Princípios Variacionais e Equações de Euler-Lagrange

P.C. Godolphim e E.G.S. Luna

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brazil

UFRGS UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

I. Introdução

Um dos mais importantes problemas em Física-Matemática consiste em minimizar expressões que não dependem simplesmente de uma ou várias variáveis contínuas, mas dependem explicitamente de uma função.

Tais problemas tiveram um papel central no desenvolvimento da Física clássica durante os séculos XVIII e XIX, e continuaram a ter importância fundamental com a chegada da Mecânica Quântica no século XX.

O formalismo resultante, denominado *Cálculo Variacional* (ou *Método Variacional*), é atualmente aplicado em uma enorme variedade de problemas em Física-Matemática. Neste poster apresentamos o Cálculo Variacional e aplicamos o formalismo ao problema da menor distância, na geometria euclideana, entre dois pontos.

II. O Cálculo Variacional: resumindo a ferramenta

No Método Variacional o problema de interesse não consiste apenas em determinar o ponto no qual alguma função particular tem seu menor valor, mas em determinar a inteira dependência funcional de alguma função específica de tal forma ela minimize uma integral I envolvendo a própria função e suas respectivas derivadas:

$$I = \int_{x_a}^{x_b} f(x, y, y')\, dx.$$

Considerando que a função $y(x)$, que minimiza I, faz parte de uma família de funções $\bar{y}(x, \epsilon)$ que satisfazem as condições

(i) $\bar{y}(x_a, \epsilon) = y(x_a)$, $\bar{y}(x_b, \epsilon) = y(x_b)$ para todo ϵ;
(ii) $\bar{y}(x, 0) = y(x)$;
(iii) $\bar{y}(x, \epsilon)$ é contínua e derivável em todo o intervalo $[x_a, x_b]$,

uma condição necessária, *mas não suficiente*, para a existência de um mínimo é dada por

$$\left[\frac{dI}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} = 0, \qquad \text{onde } I(\epsilon) = \int_{x_a}^{x_b} f(x, \bar{y}, \bar{y}')dx.$$

IV. Aplicação: o caminho mais curto entre dois pontos

Sejam (x_a, y_a) e (x_b, y_b) dois pontos no plano-xy, com $x_a < x_b$. A função que conecta estes pontos é $y = y(x)$, onde $y(x_a) = y_a$ e $y(x_b) = y_b$. O comprimento de arco conectando (x_a, y_a) e (x_b, y_b) é dado por

$$I = \int_{(x_a, y_a)}^{(x_b, y_b)} ds.$$

Como $ds^2 = dx^2 + dy^2$, temos $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$. Neste caso nosso problema está em encontrar a função $y(x)$ que minimiza a integral

$$I = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'^2}dx,$$

onde agora nossa função é $f = \sqrt{1 + y'^2}$. Aplicando a equação (1), equação de Euler-Lagrange, teremos

$$\frac{\partial \sqrt{1 + y'^2}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \sqrt{1 + y'^2}}{\partial y'} = 0.$$

O primeiro termo da equação acima é nulo. O segundo termo indica que

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial \sqrt{1 + y'^2}}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{constante}.$$

Portanto y' é igual a uma constante, digamos $y' = A$, tal que

$$y = Ax + B,$$

onde A e B são escolhidas de forma que a reta passe por (x_a, y_a) e (x_b, y_b).

III. A equação de Euler-Lagrange

Derivando $I(\epsilon)$ em relação a ϵ temos

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{d\bar{y}}{d\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\right)\right] dx.$$

Integrando o segundo termo por partes obtemos

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\, dx + \left[\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\right) dx;$$

pela condição (i) da seção II, temos então $\left[\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\right]_{x=x_a} = \left[\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\right]_{x=x_b} = 0$, de forma que

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\right)\right] \frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\, dx.$$

Para que $I(\epsilon)$ tenha um mínimo em $\epsilon = 0$, devemos ter

$$\left[\frac{dI}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} = 0 = \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\right)\right]_{\epsilon=0} \left[\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} dx;$$

escolhendo $\epsilon = 0$, que equivale a escolher $\bar{y}(x, \epsilon) = y(x)$ e $\bar{y}'(x, \epsilon) = y'(x)$, e fazendo $\left[\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} = \eta(x)$, obtemos

$$\frac{dI}{d\epsilon} = 0 = \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \eta(x)\, dx.$$

Como $\eta(x)$ é uma função arbitrária, o único modo da expressão acima ser nula é termos válida a equação

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0, \tag{1}$$

conhecida como *Equação de Euler-Lagrange*.

Em muitos casos de interesse físico, se a função $f(x, y, y')$ não depende *explicitamente* de x, a equação de Euler-Lagrange pode ser simplificada. Considere a quantidade $y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f$. Calculando a derivada em relação a x,

$$\frac{d}{dx}\left[y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f\right] = -y'\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] - \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Se y satisfaz a equação de Euler-Lagrange e $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, então

$$\frac{d}{dx}\left[y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f\right] = 0;$$

integrando esta equação obtemos $y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = K$, onde K é uma constante. Neste caso resultamos em uma equação diferencial de *primeira ordem* para $y(x)$, mais simples de ser resolvida.

As técnicas usadas na derivação da equação de Euler-Lagrange acima podem ser generalizadas para integrais da forma

$$I = \int_{x_a}^{x_b} f(x, y_1, y_2, ..., y_n; y_1', y_2', ..., y_n')dx,$$

onde as funções $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ que minimizam I são sujeitas às condições $y_1(x_a) = y_{1a}$, $y_1(x_b) = y_{1b}$,..., $y_n(x_a) = y_{na}$, $y_n(x_b) = y_{nb}$. Logo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0,$$

No caso em que f não depende explicitamente de x, teremos

$$\sum_{i=1}^{n} y_i'\frac{\partial f}{\partial y_i'} - f = K.$$

Bibliografia

[1] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Dover, 1970.

[2] F.W. Byron Jr. and R.W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Dover, 1992.