Evento	Salão UFRGS 2013: SIC - XXV SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS
Ano	2013
Local	Porto Alegre - RS
Título	O Teorema dos Números Primos
Autor	LUIZ GUSTAVO DALPIZOL
Orientador	VILMAR TREVISAN

Seja $\pi(x)$ a função que conta os números primos no intervalo $[2,\infty]$, o Teorema dos Números Primos afirma que $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}=1$. A apresentação será sobre a prova analítica deste teorema obtida independentemente por Jacques Hadamard e Charles-Jean de La Vallée Poussin, mais precisamente, veremos que o teorema dos números primos é equivalente a $\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1$ onde $\psi(x)$ é a função de Chebyshev, $\psi(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)$ ($\Lambda(n)=\log p$ se $n=p^m$ onde p primo e $m\in\mathbb{N}$ e zero caso contrário), como $\psi(x)$ é uma função escada (descontinua), é mais conveniente trabalharmos com a função $\psi_1(x)=\int_1^x\psi(t)dt$ (continua), veremos então que $\lim_{x\to\infty}\frac{\psi_1(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$ implica em $\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1$ logo provar o Teorema dos Números se resume a provar $\lim_{x\to\infty}\frac{\psi_1(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$, para este propósito escrevemos $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ em termos da função Zeta de Riemann, por meio de uma integral de caminho, $\frac{\psi_1(x)}{x^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds$, para $c>1$, onde ζ denota a função Zeta de Riemann, como o quociente $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ tem um pólo de ordem 1 em $s=1$, subtraindo este pólo da última equação, obtemos $\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right)ds$, onde $c>1$, fazendo $h(s)=\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right)$, podemos escrever $\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}x^{s-1}h(s)ds=\frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(c+it)e^{ti\log x}dt$, com $c>1$, agora se provarmos que tal igualdade ainda é válida para $c=1$, e que $\int_{-\infty}^{\infty}|h(1+it)|dt$ converge, segue então pelo lema de Riemann-Lebesgue que $\lim_{x\to\infty}\frac{\psi_1(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.