



Evento	Salão UFRGS 2013: SIC - XXV SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS
Ano	2013
Local	Porto Alegre - RS
Título	Enumerando os Racionais através de uma Função Simples
Autor	SAMANTA STEIN DA SILVA
Orientador	EDUARDO HENRIQUE DE MATTOS BRIETZKE

Nosso trabalho é baseado na primeira parte do artigo “New Looks at Old Number Theory” e apresenta uma maneira de enumerar os números racionais através de uma função simples.

O conhecido Teorema de que os números racionais são contáveis, ou seja, que existe uma bijeção entre os naturais e os racionais, foi demonstrado originalmente por Cantor em 1873. Nessa prova, Cantor representa os números racionais $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$) como pontos (p, q) do plano cartesiano e traça um caminho através de todos esses pontos, deixando de lado os pontos em que p e q não são relativamente primos. Assim, lista-se todos os pontos que pertencem ao caminho traçado seguindo a ordem em que são visitados, gerando uma bijeção. Porém, essa bijeção não é tão explícita.

Sendo assim, como pode-se obter uma bijeção descrita de maneira mais evidente? Esse estudo apresenta uma diferente bijeção entre racionais e naturais, com descoberta relativamente recente, descrita pelo Teorema abaixo:

Teorema: A função

$$S(x) = \frac{1}{2[x] - x + 1}$$

tem a propriedade de que na sequência $S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \dots$ todo número racional positivo aparece uma e somente uma vez.

Para demonstrar esse Teorema primeiramente é apresentada a Árvore de Euclides onde os pares $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ são arranjados em árvore representando todos os números racionais positivos $\frac{p}{q}$ exatamente uma vez. Após é definida e explicitada uma sequência através dos racionais positivos indo de qualquer racional positivo para o próximo da sequência, observando os vértices da Árvore de Euclides. Com esse procedimento chega-se à sequência do Teorema, concluindo a prova.

Conclui-se o estudo apresentando um algoritmo simples que encontra a posição na sequência para um dado racional positivo e apresenta-se algumas propriedades da Árvore de Euclides e da sequência.