Grafos de Cayley

Luísa Bürgel Borsato

Orientadora: Prof.ª Virgínia M. Rodrigues

Introdução

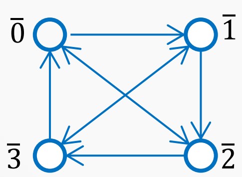
Um **grafo** $\mathcal{G}=\mathcal{G}(V, E)$ é uma estrutura constituída por um conjunto finito e não vazio V, cujos elementos são chamados vértices, e um conjunto E formado por pares não-ordenados de vértices, denominados arestas. Quando as arestas são formadas por pares ordenados de vértices, dizemos que o grafo é orientado.

Seja G um grupo e seja S um subconjunto de G que não contém o elemento neutro de G. O **grafo de Cayley** Cay(G, S) é o grafo orientado que tem como vértices os elementos de G e onde as arestas correspondem à multiplicação à direita pelos elementos de S, ou seja,

$$E = \{(g, gs) \mid g \in G \text{ e } s \in S\}.$$

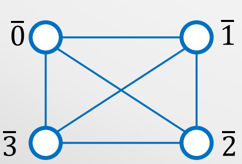
Exemplo

Cay($\mathbb{Z}_4$, S), onde $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ e $S = \{\bar{1}, \bar{2}\}$



Quando o conjunto S for fechado em relação a inversos, o grafo de Cayley pode ser visto como um grafo não orientado.

No exemplo acima, acrescentando o elemento $\bar{3}$ a S, a fim de torná-lo fechado em relação a inversos, obtemos o seguinte grafo de Cayley:



Proposição [1]

Seja S um conjunto gerador de um grupo G tal que S é fechado em relação a inversos. O grafo de Cayley, Cay (G, S), tem as seguintes propriedades:

(*i*) É conexo;
(*ii*) É regular com grau igual à cardinalidade de S;
(*iii*) É vértice-transitivo.

Aplicação

As propriedades citadas acima tornam os grafos de Cayley excelentes candidatos para a modelagem de redes de comunicação, onde os vértices representam os processadores e as arestas, os canais de comunicação.

Uma propriedade importante de uma rede chama-se **tolerância a falhas**, definida como o maior inteiro positivo k tal que a remoção de k vértices não destrói a conectividade da rede. Em [2], S. Gao e B. Novick mostraram que dado um grafo de Cayley conexo Cay (G,S), a tolerância falhas pode ser calculada em tempo polinomial: no máximo $(|S| \log|G|)^c$, para alguma constante c.

Eles também provaram que a família de grafos de Cayley, chamados de *Exchange Graphs*, tem ótima tolerância a falhas, ou seja, igual a d-1 onde d é o grau dos vértices.

[1] K. Elena, Lecture Notes on some problems of Cayley Graphs, 2012.
[2] S. Gao e B. Novick, Fault Tolerance of Cayley Graphs, Annals of Combinatorics 11 (2007), 161-171.