# Funções Geradoras e Problemas de Contagem


Pesquisador

Rafael Souza Fernandes
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
rafaelfernandys@hotmail.com

Orientador

Dr. Carlos Hoppen
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
choppen@ufrgs.br

INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS


## Introdução

Existem muitos métodos para a resolução de problemas de contagem, os mais simples e mais conhecidos são os princípios Multiplicativo e Aditivo. Entretanto, quanto mais um problema impõe restrições, mais difícil se torna a sua contagem. Uma das ferramentas da Análise Combinatória que de certa forma facilita resolução desses problemas é a Função Geradora.

Este trabalho de pesquisa teve como principal objetivo estudar as Funções Geradoras, suas aplicações em problemas de contagem, bem como estudar um outro método que utiliza esta ferramenta para a resolução desses problemas. Utilizando a literatura da área, encontramos um método que decompõe estruturas em peças conexas e estabelece uma relação entre suas respectivas funções geradoras.

## Função Geradora

Uma Função Geradora é uma série de potências cujos coeficientes representam o número de soluções de um dado problema combinatório. Tais coeficientes estão indexados aos expoentes de cada termo da série.

Exemplo: Quantas são as soluções inteiras da equação abaixo, sabendo que $x_1$ e $x_2$ pertencem ao conjunto $\{1,2,3\}$ e $x_3$ pertence ao conjunto$\{2,3,5\}$?

$$x_1+x_2+x_3=6$$

Solução: Associamos cada variável $x_i$ a um polinômio $p_i$, cujos expoentes representam as possibilidades de valores que cada variável pode assumir.

$$p_1(x)=x^1+x^2+x^3$$
$$p_2(x)=x^1+x^2+x^3$$
$$p_3(x)=x^2+x^3+x^5$$

A Função Geradora que nos dará as soluções será o produto destes 3 polinômios:

$$F(x)=p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot p_3(x)$$

A solução neste exemplo será o coeficiente de $x^6$ na expansão do produto dos polinômios:

$$F(x)=x^4+3x^5+\underline{5x^6}+6x^7+5x^8+4x^9+2x^{10}+x^{11}$$

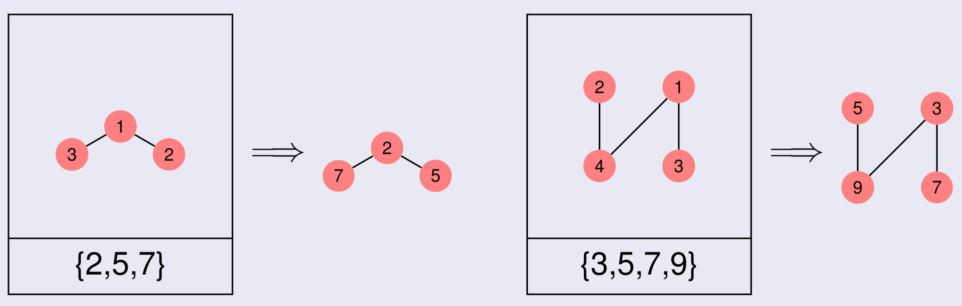
## "Cartas, Mãos e Baralhos"

Um método consiste em decompor estruturas gerais em pedaços conexos e estabelecer uma relação entre o número de pedaços e de estruturas. Essas peças conexas recebem o nome de "Cartas", que podem ser sacadas de conjuntos de peças denominados "Baralhos" e, a partir das quais se formam estruturas chamadas de "Mãos", o que torna conveniente denominar o método como "Cartas, Mãos e Baralhos". Para melhor compreender o funcionamento deste método, abaixo seguem as suas definições formais seguidas de exemplos que modelam o problema da contagem de Grafos Rotulados Conexos com $n$ vértices e com rótulos pertencentes ao conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$:

### Carta C(S,p)

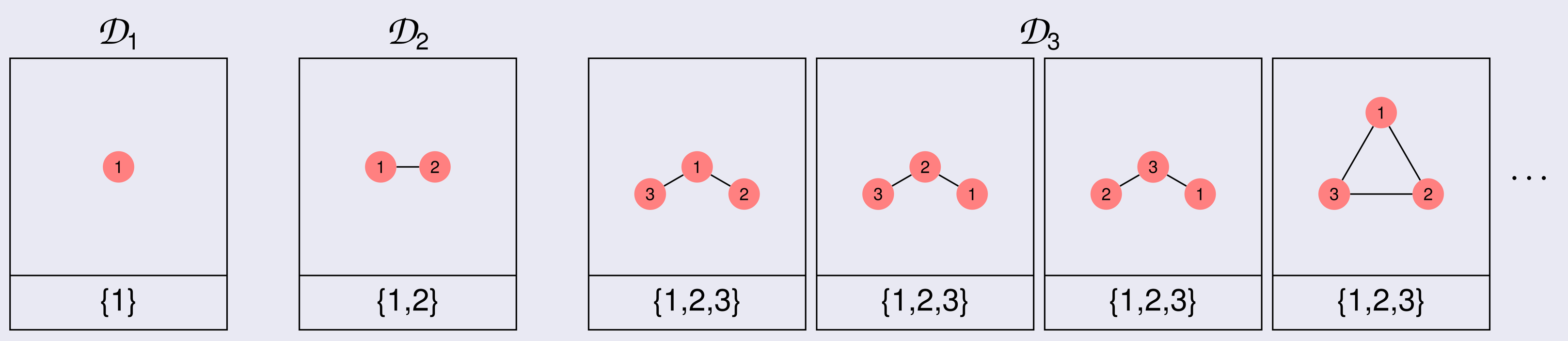
*É um par que consiste em um conjunto S (o conjunto de rótulos) e uma figura $p\in P$ (onde P é um conjunto de figuras). Uma carta é dita* ***Padrão*** *se S=[n]=$\{1,2,\ldots,n\}$. O* ***Peso*** *de uma carta é a cardinalidade do conjunto S de rótulos.*

Abaixo seguem exemplos de 2 cartas, carta da esquerda representa um grafo de 3 vértices e a da direita representa um grafo com 4 vértices.




### Baralho $\mathcal{D}$

*Conjunto finito de cartas padrão cujos pesos são iguais e figuras são distintas (chamamos de $\mathcal{D}_n$ o baralho cujas cartas possuem peso n).*

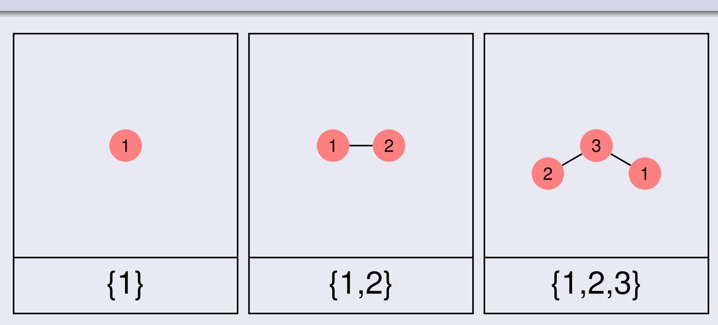



### Mão $\mathcal{H}$

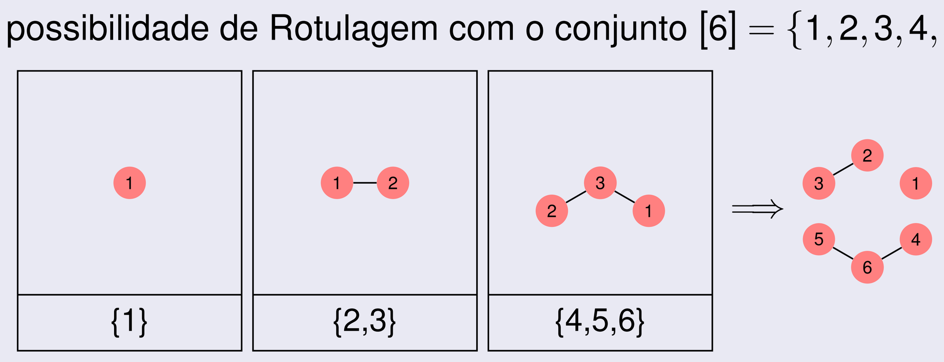
*Conjunto de cartas cujos rótulos formam uma partição de [n], onde n é a soma dos pesos das cartas dessa mão (n é o peso da mão). Para formar uma mão, é necessário escolher cartas dos baralhos e rotular essas cartas novamente através do processo de Rotulagem.*

### Rotulagem

*Processo de colocar ou alterar os rótulos das cartas, por exemplo, ao escolhermos cartas para formar uma mão, é necessário fazer uma rotulagem com o conjunto [n], pois existe a possibilidade de as cartas possuírem rótulos em comum.*




Uma possibilidade de Rotulagem com o conjunto $[6]=\{1,2,3,4,5,6\}$:




## Família Exponencial

Uma *Família Exponencial* é uma Coleção de Baralhos. Dada uma Família Exponencial $\mathcal{F}$, definimos $\mathcal{D}(x)$ como a função geradora que conta o número de cartas em cada baralho, onde $d_n$ é o número de cartas no baralho $\mathcal{D}_n$:

$$\mathcal{D}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{x^n}{n!}$$

Definimos também, na mesma $\mathcal{F}$, a função geradora de duas variáveis que conta o número de mãos de peso $n$ com $k$ cartas:

$$\mathcal{H}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n,k)\frac{x^n}{n!}y^k$$

## Principais Resultados

### Teorema (A Fórmula Exponencial)

*Seja $\mathcal{F}$ uma Família Exponencial cujos enumeradores de baralhos e mãos são $\mathcal{D}(x)$ e $\mathcal{H}(x,y)$, respectivamente. Então:*

$$\mathcal{H}(x,y)=e^{y\mathcal{D}(x)}$$

e

$$h(n,k)=\left[\frac{x^n}{n!}\right]\left\{\frac{\mathcal{D}(x)^k}{k!}\right\}$$

### Corolário

*Seja $\mathcal{F}$ uma Família Exponencial, seja $\mathcal{D}(x)$ a F.G.E. da sequência $\{d_n\}_1^{\infty}$ dos tamanhos dos baralhos e seja $\mathcal{H}(x)\overset{F.G.E.}{\longleftrightarrow}\{h_n\}_0^{\infty}$, onde $h_n$ é o número de mãos de peso n. Então:*

$$\mathcal{H}(x,1)=e^{\mathcal{D}(x)}$$

## Aplicação do Método na Contagem de Grafos Conexos

Utilizando o método das cartas podemos modelar este problema de modo a obter a função geradora do número de grafos conexos para cada grafo de $n$ vértices. Neste problema, cada baralho possui cartas padrão com figuras que podem ser distintas, tais cartas representam os grafos gonexos. O número $d_n$ de cartas em um baralho $\mathcal{D}_n$ é o número de grafos conexos com $n$ vértices. Uma mão é um grafo rotulado não necessariamente conexo. O número $h_n$ de mãos de peso $n$ é igual ao número de grafos rotulados com $n$ vértices.

É possível calcular o número de Grafos Rotulados de $n$ vértices, basta decidirmos, para cada par de vértices do grafo, se existe ou não uma aresta, portanto este número é $2^{\binom{n}{2}}$. Dessa forma, assumindo $h_0=1$, a Função Geradora de Grafos Rotulados com $n$ vértices pode ser facilmente obtida:

$$\mathcal{H}(x)=\sum_{n\geq1}h_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n\geq1}2^{\binom{n}{2}}\frac{x^n}{n!}$$

Pelo Teorema da Fórmula Exponencial temos que a Função Geradora dos Grafos Rotulados está relacionada com a Função Geradora dos Grafos Rotulados Conexos através da seguinte equação:

$$\sum_{n\geq1}2^{\binom{n}{2}}\frac{x^n}{n!}=e^{\mathcal{D}(x)} \qquad (1)$$

### Teorema

*Em uma Família Exponencial, as sequências de contagem $\{h_n\}$ e $\{d_n\}$, de mãos e baralhos, respectivamente, satisfazem a seguinte recorrência:*

$$nh_n=\sum_k\binom{n}{k}kd_kh_{n-k}$$

Portanto, aplicando este Teorema em (1) temos:

$$n2^{\binom{n}{2}}=\sum_k\binom{n}{2}kd_k2^{\binom{n-k}{2}}$$

Com esta fórmula, podemos calcular os $d_n$'s para pequenos valores de $n$. Para $n=1,\ldots,6$, por exemplo, podemos encontrar os valores $1,1,4,38,728,26704$, respectivamente.

## Conclusões

∗ As Funções Geradoras são uma poderosa ferramenta para solucionar problemas de contagem, principalmente quando envolvem restrições às suas variáveis.

∗ Através das Funções Geradoras, podemos perceber que muitos problemas de Análise Combinatória são muito semelhantes, isto é, podemos abandonar a ideia de que cada problema combinatório é diferente dos demais. Destacamos em geral 4 tipos de problemas combinatórios:

- Distribuir Objetos Iguais em Caixas Distintas (F.G.O.);
- Distribuir Objetos Distintos em Caixas Distintas (F.G.E.);
- Distribuir Objetos Iguais em Caixas Iguais (Partições de Inteiros);
- Distribuir Objetos Distintos em Caixas Iguais (Partições de Conjuntos);

∗ Existe um método muito eficiente, chamado de "Cartas, Mãos e Baralhos", que utiliza as Funções Geradoras como ferramenta para solucionar problemas de contagem mais complexos, em que é possível relacionar a contagem de "peças conexas" com a contagem de "estruturas" formadas por estas peças.

∗ O método de "Cartas, Mãos e Baralhos" possui muitas aplicações, entre elas a contagem de Partições de Conjuntos de tamanho $n$, Árvores Rotuladas de tamanho $n$, Permutações Cíclicas, Involuções.