. J. A. Blume Earthquake Engrg. Ctr. Tech. Rep. No. 129, Stanford University, EUA, 1998.
7. CHEN, W. F. & HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. New York: Springer-Verlag New York Inc, 1988. 606p.
8. CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1994, 145p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
9. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. Application of the finite element method to two-dimensional reinforced concrete structures. Paris, 1983, 89p. (Bulletin d'Information, 159).

10. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. CEB-FIP model code. Lausanne, 1991. (Bulletin d'Information, 203/205).
11. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. Concrete under multiaxial states of stress constitutive equations for practical design. Paris, 1983. (Bulletin d'Information, 156).
12. COOK, R. D. **Finite modeling for stress analysis**. Madison: John Wiley and Sons, 1995. 150p.
13. CUDMANI, R. O. Estudo do comportamento de sapatas assentes em solos residuais parcialmente saturados através de ensaios de placa. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1994, 150p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
14. CREUS, G. J. **Relações elastoplásticas em tração e compressão**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1983. 25p. (Caderno Técnico, 49).
15. CREUS, G. J. **Relações elastoplásticas no caso multiaxial**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1983. 33p. (Caderno Técnico, 55).
16. ELWI, A. E. & HRUDEY, T. M. **Finite element model for curved embedded reinforcement**. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v.115, n.4, p.740-754, Apr.1989.
17. OWEN, D. R. J. & HINTON, E. **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1980. 593p.
18. HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1988. 550p.
19. HINTON, E. & CAMPBELL, J. S. **Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.8, p.461-480, 1974.
20. MAHARAJ, D. K. **Nonlinear finite element analysis of strip footing on reinforced lay**. Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2004
21. MARTINELLI, M. **Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do método dos elementos finitos**. Porto

- Alegre:PPGEC/UFRGS, 2003, 149p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
22. NGO, D., SCORDELIS, A. C. **Finite element analysis of reinforced concrete beams**. Journal of the American Concrete Institute, v.64, n.3, p.152-163, Mar. 1967.
23. OTTOSEN, N. S. **Constitutive model for short-time loading of concrete**. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.105, n.1, p.127-141, 1977.
24. PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1992, 130p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
25. TESSARI, M. A. **Ensaio de placa em camadas de cinza pesada de carvão tratadas com cimento**. Porto Alegre. CPGEC/UFRGS, 1998, 84p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil
26. VELLOSO, D. A., P. E. L. S. M., F. R. L. **Princípios e modelos básicos de análise**. Fundações Teoria e Prática, cap.3, p.163-196. São Paulo: PINI, 1998.
27. VENDRUSCOLO, M. A. **Estudo do comportamento de materiais compósitos fibrosos para aplicação como reforço de base de fundações superficiais**. Porto Alegre. CPGEC/UFRGS, 2003, 224p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil
28. VITORETTI, M. M. **Análise da interação solo-estrutura em fundações de concreto armado pelo método dos elementos finitos**. Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2003, 146p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
29. ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000, 663p.

ANEXO A – ARQUIVOS DE ENTRADA DE DADOS

Para a entrada de dados do programa ISE3D, optou-se por utilizar um tipo de linguagem já utilizada anteriormente por Campos Filho e que se mostrou bastante eficiente para gerar malhas com tamanho considerável, além de ser totalmente adaptável as necessidades do programa.

Nesse trabalho são dois os arquivos de entrada do programa: um arquivo denominado “NomeArquivoEntrada.nom”; um arquivo com os dados de entrada do problema.

O arquivo “NomeArquivoEntrada.nom” é um arquivo que apenas armazena o nome do arquivo de entrada de dados do problema. Ou seja, se o arquivo de entrada de dados do problema é um arquivo com o nome “Exemplo1.dat”, então dentro de “NomeArquivoEntrada.nom” deve ser salva a palavra “Exemplo1”. O uso de um arquivo externo para gerenciar o nome do arquivo de entrada de dados é vantajoso na medida em que evita a necessidade de se realizar alterações no código do programa a cada vez que um exemplo diferente é analisado.

O arquivo de entrada de dados é um arquivo “*.dat” é formado por uma série de comandos agrupados em pequenos grupos de instruções, que constituem uma linguagem orientada para os dados do problema.

Linguagem Orientada

O primeiro comando a ser colocado é o comando TITULO e o último é o comando FIM. O conjunto de dados do problema é dividido em três grupos: DADOS DA MALHA; DADOS DA ESTRUTURA e DADOS DA CARGA. Esses grupos se dividem em outros sub-grupos que serão apresentados mais adiante.

Nos diagramas de sintaxe dos comandos, que serão apresentados a seguir, as letras maiúsculas e palavras escritas em letras maiúsculas são constantes da linguagem e devem ser utilizadas sem qualquer modificação. Um traço vertical | é usado para indicar o fim do diagrama de sintaxe do comando.

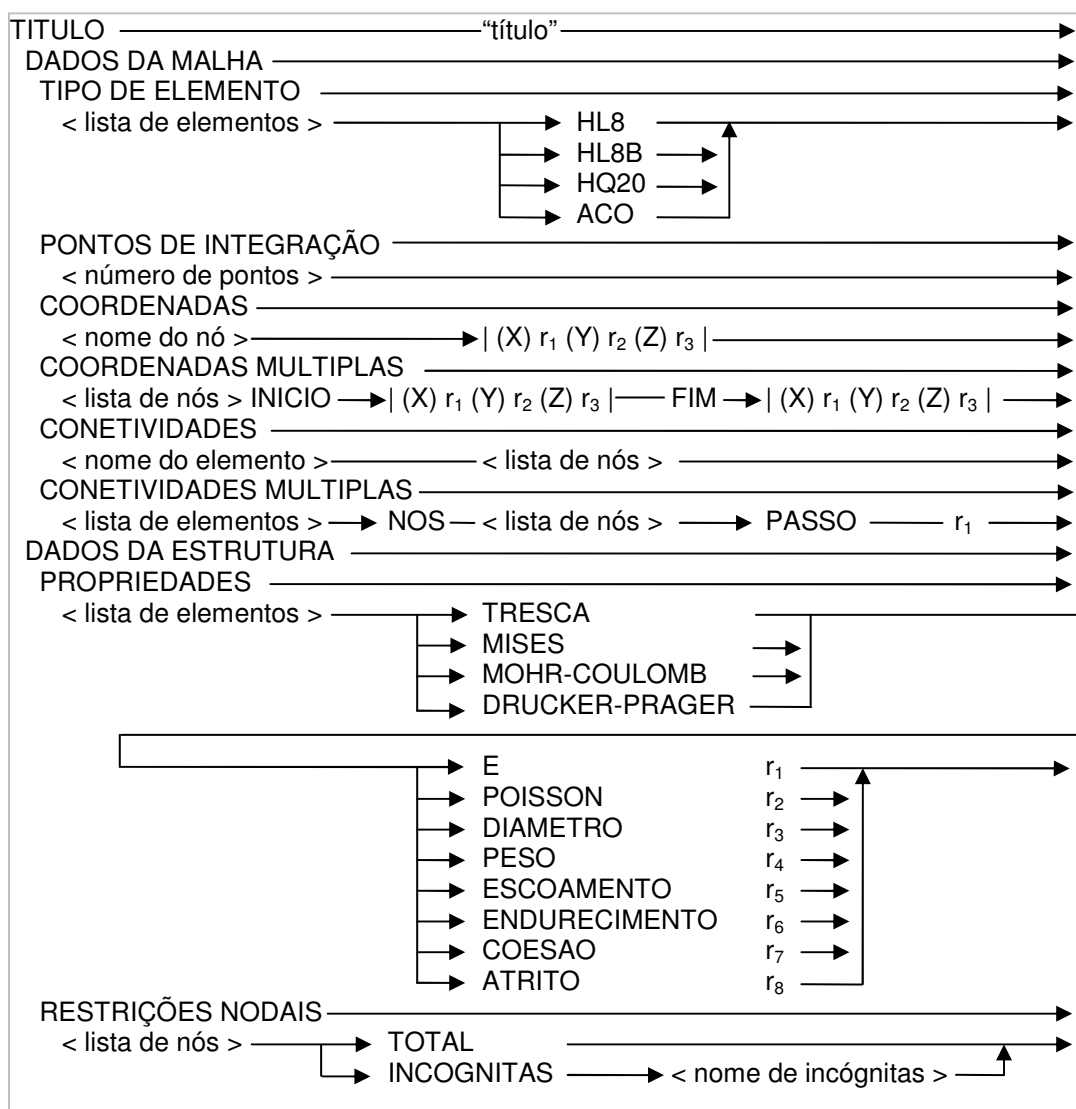
Os nós, os elementos e os carregamentos são identificados através de nomes numéricos (números inteiros). Um grupo de nós, elementos ou carregamentos é especificado sob forma de lista. Uma lista é um conjunto de nomes separados por um ou mais brancos, como, por exemplo:

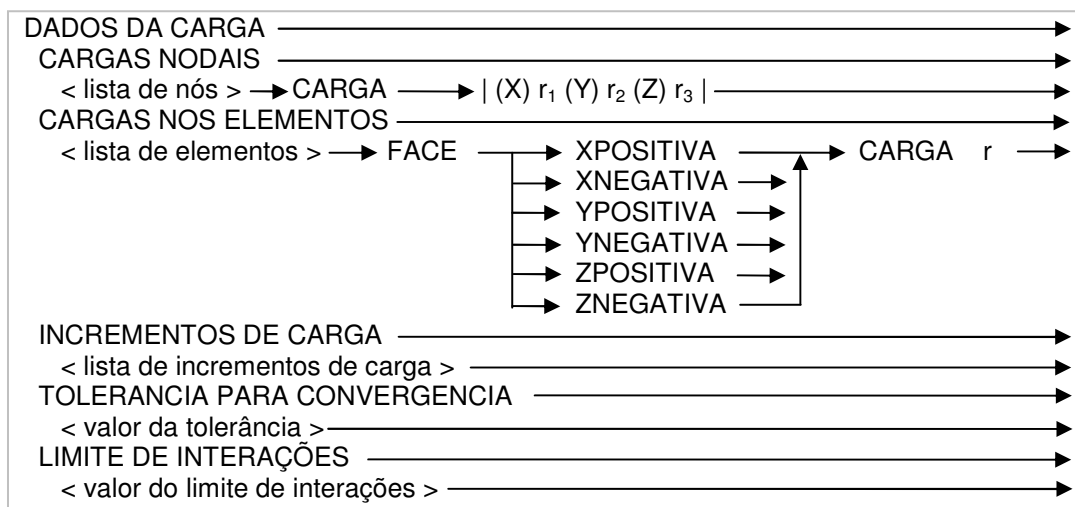
1 2 3 4 7 8 15 16 17

Se a lista incluir números inteiros consecutivos, pode-se empregar, alternativamente, a palavra ATE. Assim, a lista acima fica:

1 ATE 4 7 8 15 ATE 17

Sintaxe de comandos





Comentários sobre os comandos

O comando TIPO DE ELEMENTO estabelece os tipos de elementos utilizados. Estão disponíveis os elementos:

- HL8 (hexaedro linear de 8 nós)
- HL8B (hexaedro linear com funções bolha de 8 nós)
- HQ20 (hexaedro quadrático de 20 nós)
- ACO (aço)

As barras de armadura, especificadas unicamente pelos nós de extremidade, são identificadas pelo tipo ACO. Não confundir o tipo de funções de interpolação utilizadas para o elemento de armadura (linear ou quadrático), com o número de pontos de definição da geometria da mesma (reta definida por dois pontos; curva definida por três pontos).

O comando PONTOS DE INTEGRAÇÃO especifica o número de pontos usados na integração numérica do elemento. Elementos HL8 e HL8B utilizam 8 pontos de integração. Elementos HQ20 podem utilizar 15 ou 27 pontos de integração.

No comando PROPRIEDADES são especificados os parâmetros para os elementos de concreto:

- o critério de escoamento MOHR-COULOMB ou DRUCKER-PRAGER
- o módulo de elasticidade longitudinal, E
- o coeficiente de Poisson, POISSON
- o peso específico, PESO
- a tensão de escoamento, ESCOAMENTO
- o módulo de endurecimento, ENDURECIMENTO;

para os elementos de solo:

- o critério de escoamento MOHR-COULOMB ou DRUCKER-PRAGER
- o módulo de elasticidade longitudinal, E
- o coeficiente de Poisson, POISSON
- o peso específico, PESO
- a tensão de escoamento, ESCOAMENTO
- o módulo de endurecimento, ENDURECIMENTO
- a tensão de coesão, COESAO
- o ângulo de atrito, ATRITO;

e para os elementos de aço:

- o critério de escoamento TRESCA ou MISES
- o módulo de elasticidade longitudinal, E
- o diâmetro da barra, DIAMETRO
- a tensão de escoamento, ESCOAMENTO
- o módulo de endurecimento, ENDURECIMENTO.

No comando RESTRICOES NODAIS deve-se indicar as restrições nodais para os nós indicados. No caso da restrição total usa-se apenas a palavra TOTAL. No caso de serem restringidas apenas uma ou duas direções, deve-se utilizar, no campo nome das incógnitas, o seguinte código

- restrição na direção X: U
- restrição na direção Y: V

- restrição na direção Z: W
- restrição nas direções X e Y: U V
- restrição nas direções X e Z: U W
- restrição nas direções Y e Z: V W

e assim por diante. A ordem das letras U, V e W não faz diferença para a leitura dos dados. Importante é declará-las após a palavra INCOGNITAS.

No conjunto iniciado pelo comando DADOS DE CARGA são definidos os carregamentos. Empregam-se os comandos: CARGAS NODAIS, CARGAS NOS ELEMENTOS. O primeiro comando, trata das cargas aplicadas nos nós e não requer maiores cuidados. O comando CARGAS NOS ELEMENTOS trata da aplicação de cargas de pressão uniforme nas faces dos elementos.

Para considerar a aplicação de cargas de pressão uniforme nas faces do elemento finito, foi adotado um esquema sugerido por Cook (1995) e que é aplicável a elementos finitos tridimensionais com faces retangulares. A vantagem é que se trata de um procedimento simples de ser implementado, evitando a integração numérica, porém possui a desvantagem de restringir a geometria dos problemas a serem analisados. No caso desse trabalho, as estruturas analisadas satisfazem as condições de implementação do esquema de Cook. O programa calcula a área de cada face, segundo a convenção da figura A.1, e realiza o procedimento indicado na figura A.2.

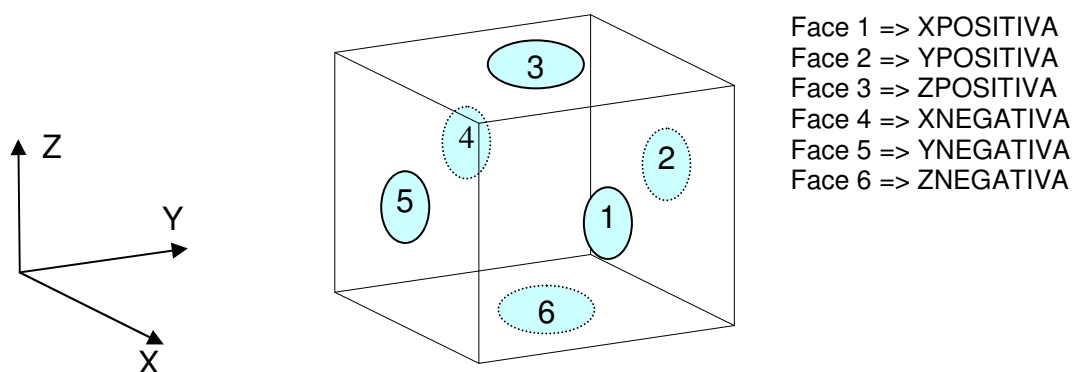


Figura A.1 – Numeração das faces do elemento

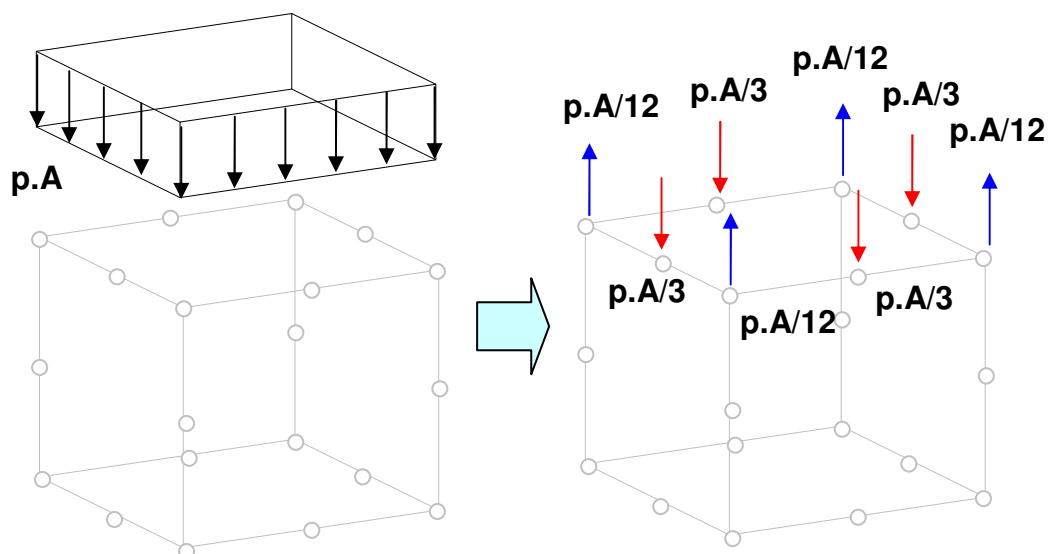


Figura A.2 – Cargas nodais equivalentes para pressão uniforme

No comando INCREMENTOS DE CARGA basta indicar a lista de incrementos de carga desejados. Trata-se da parcela do carregamento que se deseja utilizar em cada incremento de carga. Por exemplo, indicar

1.0 0.05 0.05

significa que no primeiro incremento se deseja o carregamento completo (1 vez o carregamento), e nos demais apenas uma parcela dele (0.05 vezes o carregamento). A carga total aplicada na estrutura é de 1.1 vezes o carregamento inicial.

No comando TOLERANCIA PARA CONVERGENCIA é indicado o valor da tolerância aceitável para que as forças residuais sejam aceitas. Trata-se de um valor em porcentagem.

No comando LIMITE DE ITERACOES indica-se o número máximo de iterações que o programa deve realizar para que, caso as forças residuais ainda não satisfaçam a condição de tolerância, o programa encerrar indicando divergência nos resultados.

ANEXO B – UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA GiD

O programa GiD é desenvolvido no International Center for Numerical Methods in Engineering – CIMNE, Barcelona, Espanha. Trata-se, como já mencionado anteriormente, de um programa adequado ao pré e pós-processamento de modelos de elementos finitos e possui uma versão acadêmica que é distribuída gratuitamente pelo próprio CIMNE na internet.

No presente trabalho, a linguagem GiD é utilizada como instrumento para visualização dos resultados, ou seja, para o pós-processamento. O programa ISE3D gera dois arquivos de saída compatíveis com o GiD. O primeiro deles é um arquivo “*.msh” que contém as informações da malha de elementos gerados. O outro arquivo gerado é um arquivo do tipo “*.res” que contém todos os resultados de deslocamentos, tensões e deformações para todos os pontos de integração e todos os nós da estrutura, separados para cada incremento de carga.

Os resultados apresentados nos capítulos 5 e 6 ilustram apenas algumas das diferentes possibilidades de visualização do programa.

ANEXO C – SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES NODAIS

O cálculo das tensões em um nó de um elemento pode ser realizado diretamente a partir dos deslocamentos nodais, bastando indicar as coordenadas correspondentes a esse nó. Porém, uma vez que esse procedimento seja realizado para todos os nós da estrutura, um mesmo nó pode apresentar descontinuidades no campo de tensões e deformações, em função da natureza da variação do campo de deslocamentos adotado. Isso pode ser ilustrado pela figura C.1-a.

Na etapa de processamento do programa ISE3D, os campos de tensões e deformações são computados nos pontos de integração e, após, suavizados para os nós dos elementos finitos, tal como ilustrado na figura C.1-b.

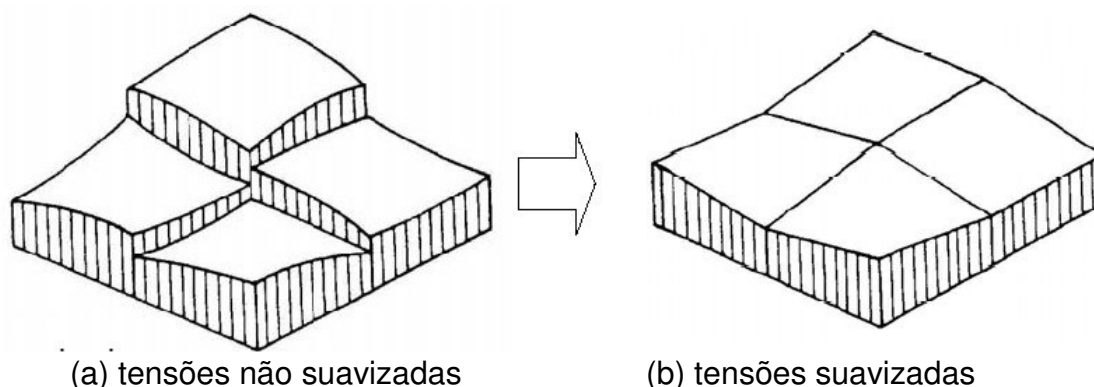


Figura C.1 – Tensões nodais suavizadas e não-suavizadas

O procedimento para efetuar a ilustração da figura C.1 foi implementado conforme o trabalho de Hinton e Campbell (1974) e a formulação básica para tal é apresentada a seguir.

A função de suavização é definida por

$$g(x, y, z) = a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{110}xy + \dots = \sum a_{ijk} x^i y^j z^k$$

$$\begin{cases} i = 0, p \\ j = 0, q \\ k = 0, r \end{cases} \quad (C.1)$$

onde g é uma função de x de ordem p , uma função de y de ordem q , e uma função de z de ordem r .

Se os dados não-suavizados são dados pela função $\sigma(x,y,z)$, então o problema se torna em encontrar os coeficientes a_{ijk} que minimizam o funcional

$$\chi = \iiint (\sigma - g)^2 dx dy dz \quad (C.2)$$

Portanto, para χ ser um valor mínimo,

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_{ijk}} = 0 \quad (C.3)$$

No caso desse trabalho, se as tensões nodais suavizadas σ_i^* forem consideradas as incógnitas do problema, então a função suavizadora $g(x,y,z)$ pode ser dada em qualquer ponto dentro do elemento pela expressão

$$g(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1, n} N_i \sigma_i^* \quad (C.4)$$

onde N_i , função de interpolação suavizadora do nó i , é função das coordenadas (ξ, η, ζ) e n é o número de nós por elemento.

O erro entre as tensões suavizadas e não-suavizadas em qualquer ponto dentro do elemento é dado por

$$e(\xi, \eta, \zeta) = \sigma(\xi, \eta, \zeta) - g(\xi, \eta, \zeta) \quad (C.5)$$

onde $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ são as tensões não-suavizadas em qualquer ponto dentro do elemento e podem ser obtidas pela relação usual

$$\sigma(\xi, \eta, \zeta) = [D][B]\{u^e\} \quad (C.6)$$

O problema agora é encontrar o conjunto de tensões nodais suavizadas $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_p^*$, que minimizam o funcional

$$\chi = \sum_{j=1, ne} \iiint e(\xi, \eta, \zeta)^2 dx dy dz = \sum_{j=1, ne} \iiint [\sigma(\xi, \eta, \zeta) - g(\xi, \eta, \zeta)]^2 \det J. d\xi. d\eta. d\zeta \quad (C.7)$$

onde ne é o número total de elementos, p é o número total de nós.

Para χ ser um mínimo

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma_i^*} = 0 \quad \text{para } i=1, 2, \dots, p \quad (\text{C.8})$$

Dessa forma, para cada elemento a matriz de suavização do elemento é dada por

$$[S]^e = \begin{bmatrix} \iiint N_1 N_1 \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta & \dots & \iiint N_1 N_n \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \\ \vdots & & \vdots \\ \iiint N_n N_1 \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta & \dots & \iiint N_n N_n \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

e o vetor de “forças” é dado por

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} \iiint N_1 \sigma \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \\ \vdots \\ \iiint N_n \sigma \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \end{Bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

O vetor de forças global $\{F\}$ e a matriz de suavização global $[S]$ são obtidos pela montagem entre os vetores $\{F\}^e$ as matrizes $[S]^e$ dos elementos.

O conjunto de tensões nodais suavizadas $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_p^*$ é obtido pela resolução do sistema

$$\{F\} = [S]\{\sigma^*\} \quad (\text{C.11})$$