

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

EXTENSÕES NORMALIZANTES DE ANÉIS

por

ROGÉRIO RICARDO STEFFENON

Porto Alegre, setembro de 2000

Dedico a presente tese à minha esposa Carla e aos meus filhos Guilherme e Jaqueline. Carla, te agradeço pelo apoio e estímulo nas horas difíceis, principalmente no início e na reta final. Sei que a tua ajuda foi fundamental para eu conseguir terminar este trabalho. Guilherme e Jaqueline, peço desculpas pelas vezes que eu tive que dizer "agora papai não pode".

Deixo aqui meus agradecimentos às pessoas que de uma forma ou de outra contribuíram para eu ter chegado até aqui. É provável que omissões graves ocorram. Peço, desde já, desculpas aos omitidos.

Começo agradecendo, de forma especial, ao professor Miguel Ferrero pela orientação segura, paciente e dedicada sem a qual este trabalho não se realizaria. Também agradeço pelo encorajamento e persistência dele, insistindo para eu continuar nas minhas tarefas. Miguel, muito obrigado pela amizade, pelo bom humor e pelos conhecimentos matemáticos que adquiri contigo.

Agradeço, também, aos professores Antonio Paques e Eduardo Brietzke pelo companheirismo e pelos ensinamentos, pois muito do que sei hoje sobre Matemática aprendi com eles.

Um forte abraço aos meus colegas Claus Haetinger e Janice Nery, pelo convívio, amizade e coleguismo.

Termino agradecendo à UNISINOS pelo auxílio concedido durante o Doutorado, sob a forma de Bolsa FUNDEPE, sendo este de fundamental importância para a realização deste trabalho.

RESUMO

Nesta tese, estudamos extensões normalizantes de anéis. Mais precisamente, R é um anel semiprimo e S é uma extensão normalizante livre de torção de R . Estendemos os resultados obtidos para bimódulos em [M. Ferrero, Closed submodules of normalizing bimodules over semiprime rings, Comm. Algebra, a aparecer], para as extensões de anéis e introduzimos o conceito de módulo R -essencialmente normalizante. Em particular, construímos a extensão canônica livre de torção S^* de S . Além disso, obtemos uma correspondência biunívoca entre ideais fechados, ideais primos fechados e ideais semiprimos fechados de S , S^* e S_0 , onde S_0 é o normalizador de R em S^* . Também provamos alguns resultados referentes a tipos especiais de ideais primos e radicais de anéis.

ABSTRACT

In this thesis we study normalizing extensions of rings. More precisely, R is a semiprime ring and S is a torsion-free normalizing extension of R . We extend the results obtained in [M. Ferrero, Closed submodules of normalizing bimodules over semiprime rings, Comm. Algebra, to appear] for bimodules to rings extensions and we introduce the concept of R -essentially normalizing module. In particular, we construct the canonical torsion-free extension S^* of S . Moreover, we obtain a one-to-one correspondence between closed ideals, closed prime ideals and closed semiprime ideals of S , S^* and S_0 , where S_0 is the normalizer of R in S^* . Also, we prove some results referring to special types of prime ideals and radicals of rings.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	
1.1 Anéis Primos e Semiprimos	5
1.2 Ideais Primos e Radicais	6
1.3 Anéis de Quocientes	8
1.4 Elementos R -normalizantes e R -essencialmente normalizantes	11
1.5 Submódulos Fechados	17
1.6 Módulos Livres de Torção	19
1.7 Elementos Normalizantes e Essencialmente Normalizantes de L^* . .	26
1.8 O Teorema da Correspondência Biunívoca	28
2 Extensões Normalizantes de Anéis e o Teorema da Correspondência Biunívoca	
2.1 Alguns Tipos de Extensões de Anéis	30
2.2 Extensão Canônica de S	33
2.3 Apêndice: Algumas Considerações Sobre S_0	42
3 Ideais Primos e Radicais	
3.1 Tipos Especiais de Ideais Primos em Extensões Intermediárias . . .	43
3.2 O Radical Primo	49
3.3 O Radical de Jacobson	51
3.4 O Radical de Brown-McCoy	55
Bibliografia	56

Introdução

Muitos resultados referentes a ideais primos em extensões de anéis têm sido obtidos nos últimos vinte anos. Por exemplo, em [31] e [32] estuda-se o caso em que S é uma extensão centralizante finita de R , ou seja, S é gerado sobre R por um conjunto finito de elementos R -centralizantes. Posteriormente, foram objeto de estudo as extensões normalizantes finitas em [20], [21], [22] e [27]. Além disso, vários resultados sobre ideais primos em diversos tipos de extensões (não necessariamente finitas) foram obtidos em [3], [4], [5], [13], [19], [24], [26], [28], [29], [30].

Em [10] são estudados os ideais primos num anel de polinômios $R[X]$, onde R é um anel primo. Neste trabalho são considerados os ideais fechados do anel $R[X]$ e obtém-se uma representação de ideais fechados usando polinômios mônicos em $C[X]$, onde C é o centróide estendido do anel primo R . Além disso, os ideais fechados são usados em [5], [13], [24] no estudo de ideais primos em extensões de Ore. É importante observar que o conceito de ideal fechado em um anel foi introduzido por Goldie em [17].

Em [7] é feita uma extensão dos resultados de [10] no caso em que S é uma extensão centralizante livre (não necessariamente finita) de um anel primo R .

Já em [6] são estendidos os resultados de [7], para estudar submódulos de bimódulos centralizantes (não necessariamente livres) sobre um anel primo R . Com isso, os resultados para anéis são obtidos como aplicação.

Agora em [8] é feita uma nova extensão dos resultados de [6] para bimódulos centralizantes (não necessariamente livres) sobre um anel semiprimo R . Em consequência destes resultados para módulos obtém-se aplicações no caso de extensões centralizantes de anéis, onde o anel base R é semiprimo. Em [12] são obtidos alguns resultados adicionais daqueles encontrados em [8].

Mais recentemente, em [9], M. Ferrero obteve uma extensão de todos os resultados anteriores para submódulos de bimódulos normalizantes sobre um anel semiprimo R . O principal resultado deste trabalho é uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os submódulos fechados de M , M^* e M_0 , onde M é um bimódulo R -normalizante qualquer, M^* é a extensão canônica de M a um Q -bimódulo livre de torção (Q é o anel de quocientes simétrico de R) e M_0 é o normalizador de R em M^* .

Nesta tese estudamos extensões normalizantes de anéis. Sejam R um anel e M um R -bimódulo. Dizemos que M é um bimódulo R -normalizante se existir um conjunto de geradores formado por elementos R -normalizantes, isto é, se existir $(x_i)_{i \in \Omega} \subseteq M$ tal que $M = \sum_{i \in \Omega} Rx_i$, com $Rx_i = x_iR$, para todo $i \in \Omega$. Um anel S é dito uma extensão R -normalizante de R se $R \subseteq S$ e se S é um

bimódulo R -normalizante. Em todo este trabalho R é um anel semiprimo e S é uma extensão normalizante de R , salvo menção contrária. Aplicamos os resultados referentes a módulos normalizantes, obtidos em [9], para extensões normalizantes de anéis. Além disso, introduzimos o conceito de bimódulo essencialmente normalizante e adaptamos os resultados do caso normalizante para esta nova classe de módulos. Os bimódulos essencialmente normalizantes são uma extensão natural dos módulos fortemente normalizantes definidos em [26]. Além disso, se S é uma extensão essencialmente normalizante de um anel semiprimo R , então o submódulo de torção $T(S)$ de S é um ideal, sendo que o mesmo não conseguimos responder no caso em que a extensão é normalizante. Também obtemos resultados no que se refere a alguns tipos de ideais primos e radicais de anéis.

No Capítulo 1 apresentamos alguns pré-requisitos necessários para a leitura do que segue. Em particular, lembramos os resultados relativos a módulos, provados em [9], e os estendemos para o caso essencialmente normalizante, fazendo algumas pequenas adaptações. Estes também são fundamentais para tudo o que vem depois. Este capítulo está dividido em oito seções.

Na Seção 1.1 revisamos os conceitos de anel primo e de anel semiprimo no caso não-comutativo. Na Seção 1.2 relembremos algumas classes de ideais primos e alguns radicais de anéis.

Na Seção 1.3 introduzimos o anel de quocientes à direita Q_ε de um anel semiprimo R , bem como o anel de quocientes simétrico Q de R . Também introduzimos o conceito de ideal fechado, assim como enunciamos uma correspondência biunívoca entre os ideais fechados de R , Q e C , onde C é o centróide estendido de R .

Na Seção 1.4 estudamos o conjunto Z (resp. Z^e) formado pelos elementos R -normalizantes (resp. R -essencialmente normalizantes) de Q . Mesmo que Z e Z^e não sejam necessariamente anéis, o seu comportamento é suficientemente semelhante ao de um anel, no sentido que aqui nos interessa e estes conjuntos serão essenciais em nosso estudo.

Na Seção 1.5 definimos bimódulos R -normalizantes e R -essencialmente normalizantes, onde R é um anel semiprimo. Também, lembramos os conceitos de sub-bimódulo fechado e de submódulo de torção $T(M)$ de um R -bimódulo M .

Na Seção 1.6 apresentamos os principais resultados referentes a bimódulos R -essencialmente normalizantes, livres de torção, sobre um anel semiprimo R . É importante observar que estes resultados são uma adaptação do que foi feito em [9], para bimódulos R -normalizantes. Por exemplo, o Lema 1.6.8 é uma adaptação para o caso essencialmente normalizante do Lemma 3.3 de [9] no caso normalizante, assim como o Lema 1.6.9 é uma adequação do Lemma 3.4 de [9]. O mesmo é válido para o Corolário 1.6.14 e o Corolário

1.6.15 em relação, respectivamente, ao Corollary 4.2 e ao Corollary 4.8 de [9]. Notemos que as provas no caso essencialmente normalizante requerem alguns cálculos adicionais aos feitos para o caso normalizante. Num dos principais resultados desta seção mostramos que, se M é um bimódulo R -essencialmente normalizante (resp. R -normalizante) livre de torção, então M possui uma extensão canônica a um bimódulo Q -essencialmente normalizante (resp. Q -normalizante) livre de torção M^* .

Na Seção 1.7 estudamos os elementos R -normalizantes e R -essencialmente normalizantes de um R -módulo livre de torção L^* , utilizado para a construção de M^* . Novamente adaptamos os resultados de [9], no caso normalizante, para o caso essencialmente normalizante. Por exemplo, o Lema 1.7.5 é uma adaptação para o caso essencialmente normalizante do Lemma 7.1 de [9] no caso normalizante, assim como o Teorema 1.7.7 é uma adequação do Theorem 7.5 de [9]. Também definimos bimódulos sobre os semigrupos Z e Z^e .

Finalizamos o Capítulo 1, com a Seção 1.8, onde apresentamos os principais resultados referentes a módulos. Nele lembramos o Z -bimódulo $M_0 = \{m \in M^* : Rm = mR\}$, definido em [9], no caso normalizante. No caso essencialmente normalizante utilizamos o Z^e -bimódulo M_0^e , o qual é um subconjunto de M_0 e será definido oportunamente. O resultado principal desta seção é, sem dúvida, o Teorema da Correspondência Biunívoca entre o conjunto de todos os submódulos fechados de M , M^* e M_0^e , para o caso essencialmente normalizante. No caso normalizante vale o mesmo resultado, trocando-se apenas M_0^e por M_0 . Cabe ressaltar que estes resultados são, novamente, uma adaptação do caso normalizante, considerado em [9], para o caso essencialmente normalizante. Por exemplo, o Teorema 1.8.1, o Teorema 1.8.3 e o Corolário 1.8.4 são uma adaptação para o caso essencialmente normalizante, respectivamente, do Theorem 8.2, do Theorem 8.3 e do Corollary 8.4 de [9] no caso normalizante.

No Capítulo 2 apresentamos os principais resultados no que se refere a extensões normalizantes e extensões essencialmente normalizantes de anéis. Ele é dividido em duas seções e um apêndice.

Na Seção 2.1 definimos alguns tipos de extensões normalizantes de anéis e damos exemplos mostrando que estes tipos são todos diferentes.

Na Seção 2.2, S é uma extensão normalizante de um anel semiprimo R , satisfazendo uma das seguintes condições: (A) S é um R -bimódulo livre de torção ou (B) S possui um conjunto de geradores R -essencialmente normalizantes. Nestes casos, mostramos que S possui uma extensão canônica livre de torção S^* que é um anel e bimódulo Q -normalizante (resp. Q -essencialmente normalizante) se S satisfaz a condição (A) (resp. (B)). Além disso, a correspondência biunívoca para submódulos é estendida para ideais fechados, ideais primos fechados e ideais semiprimos fechados.

No Apêndice são feitas algumas considerações com respeito ao semigrupo $S_0 = \{m \in S^* : Rm = mR\}$, formado pelos elementos R -normalizantes do anel S^* .

No Capítulo 3 obtemos resultados envolvendo tipos especiais de ideais primos, bem como radicais de anéis. Este capítulo está dividido em quatro seções.

Na Seção 3.1 R é um anel primo e S é uma extensão normalizante e livre de torção de R . Começamos esta seção mostrando que todo bimódulo R -normalizante, livre de torção, possui um submódulo livre e denso. Como conseqüência disso provamos que, se R é primo e M é um bimódulo R -normalizante, livre de torção, então a extensão canônica, livre de torção M^* é livre sobre Q . Além disso, provamos que, se R é um anel primo, S é uma extensão fortemente normalizante, livre de torção de R e W é uma extensão intermediária de R então vale o seguinte: R é um anel fortemente primo (resp. primo não-singular) à direita de R se, e somente se, todo ideal P de W que é maximal com respeito a $P \cap R = 0$ é um ideal fortemente primo (resp. primo não-singular) à direita de W . Também obtemos um resultado que diz respeito à condição fortemente primo, envolvendo S , R , S^* e S_0 .

Na Seção 3.2 obtemos relações entre os radicais primos de S , S^* e S_0 .

Na Seção 3.3, R é um anel primo e S é uma extensão normalizante livre de R . Nesta seção provamos alguns resultados ligados à ideais primitivos à direita e ao radical de Jacobson de um anel. O principal resultado mostra que, se R é um anel qualquer, S é uma extensão fortemente normalizante livre de R e S_{0,Z_P} (ou $S_{Q_P}^*$) é J -semi-simples, para todo ideal primitivo à direita P de R , então $J(S) \subseteq J(R)X$, onde $J(A)$ denota o radical de Jacobson do anel A . Esta seção estende os resultados obtidos em [11], no caso centralizante.

Finalmente, na Seção 3.4, apresentamos um resultado relacionado ao radical de Brown-McCoy, envolvendo S e S_0 , no caso em que R é um anel simples e S é uma extensão normalizante de R .

Alguns resultados deste trabalho, sobretudo do Capítulo 1, estão provados em [9] e aparecem aqui com a finalidade de deixar a exposição mais completa ou para mostrar que continuam válidos no caso essencialmente normalizante, o qual requer alguns cálculos adicionais àqueles feitos no caso normalizante.

Finalmente, observamos que em todo este trabalho R denota um anel com unidade. Além disso, as notações \supseteq e \subset significam que as inclusões são estritas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Anéis Primos e Semiprimos

Seja R um anel qualquer. É importante observar que, em todo este trabalho, os anéis possuem unidade. Nesta seção, daremos as definições de anel primo e anel semiprimo, as quais podem ser encontradas em ([23], Chapter 4). Começamos com a seguinte:

Definição 1.1.1 *Um ideal P de R é dito um ideal primo de R se, dados A e B ideais de R , temos que $AB \subseteq P$ implica $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.*

Algumas vezes, para provar que P é um ideal primo, é conveniente considerarmos A e B ideais de R que contêm P ou A e B ideais unilaterais de R . A seguinte proposição estabelece as equivalências mais usuais e a sua demonstração pode ser encontrada em ([23], Proposition 10.2).

Proposição 1.1.2 *Seja P um ideal de R . As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) P é um ideal primo de R .
- (ii) Se $a, b \in R$ são tais que $aRb \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.
- (iii) Se A e B são ideais à direita (ou à esquerda) de R tais que $AB \subseteq P$, então $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.
- (iv) Se A e B são ideais de R tais que $A \supseteq P$, $B \supseteq P$ e $AB \subseteq P$, então $A = P$ ou $B = P$.

Definição 1.1.3 *Um anel R é dito primo se 0 é um ideal primo de R .*

Usando a correspondência biunívoca entre ideais de R que contêm P e ideais de R/P , segue que P é um ideal primo de R se, e somente se, R/P é um anel primo. Também é claro que, a partir da Proposição 1.1.2, podemos obter equivalências para a definição de anel primo, trocando P por 0 .

Definição 1.1.4 *Um ideal P de R é dito um ideal semiprimo de R se, para todo ideal A de R , temos que $A^2 \subseteq P$ implica $A \subseteq P$.*

Evidentemente, a partir da Proposição 1.1.2, podemos obter caracterizações equivalentes, fazendo $A = B$ e $a = b$.

Definição 1.1.5 Um anel R é dito semiprimo se 0 é um ideal semiprimo de R .

Assim como no caso primo, a partir da Proposição 1.1.2, obtemos equivalências desta definição, fazendo $A = B$, $a = b$ e $P = 0$.

1.2 Ideais Primos e Radicais

Nesta seção daremos a definição de alguns tipos especiais de ideais primos, bem como de alguns radicais. Estes conceitos serão utilizados no Capítulo 3.

Seja R um anel qualquer. Dado um subconjunto F de R , o anulador à direita (resp. à esquerda) de F em R é definido por $Ann_{R,r}(F) = \{a \in R : Fa = 0\}$ (resp. $Ann_{R,l}(F) = \{a \in R : aF = 0\}$). Se $x \in R$, definimos $Ann_{R,r}(x) = \{a \in R : xa = 0\}$ e $Ann_{R,l}(x) = \{a \in R : ax = 0\}$. Um subconjunto finito F de R é dito um isolador (à direita) de R se $Ann_{R,r}(F) = 0$, isto é, $Fa = 0$, com $a \in R$, implica $a = 0$. É claro que podemos definir, de maneira simétrica, isolador à esquerda de R .

Definição 1.2.1 Um anel R é dito fortemente primo (à direita) se todo ideal não-nulo de R contém um isolador (à direita).

Definição 1.2.2 Um ideal P de R é dito um ideal fortemente primo (à direita) se R/P é um anel fortemente primo (à direita).

Uma caracterização importante para um ideal fortemente primo (à direita) é dada pela seguinte:

Proposição 1.2.3 Seja P um ideal de R . As seguintes condições são equivalentes:

- (i) P é um ideal fortemente primo (à direita).
- (ii) Para todo ideal $I \supset P$, existe um subconjunto finito $F \subseteq I$ tal que $Fa \subseteq P$, com $a \in R$, implica $a \in P$.

Demonstração É suficiente passarmos a R/P e utilizarmos a correspondência biunívoca entre os ideais de R que contêm P e os ideais de R/P .
 \diamond

A partir desta proposição é evidente que todo ideal fortemente primo (à direita) é primo.

Definição 1.2.4 Um ideal à direita H de R é dito essencial se $H \cap I \neq 0$,

para todo ideal à direita não-nulo I de R .

Por exemplo, se R é um anel primo, então todo ideal não-nulo H é um ideal essencial como ideal à direita.

Definição 1.2.5 *O ideal singular (à direita) $Z(R)$ de R é definido como sendo o conjunto dos elementos $a \in R$ tais que $\text{Ann}_{R,r}(a)$ é um ideal à direita essencial.*

É fácil ver que $Z(R)$ é um ideal de R ([18], pág. 30 e 31).

Definição 1.2.6 *Um anel R é dito não-singular se $Z(R) = 0$.*

Definição 1.2.7 *Um ideal P de R é dito não-singular se R/P é um anel não-singular, isto é, se $Z(R/P) = 0$.*

Uma relação importante entre os dois tipos de anéis estudados até agora, é dada pela seguinte proposição e sua demonstração pode ser encontrada em ([15], Proposition 2.2).

Proposição 1.2.8 *Todo anel fortemente primo (à direita) é primo não-singular.*

Dado um ideal à direita J de R , definimos $(J : R) = \{x \in R : Rx \subseteq J\}$. É fácil ver que $(J : R)$ é o maior ideal bilateral de R contido em J .

Definição 1.2.9 *Um ideal P de R é dito primitivo à direita se existir um ideal maximal à direita J de R tal que $(J : R) = P$.*

Definição 1.2.10 *Um anel R é dito primitivo à direita se 0 é um ideal primitivo à direita, isto é, se existir um ideal maximal à direita J de R tal que $(J : R) = 0$.*

É claro que P é um ideal primitivo (à direita) de R se, e somente se, R/P é um anel primitivo (à direita). Além disso, todo anel primitivo (à direita) é primo, fato este provado em ([23], Proposition 11.6).

Para terminar esta seção, daremos a definição de alguns tipos de radicais, os quais serão estudados no Capítulo 3.

Definição 1.2.11 *Dado um anel R , definimos:*

(i) *o radical primo de R , denotado por $\beta(R)$, como sendo a interseção de todos os ideais primos de R .*

(ii) *o radical de Brown-McCoy de R , denotado por $G(R)$, como sendo a interseção de todos os ideais maximais de R .*

(iii) o radical de Jacobson de R , denotado por $J(R)$, como sendo a interseção de todos os ideais primitivos à direita de R .

É fácil provar que $\beta(R)$ é o menor ideal semiprimo contido em R . Além disso, é possível mostrar que $\beta(R) \subseteq J(R) \subseteq G(R)$, para todo anel R .

1.3 Anéis de Quocientes

Nesta seção vamos definir o anel de quocientes simétrico Q de um anel semiprimo R . O anel de quocientes (à direita) de Martindale de um anel primo R foi introduzido em [25], como uma ferramenta para estudar anéis satisfazendo uma identidade polinomial. Posteriormente, este conceito foi estendido em [1] para anéis semiprimos. Em particular, se R é um domínio de integridade comutativo este anel coincide com o corpo de frações de R . Neste caso, se F é o corpo de frações de R , então para cada $x \in F$ existe $0 \neq a \in R$ tal que $xa \in R$. A existência do corpo de frações de um domínio comutativo R é um fato, embora elementar, extremamente importante e útil para muitos assuntos.

Seja R um anel semiprimo. Um ideal H de R é dito essencial se $H \cap I \neq 0$, para todo ideal não-nulo I de R . É importante observar que na Definição 1.2.4 consideramos ideais à direita e aqui os ideais são bilaterais. Notemos que H é um ideal essencial de R se, e somente se, $\text{Ann}_R(H) = 0$, onde $\text{Ann}_R(H) = \{a \in R : Ha = 0\} = \{a \in R : aH = 0\}$. Além disso, é claro que, se R é primo, então todo ideal não-nulo é essencial. O conjunto de todos os ideais essenciais de R será denotado por $\mathcal{E} = \mathcal{E}(R)$. Notemos que \mathcal{E} é um filtro multiplicativamente fechado. Isto significa que $R \in \mathcal{E}$ e, se $H, K \in \mathcal{E}$, então $HK \in \mathcal{E}$. Se H é um ideal de R diremos que uma aplicação $f: H \rightarrow R$ é um R -homomorfismo (à direita) se f é aditiva e $f(ar) = f(a)r$, para todo $a \in H$, $r \in R$, isto é, f é um homomorfismo de R -módulos à direita. No que segue, consideraremos ideais essenciais H de R e R -homomorfismos (à direita) $f: H \rightarrow R$.

Daremos, a seguir, uma idéia da construção do anel de quocientes à direita de R .

Denotamos por \mathcal{Q} o conjunto de todos os pares (H, f) , onde $H \in \mathcal{E}$ e $f: H \rightarrow R$ é um R -homomorfismo (à direita).

Em \mathcal{Q} , definimos uma relação de equivalência do seguinte modo: se $(H, f), (K, g) \in \mathcal{Q}$, dizemos que (H, f) é equivalente a (K, g) ($(H, f) \sim (K, g)$) se existir $J \in \mathcal{E}$, $J \subseteq H \cap K$ tal que $f|_J = g|_J$. Podemos verificar facilmente que esta relação é realmente uma relação de equivalência e que pode ser definida de maneira equivalente como segue: $(H, f) \sim (K, g)$ se, e somente se, $f|_{(H \cap K)} = g|_{(H \cap K)}$.

Denotemos por $Q_{\mathcal{E}}$ o conjunto quociente \mathcal{Q}/\sim e por $[H, f]$ a classe de equivalência de (H, f) , onde $(H, f) \in \mathcal{Q}$. No que segue, dotaremos $Q_{\mathcal{E}}$ de uma estrutura de anel de modo que poderemos considerar $R \subseteq Q_{\mathcal{E}}$.

Sejam $[H, f], [K, g]$ dois elementos de $Q_{\mathcal{E}}$. Definimos a soma e o produto em $Q_{\mathcal{E}}$ por:

(i) $[H, f] + [K, g] = [H \cap K, f + g]$, onde $f + g: H \cap K \rightarrow R$ é definida de modo natural, ou seja, $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, para todo $a \in H \cap K$.

(ii) $[H, f] \cdot [K, g] = [KH, f \circ g]$, onde $f \circ g: KH \rightarrow R$ é a composição de f com g , ou seja, $(f \circ g)(a) = f(g(a))$, para todo $a \in KH$.

Notemos que o produto acima está bem definido, pois $g(KH) \subseteq H$ e assim $f(g(a)) \in R$.

É fácil verificar que estas operações estão bem definidas em $Q_{\mathcal{E}}$, e provar o seguinte:

Teorema 1.3.1 $(Q_{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ é um anel com unidade.

O anel definido acima é denominado anel de quocientes (à direita) de R . Com uma construção semelhante podemos definir o anel de quocientes à esquerda.

Vejam como R pode ser mergulhado em $Q_{\mathcal{E}}$. Se $a \in R$, denotamos por a_l a multiplicação à esquerda por a , isto é, $a_l: R \rightarrow R$ é definida por $a_l(x) = ax$, para todo $x \in R$. É claro que $[R, a_l]$ é um elemento de $Q_{\mathcal{E}}$, o qual denotaremos apenas por a_l . A aplicação $\psi: R \rightarrow Q_{\mathcal{E}}$ definida por $\psi(a) = a_l$, para cada $a \in R$, é um homomorfismo injetor de anéis. Isto permite identificar R com sua imagem $\psi(R)$ em $Q_{\mathcal{E}}$. Utilizando esta identificação, podemos supor $R \subseteq Q_{\mathcal{E}}$ e, para $a \in R$, escrever $a_l = a$.

Quando R é um domínio comutativo, $Q_{\mathcal{E}}$ coincide com o corpo de frações de R . No caso geral, existe um resultado correspondente muito importante e útil, não diretamente para $Q_{\mathcal{E}}$, senão para seu centro. O centro de $Q_{\mathcal{E}}$, denotado por C , é definido de forma usual, ou seja, $C = \{q \in Q_{\mathcal{E}} : qq' = q'q, \text{ para todo } q' \in Q_{\mathcal{E}}\}$. O anel de quocientes simétrico de R , denotado por Q , é o subanel de $Q_{\mathcal{E}}$ consistindo de todos os elementos $q \in Q_{\mathcal{E}}$ tais que existe $H \in \mathcal{E}$ com $Hq \subseteq R$.

A seguinte proposição contém as propriedades mais importantes sobre os anéis $Q_{\mathcal{E}}$ e Q , que precisaremos mais adiante.

Proposição 1.3.2 *Sejam R um anel semiprimo, $Q_{\mathcal{E}}$ o anel de quocientes (à direita) de R e Q o anel de quocientes simétrico de R . Então:*

(i) $R \subseteq Q \subseteq Q_{\mathcal{E}}$.

(ii) *Dados n elementos $q_1, \dots, q_n \in Q_{\mathcal{E}}$ (resp. $q_1, \dots, q_n \in Q$), existe um*

ideal $H \in \mathcal{E}$ tal que $q_i H \subseteq R$ (resp. $q_i H \subseteq R$ e $Hq_i \subseteq R$), para $i = 1, 2, \dots, n$.

(iii) Se $q \in Q_{\mathcal{E}}$ (resp. $q \in Q$) e $H \in \mathcal{E}$, então $qH = 0$ (resp. $qH = 0$ ou $Hq = 0$) implica $q = 0$. Em particular, dois elementos de $Q_{\mathcal{E}}$ são iguais se eles coincidem em um ideal de \mathcal{E} .

(iv) Se $H \in \mathcal{E}$ e $f : H \rightarrow R$ é um homomorfismo de R -módulos à direita, então existe $q \in Q_{\mathcal{E}}$ tal que $f(a) = qa$, para todo $a \in H$.

(v) Se R é primo (resp. semiprimo) então todo anel intermediário T (anel com $R \subseteq T \subseteq Q_{\mathcal{E}}$) é também primo (resp. semiprimo). Em particular, $Q_{\mathcal{E}}$ e Q são anéis primos (resp. semiprimos).

(vi) Se R é primo então C é um corpo. Entretanto, se R é apenas semiprimo então C é um anel von Neumann regular, isto é, para todo $x \in C$, existe $y \in C$ tal que $xyx = x$.

O anel C definido acima é denominado o centróide estendido de R , e coincide com o centro de Q . Os elementos de C são precisamente os elementos de $Q_{\mathcal{E}}$ provenientes de homomorfismos de R -bimódulos entre algum $H \in \mathcal{E}$ e R . Se $H \in \mathcal{E}(R)$, então $QHQ \in \mathcal{E}(Q)$. Reciprocamente, se $J \in \mathcal{E}(Q)$, então $J \cap R \in \mathcal{E}(R)$. Além disso, se $F \in \mathcal{E}(C)$, então $FQ \in \mathcal{E}(Q)$ e $FQ \cap R \in \mathcal{E}(R)$.

Agora vamos definir ideais fechados e enunciaremos alguns resultados que serão bastante úteis no decorrer deste trabalho.

Definição 1.3.3 Dado um ideal I de R , o fecho de I em R é definido por

$$[I] = \{x \in R : \text{existe } H \in \mathcal{E}(R) \text{ tal que } xH \subseteq I\} = \\ \{x \in R : \text{existe } H \in \mathcal{E}(R) \text{ tal que } Hx \subseteq I\}.$$

Além disso, I é dito fechado se $[I] = I$.

É fácil ver que $[I] = \text{Ann}_R(\text{Ann}_R(I))$ e assim os ideais fechados de R são os ideais anuladores. Além disso, podemos definir ideal fechado e fecho de um ideal em Q e em C , trocando, na definição anterior, $H \in \mathcal{E}(R)$ por $H \in \mathcal{E}(Q)$ e $H \in \mathcal{E}(C)$, respectivamente.

O resultado a seguir estabelece uma correspondência biunívoca entre ideais fechados de R , Q e C e sua demonstração pode ser encontrada em [8].

Proposição 1.3.4 Sejam R um anel semiprimo, Q o anel de quocientes simétrico de R e C o centróide estendido de R . Então existe uma correspondência biunívoca entre:

- (i) O conjunto de todos os ideais fechados de R .
- (ii) O conjunto de todos os ideais Q -fechados de Q .
- (iii) O conjunto de todos os ideais C -fechados de C .

Além disso, a correspondência associa o ideal fechado I de R com o ideal Q -fechado I^* de Q e o ideal C -fechado I_0 de C , tal que $I = I^* \cap R$, $I_0 = I^* \cap C$ e $I^* = QI_0$.

Notemos que todo ideal fechado de C é um somando direto e assim é gerado por um idempotente. Portanto, o mesmo é válido para qualquer ideal Q -fechado de Q . Em particular, se K é um ideal fechado de Q , então $K \oplus \text{Ann}_Q(K) = Q$. Outro fato importante é que todo ideal fechado de um anel semiprimo é semiprimo. De fato, se I é um ideal fechado de R , e J é um ideal de R tal que $I \subseteq J$ e $J^2 \subseteq I$, então segue que $J(J \oplus \text{Ann}_R(J)) \subseteq I$ e, assim $J \subseteq I$.

O resultado a seguir, bem como sua demonstração, podem ser encontrados em ([9], Lemma 1.1).

Lema 1.3.5 *Sejam I um ideal fechado de R , I^* o ideal fechado de Q tal que $I^* \cap R = I$ e Q_1 o anel de quocientes simétrico de R/I . Então existe um isomorfismo de anéis $\phi : Q/I^* \rightarrow Q_1$ tal que a restrição de ϕ ao subanel R/I de Q/I^* é a identidade.*

Suponhamos que A e B são ideais fechados de R e que $\phi : R/A \rightarrow R/B$ é um isomorfismo de anéis. Então existem A^* e B^* ideais fechados de Q tais que $A^* \cap R = A$ e $B^* \cap R = B$. Denotemos por Q_1 e Q_2 , respectivamente, o anel de quocientes simétrico dos anéis semiprimos R/A e R/B . Então o isomorfismo ϕ pode ser estendido de modo único, a um isomorfismo entre Q_1 e Q_2 . Pelo Lema 1.3.5, temos o seguinte:

Corolário 1.3.6 ([9], Corollary 1.2) *Sob as mesmas condições acima, o isomorfismo $\phi : R/A \rightarrow R/B$ pode ser estendido de maneira única a um isomorfismo $\phi^* : Q/A^* \rightarrow Q/B^*$.*

1.4 Elementos R -normalizantes e R -essencialmente normalizantes de Q

Daqui por diante R será um anel semiprimo e Q denotará o anel de quocientes simétrico de R . Os resultados desta seção estão provados para o caso normalizante em ([9], Section 1) e aqui são adaptados ao caso essencialmente normalizante. Começamos com a seguinte:

Definição 1.4.1 *Dado um elemento $q \in Q$, dizemos que:*

- (i) q é R -normalizante se $Rq = qR$.

(ii) q é R -essencialmente normalizante se q é R -normalizante e se, para todo $I \in \mathcal{E}(R)$, existe $J = J(I) \in \mathcal{E}(R)$, $J \subseteq I$ tal que $Jq \subseteq qI$ e $qJ \subseteq Iq$.

Os elementos R -normalizantes e R -essencialmente normalizantes de Q têm uma grande importância em nosso estudo.

É importante observar que a noção de elemento essencialmente normalizante foi motivada pelo conceito de elemento fortemente normalizante, introduzido em [26]. Segundo esta definição, um elemento $q \in Q$ é dito R -fortemente normalizante se $Iq = qI$, para todo ideal I de R . Assim, fica claro que todo elemento R -fortemente normalizante é R -essencialmente normalizante e, com isso obtemos uma extensão daquele conceito.

Antes de prosseguirmos, vamos fixar uma notação que será utilizada por todo este trabalho.

Definição 1.4.2 Dado um R -bimódulo M e um elemento $m \in M$, dizemos que m satisfaz a condição (E) se, para todo $I \in \mathcal{E}(R)$, existe $J = J(I) \in \mathcal{E}(R)$, $J \subseteq I$ tal que $Jm \subseteq mI$ e $mJ \subseteq Im$.

Com esta definição, temos que um elemento $q \in Q$ é R -essencialmente normalizante se, e somente se, $Rq = qR$ e q satisfaz a condição (E).

Consideremos, agora, um elemento não-nulo $q \in Q$ satisfazendo (i) ou (ii) da definição anterior. Então $A = \text{Ann}_{R,r}(q) = \{r \in R : qr = 0\}$ é um ideal fechado de R . Assim, segue que existe um ideal fechado A^* de Q tal que $A^* \cap R = A$.

O resultado, a seguir, é provado em [9], entretanto faremos uma breve demonstração dele.

Corolário 1.4.3 (i) $\text{Ann}_{R,r}(q) = \text{Ann}_{R,l}(q)$.

(ii) $A^* = \text{Ann}_{Q,r}(q) = \{p \in Q : qp = 0\}$.

(iii) $A^* = \text{Ann}_{Q,l}(q) = \{p \in Q : pq = 0\}$.

Demonstração (i) Primeiramente, observemos que $\text{Ann}_{R,r}(q)$ é um ideal bilateral de R , pois q é R -normalizante. Como $q \in Q$, segue que existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $qH \subseteq R$. Seja $H_1 = \text{Ann}_{R,l}(q) \cap H$. Então qH_1 é um ideal à direita de R tal que $(qH_1)^2 = 0$. Como R é semiprimo, temos que $qH_1 = 0$. Logo, $q\text{Ann}_{R,l}(q)H = 0$ e, portanto $q\text{Ann}_{R,l}(q) = 0$. Assim, segue que $\text{Ann}_{R,l}(q) \subseteq \text{Ann}_{R,r}(q)$. Simetricamente, podemos mostrar que $\text{Ann}_{R,r}(q) \subseteq \text{Ann}_{R,l}(q)$.

(ii) Seja B um ideal fechado de R tal que $A \oplus B \in \mathcal{E}(R)$. Assim, temos que $A^* \oplus B^* = Q$, onde B^* é o ideal fechado de Q correspondente a B . Se $p \in A^*$ então existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $pH \subseteq A$. Deste modo, $qpH = 0$ e, assim $qp = 0$ e, portanto $p \in \text{Ann}_{Q,r}(q)$. Agora, se $b \in B^*$ então existe $F \in \mathcal{E}(R)$ tal que

$bF \subseteq B$. Logo, $qb = 0$ implica $qbF = 0$. Assim, segue que $bF \subseteq A \cap B = 0$ e, portanto $b = 0$.

(iii) Segue de (i) e (ii). \diamond

Denotemos por $Ip(C)$ o conjunto de todos os elementos idempotentes de C . É fácil caracterizar os elementos idempotentes de C , a partir de ideais não-nulos de R . De fato, se H é um ideal não-nulo de R , então $K_H = H \oplus Ann_R(H) \in \mathcal{E}(R)$. Assim, a aplicação $f : K_H \rightarrow R$, dada por $f(a + b) = a$, para $a \in H$ e $b \in Ann_R(H)$, é, claramente, um homomorfismo de R -bimódulos. Portanto, existe $e_H \in C$ tal que $e_H(a + b) = a$. Além disso, é fácil ver que e_H é idempotente. Este idempotente é denominado idempotente correspondente a H . Reciprocamente, se $e \in Ip(C)$, então existe um ideal essencial I de R tal que $H = eI$ é um ideal de R . Assim, segue que $e = e_H$. Notemos que $e_H = 1$ se, e somente se, $H \in \mathcal{E}(R)$.

O conjunto $Ip(C)$ é ordenado pela relação $e \leq f$ se $ef = e$, para $e, f \in Ip(C)$. É importante observar que, nas condições do Corolário 1.4.3, existe um idempotente $e \in C$ tal que $B^* = B^*e$ e, já que $qA^* = 0$, temos que $q \in B^*$. Além disso, o idempotente e pode ser caracterizado como sendo o menor idempotente $f \in C$ tal que $qf = q$. Vamos nos referir a e como sendo o idempotente associado a q .

Como $A = Ann_{R,l}(q) = Ann_{R,r}(q)$, segue que o bimódulo $qR = Rq$ tem uma estrutura natural de R/A -bimódulo dada por $q(r+A) = qr$ e $(r+A)q = rq$, para todo $r \in R$. Além disso, existe um automorfismo de anéis $\phi : R/A \rightarrow R/A$ definido por $\phi(r+A) = r'+A$, para todo $r \in R$, onde $qr' = rq$. O automorfismo ϕ pode ser unicamente estendido a um automorfismo de Q/A^* , ainda denotado por ϕ , e assim ϕ pode ser visto como um automorfismo de B^* .

Lema 1.4.4 (i) Se $F \in \mathcal{E}(R)$ e $F' = \{r \in R : qr \in Fq\}$, então $F' \in \mathcal{E}(R)$.

(ii) Para todo $b \in B^*$, $bq = q\phi(b)$.

(iii) Se q é R -normalizante então q é Q -normalizante.

(iv) Se q é R -essencialmente normalizante então q é Q -essencialmente normalizante.

Demonstração A demonstração dos itens (i), (ii) e (iii) pode ser encontrada em ([9], Lemma 1.3).

(iv) Por (iii) temos que $Qq = qQ$. Dado $I \in \mathcal{E}(Q)$, temos que $I \cap R \in \mathcal{E}(R)$ e, então existe $H \in \mathcal{E}(R)$, $H \subseteq I \cap R$ tal que $Hq \subseteq q(I \cap R)$ e $qH \subseteq (I \cap R)q$. Assim, é claro que $J = QHQ$ satisfaz as condições $J \in \mathcal{E}(Q)$, $J \subseteq I$, $Jq \subseteq qI$ e $qJ \subseteq Iq$. Logo q é Q -essencialmente normalizante. \diamond

Agora, consideremos os conjuntos

$Z = \{q \in Q : Rq = qR\}$ e $Z^e = \{q \in Q : Rq = qR \text{ e } q \text{ satisfaz a condi\c{c}\ao (E)}\}$.

Ent\ao \e claro que $C \subseteq Z^e \subseteq Z \subseteq Q$. Al\em disso, notemos que Z e Z^e n\ao s\ao an\eis, pois t\em uma soma somente parcialmente definida, mas s\ao multiplicativamente fechados.

O exemplo, a seguir, mostra que Z n\ao \e necessariamente um anel e que nem todo elemento Q -normalizante \e R -normalizante.

Exemplo 1.4.5 Sejam $R = M_2(\mathbf{Z})$, onde \mathbf{Z} \e o anel dos n\umeros inteiros. Neste caso, temos que $Q = M_2(\mathbf{Q})$, onde \mathbf{Q} \e o corpo dos n\umeros racionais. Consideremos os conjuntos $Z_R = \{q \in Q : Rq = qR\}$ e $Z_Q = \{q \in Q : Qq = qQ\}$. Pelo lema anterior segue que $Z_R \subseteq Z_Q$. Entretanto, \e f\acil ver que $q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Z_Q \setminus Z_R$. Mais precisamente, \e poss\ivel provar que $Z_R = \{\text{m\ultiplos racionais de unidades de } R\}$ e $Z_Q = \{\text{unidades de } Q\} \cup \{0\}$. Com isso, fica claro que, neste caso, Z_R e Z_Q n\ao s\ao an\eis.

A seguinte proposi\c{c}\ao mostra que os elementos de Z s\ao invert\iveis no ideal definido pelos seus idempotentes associados. Al\em disso, a sua demonstra\c{c}\ao pode ser encontrada em ([9], Proposition 1.4).

Proposi\c{c}\ao 1.4.6 *Sejam $q \in Z$ e $e \in Ip(C)$ o idempotente associado a q . Ent\ao existe $q' \in Z$ e tal que $qq' = q'q = e$.*

Um resultado semelhante pode ser obtido para os elementos de Z^e , como mostra a seguinte:

Proposi\c{c}\ao 1.4.7 *Sejam $q \in Z^e$ e $e \in Ip(C)$ o idempotente associado a q . Ent\ao existe $q' \in Z^e$ tal que $qq' = q'q = e$.*

Demonstra\c{c}\ao Como $Z^e \subseteq Z$, segue da Proposi\c{c}\ao 1.4.6 que existe $q' \in Z$ e tal que $qq'q = q$ e $q'qq' = q'$. Dado $I \in \mathcal{E}(R)$, temos que existe $J \in \mathcal{E}(R)$, $J \subseteq I$ tal que $Jq \subseteq qI$ e $qJ \subseteq Iq$. Assim, segue que $Jq' = Jq'qq' = Jeq' = eJq' = q'qJq' \subseteq q'Iqq' = q'Ie \subseteq q'I$. Simetricamente, obtemos $q'J \subseteq Iq'$. Portanto, temos que $q' = q'e \in Z^e$. \diamond

Faremos agora algumas considera\c{c}\oes com respeito ao conjunto Z . \E importante observar que todas elas s\ao tamb\em v\alidas para Z^e . Dado $a \in Z$, denotemos por aZ o conjunto de todos os elementos $x \in Z$ que podem ser representados na forma $x = \sum az_j$, com $\sum z_j \in Z$.

Defini\c{c}\ao 1.4.8 *Um subconjunto $I \subseteq Z$ \e dito um ideal saturado (ou simplesmente um ideal) de Z se as seguintes condi\c{c}\oes s\ao satisfeitas:*

(i) Se $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ e a soma $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ está definida em Z , então $a_1 + a_2 + \dots + a_n \in I$.

(ii) Se $a \in I$, então $aZ \subseteq I$.

É fácil ver que, se $p, q \in Z$, então existe $p' \in Z$ tal que $pq = qp'$. De fato, $pq = pq'q = q(q'pq) \in qZ$. Assim, segue que, para todo $q \in Z$, $Zq = qZ$. Portanto, se I é um ideal saturado de Z , então I é um ideal bilateral, isto é, $ZI = \{x \in Z : x = \sum z_j a_j, \text{ com } z_j \in Z \text{ e } a_j \in I\}$ também está contido em I . Além disso, $IQ = QI$ é um ideal de Q . Logo, temos que Z é semiprimo no sentido de que se I é um ideal de Z e $I^2 = 0$, então $I = 0$.

Definição 1.4.9 Um ideal I de Z é dito essencial se $I \cap J \neq 0$, para todo ideal não-nulo J de Z .

É fácil ver que I é essencial se, e somente se, o anulador de I em Z é zero. O conjunto de todos os ideais essenciais de Z é denotado por $\mathcal{E}(Z)$.

Para um ideal I de C , denotemos por IZ o conjunto de todos os elementos $x \in Z$ que podem ser escritos na forma $x = \sum a_j z_j$, onde $a_j \in I$ e $z_j \in Z$. Nesse caso, é claro que IZ é um ideal de Z .

A demonstração do seguinte resultado pode ser encontrada em ([9], Lemma 1.5):

Lema 1.4.10 (i) Se $I \in \mathcal{E}(C)$, então $IZ \in \mathcal{E}(Z)$.

(ii) Se $J \in \mathcal{E}(Z)$, então $JQ \in \mathcal{E}(Q)$.

Para finalizar esta seção, provaremos alguns resultados, referentes a ideais fechados de Z . Em particular, estenderemos a correspondência biunívoca da Proposição 1.3.4 a ideais Z -fechados de Z . Além disso, os mesmos podem ser obtidos para Z^e .

Dado um ideal I de Z , o fecho de I em Z é definido por

$$[I] = \{z \in Z : \text{existe } H \in \mathcal{E}(Z) \text{ tal que } zH \subseteq I\}.$$

É fácil ver que $[I]$ é um ideal de Z que contém I . Além disso, I é dito fechado se $[I] = I$. O nosso objetivo é caracterizar todos os ideais fechados de Z .

Se I e J são ideais de Z , denotaremos por $I + J$ o conjunto de todos os elementos de Z que são somas da forma $a + b$, onde $a \in I$ e $b \in J$. Começamos pelo seguinte:

Lema 1.4.11 Se I e J são ideais de Z tais que $I \cap J = 0$, então $IQ \cap JQ = 0$ e $I + J$ é um ideal de Z . Além disso, se $J = \text{Ann}_Z(I)$, então $I + J \in \mathcal{E}(Z)$.

Demonstração É claro que $IQ \cap JQ = 0$, pois Q é semiprimo. Sejam $H = IQ \cap R$ e e o idempotente de C correspondente a H . Suponhamos que $z_1, \dots, z_n \in I$, $z_{n+1}, \dots, z_m \in J$ e $z = z_1 + \dots + z_m \in Z$. Assim, segue que $ez_i = z_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, e $ez_j = 0$, para todo $n+1 \leq j \leq m$. Deste modo, $z_1 + \dots + z_n = ez_1 + \dots + ez_n + ez_{n+1} + \dots + ez_m = e(z_1 + \dots + z_m) \in Z$. Portanto, $z_1 + \dots + z_n \in I$. De modo análogo, podemos provar que $z_{n+1} + \dots + z_m \in J$. Por conseguinte, $z \in I + J$ e, com isso, $I + J$ é um ideal de Z , pois a condição (ii) da Definição 1.4.8 é claramente satisfeita.

Agora, suponhamos $J = \text{Ann}_Z(I)$. Se K é um ideal de Z tal que $K \cap (I + J) = 0$, então $K \cap I = 0$ e assim $K \subseteq J$. Logo, $K = 0$ e, portanto $I + J$ é um ideal essencial de Z . \diamond

Lema 1.4.12 *Seja I um ideal de Z . Então I é um ideal fechado em Z se, e somente se, para todo ideal J de Z com $J \not\subseteq I$, existe $0 \neq z \in J$ tal que $zZ \cap I = 0$.*

Demonstração Suponhamos que I é um ideal fechado de Z . Se $u \in J \setminus I$, então $H = \{q \in Z : uq \in I\}$ é um ideal de Z que não é essencial. Assim, existe um ideal não-nulo K de Z tal que $H \cap K = 0$. Portanto, dado $0 \neq k \in K$, temos que $uk \notin I$ e é fácil ver que $ukZ \cap I = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $[I] \supset I$ e tomemos um elemento $0 \neq z \in [I]$ tal que $zZ \cap I = 0$. Então existe um ideal essencial H de Z tal que $zH \subseteq I$. Assim, segue que $zH = 0$ e, portanto $z = 0$, o que dá uma contradição. Logo $[I] = I$, ou seja, I é um ideal fechado de Z . \diamond

Proposição 1.4.13 *Um ideal I de Z é fechado se, e somente se, existe $e \in \text{Ip}(C)$ tal que $I = eZ$.*

Demonstração Se $e \in \text{Ip}(C)$, então $eZ \cap (1-e)Z = 0$ e $eZ + (1-e)Z = Z$. Assim, segue que eZ é fechado em Z .

Reciprocamente, suponhamos que I é fechado em Z . Sejam $H = IQ \cap R$ e e o idempotente de C correspondente a H . Notemos que $eI \subseteq I$ e $e\text{Ann}_Z(I) = 0$, pois $\text{Ann}_Z(I)Q \cap IQ = 0$. Deste modo, segue que $e(I + \text{Ann}_Z(I)) \subseteq I$, onde $I + \text{Ann}_Z(I) \in \mathcal{E}(Z)$. Portanto, $e \in I$ e assim $eZ \subseteq I$. Além disso, se $z \in IQ$, então existe $F \in \mathcal{E}(R)$ tal que $zF \subseteq H$. Logo, $eza = za$, para todo $a \in F$, donde $z = ez \in eZ$. Conseqüentemente, $I = eZ$. \diamond

Como conseqüência dos resultados anteriores temos o seguinte:

Corolário 1.4.14 *Sejam R um anel semiprimo, Q o anel de quocientes simétrico de R , C o centróide estendido de R e Z como acima. Então existe uma correspondência biunívoca entre:*

- (i) *O conjunto de todos os ideais C -fechados de C .*

(ii) O conjunto de todos os ideais Z -fechados de Z .

Além disso, a correspondência associa o ideal C -fechado I de C com o ideal Z -fechado I_0 de Z tal que $I = I_0 \cap C$, $I_0 = QI \cap Z$.

Demonstração Seja I_0 um ideal Z -fechado de Z . Pela Proposição 1.4.13 segue que existe $e \in Ip(C)$ tal que $I_0 = eZ$. Então $I = eZ \cap C$ é um ideal C -fechado de C . De fato, dado $x \in [I]_C$, temos que existe $H \in \mathcal{E}(C)$ tal que $xH \subseteq I \subseteq eZ$. Assim segue, pelo Lema 1.4.10, que $HZ \in \mathcal{E}(Z)$ e $xHZ \subseteq eZ$. Portanto $x \in I$, pois eZ é Z -fechado. Logo, I é um ideal C -fechado de C .

Reciprocamente, seja I um ideal C -fechado de C . Pela Proposição 1.3.4 segue que QI é um ideal Q -fechado de Q . Então $I_0 = QI \cap Z$ é um ideal Z -fechado de Z . De fato, dado $x \in [I_0]_Z$, temos que existe $F \in \mathcal{E}(Z)$ tal que $xF \subseteq I_0 \subseteq QI = IQ$. Pelo Lema 1.4.10, segue que $FQ \in \mathcal{E}(Q)$ e $xFQ \subseteq IQ$. Portanto $x \in IQ$, pois IQ é Q -fechado. Logo, I_0 é um ideal Z -fechado de Z .
 \diamond

É importante notar que, como observamos anteriormente, estes resultados continuam válidos se trocarmos Z por Z^e . Em particular, obtemos uma generalização para a Proposição 1.3.4, envolvendo ideais fechados de R , Q , C , Z e Z^e .

1.5 Submódulos Fechados

Esta seção é um resumo dos resultados obtidos em ([9], Section 2), referentes a submódulos fechados no caso normalizante. Além disso, adaptamos tais resultados para o caso essencialmente normalizante.

Sejam R um anel semiprimo e M um R -bimódulo. Começamos fazendo algumas definições, que são muito importantes para tudo que vem a seguir neste trabalho. Além disso, lembramos que a condição (E) é definida na Definição 1.4.2.

Definição 1.5.1 Um elemento $x \in M$ é dito:

- (i) R -normalizante se $Rx = xR$.
- (ii) R -essencialmente normalizante se $Rx = xR$ e x satisfaz a condição (E).

Definição 1.5.2 Um bimódulo M é dito R -normalizante (resp. R -essencialmente normalizante) se existir um conjunto de elementos R -normalizantes (resp. R -essencialmente normalizantes) $(x_i)_{i \in \Omega} \subseteq M$ tal que $M = \sum_{i \in \Omega} Rx_i$.

É importante observar que submódulo de M significa, a menos de menção contrária, sempre sub-bimódulo.

Definição 1.5.3 *Dados $N \subseteq P$ submódulos de M , definimos o fecho de N em P como sendo*

$$[N]_P = \{x \in P : \text{existem } F, H \in \mathcal{E}(R) \text{ tais que } FxH \subseteq N\}.$$

O fecho de N em M será denotado simplesmente por $[N]$, ao invés de $[N]_M$. Deste modo, temos que $[N]_P = [N] \cap P$. O resultado, a seguir, é de fácil verificação, entretanto daremos uma breve demonstração dele.

Lema 1.5.4 *$[N]_P$ é um submódulo de M tal que $N \subseteq [N]_P \subseteq P$.*

Demonstração Dados $x_1, x_2 \in [N]_P$, temos que existem $F_1, H_1, F_2, H_2 \in \mathcal{E}(R)$, tais que $F_1x_1H_1 \subseteq N$ e $F_2x_2H_2 \subseteq N$. Então $F = F_1 \cap F_2, H = H_1 \cap H_2 \in \mathcal{E}(R)$ e $F(x_1 + x_2)H \subseteq Fx_1H + Fx_2H \subseteq F_1x_1H_1 + F_2x_2H_2 \subseteq N$. Consideremos, agora, $x \in [N]_P$ e $r \in R$. Então existem $F, H \in \mathcal{E}(R)$ tais que $FxH \subseteq N$. Assim, segue que $FrxH \subseteq FxH \subseteq N$ e $FrxH \subseteq FxH \subseteq N$. Logo $[N]_P$ é um submódulo de M . O resto é claro. \diamond

Definição 1.5.5 *Dados $N \subseteq P$ submódulos de M , dizemos que N é fechado em P se $[N]_P = N$. Além disso, dizemos que N é denso em P se $[N]_P = P$.*

Denotemos por $T_1(M)$ o submódulo $[0]_M$ de M . Então $T_2(M)$ é definido como sendo o submódulo de M tal que $T_2(M)/T_1(M) = T_1(M/T_1(M))$. Em ([9], Theorem 5.1) é provado que $T_1(M/T_2(M)) = 0$, no caso em que M é um bimódulo R -normalizante. O submódulo $T_2(M)$ é denominado submódulo de torção de M e será denotado simplesmente por $T(M)$.

Definição 1.5.6 *Um elemento $x \in M$ é dito um elemento livre de torção se $x \notin T(M)$. Além disso, o bimódulo M é dito um bimódulo de torção se $T(M) = M$. Por outro lado, um submódulo P de M é dito livre de torção se $P \cap T(M) = 0$.*

É fácil provar que um submódulo P de M é livre de torção se, e somente se, $P \cap T_1(M) = 0$. Além disso, é claro que se $N \subseteq P$ são submódulos de M , então N é fechado em P se, e somente se, P/N é um submódulo livre de torção de M/N .

O seguinte resultado é demonstrado em ([9], Lemma 2.1):

Lema 1.5.7 *Sejam $N \subseteq P$ submódulos de M com N denso em P . Neste caso, temos que $T(P) \cap N = T(N)$ e a inclusão natural $N/T(N) \rightarrow P/T(P)$*

induz uma correspondência biunívoca entre os submódulos fechados de $P/T(P)$ e os submódulos fechados de $N/T(N)$.

Um outro resultado importante de ([9], Lemma 2.2) é o seguinte:

Lema 1.5.8 ([9], Lemma 2.2) *Sejam L e M bimódulos sobre um anel semiprimo R e $\Phi : L \rightarrow M$ um epimorfismo de bimódulos. Se $N \subseteq P$ são submódulos de M , então $\Phi^{-1}([N]_P) = [\Phi^{-1}(N)]_{\Phi^{-1}(P)}$. Em particular, N é fechado em P se, e somente se, $\Phi^{-1}(N)$ é fechado em $\Phi^{-1}(P)$.*

Demonstração Seja $x \in \Phi^{-1}([N]_P)$. Isto significa que $\Phi(x) \in [N]_P$ e, então $\Phi(x) \in P$ e existem $F, H \in \mathcal{E}(R)$ tais que $F\Phi(x)H \subseteq N$, ou seja, $\Phi(FxH) \subseteq N$. Mas isto é equivalente a afirmar que $x \in \Phi^{-1}(P)$ e existem $F, H \in \mathcal{E}(R)$ tais que $FxH \subseteq \Phi^{-1}(N)$ e, portanto $x \in [\Phi^{-1}(N)]_{\Phi^{-1}(P)}$. A inclusão contrária também é fácil de provar, portanto será omitida. \diamond

Agora, seja $x \in M$ um elemento R -normalizante. Neste caso, temos que $A = \text{Ann}_{R,r}(x) = \{a \in R : xa = 0\}$ e $B = \text{Ann}_{R,l}(x) = \{a \in R : ax = 0\}$ são ideais bilaterais de R . Para todo $r \in R$ existe $r' \in R$ tal que $rx = xr'$, e vice-versa. Se $rx = sx$ e $sx = xs'$, então $xr' = xs'$. Portanto, $r - s \in B$ se, e somente se, $r' - s' \in A$. Então é claro que a aplicação $\phi : R/B \rightarrow R/A$, definida por $\phi(r + B) = r' + A$, onde $rx = xr'$, é um isomorfismo de anéis. Além disso, o R -bimódulo xR é um R/B -módulo à esquerda e um R/A -módulo à direita com $(r + B)x = rx = xr' = x(r' + A) = x\phi(r + B)$, para todo $r \in R$.

Sejam I um ideal de R e $J = \{a \in R : xa \in Ix\}$. Então J é um ideal de R tal que $xJ = Ix$.

Apresentaremos agora dois resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em ([9], Lemma 2.3 e Lemma 2.4).

Lema 1.5.9 *Para qualquer submódulo fechado N de P , temos que $T(P) \subseteq N$.*

Lema 1.5.10 *Suponhamos que x é um elemento R -normalizante, pertencente a um submódulo de M que seja livre de torção. Com a mesma notação acima, se $I \in \mathcal{E}$ (resp. $J \in \mathcal{E}$), então $J \in \mathcal{E}$ (resp. $I + B \in \mathcal{E}$). Em particular, se $B \subseteq I$, então $I \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $J \in \mathcal{E}$. Além disso, os ideais A e B são fechados e semiprimos.*

Observação 1.5.11 Juntando o Lema 1.5.8 e o Lema 1.5.9, segue facilmente que o estudo de submódulos fechados pode ser reduzido ao caso livre de torção.

1.6 Módulos Livres de Torção

Neste parágrafo $M = \sum_{i \in \Omega} Rx_i$ é um bimódulo R -essencialmente normalizante, livre de torção, com conjunto de geradores R -essencialmente normalizantes $X = (x_i)_{i \in \Omega}$.

Observação 1.6.1 Todos os resultados que vamos obter nesta seção são, na verdade, uma adaptação do que foi feito para o caso normalizante em [9]. Portanto, toda esta seção continua válida se trocarmos essencialmente normalizante por normalizante. Notemos que as provas naquele caso são as mesmas daqui com algumas simplificações.

Para um gerador x_i de M , denotamos por A_i (resp. B_i) o anulador $Ann_{R,r}(x_i)$ (resp. $Ann_{R,l}(x_i)$), e por ϕ_i o isomorfismo entre os anéis R/B_i e R/A_i , definido na Seção 1.5. Recordemos que A_i e B_i são ideais semiprimos fechados de R e, portanto os anéis R/B_i e R/A_i são livres de torção como R -módulos e são semiprimos.

Consideremos um R/A_i -módulo livre à direita $V_i = v_i R/A_i$ (com base unitária v_i) e definimos uma estrutura de R/B_i -módulo à esquerda sobre V_i dada por $(a + B_i)v_i = v_i \phi_i(a + B_i)$, para todo $a \in R$. Dado $I \in \mathcal{E}(R)$, temos que existem $F, H \in \mathcal{E}(R)$ tais que $v_i(I + A_i) = v_i \phi_i(F + B_i)$ e $(I + B_i)v_i = \phi_i^{-1}(H + A_i)v_i$. Então $J = I \cap F \cap H$ é tal que $J \in \mathcal{E}(R)$, $J \subseteq I$, $Jv_i \subseteq Fv_i = (F + B_i)v_i = v_i \phi_i(F + B_i) = v_i(I + A_i) = v_i I$ e $v_i J \subseteq v_i H = v_i(H + A_i) = \phi_i^{-1}(H + A_i)v_i = (I + B_i)v_i = Iv_i$.

Então V_i é um R -bimódulo, $L = \sum_{i \in \Omega} \oplus V_i$ é um bimódulo R -essencialmente normalizante com conjunto de geradores R -essencialmente normalizantes dado por $E = (v_i)_{i \in \Omega}$, e a aplicação $\Phi : L \rightarrow M$, dada por $\Phi(v_i) = x_i$, é um epimorfismo de R -bimódulos.

O bimódulo L é dito o R -bimódulo livre de torção canônico associado a M e Φ é o epimorfismo canônico. O resultado abaixo, está demonstrado em ([9], Lemma 3.1).

Lema 1.6.2 *Com a mesma notação anterior, L é livre de torção sobre R .*

Já que $\Phi : L \rightarrow M$ é um epimorfismo de bimódulos essencialmente normalizantes, os submódulos fechados de um submódulo de M estão em correspondência biunívoca com os submódulos fechados de um submódulo de L contendo $Ker\Phi$, pelo Lema 1.5.8. Assim, podemos nos restringir ao estudo dos submódulos fechados de L .

Observação 1.6.3 Se R é um anel primo, $a \in R$ e $ax_i = 0$, então $RaRx_i = 0$. Portanto $a = 0$, pois M é livre de torção. Assim, segue que $B_i = 0$ e,

analogamente, $A_i = 0$. Conseqüentemente, ϕ_i é um automorfismo de R e o bimódulo livre de torção L é livre sobre R (à direita e à esquerda) com base $(v_i)_{i \in \Omega}$, como no caso centralizante.

Agora vamos definir um bimódulo essencialmente normalizante L^* sobre Q , o anel de quocientes simétrico de R , que é uma extensão de L e provaremos alguns resultados importantes para o estudo dos submódulos fechados de L .

Usaremos a mesma notação anterior, ou seja, $L = \sum_{i \in \Omega} \oplus v_i R/A_i$ e ϕ_i denota o isomorfismo entre R/B_i e R/A_i associado a $i \in \Omega$, onde $A_i = \text{Ann}_{R,r}(x_i) = \text{Ann}_{R,r}(v_i)$ e $B_i = \text{Ann}_{R,l}(x_i) = \text{Ann}_{R,l}(v_i)$ são ideais semiprimos fechados de R .

Pela Proposição 1.3.4, segue que existem ideais fechados A_i^* e B_i^* de Q tais que $A_i^* \cap R = A_i$ e $B_i^* \cap R = B_i$. Além disso, pelo Corolário 1.3.6, temos que o isomorfismo ϕ_i pode ser estendido de maneira única a um isomorfismo, ainda denotado por ϕ_i , entre Q/B_i^* e Q/A_i^* .

Seja $V_i^* = v_i Q/A_i^*$, o Q/A_i^* -módulo livre à direita com base v_i e definimos uma ação à esquerda de Q/B_i^* em V_i^* , dada por $(q + B_i^*)v_i = v_i \phi_i(q + B_i^*)$, para todo $q \in Q$ e, assim segue que cada v_i é Q -normalizante.

Lema 1.6.4 *Cada v_i , além de ser R -essencialmente normalizante, é também Q -essencialmente normalizante.*

Demonstração Já sabemos cada v_i é Q -normalizante. Seja $I \in \mathcal{E}(Q)$. Então $I \cap R \in \mathcal{E}(R)$ e, como v_i é R -essencialmente normalizante, segue que existe $H \in \mathcal{E}(R)$, $H \subseteq I \cap R$ tal que $v_i H \subseteq (I \cap R)v_i$ e $Hv_i \subseteq v_i(I \cap R)$. Assim, vemos que $J = QHQ$ é tal que $J \in \mathcal{E}(Q)$, $J \subseteq I$, $Jv_i \subseteq v_i I$ e $v_i J \subseteq Iv_i$ e, portanto v_i é Q -essencialmente normalizante. \diamond

Pelo Lema 1.6.4, concluímos que o bimódulo $L^* = \sum_{i \in \Omega} \oplus v_i Q/A_i^*$ é um bimódulo Q -essencialmente normalizante, denominado extensão canônica de L a um bimódulo essencialmente normalizante sobre Q . Notemos que $\text{Ann}_{Q,r}(v_i) = A_i^*$ e $\text{Ann}_{Q,l}(v_i) = B_i^*$. Também é claro que podemos supor $L \subseteq L^*$.

Agora enunciamos um resultado bastante importante e sua demonstração segue as mesmas idéias de ([9], Lemma 3.1).

Lema 1.6.5 *L^* é livre de torção sobre R e também sobre Q .*

O nosso objetivo é obter uma relação entre submódulos R -fechados em L e submódulos Q -fechados em L^* . Começamos com a seguinte:

Definição 1.6.6 *Dado $x = \sum_{i \in \Omega} v_i a_i \in L$, com $a_i \in R$, definimos o suporte de x , denotado por $\text{supp}(x)$, como sendo o conjunto de todos os $v_i \in E$ tais que $v_i a_i \neq 0$. Além disso, dado $v_i \in E$, denotemos por $x(v_i)$ um elemento de*

R tal que $v_i x(v_i) = v_i a_i$.

É importante observar que $x(v_i)$, na definição acima, não é unicamente determinado, pois, em geral, $\text{Ann}_{R,r}(v_i) \neq 0$.

Definição 1.6.7 *Seja N um submódulo de L . Um elemento $x \in N$ é dito de suporte minimal em N se, dado $y \in N$ com $\text{supp}(y) \subset \text{supp}(x)$, isso implica que $y = 0$. Neste caso, $\text{supp}(x)$ é dito um suporte minimal em N .*

Sejam N um submódulo de L , $\Gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$ um suporte minimal em N e $N_\Gamma = \{x \in N : \text{supp}(x) \subseteq \Gamma\} = \{0\} \cup \{x \in N : \text{supp}(x) = \Gamma\}$. É fácil ver que N_Γ é um submódulo de N . Além disso, para cada $v \in \Gamma$, definimos $\Theta_{\Gamma,v}(N) = \{a \in R : \text{existe } x \in N_\Gamma \text{ tal que } x(v) = a\}$. Neste caso, é claro que $\Theta_{\Gamma,v}(N)$ é um ideal de R .

Seja $A = \text{Ann}_{R,r}(N_\Gamma) = \{a \in R : N_\Gamma a = 0\}$. Assim, segue que A é um ideal de R que não é essencial, pois L é livre de torção. Além disso, é fácil ver que A é fechado em R e $A_i \subseteq A$ para todo $v_i \in \Gamma$, já que Γ é de suporte minimal em N .

Tomemos B um ideal de R tal que $A \oplus B \in \mathcal{E}(R)$. Se $\Theta_{\Gamma,v_i}(N)B \subseteq A_i$, então $\Theta_{\Gamma,v_i}(N)B = 0$. Assim, vemos que $\Theta_{\Gamma,v_i}(N) \subseteq A_i$, pois A_i é fechado. Mas isso dá uma contradição. Deste modo, temos que $\Theta_{\Gamma,v_i}(N)B \not\subseteq A_i$, para todo $v_i \in \Gamma$.

Seja $K_\Gamma = N_\Gamma B \subseteq N_\Gamma$. Deste modo, $K_\Gamma \neq 0$ e qualquer elemento não-nulo de K_Γ tem suporte Γ e pode ser representado com coeficientes em B . Já que $B \cap A_i = 0$, temos que cada elemento de K_Γ tem representação única, quando representado com coeficientes em B .

Sejam $I = \Theta_{\Gamma,v_1}(K_\Gamma) \cap B$ e $J = \text{Ann}_R(I)$. Assim, $I \oplus J \in \mathcal{E}(R)$. Então, para todo $a \in I$, existe $y \in K_\Gamma$ tal que $y(v_1) = a$, ou seja, $y = v_1 a_1 + v_2 a_2 + \dots + v_n a_n$, onde $a_i \in B$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $a_1 = a$. Já que a determina univocamente a_2, \dots, a_n , temos aplicações $f_i : I \oplus J \rightarrow R$, dadas por $f_i(a+c) = f_i(a) = a_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$, onde $c \in J$. Logo, existem elementos $q_i \in Q_{\mathcal{E}}$, tais que $q_i(a+c) = a_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$, $a \in I$ e $c \in J$. Notemos que $q_1 = e$ é um elemento idempotente pertencente ao centróide estendido C de R . Para cada $r \in R$, denotemos por r_i os elementos de R tais que $r v_i = v_i r_i$. Então, temos que $r y = v_1 r_1 a + \dots + v_i r_i a_i + \dots + v_n r_n a_n \in K_\Gamma$. Deste modo, vemos que $f_i(r_1 a) = r_i a_i$ e, assim $q_i r_1 a = r_i a_i$, para $i = 1, \dots, n$. Por outro lado, temos que $r y = r m a = r(v_1 e + v_2 q_2 + \dots + v_n q_n) a = v_1 r_1 e a + v_2 r_2 q_2 a + \dots + v_n r_n q_n a$. Portanto, segue que $r_i q_i a = q_i r_1 a$, para $i = 1, \dots, n$. Logo, temos que $r_i q_i = q_i r_1$, para $i = 1, \dots, n$. Já que $R v_i = v_i R$, segue que cada q_i é um elemento R -normalizante, ou seja, $q_i \in Z \subseteq Q$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Consideremos $m = v_1 e + v_2 q_2 + \dots + v_n q_n \in L^*$. Então, segue que $m a = y$,

para todo $y \in K_\Gamma$ com $y(v_1) = a \in I$. Além disso, $m(I \oplus J) \subseteq N$ e $me = m$.

Por outro lado, temos que

$$rm = v_1r_1e + v_2r_2q_2 + \cdots + v_nr_nq_n = v_1er_1 + v_2q_2r_1 + \cdots + v_nq_nr_1 = mr_1.$$

Conseqüentemente, m é um elemento R -normalizante de L^* .

Agora provaremos que cada q_i é R -essencialmente normalizante. Dado $I \in \mathcal{E}(R)$, temos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $J_i \in \mathcal{E}(R)$, $J_i \subseteq I$ tal que $v_iJ_i \subseteq Iv_i$ e $J_iv_i \subseteq v_iI$. Então $J = \bigcap_{i=1}^n J_i$ é tal que $J \subseteq I$, $J \in \mathcal{E}(R)$, $Jv_i \subseteq v_iI$ e $v_iJ \subseteq Iv_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Fazendo uma nova construção deste tipo, obtemos $H \in \mathcal{E}(R)$, $H \subseteq J$ tal que $v_iH \subseteq Jv_i$ e $Hv_i \subseteq v_iJ$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dado $r_1 \in H$, temos que $v_1r_1 = rv_1$, para algum $r \in J$. Assim, segue que $rv_i = v_i r_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, onde cada $r_i \in I$. Logo, vemos que $q_i r_1 = r_i q_i$, ou seja, $q_i H \subseteq I q_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Consideremos agora $r_2 \in H$. Neste caso, temos que $v_2 r_2 = rv_2$, para algum $r \in J$. Então, segue que $rv_i = v_i r_i$, com $r_i \in I$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo, vemos que $r_2 q_2 = q_2 r_1$, ou seja, $H q_2 \subseteq q_2 I$. Este raciocínio pode ser feito também para $i = 3, \dots, n$ e, portanto concluímos que $H q_i \subseteq q_i I$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por conseguinte, segue que q_i é R -essencialmente normalizante, ou seja, $q_i \in Z^e \subseteq Q$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Além disso, dado $r \in J$, temos que $rv_1 = v_1 r_1$, para algum $r_1 \in I$ e então $rm = v_1 r_1 e + v_2 r_2 q_2 + \cdots + v_n r_n q_n = v_1 e r_1 + v_2 q_2 r_1 + \cdots + v_n q_n r_1 = m r_1$. Assim, segue que $Jm \subseteq mI$. Simetricamente, podemos mostrar que $mJ \subseteq Im$. Portanto, m é um elemento R -essencialmente normalizante de L^* .

Finalmente, seja $z = v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n \in N_\Gamma$. Já que $z(A \oplus B) \subseteq zB \subseteq K_\Gamma$, temos que $zd = m b_1 d$, para qualquer $d \in A \oplus B$. Assim, segue que $z = m b_1$, pois L^* é livre de torção sobre R .

Resumimos os resultados obtidos anteriormente, no seguinte:

Lema 1.6.8 *Sejam N um submódulo de L e Γ um suporte minimal em N . Então, existem $m \in L^*$ e $e \in Ip(C)$ tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) $supp(m) = \Gamma$.
- (ii) Existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $mH \subseteq N$.
- (iii) Para algum $v_1 \in \Gamma$ temos que $m(v_1) = e$.
- (iv) $me = m$.
- (v) m é R -essencialmente normalizante e, se $m = v_1 e + v_2 q_2 + \cdots + v_n q_n$, então $q_i \in Z^e$, para todo $i = 2, \dots, n$.
- (vi) Para todo $z \in N$ com $supp(z) \subseteq \Gamma$ temos $z = mz(v_1)$, para todos os

valores possíveis de $z(v_1)$ em R .

O seguinte lema estende a construção do anterior, para qualquer Γ que seja suporte de um elemento de N . A sua demonstração pode ser encontrada em ([9], Lemma 3.4).

Lema 1.6.9 *Seja N um submódulo de L . Então, para todo Γ que seja suporte de um elemento de N , existe um par $(m_\Gamma, e_\Gamma) \in L^* \times C$ tal que $(m_\Gamma, e_\Gamma) = (0, 0)$ ou as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\text{supp}(m_\Gamma) = \Gamma$.

(ii) Existe $H_\Gamma \in \mathcal{E}(R)$ tal que $m_\Gamma H_\Gamma \subseteq N$.

(iii) Para algum $v_1 \in \Gamma$, $m_\Gamma(v_1) = e_\Gamma$.

(iv) $m_\Gamma e_\Gamma = m_\Gamma$.

(v) m_Γ é R -essencialmente normalizante e, se $m_\Gamma = v_1 e_\Gamma + v_2 q_2 + \dots + v_n q_n$, então $q_i \in Z^e$, para todo $i = 2, \dots, n$.

(vi) Para todo $z \in N$ tal que $\text{supp}(z) = \Gamma$ e $z e_\Delta = 0$ para todo idempotente $e_\Delta \in C$ correspondendo a um suporte $\Delta \subset \Gamma$ temos $z = m_\Gamma z(v_1)$, para qualquer representação de $z(v_1)$ em R .

Seja $m \in L^*$ um elemento R -essencialmente normalizante. Segue, pelo Lema 1.5.10, que $A = \text{Ann}_{R,r}(m)$ é um ideal fechado, pois L^* é livre de torção sobre R . Assim, temos que existe um ideal fechado A^* de Q tal que $A^* \cap R = A$ e $\text{Ann}_{Q,r}(m) = A^*$. Denotemos por I um ideal fechado de R tal que $A \oplus I \in \mathcal{E}(R)$ e por I^* sua extensão a Q . Então $A^* \oplus I^* = Q$. Analogamente, temos que $B = \text{Ann}_{R,l}(m)$ é um ideal fechado de R e, existem um ideal fechado J de R tal que $B \oplus J \in \mathcal{E}(R)$ e ideais B^*, J^* de Q tais que $B^* \cap R = B$, $J^* \cap R = J$ e $B^* \oplus J^* = Q$.

O bimódulo mR tem uma estrutura natural de R/B - R/A -bimódulo dada por $m(r + A) = mr$ e $(r + B)m = rm$, para todo $r \in R$. Além disso, existe um isomorfismo de anéis $\phi : R/B \rightarrow R/A$, definido por $\phi(r + b) = r' + A$, onde $mr' = rm$. Então, pelo Corolário 1.3.6, segue que ϕ pode ser estendido de maneira única a um isomorfismo $\phi : Q/B^* \rightarrow Q/A^*$ e, portanto ϕ pode ser visto como um isomorfismo entre J^* e I^* . Usando as mesmas idéias do Lema 1.4.4, é fácil mostrar que m é um elemento Q -essencialmente normalizante.

Sejam N um submódulo de L e $N^* = \sum_\Gamma m_\Gamma Q$, onde $\{m_\Gamma : \Gamma \subseteq E\}$ é o conjunto formado pelos elementos construídos no Lema 1.6.9. Então segue que N^* é um submódulo de L^* , pois cada m_Γ é R -normalizante. Além disso, se $x \in L^*$, temos que $xF \subseteq N$ para algum $F \in \mathcal{E}(R)$ se, e somente se, $x \in N^*$, fato este provado em ([9], Corollary 3.7). Um outro resultado importante, provado em ([9], Theorem 3.12), mostra que, se K é um submódulo fechado

de L , então existe um submódulo Q -fechado K^* de L^* tal que $K^* \cap L = K$.

Seja P um R -módulo à direita. Dizemos que P é livre de torção se $x \in P$ e $xH = 0$, para algum $H \in \mathcal{E}(R)$, implica $x = 0$.

Na definição a seguir M é um módulo R -essencialmente normalizante.

Definição 1.6.10 *Um par (M^*, j) , formado por um bimódulo Q -essencialmente normalizante M^* que é livre de torção como R -módulo à direita e um homomorfismo de R -bimódulos $j : M \rightarrow M^*$, é dito uma extensão canônica livre de torção de M se vale o seguinte: para todo Q -módulo à direita P que é livre de torção como R -módulo à direita e para todo homomorfismo de R -módulos à direita $f : M \rightarrow P$, existe um único homomorfismo de Q -módulos à direita $f^* : M^* \rightarrow P$ tal que $f^* \circ j = f$.*

Voltemos a considerar o caso em que M é um bimódulo R -essencialmente normalizante, livre de torção, com um conjunto de geradores R -essencialmente normalizantes $(x_i)_{i \in \Omega}$.

Teorema 1.6.11 *Todo R -bimódulo essencialmente normalizante, livre de torção M possui uma extensão canônica livre de torção (M^*, j) . Além disso, como M é livre de torção, segue que j é um homomorfismo injetor, ou seja, podemos considerar $M \subseteq M^*$.*

Demonstração Sejam $L = \sum_{i \in \Omega} \oplus V_i$ o R -bimódulo essencialmente normalizante associado a M , $\Phi : L \rightarrow M$ o epimorfismo canônico, e L^* a extensão de L a um módulo Q -essencialmente normalizante. Já que M é livre de torção sobre R , segue que $K = \text{Ker}\Phi$ é um submódulo fechado de L . Então, temos que existe um submódulo Q -fechado K^* de L^* tal que $K^* \cap L = K$. Sejam $M^* = L^*/K^*$ e π a projeção canônica de L^* sobre M^* , isto é, $\pi : L^* \rightarrow L^*/K^* = M^*$. Assim, segue que π é um homomorfismo de Q -bimódulos e M^* é um bimódulo Q -essencialmente normalizante, com conjunto de geradores Q -essencialmente normalizantes $(\pi(v_i))_{i \in \Omega}$.

Dado $x \in M$, temos que existe $y \in L \subseteq L^*$ tal que $\Phi(y) = x$. Seja $j : M \rightarrow M^*$, a aplicação definida por $j(x) = \pi(y)$. Vamos mostrar que j é um R -monomorfismo bem definido de M em M^* e, assim podemos considerar $M \subseteq M^*$. A aplicação j está bem definida, pois se $x \in M$ e $\Phi(y_1) = x$, $\Phi(y_2) = x$ com $y_1, y_2 \in L$ então $\Phi(y_1 - y_2) = 0$ e, assim $y_1 - y_2 \in \text{Ker}\Phi = K \subseteq K^*$ e, portanto $\pi(y_1 - y_2) = 0$, ou seja, $\pi(y_1) = \pi(y_2)$. É claro, também, que j é um R -homomorfismo. Falta apenas mostrar que j é uma aplicação injetora. Para isto, suponhamos que $j(x_1) = j(x_2)$, com $x_1, x_2 \in M$. Então, temos que $\pi(y_1) = \pi(y_2)$, onde $\Phi(y_1) = x_1$ e $\Phi(y_2) = x_2$. Logo, segue que $\pi(y_1 - y_2) = 0$, ou seja, $y_1 - y_2 \in K^*$ e então existe $F \in \mathcal{E}(R)$ tal que $(y_1 - y_2)F \subseteq K$. Como K é fechado, segue que $y_1 - y_2 \in K$, ou seja, $\Phi(y_1 - y_2) = 0$. Logo, vemos que $x_1 = \Phi(y_1) = \Phi(y_2) = x_2$ e, portanto j é injetora. O resto é claro.

Consideremos agora um Q -módulo à direita P que é livre de torção como R -módulo à direita e $f : M \rightarrow P$ um homomorfismo de R -módulos à direita. Dado $x \in M^*$, temos que $x = \pi(\sum_{i=1}^n v_i q_i) = \sum_{i=1}^n \pi(v_i) q_i = \sum_{i=1}^n j(x_i) q_i$, onde $x_i \in X$, $q_i \in Q$, para $i = 1, \dots, n$. Suponhamos que $x = 0$. Então $\sum_{i=1}^n v_i q_i \in K^*$ e existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $q_i H \subseteq R$, para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, segue que $\sum_{i=1}^n v_i q_i H \subseteq K^* \cap L = K = \text{Ker} \Phi$ e, portanto $\sum_{i=1}^n x_i q_i H = 0$. Logo, vemos que $\sum_{i=1}^n f(x_i) q_i H = 0$ e, como P é livre de torção como R -módulo à direita, segue que $\sum_{i=1}^n f(x_i) q_i = 0$. Por conseguinte, a aplicação $f^* : M^* \rightarrow P$, definida por $f^*(\sum_{i=1}^n j(x_i) q_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i) q_i$, é um homomorfismo de Q -módulos à direita bem definido, tal que $f^* \circ j = f$. Além disso, é claro que f^* é única. \diamond

Observação 1.6.12 Dado um submódulo N de M , definimos N^* como sendo o Q -submódulo $\pi(\Phi^{-1}(N)^*)$ de M^* . Então, temos que $\Phi^{-1}(N)^*$ é gerado sobre Q por elementos R -essencialmente normalizantes, os quais são construídos no Lema 1.6.9 e, portanto $N^* = \pi(\Phi^{-1}(N)^*)$ também será gerado sobre Q por elementos R -essencialmente normalizantes. Além disso, dado $x \in M^*$, segue que $x \in N^*$ se, e somente se, existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $xH \subseteq N$.

Teorema 1.6.13 *Sejam $N \subseteq P$ submódulos de M . Então, temos que $[N]_P = \{x \in P : \text{existe } H \in \mathcal{E}(R) \text{ tal que } xH \subseteq N\} = N^* \cap P$. Além disso, $[N]_P$ é o maior submódulo K de P contendo N e satisfazendo a seguinte condição:*

para todo submódulo S de P com $S \cap N = 0$ temos que $S \cap K = 0$.

Demonstração Ver ([9], Theorem 4.1). \diamond

É possível obter uma versão à esquerda do Lema 1.6.9, assim como do teorema acima, tendo como consequência o seguinte:

Corolário 1.6.14 ([9], Corollary 4.2) *Sejam $N \subseteq P$ submódulos de M e $x \in P$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $x \in [N]_P$.
- (ii) *Existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $xH \subseteq N$.*
- (iii) *Existe $F \in \mathcal{E}(R)$ tal que $Fx \subseteq N$.*

É importante observar que este resultado pode ser falso se M não é livre de torção, como veremos no Exemplo 2.1.8, mais adiante.

Um outro resultado muito importante, provado em ([9], Corollary 4.8), é o seguinte:

Corolário 1.6.15 *Sejam N um submódulo de M e $x \in M^*$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $x \in N^*$.
- (ii) Existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $xH \subseteq N$.
- (iii) Existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $xH \subseteq N^*$.
- (iv) Existe $F \in \mathcal{E}(Q)$ tal que $xF \subseteq N^*$.

É claro que existe uma versão simétrica para o resultado anterior.

Para finalizar esta seção, enunciamos um teorema que será um dos ingredientes utilizados para a demonstração do Teorema da Correspondência Biunívoca para módulos (Teorema 1.8.3). O resultado abaixo está provado em ([9], Theorem 4.9), no caso normalizante.

Teorema 1.6.16 *Sejam M um bimódulo R -essencialmente normalizante e P um submódulo de M . Então existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os submódulos fechados de P e o conjunto de todos os submódulos Q -fechados de P^* .*

1.7 Elementos Normalizantes e Essencialmente Normalizantes de L^*

No caso centralizante, o centralizador de Q em M^* desempenha um papel fundamental (ver [6] e [8]). Já no caso normalizante, são importantes os elementos de M^* que são R -normalizantes, definidos por $M_0 = \{m \in M^* : Rm = mR\}$, (ver [9], Section 6).

Assim como na seção anterior, todos os resultados que vamos apresentar aqui se referem ao caso essencialmente normalizante, sendo uma adaptação daqueles obtidos em ([9]), no caso normalizante. Portanto, toda esta seção continua válida se trocarmos essencialmente normalizante por normalizante, Z^e por Z e L_0^e por L_0 .

Vamos começar, considerando os elementos R -essencialmente normalizantes no Q -bimódulo canônico L^* , definidos na seção anterior. Mais geralmente, consideremos L^* qualquer Q -bimódulo que seja soma direta de bimódulos livres de torção do tipo $v_i Q$, onde $(v_i)_{i \in \Omega}$ é um conjunto de elementos R -essencialmente normalizantes.

Antes de continuarmos, lembramos que a condição (E), mencionada a seguir, está caracterizada na Definição 1.4.2.

Consideremos o conjunto

$$L_0^e = \{m \in L^* : Rm = mR \text{ e } m \text{ satisfaz a condição (E)}\}.$$

Agora vamos descrever a estrutura de L_0^e mais precisamente. Primeiro, usando as mesmas idéias do Lema 1.6.4, segue que os elementos de L_0^e são também Q -essencialmente normalizantes. Além disso, é claro que existe um produto bem definido $zm \in L_0^e$ e $mz \in L_0^e$, para todo $z \in Z^e$ e todo $m \in L_0^e$. Entretanto, a soma em L_0^e é somente parcialmente definida e Z^e não é necessariamente um anel. Mesmo assim, vamos nos referir a L_0^e como sendo um Z^e -módulo.

Observação 1.7.1 Nesta seção os anuladores são considerados em Q . Assim, vamos omitir o subscrito Q para os anuladores.

Lema 1.7.2 *Para todo $m \in L_0^e$, existe $e \in Ip(C)$ com $me = m$ e tal que se $f \in Ip(C)$ e $mf = m$, então $e \leq f$.*

Demonstração Ver ([9], Lemma 6.1) \diamond

O idempotente e do lema acima é denominado o idempotente associado a m .

Sejam $A_i = Ann_r(v_i)$ e $B_i = Ann_l(v_i)$. Então é claro que podemos representar os elementos de L_0^e , escrevendo os coeficientes de v_i à direita e pertencentes ao complemento de A_i . Nesse caso, os coeficientes são unicamente determinados.

Agora, consideremos $m = \sum_{i=1}^n v_i q_i \in L_0^e$, onde $q_i \in Ann_r(A_i)$ para $1 \leq i \leq n$, e sejam $A = Ann_r(m)$ e $B = Ann_l(m)$. Como já dissemos anteriormente, existe um isomorfismo $\phi : Q/B \rightarrow Q/A$, dado por $\phi(q + B) = q' + A$, onde $mq' = qm$. Além disso, já que L^* é uma soma direta, temos que $v_i q_i \in L_0^e$, e o isomorfismo $\phi_i : Q/Ann_l(v_i q_i) \rightarrow Q/Ann_r(v_i q_i)$, correspondente a este elemento é induzido por ϕ , pois $A \subseteq Ann_r(v_i q_i)$ e $B \subseteq Ann_l(v_i q_i)$.

O lema a seguir nos dá uma nova prova para a parte (v) do Lema 1.6.9.

Lema 1.7.3 *Com a mesma notação acima, temos que $q_i \in Z^e$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demonstração Dado $r \in R$, temos que existem $r', r'', t', t'' \in R$ tais que $r'v_i q_i = v_i r q_i$, $r'v_i q_i = v_i q_i r''$, $v_i q_i r = t v_i q_i$ e $t v_i q_i = v_i t' q_i$ pois $v_i, v_i q_i \in L_0^e$. Assim, segue que $r q_i - q_i r'', q_i r - t' q_i \in Ann_r(v_i) \cap Ann_r(A_i) = 0$ e, portanto $r q_i = q_i r''$ e $q_i r = t' q_i$, ou seja, $q_i \in Z$.

Seja $I \in \mathcal{E}(R)$. Então existe $H \in \mathcal{E}(R)$, $H \subseteq I$ tal que $Hv_i q_i \subseteq v_i q_i I$ e $Hv_i \subseteq v_i I$. Assim, segue que existe $J \in \mathcal{E}(R)$, $J \subseteq H$ tal que $v_i J \subseteq Hv_i$ e $v_i q_i J \subseteq Hv_i q_i$. Logo, $J \subseteq I$ é tal que $v_i J q_i \subseteq Hv_i q_i \subseteq v_i q_i I$ e $v_i q_i J \subseteq Hv_i q_i \subseteq v_i I q_i$. Portanto, temos que $v_i J q_i = v_i q_i J'$ e $v_i q_i J = v_i J'' q_i$, com $J', J'' \in \mathcal{E}(R)$ e $J', J'' \subseteq I$. Dado $r \in J$, segue existem $r' \in J'$ e $r'' \in J''$ tais que $v_i r q_i = v_i q_i r'$ e $v_i q_i r = v_i r'' q_i$. Por conseguinte, obtemos que

$r q_i - q_i r', q_i r - r'' q_i \in \text{Ann}_r(v_i) \cap \text{Ann}_r(A_i) = 0$. Finalmente, vemos que isso implica que $J q_i \subseteq q_i J' \subseteq q_i I$ e $q_i J \subseteq J'' q_i \subseteq I q_i$. Juntando isto ao fato de que $q_i \in Z$, temos que $q_i \in Z^e$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. \diamond

No caso centralizante, a correspondência biunívoca é obtida, para submódulos fechados, entre M , M^* e V , onde V é o centralizador de Q em M^* e é considerado como um C -módulo ([6], [8], [16]). No nosso caso, vamos obter um resultado semelhante, tomando $V = L_0^e$, onde L_0^e não é mais um módulo sobre um anel. Para tal, precisamos fazer a seguinte:

Definição 1.7.4 *Um subconjunto W de L_0^e é dito um Z^e -submódulo de L_0^e , se satisfizer as seguintes condições:*

- (i) *Se x_1, \dots, x_n são elementos de W e a soma $x_1 + \dots + x_n$ está definida em L_0^e , então $x_1 + \dots + x_n \in W$.*
- (ii) *Se $x \in W$ e $z \in Z^e$, então $zx \in W$ e $xz \in W$.*

Neste caso, dizemos, simplesmente, que W é um submódulo de L_0^e . Um resultado importante referente a estes módulos, provado em ([9], Lemma 7.1), é o seguinte:

Lema 1.7.5 *Um subconjunto W de L_0^e é um submódulo de L_0^e se, e somente se, existe um Q -submódulo K de L^* tal que $W = K \cap L_0^e$. Além disso, podemos tomar $K = WQ$.*

Definição 1.7.6 *Dados $W \subseteq Y$ submódulos de L_0^e , dizemos que W é fechado em Y se $x \in Y$ e $xF \subseteq W$, para algum $F \in \mathcal{E}(Z^e)$ implica $x \in W$.*

Enunciamos, a seguir, um resultado importante sobre Z^e -módulos fechados de L_0^e , cuja demonstração pode ser encontrada em ([9], Theorem 7.5), para Z -módulos fechados de L_0 .

Teorema 1.7.7 *Dado um submódulo P de L^* , existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os submódulos Q -fechados de P e o conjunto de todos os submódulos Z^e -fechados de $P \cap L_0^e$. Além disso, a correspondência associa o submódulo K de P com o submódulo W de $P \cap L_0^e$, onde $K \cap L_0^e = W$ e $K = WQ$.*

1.8 O Teorema da Correspondência Biunívoca

Neste parágrafo, M é um bimódulo R -essencialmente normalizante com conjunto de geradores essencialmente normalizantes dado por $(x_i)_{i \in \Omega}$. Assim como nos dois parágrafos anteriores, os resultados aqui enunciados continuam

válidos, se trocarmos essencialmente normalizante por normalizante, Z^e por Z e M_0^e por M_0 , sendo que a demonstração para o caso normalizante pode ser encontrada em ([9], Section 8).

Começamos, com o seguinte resultado, que é uma generalização do Teorema 1.6.11 e é provado em ([9], Theorem 8.2) no caso normalizante.

Teorema 1.8.1 *Todo bimódulo R -essencialmente normalizante M possui uma extensão canônica, livre de torção, (M^*, j) .*

Demonstração Consideremos M^* o Q -bimódulo associado ao bimódulo, livre de torção, $M/T(M)$ e j a composição $M \rightarrow M/T(M) \rightarrow M^*$, onde a segunda aplicação é aquela construída na demonstração do Teorema 1.6.11. \diamond

Observação 1.8.2 Assim como no caso normalizante, $(j(x_i))_{i \in \Omega}$ é um conjunto de geradores Q -essencialmente normalizantes de M^* . Além disso, $\text{Ker } j = T(M)$ e podemos considerar $M \subseteq M^*$ se, e somente se, M é livre de torção sobre R .

Como nas seções anteriores, consideremos os conjuntos

$$M_0 = \{m \in M^* : Rm = mR\} \quad \text{e}$$

$$M_0^e = \{m \in M^* : Rm = mR \text{ e } m \text{ satisfaz a condição (E)} \}.$$

Os dois resultados seguintes são, sem dúvida, os mais importantes no que se refere à correspondência biunívoca para módulos, sendo uma adaptação de ([9], Theorem 8.3) e ([9], Corollary 8.4) no caso normalizante.

Teorema 1.8.3 *Sejam M um bimódulo R -essencialmente normalizante, (M^*, j) a extensão canônica, livre de torção, de M , e M_0^e como acima. Então existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os submódulos R -fechados de M , o conjunto de todos os submódulos Q -fechados de M^* , e o conjunto de todos os submódulos Z^e -fechados de M_0^e . Além disso, a correspondência associa o submódulo fechado N de M com o submódulo N^* de M^* e o submódulo N_0 de M_0^e , onde $j^{-1}(N^*) = N$, $N_0 = N^* \cap M_0^e$ e $N^* = QN_0$.*

Demonstração Pelo Teorema 1.6.16, temos que existe uma correspondência biunívoca entre os submódulos R -fechados de $M/T(M)$ e os submódulos Q -fechados de M^* . Além disso, dado um submódulo fechado N de M , segue, pelo Lema 1.5.9, que $T(M) \subseteq N$. Por outro lado é claro que a aplicação canônica $\Phi : M \rightarrow M/T(M)$ é um epimorfismo de R -bimódulos. Portanto, pelo Lema 1.5.8, temos que existe uma correspondência biunívoca entre os submódulos fechados de M e os submódulos fechados de $M/T(M)$. Com isso segue a correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os submódulos R -fechados de M e o conjunto de todos os submódulos Q -fechados de M^* .

Agora consideremos M^* como sendo um bimódulo Q -essencialmente normalizante gerado pelos seus elementos Q -essencialmente normalizantes $M_0^e = (m_i)_{i \in \Lambda}$. Definindo $L^* = \sum_{i \in \Lambda} \oplus m_i Q$ como o Q -bimódulo associado a M^* neste sentido, e seja $\Phi : L^* \rightarrow M^*$ a aplicação canônica. Então é claro que $\Phi(L_0^e) = M_0^e$. Para completar a prova é suficiente aplicarmos o Lema 1.5.8 ao Z^e -epimorfismo $\Phi|_{L_0^e} : L_0^e \rightarrow M_0^e$ e o Teorema 1.7.8. \diamond

Corolário 1.8.4 *Dado um submódulo P de M , denotamos por P^* a extensão de $[P]_M$ a um submódulo fechado de M^* e por P_0 o submódulo fechado de M_0^e correspondente. Então a correspondência dada no Teorema 1.8.3 induz uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os submódulos fechados de P , o conjunto de todos os submódulos Q -fechados de P^* e o conjunto de todos os submódulos Z^e -fechados de P_0 .*

Capítulo 2

Extensões Normalizantes de Anéis e o Teorema da Correspondência Biunívoca

2.1 Alguns Tipos de Extensões de Anéis

Neste capítulo R é um anel semiprimo e S é uma extensão de R .

Definição 2.1.1 *Um elemento $s \in S$ é dito:*

- (i) *R -centralizante se $rs = sr$, para todo $r \in R$.*
- (ii) *R -fortemente normalizante (ver [26]) se $Is = sI$, para todo ideal I de R .*
- (iii) *R -essencialmente normalizante no sentido forte se $Is = sI$, para todo $I \in \mathcal{E}(R)$.*
- (iv) *R -essencialmente normalizante se $Rs = sR$ e s satisfaz a condição (E).*
- (v) *R -normalizante se $Rs = sR$.*

Definição 2.1.2 *Dizemos que S é uma extensão normalizante do anel R se S é um bimódulo R -normalizante.*

A definição acima significa que existe um conjunto de elementos R -normalizantes $(x_i)_{i \in \Omega} \subseteq S$ tal que $S = \sum_{i \in \Omega} Rx_i$. Um conjunto nestas condições é denominado conjunto de geradores normalizantes de S sobre R .

Observação 2.1.3 Da mesma forma, dizemos que S é uma extensão centralizante (resp. fortemente normalizante, essencialmente normalizante no sentido forte, essencialmente normalizante) do anel R se existir um conjunto $(x_i)_{i \in \Omega} \subseteq S$, formado por elementos R -centralizantes (resp. R -fortemente normalizantes, R -essencialmente normalizantes no sentido forte, R -essencialmente normalizantes), tal que $S = \sum_{i \in \Omega} Rx_i$.

É claro que todos estes tipos de extensões são normalizantes. Além disso, evidentemente toda extensão centralizante é fortemente normalizante que, por sua vez, é essencialmente normalizante no sentido forte. Também, é fácil ver que toda extensão essencialmente normalizante no sentido forte é essencialmente normalizante.

A seguir, daremos alguns exemplos mostrando que estes tipos de extensões são todos diferentes. Antes disso, porém, lembramos que se R é um anel e ϕ é um endomorfismo de R , então o conjunto $R[X, \phi] = \{\sum_{i=0}^n r_i X^i : r_i \in R \text{ e } Xr = \phi(r)X\}$ é um anel, com soma e produto definidos de maneira semelhante como num anel de polinômios, salvo que $Xr = \phi(r)X$, para todo $r \in R$. Um anel deste tipo é denominado "skew" anel de polinômios do tipo endomorfismo.

Exemplo 2.1.4 Sejam \mathbf{C} o corpo dos números complexos e $\phi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ a conjugação complexa dada por $\phi(r) = \bar{r}$. Então $S = \mathbf{C}[X, \phi]$ é, claramente, uma extensão fortemente normalizante de R com conjunto de geradores \mathbf{C} -fortemente normalizantes $(X^i)_{i \geq 0}$. Além disso, um elemento $s \in S$ é \mathbf{C} -centralizante se, e somente se, s é da forma $\sum_{i=0}^n r_i X^{2i}$. Assim, segue que S não é uma extensão centralizante de \mathbf{C} .

Exemplo 2.1.5 Sejam K um corpo, $R = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in K \right\}$ e $S = M_2(K)$.

Nesse caso, é fácil ver que $s \in S$ é R -normalizante se, e somente se, $s \in R$ ou $s = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Para ser mais preciso, todo elemento de R é R -centralizante e, se

$s = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, então s é R -essencialmente normalizante no sentido forte e não

é R -fortemente normalizante. Logo, S não é uma extensão fortemente normalizante de R . Contudo, é claro que S é uma extensão essencialmente normalizante no sentido forte com conjunto de geradores R -essencialmente normalizantes no sentido forte dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

O exemplo acima pode ser facilmente generalizado, tomando-se

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in K \right\} \text{ e } S = M_n(K).$$

Neste caso, o conjunto de geradores R -essencialmente normalizantes no sentido forte de S sobre R é dado por $\{e_{ij} : i, j \in \{1, \dots, n\}\}$, onde e_{ij} é a matriz $n \times n$ com 1 na posição ij e 0 no restante.

Um outro fato interessante neste exemplo é que S é primo, mas R não é.

Ocorre que, para extensões fortemente normalizantes, se I é um ideal primo de S então $I \cap R$ é um ideal primo de R , fato este provado em ([26], Proposition 1.5). Mas, através deste exemplo vemos que isto não é mais válido para extensões essencialmente normalizantes no sentido forte.

Exemplo 2.1.6 Sejam $R = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbf{Z} \right\}$ e $S = M_2(\mathbf{Z})$, onde \mathbf{Z} é o

anel dos números inteiros. Assim como no exemplo anterior, é fácil ver que $s \in S$ é

R -normalizante se, e somente se, $s \in R$ ou $s = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Mais precisamente, todo elemento de R é R -centralizante e se $s = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ então s é R -essencialmente

normalizante e não é R -essencialmente normalizante no sentido forte.

De fato, s é R -essencialmente normalizante, pois se $I \in \mathcal{E}(R)$, então segue que

$I = \begin{pmatrix} m\mathbf{Z} & 0 \\ 0 & n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$, com m, n inteiros positivos. Tomando $k = mmc(m, n)$, o

mínimo múltiplo comum de m e n , temos que $J = \begin{pmatrix} k\mathbf{Z} & 0 \\ 0 & k\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in \mathcal{E}(R)$ e é tal que $J \subseteq I$ e $Js = sJ$.

Além disso, temos que $I = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} & 0 \\ 0 & 2\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in \mathcal{E}(R)$ e é tal que $sI = \begin{pmatrix} 0 & 2b\mathbf{Z} \\ c\mathbf{Z} & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & b\mathbf{Z} \\ 2c\mathbf{Z} & 0 \end{pmatrix} = Is$. Portanto, S não é uma extensão essencialmente normalizante

no sentido forte de R . Entretanto, é claro que S é uma extensão essencialmente normalizante de R com conjunto de geradores R -essencialmente normalizantes dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Novamente, o exemplo pode ser generalizado, tomando-se

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbf{Z} \right\}, \quad S = M_n(\mathbf{Z}) \text{ e o conjunto}$$

de

geradores R -essencialmente normalizantes de S sobre R dado por $\{e_{ij} : i, j \in \{1, \dots, n\}\}$.

Um outro exemplo que mostra que nem toda extensão essencialmente normalizante é essencialmente normalizante no sentido forte é o seguinte:

Exemplo 2.1.7 Sejam $R = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $\phi : R \rightarrow R$ o isomorfismo de R dado por $\phi(a, b) = (b, a)$ e $S = R[X, \phi]$. Assim, temos que um elemento $s \in S$ é R -normalizante se, e somente se, $s = \sum_{i=0}^n r_i X^{2i}$ ou $s = \sum_{i=0}^n r_i X^{2i+1}$. Mais precisamente, se s é do primeiro tipo então s é R -centralizante e se s é do segundo então s é R -essencialmente normalizante, mas não é R -essencialmente normalizante no sentido forte. De fato, sejam $0 \neq s = \sum_{i=0}^n r_i X^{2i+1}$ e $I \in \mathcal{E}(R)$. Então $I = m\mathbf{Z} \times n\mathbf{Z}$ com m, n inteiros positivos. Portanto, segue que $J = k\mathbf{Z} \times k\mathbf{Z} \in \mathcal{E}(R)$ é tal que $J \subseteq I$ e $Js = sJ$, onde $k = mmc(m, n)$. Além disso, $I = \mathbf{Z} \times 2\mathbf{Z} \in \mathcal{E}(R)$ e é tal que $sI = (2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})s \neq Is$. Logo, S é uma extensão essencialmente normalizante de R que não é uma extensão essencialmente normalizante no sentido forte de R .

Exemplo 2.1.8 Consideremos os anéis $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ e $R = \mathbf{Z}_2 \times \prod_{i=2}^{\infty} \mathbf{Z}$, onde a soma e o produto em R são definidos componente a componente. Sejam $\phi : R \rightarrow R$ o epimorfismo dado por $\phi(\bar{a}_1, a_2, a_3, \dots) = (\bar{a}_2, a_3, a_4, \dots)$ e $S = R[X, \phi]$. É fácil ver que S é uma extensão R -normalizante do anel R com conjunto de geradores R -normalizantes dado por $(X^i)_{i \geq 0}$, pois $XR = \phi(R)X = RX$. Agora, suponhamos que S é uma extensão essencialmente normalizante do anel R . Então pelo menos um dos geradores de S é da forma $s = r_0 + r_1 X + \dots + r_n X^n$ com $r_{11} = \bar{1}$, onde $r_1 = (r_{11}, r_{12}, r_{13}, \dots)$. Assim, segue que $I = \mathbf{Z}_2 \times \prod_{i=2}^{\infty} 2\mathbf{Z} \in \mathcal{E}(R)$ e é tal que não existe $J \in \mathcal{E}(R)$ com $Js \subseteq sI$. Logo, S é um exemplo de extensão normalizante de R que não é essencialmente normalizante.

Usando o exemplo anterior, podemos mostrar que o Corolário 1.6.14 pode não valer no caso em que S não é livre de torção. No Exemplo 2.1.8, temos que os ideais essenciais de R são da forma $\mathbf{Z}_2 \times \prod_{i=2}^{\infty} n_i \mathbf{Z}$, com $n_i \in \mathbf{Z}$, $n_i \neq 0$, para todo $i \geq 2$. Seja $[0]_S$ o fecho do ideal nulo de S , conforme Definição 1.5.3. Além disso, consideremos os seguintes subconjuntos de S :

$$[0]'_S = \{x \in S : \text{existe } F \in \mathcal{E}(R) \text{ tal que } Fx = 0\},$$

$$[0]''_S = \{x \in S : \text{existe } H \in \mathcal{E}(R) \text{ tal que } xH = 0\}.$$

Neste caso, é fácil ver que $[0]''_S = 0$ e que $[0]'_S = [0]_S = \{x \in S : x = \sum_{i=1}^n r_i X^i, \text{ com } r_i = (\bar{a}, 0, 0, \dots), \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}$.

2.2 Extensão Canônica de S

Sejam R um anel semiprimo e S uma extensão normalizante de R . Além disso, vamos supor que S satisfaz pelo menos uma das condições abaixo:

- (A) S é um R -bimódulo livre de torção, conforme Definição 1.5.6.
- (B) S possui um conjunto de geradores R -essencialmente normalizantes.

Denotemos por $(x_i)_{i \in \Omega}$ o conjunto de geradores normalizantes de S sobre R . No caso em que S satisfaz a condição (B) acima, podemos supor que este conjunto é formado por elementos R -essencialmente normalizantes. Além disso, vamos supor que existe $i_0 \in \Omega$ tal que $x_{i_0} = 1$.

Observação 2.2.1 Nesta seção S será uma extensão normalizante de um anel semiprimo R , satisfazendo pelo menos uma das condições anteriores.

Dados $N \subseteq P$ ideais de S , o fecho de N em P é definido como sendo o fecho de N como um submódulo de P , conforme a Definição 1.5.3. Além disso, N é dito fechado em P se $[N]_P = N$ e, N é denso em P se $[N]_P = P$.

Lema 2.2.2 *Se $N \subseteq P$ são ideais de S então $[N]_P$ é um ideal de S .*

Demonstração Primeiro vamos supor que S satisfaz a condição (A). Sejam $y \in [N]_P$ e x um gerador R -normalizante de S . Assim, temos que existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $yH \subseteq N$. Pelo Lema 1.5.10, segue que $Hx = xH'$ com $H' \in \mathcal{E}(R)$. Portanto, vemos que $xyH \subseteq xN \subseteq N$ e $yxH' = yHx \subseteq Nx \subseteq N$, donde $yx, xy \in [N]_P$. Isto junto com o Lema 1.5.4 implica que $[N]_P$ é um ideal de S .

Agora, suponhamos que S satisfaz a condição (B). Neste caso, sejam $y \in [N]_P$ e x um gerador R -essencialmente normalizante de S . Então existem $F, H \in \mathcal{E}(R)$ tais que $FyH \subseteq N$. Além disso, existem $F', H' \in \mathcal{E}(R)$ tais que $F'x \subseteq xF$ e $xH' \subseteq Hx$. Assim, segue que $F'xyH \subseteq xFyH \subseteq xN \subseteq N$ e $FyxH' \subseteq FyHx \subseteq Nx \subseteq N$. Portanto, $yx, xy \in [N]_P$ e então $[N]_P$ é um ideal de S . \diamond

Uma conseqüência imediata do Lema 1.5.8 é o seguinte:

Lema 2.2.3 *Sejam T e S extensões normalizantes de um anel semiprimo R , ambos satisfazendo a mesma condição ((A) ou (B)) e $\Phi : T \rightarrow S$ um epimorfismo de anéis tal que $\Phi|_R = id_R$. Se $N \subseteq P$ são ideais de S então $\Phi^{-1}([N]_P) = [\Phi^{-1}(N)]_{\Phi^{-1}(P)}$. Em particular, N é fechado em P se, e somente se, $\Phi^{-1}(N)$ é fechado em $\Phi^{-1}(P)$.*

Corolário 2.2.4 *Sejam T e S extensões normalizantes de um anel semiprimo*

rimo R , ambos satisfazendo a mesma condição ((A) ou (B)), $\Phi : T \rightarrow S$ um epimorfismo de anéis tal que $\Phi|_R = id_R$ e P um ideal de S . Então o lema anterior nos dá uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os ideais fechados em P e o conjunto de todos os ideais fechados em $\Phi^{-1}(P)$ que contêm $Ker\Phi$.

O resultado, a seguir, é uma consequência imediata do Lema 2.2.2.

Lema 2.2.5 *Seja S uma extensão R -essencialmente normalizante de um anel semiprimo R . Então o submódulo $T(S)$ de S , definido na Seção 1.5, é um ideal de S .*

Observação 2.2.6 No caso em que S é uma extensão R -normalizante de R , não conseguimos resposta para esta questão, ou seja, não sabemos se $T(S)$ é necessariamente um ideal de S .

O nosso objetivo é mostrar que S possui uma extensão, livre de torção, S^* , de acordo com a Definição 1.6.10. Se S satisfizer a condição (B), então trocamos S por $S/T(S)$ e, portanto podemos considerar S livre de torção sobre R nos dois casos.

Relembremos que S é uma extensão normalizante de um anel semiprimo R , satisfazendo uma das condições (A) ou (B) e o conjunto de geradores de S sobre R é indexado por Ω .

Consideremos $G = \{\alpha : \alpha \text{ é uma palavra cujas letras são elementos de } \Omega\}$. Então, é fácil ver que G é um semigrupo com produto definido por justaposição, ou seja, se $\alpha = i_1 i_2 \dots i_n$, $\beta = j_1 j_2 \dots j_m \in G$, onde $i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_m \in \Omega$, então $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = i_1 i_2 \dots i_n j_1 j_2 \dots j_m$. Além disso, o elemento neutro de G é a palavra vazia. Dado $\alpha \in G$, $\alpha = i_1 i_2 \dots i_n$, associamos a α um elemento de S , denotado por x_α , $x_\alpha = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$. Como cada x_{i_k} é R -normalizante, segue que x_α é R -normalizante, ou seja, $Rx_\alpha = x_\alpha R$. Se, por outro lado, S satisfaz a condição (B), então também é claro que cada x_α é R -essencialmente normalizante. Usando a mesma notação do Capítulo 1, sejam $A_\alpha = Ann_{R,r}(x_\alpha)$, $B_\alpha = Ann_{R,l}(x_\alpha)$ e ϕ_α o isomorfismo de anéis, $\phi_\alpha : R/B_\alpha \rightarrow R/A_\alpha$, dado por $\phi_\alpha(r + B_\alpha) = r' + A_\alpha$, onde $rx_\alpha = x_\alpha r'$.

Vamos considerar agora o R -módulo à direita $T = \sum_{\alpha \in G} \alpha R/A_\alpha$. É fácil ver que R age à esquerda sobre T pois, dado $r \in R$, definimos $r\alpha = (r + B_\alpha)\alpha = \alpha(r' + A_\alpha) = \alpha r'$, onde r' é um elemento de R tal que $rx_\alpha = x_\alpha r'$. Pelos resultados obtidos na Seção 1.6 temos que T é um bimódulo R -normalizante, livre de torção se S satisfizer a condição (A). Por outro lado, se S for um bimódulo R -essencialmente normalizante, livre de torção, segue que T é um bimódulo R -essencialmente normalizante, livre de torção. Além disso, se provarmos que T é um anel, é claro que T é uma extensão do anel R .

O nosso objetivo é mostrar que T tem uma estrutura de anel. Para isso, começamos definindo a multiplicação de monômios em T , da seguinte maneira: $\alpha r_\alpha \cdot \beta r_\beta = \alpha \beta r_\alpha^\beta r_\beta$, onde r_α^β é um elemento de R tal que $r_\alpha x_\beta = x_\beta r_\alpha^\beta$. É importante observar que, na definição acima, deveríamos ter tomado $r_\alpha \in R/A_\alpha$ e $r_\beta \in R/A_\beta$. Entretanto vamos provar, a seguir, que este produto está bem definido e ficará claro que podemos considerar $r_\alpha, r_\beta \in R$. Com isso, podemos definir o produto em T de maneira distributiva, pois T é uma soma direta.

Sejam $r \in A_\alpha$ e $\beta \in G$. Assim, temos que $0 = x_\alpha r x_\beta = x_\alpha \beta r^\beta$. Logo, $r^\beta \in \text{Ann}_{R,r}(x_\alpha \beta) = \text{Ann}_{R,r}(\alpha \beta)$. Logo, $\alpha r = 0$ implica $\alpha \beta r^\beta = 0$, para todo $\beta \in G$. Por outro lado, dado $r_\beta \in A_\beta$, temos que $r r_\beta \in A_\beta$, para todo $r \in R$, pois A_β é um ideal de R . Disto, segue que o produto de monômios em T está bem definido.

Agora provaremos que o produto em T , definido acima, é associativo. Para isto, consideremos $\alpha, \beta, \gamma \in G$ e $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma \in R$. Então, temos que $(\alpha r_\alpha) \cdot (\beta r_\beta \gamma r_\gamma) = (\alpha r_\alpha) \cdot (\beta \gamma r_\beta^\gamma r_\gamma) = \alpha \beta \gamma r_\alpha^{\beta \gamma} r_\beta^\gamma r_\gamma$. Por outro lado, vemos que $(\alpha r_\alpha \beta r_\beta) \cdot (\gamma r_\gamma) = (\alpha \beta r_\alpha^\beta r_\beta) \cdot (\gamma r_\gamma) = \alpha \beta \gamma (r_\alpha^\beta)^\gamma r_\beta^\gamma r_\gamma$. Mas, como $(x_\alpha r_\alpha) \cdot (x_\beta r_\beta x_\gamma r_\gamma) = (x_\alpha r_\alpha x_\beta r_\beta) \cdot (x_\gamma r_\gamma)$, segue que $r_\alpha^{\beta \gamma} r_\beta^\gamma r_\gamma - (r_\alpha^\beta)^\gamma r_\beta^\gamma r_\gamma \in \text{Ann}_{R,r}(x_\alpha \beta \gamma) = \text{Ann}_{R,r}(\alpha \beta \gamma)$. Logo, $(\alpha r_\alpha) \cdot (\beta r_\beta \gamma r_\gamma) = (\alpha r_\alpha \beta r_\beta) \cdot (\gamma r_\gamma)$, ou seja, o produto em T é associativo. Concluimos finalmente que T é um anel.

Também, podemos considerar $R \subseteq T$, via a aplicação $r \rightarrow r \cdot 1_T$. Além disso, pela maneira como T foi construído, temos que a aplicação $\Phi : T \rightarrow S$, dada por $\Phi(\alpha) = x_\alpha$ é um epimorfismo de anéis tal que $\Phi|_R = id_R$.

Pelo Corolário 2.2.4 segue que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os ideais fechados de S e o conjunto de todos os ideais fechados de T que contêm $\text{Ker}\Phi$.

Agora vamos definir uma extensão de T a um Q -bimódulo normalizante T^* , assim como foi feito na Seção 1.6. Voltemos a considerar $T = \sum_{\alpha \in G} \alpha R/A_\alpha$, ϕ_α o isomorfismo entre R/B_α e R/A_α associado a $\alpha \in G$, onde $A_\alpha = \text{Ann}_{R,r}(x_\alpha) = \text{Ann}_{R,r}(\alpha)$ e $B_\alpha = \text{Ann}_{R,l}(x_\alpha) = \text{Ann}_{R,l}(\alpha)$ são ideais fechados de R . Assim, segue que existem ideais fechados A_α^* e B_α^* de Q tais que $A_\alpha^* \cap R = A_\alpha$, $B_\alpha^* \cap R = B_\alpha$ e o isomorfismo ϕ_α pode ser estendido a um isomorfismo, ainda denotado por ϕ_α , entre Q/B_α^* e Q/A_α^* , conforme mostra o Corolário 1.3.6.

Seguindo as mesmas idéias da Seção 1.6, obtemos o bimódulo $T^* = \sum_{\alpha \in G} \alpha Q/A_\alpha^*$, denominado de extensão canônica de T a um bimódulo T^* sobre Q . Nesse caso, T^* é Q -normalizante (resp. Q -essencialmente normalizante) se T é R -normalizante (resp. R -essencialmente normalizante). Além disso, notemos que $\text{Ann}_{Q,r}(\alpha) = A_\alpha^*$ e $\text{Ann}_{Q,l}(\alpha) = B_\alpha^*$. Também podemos considerar $T \subseteq T^*$ e, pelo Lema 1.6.5, segue que T^* é livre de torção sobre R e, então também sobre Q .

Proposição 2.2.7 T^* é um anel.

Demonstração Novamente, para provar isto é suficiente que mostremos que o produto de monômios em T^* está bem definido e o restante segue da mesma maneira que na prova de que T é um anel. Sejam $q \in A_\alpha^*$ e $\beta \in G$. Assim, temos que existe $I \in \mathcal{E}(R)$ tal que $qI \subseteq A_\alpha$. Logo, $0 = \alpha q I \beta = \alpha \beta q^\beta I^\beta$. Como T^* é livre de torção sobre R , segue que $\alpha \beta q^\beta = 0$ e, portanto $q^\beta \in \text{Ann}_{Q,r}(\alpha \beta)$. Por outro lado, dado $q_\beta \in A_\beta^*$, temos que $q q_\beta \in A_\beta^*$, para todo $q \in Q$, pois A_β^* é um ideal de Q . Juntando estes dois fatos, segue que o produto de monômios em T^* está bem definido. Por conseguinte, T^* é um anel. \diamond

Voltemos agora a considerar o caso em que S é uma extensão R -essencialmente normalizante (resp. R -normalizante) de um anel semiprimo R . Além disso, sejam T a extensão R -essencialmente normalizante (resp. R -normalizante) de R e T^* a extensão canônica, Q -essencialmente normalizante (resp. Q -normalizante), de T , conforme construção acima. Seja $T_0^e = \{m \in T^* : Rm = mR \text{ e } m \text{ satisfaz a condição (E)}\}$ (resp. $T_0 = \{m \in T^* : Rm = mR\}$). Assim como os conjuntos Z e Z^e definidos na Seção 1.4, T_0 e T_0^e não são necessariamente anéis, pois possuem uma soma somente parcialmente definida. Entretanto, são fechados para a multiplicação.

Antes de continuar precisamos definir dois tipos de ideais em T_0 e em T_0^e . Todas estas considerações referentes a T_0 também são válidas para T_0^e .

Definição 2.2.8 Um subconjunto I de T_0 é dito um ideal de semigrupo de T_0 se, para quaisquer $a \in I$ e $t_0 \in T_0$, temos que $at_0 \in I$ e $t_0a \in I$.

Definição 2.2.9 Um subconjunto I de T_0 é dito um ideal saturado (ou simplesmente um ideal) de T_0 se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) Se $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ e a soma $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ está definida em T_0 , então $a_1 + a_2 + \dots + a_n \in I$.
- (ii) Se $a \in I$ e $t_0 \in T_0$, então $at_0 \in I$ e $t_0a \in I$.

É claro que podemos definir ideal à direita de T_0 . Mais precisamente, um subconjunto I de T_0 é dito um ideal à direita de T_0 se I satisfizer a condição (i) da Definição 2.2.9 e, se $a \in I$ e $t_0 \in T_0$, temos que $at_0 \in I$. Simetricamente podemos definir ideal à esquerda.

Dados A e B ideais saturados de T_0 , definimos o produto de A por B como sendo o conjunto $AB = \{\sum_{i=1}^n a_i b_i : a_i \in A, b_i \in B, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n, \text{ e } \sum_{i=1}^n a_i b_i \in T_0\}$. Com essa definição, é fácil ver que AB também será um ideal saturado de T_0 .

É importante observar que os anéis T , T^* , bem como os conjuntos T_0 e T_0^e

se enquadram no contexto do Teorema 1.8.3. Além disso, os ideais de T_0 e T_0^e são os ideais saturados, conforme Definição 2.2.9. Com isso, a correspondência biunívoca desse teorema no caso de anéis fica da seguinte forma:

Teorema 2.2.10 *Seja S uma extensão R -essencialmente normalizante de um anel semiprimo R . Além disso, sejam T a extensão R -essencialmente normalizante de R e T^* a extensão canônica, Q -essencialmente normalizante, de T , conforme construção feita anteriormente. Sejam I um R -submódulo, R -fechado de T , I^* um Q -submódulo, Q -fechado de T^* e I_0 um Z^e -submódulo, Z^e -fechado de T_0^e tais que $I = I^* \cap T$, $I^* = QI_0$ e $I_0 = I^* \cap T_0^e$, conforme o Teorema 1.8.3. Se qualquer um dos submódulos I , I^* ou I_0 é um ideal (resp. ideal à esquerda, ideal à direita) então os outros dois também o são. Além disso, o resultado continua válido se trocarmos essencialmente normalizante por normalizante, Z^e por Z e T_0^e por T_0 .*

Demonstração Primeiramente, suponhamos que I é um ideal de T . Se $x \in I^*$ então, pelo Corolário 1.6.15, existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $xH \subseteq I$. Dado $y \in T^*$, também existe $F \in \mathcal{E}(R)$ tal que $Fy \subseteq T$, donde $FyxH \subseteq TI = I$, ou seja, $yx \in I^*$. Logo, I^* é um ideal à esquerda de T^* . Simetricamente, I^* é um ideal à direita de T^* . Seja agora I^* um ideal de L^* . Dados $x \in I_0 \subseteq I^*$, $y \in T_0^e \subseteq T^*$, segue que $xy \in I^* \cap T_0^e$ e $yx \in I^* \cap T_0^e$. Logo, I_0 é um ideal saturado de T_0^e . Finalmente, suponhamos que I_0 é um ideal saturado de T_0^e . Como $I^* = QI_0 = I_0Q$, é claro que I^* é um ideal de L^* . Conseqüentemente, segue que $I = I^* \cap T$ é um ideal de T . \diamond

De acordo com a Definição 1.6.10 e o Teorema 1.6.11 é fácil ver que toda extensão R -normalizante, livre de torção, de um anel semiprimo R possui uma extensão canônica, livre de torção, conforme mostra o seguinte:

Teorema 2.2.11 *Toda extensão S que seja R -normalizante, livre de torção, de um anel semiprimo R possui uma extensão canônica, livre de torção (S^*, j) .*

Demonstração Usando a mesma notação anterior, consideremos o anel canônico, livre de torção T associado a S , $\Phi : T \rightarrow S$ o epimorfismo canônico e T^* a extensão canônica de T . Já que S é livre de torção sobre R , segue que $K = \text{Ker}\Phi$ é um ideal fechado de T . Então, usando o Teorema 1.8.3 e o Teorema 2.2.10, segue que existe um ideal K^* de T^* tal que $K^* \cap T = K$. Sejam $S^* = L^*/K^*$ e π a projeção canônica de T^* sobre S^* , isto é, $\pi : T^* \rightarrow T^*/K^* = S^*$. Dado $s \in S$, existe $y \in L \subseteq L^*$ tal que $\Phi(y) = s$. Seja $j(s) = \pi(y)$. Seguido as mesmas idéias da demonstração do Teorema 1.6.11, temos que $j : S \rightarrow S^*$ é um R -monomorfismo. O resto é claro. \diamond

O anel S^* construído acima é denominado extensão canônica, livre de torção do anel S .

Uma consequência importante do Lema 2.2.5 é o seguinte:

Teorema 2.2.12 *Toda extensão R -essencialmente normalizante de um anel semiprimo R possui uma extensão canônica livre de torção, que é Q -essencialmente normalizante.*

Demonstração Seja S uma extensão R -essencialmente normalizante do anel R . Então podemos considerar o anel S^* como sendo o anel associado ao anel livre de torção $S/T(S)$ e j a composição $S \rightarrow S/T(S) \rightarrow S^*$, da mesma maneira que na construção do Teorema 2.2.11. Também, neste caso, $S \subseteq S^*$ se, e somente se, S é livre de torção. \diamond

Voltemos a considerar S uma extensão normalizante de um anel semiprimo R , satisfazendo pelo menos uma das condições (A) ou (B). Então podemos enunciar um resultado semelhante ao Teorema 2.2.10 para o anel S , o anel S^* construído no Teorema 2.2.11 (resp. Teorema 2.2.12) e $S_0 = \{m \in S^* : Rm = mR\}$ (resp. $S_0^e = \{m \in S^* : Rm = mR \text{ e } m \text{ satisfaz a condição (E)}\}$). A demonstração é semelhante à do Teorema 2.2.10 e, portanto será omitida. Além disso, novamente os ideais de S_0 e S_0^e são ideais saturados, conforme Definição 2.2.9.

Teorema 2.2.13 *Seja S uma extensão R -normalizante de um anel semiprimo R , satisfazendo a condição (A) (resp. (B)). Sejam I um R -submódulo, R -fechado de S , I^* um Q -submódulo, Q -fechado de S^* e I_0 um Z -submódulo, Z -fechado de S_0 (resp. Z^e -submódulo, Z^e -fechado de S_0^e) tais que $I = I^* \cap S$ (resp. $I = j^{-1}(I^*)$), $I^* = QI_0$ e $I_0 = I^* \cap S_0$ (resp. $I_0 = I^* \cap S_0^e$), conforme o Teorema 1.8.3. Se qualquer um dos submódulos I , I^* ou I_0 é um ideal (resp. ideal à esquerda, ideal à direita) então os outros dois também o são.*

O nosso objetivo agora será mostrar que o teorema acima continua válido para extensões intermediárias. Antes disso, vamos mostrar que a correspondência biunívoca do Lema 1.5.7, no caso em que W e U são subanéis de S , preserva ideais fechados, ideais primos fechados e ideais semiprimos fechados.

Consideremos agora S uma extensão R -normalizante, livre de torção, de um anel semiprimo R . Sejam $W \subseteq U$ subanéis de S com W denso em U , isto é, $[W]_U = U$. Neste caso, é fácil ver que se I é um ideal de W então $[I]_U$ é um ideal de U . De fato, se $x \in [I]_U$ e $y \in U$ então existem $F, H \in \mathcal{E}(R)$ tais que $Fx \subseteq I$ e $yH \subseteq W$. Logo, segue que $FxyH \subseteq IW = I$ e, portanto $xy \in [I]_U$. Simetricamente, é possível mostrar que $yx \in [I]_U$. Como já sabemos que $[I]_U$ é um submódulo de U , temos que $[I]_U$ é um ideal de U . Temos então o seguinte:

Teorema 2.2.14 *Sejam $W \subseteq U$ subanéis de S tais que W é denso em U . Então a correspondência biunívoca do Lema 1.5.7 preserva ideais fechados, ideais primos fechados e ideais semiprimos fechados.*

Demonstração Sejam P um submódulo fechado de U e $P_0 = P \cap W$. Suponhamos que P_0 é um ideal de W . Se $x \in P$ e $y \in U$ então existem $F, H \in \mathcal{E}(R)$ tais que $xH \subseteq P_0$ e $Fy \subseteq W$. Então temos que $FyxH \subseteq WP_0 = P_0 \subseteq P$ e assim $yx \in P$, pois P é fechado. Simetricamente, $xy \in P$. Além disso, é claro que se P é um ideal de U então $P_0 = P \cap W$ é um ideal de W . Conseqüentemente, P é um ideal de U se, e somente se, P_0 é um ideal de W .

Agora, usando a mesma notação acima, suponhamos que P_0 é primo e que $AB \subseteq P$, onde A e B são ideais de U . Se $x \in [A]_U$ e $y \in [B]_U$ então existem $F, H \in \mathcal{E}(R)$ tais que $Fx \subseteq A$ e $yH \subseteq B$. Portanto, temos que $FxyH \subseteq AB \subseteq P$ e, como P é fechado, $xy \in P$. Assim, podemos supor que A e B são fechados. Logo, segue que $(A \cap W)(B \cap W) \subseteq P_0$ e, assim $(A \cap W) \subseteq P_0$ ou $(B \cap W) \subseteq P_0$, donde $A = [A]_U = [A \cap W]_U \subseteq [P \cap W]_U = P$ ou $B = [B]_U = [B \cap W]_U \subseteq [P \cap W]_U = P$. Portanto, P é primo.

Reciprocamente, suponhamos que P é primo e que A e B são ideais de W com $AB \subseteq P_0$. Como acima, temos que $[A]_U[B]_U \subseteq P$ e, assim $A = [A]_U \subseteq P$ ou $B = [B]_U \subseteq P$, donde $A \subseteq P \cap W = P_0$ ou $B \subseteq P \cap W = P_0$. Logo, P_0 é primo.

Para o caso semiprimo, basta tomar $A = B$ nas considerações feitas no caso primo. \diamond

Definição 2.2.15 *Um subanel W de S tal que $R \subseteq W$ é chamado uma extensão intermediária de R .*

Suponhamos que S é uma extensão R -normalizante, livre de torção, de R . Se W é uma extensão intermediária de R então é claro que $[W]_S$ também é. Pelo Teorema 1.8.3, temos que existem um Q -submódulo, Q -fechado W^* de S^* tal que $W^* \cap S = [W]_S$ e um Z -submódulo, Z -fechado W_0 de S_0 tal que $W_0 = W^* \cap S_0$ e $W^* = W_0Q$. Como $[W]_S$ é um subanel de S segue, como no Teorema 2.2.13 que W^* é um subanel de S^* e W_0 é um subanel de S_0 .

É importante observar que as considerações acima, bem como o teorema a seguir, continuam válidas no caso em que S é uma extensão R -essencialmente normalizante, livre de torção, de R , trocando-se Z por Z^e e S_0 por S_0^e . Também é importante observar que os ideais de S_0, S_0^e, W_0 são ideais saturados, conforme Definição 2.2.9. Além disso, um ideal saturado P de W_0 é dito um ideal primo se, dados A, B ideais saturados de W_0 , temos que $AB \subseteq P$ implica $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$. Da mesma forma podemos definir ideal semiprimo, tomando $A = B$.

Teorema 2.2.16 *Seja W extensão intermediária de R . Então a correspondência biunívoca do Corolário 1.8.4 nos dá uma correspondência biunívoca entre os seguintes conjuntos:*

(i) *O conjunto de todos os ideais R -fechados (resp. primos R -fechados, semiprimos R -fechados) de W .*

(ii) O conjunto de todos os ideais Q -fechados (resp. primos Q -fechados, semiprimos Q -fechados) de W^* .

(iii) O conjunto de todos os ideais saturados Z -fechados (resp. primos Z -fechados, semiprimos Z -fechados) de W_0 .

Demonstração Pelo Teorema 2.2.14 podemos supor, sem perda de generalidade, que W é fechado. Sejam P um submódulo fechado de W , P^* a extensão de P a W^* e $P_0 = P^* \cap W_0$. Usando argumentos similares aos usados no Teorema 2.2.10 segue que, quando um dos submódulos P , P^* ou P_0 é um ideal, então os outros dois também o são.

Agora, suponhamos que P é um ideal primo fechado de W e que A_0 e B_0 são ideais Z -fechados de W_0 com $A_0 B_0 \subseteq P_0$. Assim, segue que $(QA_0 \cap W)(QB_0 \cap W) \subseteq QA_0 B_0 \cap W \subseteq QP_0 \cap W \subseteq P^* \cap W = P$. Então $A = QA_0 \cap W \subseteq P = QP_0 \cap W$ ou $B = QB_0 \cap W \subseteq P = QP_0 \cap W$ e, portanto $A_0 = A^* \cap W_0 \subseteq P^* \cap W_0 = P_0$ ou $B_0 = B^* \cap W_0 \subseteq P^* \cap W_0 = P_0$. Logo, P_0 é primo.

Suponhamos agora que P_0 é um ideal primo Z -fechado de W_0 e que $A^* B^* \subseteq P^*$, onde A^* e B^* são ideais Q -fechados de W^* . Assim, segue que $(A^* \cap W_0)(B^* \cap W_0) \subseteq A^* B^* \cap W_0 \subseteq P^* \cap W_0 = P_0$ e, portanto $A_0 = A^* \cap W_0 \subseteq P_0$ ou $B_0 = B^* \cap W_0 \subseteq P_0$. Então temos que $A^* = QA_0 \subseteq QP_0 = P^*$ ou $B^* = QB_0 \subseteq QP_0 = P^*$. Logo, P^* é primo.

Finalmente, suponhamos que P^* é um ideal primo Q -fechado de W^* e que $AB \subseteq P$ com A, B ideais fechados de W . Dados $x \in A^*$ e $y \in B^*$ segue, pelo Corolário 1.6.15, que existem $F, H \in \mathcal{E}(R)$ tais que $Fx \subseteq A$ e $yH \subseteq B$. Por conseguinte, temos que $FxyH \subseteq AB \subseteq P \subseteq P^*$ e, portanto $xy \in P^*$. Logo, $A^* B^* \subseteq P^*$ e, como P^* é primo, segue que $A^* \subseteq P^*$ ou $B^* \subseteq P^*$. Assim, temos que $A = A^* \cap W \subseteq P^* \cap W = P$ ou $B = B^* \cap W \subseteq P^* \cap W = P$. Portanto, P é primo.

Para provar o caso semiprimo, basta tomar $A = B$, $A_0 = B_0$ e $A^* = B^*$ nas considerações feitas no caso primo. \diamond

É importante observar que a correspondência do teorema anterior preserva inclusões e interseções. O resultado abaixo é uma consequência do teorema anterior, e continua válido se fizermos $W = S$ e, portanto $W^* = S^*$ e $W_0 = S_0$.

Corolário 2.2.17 *Seja S uma extensão R -normalizante, livre de torção, de um anel semiprimo R . Se W é uma extensão intermediária de R , então são equivalentes:*

- (i) W é um anel primo (resp. semiprimo).
- (ii) W^* é um anel primo (resp. semiprimo).

(iii) W_0 é um anel primo (resp. semiprimo).

2.3 Apêndice: Algumas Considerações Sobre S_0

Neste apêndice estudaremos a estrutura do conjunto S_0 definido na Seção 2.2.

Sejam R um anel semiprimo e S uma extensão normalizante, livre de torção de R . Além disso, consideremos o anel S^* definido na Seção 2.2 e $S_0 = \{m \in S^* : Rm = mR\}$.

É fácil ver que S_0 é multiplicativamente fechado e, portanto S_0 , com a operação produto, possui uma estrutura de semigrupo. Entretanto, S_0 possui uma soma somente parcialmente definida.

É importante observar que os ideais de S_0, T_0, S_0^e, T_0^e e W_0 , que aparecem na Seção 2.2 são ideais saturados, conforme Definição 2.2.9, e fechados. Também é claro que todo ideal saturado de S_0 é um ideal de semigrupo de S_0 . Além disso, vale a seguinte:

Proposição 2.3.1 *Se I é um ideal de semigrupo de S_0 , então $IQ = QI$ é um ideal de S^* e $IQ \cap S_0$ é um ideal saturado de S_0 tal que $I \subseteq IQ \cap S_0$.*

Demonstração Sejam $y \in IQ, q \in Q$ e x um gerador R -normalizante do anel S^* . Então $y = \sum_{i=1}^n y_i q_i$, com $y_i \in I$ e $q_i \in Q$. Assim, segue que $yy \in IQ$ e, para cada $1 \leq i \leq n$, existe $q'_i \in Q$ tal que $qy_i = y_i q'_i$. Com isso, é claro que $qy = \sum_{i=1}^n qy_i q_i = \sum_{i=1}^n y_i q'_i q_i \in IQ$. Como $x \in S_0$ e I é um ideal de semigrupo de S_0 , temos que $y_i x, x y_i \in I$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo vemos que $xy = \sum_{i=1}^n x y_i q_i \in IQ$. Além disso, para cada $1 \leq i \leq n$, existe $q''_i \in Q$ tal que $q_i x = x q''_i$ e, portanto vemos que $yx = \sum_{i=1}^n y_i q_i x = \sum_{i=1}^n y_i x q''_i \in IQ$. Portanto IQ é um ideal de S^* . Além disso, como cada elemento de I é R -normalizante e, portanto Q -normalizante, segue que $IQ = QI$.

Agora vamos mostrar que $I_0 = IQ \cap S_0$ é um ideal saturado de S_0 . Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n \in I_0$ tais que $a_1 + a_2 + \dots + a_n \in S_0$. Como IQ é um ideal de S^* , segue que $a_1 + a_2 + \dots + a_n \in IQ$ e, portanto $a_1 + a_2 + \dots + a_n \in I_0$. Sejam $a \in I_0$ e $s \in S_0$. Então $as, sa \in S_0$ e, como IQ é um ideal de S^* , segue que $as, sa \in IQ$, donde $as, sa \in I_0$. \diamond

O resultado abaixo é uma conseqüência imediata de ([9], Lemma 7.1):

Proposição 2.3.2 *Um subconjunto I de S_0 é um ideal saturado de S_0 se, e somente se, existe um ideal I^* de S^* tal que $I = I^* \cap S_0$. Além disso, podemos tomar $I^* = IQ$.*

Das duas proposições anteriores segue o seguinte:

Corolário 2.3.3 *Se I é um ideal de semigrupo de S_0 , então $I_0 = IQ \cap S_0$*

é o único ideal saturado de S_0 tal que $I_0Q = IQ$.

Capítulo 3

Ideais Primos e Radicais

3.1 Tipos Especiais de Ideais Primos em Extensões Intermediárias

Neste capítulo, R é um anel primo e S é uma extensão normalizante, livre de torção de R . Neste caso, todo ideal não-nulo de R é essencial, ou seja, $\mathcal{E}(R)$ é o conjunto de todos os ideais não-nulos de R . Além disso, W é uma extensão intermediária de R , isto é, W é um subanel de S com $R \subseteq W$.

Definição 3.1.1 *Um ideal I de W é dito R -disjunto se $I \cap R = 0$.*

Os resultados desta seção são uma extensão daqueles obtidos em [6] para módulos centralizantes e extensões centralizantes de anéis. Além disso, algumas idéias e resultados estendem aqueles provados em [12] e [14].

Lema 3.1.2 *Se I é um ideal R -disjunto de W , então $[I]_W$ também é R -disjunto. Por outro lado, se $I \cap R \neq 0$, então $[I]_W = W$.*

Demonstração Seja I um ideal R -disjunto de W . Se $[I]_W \cap R \neq 0$, então existe $0 \neq x \in [I]_W \cap R$. Portanto, existem $F, H \in \mathcal{E}(R)$ tais que $0 \neq FxH \subseteq I \cap R$, o que dá uma contradição.

Seja agora I um ideal de W tal que $I \cap R \neq 0$. Neste caso, $I \cap R \in \mathcal{E}(R)$ e, dado $w \in W$, segue que $(I \cap R)w \subseteq I$ e isso prova que $[I]_W = W$. \diamond

Antes de prosseguirmos no estudo de extensões intermediárias, vamos obter um resultado importante referente a módulos sobre anéis primos, o qual será bastante útil.

Seja $M = \sum_{i \in \Omega} Rx_i$ um bimódulo R -normalizante, livre de torção, com conjunto de geradores R -normalizantes $X = (x_i)_{i \in \Omega}$. Pela Observação 1.6.3 todos os elementos geradores acima são livres sobre R . Conseqüentemente, pelo Lema de Zorn, existe um subconjunto $E = (x_j)_{j \in \Lambda}$ de X que é um subconjunto R -independente à direita maximal de X . Então é claro que E também é livre à esquerda. De fato, suponhamos que $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$, com $x_i \in E$ e $a_i \in R$. Assim, segue que $x_1a'_1 + \dots + x_na'_n = 0$, onde $a_ix_i = x_ia'_i$, para $1 \leq i \leq n$. Como E é livre à direita, segue que $a'_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. Além disso, pela Observação 1.6.3, nesse caso $a'_i = \phi_i(a_i)$ e cada ϕ_i é um automorfismo de R e, portanto $a_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. Denotemos

por N o submódulo livre (à direita e à esquerda) de M que tem E como base R -normalizante.

Lema 3.1.3 *Dado $y \in M$, existe um ideal não-nulo H de R tal que $yH \subseteq N$ e $Hy \subseteq N$. Além disso, se escolhermos uma representação de y como, por exemplo, $y = \sum_{i=1}^n b_i x_i$, $b_i \in R$, então podemos escolher o ideal H dependendo somente do conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.*

Demonstração Primeiramente, suponhamos que $x \in X$ e $x \notin E$. Pela maximalidade de E , temos que existem $x_1, \dots, x_t \in E$, tais que $\{x_1, \dots, x_t, x\}$ é linearmente dependente sobre R . Então existem $a_1, \dots, a_t, a \in R$, tais que $a_1 x_1 + \dots + a_t x_t + ax = 0$, com $a \neq 0$. Assim, segue que $RaRx \subseteq \sum_{i=1}^t Ra_i R x_i \subseteq N$, onde RaR é um ideal não-nulo de R . Simetricamente, podemos obter um ideal não-nulo de R da forma $Ra'R$, tal que $xRa'R \subseteq N$.

Agora, seja $y \in M$, $y = \sum_{i=1}^n b_i x_i$, com $b_i \in R$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_1, \dots, x_s \in E$ e $x_{s+1}, \dots, x_n \notin E$. Pelo argumento acima, podemos obter ideais não nulos H_j, H'_j de R , tais que $H_j x_j \subseteq N$ e $x_j H'_j \subseteq N$, para $j = s+1, \dots, n$. Portanto, o ideal $H = (\bigcap_{j=s+1}^n H_j) \cap (\bigcap_{j=s+1}^n H'_j)$ é tal que $Hy \subseteq N$ e $yH \subseteq N$. \diamond

O lema anterior mostra que o submódulo livre N é denso em M , ou seja, que $[N] = M$. Consideremos M^* a extensão canônica, livre de torção, do bimódulo M , conforme Teorema 1.6.11, e N^* o Q -submódulo de M^* correspondente ao submódulo livre e denso N de M . Então é claro que N^* é um bimódulo livre sobre Q , com base $E = (x_j)_{j \in \Lambda}$. Fixadas estas notações, temos a seguinte:

Proposição 3.1.4 *Se R é um anel primo e M é um bimódulo R -normalizante, então $M^* = N^*$ e, portanto M^* é livre sobre Q .*

Demonstração Seja $x \in M^*$. Pelo Corolário 1.6.15, temos que existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $xH \subseteq M$. Dado $h \in H$ segue, pelo Lema 3.1.3, que existe $H_h \in \mathcal{E}(R)$, tal que $xhH_h \subseteq N$. Usando novamente o Corolário 1.6.15, obtemos que $xh \in N^*$. Assim, segue que $xH \subseteq N^*$ e, então $x \in N^*$. Portanto, concluímos que $M^* = N^*$ e, conseqüentemente M^* é livre sobre Q . \diamond

Lema 3.1.5 *Sejam L um bimódulo livre, R -normalizante, com base $(v_i)_{i \in \Omega}$, formada por elementos R -normalizantes e P um submódulo fechado de L . Se K é um R -módulo à direita tal que $P \subset K \subseteq L$, então existe $0 \neq x \in K$ tal que $RxR \cap P = 0$.*

Demonstração Seja $x \in K \setminus P$ de suporte minimal $\Gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$. Isto significa que $x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, com $a_i \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$, e se $y \in K$ com $\text{supp}(y) \subset \Gamma$, então $y \in P$. Vamos mostrar que se $y \in P$ e $\text{supp}(y) \subseteq \Gamma$, então $y = 0$. Seja $0 \neq y \in P$ com $\text{supp}(y) \subseteq \Gamma$. Então

segue que $y = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_tv_t$ com $t \leq n$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $b_1 \neq 0$. Dado $r \in R$, temos que existem $b'_1, r_1 \in R$, tais que $b'_1 \neq 0$, $v_1b'_1 = b_1v_1$ e $v_1r = r_1v_1$. Portanto, $xrb'_1 - a_1r_1y \in K$ e $\text{supp}(xrb'_1 - a_1r_1y) \subset \Gamma$, donde $xrb'_1 - a_1r_1y \in P$. Assim, temos que $xRb'_1R \subseteq P$ e, como P é fechado, segue que $x \in P$, o que dá uma contradição. Logo $y = 0$. Finalmente, temos que é claro que $RxR \cap P = 0$, pois se $z \in RxR \cap P$ então $\text{supp}(z) \subseteq \Gamma$ e $z \in P$, donde $z = 0$. \diamond

Corolário 3.1.6 *Sejam M um bimódulo R -normalizante, livre de torção, e P um submódulo fechado de M . Se K é um R -módulo à direita tal que $P \subset K \subseteq M$, então existe $0 \neq x \in K$ tal que $RxR \cap P = 0$.*

Demonstração Pela Observação 1.6.3 segue que existe um bimódulo L que é R -normalizante, livre sobre R , e um epimorfismo de R -módulos $\Phi : L \rightarrow M$. Então $\Phi^{-1}(P) \subset \Phi^{-1}(K)$ e, pelo Lema 1.5.8, segue que $\Phi^{-1}(P)$ é fechado. Usando o Lema 3.1.5, temos que existe $0 \neq y \in \Phi^{-1}(K)$ tal que $RyR \cap \Phi^{-1}(P) = 0$. Portanto, $x = \Phi(y)$ é tal que $0 \neq x \in K$ e $RxR \cap P = 0$. \diamond

Proposição 3.1.7 *Sejam R um anel primo e S uma extensão normalizante, livre de torção de R . Além disso, suponhamos W uma extensão intermediária de R e P um ideal de W que é maximal com respeito a $P \cap R = 0$. Então P é um ideal primo fechado de W .*

Demonstração Primeiramente, vamos mostrar que P é primo. Sejam A e B ideais de W tais que $AB \subseteq P$, $A \supset P$ e $B \supset P$. Pela maximalidade de P , segue que $A \cap R \neq 0$ e $B \cap R \neq 0$ e então $(A \cap R)(B \cap R) \neq 0$, pois R é primo. Entretanto, $0 \neq (A \cap R)(B \cap R) \subseteq AB \cap R \subseteq P \cap R = 0$, o que dá uma contradição. Logo P é um ideal primo de W .

Como $P \cap R = 0$ segue, pelo Lema 3.1.2, que $[P] \cap R = 0$. Portanto, a maximalidade de P garante que $P = [P]$, ou seja, P é fechado. \diamond

O nosso objetivo agora é obter relações entre o anel R e certos tipos especiais de ideais primos de uma extensão intermediária W .

Daqui por diante, a menos de menção contrária, R é um anel primo e S é uma extensão normalizante, livre de torção de R , com conjunto de geradores R -normalizantes $(x_i)_{i \in \Omega}$.

Teorema 3.1.8 *Sejam R um anel fortemente primo (à direita) e P um ideal de uma extensão intermediária W que é maximal com respeito a $P \cap R = 0$. Então P é um ideal fortemente primo (à direita) de W .*

Demonstração Seja I um ideal de W com $I \supset P$. Então, pela maximalidade de P , segue que $I \cap R \neq 0$ e, assim existe um conjunto finito $F \subseteq I \cap R$

tal que $Fa = 0$, com $a \in R$, implica $a = 0$. Vamos mostrar que F é um isolador em W/P . Seja $K = \{y \in W : Fy \subseteq P\}$. Então K é um ideal à direita de W contendo P . Em particular, K é um R -submódulo à direita de W . Suponhamos que $K \supset P$. Pela Proposição 3.1.7 segue que P é fechado e, usando o Corolário 3.1.6, temos que existe $0 \neq x \in K$ tal que $RxR \cap P = 0$. Além disso, pelo Lema 3.1.3, segue que existe um ideal não-nulo H de R tal que $xH \subseteq N$, onde N é um submódulo livre de S . Assim, vemos que $FxH \subseteq N \cap P$ e então $FxH = 0$. Dado $h \in H$, temos que $xh \in N$ e $xh = \sum_{j=1}^n a_j x_j$, onde $(x_j)_{j \in \Lambda}$ é uma base de N . Portanto, $0 = Fxh = \sum_{j=1}^n F a_j x_j$, donde $F a_j = 0$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Logo $a_j = 0$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ e, portanto $xH = 0$, donde $x = 0$, o que dá uma contradição. Logo, $K = P$ e P é fortemente primo (à direita). \diamond

Proposição 3.1.9 *Seja S uma extensão fortemente normalizante, livre de torção de R . Suponhamos que P é um ideal fortemente primo (à direita), R -disjunto, de uma extensão intermediária W de R . Então R é um anel fortemente primo (à direita) e P é fechado.*

Demonstração Seja H um ideal não-nulo de R . Então WHW é um ideal não-nulo de W e $WHW \not\subseteq P$. Logo existe um conjunto finito $F \subseteq WHW$ tal que $Fx \subseteq P$, com $x \in W$, implica $x \in P$. Além disso, todo $y_j \in F \subseteq WHW \subseteq S$ pode ser escrito na forma $y_j = \sum_i x_i a_{ij}$, para alguns elementos $a_{ij} \in H$, pois S é uma extensão fortemente normalizante de R . Deste modo, $\{a_{ij}\} \subseteq H$ é um isolador (à direita) de R e, portanto R é um anel fortemente primo (à direita).

Agora, suponhamos que $[P]_W \supset P$. Então existe um conjunto finito $F \subseteq [P]$ tal que $Fx \subseteq P$, com $x \in W$, implica $x \in P$. Entretanto, já que F é finito, existe $H \in \mathcal{E}(R)$ com $FH \subseteq P$ e $H \not\subseteq P$. De fato, para cada $b_i \in F \subseteq [P]$ existe $H_i \in \mathcal{E}(R)$ tal que $b_i H_i \subseteq P$ e $H_i \not\subseteq P$, pois $P \cap R = 0$. Então $H = \bigcap H_i$ satisfaz as condições acima. Mas isso dá uma contradição. Logo P é fechado. \diamond

É importante observarmos que não sabemos se o resultado acima continua válido no caso normalizante ou mesmo no caso essencialmente normalizante. Vamos mostrar agora que podemos obter os mesmos resultados para ideais primos não-singulares. No teorema abaixo S é uma extensão normalizante livre de torção de R .

Teorema 3.1.10 *Sejam R um anel primo não-singular e P um ideal de uma extensão intermediária W que é maximal com respeito a $P \cap R = 0$. Então P é um ideal primo não-singular.*

Demonstração Suponhamos, por contradição, que $Z(W/P) = I/P \neq 0$, onde I é um ideal de W . Então, pela maximalidade de P , segue que $I \cap R \neq$

0. Seja $0 \neq a \in I \cap R$. Vamos chegar a uma contradição, mostrando que $a \in Z(R) = 0$. Seja J um ideal à direita não-nulo de R . Já que $(JW + P)/P$ é um ideal à direita não-nulo de W/P temos que existe $x \in JW \setminus P$ tal que $ax \in P$, pois $\text{Ann}_{W/P,r}(a + P)$ é um ideal essencial à direita de W/P . Seja $K = \{y \in JW + P : ay \in P\}$. Então K é um ideal à direita de W com $P \subset K$. Em particular, K é um R -submódulo à direita de W . Pela Proposição 3.1.7 segue que P é fechado e, usando o Corolário 3.1.6, temos que existe $0 \neq y \in K$ tal que $RyR \cap P = 0$. Então $y = \sum_{i=1}^n a_i w_i + p$, com $a_i \in J$ e $w_i \in W$, para $i = 1, \dots, n$, e $p \in P$. Logo temos que $ay = \sum_{i=1}^n aa_i w_i + ap \in P$, donde $\sum_{i=1}^n aa_i w_i \in P$ e, portanto $x = \sum_{i=1}^n a_i w_i \in K$. Além disso, $RxR \cap P = 0$. Pelo Lema 3.1.3, existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $w_i H \subseteq N$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, onde N é um submódulo livre de S com base R -normalizante $E = (x_j)_{j \in \Lambda}$. Assim, vemos que $axH \subseteq P \cap RxR = 0$, donde $axH = 0$. Além disso, existe $h \in H$ tal que $xh \neq 0$. Logo, temos que $xh = \sum_{j=1}^m b_j x_j$ com $b_j \in J$ e $x_j \in E$ para $j = 1, \dots, m$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $b_1 \neq 0$. Como $axh = 0$ segue que $ab_1 = 0$, donde $\text{Ann}_{R,r}(a) \cap J \neq 0$ e, portanto $a \in Z(R) = 0$, o que dá uma contradição. \diamond

Proposição 3.1.11 *Seja S uma extensão fortemente normalizante, livre de torção de R . Se P é um ideal primo não-singular fechado, R -disjunto, de uma extensão intermediária W , então R é um anel primo não-singular.*

Demonstração Sejam A e B ideais de R tais que $AB = 0$. Então, já que S é uma extensão fortemente normalizante de R , temos que $AWBW \subseteq ABS = 0 \subseteq P$ e assim $AW \subseteq P$ ou $BW \subseteq P$. Como $P \cap R = 0$ segue que $A = 0$ ou $B = 0$. Logo R é primo. Agora, suponhamos que existe $0 \neq a \in Z(R)$. Seja K um ideal à direita de W com $K \supset P$. Seja N um submódulo livre e denso de S com base R -normalizante $E = (x_j)_{j \in \Lambda}$. Então é fácil ver que $K' = K \cap N$ é um R -módulo à direita de N , $P \cap N$ é um submódulo fechado de N e $K \cap N \supset P \cap N$. Pelo Lema 3.1.5, existe $0 \neq x \in K' \setminus (P \cap N)$ de suporte minimal $\Gamma = \{x_1, \dots, x_n\}$. Consideremos o conjunto $\Theta_{\Gamma, x_1}(K') = \{b \in R : \text{existe } y \in K' \text{ tal que } y = \sum_{j=1}^n y_j x_j \text{ e } y_1 = b\}$. Então $\Theta_{\Gamma, x_1}(K')$ é um ideal à direita não-nulo do anel R . Portanto, existe $0 \neq b_1 \in \Theta_{\Gamma, x_1}(K')$ tal que $ab_1 = 0$. Assim, existe $0 \neq y \in K'$ tal que $y = \sum_{j=1}^n y_j x_j$, $y_1 = b_1$ e $ab_1 = 0$. Suponhamos que $ay = ay_s x_s + \dots + ay_n x_n$, onde $ay_s \neq 0$. Já que $y_s R \neq 0$ segue que existe $b \in R$ tal que $y_s b \neq 0$ e $ay_s b = 0$. Deste modo $y b' \in K'$ e $ay b' = ay_{s+1} b_{s+1} x_{s+1} + \dots + ay_n b_n x_n$, onde $x_s b' = b x_s$ e $x_i b' = b_i x_i$, para $s+1 \leq i \leq n$. Repetindo este argumento obtemos um elemento $z \in K'$ com $\text{supp}(z) = \text{supp}(y)$ e $az = 0$. Assim, segue que $\text{Ann}_{W/P,r}(a + P) \cap (K/P) \neq 0$. Conseqüentemente, $a + P \in Z(W/P) = 0$, donde $a \in P \cap R = 0$, o que dá uma contradição. Logo $Z(R) = 0$ e, então R é um anel primo não-singular (à direita). \diamond

Novamente, não sabemos afirmar se o resultado acima, bem como o corolário abaixo, continua válido no caso normalizante ou no caso essencialmente normalizante. Resumimos os resultados obtidos anteriormente no seguinte:

Corolário 3.1.12 *Sejam R um anel primo, S uma extensão fortemente normalizante, livre de torção de R e W uma extensão intermediária de R . Então temos que R é um anel fortemente primo (resp. primo não-singular) à direita se, e somente se, todo ideal P de W que é maximal com respeito a $P \cap R = 0$ é um ideal fortemente primo (resp. primo não-singular) à direita de W .*

Na verdade, se tomarmos $W = S$ e se S for livre sobre R , obtemos o seguinte:

Corolário 3.1.13 *Sejam R um anel qualquer, I um ideal primo de R , e S uma extensão fortemente normalizante livre de R . Então temos que I é um ideal fortemente primo (resp. primo não-singular) à direita de R se, e somente se, todo ideal P de S que é maximal com respeito a $P \cap R = I$ é um ideal fortemente primo (resp. primo não-singular) à direita de S .*

Demonstração É importante observarmos que, se S é uma extensão fortemente normalizante do anel R e I é um ideal de R , então $IS = SI$ é um ideal de S . Com isso, o resultado segue do Corolário 3.1.12, se considerarmos o anel S/IS como sendo uma extensão fortemente normalizante, livre de torção, do anel primo R/I . \diamond

O nosso objetivo agora é obter uma relação entre S , S^* e S_0 , onde S^* e S_0 são definidos na Seção 2.2, no que diz respeito à condição "fortemente primo". Dizemos que S_0 é fortemente primo à direita se todo ideal saturado não-nulo de S_0 contém um isolador à direita. Além disso, fortemente primo significa fortemente primo à direita.

Antes de enunciarmos o resultado, precisamos provar um relativo aos ideais saturados de S_0 , no caso em que R é primo.

Lema 3.1.14 *Se R é um anel primo e S é uma extensão normalizante livre de torção de R , então todos os Z -submódulos de S_0 são fechados.*

Demonstração Como R é primo, temos que todos os elementos não-nulos de $Z = \{q \in Q : Rq = qR\}$ são invertíveis. Com isso, é fácil ver que todo Z -submódulo P_0 de S_0 é fechado. De fato, dado $x \in [P_0]$, pela Definição 1.7.6, temos que existe $F \in \mathcal{E}(Z)$ tal que $xF \subseteq P_0$. Em particular, existe $0 \neq z \in F$ tal que $xz \in P_0$ e então $x = xzz^{-1} \in P_0z^{-1} \subseteq P_0$. \diamond

Proposição 3.1.15 *Sejam R um anel primo e S uma extensão fortemente*

normalizante, livre de torção de R . Então são equivalentes:

- (i) S é fortemente primo.
- (ii) R e S^* são fortemente primos.
- (iii) R e S_0 são fortemente primos.

Demonstração (i) \rightarrow (iii): Suponhamos que S é fortemente primo. Pela Proposição 3.1.9, segue que R é fortemente primo. Seja I_0 um ideal saturado não-nulo de S_0 . Então temos que $I = QI_0 \cap S$ é um ideal não-nulo de S e, portanto existe um conjunto finito $F = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq I$ tal que $\text{Ann}_{S,r}(F) = 0$. Para cada $1 \leq i \leq n$, existem $q_{ij} \in Q$, $m_{ij} \in I_0$, tais que $y_i = \sum_j q_{ij}m_{ij}$. Vamos mostrar que $F_0 = \{m_{ij}\} \subseteq I_0$ é um isolador de S_0 . De fato, suponhamos que $F_0s_0 = 0$, para algum $s_0 \in S_0$. Então $Fs_0 = 0$ e existe um ideal não-nulo H de R tal que $s_0H \subseteq S$. Portanto, $Fs_0H = 0$ e isto implica que $s_0H = 0$, donde $s_0 = 0$, pois $s_0 \in S_0 \subseteq S^*$ e S^* é livre de torção como R -módulo à direita.

(iii) \rightarrow (ii): Seja I um ideal não-nulo de S^* . Então temos que $I_0 = [I] \cap S_0$ é um ideal saturado não-nulo de S_0 e, portanto existe um conjunto finito $F = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq I_0$ tal que $\text{Ann}_{S_0,r}(F) = 0$. Logo, existe um ideal não-nulo H de Q tal que $HF \subseteq I$. Como R é fortemente primo, segue que Q também é e, portanto existe um conjunto finito $F' \subseteq H$ tal que $\text{Ann}_{Q,r}(F') = 0$. Vamos mostrar que $F'F$ é um isolador de S^* . De fato, suponhamos que $F'Fs^* = 0$, para algum $s^* \in S^*$. Pela Proposição 3.1.4, temos que S^* é livre sobre Q e, assim segue que $Fs^* = 0$ e, portanto $A = \text{Ann}_{S^*,r}(F'F) = \text{Ann}_{S^*,r}(F)$. Então A é um Q -submódulo e ideal à direita de S^* . De fato, sejam $x \in A$ e $q \in Q$. Para cada $y_i \in F \subseteq S_0$, existe $q_i \in Q$ tal que $y_iq = q_iy_i$. Logo, temos que $q_iy_ix = 0$ e, portanto $y_iqx = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. Assim, segue que $qx \in A$. Além disso, é claro que $xq \in A$ e que A é um ideal à direita de S^* . Por conseguinte, existe um ideal à direita A_0 de S_0 tal que $A_0Q = [A]$. Dado $y \in A_0$, temos que existe um ideal não-nulo J de Q tal que $yJ \subseteq A$. Assim, segue que $FyJ = 0$, donde $Fy = 0$ e, portanto $y = 0$. Logo, $A_0 = 0$, donde $A = 0$.

(ii) \rightarrow (i): Seja I um ideal não-nulo de S . Então segue que $[I] = I^* \cap S$, para algum ideal não-nulo, Q -fechado I^* de S^* . Assim, temos que existe um conjunto finito $F \subseteq I^*$ tal que $\text{Ann}_{S^*,r}(F) = 0$. Portanto, existe um ideal não-nulo H de R tal que $FH \subseteq I$. Como R é fortemente primo, segue que existe um conjunto finito $F' \subseteq H$ tal que $\text{Ann}_{R,r}(F') = 0$. Vamos mostrar que $FF' \subseteq I$ é um isolador de S . De fato, suponhamos que $FF's = 0$, para algum $s \in S$. Como $F's \subseteq S^*$, segue que $F's = 0$. Além disso, como S^* é livre sobre Q , isto implica que $s = 0$. \diamond

É importante observar que, na proposição anterior, valem as implicações

(iii) \rightarrow (ii) \rightarrow (i), no caso em que S é uma extensão normalizante, livre de torção, de R . Entretanto, não sabemos se as implicações contrárias continuam válidas no caso normalizante ou mesmo no caso essencialmente normalizante.

3.2 O Radical Primo

Nesta seção relacionamos os radicais primos de S , S^* e S_0 . Estes resultados estendem aqueles obtidos em [8] e [14], referentes a extensões centralizantes de anéis.

É importante observar que, apesar de S_0 não ser necessariamente um anel, definimos o radical primo de S_0 , assim como na Definição 1.2.11. Para ser mais preciso, definimos o radical primo de S_0 como sendo a interseção de todos os ideais saturados primos de S_0 , o qual será denotado por $\beta(S_0)$. Começamos com a seguinte:

Proposição 3.2.1 *Sejam R um anel semiprimo e S uma extensão normalizante, livre de torção de R . Com a mesma notação do Capítulo 2, temos que $Q\beta(S_0) \subseteq \beta(S^*)$ e $\beta(S^*) \cap S \subseteq \beta(S)$.*

Demonstração Se P^* é um ideal primo de S^* , então $P^* \cap S_0$ é um ideal saturado primo de S_0 . De fato, suponhamos que A_0 e B_0 são ideais saturados de S_0 tais que $A_0B_0 \subseteq P^* \cap S_0$. Então $QA_0QB_0 \subseteq Q^2A_0B_0 \subseteq Q(P^* \cap S_0) \subseteq P^*$, donde $QA_0 \subseteq P^*$ ou $QB_0 \subseteq P^*$. Portanto, $A_0 \subseteq P^* \cap S_0$ ou $B_0 \subseteq P^* \cap S_0$. Logo $P^* \cap S_0$ é um ideal saturado primo de S_0 . Com isso, temos que, para cada ideal primo P^* de S^* , existe um ideal saturado primo P_0 de S_0 tal que $P_0 \subseteq P^*$. Portanto, $\beta(S_0) \subseteq \beta(S^*)$, donde $Q\beta(S_0) \subseteq \beta(S^*)$. Com isso segue a primeira afirmação. Além disso, a inclusão $\beta(S^*) \cap S \subseteq \beta(S)$ é sempre válida. \diamond

Proposição 3.2.2 *Sob as mesmas condições da proposição anterior, se $\beta(S_0)$ é fechado, então $Q\beta(S_0) = \beta(S^*)$ e $\beta(S) = Q\beta(S_0) \cap S$. Por outro lado, se $\beta(S^*)$ é fechado, então $\beta(S) = \beta(S^*) \cap S$.*

Demonstração Pela proposição anterior, $I = Q\beta(S_0) \subseteq \beta(S^*)$. Além disso, já que $\beta(S_0)$ é um ideal saturado semiprimo fechado de S_0 , usando o Teorema 2.2.16, segue que I é um ideal semiprimo fechado de S^* . Logo, $Q\beta(S_0) = \beta(S^*)$.

Seja, agora $J = Q\beta(S_0) \cap S = \beta(S^*) \cap S \subseteq \beta(S)$. Como $\beta(S_0)$ é fechado segue, pelo Teorema 2.2.16, que J é um ideal semiprimo fechado de S . Logo, $Q\beta(S_0) \cap S = \beta(S)$.

Agora, suponhamos que $\beta(S^*)$ é fechado. Então, pelo Teorema 2.2.16,

temos que $\beta(S^*) \cap S$ é fechado e semiprimo. Portanto, $\beta(S) \subseteq \beta(S^*) \cap S$. O resultado segue da proposição anterior. \diamond

Como consequência imediata da proposição anterior, temos o seguinte:

Corolário 3.2.3 *Sejam R um anel semiprimo e S uma extensão normalizante, livre de torção de R . Se $\beta(S_0)$ é fechado, então $\beta(S^*)$ e $\beta(S)$ também são fechados. Além disso, se $\beta(S^*)$ é fechado, então $\beta(S)$ também é fechado. No caso em que R é primo temos, pelo Lema 3.1.14, que todos os ideais saturados de S_0 são fechados e, nesse caso, $\beta(S_0)$, $\beta(S^*)$ e $\beta(S)$ são todos fechados.*

Uma consequência importante da Corolário 3.2.3 é o seguinte:

Corolário 3.2.4 *Sejam R um anel semiprimo e S uma extensão essencialmente normalizante de R , com $\text{Ker } j \subseteq \beta(S)$. Se $\beta(S_0)$ é fechado, então $\beta(S) = j^{-1}(Q\beta(S_0))$, onde $j : S \rightarrow S^*$ é a aplicação canônica. Em particular, neste caso, $\beta(S)$ é a interseção de ideais primos R -disjuntos de S .*

Novamente, não sabemos afirmar se o resultado acima continua válido no caso normalizante.

3.3 O Radical de Jacobson

Nesta seção estendemos os resultados obtidos em [11], referentes a extensões centralizantes de anéis. Além disso, algumas idéias e resultados são baseados em [6] e [14].

Sejam R um anel primo e S uma extensão normalizante livre de R , com base R -normalizante $X = (x_i)_{i \in \Omega}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $i_0 \in \Omega$ tal que $x_{i_0} = 1$. Além disso, sejam S^* o anel construído na Seção 2.2 e $S_0 = \{m \in S^* : Rm = mR\}$.

Relembramos o Lema 3.1.14, onde provamos que, se R é primo e S é uma extensão normalizante livre de torção de R , então todo Z -submódulo de S_0 é fechado. Um outro resultado importante referente a Z -módulos é o seguinte:

Lema 3.3.1 *Se H_0 é um Z -módulo à direita (ou à esquerda) de S_0 , então H_0 é um Z -bimódulo.*

Demonstração Suponhamos, sem perda de generalidade, que H_0 é um Z -módulo à direita de S_0 . Dado $0 \neq h \in H_0$ e $z \in Z$, segue que $h = \sum_{i=1}^n x_i q_i$, com $q_i \in Z$, para todo $1 \leq i \leq n$. Então temos que $zh = hq$ com $q \in Q$. Assim, vemos que $zh = hq = \sum_{i=1}^n x_i q_i q \in S_0$. Por conseguinte, $q_i q \in Z$, para todo

$1 \leq i \leq n$. Como R é primo segue que q_i é invertível e, então $q = q_i^{-1}q_iq \in Z$. Logo $zh = hq \in H_0$ e, portanto H_0 é um Z -bimódulo. \diamond

Também é claro que, se P é um R -submódulo fechado de S que é um ideal à direita e $P \neq S$ então P é R -disjunto. De fato, se $P \cap R \neq 0$ então $P \cap R$ é um ideal de R e $[P] = S$.

Consideremos agora P um ideal de S , $P \neq S$, R -fechado e, conseqüentemente R -disjunto, P_0 e P^* os ideais correspondentes a P , dados pelo Teorema 2.2.13.

É importante observarmos que, apesar de S_0 não ser necessariamente um anel, dizemos que um ideal saturado P_0 de S_0 é primitivo à direita se existir um ideal saturado maximal à direita H_0 de S_0 tal que $(H_0 : S_0) = \{x \in S_0 : S_0x \subseteq H_0\} = P_0$. Nesse caso, é fácil ver que P_0 é o maior ideal saturado bilateral de S_0 contido em H_0 .

Observamos que primitivo significará primitivo à direita. Além disso, um ideal R -disjunto I de S é dito um ideal quase-primitivo (à direita) de S se existir um R - S -bimódulo L de S que é maximal com respeito a $L \cap R = 0$ tal que $(L : S) = I$. Com isso estamos em condições de provar alguns resultados referentes à primitividade. Começamos pelo seguinte:

Lema 3.3.2 *Se P_0 (resp. P^*) é um ideal primitivo à direita de S_0 (resp. S^*), então P é um ideal quase-primitivo (à direita) de S .*

Demonstração Primeiramente suponhamos que P_0 é um ideal primitivo à direita de S_0 . Seja H_0 um ideal saturado maximal à direita de S_0 tal que $(H_0 : S_0) = P_0$. Pelo Lema 3.3.1 segue que H_0 é um Z -bimódulo e também é Z -fechado, como foi observado anteriormente. Então existe, pelo Teorema 1.8.3, um Q -submódulo fechado H^* de S^* tal que $H^* \cap S_0 = H_0$. Já que H_0 é um ideal saturado à direita então H^* também o é. Assim, segue que $H = H^* \cap S$ é um R -submódulo fechado de S e é também um ideal à direita de S . Notemos que $H \cap R = 0$ e seja ${}_R N_S \supseteq H$ maximal com respeito a $N \cap R = 0$. Se $[N] \cap R \neq 0$, então $[N] = S$, como foi observado anteriormente. Por conseguinte, teríamos que, dado $0 \neq r \in R$, existe um ideal não-nulo F de R tal que $rF \subseteq N$, donde $N \cap R \supseteq N \cap rF \neq 0$, o que dá uma contradição. Logo $[N] \cap R = 0$ e, pela maximalidade de N , temos que $[N] = N$, ou seja, N é fechado. Conseqüentemente existe um ideal saturado à direita N_0 de S_0 correspondente a N . Já que $N_0 \supseteq H_0$, pela maximalidade de H_0 , obtemos $N_0 = H_0$ e assim $N = H$. Deste modo, H é fechado e maximal com respeito a $H \cap R = 0$.

Se $x \in [(H : S)]$, então $xF \subseteq (H : S)$, para algum ideal não-nulo F de R . Logo $SxF \subseteq H$ e, já que H é fechado temos que $Sx \subseteq H$, ou seja, $x \in (H : S)$ e, portanto $(H : S)$ é fechado. Além disso, $P \subseteq (H : S) \subseteq H$, pois P é um ideal contido em H e $(H : S)$ é o maior ideal bilateral de S contido em H .

Usando novamente a correspondência biunívoca do Teorema 2.2.13 temos que $P_0 \subseteq (H : S)_0 \subseteq H_0$ e, portanto $P_0 = (H : S)_0$. Assim, segue que $P = (H : S)$ e a prova está completa, no caso em que P_0 é primitivo.

Agora, suponhamos que P^* é um ideal primitivo de S^* . Seja H^* um ideal maximal à direita de S^* tal que $(H^* : S^*) = P^*$. Então $H_0 = H^* \cap S_0$ é um ideal saturado maximal à direita fechado de S_0 e $P_0 = (H_0 : S_0)$. Mas isto significa que P_0 é primitivo. Portanto, segue pela primeira parte que P é um ideal quase-primitivo à direita de S . \diamond

Dado um ideal à direita J de R , definimos $JX = \{\sum r_i x_i : r_i \in J, x_i \in X\}$. Neste caso é fácil ver que JX é um ideal à direita de S . Além disso, se J for um ideal bilateral de R e se S for uma extensão fortemente normalizante de R , então JX será um ideal bilateral de S .

Lema 3.3.3 *Se J é um ideal maximal à direita de R com $(J : R) = 0$ e I é um R -submódulo de S tal que $I \cap R = 0$, então $(JX + I) \cap R = J$.*

Demonstração Se $I = 0$, então o resultado é óbvio. Assim, podemos supor que $I \neq 0$ e, por contradição, que $(JX + I) \cap R = R$. Então existem $a_i \in J, x_i \in X$, para $i = 0, 1, \dots, n$, $y \in I$ com $1 = \sum_{i=0}^n a_i x_i + y$, onde podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_0 = 1$. Com isso, $y = (1 - a_0) - \sum_{i=1}^n a_i x_i \in I$. Deste modo, podemos escolher $y = b_0 + \sum_{i=1}^t b_i x_i \in I$ tal que $b_0 \notin J, b_i \in J$ para $i = 1, \dots, t$ e t é minimal. Seja Γ um suporte minimal em $I, \Gamma \subseteq \{x_0, x_1, \dots, x_t\}$. Já que $I \cap R = 0$, temos que existe $i \neq 0$ tal que $x_i \in \Gamma$, digamos $x_1 \in \Gamma$. Seja $\Theta_{\Gamma, x_1}(I) = \{a \in R : \text{existe } z \in I \text{ tal que } \text{supp}(z) \subseteq \Gamma, z = \sum_{i=0}^t c_i x_i \text{ e } z(x_1) = c_1 = a\}$. Assim, segue que $\Theta_{\Gamma, x_1}(I)$ é um ideal não-nulo de R . Seja H o ideal não-nulo de R tal que $\Theta_{\Gamma, x_1}(I)x_1 = x_1 H$. Agora, $(J : R) = 0$ implica que existe $z \in I$ com $\text{supp}(z) \subseteq \Gamma$ tal que $z = \sum_{i=0}^t x_i \lambda_i$ com $\lambda_1 \in H \setminus J$. Além disso, já que $b_0 \notin J$, temos que $b_0 R + J = R$. Sejam $r \in R, \alpha \in J$ tais que $b_0 r + \alpha = 1$. Então $b_0 r \lambda_1 + \alpha \lambda_1 = \lambda_1$ e daí segue que $b_0 r \lambda_1 \notin J$, donde $v = yr \lambda_1 - b_1 r_1 z \in I$, onde $x_1 r = r_1 x_1$. Assim, segue que $v = (b_0 + \sum_{i=1}^t b_i x_i) r \lambda_1 - b_1 r_1 (\sum_{i=0}^t x_i \lambda_i) = b_0 r \lambda_1 - b_1 r_1 \lambda_0 + \sum_{i=2}^t b_i x_i r \lambda_1 - \sum_{i=2}^t b_1 r_1 x_i \lambda_i$. Com isso é fácil ver que v contradiz a escolha de y , pois $b_0 r \lambda_1 - b_1 r_1 \lambda_0 \notin J$. Logo, concluímos que $(JX + I) \cap R = J$. \diamond

Agora estamos em condições de provar o seguinte:

Teorema 3.3.4 *Suponhamos que R é um anel primitivo e que P é um ideal quase-primitivo de S . Então P é um ideal primitivo de S .*

Demonstração Sejam J um ideal maximal à direita de R com $(J : R) = 0$ e H um R - S -bimódulo de S que é maximal com respeito a $H \cap R = 0$ tal que $(H : S) = P$. Pelo Lema 3.3.3, segue que $(JX + H) \cap R = J$. Então existe

um ideal à direita N de S tal que $N \supseteq JX + H$ que é maximal com respeito a $N \cap R = J$. Vamos mostrar que N é um ideal maximal à direita de S . De fato, suponhamos que T é um ideal à direita de S tal que $N \subset T \subseteq S$. Pela maximalidade de N segue que $T \cap R = R$, donde $S = RS = (T \cap R)S \subseteq TS = T$. Portanto, $T = S$.

Provaremos agora que $(N : S) = P$. Seja $K = \{x \in S : Rx \subseteq N\}$. Então K é um ideal à direita de S e um R -submódulo à esquerda de S com $H \subseteq K \subseteq N$. Como $N \cap R = J$, segue que $K \cap R = 0$. De fato, se $x \in K \cap R$, então $Rx \subseteq N \cap R \subseteq J$ e, portanto $x \in (J : R) = 0$. Pela maximalidade de H , segue que $H = K$. Conseqüentemente, $(N : S) = \{x \in S : Sx \subseteq N\} \subseteq K = H$. Além disso, $(N : S)$ é um ideal bilateral de S e $P = (H : S)$ é o maior ideal bilateral de S contido em H . Como $(H : S) \subseteq (N : S) \subseteq H$, temos que $P = (H : S) = (N : S)$ e, assim segue que P é um ideal primitivo de S . \diamond

Em [2] é provado o resultado abaixo, supondo-se apenas que S é uma extensão normalizante de um anel qualquer R . Entretanto, vamos prová-lo aqui, usando o Lema 3.3.3 e o Teorema 3.3.4.

Corolário 3.3.5 *Suponhamos que R é um anel primitivo e P é um ideal de S que é maximal com respeito a $P \cap R = 0$. Então P é um ideal primitivo de S .*

Demonstração Seja J um ideal maximal à direita de R com $(J : R) = 0$. Pelo Lema 3.3.3, segue que $(JX + P) \cap R = J$. Então existe um ideal à direita N de S que é maximal com respeito a $N \supseteq JX + P$ e $N \cap R = J$. Por um argumento semelhante ao utilizado na demonstração do Teorema 3.3.4, segue que N é um ideal à direita maximal de S . Além disso, $(N : S) \cap R \subseteq (J : R) = 0$ e, pela maximalidade de P , segue que $(N : S) = P$ e isso completa a prova. \diamond

Apesar de S_0 não ser necessariamente um anel, definimos o radical de Jacobson de S_0 assim como na Definição 1.2.11, ou seja, $J(S_0) = \bigcap \{P_0 : P_0 \text{ é um ideal saturado primitivo de } S_0\}$.

Lema 3.3.6 *Se $J(S_0)$ é o radical de Jacobson de S_0 , então $\bigcap \{P_0Q \cap S : P_0 \text{ é um ideal saturado primitivo de } S_0\} = J(S_0)Q \cap S$.*

Demonstração É claro que $\bigcap \{P_0Q : P_0 \text{ é um ideal saturado primitivo de } S_0\} \cap S_0 = \bigcap \{P_0Q \cap S_0\} = J(S_0)$. Assim, usando a correspondência do Teorema 2.2.13, segue que $\bigcap \{P_0Q\} = (\bigcap \{P_0Q\} \cap S_0)Q = J(S_0)Q$. \diamond

O resultado a seguir relaciona os radicais de Jacobson de S , S^* e S_0 , no caso em que R é primitivo.

Teorema 3.3.7 *Suponhamos que R é um anel primitivo. Se P_0 (resp. P^*)*

é um ideal primitivo à direita de S_0 (resp. S^*), então P é um ideal primitivo de S . Além disso, $J(S) \subseteq J(S_0)Q \cap S$ e $J(S) \subseteq J(S^*) \cap S$. Em particular, se S_0 ou S^* é primitivo (resp. J -semi-simples), então S também é.

Demonstração Se P_0 é um ideal saturado primitivo de S_0 então, pelo Lema 3.3.1, segue que P é um ideal quase-primitivo de S . Como R é primitivo temos, pelo Teorema 3.3.4, que P é um ideal primitivo de S .

Agora, se S_0 é primitivo então 0_{S_0} é um ideal saturado primitivo de S_0 e, por conseqüência, 0_S é um ideal primitivo de S . Logo S é primitivo.

Além disso, $J(S_0) = \bigcap \{P_0 : P_0 \text{ é um ideal saturado primitivo de } S_0\}$ e $P = P_0Q \cap S$ é um ideal primitivo de S , para todo P_0 . Logo $J(S) = \bigcap \{P : P \text{ é um ideal primitivo de } S\} \subseteq \bigcap \{P_0Q \cap S : P_0 \text{ é um ideal primitivo de } S_0\} = J(S_0)Q \cap S$. Assim, segue que se S_0 é J -semi-simples, então S também é. Para os resultados envolvendo P^* e S^* a demonstração é análoga. \diamond

Seja \mathcal{P} o conjunto de todos os ideais primitivos de R . Para cada $P \in \mathcal{P}$, consideremos o anel de quocientes simétrico Q_P do anel R/P e o normalizador Z_P de R/P em Q_P , ou seja, $Z_P = \{m \in Q_P : (R/P)m = m(R/P)\}$. Seja $\mathcal{F} = \{Z_P : P \in \mathcal{P}\}$. Se S é uma extensão fortemente normalizante, livre, de R , então temos que, para cada $P \in \mathcal{P}$, S/PX é uma extensão fortemente normalizante de R/P , com conjunto de geradores R/P -fortemente normalizantes dado por $\{x_i + PX : x_i \in X\}$. Portanto, para cada $P \in \mathcal{P}$, existirão os correspondentes $S_{Q_P}^*$ e S_{0,Z_P} . Fixadas estas notações, temos o seguinte:

Teorema 3.3.8 *Sejam R um anel J -semi-simples e S uma extensão fortemente normalizante livre de R com base R -fortemente normalizante $X = (x_i)_{i \in \Omega}$. Suponhamos que S_{0,Z_P} ou $S_{Q_P}^*$ é J -semi-simples, para todo $P \in \mathcal{P}$. Então S também é J -semi-simples.*

Demonstração Já que R é J -semi-simples segue que $\bigcap \{P : P \in \mathcal{P}\} = 0$. Dado $P \in \mathcal{P}$, fatoremos R e S pelos ideais P e PX , respectivamente. Por hipótese, temos que S_{0,Z_P} é J -semi-simples. Então, pelo Teorema 3.3.7, segue que $(R/P)X \simeq S/PX$ é também J -semi-simples. Portanto, PX é um ideal semiprimitivo de S e, conseqüentemente, S é J -semi-simples, pois $\bigcap \{PX : P \in \mathcal{P}\} = 0$. O outro caso é semelhante. \diamond

Uma conseqüência imediata do teorema acima é o seguinte:

Corolário 3.3.9 *Sejam R um anel qualquer e S uma extensão fortemente normalizante livre de R com base R -fortemente normalizante $X = (x_i)_{i \in \Omega}$. Suponhamos que S_{0,Z_P} ou $S_{Q_P}^*$ é J -semi-simples, para todo $P \in \mathcal{P}$. Então $J(S) \subseteq J(R)X$, onde $J(S)$ denota o radical de Jacobson de S .*

Demonstração Basta considerarmos o anel $S/(J(R)X)$ como sendo uma

extensão fortemente normalizante do anel J -semi-simples $R/J(R)$. \diamond

Novamente, não sabemos afirmar se os dois resultados anteriores continuam válidos no caso normalizante ou mesmo no caso essencialmente normalizante.

3.4 O Radical de Brown-McCoy

Suponhamos que R é um anel simples e S é uma extensão normalizante de R . Neste caso, é claro que todo ideal primo de S é R -disjunto. Além disso, nesse caso $R = Q$, $S = S^*$ e a correspondência entre ideais primos R -disjuntos de S e ideais saturados primos de S_0 implica que P é um ideal maximal de S se, e somente se, P_0 é um ideal saturado maximal de S_0 . Relembramos que, dado um anel R , denotamos por $G(R)$, o radical de Brown-McCoy de R , conforme Definição 1.2.11 (ii). Assim, segue o seguinte resultado:

Proposição 3.4.1 *Se S é uma extensão normalizante de R , então $G(S) = QG(S_0)$.*

Bibliografia

- [1] S. A. Amitsur, Rings of quotients, *Symposia Math.*, Vol. VIII (1972), 149-164.
- [2] J. Bergen, A note on the primitivity of ring extensions, *Comm. Algebra* 23 (1995), 4625-4631.
- [3] W. Chin, Prime ideals in differential operator rings and crossed products of infinite groups, *J. Algebra* 106 (1987), 78-104.
- [4] W. Chin, Prime ideals in restricted operator rings, *Israel J. Math.* 60 (1987), 236-256.
- [5] E. Cisneros, M. Ferrero and M. I. González, Prime ideals in skew polynomial rings and skew Laurent polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.* 32 (1990), 61-72.
- [6] M. Ferrero, Centred bimodules over prime rings: Closed submodules and applications to ring extensions, *J. Algebra* 172 (1995), 470-505.
- [7] M. Ferrero, Closed and prime ideals in free centred extensions, *J. Algebra* 148 (1992), 1-16.
- [8] M. Ferrero, Closed submodules of centred bimodules over semiprime rings, and applications to ring extensions, *Nova J. Math., Game Theory, and Alg.* 5 (1996), 309-345.
- [9] M. Ferrero, Closed submodules of normalizing bimodules over semiprime rings, *Comm. Algebra*, a aparecer.
- [10] M. Ferrero, Prime and principal closed ideals in polynomial rings, *J. Algebra* 134 (1990), 45-59.
- [11] M. Ferrero, Semisimplicity of free centred extensions, *Canad. Math. Bull.* 38 (1995), 55-58.
- [12] M. Ferrero, Some new results on closed submodules and ideals, *East-West J. Math.*, 1 (1998), 95-107.
- [13] M. Ferrero and J. Matczuk, Prime ideals in skew polynomial rings of derivation type, *Comm. Algebra* 18 (1990), 689-710.
- [14] M. Ferrero and E. R. Puczyłowski, Prime ideals and radicals of centred extensions and tensor product, *Israel J. Math.* 94 (1996), 381-401.

- [15] M. Ferrero and E. R. Puczyłowski, The singular ideal and radicals, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* 64 (1998), 195-209.
- [16] M. Ferrero and R. Wisbauer, Closure operations in module categories, *Algebra Colloq.* 3 (1996), 169-182.
- [17] A. W. Goldie, Semiprime rings with maximum conditions, *Proc. London Math. Soc.* 10 (1960), 201-220.
- [18] K. R. Goodearl, *Ring Theory, non-singular rings and modules*, Marcel Dekker, New York, 1976.
- [19] K. R. Goodearl, Prime ideals in skew polynomial rings and quantized Weyl algebras, *J. Algebra* 150 (1992), 324-377.
- [20] A. G. Heinicke and J. C. Robson, Normalizing extensions: Prime ideals and incomparability, *J. Algebra* 72 (1981), 237-268.
- [21] A. G. Heinicke and J. C. Robson, Normalizing extensions: Nilpotency, *J. Algebra* 76 (1982), 459-470.
- [22] A. G. Heinicke and J. C. Robson, Intermediate normalizing extensions, *Trans. Amer. Soc.* 282 (1984), 645-667.
- [23] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [24] A. Leroy and J. Matczuk, Prime ideals of Ore extensions, *Comm. Algebra* 19 (1991), 1893-1907.
- [25] W. S. Martindale, III, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, *J. Algebra* 12 (1969), 576-584.
- [26] L. M. Merino and A. Verschoren, Strongly normalizing extensions, *J. Pure Appl. Algebra* 92 (1994), 161-172.
- [27] D. S. Passman, Prime ideals in normalizing extensions, *J. Algebra* 73 (1981), 556-572.
- [28] D. S. Passman, Prime ideals in polycyclic crossed products, *Trans. Amer. Math. Soc.* 301 (1987), 737-759.
- [29] D. S. Passman, Prime ideals in enveloping rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* 302 (1987), 535-560.
- [30] D. S. Passman, Prime ideals in restricted enveloping rings, *Comm. Algebra* 16 (1988), 1411-1436.

- [31] J. C. Robson, Prime ideals in intermediate extensions, Proc. London Math. Soc. 44 (1982), 372-384.
- [32] J. C. Robson and L. W. Small, Liberal extensions, Proc. London Math. Soc. 42 (1981), 87-103.