UMA BREVE EXPOSIÇÃO SOBRE O TEOREMA DE WEDDERBURN-ARTIN

Gustavo Lopes Rodrigues (gustavorodrigues.poa@gmail.com)
Alveri Alves Sant'Ana (Orientador)

Introdução

Em um D-espaço vetorial V, todo subespaço é um somando direto. Ao substituirmos o anel de divisão D por um anel (com unidade) R qualquer, adentramos no escopo da Teoria dos Módulos, onde tal afirmação deixa de ser válida em geral. Os módulos que ainda preservam essa propriedade são denominados *semissimples*. Partindo dessa definição, dizemos que o anel R é semissimples (à esquerda) quando for semissimples como um R-módulo (à esquerda).

Um exemplo de anel semissimples é $\mathcal{M}_n(D)$, onde D é um anel de divisão. Como o produto finito de anéis semissimples é semissimples, temos que $\mathcal{M}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathcal{M}_{n_k}(D_k)$, onde $D_1, \ldots, D_k$ são anéis de divisão, constitui-se em um outro exemplo de anel semissimples. O interessante é que isso esgota todas as possibilidades, fornecendo-nos uma caracterização dos anéis semissimples. Esse é o conteúdo do clássico *Teorema de Wedderburn-Artin* a ser apresentado.

O objetivo deste pôster é o de apresentar uma seleção de definições (visando torná-lo autocontido) junto com algumas considerações que julgo interessantes e que penso terem um caráter revelador. Ao final, exporei meu objetivo para com a apresentação como uma forma de convite.

Definições

Primo, os anéis em consideração sempre possuirão unidade. *Secundo*, R sempre designará um anel, enquanto M sempre designará um R-módulo. *Tertio*, construções feitas à esquerda (e.g., anel semissimples à esquerda, anel artiniano à esquerda) possuem suas análogas à direita.

- M é simples quando $M \neq (0)$ e M não possui R-submódulos não triviais.
- M é semissimples quando M é a soma de uma família arbitrária de R-módulos simples. A presente definição, embora diferente, é equivalente à dada na introdução, porém mais intuitiva (no que tange ao nome).
- R é semissimples à esquerda quando o R-módulo ${}_RR$ é semissimples.
- Uma álgebra (associativa finito-dimensional sobre um corpo) A é semissimples quando A não possui ideais nilpotentes não triviais.
- Um conjunto parcialmente ordenado $(C, \leq)$ satisfaz a condição para cadeias descendentes (DCC, do inglês *Descending Chain Condition*) quando toda cadeia descendente
$$\cdots \leq c_3 \leq c_2 \leq c_1 \qquad (c_1, c_2, c_3, \ldots \in C)$$
estaciona.
- R é artiniano à esquerda quando a família dos ideais à esquerda de R, parcialmente ordenada pela inclusão, satisfaz a DCC.
- ${}_RM$ é fiel quando
$$\mathrm{ann}({}_RM) := \{r \in R \mid rM = (0)\} = (0)$$
- R é primitivo à esquerda quando existe um R-módulo ${}_RM$ que é simples e fiel.
- Sejam R_l, R_r anéis, V um (R_l, R_r)-bimódulo e $E := \mathrm{End}(V_{R_r})$ (agindo em V pela esquerda). Dizemos que R_l age densamente em V_{R_r} quando
$$(\forall n \in N)(\forall f \in E)(\forall v_1, \ldots, v_n \in V)(\exists r \in R_l)$$
$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\})(f(v_i) = rv_i)$$

Contextualização

Em 1908, Joseph Wedderburn publicou um artigo memorável intitulado *On Hypercomplex Numbers*, no qual ele apresentou seu teorema de classificação das álgebras (associativas finito-dimensionais sobre um corpo) semissimples.

Emil Artin, inspirado pelo trabalho desenvolvido por Emmy Noether, apercebeu-se então do seguinte:

> The essential point in the definition of an algebra is that it is a vector space of finite dimension over a field. This fact allows us to conclude that ascending and descending chains of subalgebras will terminate. After the great success that Emmy Noether had in her ideal theory in rings with ascending chain condition, it seemed reasonable to expect that in rings where the ascending and the descending chain condition holds for left ideals one should obtain results similar to those of Wedderburn.
>
> (Emil Artin)

Tais deliberações o levam a trabalhar com uma classe de anéis que passariam a ser chamados de artinianos, culminando em 1927 no Teorema de Wedderburn-Artin.

Objetivo

Atualmente, existem diversas demonstrações desse teorema. A escolhida para a apresentação é uma que envolve o Teorema de Densidade de Jacobson, a saber

Teorema (Jacobson, Chevalley). *Sejam ${}_RM$ semissimples e $k := \mathrm{End}({}_RM)$. Então, R age densamente em M_k.*

Tomando R primitivo à esquerda e ${}_RM$ simples e fiel, e aplicando o teorema, somos conduzidos ao Teorema de Estrutura para Anéis Primitivos à Esquerda, que pode ser visto como uma generalização do Teorema de Wedderburn-Artin.

Enquanto outras demonstrações se mostraram mais diretas, essa se mostrou bem mais enriquecedora, e ao percorrer o trajeto no intuito de compreendê-la, entrei em contato com uma gama bem maior de conceitos que me serão úteis no futuro. Espero sinceramente poder possibilitar, mediante a apresentação, que os alunos na assistência também vislumbrem esses conceitos como uma porta de entrada para a Álgebra não Comutativa.

Referências

Artin, Emil. "The Influence of J. H. M. Wedderburn on the Development of Modern Algebra" *Bull. Amer. Math. Soc.* 56.1 (1950): 65-72.

Lam, Tsit-Yuen. *A First Course in Noncommutative Rings.* New York: Springer-Verlag, 2001.