Teorema da Matriz-Árvore

Matheus Bohrer [1], Luiz Emilio Allem [2]

1 Bolsista, Bacharelado em Matemática Pura UFRGS
2 Prof. orientador

Salão UFRGS 2013 — CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO

UFRGS PROPESQ — XXV SIC Salão Iniciação Científica

CET - Ciências Exatas e da Terra

INTRODUÇÃO

A determinação do número de árvores geradoras de um grafo é um dos problemas mais antigos e famosos em Teoria de Grafos. Em 1847, estudando circuitos elétricos, Kirchoff provou o que viria a ser conhecido como o Teorema da Matriz-Árvore. O fato da prova de tal resultado ser motivada pelo estudo de circuitos elétricos, já dá uma idéia do número de aplicações de tal teoria.

OBJETIVO

O nosso objetivo é, depois de dadas as definições necessárias, provar tal resultado e, como aplicação, calcular o número de árvores geradoras de determinados grafos

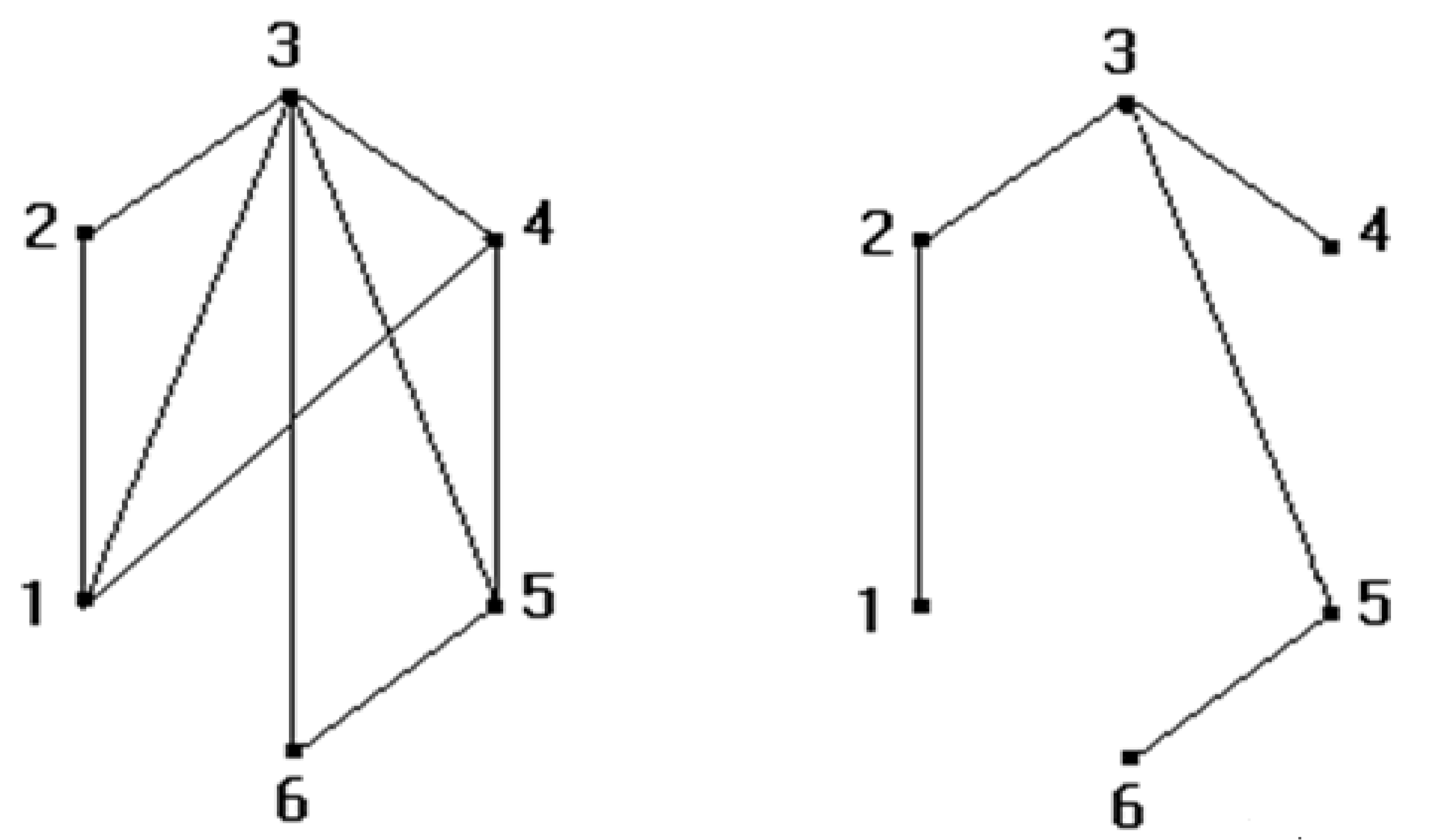
GRAFOS

Definição Um grafo é uma estrutura $G = G(V, E)$ constituída por um conjunto finito e não vazio V, cujos elementos são ditos vértices, e um conjunto E de subconjuntos a dois elementos de V, ditos arestas.

Definição Uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos.

Diremos árvore geradora de um grafo G a um subgrafo de G com os mesmos vértices de G que é uma árvore.

EXEMPLOS



Na imagem, vemos um grafo à esquerda e uma árvore geradora, à direita.

MATRIZES

Definição Seja $G = G(V, E)$ um grafo com n vértices. A matriz de adjacência de G, $A(G)$, é a matriz dada por

$$a_{ij} = f(x) = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Definição Seja D a matriz diagonal dos graus dos vértices de um grafo e seja A matriz de adjacência de G. A matriz

$$L = D - A$$

é dita laplaciano de G.

EXEMPLOS

Abaixo mostramos a matriz de adjacência (à esquerda) e o laplaciano (à direita) do grafo anterior (à esquerda).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

TEOREMA DA MATRIZ-ÁRVORE

O Teorema da Matriz-árvore afirma que o número de árvore geradoras de um grafo é dado por qualquer cofator da sua matriz laplaciana

Teorema Sejam $adj(L)$ a matriz adjunta de A e $\tau(G)$ o número de árvores geradoras de G. Então

$$adj(L) = \tau(G).J$$

onde J é matriz quadrada de ordem o número de vértices de G com todas as entradas unitárias.

REFERÊNCIAS

[1] DIESTEL, Reinhard. **Graph Theory**. Fourth Edition. Heidelberg, Springer, 2010.

[2] ABREU, Maria M. de. et al. **Introdução à Toeria Espectral de Grafos Com Aplicações**. São Carlos, SBMAC, 2007.

[3] GODSIL, Chris; ROYLE, Gordon. **Algebraic Graph Theory.** New York: Springer, 2001.

SIC 25 anos

MODALIDADE DE BOLSA PROBIC FAPERGS