

Introdução

- A incidência de um feixe de elétrons energéticos em um plasma térmico pode dar início a processos turbulentos que envolvem a geração e amplificação de ondas eletrostáticas de alta frequência, através de efeitos não lineares relacionados à interação onda-partícula.
- A interação das partículas do feixe incidente com as ondas presentes no plasma leva a alterações na função de distribuição de velocidades das partículas e no espectro das ondas, em um processo conhecido como “instabilidade *bump-in-tail*”. Essa interação ocorre via ressonância entre ondas e partículas.
- Esse nome está relacionado à existência de um segundo pico na distribuição de velocidades, na região do feixe de partículas, criando uma região onde a derivada da função de distribuição é positiva, condição propícia ao aparecimento de instabilidades.
- Efeitos não lineares relacionados à interação onda-partícula e a interações onda-onda podem levar à geração da chamada “turbulência de Langmuir”, e também à emissão de ondas eletromagnéticas, através de processos conhecidos como decaimento e espalhamento de ondas.
- Quando a instabilidade é pequena e o crescimento das ondas turbulentas é lento, emprega-se, como uma primeira aproximação, a teoria quase-linear para descrever como as ondas turbulentas, geradas e amplificadas pela interação onda-partícula, afetam a distribuição de velocidades de equilíbrio do plasma.
- A transferência de energia entre partículas e ondas continua até que o sistema entre novamente em um estado de equilíbrio.
- Na literatura especializada esse tema é amplamente abordado em uma dimensão. Essa aproximação é bastante simplificadora e, entre outras coisas, impossibilita a análise da radiação emitida.
- Nesse trabalho iremos apresentar a interação feixe-plasma como aplicação da teoria quase-linear, em duas dimensões, apresentando alguns resultados anteriores, obtidos pelos integrantes do Grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS, para o caso modelado em coordenadas perpendicular e paralela à propagação do feixe e, por fim, uma nova abordagem em coordenadas polares, tópico principal dessa apresentação.

Abordagem Anterior - Coordenadas Paralela e Perpendicular

Em trabalhos anteriores, em que foi aplicada a teoria quase-linear à análise bi-dimensional da interação feixe-plasma, as equações foram escritas considerando velocidades paralelas e perpendiculares à direção de propagação do feixe incidente e os íons foram considerados como um “background” estático neutralizador.

A função inicial de distribuição para os elétrons foi definida como sendo Maxwelliana, adicionada de uma Maxwelliana deslocada representando o feixe, com velocidade média normalizada u_f . A distribuição “de fundo” tem uma pequena velocidade média negativa, de modo que a velocidade média total é nula. A expressão, já normalizada, é a seguinte:

$$\Phi_e = \left(1 - \frac{n_f}{n_e}\right) \frac{1}{\pi} \left(\frac{T_*}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{T_*}{T_e}(u - u_0)^2\right) + \frac{n_f}{n_e} \frac{1}{\pi} \left(\frac{T_*}{T_f}\right) \exp\left(-\frac{T_*}{T_f}(u_{\perp}^2 + (u_{\parallel} - u_f)^2)\right)$$

A relação de dispersão para ondas de Langmuir é dada pela seguinte expressão

$$\omega_{\mathbf{k}}^L = \omega_{pe} \left(1 + 3k^2 \lambda_{De}^2\right)^{1/2}, \quad \omega_{-\mathbf{k}}^L = -\omega_{\mathbf{k}}^L, \quad \rightarrow \quad z_{\mathbf{q}}^L = \left(1 + \frac{3}{2}q^2\right)^{1/2},$$

onde λ_{De} é o comprimento de Debye.

Definindo a direção do feixe como paralela ao eixo z , as velocidades e os vetores de onda normalizados são expressos da seguinte forma

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{e}_x + q_z \mathbf{e}_z.$$

A equação quase-linear descreve como a função de distribuição Φ_e evolui temporalmente, sob a influência das ondas geradas pelos efeitos da interação onda-partícula. Considerando ondas de Langmuir temos uma equação de difusão da forma

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial u_x} (A_x^e \Phi_e) + \frac{\partial}{\partial u_z} (A_z^e \Phi_e) + \frac{\partial}{\partial u_x} \left(D_{xx}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{xz}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) + \frac{\partial}{\partial u_z} \left(D_{zx}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{zz}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right).$$

Na equação acima, A_x^e e A_z^e são, respectivamente, as componentes perpendicular e paralela do coeficiente relacionado a processos de flutuações espontâneas. Sua expressão é a seguinte:

$$A_i^e = g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_i}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z).$$

Os coeficientes D_{xx} , D_{xz} , D_{zx} e D_{zz} são conhecidos como os coeficientes de difusão quase-linear e relacionam diretamente a evolução temporal de Φ_e , com as ondas geradas pelos efeitos quase-lineares, através da seguinte equação

$$D_{ij}^e = \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_i q_j}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z),$$

onde $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}$ é a amplitude do espectro de ondas, cuja evolução temporal é dada pela seguinte equação

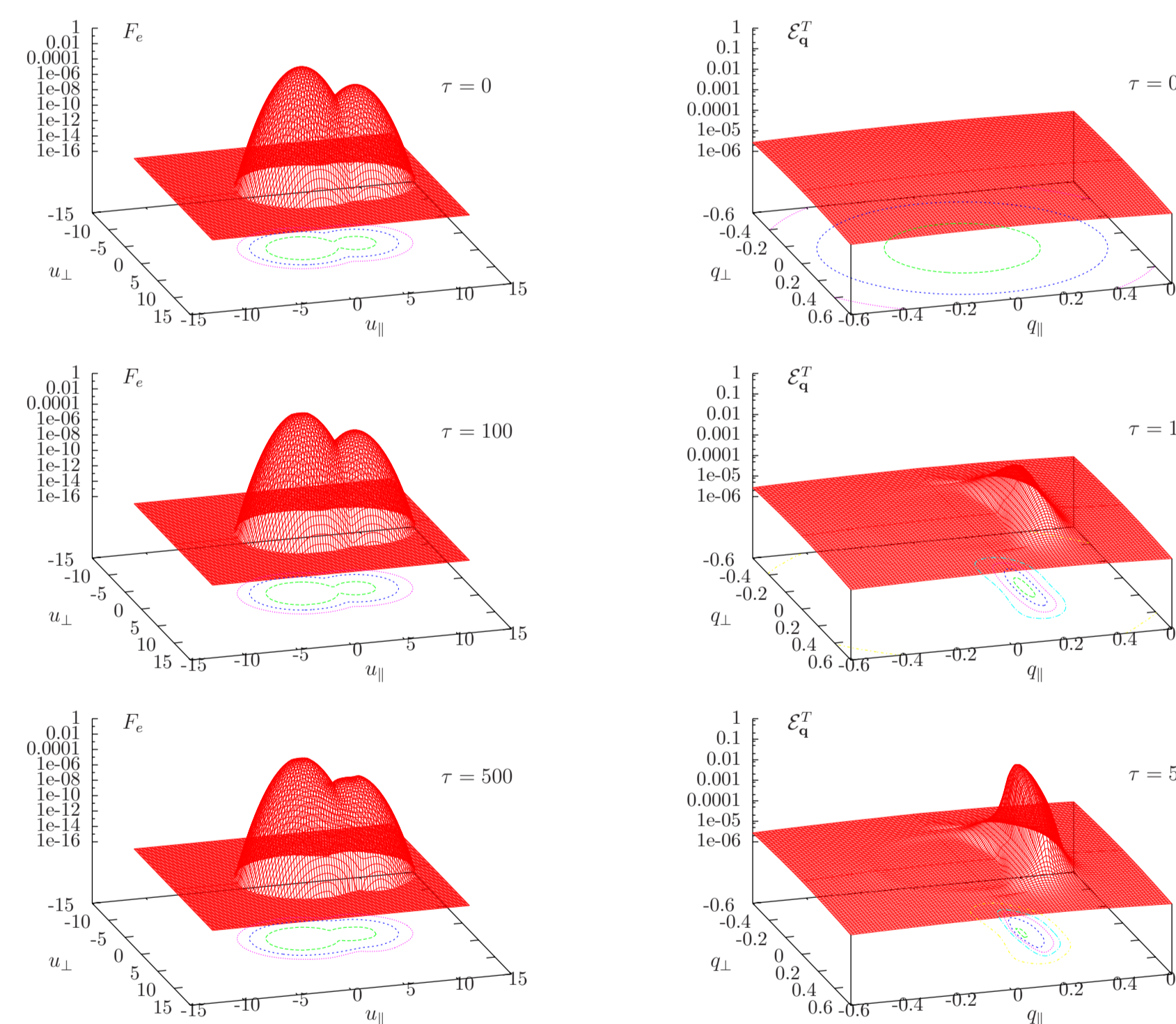
$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} = \frac{\pi n_e}{q^2 n_*} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \times \left[\frac{1}{2} \frac{n_e}{n_*} g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} \right] + \frac{\pi n_e}{q^2 n_*} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \times \left[\frac{1}{2} \frac{n_e}{n_*} g_* \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right].$$

O termo com g está relacionado a processos de emissão espontânea, e o termo com a derivada representa a chamada emissão induzida.

As equações acima foram aproximadas por equações de diferenças finitas e um código numérico utilizando linguagem de programação FORTRAN foi desenvolvido para a integração da equação de difusão. O método de integração empregado foi o “*splitting*”, resultando em um código eficiente e com uma boa estabilidade numérica.

Resultados Obtidos Em Coordenadas Paralela e Perpendicular

Alguns resultados obtidos com essa abordagem estão representados nas figuras abaixo:



Na figura à esquerda podemos ver a evolução das modificações sofridas, no espaço de velocidades, pela função de distribuição, para diferentes tempos de integração. Na figura à direita, os tempos de integração são os mesmos e mostram o crescimento do espectro de amplitude das ondas de Langmuir, no espaço de vetor de onda.

Nessa abordagem que usa coordenadas paralela e perpendicular foi tentada a inclusão de um termo de colisões no código numérico, com o objetivo de estudar a evolução do sistema a longo prazo. No entanto, a adição desse termo ao programa deu início ao desenvolvimento de instabilidades numéricas. Tendo em vista as dificuldades numéricas encontradas com a adição do termo de colisões ao código, propomos uma abordagem envolvendo o desenvolvimento de um modelo numérico em que as equações da teoria quase-linear sejam escritas em coordenadas polares.

Nova Abordagem - Coordenadas Polares

Foi definida a direção de propagação do feixe como sendo na direção z . Sendo assim, as velocidades normalizadas e o vetor de onda normalizado, foram escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z = u \sin \theta \mathbf{e}_x + u \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{e}_x + q_z \mathbf{e}_z = q \sin \varphi \mathbf{e}_x + q \cos \varphi \mathbf{e}_z.$$

As relações entre as coordenadas polares e as cartesianas são as seguintes

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{u_x}{u_z}$$

onde,

$$u_x = u \sin \theta, \quad u_z = u \cos \theta.$$

A mesma relação serve para o vetor de onda normalizado. Segue que, para as derivadas dos coeficientes, temos

$$\frac{\partial}{\partial u_x} = \frac{\partial u}{\partial u_x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u_x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial u_z} = \frac{\partial u}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

O módulo do Jacobiano dessa transformação é

$$\left| \frac{\partial u_x \partial u_z}{\partial u \partial \theta} - \frac{\partial u_x \partial u_z}{\partial \theta \partial u} \right| = | -u | = u.$$

Para o vetor de onda, a operação é a mesma, levando a $|J| = | -q | = q$. A equação de difusão quase-linear obtida após a mudança de coordenadas ficou da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} (u A_u^e \Phi_e) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_{\theta}^e \Phi_e) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u D_{uu}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u D_{u\theta}^e \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta\theta}^e \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta u}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} \right).$$

Os coeficientes A_u^e , A_{θ}^e , D_{uu}^e , $D_{u\theta}^e$, $D_{\theta\theta}^e$ e $D_{\theta u}^e$ foram escritos em termos das expressões para as componentes perpendicular e paralela:

$$A_u^e = (\sin \theta A_x^e + \cos \theta A_z^e)$$

$$A_{\theta}^e = (\cos \theta A_x^e - \sin \theta A_z^e)$$

$$D_{uu}^e = \left(D_{xx}^e \sin^2 \theta + D_{zz}^e \cos^2 \theta + D_{xz}^e \sin \theta \cos \theta + D_{zx}^e \sin \theta \cos \theta \right)$$

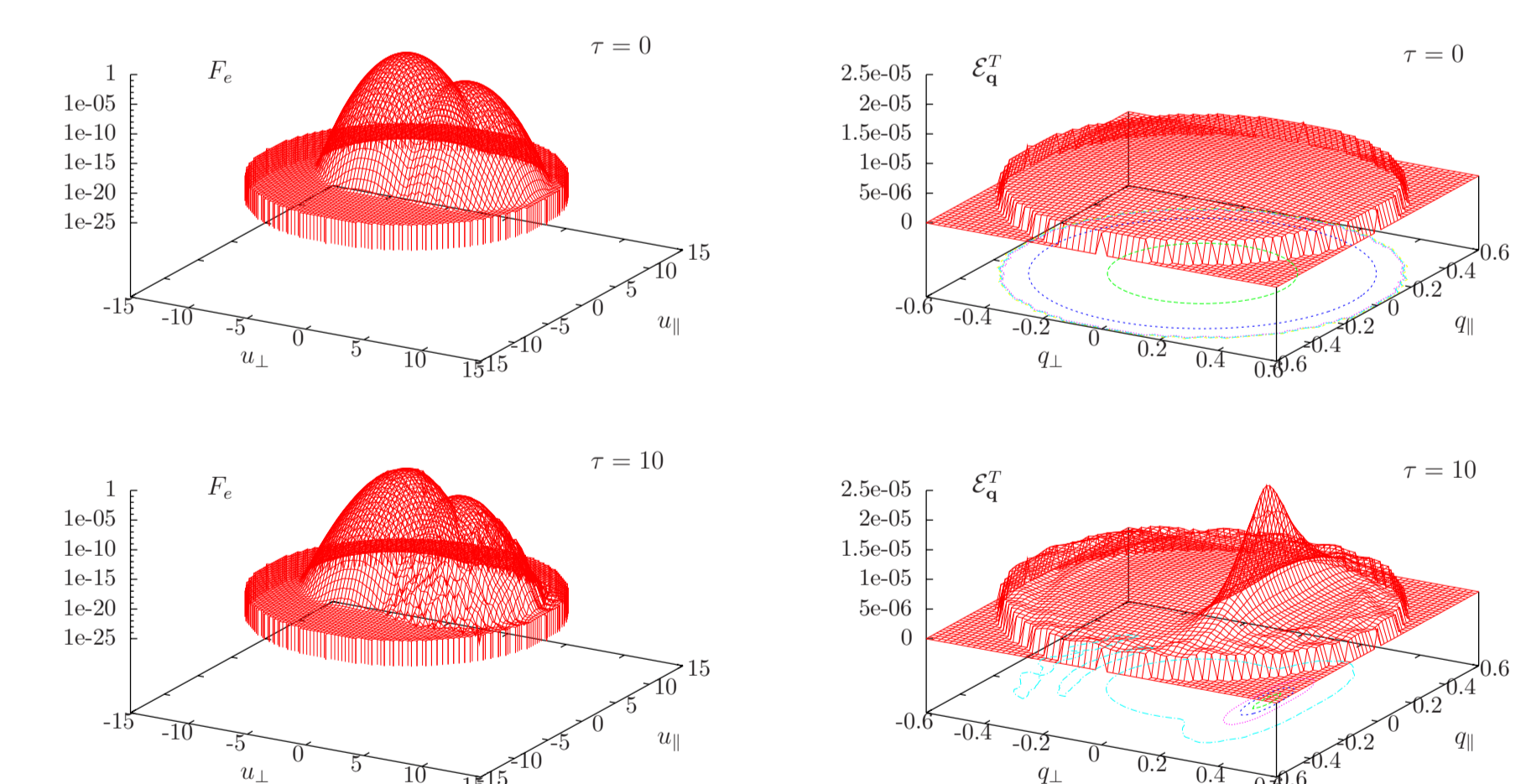
$$D_{\theta\theta}^e = \left(D_{xx}^e \cos^2 \theta + D_{zz}^e \sin^2 \theta - D_{xz}^e \sin \theta \cos \theta - D_{zx}^e \sin \theta \cos \theta \right)$$

$$D_{u\theta}^e = \left(D_{xx}^e \sin \theta \cos \theta - D_{zz}^e \sin \theta \cos \theta + D_{zx}^e \cos^2 \theta - D_{xz}^e \sin^2 \theta \right) = D_{\theta u}^e$$

O mesmo procedimento de discretização e integração numérica foi desenvolvido para as equações envolvidas nessa abordagem. Entretanto o código está apresentando instabilidade numérica, cuja origem está sendo investigada.

Resultados Obtidos Em Coordenadas Polares

Alguns resultados dessa abordagem estão na figura abaixo:



Embora estejamos integrando as equações em coordenadas polares, os dados gerados foram projetados para coordenadas cartesianas, com a finalidade de facilitar a análise e compressão da evolução temporal do sistema.

Podemos ver, no gráfico à esquerda, que as instabilidades na integração da função de distribuição iniciam já com $\tau = 10$. Com um tempo de integração maior, essas instabilidades devem crescer, prejudicando a análise da evolução temporal da função de distribuição.

No gráfico à direita, a evolução temporal do espectro de amplitude parece não ser muito afetada pelas instabilidades numéricas. Entretanto, para um tempo maior de integração, a tendência é que o efeito das instabilidades na função de distribuição comecem a alterar a evolução temporal de \mathcal{E} .

Conclusão

Neste trabalho apresentamos os resultados iniciais de uma nova abordagem para a integração das equações da aproximação quase-linear, aplicada à interação feixe-plasma. Embora o modelo apresente instabilidade, podemos ver que há evolução temporal, indicando que estamos no caminho certo. O próximo passo é identificar a origem dessa instabilidade e solucionar o problema para, então, adicionar o termo de colisões.