O Teorema dos Números Primos

Bolsista: Luiz Gustavo Dalpizol

Orientador: Vilmar Trevisan

Introdução

Seja $\pi(x)$ a função que conta os números primos no intervalo $[2,x]$, o Teorema dos Números Primos afirma que $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$.

A apresentação será sobre a prova analítica deste teorema obtida independentemente por Jacques Hadamard e Charles-Jean de La Vallée Poussin em 1896.

Um Esboço da Prova

A seguir p indicará um números primo, n um natural qualquer e x um número real positivo qualquer. O primeiro passo para a prova é demonstra que o teorema dos números primos é equivalente a $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ onde $\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$ e $\Lambda(n) = \log p$ se $n = p^m$ para algum m natural e zero caso contrário, definindo $\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt$ temos $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ implica em $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ logo provar o teorema dos números primos se resume a provar que $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

O objetivo agora é relacionar a função ψ_1 com a função zeta de Riemann a qual denotamos por ζ e a partir das propriedades da função zeta de Riemann obter a relação assintótica acima.

Para isso escrevemos $\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s-1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds$ onde $c > 1$, como $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ tem um pólo de ordem em $s = 1$ com resíduo 1, subtraindo esse pólo obtemos: $\psi_1(x) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right)ds$ para $c > 1$. Fazendo $h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right)$ temos $\psi_1(x) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)ds = \frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(c+it)e^{it\log x}dt$ para $c > 1$.

Agora, se provarmos que a última desigualdade ainda é valida para $c = 1$ ou seja $\psi_1(x) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\log x}dt$ e que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|dt < \infty$ temos pelo Lema de Riemann-Lebesgue da teoria das séries de Fourier que $\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\log x}dt = 0$ o que implica em $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

As igualdades para o caso $c = 1$ serão obtidas por meio de propriedades e estimativas da função de Zeta de Riemann.

Algumas considerações

O teorema de Dirichlet sobre primos em progressões aritméticas afirma que uma progressão aritmética com primeiro termo a e razão k relativamente primos possui infinitos primos, logo é natural nos perguntar como se dá a distribuição desses primos em tal progressão, nesta direção temos o seguinte resultado o qual generaliza o teorema dos números primos: Denotando por $\pi_a(x) = \sum_{\substack{p\le x \\ p\equiv a \pmod k}} 1$ temos $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi_a(x)}{\frac{1}{\varphi(k)}\frac{x}{\log x}} = 1$ onde $\varphi(k)$ é a cardinalidade do conjunto $\{1 \le h \le k-1;\ mdc(h,k) = 1\}$.

Referências Bibliográficas

1) A. E. Ingham, *The Distribution of Primes Numbers.* 2000;

2) Tom M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, 1976;*

3) Tom M. Apostol, *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. Springer-Verlag, 1976;*

Contato: luiz131719@hotmail.com