UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA

Trabalho de Conclusão de Curso

Lucas Caitano

Representando o espaço em uma folha de papel ou na tela de um computador: um estudo sobre a perspectiva cônica através do software GeoGebra

Porto Alegre
2º Semestre
2013

Trabalho de Conclusão de Curso

Lucas Caitano

Representando o espaço em uma folha de papel ou na tela de um computador: um estudo sobre a perspectiva cônica através do software GeoGebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial e obrigatório para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2º Semestre

2013

Trabalho de Conclusão de Curso

Lucas Caitano

Representando o espaço em uma folha de papel ou na tela de um computador: um estudo sobre a perspectiva cônica através do software GeoGebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial e obrigatório para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Banca Examinadora:

....

Prof.ª Dr.ª Márcia R. Notare Meneghetti

Instituto de Matemática - UFRGS

....

Prof.ª M.ª Fabiana Fattore Serres

Colégio de Aplicação - UFRGS

Porto Alegre

2º Semestre

2013

Dedico este trabalho à minha família pelo apoio e compreensão ao longo desta caminhada. À Jéssica, por fazer destes últimos anos os melhores que já vivi. E a todos os professores que fizeram de mim o que sou, especialmente o meu orientador, Marcus Basso que, sem dúvida, orientou-me para além deste trabalho.

Meus reconhecimentos...

Reservei esta página para agradecer àqueles que, de maneira fundamental, tornaram possível este trabalho. No entanto, mais do que agradecer, decidi neste espaço, reconhecer que sozinho não poderia ter chegado a lugar nenhum. E mais do que isso, reconhecer que sem o ensino de excelência proporcionado por esta Universidade, nada seria possível. Reconhecer o empenho e a preocupação de todos os docentes do Instituto de Matemática e da Faculdade de Educação com a formação de professores capazes de transpor a barreira entre o ensinar e o aprender. Reconhecer o papel de todos os colegas neste percurso, especialmente a Jéssica, a melhor colega que poderia um dia imaginar ter. Reconhecer que sem a ajuda do Colégio de Aplicação, por meio dos professores de Matemática, nada seria tão divertido como foi. E por fim, reconhecer que se não tivesse conhecido o professor Marcus Basso, talvez não pudesse enxergar tantas possibilidades no futuro, e que talvez elas pudessem nem um dia vir a ser.

RESUMO

Vivemos em um espaço tridimensional. Nesse espaço tudo possui três dimensões, até mesmo a folha de papel mais fina que possamos encontrar. Ao mesmo tempo, lidamos com figuras bidimensionais a todo o momento, inclusive em situações práticas, como o cálculo da área de uma superfície retangular, por exemplo. Estas figuras são abstrações existentes apenas em nossa imaginação. Um quadrado não existe fora do pensamento, assim como a reta, o ponto, o triângulo e qualquer outra figura não-tridimensional. Todos estes elementos são conceitos pertencentes ao mundo das ideias. Todavia, nos deparamos com um problema prático que nos força a buscar relações entre o que vemos e podemos tocar e aquilo que podemos apenas imaginar: como representar em uma superfície plana, como a de uma folha de papel, um objeto tridimensional, como um cubo, uma caixa ou uma casa? Este problema foi apresentado e discutido com o grupo de alunos participante da pesquisa, que passaram a criar estratégias para solucionar a questão buscando compreender as relações geométricas que permitiriam tal representação. Os alunos iniciaram a investigação a partir de desenhos à mão livre, obras de arte de pintores renascentistas e fotografias tiradas pelos próprios alunos de diferentes objetos e em diferentes espaços físicos da Escola. O software de Matemática dinâmica GeoGebra foi utilizado como um ambiente de investigação no qual os alunos pudessem criar e testar hipóteses, comparando seus resultados com os obtidos pelos colegas. Este software possui uma janela de visualização bidimensional na qual podem ser criadas construções geométricas dinâmicas que mantém suas propriedades quando algum elemento da construção é manipulado. Esta manipulação e visualização não poderiam ser obtidas apenas com desenhos em folhas de papel. Desse modo, buscamos verificar como os alunos transitavam entre o ambiente propiciado pelo software e aquele obtido com desenhos à mão livre. A metodologia utilizada durante a pesquisa foi embasada no método clínico de Piaget, através do qual foram elaboradas questões para serem respondidas ao longo da investigação. Além disso, utilizamos a teoria Construcionista como pano de fundo para a utilização do computador como um recurso capaz de modificar a aprendizagem, proporcionando um ambiente rico de investigação e descoberta, no qual os alunos são estimulados a pensar profundamente sobre o que estão produzindo. Como resultados, constatamos a importância do uso do recurso tecnológico digital como um elemento capaz de proporcionar a aproximação entre os conceitos geométricos e as estratégias criadas pelos estudantes. Por exemplo, nos desenhos feitos à mão livre, dois segmentos de reta podem ser considerados paralelos mesmo que não estejam perfeitamente paralelos. No software, se tais segmentos não forem construídos paralelamente, ao movimentar qualquer elemento da construção, a forma original será perdida. Esta compreensão é crucial, e torna a aprendizagem verdadeiramente significativa.

Palavras-Chave: Desenho em perspectiva. Geometria dinâmica. Construcionismo.

CAITANO, Lucas. **Representando o espaço em uma folha de papel ou na tela de um computador: um estudo sobre a perspectiva cônica através do software GeoGebra**. Porto alegre: UFRGS, 2013. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática). Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2013.

ABSTRACT

We live in a three-dimensional space. In this space all has three dimensions, even the thinnest sheet of paper we can find. At the same time, we deal with two-dimensional figures at all times, including in practical situations, how to calculate the area of a rectangular surface, for example. These figures are existing abstractions only in our imagination. A square does not exist outside of the mind, as well as the straight line, the point, the triangle, and any other non three-dimensional figure. All these elements are concepts belonging to the world of ideas. However, faced with a practical problem that forces us to seek relationships between what we see and we play and what we can only imagine: how to represent on a flat surface, such as a sheet of paper, a three-dimensional object such as a cube, a box or a house? This issue was presented and discussed with the Group of students participating in the survey, which began to create strategies to solve the question seeking to understand the geometric relationships that would permit such representation. Students began the investigation from Freehand drawings, artworks of Renaissance painters and photographs taken by the students themselves to different objects and different physical spaces in the school. Dynamic Mathematics software GeoGebra was used as a research environment in which students could create and test hypotheses by comparing their results with those obtained by colleagues. This software has a two-dimensional preview window in which you can create dynamic geometric constructions that maintains its properties when any construction element is handled. This manipulation and visualization could not be obtained just with drawings on sheets of paper. Thereby, we check how students passed back and forth between the environment provided by the software, and that obtained with Freehand drawings. The methodology used during the survey was based on the clinical method of Piaget, through which were prepared questions to be answered throughout the investigation. In addition, we use the Constructionist theory as a backdrop for the use of the computer as a resource capable of modifying the learning, providing a rich environment for research and discovery, in which students are encouraged to think deeply about what they are producing. As a result, we note the importance of digital technological resource usage as an element capable of delivering the rapprochement between the geometrical concepts and strategies created by students. For example, in Freehand drawings, two straight segments can be considered parallel even if they are not perfectly parallel. In the software if such threads are not built at the same time, when moving any element of construction, the original shape is lost. This understanding is crucial, and makes learning a truly significant.

Key-words: Perspective drawing. Dynamic geometry. Constructionism.

CAITANO, Lucas. **Representando o espaço em uma folha de papel ou na tela de um computador: um estudo sobre a perspectiva cônica através do software GeoGebra**. Porto alegre: UFRGS, 2013. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática). Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2013.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de uma casa. 11
Figura 2 – Perspectiva cônica no livro didático. 16
Figura 3 – Perspectiva cônica no livro didático. 17
Figura 4 – Linhas de fuga. 22
Figura 5 – Linha do horizonte. 22
Figura 6 – Ponto de vista. 23
Figura 7 – Ponto de fuga. 23
Figura 8 – Linhas de fuga. 24
Figura 9 – Um ponto de fuga. 25
Figura 10 – Dois pontos de fuga. 25
Figura 11 – Três pontos fuga. 26
Figura 12 – Exemplo de representação em perspectiva cônica. 27
Figura 13 – Exemplo de representação em perspectiva cônica. 27
Figura 14 – Representação de um cubo feita por um aluno. 35
Figura 15 – Representações do cubo obtidas pelos alunos. 35
Figura 16 – Tentativa de representação do cubo. 36
Figura 17 – Representações do cubo sob os pontos de vista dos alunos. 37
Figura 18 – Pontos de vista dos alunos. 37
Figura 19 – Conjunto de cubos sobre a mesa. 38
Figura 20 – Representações do conjunto de cubos. 38
Figura 21 – Conjunto de cubos reproduzidos sobre as malhas. 39
Figura 22 – Vistas de um conjunto de cubos. 40
Figura 23 – Vistas dos dois conjuntos de cubos. 40
Figura 24 – Fotografia do corredor da escola. 42
Figura 25 – Fotografia do pátio da escola. 42
Figura 26 – Estrada. 43
Figura 27 – Montanhas. 44
Figura 28 – Pietro Perugino, "Entrega das Chaves" (1481 – 1482). 44
Figura 29 – Rafael Sanzio, "A Escola de Atenas" (1509 – 1510). 45
Figura 30 – Aluno desenhando o corredor. 47
Figura 31 – Representação do corredor. 47
Figura 32 – Exemplo de representação do corredor. 48

Figura 33 – Exemplo de representação do corredor. 48
Figura 34 – Caixa sobre a mesa. 49
Figura 35 – Caixa desenhada em perspectiva cônica. 51
Figura 36 – Representação do corredor/casa. 52
Figura 37 – Representação do corredor/casa. 52
Figura 38 – Casa desenhada em perspectiva. 53
Figura 39 – Trapézio com segmentos prolongados. 54
Figura 40 – Fotografia do corredor da escola marcada por segmentos de reta. 55
Figura 41 – Representação da caixa e deformação da representação após o movimento. 57
Figura 42 – Representação da caixa utilizando retas paralelas/perpendiculares. 58
Figura 43 – Representação da caixa utilizando retas paralelas/perpendiculares. 59
Figura 44 – Representação da caixa em perspectiva cônica. 59
Figura 45 – Reposicionamento do ponto de fuga. 60
Figura 46 – Reposicionamento do ponto de fuga. 60
Figura 47 – Representação de uma caixa com tampa (aberta) em perspectiva cônica. 63
Figura 48 – Representação de uma caixa com tampa (fechada) em perspectiva cônica. 64
Figura 49 – Representação de uma escada em perspectiva cônica. 64
Figura 50 – Representação de uma mesa em perspectiva cônica. 65
Figura 51 – Representação de uma casa em perspectiva cônica. 65

SUMÁRIO

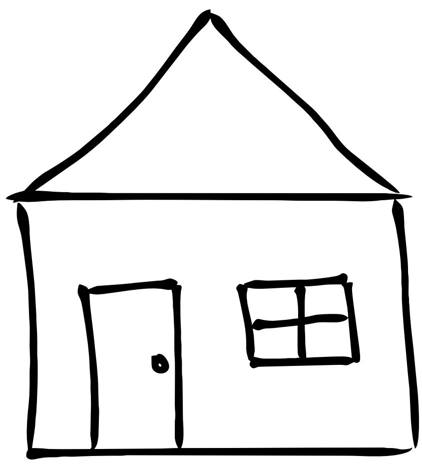
1 Introdução 11
2 Um panorama sobre a Geometria no Ensino Básico 15
3 A representação de objetos tridimensionais 19
3.1 A perspectiva cônica 21
4 O Construcionismo e a aprendizagem em Geometria 28
4.1 O software GeoGebra 30
4.2 O desenho em perspectiva e a Geometria dinâmica 30
5 Metodologia da pesquisa 32
5.1 O Método Clínico de Jean Piaget 32
5.2 Primeiro encontro: o problema é posto e a busca pela solução tem seu início 34
5.3 Segundo encontro: novas questões, outras soluções 41
5.4 Terceiro encontro: a perspectiva cônica começa a ser compreendida 46
5.5 Quarto encontro: partimos da caixa e chegamos à casa 57
6 Considerações finais e perspectivas 62
7 Referências bibliográficas 67
8 Apêndices 69
8.1 Apêndice A: Autorização para desenvolvimento de trabalho na instituição 69
8.2 Apêndice B: Termo de consentimento informado 70

1 INTRODUÇÃO

Dê a uma criança um lápis e uma folha de papel e ela enfrentará o problema da representação de objetos tridimensionais sobre uma superfície plana.

A epígrafe que inicia este capítulo expressa com perfeição os acontecimentos que motivaram-me a escrever este trabalho. Certa vez, minha sobrinha, ainda com três anos de idade, pediu-me para desenhar uma casinha para que ela pudesse colorir. Confesso que estava com pressa e pouco aberto para uma experiência que contribuiria para mudar a minha compreensão sobre o ensino de Geometria. Meu desenho acabou sendo parecido com este:

Figura 1 – Representação de uma casa.
Fonte – Arquivo pessoal.



Para minha surpresa, esta "obra prima" não foi aceita pela menina. Era uma casa muito pequena e muito feia, segundo ela. Então, subitamente, e neste ponto até mesmo eu não compreendo o caminho que meu pensamento rumou, percebi que há muito tempo desenhava casinhas daquele modo e nunca havia percebido, ou melhor, refletido que aquela era apenas uma representação mal feita do objeto real, cuja natureza é muito mais interessante e complexa. O que faltava à minha casinha? Certamente ela era tão rudimentar quanto os desenhos nas paredes das cavernas. Foi este pensamento que trouxe a tona uma sucessão de *insights*.

Pensei: já no tempo das cavernas, os homens primitivos deparavam-se com o problema da representação de objetos tridimensionais sobre uma superfície plana. Os objetos tridimensionais em questão eram os animais e a superfície plana era o rochedo. Minha sobrinha, certamente, também havia se deparado com este problema, mesmo que não tenha percebido. Comecei então, a investigar timidamente o que se passava, buscando compreender as relações que ali surgiam. Será que ao dar a folha de papel, ela tentará desenhar algum objeto tridimensional? Sim, é claro, respondi a mim mesmo. Vivemos em um espaço tridimensional. Nesse espaço tudo possui três dimensões, até mesmo a folha de papel mais fina que possamos encontrar. Desse modo, qualquer objeto que ela pudesse vir a desenhar, seria pertencente a este espaço, o espaço que ela conhece e, portanto, o desenho seria a tentativa de representação de um objeto tridimensional. Então, questionei-me: e se ela quisesse desenhar um objeto bidimensional como um quadrado ou um triângulo? Ela não conhece essas formas e tampouco a natureza bidimensional que as define, concluí. Logo, não seria natural que ela desenhasse intencionalmente uma figura deste tipo, pois elas habitam o mundo das ideias. Não existem no espaço em que vivemos.

O próximo passo foi apresentar a ela algumas figuras bidimensionais como as citadas acima. Busquei as melhores representações de um quadrado e de um triângulo que poderia obter: desenhei as duas formas em uma folha de papel e as recortei. A partir daquele momento, ela ocasionalmente desenhava estas formas e citava seus nomes. No entanto, as associava a objetos tridimensionais. Por exemplo: há um chocolate cuja embalagem tem o formato de um prisma de base triangular. Aquela embalagem, para minha sobrinha, era um triângulo. Interessei-me, então, pelas relações entre os objetos tridimensionais que vemos e podemos tocar e aqueles bidimensionais que podemos apenas imaginar. Como o espaço tridimensional relaciona-se com o espaço bidimensional habitado por figuras que a princípio não existem? Aliás, como os alunos refletiriam sobre os conceitos geométricos nesses dois espaços distintos? E como utilizariam estes conceitos diante da necessidade de representar um objeto tridimensional sobre uma superfície plana através do desenho em perspectiva? Estas questões, com o tempo, ganharam um novo espaço: o dos meus pensamentos.

Dias depois, um novo acontecimento definiu, por fim, a gênese deste trabalho. Estava organizando objetos antigos quando encontrei alguns desenhos que havia feito há muito tempo, quando tinha cerca de dez anos de idade. Observando os desenhos, lembrei-me de ter me deparado com o problema da representação de objetos tridimensionais sobre uma superfície plana. Lembro-me de observar desenhos feitos por outras pessoas que conseguiam transmitir a sensação de profundidade com perfeição e pensar como seria possível obter aquele resultado. Ficava impressionado e curioso. Por algum tempo tentei compreender aquela técnica. A curiosidade me movia. Mas o tempo passou e outros interesses tomaram o lugar daquela inquietação. Decidi estudar Matemática e, surpreendentemente, encontrei a resposta em seus domínios. Sim, aquele problema tinha um nome: desenho em perspectiva. Mais surpreendente ainda foi perceber o quão simples era aquela técnica que havia me impressionado anos atrás. Somente uma questão vinha-me a cabeça: por que aquele problema nunca havia sido discutido nas aulas de Geometria na escola? Por que as únicas lembranças que tinha daquelas aulas relacionavam-se a cálculos de áreas e perímetros?

Percebi, naquele momento, que precisava descobrir como os meus alunos enfrentariam o problema da representação de objetos tridimensionais em uma superfície plana, ou seja, que estratégias criariam na busca das relações geométricas que permitiriam o desenho em perspectiva, considerando este um problema fundamentalmente matemático. É este, pois, o objetivo deste trabalho. É claro que o nosso interesse centra-se nas questões geométricas inerentes ao desenho em perspectiva, mais do que desenvolver simplesmente a capacidade artística do desenho. Contudo, não negamos a importância desta como motivadora desse estudo. A redação das próximas páginas deste trabalho trouxe consigo uma questão que permaneceu até sua conclusão: por quais motivos o estudo da perspectiva não é um assíduo frequentador das aulas de Geometria?

Este trabalho foi desenvolvido através de uma pesquisa realizada no Colégio de Aplicação da UFRGS com um grupo de alunos do oitavo ano (7ª série). O problema – como representar em uma superfície plana, como a de uma folha de papel, um objeto tridimensional, como um cubo, uma caixa ou uma casa? – foi apresentado e discutido com o grupo de alunos participantes da pesquisa, que passaram a criar estratégias para solucionar a questão buscando compreender as relações geométricas que permitiriam tal representação. Os alunos iniciaram a investigação a partir de desenhos à mão livre, obras de arte de pintores renascentistas e fotografias tiradas pelos próprios alunos de diferentes objetos e em diferentes espaços físicos da Escola. O software de Matemática dinâmica GeoGebra foi utilizado como um ambiente de investigação no qual os alunos pudessem criar e testar hipóteses, comparando seus resultados com os obtidos pelos colegas. Este software possui uma janela de visualização bidimensional na qual podem ser criadas construções geométricas dinâmicas que mantém suas propriedades quando algum elemento da construção é manipulado. Esta manipulação e visualização não poderiam ser obtidas apenas com desenhos em folhas de papel. Desse modo, buscamos, também, verificar como os alunos transitariam entre o ambiente propiciado pelo software e aquele obtido com desenhos à mão livre. A metodologia utilizada durante a pesquisa foi embasada no método clínico de Piaget, através do qual foram elaboradas questões para serem respondidas ao longo da investigação. Além disso, utilizamos a teoria Construcionista como pano de fundo para a utilização do computador como um recurso capaz de modificar a aprendizagem, proporcionando um ambiente rico de investigação e descoberta, no qual os alunos são estimulados a pensar sobre o que estão produzindo.

No próximo capítulo, fazemos um breve panorama sobre o ensino de Geometria na educação básica, especialmente no ensino fundamental, buscando compreender os motivos que justificam a ausência do desenho em perspectiva nos programas de Matemática e as possíveis implicações desta ausência. No terceiro capítulo caracterizamos o problema da representação de objetos tridimensionais, discutindo sua importância nas aulas de Geometria, assim como, em diversas áreas da atividade humana. No quarto capítulo discutimos o potencial da tecnologia, especialmente através do uso do software de Matemática dinâmica GeoGebra, para desenvolver a compreensão acerca dos conceitos geométricos presentes no desenho em perspectiva. No quinto capítulo a metodologia utilizada durante a pesquisa é apresentada. Por fim, o sexto capítulo, aborda as conclusões provenientes dessa investigação, assim como, algumas perspectivas para o prosseguimento da pesquisa.

2 UM PANORAMA SOBRE A GEOMETRIA NO ENSINO BÁSICO

Atribuo especial importância à visão que tenho da Geometria, porque sem ela eu não teria sido capaz de formular a teoria da relatividade.
(Albert Einstein)

De acordo com os PCN's a Geometria "desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive." (PCN's – 5ª a 8ª séries – 1998, p. 122).

Porém, historicamente o estudo da Geometria apresenta-se em um panorama desfavorável frente a outras áreas do ensino de Matemática. Por muitos anos o ensino de Geometria contemplou, quase exclusivamente, o pensamento lógico-dedutivo. Segundo Búrigo (2005, p. 244), "até os anos de 1950, a Geometria era tratada, no Curso Ginasial, frequentemente, sob a forma de exposições de teoremas e demonstrações que imitavam "os elementos" de Euclides. As demonstrações eram mais decoradas e repetidas do que compreendidas ou exercitadas."

A partir da década de sessenta, com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna (MMM), o ensino de Matemática foi marcado por um forte formalismo e muitos matemáticos valorizavam apenas o pensamento algébrico em detrimento do pensamento geométrico (BÚRIGO, 2005).

Com o fim do MMM, a partir da década de setenta, inicia-se um movimento para resgatar o ensino de Geometria. No entanto, não consegue superar as marcas deixadas pelo MMM que refletem-se até os dias de hoje, pois, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's, 1998), muitas vezes, o ensino de Geometria confunde-se com o ensino de medidas. Búrigo ainda acrescenta que:

> "No cotidiano das salas de aula, os problemas envolvendo figuras e espaço físico tendem a ser abordados pela via numérica ou algébrica, abandonando os procedimentos mais próprios do pensamento geométrico. O ensino de Geometria, quando ocorre, fica reduzido ao cálculo de ângulos, comprimentos, áreas e volumes através da aplicação de fórmulas que não são descobertas nem verificadas e a representação algébrica dos lugares no plano cartesiano." (2005, p. 244)

Desse modo, questões que privilegiam o raciocínio geométrico, através de atividades não relacionadas aos números e as operações são deixadas de lado. Além disso, problemas envolvendo a representação e visualização de objetos espaciais no plano, por exemplo, são pouco comtempladas pelos professores do Ensino Básico. No entanto, para os PCN's, "é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno." (1998, p.122).

Através da análise de alguns livros didáticos é possível perceber a inserção de temas envolvendo a representação do espaço através do uso de malhas. Temas como a perspectiva isométrica, por exemplo, estão cada vez mais presentes em livros para os Anos Finais do Ensino Fundamental. Porém poucos autores parecem considerar a perspectiva cônica como um tema relevante que favorece a compreensão de conceitos geométricos, auxiliando no processo de representação e visualização de objetos tridimensionais no plano sob diferentes pontos de vista. Há, também, aqueles que consideram a perspectiva um assunto destinado exclusivamente para as aulas de Artes.

Imenes e Lellis estão entre os poucos autores que vem abordando este tema, reservando um capitulo exclusivo para a perspectiva cônica em seus livros didáticos. Porém, segundo Lellis, não há evidência de que o conteúdo tenha ganhado as salas de aula, visto que, mesmo entre adotantes de sua coleção, há muitos professores que 'pulam' as páginas voltadas ao desenho em perspectiva. (2009, p.3) As imagens a seguir exemplificam o tratamento da perspectiva cônica nos livros analisados:

Figura 2 – Perspectiva cônica no livro didático.
Fonte – (IMENES; LELLIS, 8º ano. 2006, p.173).

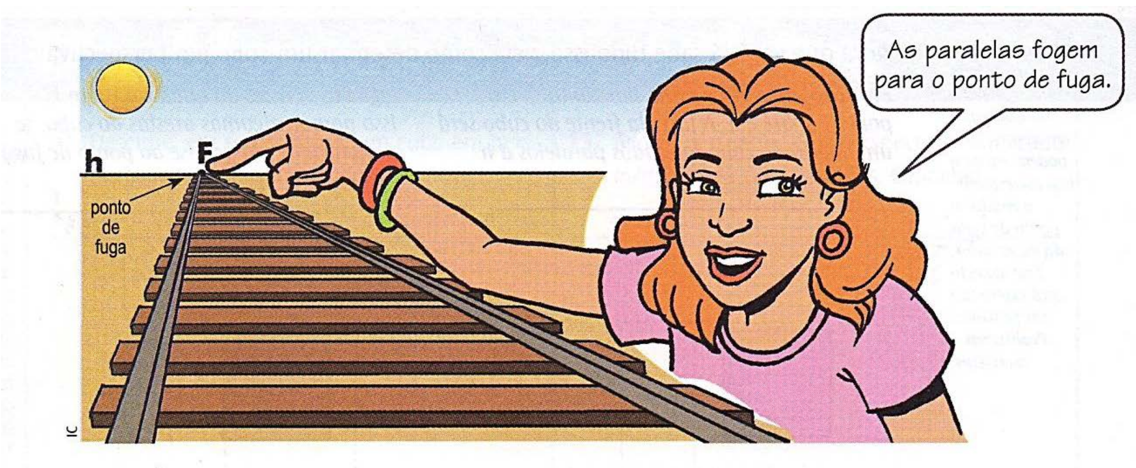
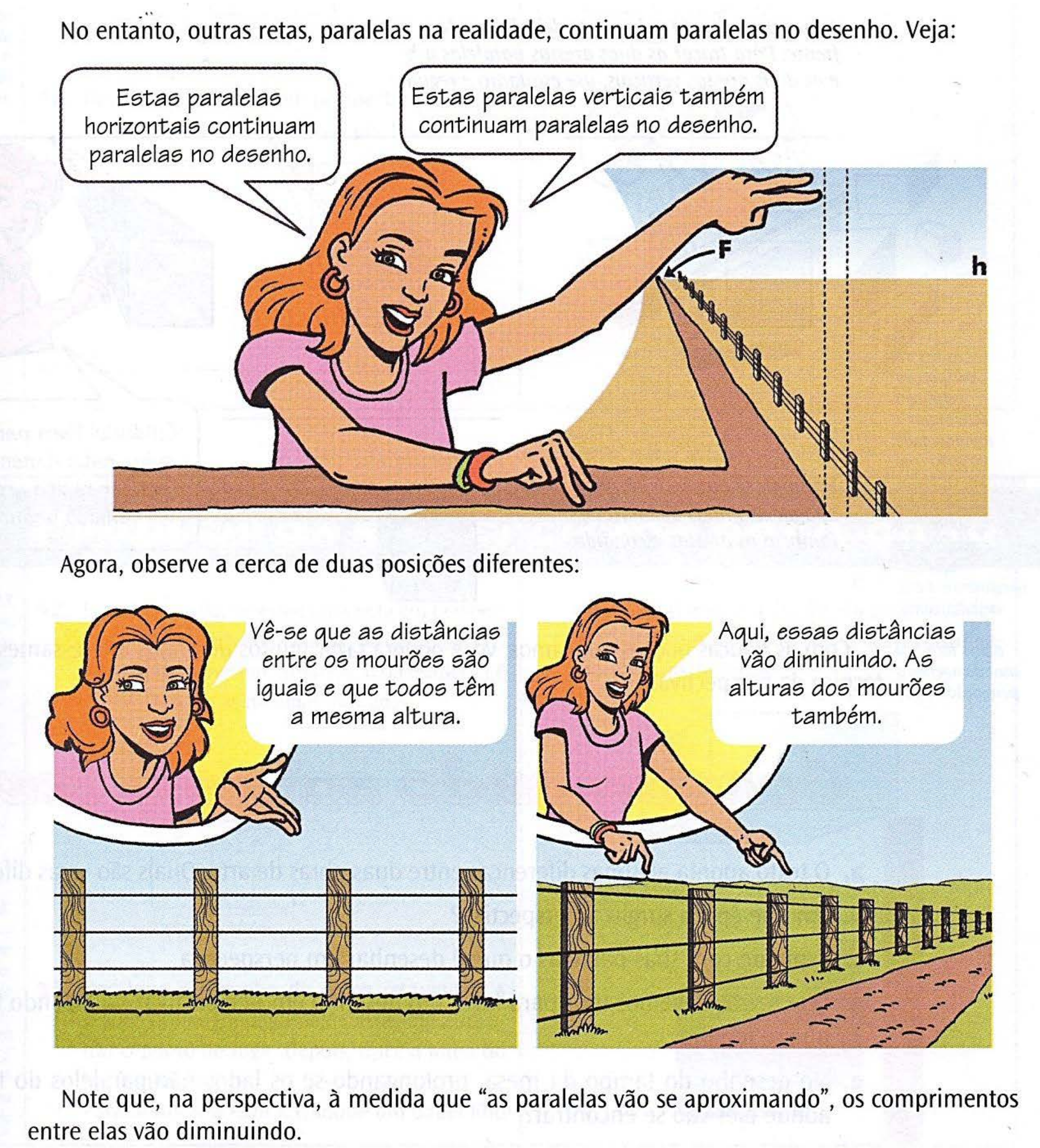


Figura 3 – Perspectiva cônica no livro didático.
Fonte – (IMENES; LELLIS, 8º ano. 2006. p.173).



Para Kaleff, ocorre que os professores não estão "[...] conscientes de quão complexas são as relações que se estabelecem em nossas mentes e nas de nossos alunos, quando tratamos com figuras espaciais, com relações entre figuras, suas representações, etc." (1994, p.21)

No entanto, diversas pesquisas atuais no campo da educação matemática vêm atribuindo vigor renovado à presença da geometria nos currículos escolares do ensino básico. Parte dessas pesquisas trata das potencialidades dos softwares de geometria dinâmica, apontando-os como importantes ferramentas para a aprendizagem matemática. Partindo dessa constatação, Imenes (2009, p.8) propõe os seguintes questionamentos:

- *Será que no momento atual, levando em conta o desenvolvimento dos softwares para ensino de geometria, ainda tem interesse o trabalho manual do desenho em perspectiva?*

- *Será que as dificuldades de visualização das figuras espaciais permanecem entre crianças e adolescentes, apesar da disseminação dos vários jogos eletrônicos (em computadores e consoles de várias marcas), que usam representações bidimensionais da realidade tridimensional?*

Desse modo, a pesquisa aqui exposta tem, também, como objetivo investigar estes questionamentos, buscando respondê-los.

3 A REPRESENTAÇÃO DE OBJETOS TRIDIMENSIONAIS

Não há estrada real para a Geometria.
(Euclides)

O antigo provérbio “uma imagem vale mais do que mil palavras” nunca foi tão verdadeiro como é atualmente. Nossa sociedade, sedenta por comunicação rápida, utiliza imagens para transmitir ideias. Como exemplo, cito nossos computadores pessoais e a organização de sua interface através de ícones, símbolos gráficos pequenos utilizados para representar um software ou um atalho para um arquivo específico. A internet, por sua vez, bombardeia seus usuários com imagens que, em muitos casos, colocam a palavra escrita em segundo plano. O cinema, a TV, a propaganda visual e tantos outros fatores atribuem à imagem papel central em nossa sociedade. Há, inclusive, quem nos caracterize como a “civilização da imagem”. Ou seja, deixamos de ser a “civilização da palavra”, regida pela escrita e pela fala. Podemos concluir com essas palavras uma constatação evidente: a imagem que penetra nossos olhos carrega cada vez mais informação. Uma questão, então, coloca-se: como decodificar essa informação? Ou seja, como desenvolver a capacidade de olhar e compreender as imagens que vemos?

Segundo Aumont (1993),

> “A percepção visual é, de todos os modos de relação entre o homem e o mundo que o cerca, um dos mais bem conhecidos. Há um vasto *corpus* de observações empíricas, de experimentos, de teorias, que começou a constituir-se desde a Antiguidade. O pai da Geometria, Euclides, foi também, em torno de 300 a.C., um dos fundadores da óptica (ciência da propagação dos raios luminosos) e um dos primeiros teóricos da visão. Na era moderna, artistas e teóricos (Alberti, Dürer, Leonardo da Vinci), filósofos (Descartes, Berkeley, Newton), e, é claro, físicos, empenharam-se nessa exploração.” (p.17)

É claro que não é nosso objetivo neste trabalho abordar as ideias relacionadas à percepção das imagens por nossos olhos. Essas ideias adentrariam não somente a teoria da Óptica, mas exigiriam, também, a reflexão sobre as transformações químicas, físicas e nervosas ocorridas em nosso aparelho visual. No entanto, sob o ponto de vista pedagógico, podemos nos questionar acerca do papel do ensino e da aprendizagem de Geometria nessa sociedade. Como o estudo da Geometria pode contribuir para desenvolver a capacidade de olhar e compreender os objetos que vemos? Essa questão pode parecer estranha, pois poderíamos acreditar que basta termos olhos para podermos olhar. Contudo, ter olhos não significa possuir a capacidade de olhar. Ou seja, há uma distinção clara entre o visual e o imaginário. Como justificar então, que um desenho em perspectiva seja compreendido por alguém que não compreende tal técnica de desenho? Corremos o risco, inclusive, de aceitar uma teoria inatista para justificar tal fato. Acreditamos, porém, que a capacidade de decodificar a representação de objetos tridimensionais sobre a superfície plana é adquirida, considerando, implicitamente, a teoria Construtivista. Ou seja, como afirma Cavalca (1998), a capacidade de "ver" os objetos tridimensionais não é inata e pode ser desenvolvida.

Historicamente, a representação de objetos tridimensionais sobre superfícies planas caracterizou-se como um problema. Pintores e desenhistas, diante da necessidade de representar objetos tridimensionais sobre uma tela, buscavam compreender as características das figuras tridimensionais e como poderiam reproduzi-las sobre uma superfície bidimensional. Antes do advento da fotografia não havia como capturar uma cena, reproduzindo-a sobre o papel, sem que houvesse a compreensão ou a reflexão frente a organização dos objetos no espaço. É verdade que por muito tempo os artistas usavam da intuição para desenvolver suas próprias técnicas de reprodução do espaço. Algumas eram melhor sucedidas e conseguiam se aproximar da realidade. Outras, contudo, não conseguiam representar o espaço como o vemos. Porém, logo os matemáticos perceberam o problema da representação de objetos tridimensionais sobre superfícies planas e passaram a estudá-lo. Afinal, como poderia este problema não ser matemático, sendo a Geometria um ramo da Matemática que dedica-se ao estudo do espaço e das figuras que o habitam. Desse modo, as figuras espaciais apresentaram-se como objetos de investigação aos matemáticos que passaram a buscar compreender as regras que permitiriam o desenho bidimensional de formas tridimensionais.

Cavalca (1998) nos apresenta um panorama sobre o desenvolvimento histórico da perspectiva que nos possibilita observar a intensa investigação motivada por esse problema. Desde Euclides até o Renascimento, período no qual a perspectiva cônica surgiu, diversos estudiosos dedicaram-se ao tema, buscando, através da Geometria, atribuir bases sólidas à técnica. Diversos métodos foram criados e refutados ao longo desse período até que a compreensão fosse atingida. Segundo Cavalca,

> "Guidobaldo del Monte e Stevin, engenheiros e matemáticos, sistematizaram geometricamente a perspectiva cônica, respectivamente em *Perspectiva libri sex* (1600) e *De perspectivis* (1605). Eles demonstraram que todas as retas do espaço paralelas entre si, mas não ao quadro, têm como projeção cônica retas concorrentes, sendo o ponto de concorrência a interseção entre o raio

> visual paralelo às retas dadas no espaço e o quadro. Estabeleceram, assim, que o ponto de fuga dessas retas, isto é, o ponto para onde convergiam as suas projeções (fugantes), se localizava sobre a linha do horizonte ou fora dela, conforme essas retas fossem horizontais ou não.” (1998, p.23)

Essa compreensão motivou o surgimento de um novo campo dentro da matemática: a geometria descritiva cujo objetivo centra-se justamente no estudo do problema da representação bidimensional de figuras espaciais.

3.1 A perspectiva cônica

Ao longo da história diversas formas de representação de objetos tridimensionais foram criadas com objetivos diversos. A perspectiva cavaleira, utilizada por arquitetos e engenheiros e frequentemente presente em trabalhos científicos, o desenho sobre malhas e as representações por vistas são exemplos de técnicas de representação.

No entanto, essas técnicas não são capazes de reproduzir o espaço como o vemos. Somente a perspectiva cônica pode ser considerada, dessa forma, a verdadeira representação do espaço sobre o plano, pois representa a realidade em três dimensões da maneira como a percebemos. Por esse motivo, a perspectiva cônica é conhecida, também, como perspectiva exata. Além disso, essa técnica de representação também é conhecida como perspectiva linear devido à forma como as linhas determinam as regras que regem a posição e a forma dos objetos representados.

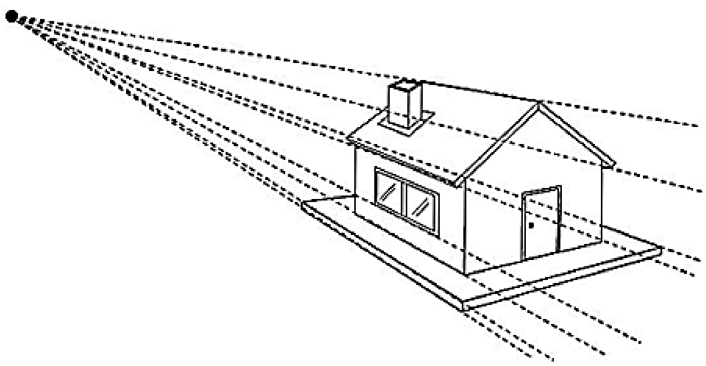
Segundo Ching, o desenho em perspectiva cônica “é a representação bidimensional da aparência de um objeto (isto é, como o vemos) por oposição à realidade daquele objeto (isto é, o que nós sabemos).” (2000, p.56)

Podemos destacar duas características básicas da representação em perspectiva cônica, fundamentais para expressar a sensação de profundidade dentro dos limites de um desenho em duas dimensões: a convergência de linhas paralelas e a diminuição de tamanhos. Essas características distinguem esta técnica das demais citadas acima.

O efeito visual da convergência de linhas paralelas cria a ilusão de tridimensionalidade sobre a superfície plana do papel. A diminuição de tamanhos, por sua vez, aproxima a representação da realidade aparente observada por nossos olhos ao criar a ilusão de profundidade.

As linhas convergentes que representam as arestas da casa, representada na imagem a seguir, são tecnicamente denominadas linhas de fuga. Elas fazem parte de um conjunto de recursos gráficos classificados como elementos da perspectiva, indispensáveis na representação esquemática de formas e objetos tridimensionais, imitando a percepção visual do olho humano.

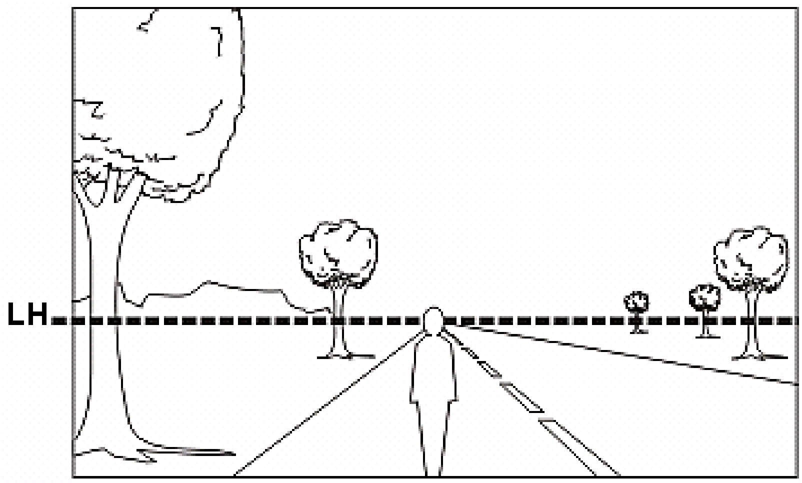
Figura 4 – Linhas de fuga.
Fonte – http://easelnotes.com (adaptada).



Os quatro elementos básicos da perspectiva que determinam a forma de um objeto representado segundo um determinado ponto de vista do observador são: linha do horizonte, ponto de vista, ponto de fuga e linhas de fuga[1].

A linha do horizonte é o elemento da construção em perspectiva que representa o nível dos olhos do observador, ou seja, pode ser considerada a altura do observador (linha horizontal pontilhada LH). Desse modo, a linha do horizonte desempenha um papel fundamental ao determinar se o objeto representado está sendo visto de cima, de baixo ou dentro de sua própria altura.

Figura 5 – Linha do horizonte.
Fonte – http://www.sobrearte.com.br

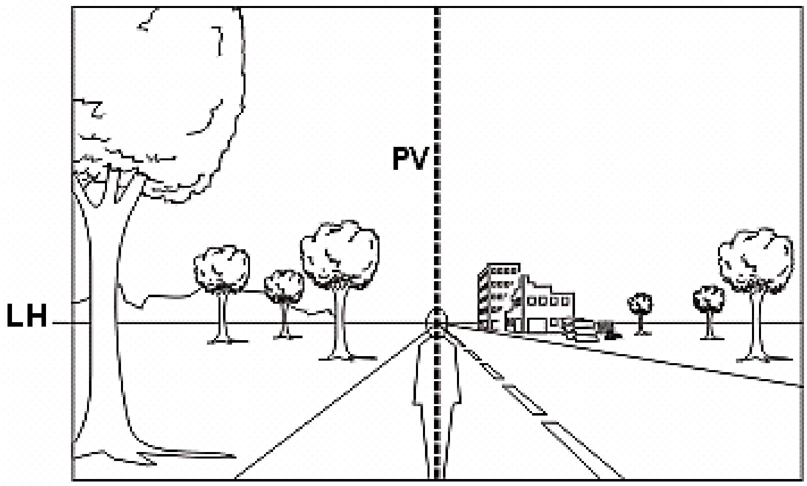


[1] Construções animadas disponíveis em < http://www.sobrearte.com.br >. Acesso em 15 de julho de 2013.

Está linha é assim chamada, pois em uma paisagem é a divisão que separa o céu e a terra. Vista ao longe, esta linha posiciona-se na base das montanhas, demarcando horizontalmente o nível do mar.

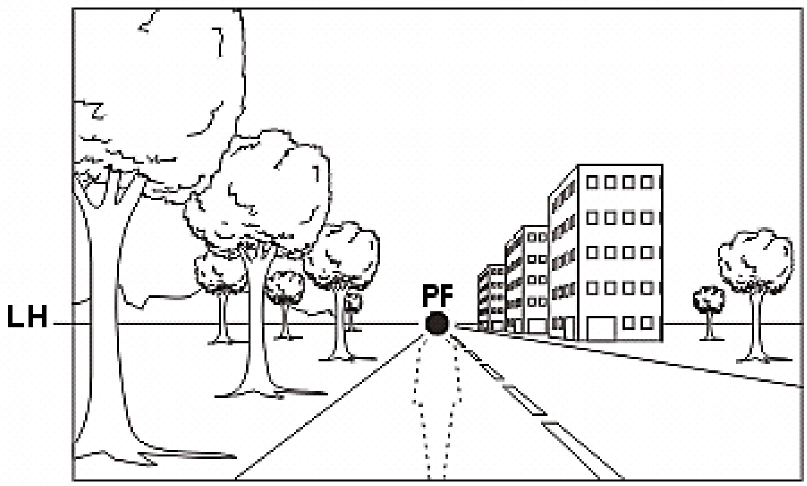
Na perspectiva cônica o ponto de vista (PV) é identificado por uma linha vertical perpendicular a linha do horizonte. O ponto de vista revela-se exatamente no cruzamento dessas duas linhas, como exposto na imagem abaixo.

Figura 6 – Ponto de vista.
Fonte – http://www.sobrearte.com.br



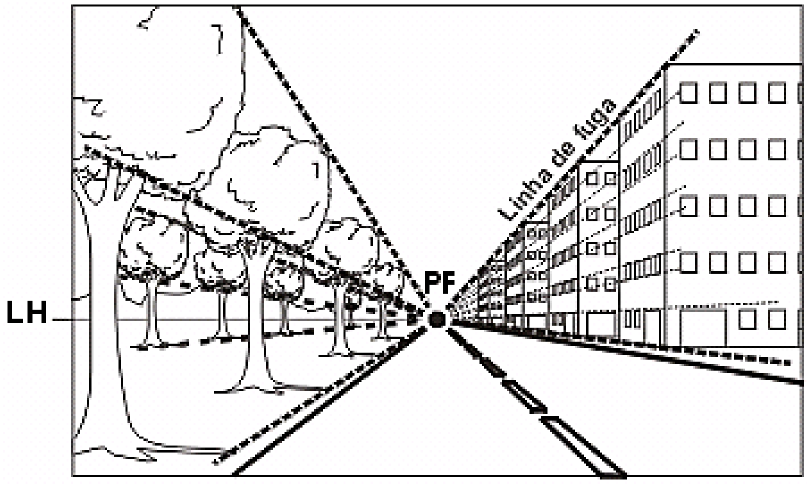
O ponto de fuga (PF), por sua vez, é o ponto localizado na linha do horizonte, pra onde todas as linhas não paralelas ao plano da folha convergem, quando vistas em perspectiva. Na imagem abaixo, por exemplo, as margens da estrada são demarcadas por linhas convergentes ao ponto de fuga.

Figura 7 – Ponto de fuga.
Fonte –http://www.sobrearte.com.br



As linhas de fuga são as linhas imaginárias que convergem para o ponto de fuga. É o afunilamento dessas linhas em direção ao ponto que gera a sensação visual de profundidade.

Figura 8 – Linhas de fuga.
Fonte – http://www.sobrearte.com.br

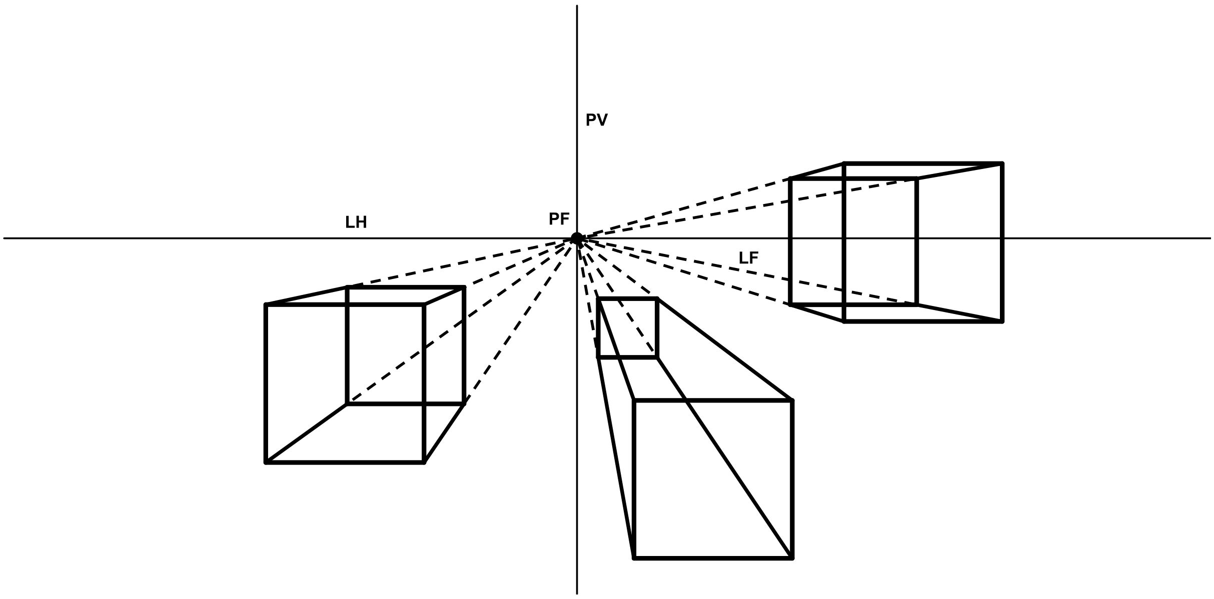


O uso desses quatro elementos da perspectiva em conjunto permite a elaboração de esquemas gráficos necessários para representar objetos tridimensionais sobre o plano do modo como os nossos olhos os percebem.

Além disso, nas representações em perspectiva cônica podem existir um, dois ou três pontos de fuga.

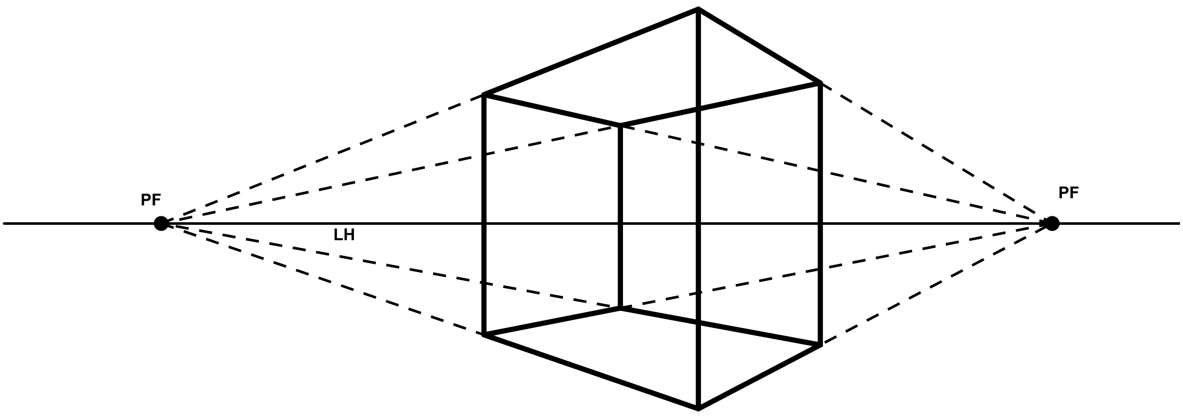
A perspectiva com um ponto de fuga caracteriza-se pela convergência das linhas não paralelas ao plano do papel para um único ponto posicionado sobre a linha do horizonte. Os objetos representados dessa forma apresentam sua face frontal paralela ao plano do papel, como mostra a figura a seguir, por exemplo:

Figura 9 – Um ponto de fuga.
Fonte – Arquivo pessoal.



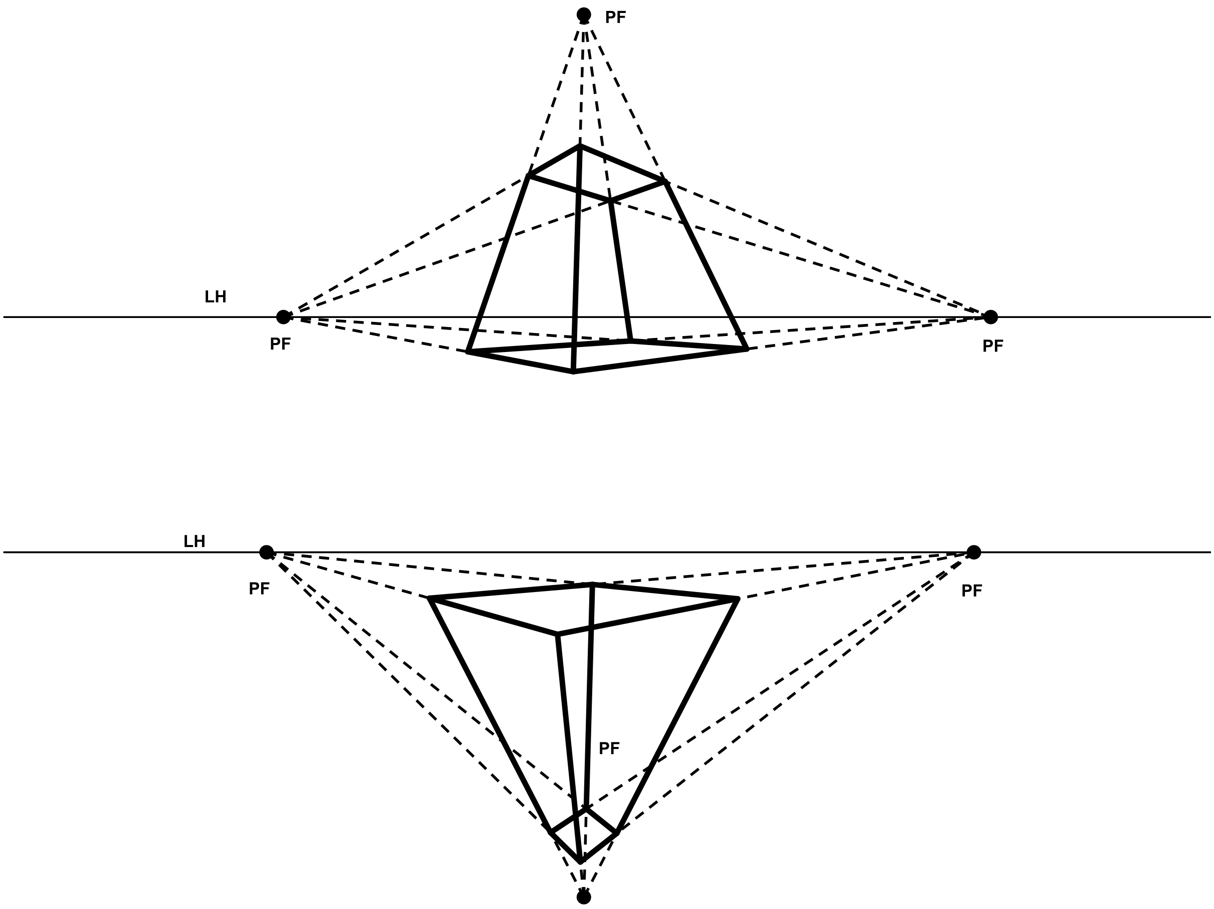
A perspectiva com dois pontos de fuga ocorre quando o objeto está em posição oblíqua em relação ao observador. Nesse caso, existem dois conjuntos de retas não paralelas ao plano do papel convergindo para dois pontos distintos posicionados sobre a linha do horizonte. Nesse caso, ocorre a permanência da verticalidade das linhas verticais (paralelas ao plano do papel), mas ambos os conjuntos principais de linhas horizontais (perpendiculares ao plano no papel) são oblíquos ao plano da figura e têm seus próprios pontos de fuga. A imagem a seguir apresenta um exemplo de representação em perspectiva com dois pontos de fuga:

Figura 10 – Dois pontos de fuga.
Fonte – Arquivo pessoal.



A perspectiva com três pontos de fuga ocorre quando existem três conjuntos de retas não paralelas ao plano do papel convergentes a três pontos distintos (dois posicionados sobre a linha do horizonte e um posicionado acima ou abaixo da linha do horizonte). As imagens a seguir apresenta um exemplo de representação em perspectiva com três pontos de fuga:

Figura 11 – Três pontos fuga.
Fonte – Arquivo pessoal.



É importante observar que em uma representação em perspectiva cônica, todas as linhas paralelas ao plano da folha não convergem aos pontos de fuga, mas sim retém sua verdadeira orientação. Na imagem a seguir, podemos ver um exemplo dessa afirmação:

Figura 12 – Exemplo de representação em perspectiva cônica.

Fonte - http://plastica.ecea.es

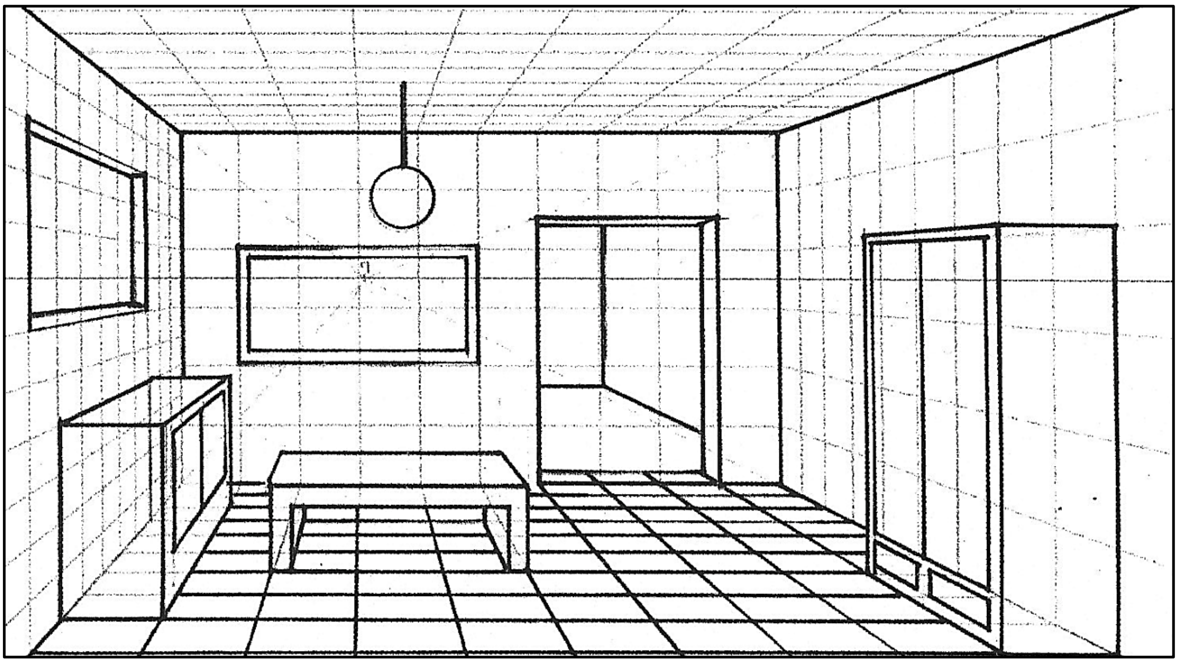
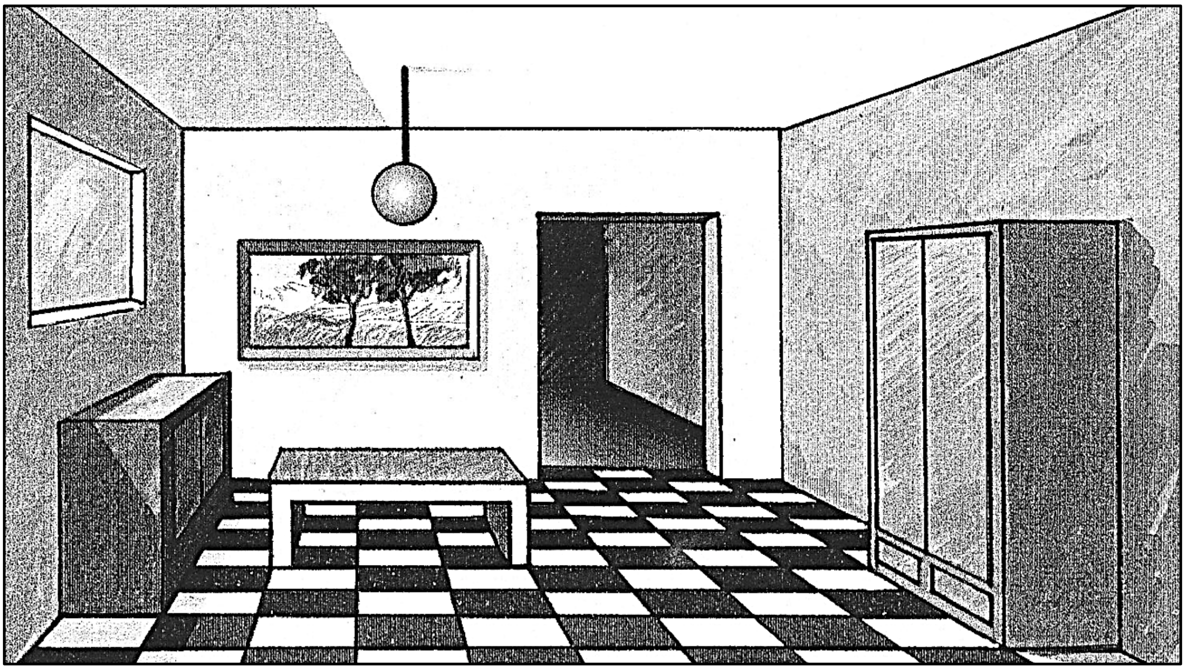


Figura 13 – Exemplo de representação em perspectiva cônica.
Fonte - http://plastica.ecea.es



4 O CONSTRUCIONISMO E A APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA

Na década de 60, Seymour Papert, um matemático nascido na África do Sul, começa a desenvolver uma série de ideias relacionadas à criação de ambientes educacionais baseados no uso da tecnologia. Suas ideias, inspiradas no Construtivismo de Piaget, com quem trabalhou, são conhecidas hoje como Construcionismo. Essa teoria de aprendizagem compartilha diversas concepções defendidas por Piaget, mas seu foco centra-se na tecnologia aplicada à educação, buscando compreender de que forma a tecnologia pode modificar a aprendizagem. Assim como o Construtivismo, o Construcionismo acredita que o desenvolvimento é um processo ativo de construção e reconstrução das estruturas mentais, no qual a figura do professor deixa de ser a do mestre explicador, aquele que transmite o conhecimento ao aluno, cujo único papel é o de receptor passivo. O papel do professor passa a ser o de provocador de situações que possibilitem que o aprendiz realize suas próprias descobertas. Ou seja, segundo essa teoria, o caminho para a aprendizagem e, por consequência, para o conhecimento, reside na concepção de que o aprendiz deve "colocar a mão na massa", considerando que este sujeito aprende e pensa mesmo sem ser "ensinado". Segundo o Construcionismo, aprende-se fazendo e aprende-se ainda mais quando se gosta do que se faz, se pensa e se conversa sobre isso. (MALTEMPI, 2004)

Partindo dessas ideias, Papert coloca na figura do computador o meio que viabiliza a criação de situações ricas e propícias para a construção do conhecimento.

Os PCN's reafirmam esse posicionamento, destacando que uma das finalidades do uso do computador nas aulas de Matemática é "auxiliar no processo de construção de conhecimento; como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções." (PCN, 1998, p.44)

Além disso, segundo o Construcionismo, o computador não deve ser apenas um recurso que oferece a compreensão através da visualização de objetos, mas sim um ambiente que possibilite, sobretudo, o pensamento e a criação. Nesse sentido o computador é, de acordo com Valente, um complicador:

> O aprendiz tem de descrever para o computador todos os passos no processo de resolver um problema, fazer isso por intermédio de uma linguagem de computação e, se os resultados não correspondem ao que foi desejado, o aprendiz tem que adquirir a informação necessária, incorporá-la ao programa e repetir o ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição. Esse trabalho é complicador. O computador não está facilitando a tarefa, no

> sentido de tornar a resolução do problema mais fácil, não está fornecendo a solução do problema na “bandeja de prata” como nós esperaríamos de um dispositivo educacional que tem a função de facilitar nossa vida, como acontece com os caixas 24 horas. (1999, p.82)

Valente utiliza a espiral descrição – execução – reflexão – depuração – descrição como uma sequência de estágios pela qual uma tarefa sugerida é desempenhada pelo indivíduo através da sua interação com o computador, descrevendo, assim, o processo de aprendizagem segundo a teoria Construcionista. O sujeito, inicialmente, deve descrever para o computador a ação pretendida. Isto ocorre por meio de uma linguagem de computação, ou seja, uma linguagem que possibilite a comunicação entre o sujeito e o computador. A seguir o computador executa a ação solicitada e, a partir do *feedback* resultante dessa execução, o sujeito deve refletir observando o resultado gerado, comparando-o com o que havia planejado. Se o resultado obtido coincidir com o esperado, a tarefa é concluída. Caso contrário, o aprendiz necessita depurar o programa, ou seja, rever o processo de solução do problema, observando os comandos solicitados ao computador e/ou as estratégias empregadas na solução. A seguir, o processo reinicia-se. Dessa forma, a autonomia é estimulada, visto que a relação aprendiz-software desloca o professor da posição de detentor do conhecimento. Além disso, Valente afirma que:

> [...] por intermédio da análise dos softwares, é possível entender que o aprender (memorização ou construção de conhecimento) não deve estar restrito ao software, mas à interação do aluno-software. Como foi mostrado por Piaget, o nível de compreensão está relacionado com o nível de interação que o aprendiz tem com o objeto e não com o objeto em si. (1999, p.71)

Outro importante aspecto da teoria Construcionista reside na possibilidade do aprendiz explicitar seus raciocínios, considerando que este ato favorece a construção dos conhecimentos. Assim, segundo Maltempi (2004), os aprendizes são estimulados a construir produtos que possam ser mostrados, discutidos, examinados e admirados, favorecendo a troca de ideias e opiniões que podem auxiliar e impulsionar o desenvolvimento de projetos mais complexos que envolvam mais conhecimentos.

Dessa forma, ao longo dessa pesquisa, utilizamos as ideias Construcionistas como pano de fundo para a utilização do software de Matemática dinâmica GeoGebra como um ambiente de investigação no qual os alunos pudessem criar e testar hipóteses, comparando seus resultados com os obtidos pelos colegas.

4.1 O software GeoGebra

O GeoGebra[2] é um software de Matemática dinâmica gratuito e multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina Geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. Atualmente, é um dois mais completos softwares para o ensino e aprendizagem Matemática e, por esse motivo, vêm atraindo a atenção de pesquisadores dedicados a explorar seu potencial nas aulas de Matemática. Estas pesquisas apontam possibilidades diversas para a abordagem dos conteúdos matemáticos escolares e demonstram a facilidade de uso do software. Estes motivos justificam a escolha desta ferramenta para o desenvolvimento da investigação aqui exposta.

Nesta pesquisa, utilizamos exclusivamente a Geometria dinâmica possibilitada pelo software. Desse modo, as ferramentas utilizadas nas construções propostas limitam-se às relacionadas ao desenho geométrico.

Destacamos, ainda, a versão do software utilizado, visto que algumas ferramentas necessárias para a obtenção dos resultados apresentados podem não estar presentes em versões anteriores a esta: GeoGebra 4.2.25.0.

4.2 O desenho em perspectiva e a Geometria dinâmica

Nesta pesquisa, como citado anteriormente, utilizamos o software GeoGebra considerando-o um ambiente de aprendizagem de Geometria. Nossa intenção é proporcionar aos alunos a capacidade de criar estratégias em um software de Geometria dinâmica para construir suas próprias representações em perspectiva cônica. Dessa forma, nesse ambiente, os alunos são desafiados a pensar sobre suas criações de um modo totalmente distinto do que se poderia obter apenas com desenhos coloridos em folhas de papel.

Segundo Gravina (2001), os ambientes de Geometria dinâmica são:

> "[...] ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem. São micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso da Geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador." (p. 82)

[2] Disponível para download em: < http://www.geogebra.org >. Acesso em 15 de julho de 2013.

Esta é uma das principais características do software GeoGebra. As construções em perspectiva feitas no papel, estáticas por natureza, impossibilitam não só o caráter dinâmico possibilitado pelo software, mas também excluem a necessidade dos conceitos geométricos para a representação, pois, segundo Gravina (2001),

> “[...] programas de Geometria dinâmica “oferecem o recurso de ‘estabilidade sob ação de movimento’: feita uma construção, mediante deslocamentos (*dragging*) aplicados aos elementos determinadores do objeto geométrico, o desenho na tela do computador [...] transforma-se mas preserva, nas novas instâncias, as relações geométricas impostas inicialmente à construção, bem como as relações delas decorrentes. (p. 83)”

Assim, o software apresenta-se como uma ferramenta capaz de desenvolver o olhar dinâmico sobre as representações bidimensionais daqueles objetos vistos e imaginados tridimensionalmente, tornando fundamental a compreensão e problematização dos conceitos geométricos, que passam a ter utilidade prática.

5 METODOLOGIA DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada no Colégio de Aplicação da UFRGS durante quatro encontros semanais com duas horas de duração ocorridos em maio de 2013. Foram selecionados seis alunos provenientes de duas turmas do oitavo ano (sétima série), com idades entre 12 e 13 anos, que demonstraram interesse pela proposta apresentada e tinham disponibilidade de horários para frequentar os encontros no turno inverso. Além disso, é importante destacar que estes alunos não foram selecionados por suas habilidades em Matemática ou, especialmente, em Geometria, pois um critério como este subjugaria os objetivos desta pesquisa. A limitação no número de participantes, por sua vez, é resultado do espaço físico disponibilizado pela escola. No horário pretendido não havia disponível um espaço capaz de comportar mais de seis alunos, visto que necessitávamos de um computador para cada participante. Nosso critério para a escolha de alunos nessa faixa etária advém da organização curricular adotada na escola. No oitavo ano os alunos iniciam seus estudos referentes à Geometria Euclidiana, indo além das ideias básicas desenvolvidas nos anos anteriores. Os conceitos ponto, reta e plano são apresentados e discutidos e passam a ser utilizados para desenvolver a compreensão acerca dos demais elementos que compõe a Geometria Euclidiana elementar. Desse modo, os alunos participantes tiveram o primeiro contato com diversos conceitos geométricos por meio desta pesquisa, como era nosso objetivo.

5.1 O método clínico de Piaget

A metodologia utilizada durante a coleta e análise dos dados obtidos ao longo da pesquisa foi embasada no método clínico de Jean Piaget, através do qual foram elaboradas questões para serem respondidas ao longo da investigação. Estas questões buscavam evidenciar de que modo os alunos transitariam entre o ambiente investigativo possibilitado pelos desenhos em folhas de papel e aquele propiciado pelo software GeoGebra. Este objetivo, de forma alguma, é simples, pois está diretamente relacionado à gênese do conhecimento. O pensamento não se coloca a vista como os movimentos ou as expressões faciais. Ele precisa ser provocado, investigado e analisado. Por esse motivo, o pesquisador deve planejar com cuidado seu método investigativo, do mesmo modo que um detetive busca solucionar um mistério. São as pistas que o conduzem na busca por respostas. Segundo Delval

(2002), o método clínico é justamente um procedimento de coleta e análise de dados que possibilita o estudo do pensamento das crianças. Este método se realiza mediante entrevistas e situações abertas, nas quais o pesquisador busca acompanhar o curso do pensamento do sujeito ao longo da situação, fazendo sempre novas perguntas, buscando esclarecer as respostas anteriores. Desse modo, algumas perguntas básicas são planejadas e outras surgem pelo encaminhamento dado pelo sujeito investigado. Além disso, é importante ressaltar que este método não apresenta um roteiro pronto a ser empregado em qualquer investigação.

A essência do método clínico é justamente a intervenção constante e sistemática do experimentador diante da conduta do sujeito. Desse modo, durante esta pesquisa, buscamos a todo o momento estabelecer a interação com os sujeitos investigados que, por terem a possibilidade de interagir entre si, visualizando os desenhos e as construções dos demais participantes, faziam perguntas ao grupo distintas das propostas pelo investigador, propunham soluções em conjunto e testavam as hipóteses criadas por outros, refutando-as quando necessário. Ou seja, a experiência distanciou-se muito de uma entrevista na qual o pensamento individual pode ser investigado pelo experimentador e passou a ser uma análise acerca das estratégias elaboradas pelo grupo de estudantes na busca pelas soluções para os problemas propostos. Por esse motivo, ressaltamos que o método clínico desenvolvido por Piaget não foi utilizado integralmente nesta pesquisa. Limitamo-nos a utilizá-lo como um modo de guiar a investigação tendo como objetivo desenvolver a análise sob o ponto de vista pedagógico. Além disso, pela impossibilidade de prevermos com precisão os caminhos que a investigação tomaria, optamos por gravar as falas e as ações dos participantes da pesquisa para serem analisadas posteriormente em detalhes, constituindo, assim, grande parte dos dados coletados.

A seguir, são expostas as atividades propostas ao longo das quatro semanas. Concomitantemente, são apresentadas as estratégias utilizadas pelos alunos para a investigação, execução e solução dos problemas apresentados. Optamos pela não identificação dos sujeitos investigados ao longo da pesquisa. Desse modo, cada sujeito é um aluno pertencente ao grupo investigado, não sendo nosso objetivo destacar a evolução individual ou a comparação entre indivíduos do grupo. Limitamo-nos a observar a evolução dos alunos de modo geral, aproximando a experiência do ambiente existente em uma sala de aula típica.

5.2 Primeiro encontro: o problema é posto e a busca pela solução tem seu início

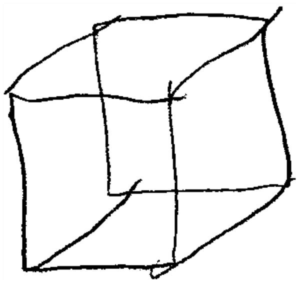
O grande objetivo do primeiro encontro consistia em apresentar o software GeoGebra aos alunos de modo que obtivessem familiaridade com seus recursos, pois, dessa forma, nas próximas semanas, poderíamos focar nossos esforços nas investigações Matemáticas ao invés de dispender o pouco tempo disponível para os alunos adquirirem apenas o domínio sobre a ferramenta. No entanto, o primeiro encontro não poderia ser somente um tutorial para o uso do software. Decidimos, assim, iniciar a discussão sobre o problema da representação de objetos tridimensionais em superfícies planas através do desenho em perspectiva sobre malhas (quadriculada e isométrica), pois os alunos poderiam compreender de forma mais significativa o problema apresentado e utilizariam as ferramentas básicas do software para representar objetos simples, como cubos, já no primeiro encontro.

Representar objetos tridimensionais no plano não é apenas uma tentativa de representação do real, é também uma representação do espaço através do ponto de vista do sujeito, ou seja, é a reconstrução do objeto em sua mente. Dessa forma, desenvolver a habilidade de olhar os objetos no espaço, observando e compreendendo suas características é fundamental para o estudo da Geometria. Segundo os estudos de Piaget e Inhelder (1993), crianças com idade de aproximadamente dez a onze anos já apresentam as estruturas cognitivas necessárias para representar objetos tridimensionais no plano. Nesse momento a criança é capaz de diferenciar seu ponto de vista dos demais. Partindo dessas ideias, para o primeiro encontro foram planejadas algumas atividades que buscaram investigar a compreensão dos seis alunos acerca da organização do espaço que os rodeia.

Na primeira etapa do encontro houve uma conversa em grupo na qual os alunos tomaram conhecimento dos objetivos da pesquisa. É claro que os objetivos já tinham sido apresentados no momento do convite para a participação, mas dessa vez deixamos claro que se tratava de uma pesquisa e não apenas uma atividade extra. Nossa intenção era que os alunos compreendessem a necessidade da gravação de suas falas e ações e que, para o sucesso da pesquisa, seria fundamental que expressassem suas ideias de maneira livre. Nesse momento, percebemos o engajamento dos alunos que se sentiram, de certo modo, participantes de uma importante investigação cientifica, na qual eram os protagonistas. Esse posicionamento, sem dúvida, tornou a coleta de dados muito eficaz.

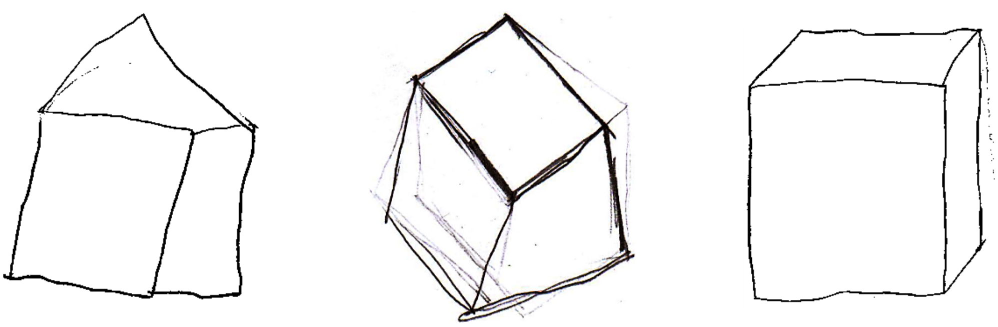
Após, posicionamos os seis alunos em torno de uma mesa e dispomos um cubo de madeira no seu centro. Pedimos, então, que cada aluno desenhasse aquele cubo conforme seu ponto de vista. Ou seja, deveriam desenhar o cubo que estavam vendo e não aquele existente nos seus pensamentos. O cubo era observado sob distintos pontos de vistas. Assim, cada desenho deveria ser também distinto. Subitamente, os alunos perceberam a complexidade de tal tarefa: "desenhar um cubo é fácil, mas desenhar o cubo como estou vendo é difícil", disse um dos participantes. Para aquele aluno, desenhar um cubo era fácil, pois conhecia uma maneira simples e eficaz de representar um cubo sobre uma superfície plana: desenhamos dois quadrados parcialmente sobrepostos e então ligamos os vértices equivalentes com segmentos. Mostrou-me com o desenho a seguir:

Figura 14 – Representação de um cubo feita por um aluno.
Fonte – Arquivo pessoal.



Os alunos compreendiam as características que definem o cubo. Sabiam que possui seis lados quadrados idênticos. Contudo, essa compreensão não era suficiente para reproduzi-lo sobre a folha de papel. Um dos alunos, inclusive, alegou ser impossível obter a representação daquele cubo, pois, segundo ele, tratava-se de um objeto 3D, referindo-se às três dimensões do cubo. Nas suas palavras: "não consigo desenhar para dentro do papel; não consigo desenhar uma reta entrando no papel; o papel não tem profundidade". Os demais alunos concordaram com sua colocação e, a partir desse momento, passaram a buscar pontos de vista favoráveis ao desenho. Na imagem abaixo, algumas representações obtidas:

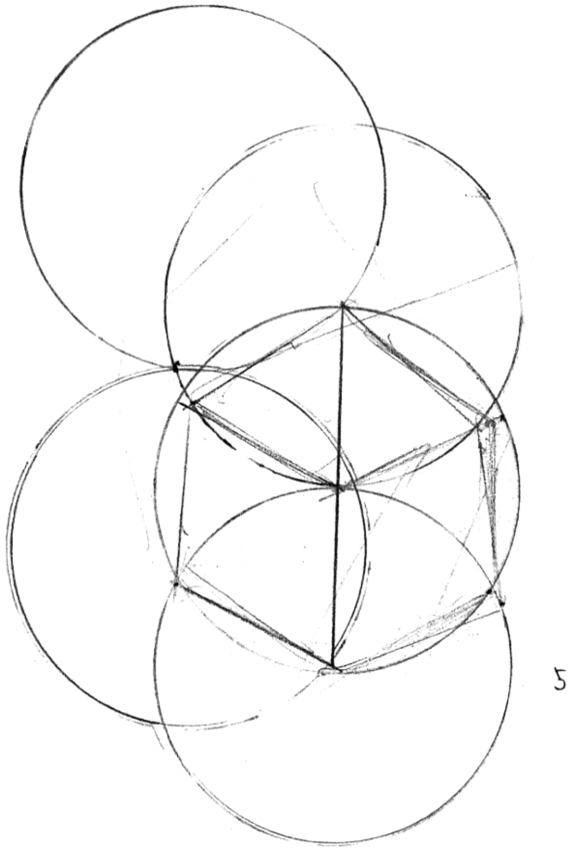
Figura 15 – Representações do cubo obtidas pelos alunos.
Fonte – Arquivo pessoal.



É claro que os alunos percebiam que seus desenhos não estavam retratando fielmente o objeto que estavam vendo. Até brincavam com as deformações nos cubos que haviam desenhado. Porém, mesmo percebendo que seus desenhos não representavam o que viam, permaneciam sem conseguir melhorá-los. Tentavam desenhar o que estava à vista sem recorrer à imagem mental que possuíam do cubo.

No entanto, afastado do grupo, timidamente um aluno buscava o segredo que permitiria tal representação. Ele supôs que deveria haver alguma regra que tornasse aquela tarefa simples. Perguntou se poderia usar uma régua. Pegou a régua e constatou que as arestas do cubo mediam 5 cm de comprimento. Perguntou, então, se poderia usar um compasso e passou a utilizá-lo para fazer diversas circunferências, marcando suas interseções, encontrando pontos, traçando segmentos, apagando e recomeçando. Tentou durante 30 minutos sem ficar satisfeito com os resultados obtidos. Parecia determinado a solucionar o problema, mas acreditava que o segredo estava na precisão dos números, afinal era um professor de Matemática que o estava desafiando, e por isso fazia contas com as medidas obtidas. Abaixo, uma das suas tentativas:

Figura 16 – Tentativa de representação do cubo.
Fonte – Arquivo pessoal.



A seguir, substituímos o cubo de madeira por outro com as mesmas dimensões, porém com as faces coloridas. Essa substituição nos auxiliaria posteriormente na comparação entre os pontos de vista de cada aluno, pois pedimos, também, que escolhessem um dos colegas para reproduzir o seu ponto de vista em relação ao cubo. Ou seja, cada aluno deveria desenhar o cubo a partir do olhar de outro observador sem se colocar naquela posição. Deveriam apenas imaginá-la. Essa tarefa mostrou-se significativamente mais complexa para todos. Abaixo, podemos visualizar dois exemplos de representações obtidas pelos alunos e as fotos tiradas por eles evidenciando os seus pontos de vista sobre o cubo:

Figura 17 – Representações do cubo sob os pontos de vista dos alunos.
Fonte – Arquivo pessoal.

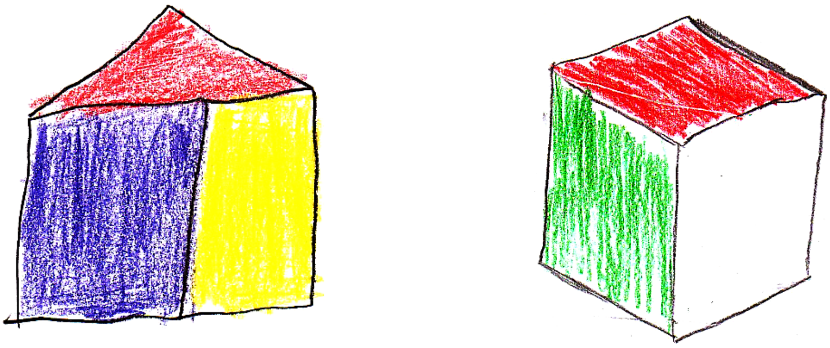
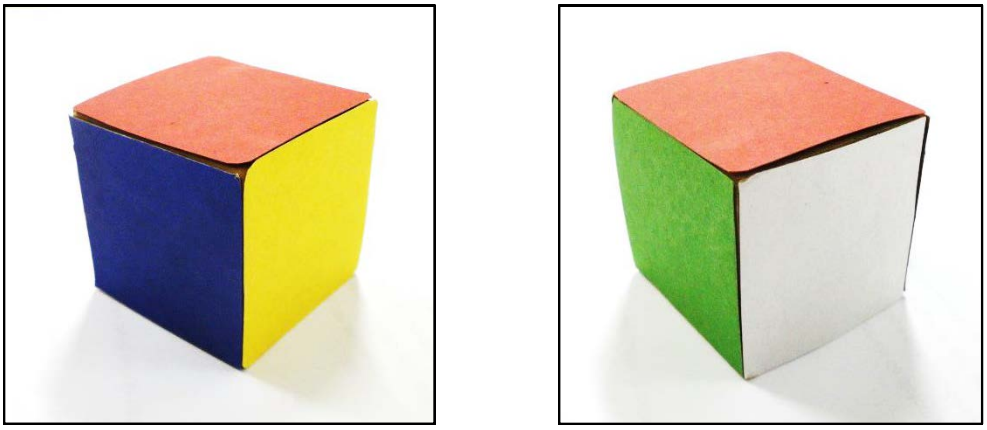
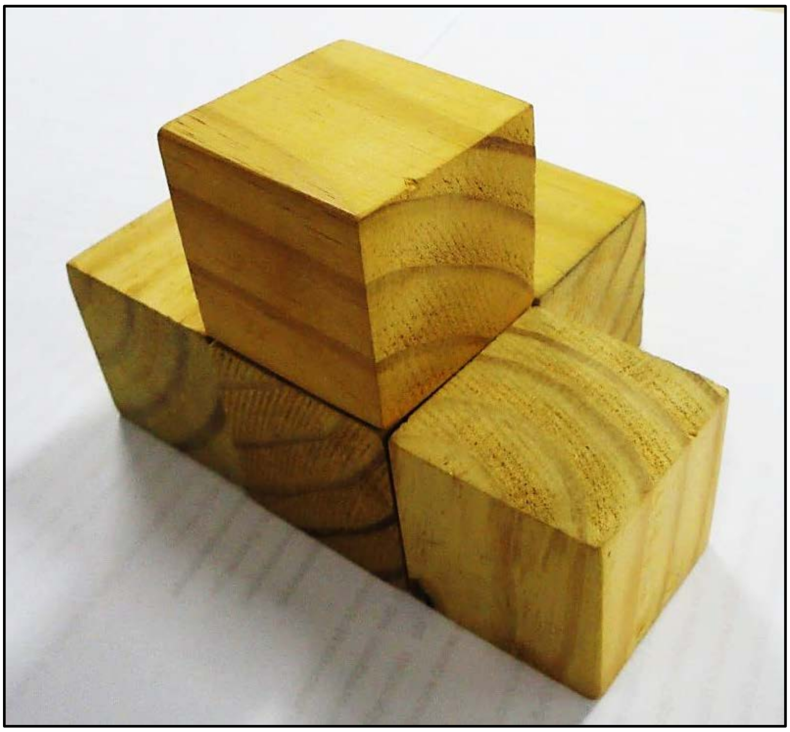


Figura 18 – Pontos de vista dos alunos.
Fonte – Arquivo pessoal.



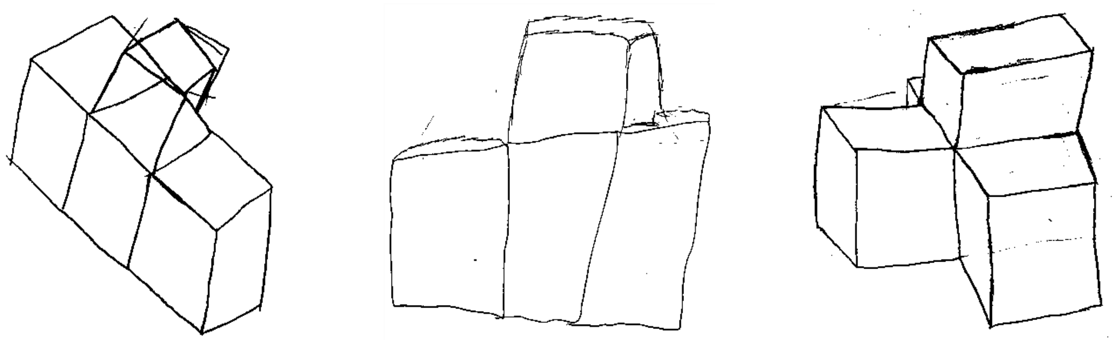
Após, repetimos a tarefa substituindo o cubo por um conjunto de cubos com as mesmas dimensões. Este conjunto foi disposto de maneira que existisse sobreposição entre os cubos. Assim, poderíamos averiguar quais as estratégias dos alunos para a representação do conjunto de cubos, observando como as relações entre cada elemento do conjunto seriam apresentadas nos seus desenhos. A disposição dos cubos deu-se do seguinte modo:

Figura 19 – Conjunto de cubos sobre a mesa.
Fonte – Arquivo pessoal.



Os alunos colocaram-se a buscar estratégias para obter a representação do conjunto de cubos. Agora, era fundamental comparar as características de cada cubo em relação aos outros do conjunto. Após algum tempo, perceberam que o problema não era muito mais complexo do que o anterior. Existiam mais cubos a serem desenhados, mas ainda eram cubos idênticos. Se conseguissem desenhar um deles, conseguiriam desenhar os demais, afirmou um dos alunos. Após minutos de investigação e folhas rabiscadas surgiram os resultados, em alguns casos melhores que os obtidos com apenas um cubo sobre a mesa. Abaixo, algumas representações:

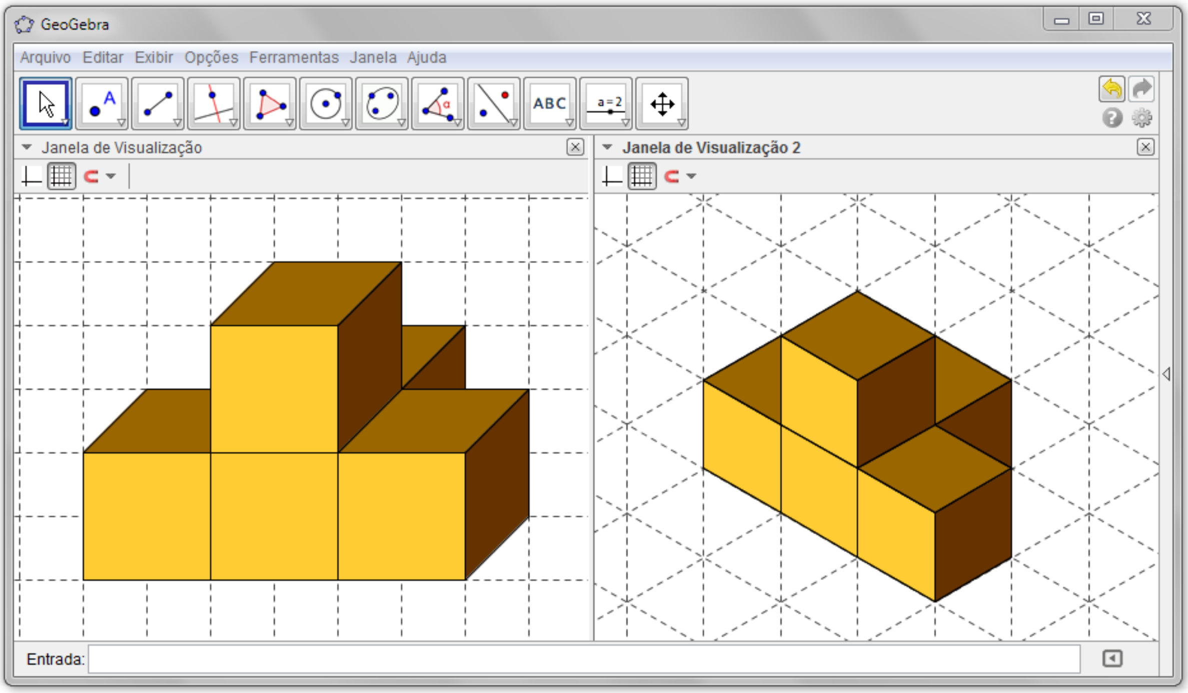
Figura 20 – Representações do conjunto de cubos.
Fonte – Arquivo pessoal.



Neste momento, foi possível perceber que os alunos já tinham compreendido as dificuldades presentes na representação de objetos tridimensionais sobre uma superfície plana, como era o nosso objetivo. Além disso, estavam interessados e focados na investigação que os levaria a compreender as regras que possibilitariam o desenho realístico daqueles cubos e de outros objetos mais interessantes e complexos. Estavam ansiosos por respostas.

Visando problematizar ainda mais a tarefa de desenhar aquele conjunto de cubos, apresentamos aos alunos o desenho sobre malhas (quadriculada e isométrica). Essa apresentação deu-se por meio do software GeoGebra. Nenhum dos alunos havia utilizado o software anteriormente. Desse modo, fizemos uma breve apresentação acerca dos seus principais recursos. Cada aluno acompanhou a apresentação em seu computador. Rapidamente compreenderam a organização e a manipulação do software, mesmo sem nunca terem utilizado um recurso semelhante. Devemos destacar que o GeoGebra mostrou-se extremamente intuitivo para este grupo. Mostramos, então, aos alunos como exibir duas janelas de visualização no software. Nessas janelas foram mostradas as duas malhas (quadriculada e isométrica). Assim que os alunos visualizaram a malha isométrica, um deles exclamou: “um monte de cubos!”. Naquele momento perceberam como poderiam utilizar aquelas malhas para desenhar o conjunto de cubos. E o fizeram. Abaixo, um dos resultados obtidos:

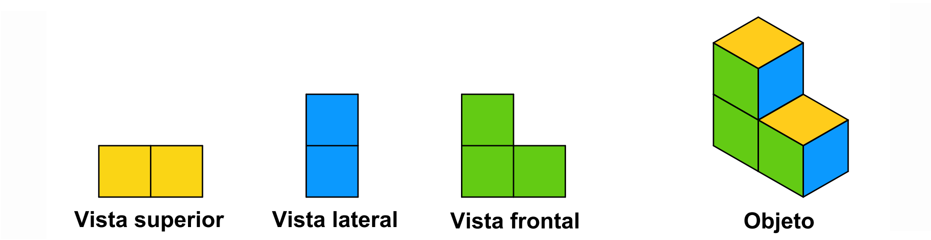
Figura 21 – Conjunto de cubos reproduzidos sobre as malhas.
Fonte – Arquivo pessoal.



Os alunos não tiveram dificuldades na representação dos cubos utilizando as malhas e, tampouco, utilizando o software. Nosso objetivo novamente havia sido atingido.

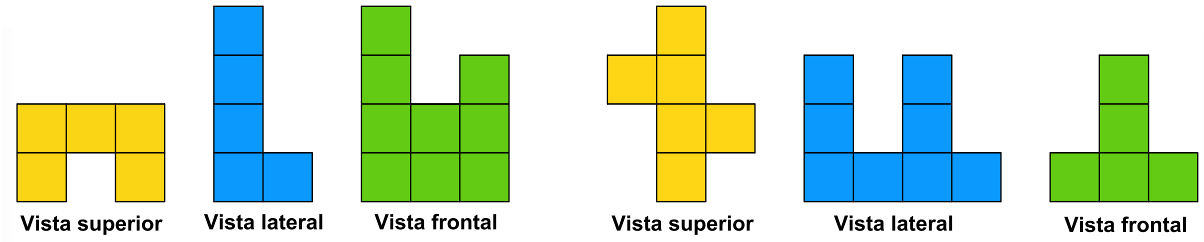
Resolvemos desafiar os alunos mais uma vez. Nosso objetivo, agora, era observar como os alunos enfrentariam o problema oposto. Perguntamos: dada a representação de um conjunto de cubos, como construir fisicamente este conjunto? Ou seja, mostramos ao grupo de participantes uma representação de um conjunto de cubos para que eles, utilizando os cubos de madeira, montassem tal representação. No entanto, a representação seria distinta: mostraríamos as vistas frontal, lateral e superior do conjunto de cubos, como na imagem abaixo:

Figura 22 – Vistas de um conjunto de cubos.
Fonte – Arquivo pessoal.



Assim, os alunos deveriam reproduzir estes dois conjuntos:

Figura 23 – Vistas dos dois conjuntos de cubos.
Fonte – Arquivo pessoal.



Esta tarefa mostrou-se a mais desafiadora até aquele momento. Os cubos eram posicionados e reposicionados inúmeras vezes e a configuração correta não era obtida. Quando uma das vistas era corrigida, outra era desfeita. Por muitos minutos esse desafio moveu os alunos. Desistiram da individualidade e decidiram tentar resolver o problema em conjunto. Eram doze mãos movimentando aqueles cubos de madeira. Então conseguiram. Acabaram, inclusive, encontrando mais de uma solução para cada conjunto de cubos.

Novamente eles haviam se surpreendido com a complexidade de uma tarefa que a princípio parecia simples.

As duas horas haviam acabado e os alunos ainda estavam lá, com o interesse investigativo renovado a cada nova questão proposta. Pediram o software para que pudessem experimentá-lo em suas casas e garantiram a presença no próximo encontro.

5.3 Segundo encontro: novas questões, outras soluções

Sete dias depois ocorreu o segundo encontro. Três alunos adiantaram-se, ansiosos, trazendo novidades: haviam experimentado o software em suas casas. Essa notícia, sem dúvida, foi muito bem recebida, pois ampliava os horizontes de nosso planejamento, permitindo-nos promissoras previsões acerca do desenvolvimento da pesquisa.

Iniciamos o encontro retomando as discussões realizadas na semana anterior, afinal, estes dias poderiam tê-los feito esquecer o que havíamos iniciado. Após, apresentamos aos alunos o nosso objetivo para aquele encontro: expandir a discussão sobre o problema da representação de objetos tridimensionais sobre uma superfície plana, indo além dos problemas envolvendo cubos de madeira. Para isso, inicialmente, levamos o grupo de alunos a percorrer o interior da escola, fotografando-o. Desse modo, foi possível iniciar a discussão sobre os principais conceitos relacionados ao desenho em perspectiva cônica. Essa discussão seria mais tarde aprofundada utilizando as fotos tiradas pelos alunos destes distintos espaços físicos. A seguir, por exemplo, duas fotografias tiradas pelos alunos:

Figura 24 – Fotografia do corredor da escola.
Fonte – Arquivo pessoal.

Figura 25 – Fotografia do pátio da escola.
Fonte – Arquivo pessoal.

Estas fotos expressam com precisão a discussão iniciada antes de suas capturas. Quando estávamos no corredor da escola (figura 24), perguntamos aos alunos se a largura do corredor seria a mesma em qualquer lugar que medíssemos. Espontaneamente, todos responderam que sim. Quando questionados perante a certeza das respostas, contudo, não apresentaram a mesma convicção. Até que um aluno justificou sua resposta contando o número de lajotas que separavam as duas paredes. Como em qualquer lugar eram sete lajotas separando as paredes laterais, o corredor deveria ter a mesma largura em todo o seu comprimento. Essa afirmação convenceu o grupo, pois não era uma hipótese plausível que aquelas lajotas tivessem dimensões distintas umas das outras. Então, os questionamos: se a largura é sempre a mesma, por que o fundo do corredor parece-nos menor, quando o olhamos? A resposta dada pelos alunos foi simples e precisa. Alegaram se tratar da distância. Continuamos conversando sobre a nossa percepção acerca das dimensões dos objetos conforme nos afastamos deles e acabamos concluindo uma ideia fundamental para o desenho em perspectiva cônica: quanto mais distante um objeto, menor ele parece ser. Partindo dessa ideia, os alunos decidiram posicionar-se para as fotos buscando demonstrar com seus próprios corpos a veracidade dessa conclusão. Por esse motivo, nas figuras 24 e 25 (página anterior) os vemos afastados uns dos outros.

Após, voltamos à sala, onde passamos a observar algumas fotos e pinturas buscando ampliar a discussão. Perguntamos aos alunos: como veríamos a estrada estando dentro do carro que a percorre? As respostas apontaram a compreensão acerca da ideia básica concluída anteriormente. Todos afirmaram que a estrada deveria diminuir até que não fosse mais possível vê-la. Mostramos, então, a fotografia abaixo para que a comparassem com a imagem mental que haviam construído:

Figura 26 – Estrada.
Fonte – http://www.google.com.br/imghp.

Os alunos perceberam que todos os elementos da fotografia seguiam a mesma regra. As árvores parecem menores quanto mais distantes estão, assim como as linhas brancas marcadas sobre a estrada.

Após, mostramos a fotografia a seguir (figura 27) e os questionamos: já sabemos que objetos distantes parecem menores quando comparados com objetos próximos. Mas por que nessa fotografia percebemos que são as montanhas maiores que estão mais distantes? Esta questão pode parecer simples, mas a compreensão que permite a sua resposta esconde outra importante ideia para a representação do espaço sobre uma superfície plana, esta fundamental para os artistas: os tons de verde revelam o afastamento das montanhas. Para um pintor, ignorar tal fato ao tentar representar essa paisagem sobre uma tela seria como sentenciar sua obra ao fracasso.

Figura 27 – Montanhas.
Fonte – http://www.panoramio.com/photo/36505523.

Utilizamos a imagem acima para iniciarmos a discussão sobre algumas obras de pintores renascentistas buscando investigar como os alunos interpretavam a sensação de profundidade transmitida por essas pinturas. A primeira obra apresentada aos alunos foi o quadro do pintor italiano Pietro Perugino, “Entrega das Chaves”:

Figura 28 – Pietro Perugino, “Entrega das Chaves” (1481 – 1482).
Fonte – http://www.italian-renaissance-art.com/Pietro-Perugino.html.

Pedimos, então, que os alunos observassem atentamente a obra acima e perguntamos: o que percebem de interessante nessa obra? Obviamente as respostas foram tão variadas quanto a pergunta às permitem ser. Observaram as montanhas ao fundo pintadas em distintos tons azulados; as linhas marcadas sobre o chão, semelhantes aquelas do corredor da escola; e muitas outras observações ligadas à obra, mas não à investigação. Minutos depois, perguntamos: como Perugino sabia qual deveria ser o tamanho das pessoas ao fundo para que a cena fosse realística? Nesse momento, os alunos, com certa hesitação, em conjunto concluíram que ele deveria ter usado da sorte e da experiência como pintor para obter um bom resultado. Então, contamos-lhes que havia como saber com precisão o tamanho de cada pessoa e que em breve poderíamos descobrir como fazê-lo. Continuamos observando algumas outras obras de pintores renascentistas e os alunos seguiram buscando compreender o que havia por trás daqueles quadros. Perguntávamos o que viam nas imagens e relações surgiam a todo o momento. Quando conversamos sobre a obra "A Escola de Atenas" do pintor italiano Rafael Sanzio (figura 29), por exemplo, os alunos a comparam com a fotografia do pátio da escola, figura 25 (página 42), e observaram a semelhança entre os arcos da cobertura e o teto da construção retratada na obra.

Figura 29 – Rafael Sanzio, "A Escola de Atenas" (1509 – 1510).
Fonte – http://www.italian-renaissance-art.com/Raphael.html.

Nosso objetivo havia sido alcançado. Os alunos estavam mais atentos na busca pela compreensão das regras que os permitiriam a representação de objetos tridimensionais sobre superfícies planas. E mais do que atentos, estavam motivados a obter tais regras. Passaram a olhar as imagens com mais cuidado, conjecturando hipóteses e as apresentando ao grupo. Ou seja, estavam desenvolvendo o olhar fundamental para a compreensão do espaço, por sua vez indispensável para o desenho em perspectiva. Assim, terminamos o segundo encontro.

5.4 Terceiro encontro: a perspectiva cônica começa a ser compreendida

Neste encontro ocorreu, certamente, uma experiência investigativa distinta de todas as outras já vivenciadas até aquele momento durante a pesquisa. Descobertas ocorriam por todos os lados, atribuindo significado ao que estávamos construindo: as ideias básicas que permitiriam a representação de objetos tridimensionais sobre superfícies planas. Os alunos haviam compreendido no encontro anterior que não nos limitaríamos às discussões sobre cubos e, por esse motivo, estavam tomados por expectativas. Além disso, nesse encontro, mais do que nos anteriores, os alunos transitaram entre os desenhos feitos em folhas de papel e as construções criadas no software GeoGebra, evidenciando, em diversas situações, como compreendiam os conceitos geométricos nesses dois ambientes distintos.

Iniciamos o encontro retomando a discussão realizada na semana anterior e analisamos novamente as fotografias obtidas. Após, solicitamos ao grupo de alunos a escolha de uma fotografia sobre a qual nos debruçaríamos para o prosseguimento da investigação. Os alunos, então, selecionaram a fotografia do corredor da escola (figura 24), que foi projetada na parede para que todos pudessem visualizá-la em detalhes. Essa escolha talvez tenha sido motivada pela discussão realizada no encontro anterior sobre o corredor, pois os alunos já haviam refletido sobre aquele local e, por esse motivo, poderiam compreendê-lo melhor do que os demais locais fotografados. A seguir, pedimos que desenhassem aquele corredor conforme o ponto de vista da fotografia, ou seja, deveriam basicamente desenhar o que viam na imagem.

Agora, o objeto a ser desenhado não era um simples cubo de madeira ou então um conjunto de cubos dispostos harmoniosamente sobre a mesa. Os alunos deveriam reproduzir sobre a folha de papel o corredor que percorriam diariamente. Essa tarefa, sem dúvida, mostrou-se extremamente desafiadora. Os alunos foram levados a perceber que nunca haviam olhado para aquele corredor com atenção e que os detalhes que o compõe não eram observados quando o percorriam. No entanto, para o desenho, aqueles detalhes eram fundamentais.

Oferecemos aos alunos réguas e os deixamos desenhar. Havíamos planejado deixá-los desenhar de maneira livre e não pretendíamos interferir em suas representações, porém isso não foi possível. Enquanto desenhavam sentiam a necessidade de contar como estavam pensando, expondo suas estratégias para superar as evidentes dificuldades e nos questionavam se aquele modo de ação estaria correto. Cada traço era acompanhado de uma pergunta cuja resposta pudesse guiar os demais traços. Tentavam utilizar as discussões realizadas como argumentos para justificar seus desenhos. Abaixo, podemos visualizar duas imagens: a figura 30 mostra um dos participantes construindo uma das suas várias tentativas de representação do corredor e, ao lado, a figura 31 mostra o resultado obtido:

Figura 30 – Aluno desenhando o corredor.
Fonte – Arquivo pessoal.

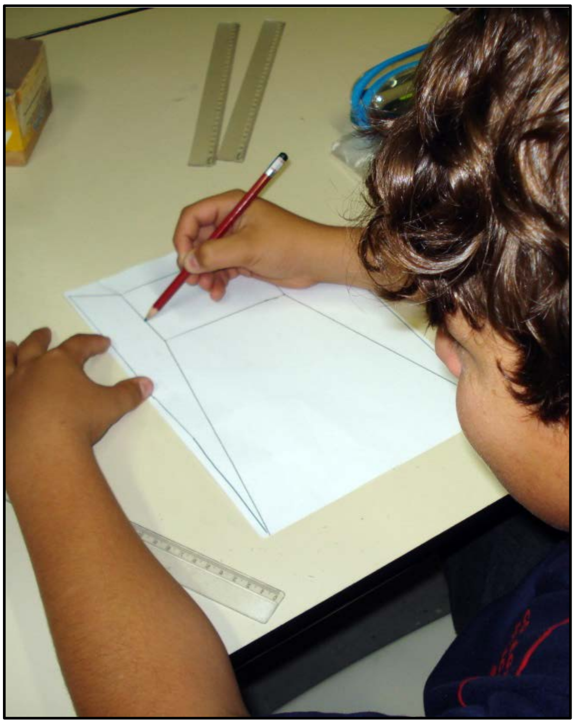
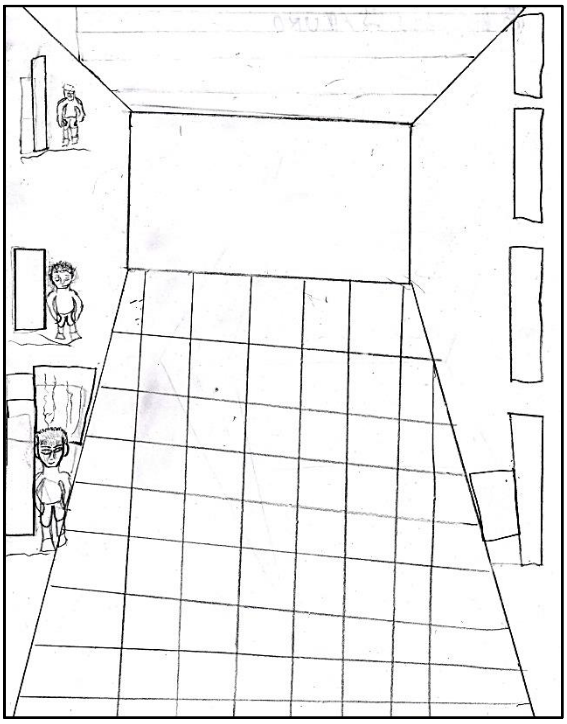


Figura 31 – Representação do corredor.
Fonte – Arquivo pessoal.



Este aluno, assim como os demais, tentou por diversas vezes desenhar aquele corredor sem obter resultados satisfatórios segundo seus próprios critérios. Diversas folhas foram amassadas e resgatadas posteriormente para análise. Observando o desenho acima, podemos perceber que alguns elementos presentes em sua representação mental do corredor foram reproduzidos sobre o papel: as sete lajotas utilizadas para garantir a largura do corredor estão presentes no desenho (observando o número de lajotas ao fundo); o fundo do corredor parece menor, assim como os alunos afastados têm seus tamanhos diminuídos. Estas ideias são conclusões obtidas em discussões anteriores e, talvez por esse motivo, façam-se presentes no desenho. No entanto, as lajotas não aparentam diminuir de tamanho, ou seja, as linhas que marcam as divisões no chão foram desenhadas paralelamente. Este fato demonstra a compreensão de que as lajotas possuem todas as mesmas dimensões. Neste momento é possível perceber o choque entre os conceitos geométricos presentes em sua representação mental do corredor e aqueles presentes na representação sobre o papel. Observando os demais desenhos, percebemos, então, que os alunos haviam se deparado com esta questão, mesmo que não a tenham percebido: ora, se as lajotas têm mesmas dimensões, então as linhas que demarcam o chão são paralelas. Mas na fotografia estas mesmas linhas não são paralelas? Em todos os desenhos as linhas apresentavam-se distorcidas em relação à realidade expressa pela fotografia. Abaixo, outros exemplos de representações obtidas por outros alunos:

Figura 32 – Exemplo de representação do corredor.
Fonte – Arquivo pessoal.

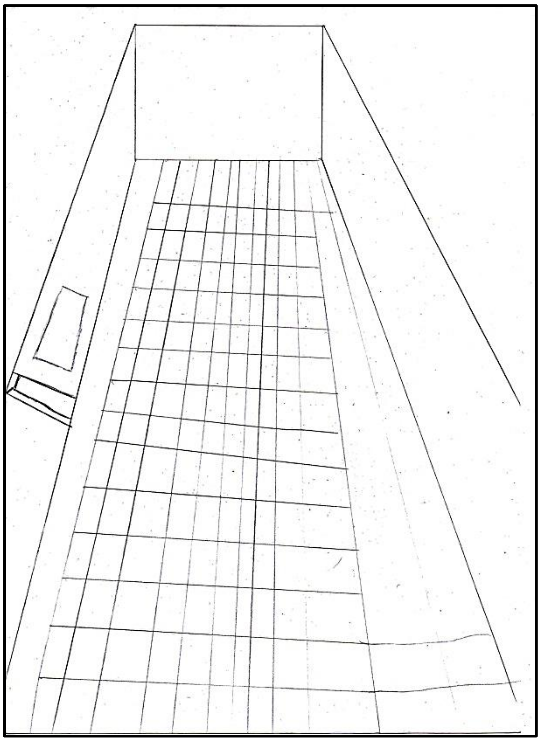
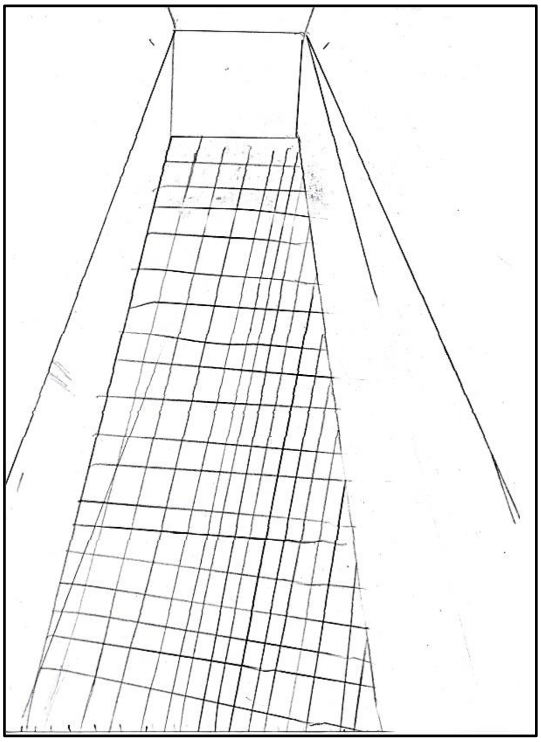


Figura 33 – Exemplo de representação do corredor.
Fonte – Arquivo pessoal.



Os desenhos acima podem parecer rudimentares, mas demonstram como os conceitos geométricos estão presentes nas representações mentais do corredor destes alunos e como esses conceitos são reproduzidos sobre a folha de papel.

Enquanto os desenhos eram produzidos, surpreendentemente um dos alunos fez uma observação que mudou o rumo que estávamos seguindo. Este aluno percebeu que o corredor não era muito diferente de uma caixa de papelão que estava sobre a mesa (a caixa onde as réguas eram guardadas). A caixa e o corredor possuíam diversos elementos em comum, segundo ele. “Se fossemos pequenos e estivéssemos dentro da caixa, ela seria parecida com o corredor”, afirmou. Esta observação expressou um olhar distinto sobre o corredor: aquele aluno o estava vendo como uma grande caixa. E assim que começamos a discutir aquela afirmação, outro aluno apontou: “e a caixa é parecida com um cubo; é um cubo esticado.” E outras comparações surgiram em sequência. A sala onde estávamos também era uma caixa, assim como o monitor de um dos computadores, o armário e diversos outros objetos. Todos poderiam ser imaginados como caixas. Até mesmo os carros eram parecidos com caixas. Desse modo, os alunos perceberam que precisavam compreender como desenhar uma caixa e, então, diversos outros desenhos seriam instantaneamente facilitados por aquela descoberta. Passamos a observar atentamente a caixa sobre a mesa. No entanto, desenhar aquela caixa não era uma tarefa muito mais simples do que desenhar o corredor fotografado.

Decidimos, então, utilizar a caixa como modelo. Ela seria desenhada em perspectiva cônica e, a partir dela, seriam discutidos os conceitos geométricos presentes na sua representação bidimensional. Nesse momento, os alunos foram convidados a observar o desenho sendo construído. Desse modo, a partir do desenho colaborativo, poderíamos questionar o grupo sobre os passos a serem seguidos para a obtenção daquela representação, investigando, também, a compreensão dos alunos acerca dos conceitos geométricos presentes no desenho. A caixa (sem tampa) foi reposicionada sobre a mesa, como mostra a imagem a seguir:

Figura 34 – Caixa sobre a mesa.
Fonte – Arquivo pessoal.

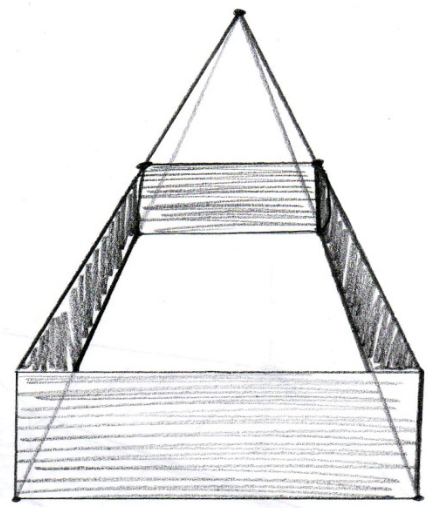
Este posicionamento foi escolhido por facilitar o desenho em perspectiva cônica com um ponto de fuga. Além disso, ao posicionar a caixa dessa forma, tornaríamos o desenho obtido semelhante à fotografia do corredor, evidenciando a relação discutida anteriormente.

Iniciamos o desenho perguntando ao grupo como desenhar a frente da caixa. Um dos alunos respondeu: “basta desenhar um quadrado”. Rapidamente, outros alunos o corrigiram: “é um retângulo!” Perguntamos, então, o que é um ângulo reto. Com certa hesitação, alguns responderam se tratar de um ângulo cuja medida é 90°. No entanto, não compreendiam o significado do termo “grau”. Além disso, não relacionavam o polígono retângulo aos ângulos retos. Ou seja, para os alunos, a forma geométrica que conheciam pelo nome retângulo não relacionava-se aos conceitos que a definem, pois estes conceitos eram desconhecidos. Apenas diferenciavam retângulos e quadrados observando os comprimentos dos quatro lados, iguais ou não. Essa dissociação entre os conceitos e as formas não dificultaria o desenho sobre a folha de papel, visto que podemos desenhar um retângulo sem conhecer sua definição (geométrica), mas impossibilitaria o desenho no software, como veremos adiante. Desse modo, necessitávamos discutir e problematizar estes conceitos nessa etapa, antecipando os prováveis motivos que pudessem tornar a utilização do software improdutiva ou menos significativa.

A seguir, perguntamos: “como desenhar o fundo da caixa?” Motivados pelas discussões realizadas até aquele momento, os alunos responderam, quase em coro: “o fundo da caixa deve ser menor!”. Então, perguntamos: “como veríamos o fundo da caixa se ela fosse muito comprida?”. Os alunos responderam assertivamente: “o fundo seria muito pequeno e quase não o veríamos”. Observaram, inclusive, a semelhança com a estrada vista e imaginada anteriormente. Desse modo, concluímos, de forma preliminar, a existência do ponto de fuga e da linha do horizonte. Pretendíamos, nesse momento, mostrar aos alunos diversas imagens com o objetivo de evidenciar e concretizar a existência do ponto de fuga. No entanto, percebemos que esse procedimento poderia dificultar a análise das estratégias dos alunos quando solicitados a desenhar individualmente aquela caixa ou o corredor. Ou seja, as imagens poderiam influenciar as construções e relações que estavam sendo construídas pelos alunos, fazendo-os repetir o que estava posto ao invés de reproduzir sobre o papel o que estava em seus pensamentos.

Prosseguimos com o desenho acrescentando o ponto de fuga e mostramos aos alunos como poderíamos desenhar o fundo da caixa tomando como suporte as linhas que ligavam os vértices do retângulo (frente da caixa) ao ponto de fuga. Mostramos que bastaria desenhar o retângulo que representaria o fundo da caixa colocando seus vértices sobre as linhas recém criadas. Selecionamos, então, uma posição para o fundo da caixa, ou seja, decidimos o quão distante o fundo da caixa estaria representado no desenho. Essa escolha, por ser aleatória, trouxe desconfiança aos alunos. No entanto, aceitaram o passo da construção. Após, desenhamos o retângulo e concluímos o fundo da caixa. Os alunos observaram que as demais faces também haviam sido obtidas e que, portanto, havíamos finalizado a representação bidimensional da caixa que víamos sobre a mesa. A figura a seguir mostra o resultado obtido:

Figura 35 – Caixa desenhada em perspectiva cônica.
Fonte – Arquivo pessoal.



A seguir, pedimos que os alunos tentassem desenhar a caixa como havíamos acabado de fazer. Após alguns minutos, todos conseguiram desenhar suas caixas em perspectiva cônica com um ponto de fuga. Em seguida, decidimos explorar a comparação entre a caixa e outros objetos, discutida anteriormente. Para isso, perguntamos aos alunos: “como desenharíamos uma porta e uma janela nessa caixa que acabamos desenhar?” Ou seja, transformaríamos aquela caixa desenhada em outro objeto, semelhante a uma casa, com portas e janelas. Um dos alunos pegou o lápis e desenhou uma porta na face frontal da caixa. Os demais decidiram desenhar a porta na mesma posição. Desse modo, a porta era representada por um retângulo que tinha seus segmentos paralelos aos respectivos segmentos do retângulo que representava a face frontal da caixa. Pedimos, então, que desenhassem uma janela ou uma porta em uma das faces laterais da caixa. As imagens a seguir apresentam os desenhos feitos por dois alunos:

Figura 36 – Representação do corredor/casa.
Fonte – Elaborada pelo autor.

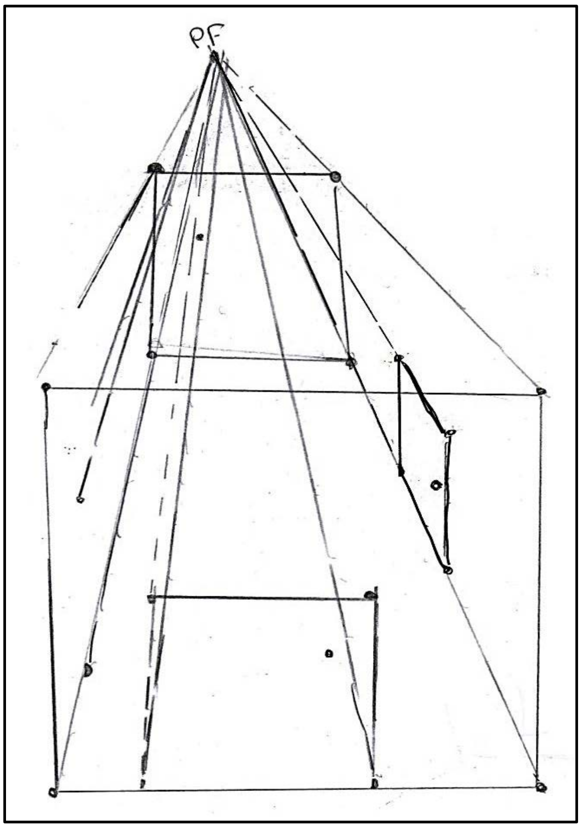
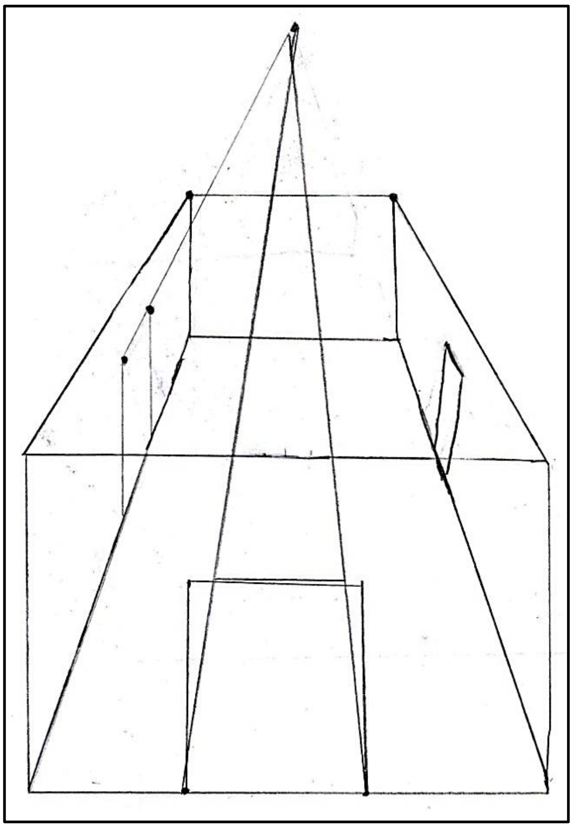


Figura 37 – Representação do corredor/casa.
Fonte – Elaborada pelo autor.



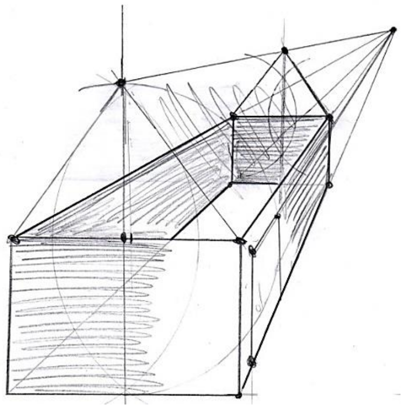
O aluno autor do desenho à esquerda (figura 36) utilizou o ponto de fuga para desenhar a porta lateral, traçando corretamente os segmentos que a compõe. O aluno autor do desenho à direita (figura 37), no entanto, iniciou o desenho da porta lateral (à direita) sem considerar o ponto de fuga. Assim, os segmentos laterais que compõe a porta apresentam-se distorcidos. Além disso, ambos ligaram as bases das portas frontais ao ponto de fuga através de segmentos, objetivando visualizar os respectivos tamanhos das portas se desenhadas ao fundo. Um dos alunos percebeu, inclusive, que além do tamanho da porta, era possível conhecer a posição ocupada por ela se desenhada no fundo.

Após, solicitamos aos alunos que repetissem o desenho reposicionando o ponto de fuga. Os alunos, desse modo, foram levados a perceber a relevância da escolha da posição do ponto de fuga para a obtenção da representação de um determinado ponto de vista sobre o objeto.

Nesse momento, as ideias básicas para o desenho em perspectiva estavam tomando forma e os alunos pareciam compreendê-las. No entanto, não havíamos ainda iniciado a discussão sobre os conceitos geométricos presentes naquelas representações. Não nos preocupamos, por exemplo, com a precisão dos traçados das linhas paralelas e perpendiculares, pois acreditamos que os alunos não perceberiam a relevância desses conceitos para o desenho se iniciássemos a discussão mostrando como utilizar um esquadro. Além disso, se apontássemos antecipadamente a necessidade do paralelismo/não-paralelismo e do perpendicularismo nos desenhos das linhas para a representação em perspectiva sobre a folha de papel, impossibilitaríamos a investigação acerca da compreensão dos alunos quanto a presença desses conceitos no desenho.

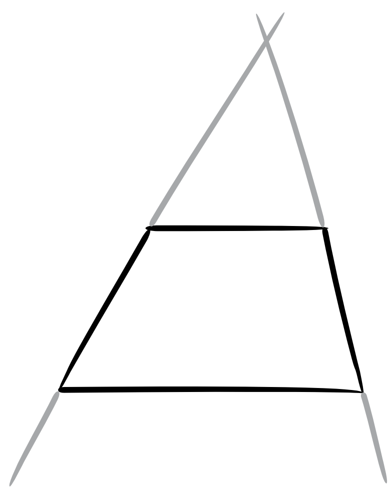
Os conceitos geométricos apresentaram-se à discussão quando pedimos ao grupo de alunos que acrescentassem aos seus desenhos um telhado, completando, assim, a transformação da caixa em uma casa. Para representar o telhado, os alunos precisariam desenhar sobre o retângulo que representava a frente da caixa um triângulo isósceles, ou seja, o ponto mais alto do telhado encontrava-se sobre uma reta perpendicular aos segmentos horizontais do retângulo frontal, passando pelo ponto médio desses segmentos. Então, questionamos os alunos como encontrar o ponto médio daquele segmento. Imediatamente, de posse de uma régua, um dos alunos obteve a medida do comprimento do segmento e a dividiu pela metade. No entanto, outro aluno, ao medir o segmento, encontrou 8,3 cm de comprimento, que dividido pela metade resulta em 4,15 cm. Ao posicionar a régua, percebeu que essa medida não poderia ser marcada com precisão. Perguntou, então, se poderia marcar o ponto médio aproximado. Respondemos afirmativamente. Após alguns segundos, questionou-nos novamente: “não há como desenhar com exatidão?” Nesse instante, mostramos como o ponto médio poderia ser obtido com precisão utilizando um compasso. Os demais alunos interessaram-se por aquele instrumento e decidiram utilizá-lo para marcar os pontos médios nos seus desenhos. Após alguns minutos, concluíram suas representações. A imagem abaixo apresenta um dos resultados obtidos:

Figura 38 – Casa desenhada em perspectiva.
Fonte – Arquivo pessoal.



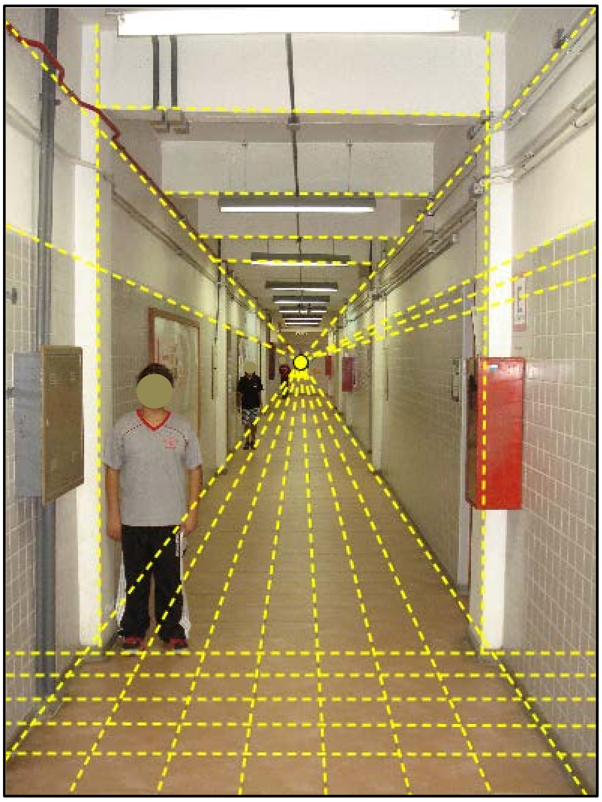
Decidimos, a seguir, retomar a discussão sobre a fotografia do corredor da escola, inserindo-a no software GeoGebra. Sobre a imagem, passamos a traçar retas, segmentos e pontos utilizando os recursos disponíveis no software. Ao mesmo tempo, questionávamos os alunos buscando observar como compreendiam os conceitos geométricos presentes na imagem, visto que já haviam tentado reproduzi-la sobre o papel. Iniciamos traçando os segmentos que demarcam a linhas no chão e a seguir, traçamos os demais segmentos. Questionamos, então, o grupo de alunos acerca da comparação entre os conceitos de retas, semirretas e segmentos de reta. Essa discussão era necessária visto que as ferramentas disponíveis no software são assim nomeadas. As linhas marcadas destacavam a existência e a posição do ponto de fuga na imagem. No entanto, nem todas as linhas convergiam ao ponto de fuga. Desse modo, passamos a discutir quais linhas convergiam ao ponto de fuga e quais não convergiam. Nesse momento, foi necessário discutirmos os conceitos de retas paralelas e retas perpendiculares. Perguntamos: "o que são retas paralelas?" Um dos alunos respondeu, com certa insegurança: "são retas que nunca se encontram." A seguir, perguntamos se poderiam existir segmentos de reta paralelos. Imediatamente, este mesmo aluno respondeu afirmativamente, argumentando serem segmentos que nunca se encontram. Visando problematizar essa afirmação, desenhamos em uma folha de papel um trapézio semelhante ao apresentado na figura 39, a seguir e perguntamos quais segmentos eram paralelos. O aluno afirmou que os dois pares de segmentos opostos eram paralelos, por não encontrarem-se. Sugerimos, então, o prolongamento desses segmentos, transformando-os em retas. Desse modo, o aluno foi levado a compreender a relação entre segmentos paralelos e retas paralelas, percebendo a insuficiência da afirmação "não encontram-se".

Figura 39 – Trapézio com segmentos prolongados.
Fonte – Arquivo pessoal.



Do mesmo modo, discutimos o conceito de retas perpendiculares e as observamos na fotografia. A imagem a seguir, mostra a fotografia marcada por segmentos através do software GeoGebra:

Figura 40 – Fotografia do corredor da escola marcada por segmentos de reta.
Fonte – Arquivo pessoal.



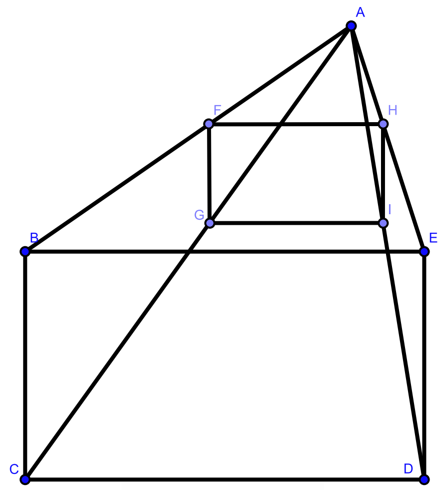
Neste momento, discutimos e comparamos o que víamos na fotografia com o que sabíamos sobre o corredor. Por exemplo, questionamos o grupo de alunos sobre o paralelismo/não-paralelismo das linhas que demarcam o chão. Este questionamento coloca em questão o conceito recém adquirido. Afinal, retas paralelas encontram-se ou não? Na realidade conhecida sabemos que o corredor possui a mesma largura em todo o seu comprimento, justificando, assim, o paralelismo entre as retas que demarcam as paredes laterais. No entanto, na fotografia, representação do real, estas mesmas linhas deixam de ser paralelas. Nesse momento, um dos alunos, observando o trapézio desenhado minutos atrás afirma: “o trapézio é parecido com chão da casa.” Ou seja, aquele aluno havia percebido naquele trapézio a representação em perspectiva de um retângulo. Desse modo, aqueles ângulos vistos no desenho do trapézio poderiam ser imaginados retos, assim como, os segmentos opostos poderiam ser imaginados paralelos, mesmo que não estivessem assim desenhados. Após esta discussão, acabamos concluindo outras ideias fundamentais para o desenho em perspectiva cônica: todas as linhas paralelas ao plano da figura mantém suas direções e todas as linhas não-paralelas ao plano da figura convergem ao ponto de fuga.

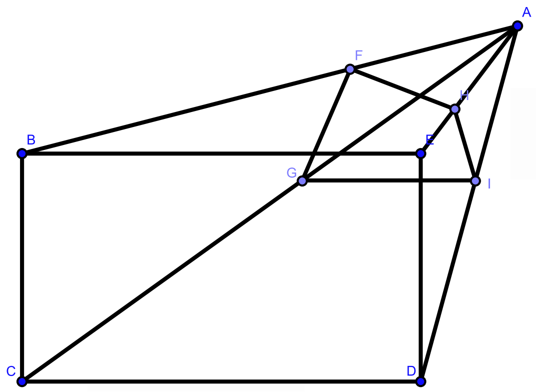
Os alunos começavam a adquirir novas formas de olhar e interpretar as figuras espaciais e planas, observando os conceitos geométricos nelas presentes. Além disso, as deformações sofridas pelas formas dos objetos quando representados em perspectiva não era mais estranhada como antes. Os alunos estavam começando a perceber que quanto melhor compreendermos a forma de um objeto, mais facilmente o desenharíamos corretamente em perspectiva cônica.

Desse modo, solicitamos que reproduzissem a caixa em perspectiva novamente, buscando observar como aqueles conceitos se apresentariam em suas representações após estas discussões. No entanto, não utilizariam a superfície plana do papel como anteriormente, mas sim a janela de visualização do software GeoGebra. Antes, contudo, destacamos o funcionamento dinâmico do software, ressaltando a possibilidade de movimentar os objetos presentes na construção e mostramos, através de exemplos simples, como poderíamos movimentar o ponto de fuga sem que a construção fosse desfeita.

Os alunos, motivados pela possibilidade de movimento, imediatamente colocaram-se a reproduzir no software o que haviam feito sobre a folha de papel. Os segmentos, como esperávamos, eram traçados com a mesma despreocupação apresentada nos desenhos à mão livre, ou seja, os segmentos eram construídos sem a preocupação com o paralelismo/perpendicularismo. Ao movimentar o ponto de fuga, nenhuma das construções manteve-se. A seguir, podemos visualizar um exemplo de representação obtida e a deformação ocorrida após o movimento do ponto de fuga:

Figura 41 – Representação da caixa e deformação da representação após o movimento.
Fonte – Arquivo pessoal.





Como esperávamos, os alunos não construíram a representação utilizando as ferramentas disponíveis no software para o traçado de retas paralelas e perpendiculares. Ou seja, os retângulos, por exemplo, foram construídos considerando apenas as suas formas e não os ângulos retos e segmentos paralelos que o compõe.

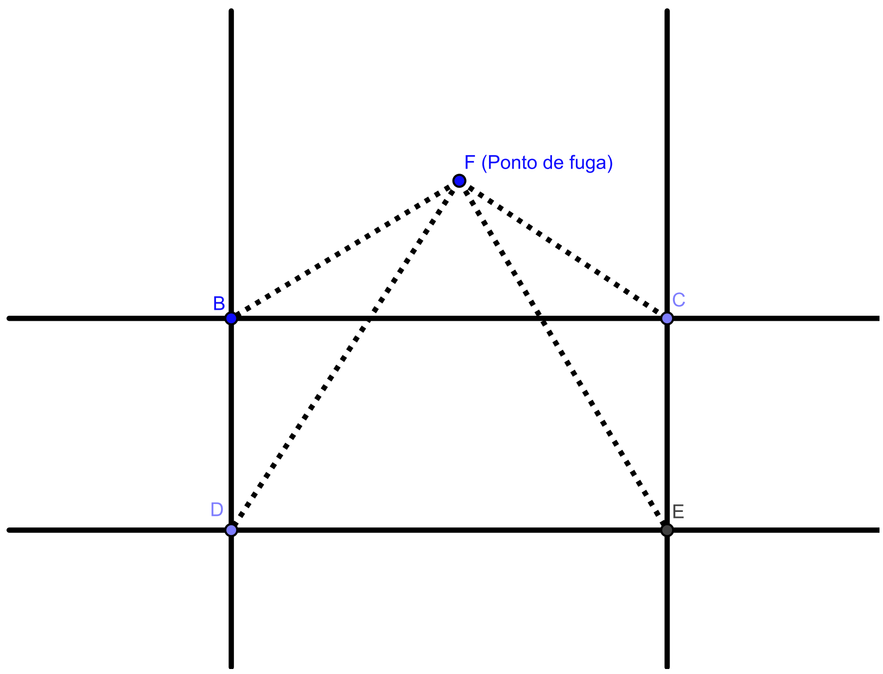
Desse modo, encerrou-se o terceiro encontro.

5.5 Quarto encontro: partimos da caixa e chegamos à casa

Neste encontro, prosseguimos com o desenho em perspectiva no software GeoGebra. Iniciamos relembrando as deformações sofridas pelas construções realizadas na semana anterior com o objetivo de retomar as discussões realizadas. Optamos por convidar os alunos a observarem a construção da caixa em perspectiva utilizando as ferramentas disponíveis no software para o traçado de retas paralelas e perpendiculares. Ao mesmo tempo, questionávamos os alunos quanto aos passos da construção, objetivando observar como compreendiam os conceitos geométricos presentes na representação. Todo passo era precedido por indagações, atribuindo caráter colaborativo à construção. Além disso, sempre que possível, relacionávamos os desenhos feitos à mão livre com os passos realizados no software. Assim, foi possível iniciar a investigação acerca da transição entre o ambiente proporcionado pelos desenhos em folhas de papel e aquele obtido através do software.

Iniciamos a construção marcando o ponto de fuga em uma posição aleatória sobre a janela de visualização. Esse posicionamento não é relevante a princípio, visto que poderemos reposicionar este ponto mantendo a configuração e as propriedades geométricas da construção. A seguir, utilizando as ferramentas para o traçado de retas paralelas e perpendiculares, desenhamos um retângulo, formando, assim, a face frontal da caixa. Desse modo, ao movimentarmos os vértices do retângulo sua forma será mantida, ou seja, os ângulos retos permanecerão retos, assim como, os lados paralelos permanecerão paralelos. A seguir, ligamos os vértices do retângulo construído ao ponto de fuga, utilizando segmentos de reta, como mostra a imagem a seguir:

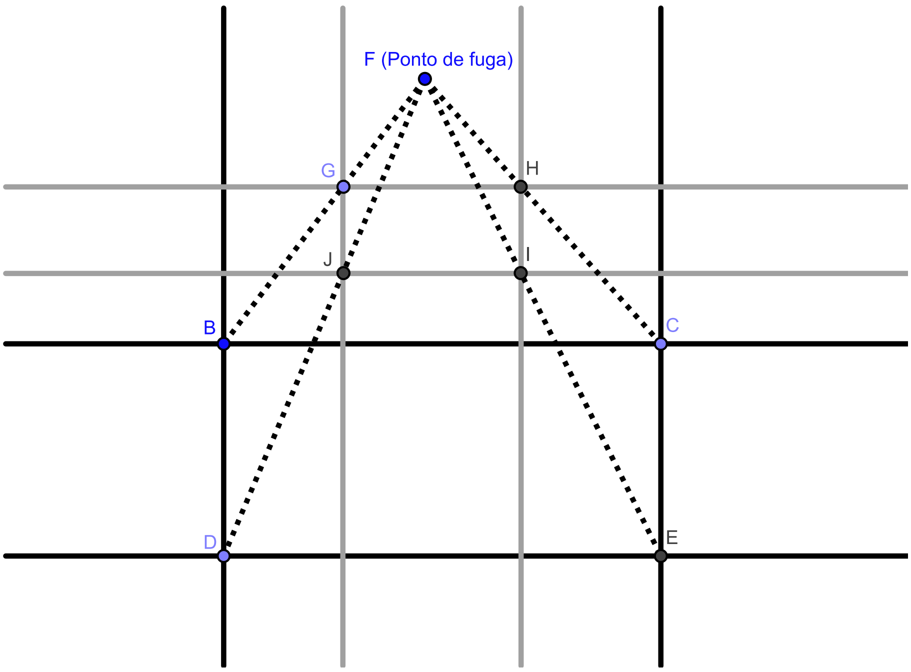
Figura 42 – Representação da caixa utilizando retas paralelas/perpendiculares.
Fonte – Arquivo pessoal.



Neste momento os alunos perceberam que a largura e a altura da caixa poderiam ser alteradas dinamicamente, movimentando os pontos C e D. Um dos alunos, inclusive, percebeu que estávamos representando uma infinidade de caixas, visto que a cada modificação no posicionamento dos pontos obteríamos uma caixa com proporções distintas.

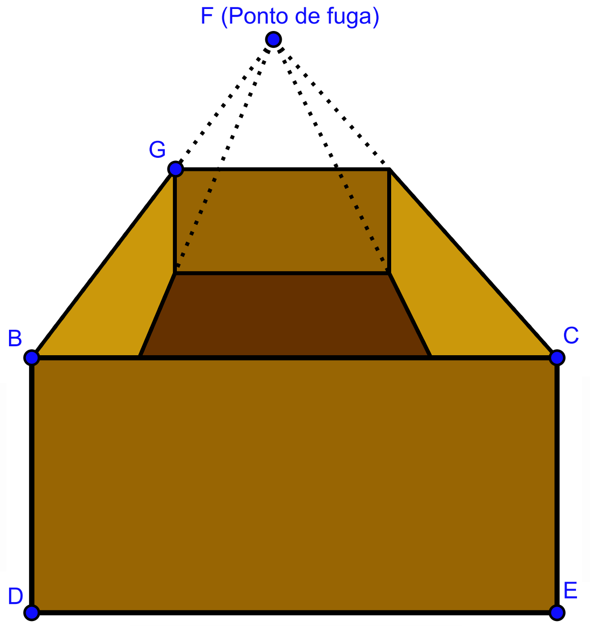
A seguir, marcamos sobre o segmento BF o ponto G, posicionado aleatoriamente. Como mostra a imagem a seguir, este ponto constituirá um dos vértices do retângulo que representará o fundo da caixa. Após, traçamos as retas paralelas às respectivas retas que determinam o retângulo frontal para determinarmos os demais vértices do retângulo ao fundo:

Figura 43 – Representação da caixa utilizando retas paralelas/perpendiculares.
Fonte – Arquivo pessoal.



Assim, ocultando as retas, foi possível observar os oito vértices que constituem a caixa. Desse modo, utilizando a ferramenta "polígono", construímos as faces da caixa e as colorimos, completando a representação. A imagem a seguir apresenta o resultado obtido:

Figura 44 – Representação da caixa em perspectiva cônica.
Fonte – Arquivo pessoal.



Nessa construção, os pontos azuis podem ter sua posição alterada. Desse modo, podemos observar dinamicamente as transformações no objeto construído. A seguir, podemos visualizar outras configurações obtidas ao movimentarmos os pontos:

Figura 45 – Reposicionamento do ponto de fuga.
Fonte – Arquivo pessoal.

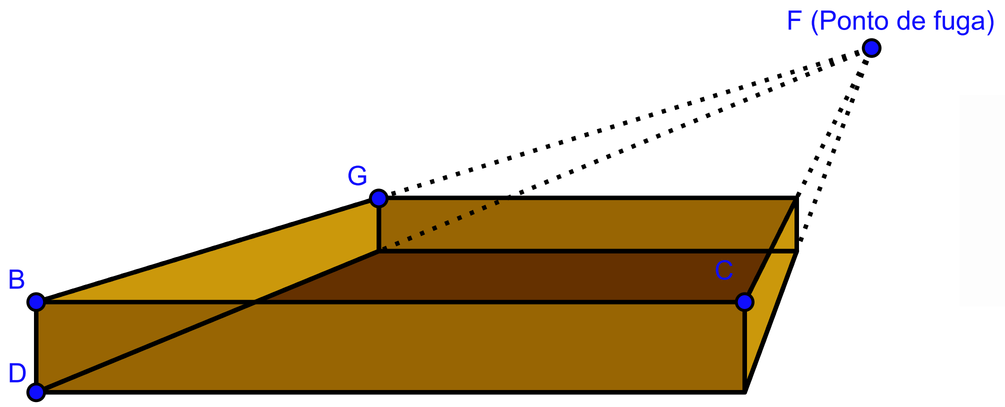
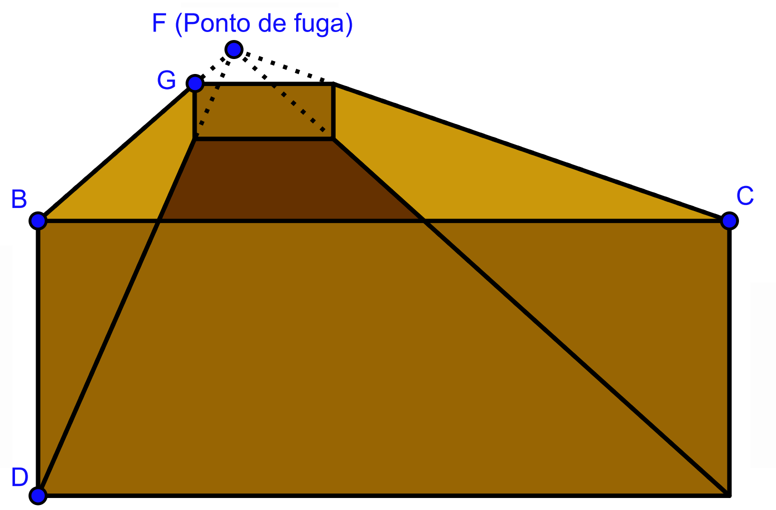


Figura 46 – Reposicionamento do ponto de fuga.
Fonte – Arquivo pessoal.



Após a conclusão da construção, passamos a compará-la com desenhos feitos em folhas de papel. Os alunos eram solicitados a posicionar o ponto de fuga e os demais pontos da construção de modo a obter o ponto de vista exposto pelo desenho feito anteriormente.

Esse procedimento reafirmou a observação quanto à infinidade de caixas representas por essa construção.

A seguir, propusemos aos alunos que tentassem construir suas próprias caixas no software GeoGebra, como havíamos acabado de fazer em conjunto.

Os alunos, então, colocaram-se a reproduzir os passos da construção recém realizada. Inicialmente, alguns enfrentaram dificuldades na construção do retângulo frontal, dada a necessidade da construção com retas paralelas e perpendiculares. No entanto, um dos alunos completou rapidamente a construção, passando a agregar outros elementos à representação, como portas, janelas e telhados, por exemplo. Este aluno havia compreendido claramente os passos para o desenho em perspectiva no software, visto que sua construção mantinha suas propriedades perante o reposicionamento dos seus elementos determinantes. Enquanto os demais alunos buscavam compreender a construção, este aluno investigava as possibilidades oferecidas pelo software, descobrindo novas ferramentas. Para construir o telhado, por exemplo, utilizou circunferências para encontrar o ponto médio do segmento, como feito anteriormente no desenho à mão livre. No entanto, após alguns minutos já havia encontrado a ferramenta que automatiza este processo.

Um dos alunos, ao terminar a construção, percebeu que algo estava errado, pois ao movimentar o ponto de fuga, a figura era desfeita. No entanto, não conseguia encontrar o problema em meio às retas e segmentos construídos. Os outros alunos, nesse momento, passaram a analisar a construção do colega, buscando identificar o problema. Conjecturavam hipóteses e propunham soluções, solucionando o problema sem nossa interferência.

Desse modo, após alguns minutos de intensa colaboração entre os alunos, todos haviam completado suas representações. Haviam, inclusive, acrescentado portas e janelas, transformando a caixa em uma casa.

Foi possível ao longo da construção discutir importantes ideias geométricas. Os alunos concluíram, por exemplo, a transitividade da relação de paralelismo. Ou então que, se uma reta é perpendicular a outras duas retas, então essas outras duas retas são paralelas entre si.

Para finalizar este último encontro, apresentamos outras construções criadas no software GeoGebra utilizando a técnica do desenho em perspectiva cônica com o objetivo de expor o potencial da técnica e do software. Essas outras construções estão expostas no último capítulo deste trabalho. Desse modo, concluímos o estudo sobre o desenho em perspectiva cônica com um ponto de fuga.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

De fato, não podemos negar a relevância da investigação exposta por esta pesquisa. O desenho em perspectiva, raramente presente nas aulas de Geometria, como já citado, apresentou-se extremamente relevante para o desenvolvimento da capacidade de olhar os objetos no espaço. Como podemos ensinar/aprender Geometria sem que antes tenhamos ensinado/aprendido a olhar os objetos, buscando compreender suas características? Aliás, como podemos aceitar os conceitos geométricos sem problematizá-los? Por um lado, podemos afirmar que retas paralelas “nunca se encontram”. Por outro lado, podemos questionar essa afirmação, comparando conceitos, investigando e elaborando hipóteses. O que escolhemos? Infelizmente, grande parte dos professores opta pela aceitação cega de afirmações presentes em livros didáticos. Essa cegueira, possivelmente seja a mesma que os impeça de olhar os objetos no espaço. E desse modo os alunos são levados a fechar os olhos, passando o lápis a fazer apenas contas e não desenhos.

Os desenhos feitos pelos alunos demonstram a relevância do tema. E mais do que isso, expressam o potencial do desenho em perspectiva como um problema fundamentalmente matemático. Percebemos, inclusive, que desenhar um cubo pode ser uma atividade tão Matemática quanto calcular o seu volume. O desenho em perspectiva, historicamente constituiu-se como um problema matemático, como destacamos no terceiro capítulo. No entanto, no ambiente escolar, desenhar caracteriza-se como uma atividade artística, apenas.

Além disso, constatamos que o desenho em perspectiva possibilita a construção de novos conceitos. Os alunos participantes da pesquisa foram apresentados à diversos conceitos ao longo dessa investigação. Enquanto esses conceitos eram aprendidos, eram, ao mesmo tempo, testados pela transição entre o espaço conhecido e a representação deste espaço sobre a superfície plana. Desse modo, estes conceitos deixaram de habitar apenas o mundo das ideias, ganhando utilidade prática, pois eram necessários para o desenho. Afinal, como conceituar retas paralelas/concorrentes ou então ângulos retos e, ao mesmo tempo, discutir o desenho em perspectiva cônica no qual as retas paralelas/perpendiculares deixam de respeitar a definição euclidiana conhecida? São ângulos retos na realidade e no desenho não? Esses questionamentos, que poderiam confundir os alunos iniciando seus estudos em Geometria, mostraram-se, na verdade, extremamente relevantes para desenvolver a compreensão acerca dos conceitos.

O software GeoGebra, por sua vez, apresentou inúmeras possibilidades para a investigação proposta. Sua manipulação possibilitou aos alunos o desprendimento do desenho estático da folha de papel. A Geometria passou a ser mais interessante e desafiadora. Havia a necessidade dos conceitos geométricos para a representação dos objetos, ou seja, deixaram de ser meras formalidades.

Além disso, é importante destacar que as construções em perspectiva cônica realizadas ao longo deste trabalho limitaram-se ao caso mais simples: o desenho com um ponto de fuga. Como perspectiva para o prosseguimento da proposta, poderíamos desenvolver a técnica para o desenho com dois e três pontos de fuga, sem que os desenhos tornem-se muito mais complicados. Além disso, poderíamos, também, tornar as construções realizadas no software GeoGebra mais interessantes e complexas. A caixa inicialmente desenhada poderia ganhar tampas que se abrem e se fecham, como nas duas imagens a seguir:

Figura 47 – Representação de uma caixa com tampa (aberta) em perspectiva cônica.
Fonte – Arquivo pessoal.

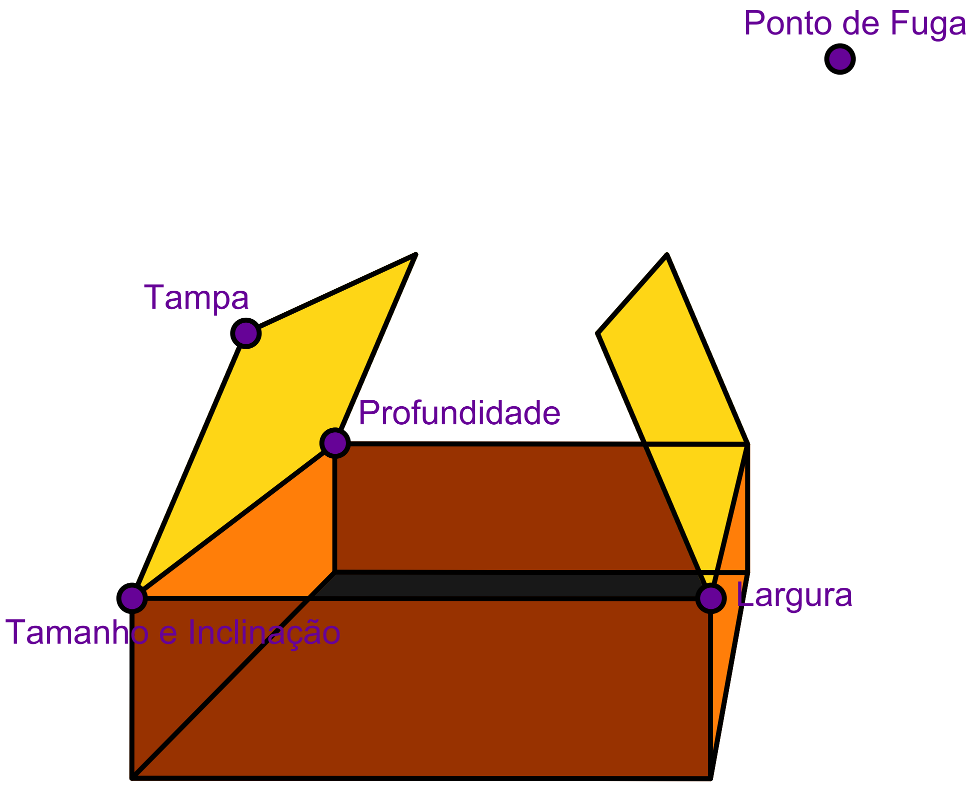
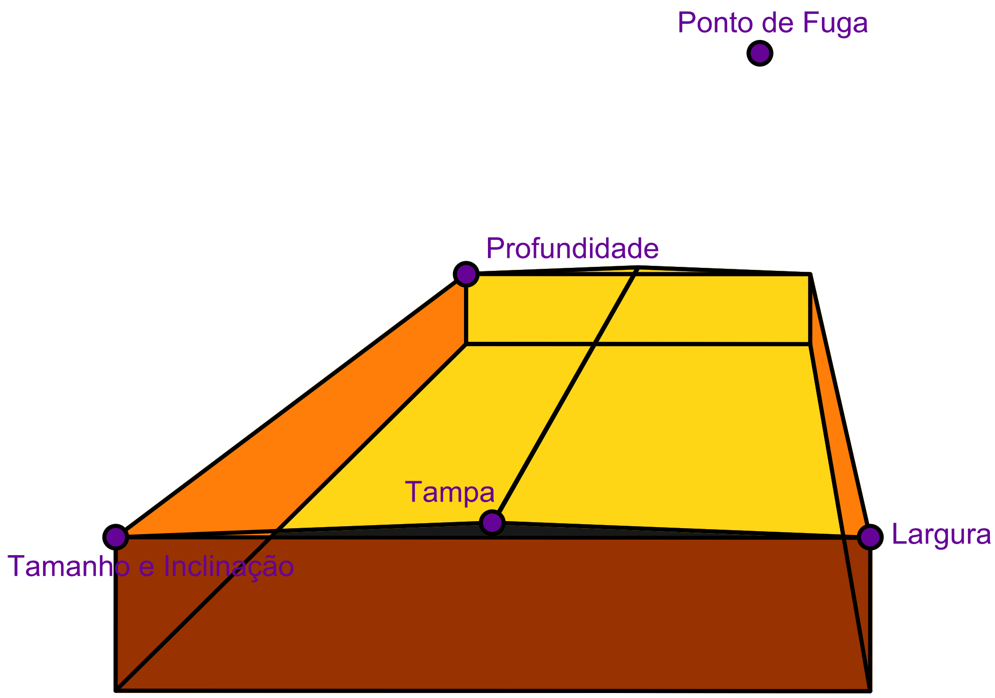


Figura 48 – Representação de uma caixa com tampa (fechada) em perspectiva cônica.
Fonte – Arquivo pessoal.



Poderíamos propor o desenho de muitos outros objetos utilizando a mesma técnica. As imagens a seguir mostram uma escada e uma mesa reproduzidas utilizando a perspectiva cônica com um ponto de fuga:

Figura 49 – Representação de uma escada em perspectiva cônica.
Fonte – Arquivo pessoal.

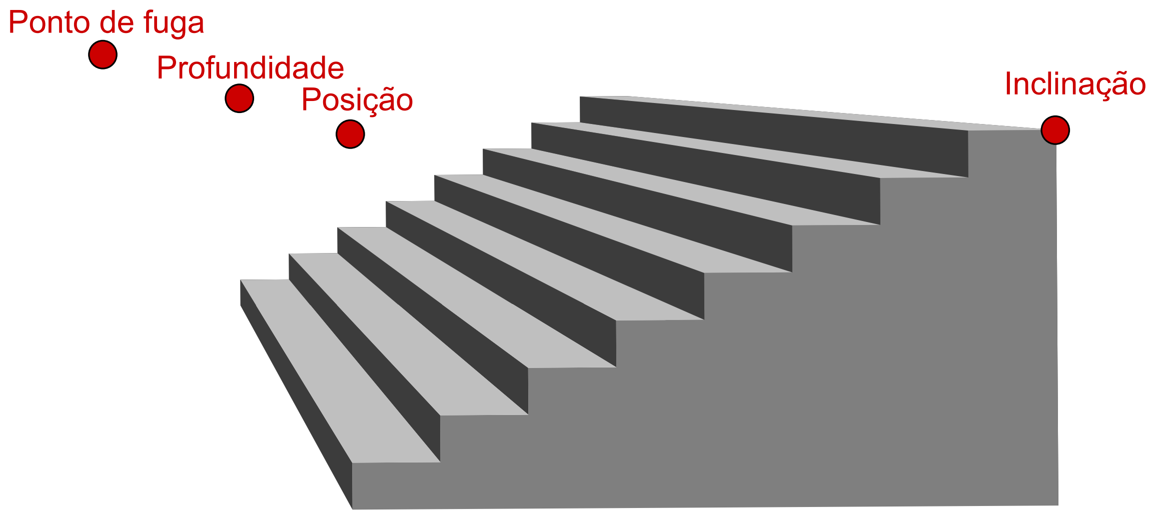
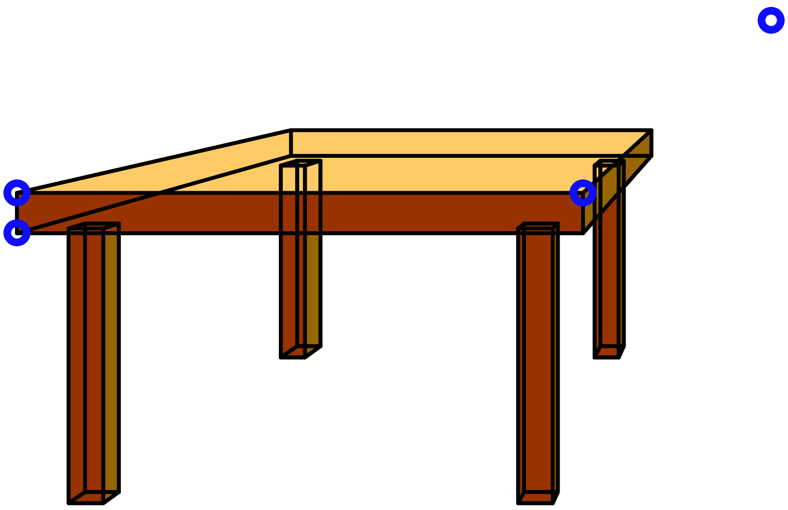
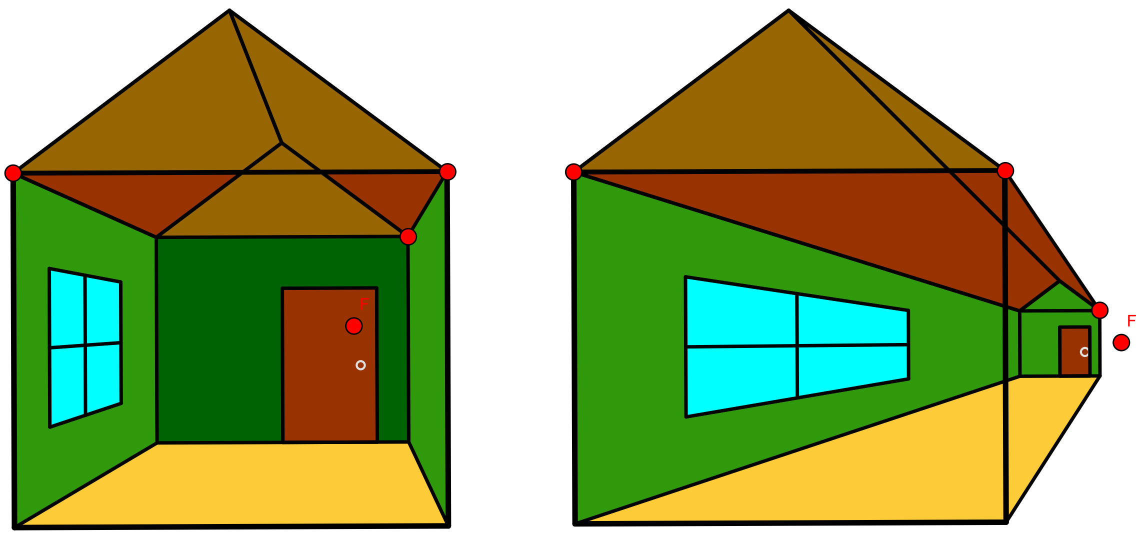


Figura 50 – Representação de uma mesa em perspectiva cônica.
Fonte – Arquivo pessoal.



A casinha, já reproduzida, poderia ser complementada. À ela poderiam ser acrescentados outros elementos. A janela, por exemplo, mantém uma proporção com a parede lateral da casa. Desse modo, quando o comprimento da casa é alterado, a janela tem seu tamanho modificado ao mesmo tempo, mantendo, porém, a proporção. Como fazer isso? Desse modo, inserimos novos problemas e motivamos novas investigações. A imagem abaixo apresenta a reprodução em perspectiva cônica de uma casa, construída no software GeoGebra:

Figura 51 – Representação de uma casa em perspectiva cônica.
Fonte – Arquivo pessoal.



Finalizamos este trabalho ressaltando a seguinte conclusão: o ensino de Geometria não pode limitar-se aos cálculos de perímetros, áreas e volumes e, tampouco, a memorização de fórmulas. E as possibilidades apresentadas nesta pesquisa reafirmam este fato. Além disso, o desenho manual mostrou-se fundamental ao longo da investigação, tornando indispensável a prática conjunta dos desenhos a mão livre e as construções no software GeoGebra. Esse modo de ação, inclusive, foi o responsável pela possibilidade de relacionar estes dois ambientes distintos, reforçando a compreensão dos alunos acerca dos conceitos geométricos abordados.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUMONT, Jacques. **A imagem**. Campinas: Papirus, 1993.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Arte**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRESSAN, Ana María; BOGISIC, Beatriz; CREGO, Karina. **Razones para ensenãr geometría en la educación básica: mirar, construir, decir y pensar**. Buenos Aires: Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico, 2006.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. **Para que ensinar e aprender Geometria no Ensino Fundamental? Um exercício de reflexão sobre o currículo.** In: Filipouski, Ana M. R., et al. (orgs.). Teorias e fazeres na escola em mudança. Porto Alegre: Editora da UFRGS / Núcleo de Integração Universidade & Escola da PROREXT/UFRGS, 2005, P.243-252.

CAVALCA, Antônio de Pádua Vilella. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação**. São Paulo: EDUC, 1998.

CHING, Francis D. K.. **Representação gráfica em arquitetura**. Porto Alegre: Bookman, 2000.

DELVAL, Juan. **Introdução à prática do método clínico: descobrindo o pensamento das crianças**. Porto Alegre: Artmed, 2002.

ERNST, Bruno. **O espelho mágico de M. C. Escher**. [s. l.]: Taschen, 2007.

FLORES, Cláudia Regina. **Olhar, Saber, Representar: ensaios sobre a teoria da perspectiva**. Florianópolis: UFSC, 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, linha Ensino de Ciências, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de Geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo**. Porto Alegre: UFRGS, 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto alegre, 2001.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari. **Matemática paratodos: 7ª série: 8º ano do ensino fundamental.** São Paulo: Scipione, 2006.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari. **Matemática paratodos: 8ª série: 9º ano do ensino fundamental.** São Paulo: Scipione, 2006.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Tomando o ensino de Geometria em nossas mãos...** Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, ano I, nº 2, p. 19-25, 1994.

LELLIS, Marcelo. **Desenho em perspectiva no ensino fundamental: considerações sobre uma experiência**. Disponível em: < http://www.nilsonmachado.net/sema20090602.pdf > Acesso em 15 de julho de 2013.

LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

MALTEMPI, M. V. **Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 264-282.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides: a história da Geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço**. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

PANOFSKY, Erwin. **A perspectiva como forma simbólica**. Lisboa: Edições 70, 1999.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. Edição Revisada. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

VALENTE, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1996.

LABORDE, Colette et al. **Teaching and learning geometry with technology**. In: GUTIÉRREZ, Angel; BOERO, Paolo (eds.). Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future. Rotterdam: Sense Publishers, 2006.

VEEN, Win. **Homo Zappiens: educando na era digital**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Apêndice A:

Autorização para desenvolvimento de trabalho na instituição

Prezada Professora Clevi Elena Rapkiewicz

Coordenadora da Comissão de Pesquisa do Colégio de Aplicação – UFRGS

Solicito sua autorização para que o acadêmico LUCAS CAITANO, do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul desenvolva parte de seu trabalho de conclusão no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, no primeiro semestre de 2013.

O trabalho resultante do estudo desenvolvido por Lucas deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros estudantes e professores de Matemática.

Neste sentido, torna-se extremamente importante proceder à coleta de dados para futuras análises e obtenção de resultados relacionados com a aprendizagem em Matemática. Dessa forma, nessa oportunidade, estamos solicitando sua autorização para a realização da coleta de dados mencionada bem como que o nome da Instituição seja referido no trabalho do Acadêmico. Anexo a esse documento, a proposta de trabalho de conclusão de Curso aprovada pela Comissão de Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS.

Ao seu dispor para quaisquer esclarecimentos, envio cordiais saudações.

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Instituto de Matemática - UFRGS

Porto Alegre, maio de 2013.

Apêndice B:

Termo de consentimento Informado

Eu, ____________________, R.G. ____________________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada "Representando o espaço em uma folha de papel ou na tela de um computador: um estudo sobre a perspectiva cônica através do software GeoGebra" desenvolvida pelo acadêmico Lucas Caitano. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marcus Vinicius de Azevedo Basso, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51)33086198 ou e-mail mbasso@ufrgs.br. Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), não sendo identificadas.

A minha colaboração se fará por meio da participação no projeto desenvolvido no Colégio de Aplicação da UFRGS intitulado "Representando o espaço em uma folha de papel ou na tela de um computador: um estudo sobre a perspectiva cônica através do software GeoGebra", em que serei observado(a) e minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o acadêmico responsável no telefone (51)33867924 e e-mail lucaitano@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _______ de ___________ de 2013.

Assinatura do Responsável: ___________________________

Assinatura do Acadêmico responsável pela pesquisa: ___________________________