Evento	Salão UFRGS 2013: SIC - XXV SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS
Ano	2013
Local	Porto Alegre - RS
Título	Funções Geradoras e Problemas de Contagem
Autor	RAFAEL SOUZA FERNANDES
Orientador	CARLOS HOPPEN

As funções geradoras estão entre as ferramentas mais importantes da Análise Combinatória e são aplicadas principalmente na resolução de problemas de contagem. Uma função geradora é uma série de potências cujos coeficientes representam o número de soluções de um dado problema combinatório.

O objetivo desta pesquisa foi conhecer um método que possibilite a resolução de problemas de contagem a partir das funções geradoras. Baseado na literatura da área foi possível encontrar um método que decompõe estruturas gerais em pedaços conexos e que estabelece uma relação entre o número de pedaços e de estruturas. Essas peças conexas recebem o nome de "Cartas", que podem ser sacadas de conjuntos de peças denominados "Baralhos" e, a partir das quais se formam estruturas chamadas de "Mãos". Por esse motivo o método é chamado informalmente de "Cartas, Mãos e Baralhos".

Formalmente, uma *Carta* $C(S,p)$ é um par que consiste em um conjunto S (o conjunto de rótulos) e uma figura $p \in P$ (onde P é um conjunto de figuras). Dizemos que uma carta é *Padrão* se $S = [n] = \{1,2,3,...,n\}$. O *Peso* de uma carta é a cardinalidade do conjunto S de rótulos. Um *Baralho* D é um conjunto finito de cartas padrão cujos pesos são iguais e figuras são distintas (chamamos de D_n o baralho cujas cartas possuem peso n). Uma *Mão* é um conjunto de cartas cujos rótulos formam uma partição de $[n]$, onde n é a soma dos pesos das cartas dessa mão (n é o peso da mão). *Rotulagem* é o processo de colocar ou alterar os rótulos das cartas, por exemplo, ao escolhermos cartas para formar uma mão, é necessário fazer uma rotulagem com o conjunto $[n]$, pois existe a possibilidade de as cartas possuírem rótulos em comum. Uma *Família Exponencial* é uma coleção de baralhos. Podemos tomar como exemplo os grafos, onde uma carta padrão de peso n é um grafo conexo com n vértices rotulados com $[n]$, um baralho de peso n é um conjunto de grafos conexos com n vértices rotulados com $[n]$ e uma mão de peso n é grafo formado a partir dessas cartas cujos rótulos formam uma partição de $[n]$, onde cada carta representa uma componente deste grafo.

A função geradora exponencial que conta o número de cartas nos baralhos é denotada por $D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$, onde d_n é o número de cartas do baralho D_n. A função geradora que conta o número de mãos é uma função de duas variáveis definida por $H(x,y) = \sum_{n,k=0}^{\infty} h(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k$, onde $h(n,k)$ é o número de mãos de peso n com k cartas. Como principal resultado da pesquisa, verificamos, através de um teorema, que a relação entre essas duas funções geradoras é estabelecida pela fórmula $H(x,y) = e^{yD(x)}$, chamada de "A Fórmula Exponencial", de forma que o número de mãos de peso n com k cartas é $h(n,k) = \left[\frac{x^n}{n!}\right] \left\{\frac{D(x)^k}{k!}\right\}$, onde $\left[\frac{x^n}{n!}\right]$ denota o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ na função $\frac{D(x)^k}{k!}$.

De quantas maneiras podemos particionar um conjunto de n elementos em k classes? Podemos modelar este problema através do nosso método de "Cartas, Mãos e Baralhos". Neste caso, cada baralho D_n possui uma única carta padrão de peso n e uma mão corresponde a uma partição do conjunto $[n]$. Como cada baralho possui apenas uma carta, temos então $d_n = 1, \forall n$ e $D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$. Pela Fórmula Exponencial temos que $H(x,y) = e^{y(e^x-1)}$ é a função geradora de $h(n,k) = \left[\frac{x^n}{n!}\right] \left\{\frac{(e^x-1)^k}{k!}\right\}$, que é o número de partições de n em k classes. Podemos também obter a função geradora do número de partições de $[n]$, denotado por h_n, sem nos restringirmos ao número de classes, basta tomarmos $y = 1$ em $H(x,y)$, obtendo a função $H(x,1) = H(x) = e^{(e^x-1)}$.