

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

RODRIGO ERNESTO SCHROER

**A RETOMADA DE RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS NO ENSINO MÉDIO E SUA
TRADUÇÃO PARA A LINGUAGEM DE FUNÇÕES.**

Porto Alegre

2013

RODRIGO ERNESTO SCHROER

**A RETOMADA DE RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS NO ENSINO MÉDIO E SUA
TRADUÇÃO PARA A LINGUAGEM DE FUNÇÕES.**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul em cumprimento a requisito obrigatório para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Professora Dra. Cydara Cavedon Ripoll

Porto Alegre

2013

Rodrigo Ernesto Schroer

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, dezembro de 2013.

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Elisabete Zardo Búrigo (IM/UFRGS)

Prof. Dr. Maria Paula Gonçalves Fachin (IM/UFRGS)

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo (UFRJ)

AGRADECIMENTOS

À minha família, Pai (in memorian), Mãe e minha irmã pelo incentivo a sempre buscar mais conhecimento.

Aos queridos Betânia, Claudia, Daner e Liliana pelas constantes trocas de conhecimento e pela amizade que, com certeza, será para sempre.

Aos meus amigos e hoje parte da minha família, Michelsch e David, pela amizade e as conversas diárias sobre tantos temas e quase sempre a dissertação.

Ao Emerson, pelo que representas, pela compreensão e incentivo constante.

À Valéria, minha grande amiga e grande incentivadora.

Aos ex-colegas do Instituto Federal de Caxias do Sul, especialmente à Tati, à Kelen e ao Luis Felipe pela compreensão durante todo esse processo.

Aos meus colegas da Pró-reitoria de Ensino, por tanto ouvirem falar neste trabalho e pelas valorosas discussões sobre a educação no nosso país.

Aos alunos do 1º ano de 2012 do Curso Técnico em Fabricação Mecânica do IFRS Campus Caxias do Sul, pela importante participação neste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, por todo aprendizado que tive oportunidade de receber.

À professora Cydara, por todo conhecimento e aprendizado que obtive nesses dois anos, pela paciência, pela excelente orientação e com quem espero poder sempre contar para debatermos o ensino da Matemática.

RESUMO

Esta dissertação apresenta os resultados da aplicação de uma Sequência Didática que tratou da retomada do estudo de relacionamento entre grandezas no Ensino Médio e a tradução de alguns destes relacionamentos para a linguagem de funções. O estudo foi desenvolvido em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio Integrado do Curso de Fabricação Mecânica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, no Campus Caxias do Sul, RS. O trabalho inclui uma revisão teórica em relação ao tema nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, a análise crítica de dois livros didáticos recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático de 2012 e uma Sequência Didática que envolve: uma revisão de alguns tipos de relacionamento entre grandezas (que variam com mesmo sentido, que variam com sentidos inversos, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais), uma introdução ao estudo das funções, a definição de função que adotamos, as funções Linear, *do tipo* Linear, Afim, *do tipo* Afim, Homográfica da forma k/x (k constante não nula) e *do tipo* Homográfica, função inversa e finaliza com uma avaliação da implementação e dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Função. Função Linear. Função Afim. Função Homográfica. Grandezas. Grandezas Diretamente Proporcionais. Grandezas Inversamente Proporcionais. Função Inversa.

ABSTRACT

This dissertation presents the results of applying a Didactic Sequence which dealt with the resumption of the study of relationships between quantities in high school and the translation of some of these relationships to language functions. The study was conducted in a first year high school class, in the mechanical fabrication course, at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Rio Grande do Sul, campus Caxias do Sul. The work was modeled on the didactic engineering for design, implementation and validation of the instructional sequence and includes a literature review on the topic proposed in the National Curriculum Guidelines for high school, a critical analysis of two textbooks recommended by the National Textbook Program of 2012 and a instructional sequence that involves a review of some types of relations between quantities (direct, inverse, direct proportionality, inverse proportionality), an introduction to the study of functions, the function definition we adopt, linear functions, linear type functions, affine functions, affine type functions, homographic functions in the form k/x and homographic type functions, inverse function and concludes with an evaluation of the implementation and results.

Key-words: Function. Linear Function. Affine Function. Homographic Function. Quantities. Directly Proportional Quantities. Inversely Proportional Quantities. Inverse Function.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	9
CAPÍTULO 2 - PCNEM – PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO.....	13
CAPÍTULO 3 - ANÁLISE CRÍTICA DE LIVROS DIDÁTICOS	21
3.1 Sobre o método matemático: demonstração x “observe e veja o que acontece”	22
3.2 Sobre a definição de função.....	29
3.3 Exemplos de função	33
3.4 Frases que envolvem uma contextualização forçada	36
3.5 Representações de funções (diagrama, gráfico e esboço do gráfico, tabela, fórmula)	38
3.6 Gráfico x Esboço do Gráfico	45
3.7 Funções a partir de gráficos	47
3.8 A ênfase no Contradomínio (a determinação do domínio, imagem a partir do gráfico) ...	49
3.9 Função invertível e a função inversa.....	50
3.10 A Função Afim	52
CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA E FUNDAMENTAÇÃO	57
4.1 Quanto à opção pela definição de função que AQUI apresentamos	58
4.2 Quanto à não ênfase ao contradomínio quando tratamos de funções reais de variável real.	59
4.3 Quanto à equivalência entre as condições “ser injetora” e “ser invertível”	60
4.4 Quanto à definição de proporcionalidade.....	61
CAPÍTULO 5 - IMPLEMENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	63
5.1 REVISANDO GRANDEZAS DIRETAS, INVERSAS, DIRETAMENTE PROPORCIONAIS E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS.	64
5.2 DEFINIÇÕES	69
5.3 INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL	74
5.3.1 Produto cartesiano	74
5.3.1.1 Um produto cartesiano especial e o plano cartesiano	78
5.3.2 Funções reais de variável real	81
5.3.2.1 A definição de função	89
5.3.3 Gráfico de uma função real	103
5.3.4 Função monótona.....	106

5.3.5.1 Propriedades da função linear	124
5.3.5.2 Esboço do gráfico de uma função linear.....	127
5.3.6 Função afim.....	135
5.3.6.1 Propriedades da função afim	137
5.3.6.2 Esboço do gráfico da função afim.....	140
5.3.7 Funções que podem ser expressas por $f(x) = \frac{k}{x}$	150
5.3.7.1 Propriedades da função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$ com $k \neq 0$.....	152
5.3.7.2 Esboço do gráfico da função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$.....	155
5.3.8 Funções inversíveis	158
5.3.8.1 Inversibilidade de funções reais de variável real.....	158
5.3.8.2 Função injetora.....	166
5.3.8.3 Inversibilidade da função linear ($f(x) = kx$).....	169
5.3.8.4 Inversibilidade da função afim ($f(x) = kx + b$).....	170
5.3.8.5 Inversibilidade da função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$.....	171
5.3.9 Relação das funções <i>do tipo</i> linear, afim e da função que pode ser dada por $f(x) = \frac{k}{x}$ com grandezas diretas, inversas, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.	172
REFERÊNCIAS	186
APÊNDICE	187
PARTE A - APRESENTAÇÃO.....	187
PARTE B – QUESTIONÁRIO SONDAGEM	190
PARTE C - PROPOSTA DIDÁTICA.....	198

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

O foco do trabalho que aqui apresentamos está em uma proposta diferenciadora quanto ao assunto Funções (reais de variável real) no intuito de retomar o estudo das grandezas no Ensino Médio traduzindo para a linguagem de funções.

Consideramos realmente diferenciadora nossa proposta, pois num primeiro momento realizamos uma revisão da literatura relacionada ao tema, sem termos obtido trabalhos que desenvolvessem o tema de forma semelhante ao por nós proposto.

A ideia inicial de desenvolver este trabalho surgiu quando, em um fórum de discussões do programa de pós-graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, a professora Cydara Cavedon Ripoll fez críticas menção à abordagem usualmente apresentada nos livros didáticos quanto ao tópico Funções, nos deixando curiosos e interessados, ao mesmo tempo em que manifestava seu ponto de vista que no Ensino Médio deveria se retomar proporcionalidade e outras relações entre grandezas ao trabalhar-se funções.

Como professor¹ de Matemática há treze anos, na cidade de Santa Maria - RS, sempre trabalhei com turmas de primeiro ano de Ensino Médio, onde o tema Funções é apresentado aos alunos, sendo que, durante este período, trabalhei em uma escola pública estadual, quatro escolas particulares e dois cursos preparatórios para vestibulares. Durante esta prática, observei, por várias vezes, nos livros didáticos adotados, incoerências em relação ao tema, sendo assim, sentimo-nos no compromisso de abordar também inversibilidade de funções reais de variável real para mostrarmos como a ausência de ênfase, defendida por nós, no contradomínio de uma função e, conseqüentemente, no conceito de sobrejetividade, se reflete neste conceito.

Para elaboração deste trabalho elencamos como alguns de nossos principais objetivos:

- revisão e aprofundamento de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, bem como definir relacionamento entre grandezas onde temos a retomada no Ensino Médio da ideia de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa, bem como de outros tipos de relacionamento entre grandezas introduzindo a definição de grandezas que variam com o mesmo sentido e com sentido contrários, não só com o objetivo de tentar desfazer o obstáculo didático muitas vezes detectado entre os alunos de que todo par de grandezas que se relacionam está relacionado à proporcionalidade direta mas também com o objetivo de

¹ Utilizarei aqui a primeira pessoa do singular por estar explicitando um pouco de minha própria experiência profissional.

preparar o aluno para a reflexão que ele deverá fazer sobre o par de variáveis reais relacionadas por uma função real de variável real;

- elaborar uma proposta didática que contemple a definição de função e que corrija as incoerências e mal encaminhamentos usualmente encontrados em livros didáticos;

- abordar as funções Linear, Afim, Monótonas e Homográfica incluindo-as como tradução dos relacionamentos entre grandezas estudados, incluindo a definição dessas funções;

- introduzir o aluno ao pensamento matemático. Inicialmente salientamos que, neste texto, denominamos *demonstração* o que é esperado como argumentação na matemática como ciência, o que, em geral, consiste de uma organização de encadeamentos lógico dedutivos a partir de hipóteses, ou ainda, de uma sequência de implicações baseadas em definições e resultados previamente estabelecidos com este mesmo padrão de argumentação, e que muitas vezes precisam ser elaboradas fazendo uso de elementos genéricos de um conjunto. Assim, não estamos nos referindo aqui às diferentes etapas que o processo de argumentação pode assumir em sala de aula, como aponta Martins (2011), mas sim à última delas, aquela que realmente é aceita pela matemática como ciência.

Mas também não estamos subentendendo que uma argumentação, para ser legitimada pela ciência matemática como demonstração, precise fazer uso da simbologia usualmente utilizada pela matemática. Na nossa opinião, instigar a argumentação matemática deve ser anterior a fazer uso da simbologia, e por isso utilizamos uma metodologia que permite ao aluno argumentar por meio de suas próprias palavras.

Um objetivo que surgiu no decorrer do desenvolvimento da proposta didática foi a inversibilidade de funções.

Consideramos de fundamental importância que a proposta por nós elaborada fosse testada, para verificar se os objetivos formulados de fato poderiam ser alcançados; então faz parte deste trabalho, além de uma discussão sobre o tema relações entre grandezas retomadas no Ensino Médio, também a elaboração e implementação de uma Sequência Didática que aborda o estudo das Grandezas (que variam com mesmo sentido, que variam com sentido inverso, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais) no Ensino Médio e a tradução destas relações para a linguagem de funções.

Durante o desenvolvimento do tema sentiu-se a necessidade de ampliar a discussão - que já envolvia definição de função, função linear com proporcionalidade direta, função Afim com grandezas que variam com mesmo sentido ou com sentidos inversos, função Homográfica da forma k/x com grandezas inversamente proporcionais - incluindo o estudo da

função Inversa, isto por que sentimo-nos na obrigação de mostrar que nossa proposta mantinha-se ainda consistente quando consideramos este tipo de funções.

É possível encontrar nos PCN orientações para o estudo das funções associadas ao estudo das grandezas (incluindo a homográfica como equacionamento da relação de proporcionalidade inversa via linguagem de funções). Porém, observamos que, nos livros didáticos, quase que em sua totalidade, a função Homográfica da forma k/x , não é apresentada o que nos motivou, mais ainda, a incluí-la em nosso trabalho.

Sabendo que o tema Grandezas é, normalmente, tratado nas séries finais do Ensino Fundamental e, que nosso trabalho consistia em tornar a enfocá-lo no Ensino Médio, optamos por elaborar um Questionário Sondagem o qual constou de quinze exercícios envolvendo todos os casos de relações entre grandezas (que variam com mesmo sentido, que variam com sentido inverso, diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e que não se relacionam), para que pudéssemos verificar o nível de conhecimento/lembrança de nossos alunos em relação ao tema. Os exercícios que foram usados neste questionário foram todos incorporados novamente à Sequência Didática implementada posteriormente.

A Sequência Didática que elaboramos foi aplicada a uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, do Curso Técnico em Fabricação Mecânica do Campus Caxias do Sul do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) na cidade de Caxias do Sul, RS. Esta turma consistia de trinta e dois alunos, sendo trinta e um do sexo masculino. Do total de alunos, 71,8% haviam concluído o Ensino Fundamental em escolas públicas, três eram repetentes, e as idades variavam entre 14 e 17 anos.

Relatamos nos próximos parágrafos o que é encontrado em cada capítulo deste trabalho.

No segundo capítulo, abordamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino de Matemática e as Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) referentes ao estudo das funções no Ensino Médio.

No terceiro capítulo apresentamos uma análise crítica de dois dos sete livros didáticos para o ensino de Matemática no Ensino Médio, aprovados no Plano Nacional do Livro Didático 2012. Esta análise fixou-se no tema funções, com especial atenção às funções Linear e Afim, uma vez que em nenhum deles encontramos a função homográfica da forma k/x . Nesta análise, apontamos incoerências geradas pelos textos bem como o que consideramos encaminhamentos inadequados do ponto de vista da formação matemática de um estudante.

O quarto capítulo consiste de uma apresentação do referencial no qual nos embasamos para a construção desta proposta, tanto do ponto de vista da educação matemática propriamente dita, quanto do ponto de vista das convicções matemáticas que aqui seguimos.

No quinto capítulo apresentamos a implementação da Sequência Didática elaborada e explicitamos nossos objetivos e expectativas em relação às proposições feitas, bem como relatamos o passo a passo da implementação da mesma. Incluímos na Sequência Didática, além de objetivos, “bilhetes ao professor”. Estes se destinam àqueles que quiserem implementá-la, e neles explicitamos muitas vezes sobre o que se espera do aluno naquele momento. Incluímos neste capítulo também os raciocínios dos alunos, seus erros, seus acertos e expectativas (correspondidas ou não). Estas observações serviram para que pudéssemos aprimorar nossa proposta e produzir a proposta final que segue anexa a este trabalho.

No sexto capítulo chamado de considerações finais apresentamos as conclusões a que chegamos após toda esta caminhada: PCN, Livros Didáticos, Literatura, planejamento e Implementação da Sequência Didática.

CAPÍTULO 2 - PCNEM – PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio do ano de 2002 (PCNEM) concepções e orientações sobre o ensino de funções. Vemos, em vários momentos, algumas de nossas concepções contempladas nesse documento de referência nacional, mesmo aquelas que não estão em sintonia com o que encontramos nos livros didáticos (e que são relatadas no Capítulo 3). Porém algumas outras de nossas concepções e crenças no ensino de funções não estão contempladas nos PCNEM. Elas ficam claras ao longo deste capítulo.

A Sequência Didática que explicitamos no capítulo 4 e no anexo está em grande parte em consonância com este documento nacional. Os tópicos que são abordados por nós e que não estão contemplados nos PCNEM são devidamente justificados ao longo do seu desenvolvimento.

Introduzindo o texto a respeito dos conhecimentos de matemática, encontramos nos PCNEM (2002, p. 69):

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.

[...]

Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCNEM+ (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Afirmamos que as finalidades centrais do Ensino Médio destacadas neste trecho foram respeitadas quando da elaboração e aplicação de nossa Sequência Didática, pois, além de retomar e aprofundar conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, nos preocupamos com a elaboração de um material que primasse pela apresentação dos conteúdos de uma forma que despertasse, em nossos alunos, a busca por um saber matemático que não fosse baseado em memorizações ou, simplesmente, em reprodução de um modelo tradicional, indo ao encontro de uma autonomia intelectual.

Em relação às habilidades esperadas, tentamos elaborar um material que contemplasse uma contextualização com situações que fossem reais e que fizessem com que nosso aluno se tornasse questionador e não um mero receptor de conhecimento.

Ainda na introdução das orientações, encontramos nos PCNEM (2002, p. 69):

Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Partindo do exposto acima, declaramos que tivemos o cuidado de elaborar uma Sequência Didática que levasse em consideração o fato de que a Matemática é uma ciência dedutiva e também que tentasse estimular nossos alunos a praticar o ato de demonstrar, ato este, normalmente, negado ao aluno já nos livros didáticos e também, muitas vezes, omitido pelo próprio professor em sala de aula. Será possível constatar neste trabalho que optamos por deixar os alunos argumentarem primeiramente por meio de palavras para só então, quando cabível, reescrever seus argumentos usando a simbologia matemática.

Vemos esta forma de trabalhar os conteúdos em consonância com o que é apontado nos PCNEM (2002, p. 69-70):

A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

Contrariando as orientações acima citadas, pudemos perceber que muitos livros didáticos continuam sem uma preocupação efetiva com o método dedutivo característico da matemática. A grande maioria dos livros ainda mantém modelos baseados no formato “veja como se faz e repita”, bem como não oportunizam ao aluno o questionamento sobre uma solução ser única ou não. De fato, muitos livros, ao fazerem uma pergunta que possui resposta

única, não permitem por meio de seus questionamentos que o aluno tente chegar sozinho a esta conclusão sobre a unicidade, pois o próprio questionamento já a denuncia, como, por exemplo, “qual o valor de x ?”, no lugar de questionar “é possível encontrar um valor para x ? Em caso afirmativo, quantos?”.

Em nossa Sequência Didática tentamos, sempre que possível, levar o aluno a questionar primeiramente a existência e a quantidade de soluções para um problema, e posteriormente, tentar determiná-la. Preocupamo-nos também em não reproduzir “receitas” na resolução de problemas e exercícios, mas sim, em sugerir encaminhamentos que levassem o aluno a construir o conhecimento, e que o mesmo tenha de fato clareza da informação que está adquirindo.

Tivemos a preocupação, que é referendada por este trecho dos PCNEM 2002, de tentar demonstrar ou deduzir a maior parte das fórmulas ou propriedades envolvidas no tema em questão, utilizando uma linguagem acessível ao aluno. Para as demonstrações, estimulamos os alunos a criarem argumentos com suas palavras para, só depois, tentar transportá-los para a simbologia matemática, com o objetivo de não deixar se formar a ideia de que uma “demonstração” só é de fato uma demonstração se estiver expressa através de simbologia matemática.

Com respeito ao que é tratado especificamente sobre o tema Funções nos PCNEM e PCNEM+, temos, nos PCNEM (2002, p. 72) inicialmente sugestões de como iniciar o estudo do tema e também de como prosseguir:

O estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. [...]

O estudo de Funções pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola: modelos linear, quadrático e exponencial.

Tivemos o cuidado de, antes de definir Função, retomar com os alunos relações entre grandezas, incluindo os conceitos de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, bem como definir grandezas que variam com mesmo sentido e grandezas que variam com sentido inverso, para, depois, apresentar aos alunos uma série de exercícios que trabalham as relações entre duas grandezas.

Parte do foco desta dissertação - conceito de função e função linear - estão contemplados nos PCNEM 2002. No entanto, abordamos também a função homográfica de fórmula k/x (k constante não nula) por ser objetivo da mesma traduzir para a linguagem de

funções não só a relação de proporcionalidade direta, mas também a relação de proporcionalidade inversa.

Em relação ao tema inversibilidade de funções, encontramos quase nenhuma recomendação nos PCNEM. O pouco que encontramos encontra-se nos PCNEM+ (2002, p. 120):

É importante evitar detalhamentos ou nomenclaturas excessivos. Por exemplo, se o único caso de funções inversas que os alunos verão no ensino médio forem as funções exponencial e logaritmo, não há necessidade de todo o estudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e invertíveis.

Em nossa Sequência Didática, optamos por incluir o estudo de funções inversas para mostrar ao leitor que as mudanças que propomos quanto a conceitos relativos ao tema funções se mantém consistente quando abordamos inversibilidade.

Quanto ao estudo de gráficos, um detalhe de muita importância está posto nos PCNEM (2002, p. 72) no seguinte trecho: “A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções”.

Entendemos, por esta colocação, que alguns poucos valores em uma tabela não são suficientes para comprovar ou deduzir o comportamento do gráfico de uma função cujo domínio extrapola os valores tabelados.

Constatamos que esta orientação, na grande maioria das vezes, não é considerada nos livros didáticos que analisamos (veja Capítulo 3). Neles observamos que o estudo de gráficos é justamente apresentado como a transcrição de uma tabela em um gráfico. Na nossa opinião, corroborada pela frase mencionada acima, a definição de função e o estudo de gráfico necessitam de muito mais cuidado ao serem abordados.

Na Sequência Didática proposta neste trabalho, definimos gráfico e esboço do gráfico, e apresentamos a diferença entre estes termos. A razão para esta distinção ficará clara por ocasião da Sequência Didática.

O próximo ponto aborda, justamente, o tema que deu origem ao nosso trabalho: a retomada do relacionamento entre grandezas no Ensino Médio, mais especificamente no estudo das funções. As orientações quanto a esta questão, trazidas nos PCNEM (2002, p. 72-73) são muito claras:

As ideias de crescimento, modelo linear ($f(x) = a.x$) e proporcionalidade direta devem ser colocadas em estreita relação, evidenciando-se que a proporcionalidade direta é um particular e importante modelo de crescimento. Nesse momento, também é

interessante discutir o modelo de decrescimento com proporcionalidade inversa ($f(x) = a/x$). O professor deve estar atento ao fato de que os alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa, e aqui é interessante trazer situações do cotidiano para ilustrar diferentes tipos de crescimento/decrescimento de grandezas em relação. Situações em que se faz necessária a função afim ($f(x) = a.x + b$) também devem ser trabalhadas.

Neste trabalho, tivemos o cuidado de focar o estudo da Função Linear como a tradução para a linguagem de funções de uma relação entre duas grandezas diretamente proporcionais. Incluímos também, a Função Afim como a tradução do relacionamento entre duas grandezas que são apenas no mesmo sentido ou no sentido inverso e a Função Homográfica da forma k/x (k constante não nula) como a tradução do relacionamento de proporcionalidade inversa. No entanto, discordamos da afirmação que “a proporcionalidade direta é um particular e importante modelo de crescimento”, pois na função linear o coeficiente angular pode ser negativo sem que a proporcionalidade seja perdida. Maiores detalhes são apresentados no Capítulo 5.

A opção por iniciarmos nossa proposta para Sequência Didática pela retomada do tema “relacionamento entre Grandezas” deve-se ao fato de que, como bem é colocado nos PCNEM 2002, os alunos de fato consideram “crescimento” e “proporcionalidade direta” sinônimos, bem como “decrescimento” e “proporcionalidade inversa”.

Damos especial atenção à função Afim, que descreve a relação entre duas grandezas as quais são apenas grandezas que variam com mesmo sentido ou com sentido inverso e não necessariamente são proporcionais, tentando desfazer a concepção errônea que o aluno traz do Ensino Fundamental bem apontada nos PCNEM 2002, de associar crescimento a grandezas diretamente proporcionais.

Um detalhe que julgamos merecer especial atenção por discordarmos da forma como está apresentado nos PCNEM, diz respeito à displicência com que é tratado o domínio de uma função. Explicamo-nos: é possível notar que funções escritas nas formas $f(x) = a.x$ ou

$f(x) = a.x + b$ são, em geral, referidas como funções respectivamente Linear e Afim, independente do domínio. No entanto, ao definí-las, sempre se exige que domínio seja o conjunto dos números reais. A grande maioria dos livros didáticos define função Linear, por exemplo, da seguinte forma: “função Linear é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela fórmula $f(x) = a.x$ ”.

Esta incoerência aparece no trecho a seguir, retirado dos PCNEM (2002, p. 75): “As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais”.

Por isso discordamos dos PCNEM e dos livros didáticos. Acreditamos que, ao definir estas funções tendo como domínio o conjunto dos números reais, os livros didáticos acabam criando um desserviço para a Educação Matemática, pois, ao se definir tais funções, se enfatiza a questão do domínio \mathbb{R} , porém, ao trabalhar com situações contextualizadas normalmente o domínio não é \mathbb{R} . Um exemplo clássico que é dado como função Afim é o valor de uma corrida de táxi, onde se atribui um valor para a bandeirada e outro para cada quilometro rodado. O domínio desta função é um conjunto de números reais positivos, enquanto que a definição da função Afim exige que o domínio seja o conjunto dos números reais.

Em nossa Sequência Didática, optamos por chamar de função “*do tipo*” as funções que podem ser expressas por fórmulas linear e afim, mas que têm domínio não necessariamente igual a \mathbb{R} . Julgamos esta distinção importante de ser salientada, pois, por exemplo, uma função que é apenas *do tipo* quadrática, não necessariamente tem como ponto de mínimo ou de máximo, o valor da abscissa que corresponde ao vértice da parábola que contém o seu gráfico, já que este valor pode nem fazer parte do domínio da função.

Por isso, em nossa Sequência Didática introduzimos a nomenclatura “*do tipo*” e salientamos que, com esta nomenclatura, Progressão Aritmética na linguagem de funções corresponde apenas a uma função *do tipo* Afim, pelo fato de ter como domínio apenas o conjunto dos números naturais.

Também dos PCNEM+ (2002, p. 118) selecionamos alguns trechos que consideramos importantes a respeito do estudo de Funções, sendo que os mesmos são apresentados como Tema 1 Álgebra: Números e Funções:

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática.

Discordamos quando é colocado que “o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica”, pois sabemos que o estudo da Álgebra se inicia no Ensino Fundamental. Em nossa opinião, mais adequado seria o termo “reforçar” ou “sedimentar”, no lugar de “adquirir”, considerando que o estudo das funções permite ao aluno uma maior

familiarização com a álgebra e, assim, talvez, a partir do estudo de funções, fique mais fácil perceber uma importante utilidade da álgebra dentro da matemática.

Nos PCNEM+ (2002, p. 118) quanto ao conceito de função, encontramos: “... a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções”.

Nos livros didáticos analisados, percebemos que a falta de cuidado ao conceituar função acaba gerando algumas contradições. Um exemplo claro disto é a atenção que vários autores dão ao contradomínio de uma função numérica, sugerindo que funções com mesmo domínio e mesma fórmula acabem sendo consideradas diferentes só porque têm contradomínios diferentes.

Em nossa Sequência Didática tentamos não repetir este tipo de contradição no caso de funções reais de variável real, dando nenhum destaque ao contradomínio, considerando-o sempre igual a \mathbb{R} (maiores detalhes são apresentados no Capítulo 4).

Ainda com relação ao parágrafo mencionado acima, tirado dos PCNEM+, ressaltamos a falta de clareza quanto à ênfase “em suas propriedades em relação às operações”: a que tipo de operações referem-se: seriam as operações que aparecem em suas fórmulas ou seriam as operações com funções?

Quanto à abordagem utilizada para se chegar à definição de função dizem os PCNEM+ (2002, p.118):

Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.

Concordamos com os PCNEM+ 2002 quando sugerem que o ensino de função pode iniciar diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, porém não podemos esquecer que, mesmo que não seja feita referência à função numérica, continuamos utilizando operações entre conjuntos, haja visto que, ao definirmos função, estamos associando variáveis e o universo no qual ela está inserida é um conjunto. Também devemos considerar que toda função é um subconjunto do produto cartesiano e, portanto, consideramos que as operações entre conjuntos não são simplesmente abandonadas.

Quanto à excessiva formalidade no estudo de funções, temos nos PCNEM+ (2002, p. 118): “Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares”.

Concordamos com os PCNEM+ 2002 no sentido de sugerir deixar de lado toda e qualquer formalidade desnecessária. Ressaltamos que, em nossa Sequência Didática, trabalhamos o conceito de função inversa sem depender do conceito de sobrejetora (por coerência com a discussão feita acima sobre a ênfase no contradomínio) e envolvendo a composição de funções sem, em nenhum momento, precisar defini-la (Maiores detalhes no Capítulo 5 quando da Implementação da Sequência Didática).

No próximo capítulo apresentamos uma análise de dois dos livros didáticos recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o ano de 2012 (PNLD 2012). Convém salientar que os dois livros didáticos por nós analisados trazem, cada um, um capítulo/Capítulo que trata exclusivamente da função modular aqui não abordada por nós.

CAPÍTULO 3 - ANÁLISE CRÍTICA DE LIVROS DIDÁTICOS

Este capítulo trata da análise crítica de dois Livros didáticos de matemática para o Ensino Médio, no que diz respeito a conteúdos referentes a funções, escolhidos entre os sete Livros didáticos selecionados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2012.

Os livros escolhidos foram Matemática Contexto e Aplicações, Volume 1, de Luiz Roberto Dante, 2012, Editora Ática, que neste texto será chamado de Livro 1 e Matemática Ciência e Aplicações, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, Volume 1, 2012, Editora Saraiva, que neste texto será chamado de Livro 2. A escolha do Livro 1 deu-se pelo fato de o autor do presente trabalho ter utilizado o autor Dante durante todos os anos em que atuou em uma escola pública estadual. O Livro 2 foi escolhido por termos tido a informação de que estes dois livros representariam em torno de 65% do total de livros didáticos de Matemática comprados pelo Governo Federal para as escolas públicas, por conta da implementação do PNLD.

Nossa motivação para esta análise crítica deriva de alguns fatores importantes. Um deles é o papel que os Livros indicados pelo PNLD exercem sobre os educadores e alunos das escolas públicas brasileiras, servindo muitas vezes como única fonte de referência para o professor:

Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apoiam-se quase exclusivamente nos Livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória. (BRASIL, 1998, p. 21-22).

Consideramos grave o fato de termos livros didáticos com problemas de estruturação quando temos em nosso país a realidade de grande parte dos nossos professores se utilizarem apenas deles como recurso para a sua prática profissional.

Por experiência própria, que a grande maioria dos estudantes raramente busca outro recurso para estudar matemática além do livro didático adotado em sua escola. Consideramos este um fato muito importante durante nossa análise, pois ao nos depararmos com um livro que contém erros, frases inadequadas ou má condução dos conteúdos, damos-nos conta que um estudante que se utilize somente deste livro provavelmente levará consigo os mesmos erros apresentados, outras vezes terá grande dificuldade em compreender determinados conteúdos por ter se baseado em um texto inadequado. Uma vez que este conhecimento errado é internalizado, não é uma tarefa fácil a reconstrução do conhecimento. Exemplos claros disto podem ser vistos em muitos alunos de Licenciatura em Matemática, tanto calouros quanto

alunos já nos períodos finais do curso, levando consigo definições equivocadas. Também é preocupante o fato de que, uma vez que o professor leva consigo o erro, provavelmente o reproduzirá em suas aulas, gerando a propagação do mesmo.

Somos de opinião que a prática de análise de livros didáticos deveria ser muito mais difundida entre estudantes de licenciatura, pois desta forma, além de o futuro professor se tornar mais preparado para este tipo de prática, acreditamos não só que os autores passariam a dar maior atenção ao que apresentam nos livros mas também por imaginarmos que os atuais estudantes de Matemática se tornem no futuro autores de livros didáticos, e então a tendência seria de estes também futuramente preocuparem-se com uma escrita mais cuidada.

Registramos aqui esta análise também por considerarmos de suma importância a forma com que é tratado o aprendizado de nossos alunos, esperando que a condução dos assuntos seja feita de forma correta e clara. Ela serviu como estímulo para que nos esforçássemos por tentar que a Sequência Didática apresentada no capítulo 5 ficasse bem estruturada em todos os sentidos.

Nos livros analisados, vários problemas foram constatados; escolhemos iniciar apontando algumas incoerências apresentadas pelos autores quanto ao método matemático empregado na condução do assunto funções e seguir fazendo as críticas preferencialmente na ordem em que os conteúdos são tratados nos próprios livros.

3.1 SOBRE O MÉTODO MATEMÁTICO: DEMONSTRAÇÃO X “OBSERVE E VEJA O QUE ACONTECE”

Observamos que, na maioria das vezes, a demonstração dos fatos é deixada de lado pelos autores de ambos os livros, e simplesmente é usado o método de observar o que acontece pela apresentação de alguns exemplos e, a partir daí, considerar-se como verdadeiro também para todo e qualquer outro caso que se encaixa nas hipóteses de tal afirmação. Para que nos façamos claros, observemos o exemplo a seguir retirado do Livro 1:

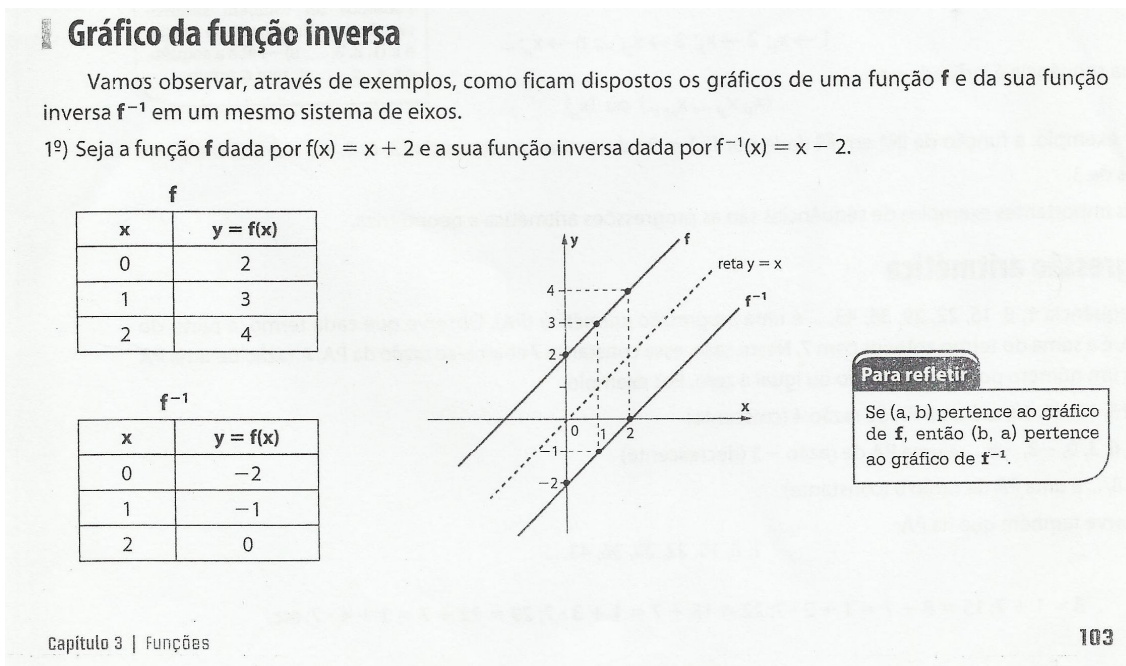


Figura 1 – Recorte do Livro 1, página 103.

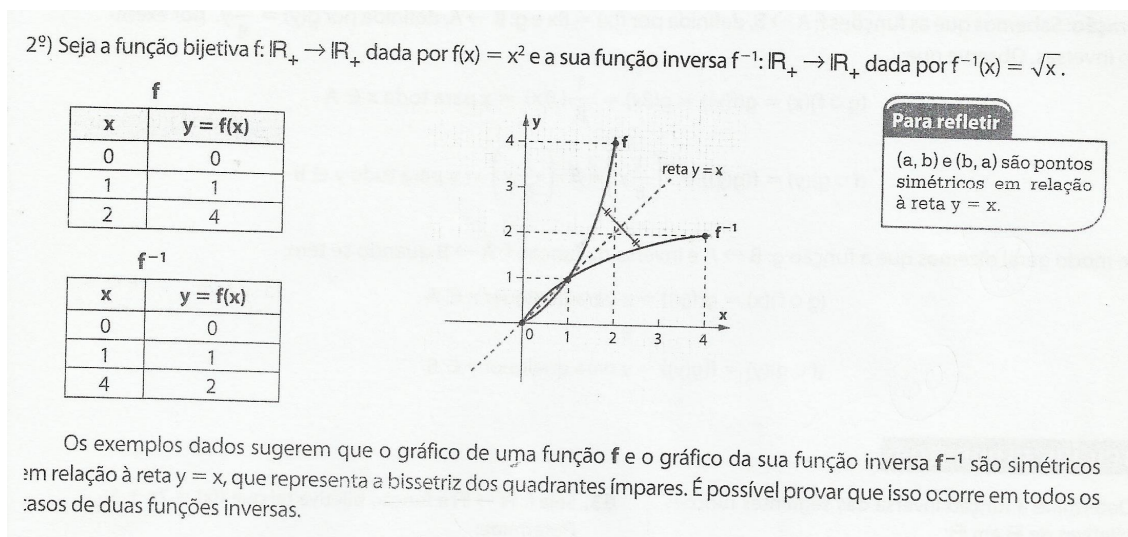


Figura 2 – Recorte do Livro 1, página 104.

Observe que a simples comparação entre duas tabelas, com apenas três valores cada, serviu não apenas para esboçar o gráfico com infinitos pontos como também para estabelecer que os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Ressalte-se que, com a frase “é possível mostrar”, o autor manifesta sua escolha pela não ênfase ao método matemático, pois esta é uma demonstração que não foge do nível de um aluno de ensino médio.

Também muitas vezes observamos que os autores alimentam a crença comum de que a resposta para problemas matemáticos é sempre única (provavelmente atrelada ao fato de que a matemática é uma ciência exata). Isto ocorre em vários momentos onde os autores perdem a oportunidade de deixar o estudante questionar se diferentes soluções são possíveis, pois as perguntas são feitas já de forma que a resposta seja única, como no item (c) do exemplo 5 abaixo, retirado do Livro 1:

2. Observe na tabela a medida do lado (em cm) de uma região quadrada e sua área (em cm^2).

Medida do lado (em cm)	1	3	4	5,5	10	...	ℓ
Área (em cm^2)	1	9	16	30,25	100	...	ℓ^2

a) O que é dado em função do quê?
 b) Qual é a variável dependente?
 c) Qual é a variável independente?

e) Com um custo de R\$ 120,00, quantas peças podem ser produzidas?

5. Um cabeleireiro cobra R\$ 12,00 pelo corte para clientes com hora marcada e R\$ 10,00 sem hora marcada. Ele atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável x de clientes sem hora marcada.

a) Escreva a fórmula matemática que fornece a quantidade Q arrecadada por dia em função do número x .

Capítulo 3 | Funções 73

Figura 3 – Recorte do Livro 1, página 73.

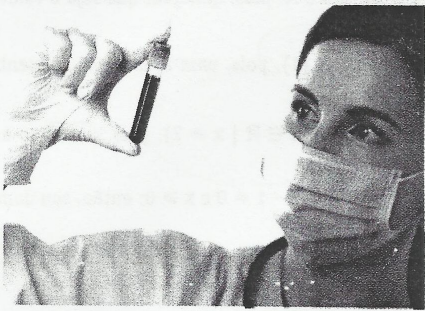
b) Qual foi a quantia arrecadada num dia em que foram atendidos 16 clientes?
 c) Qual foi o número de clientes atendidos num dia em que foram arrecadados R\$ 212,00?
 d) Qual é a expressão que indica o número C de clientes atendidos por dia em função de x ?

d) Qual é a regra que associa um número natural ao seu sucessor?
 e) Qual é o sucessor do maior número natural de três algarismos?

Desafio em dupla

Figura 4 – Recorte do Livro 1, página 74.

Já no Livro 2, destacamos os seguintes trechos de dois exercícios:



21. Uma função real é dada pela lei $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Determine os valores de a , tais que:

$$f(a) - f(a + 1) = \frac{1}{3} \cdot f(2a)$$

22. Sabendo que $f(x) = 4x - 5$, simplifique a expressão $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$, definida para $x \neq 3$.

23. Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Determine o valor de m tal que $f(m) = f(m - 1)$. Faça a verificação da resposta encontrada.

Figura 5 – Recorte do livro 2, página 51.

Nos trechos mostrados, damos especial ênfase ao fato de os autores ignorarem o questionamento sobre a existência dos valores questionados. Consideramos muito mais educativo questionar o estudante sobre a existência desses valores e também se, em caso

afirmativo, eles são únicos. É comum encontrarmos estudantes, inclusive de graduação, que apresentam grande dificuldade em aceitar problemas matemáticos cuja solução não seja única ou talvez não exista, isto observado pelo autor e pela orientadora deste trabalho em suas experiências em sala de aula, principalmente em períodos iniciais dos cursos de graduação em Matemática.

Seguindo nossas observações em relação à ênfase ao método matemático nos livros analisados, apontamos na Figura 4 outro trecho do Livro 1, exibindo um exemplo no qual há uma falta de cuidado com que as informações são apresentadas. Primeiramente, tem-se aí uma função cujo domínio é o conjunto dos números reais; porém, para construir o esboço do gráfico, se utiliza, sem maiores comentários, de uma tabela que ainda falha no sentido de só apresentar números inteiros. A seguir, o autor até coloca bem que “agora o gráfico é o conjunto de todos os pontos”, porém segue conduzindo mal o assunto, quando afirma, novamente sem maiores comentários, que este conjunto resulta na reta que é apresentada na figura. Só a seguir o autor indica que, mais adiante, o aluno leitor verá que este tipo de função tem como esboço do gráfico efetivamente uma reta, e que então bastariam dois pontos para traçá-la.

Outro item a ser destacado, ainda sobre o método matemático empregado, diz respeito à determinação de domínio e da imagem de uma função a partir dos esboços dos gráficos. Por exemplo, no Livro 1 encontramos:

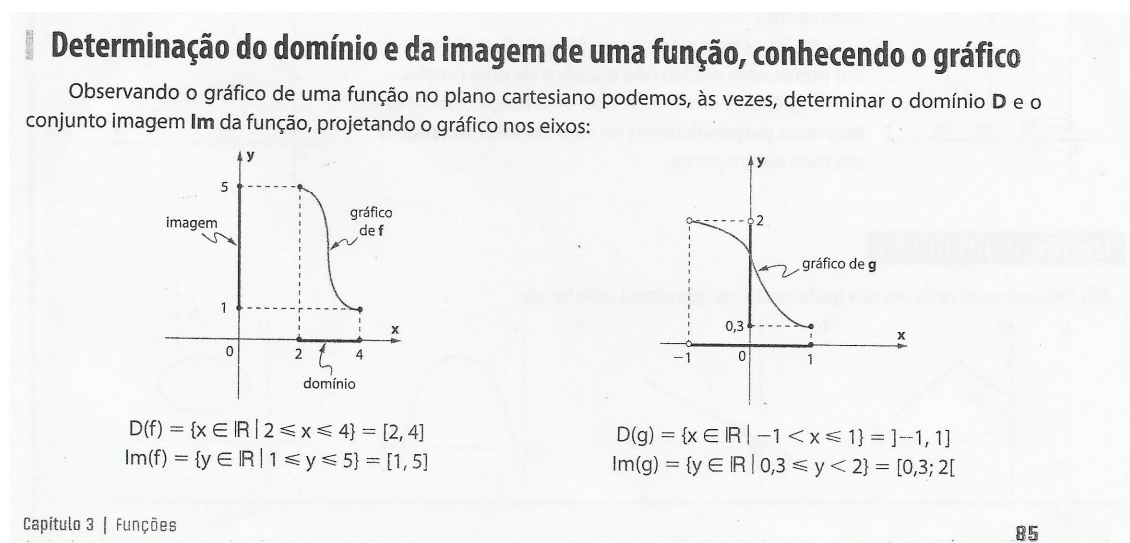


Figura 6 – Recorte do Livro 1, página 85.

Nossa primeira crítica neste momento se dá ao fato de o autor, no trecho em destaque, colocar que o domínio e o conjunto imagem de uma função podem ser determinados “às vezes”, sem deixar claro ao leitor quais são “as vezes” em que isto é possível de ser feito.

Criticamos também a forma como foram determinados domínio e imagem nos esboços que foram apresentados, pois, ao não conhecermos as funções que os geraram, não podemos afirmar que os traçados são de fato contínuos. Por exemplo, nada nos garante que o domínio não esteja contido no conjunto dos números racionais. Além disso, o uso de apenas exemplos triviais, cujo domínio é finito, não leva o estudante a analisar casos onde o domínio é infinito ou não contínuo, enfim a avaliar a dificuldade geralmente embutida na questão de determinação do conjunto imagem.

Sobre a maneira como os autores introduzem o estudo das funções, foi possível constatar que, dos dois Livros analisados, o Livro 2 foi bastante coerente em sua motivação para o estudo de funções, conduzindo de forma clara e correta a apresentação das situações que geram funções. Já no Livro 1, constatamos que foram geradas algumas incoerências principalmente nos exemplos utilizados, conforme nos mostra a Figura 7:

2. Explorando intuitivamente a noção de função

A ideia de função está presente quando relacionamos duas grandezas variáveis. Vejamos alguns exemplos.

9) Número de litros de gasolina e preço a pagar

Considere a tabela ao lado que relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em maio de 2009).

Observe que o preço a pagar é dado *em função* do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar *depende* do número de litros comprados.

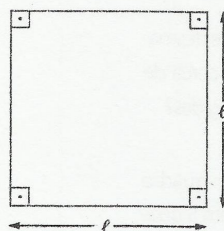
preço a pagar = R\$ 2,40 vezes o número de litros comprados ou

$p = 2,40x \rightarrow$ lei da função ou fórmula matemática da função
ou regra da função

Número de litros	Preço a pagar (R\$)
1	2,40
2	4,80
3	7,20
4	9,60
:	:
40	96,00
x	2,40x

9) Lado do quadrado e perímetro

Veja agora a tabela que relaciona a medida do lado de um quadrado (ℓ) e o seu perímetro (P):



Medida do lado (ℓ)	Perímetro (P)
1	4
2	8
2,5	10
3	12
4,1	16,4
:	:
ℓ	4ℓ

Para refletir

p é símbolo de semiperímetro. Não existe um símbolo para perímetro. Muitas pessoas utilizam $2p$ para representá-lo. Aqui usaremos P para indicar perímetro.

Observe que o perímetro do quadrado é dado *em função* da medida do seu lado, isto é, o perímetro *depende* da medida do lado. A cada valor dado para a medida do lado corresponde um único valor para o perímetro.

perímetro = 4 vezes a medida do lado ou

$P = 4\ell \rightarrow$ lei da função ou fórmula matemática da função ou regra da função

Como o perímetro depende da medida do lado, ele é a *variável dependente*, e a medida do lado é chamada de *variável independente*.

9) A máquina de dobrar

Observe ao lado o desenho imaginário de uma máquina de dobrar números.

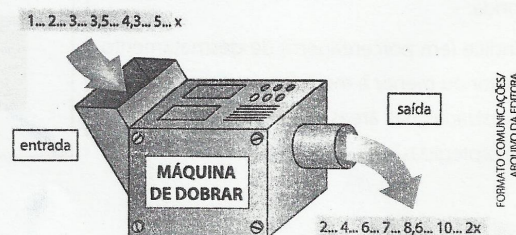
Veja que os números que saem são dados *em função* dos números que entram na máquina, ou seja, os números que saem *dependem* dos números que entram. Assim, a *variável dependente* é o número de saída e a *variável independente* é o número de entrada.

Neste caso, temos:

número de saída (n) é igual a duas vezes o

número de entrada (x) ou

$n = 2x \rightarrow$ regra da função ou lei da função, ou, ainda,
fórmula matemática da função



FORMATO COMUNICAÇÃO
ARQUIVO DA EDITORA

Matemática

Figura 7 – Recorte do Livro 1, página 72.

Acreditamos que, quando o autor inicia o capítulo com a frase “As funções, descrições algébricas da dependência entre grandezas”, ele leva o aluno leitor a crer que funções restringem-se a variáveis numéricas. O termo “algébrica” é usado inadequadamente, pois o autor também trabalha em seu livro com funções transcendentais (exponencial, logarítmica e trigonométricas).

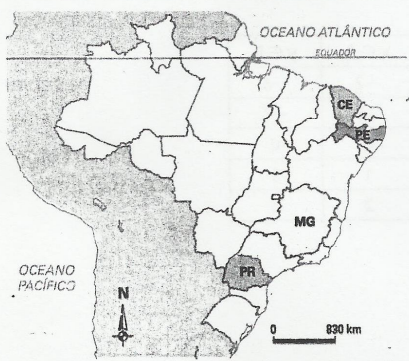
Nossa crítica à maneira de introduzir o assunto funções, no que diz respeito à escolha dos exemplos, está na falta de cuidado do autor com os exemplos apresentados e os exercícios que são propostos logo em seguida. Acreditamos que, na tentativa de contextualizar o assunto, o autor do Livro 1 peca ao esquecer alguns detalhes, como no primeiro exemplo, ao apresentar uma tabela usando apenas números inteiros para a quantidade de litros: o autor esquece que é um hábito comum, ao abastecer um carro, o cliente solicitar que seja colocado uma quantidade de litros correspondente a um valor inteiro do preço a pagar (por exemplo, o cliente pede para abastecer o suficiente para R\$ 100,00).

Outro detalhe importante a se observar neste livro é que todos os exemplos de motivação não só tratam de funções *do tipo* Linear, como também são todos numéricos, enquanto que já no primeiro exercício apresentado (veja Figura 8) temos uma tabela sem valores numéricos (exercício 1), revelando uma incoerência com a primeira frase do capítulo, já mencionada:

Exercícios propostos **ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.**

1. A tabela a seguir indica o nome de alguns estados e de suas respectivas capitais.

Estados	Capitais
Ceará	Fortaleza
Minas Gerais	Belo Horizonte
São Paulo	São Paulo
Paraná	Curitiba
Pernambuco	Recife



Fonte: Adaptado de *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2007.

a) O nome da capital é dado em função do nome do estado?
b) O nome da capital depende do nome do estado?
c) A cada estado corresponde uma única capital?

d) Qual é a lei da função que associa a medida do lado com a área?
e) Qual é a área de uma região quadrada cujo lado mede 12 cm?
f) Qual é a medida do lado da região quadrada cuja área é de 169 cm²?

3. Responda às seguintes questões:
a) A diagonal (d) de um quadrado é dada em função do seu lado (ℓ). Qual é a fórmula matemática que indica essa função?
b) O comprimento (c) da circunferência é dado em função do seu raio (r). Qual é a expressão que indica essa função?
c) O número de diagonais (d) de um polígono é dado em função do número de lados (n) do polígono. Qual é a fórmula matemática que indica essa função?

4. A tabela abaixo indica o custo de produção de certo número de peças para informática:

Número de peças	1	2	3	4	5	6	7	8
Custo (R\$)	1,20	2,40	3,60	4,80	6,00	7,20	8,40	9,60

a) A cada número de peças corresponde um único valor em reais?
b) O que é dado em função do quê?
c) Qual é a fórmula matemática que dá o custo (c) em função do número de peças (x)?
d) Qual é o custo de 10 peças? E de 20 peças? E de 50 peças?

Figura 8 – Recorte do Livro 1, página 73.

Mais adiante, no Livro 1, o autor apresenta o seguinte exercício:

b) Qual foi a quantia arrecadada num dia em que foram atendidos 16 clientes?

c) Qual foi o número de clientes atendidos num dia em que foram arrecadados R\$ 212,00?

d) Qual é a expressão que indica o número C de clientes atendidos por dia em função de x ?

6. Considere a correspondência que associa a cada número natural o seu sucessor.

a) Construa uma tabela que indique essa correspondência.

b) O sucessor de um número natural depende do número natural?

c) O que é dado em função do quê?

d) Qual é a regra que associa um número natural ao seu sucessor?

e) Qual é o sucessor do maior número natural de três algarismos?

Desafio em dupla

Examinem e depois completem esta tabela no caderno.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-9	-4	1	6				

Descubram o padrão e escrevam a lei da função que representa os dados da tabela.

Figura 9 – Recorte do Livro 1, página 73.

O que criticamos neste exercício é a falta de cuidado com o domínio da função.

Por estar introduzindo o assunto funções, o autor não dá especial atenção ao domínio, porém, ao pedir que o estudante construa uma tabela, o mesmo ignora o fato de que o domínio proposto é infinito, e portanto uma tabela não é o melhor recurso para motivar/discutir explorar as questões que ele pretende explorar.

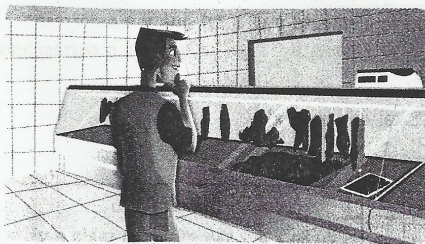
3.2 SOBRE A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Diferente do Livro 1, o Livro 2 apresenta uma introdução coerente com relação ao estudo das funções que apresenta; porém, em nossa opinião, o mesmo peca ao tratar “fórmula” e “lei” como sinônimos. Copiamos na Figura 10 alguns trechos retirados do livro 2:

Exercícios

1. Na tabela é dado o preço pago em função da quantidade de carne adquirida em um açougue:

Quantidade (em quilo)	Preço (R\$)
0,5	7,00
1,0	14,00
1,5	21,00
2,0	28,00
3,5	49,00



a) Quanto pagará um cliente que comprar 4,5 quilos de carne?

b) Dispondo-se de R\$ 350,00, qual é a quantidade máxima de carne que pode ser adquirida?

c) Qual é a lei que relaciona o preço (p) em função da quantidade em quilos (n) comprada?

2. Na cidade, um veículo de passeio consome um litro de gasolina a cada 9 quilômetros rodados.

a) Faça uma tabela que forneça a distância percorrida pelo veículo ao se consumirem: 0,25 ℓ ; 0,5 ℓ ; 2 ℓ ; 3 ℓ ; 10 ℓ ; 25 ℓ ; 40 ℓ de gasolina.

b) Qual é a fórmula que relaciona a distância percorrida (d) em função do número de litros (ℓ) consumidos?

3. Um moderno avião é capaz de manter uma velocidade média de cruzeiro de aproximadamente 800 km/h.

a) Qual é a distância percorrida pelo avião em 15 minutos, meia hora, 2 horas e 5 horas? Represente em uma tabela.

b) Em quanto tempo o avião percorre 5 200 km?

c) Relacione, por meio de uma lei, a distância percorrida (d), em quilometro, em função do tempo (t), em horas.

45

Figura 10 – Recorte do livro 2, página 45.

Nossa crítica a estes trechos está no fato de que, em matemática, fórmula não é a mesma coisa que regra ou lei. Sabemos que existem funções que podem ser definidas por uma regra e que não podem ser expressas por uma fórmula que só envolva, por exemplo, as operações elementares². No item (c) do exercício 1 acima citado, o autor solicita ao aluno que apresente a lei da função, porém é visível que o mesmo está querendo que o estudante apresente uma fórmula matemática que relaciona as duas grandezas em questão. Já nos demais exercícios, o autor sugere ao leitor que os termos fórmula, regra e lei são considerados sinônimos.

O autor do Livro 1, em determinado momento, define função da seguinte forma:

² Ressalte-se aqui que são aceitas como “regra” descrições muito mais amplas do que uma fórmula; para uma fórmula precisamos convencionar os símbolos/ operações que vamos aceitar em tais expressões. Por exemplo, a **notação** maior inteiro vai ser aceita em uma fórmula ou queremos que nas fórmulas apareçam apenas operações elementares?

Definição e notação

Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma função de **A** em **B** é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Usamos a seguinte notação:

$f: A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: **f** é uma função de **A** em **B**)

A função **f** transforma **x** de **A** em **y** de **B**.

Escrevemos isso assim:

$$y = f(x)$$

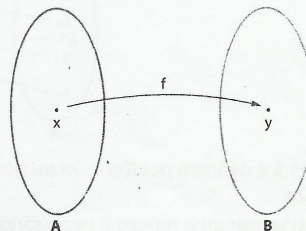


Figura 11 – Recorte do Livro 1, página 75.

Nossa crítica a essa definição está na inclusão, em uma definição matemática, de um termo matematicamente impreciso – regra. Além disso, há uma contradição do autor consigo mesmo, pois, ao introduzir o estudo de funções, o autor inicia seu texto com “As funções, descrições algébricas da dependência entre grandezas” e agora diz que função é uma regra, porém sabemos que nem toda regra pode ser expressa por uma expressão algébrica, como a já mencionada função que a cada estado associa a sua capital (veja Figura 8). Esta contradição possivelmente levará um estudante a apresentar dificuldades em compreender o conceito de função. No livro 2 observamos a seguinte sequência de informações, ao definir função:

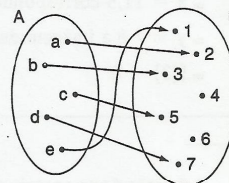
Definição

Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de **função de A em B**.

5
Exemplo

Observe a relação ao lado entre os elementos dos conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Essa relação é uma função porque a todo elemento de **A** corresponde um único elemento **B**. Tal relação também poderia ser descrita por uma tabela em que cada $x \in A$ tem um único correspondente $y \in B$.



$x \in A$	$y \in B$
a	2
b	3
c	5
d	7
e	1

A mesma relação poderia, ainda, ser descrita por um conjunto **f** de pares ordenados do tipo (x, y) em que $x \in A$, $y \in B$, e y é o correspondente de x :

$$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 5), (d, 7), (e, 1)\}$$

Figura 12 – Recorte do livro 2, página 47.

Nessa função, dizemos que:
 $x = a$ corresponde a $y = 2$ ou $x = a$ está associado a $y = 2$ ou 2 é a imagem de a .
 Da mesma forma:
 3 é a imagem de b , 5 é a imagem de c , 7 é a imagem de d e 1 é a imagem de e .
 Notemos, mais uma vez, que cada $x \in A$ tem uma única imagem $y \in B$.

Notação

De modo geral, se f é um conjunto de pares ordenados (x, y) que caracteriza uma função de A em B , indicamos:

$$f: A \rightarrow B$$

Se, nessa função, $y \in B$ é imagem de $x \in A$, indicamos:

$$y = f(x)$$

Retomando o exemplo anterior, temos: $f(a) = 2$; $f(b) = 3$; $f(c) = 5$; $f(d) = 7$; $f(e) = 1$

Pense nisto: $f = f(x)$? Por quê?




Figura 13 – Recorte do livro 2, página 48.

O autor define função de uma forma bastante coerente, porém, nossa crítica neste momento se deve ao fato de que, anteriormente à motivação, para o estudo de funções, o autor usou grandezas mensuráveis (tempo e espaço, mercadoria e preço, passageiros e preço da passagem, tempo e temperatura), enquanto que a abstração foi toda feita com conjuntos numéricos ($A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$) e o primeiro exemplo apresentado após a definição tem para domínio um conjunto de letras ($A = \{a, b, c, d, e\}$). Outro ponto a se considerar é que o autor só define produto cartesiano quando aborda gráfico de função, o que é posterior à definição; obviamente isto pode causar confusão para um estudante, pois este recém está sendo introduzido no assunto funções.

Quanto ao Livro 1, comparando novamente o trecho “As funções, descrições algébricas da dependência entre grandezas”, com as colocações que são apresentadas mais adiante no mesmo livro:

5. Funções definidas por fórmulas matemáticas

Grande parte das funções que estudamos é determinada por fórmulas matemáticas (regras ou leis).
 No início do capítulo vimos uma correspondência entre o número de litros de gasolina e o preço a pagar expressa por:

$$\text{preço a pagar} = 2,40 \text{ vezes o número de litros comprados}$$

em que o preço de 1 ℓ é R\$ 2,40. Essa função pode ser expressa pela fórmula matemática:

$$y = 2,40x \quad \text{ou} \quad f(x) = 2,40x$$

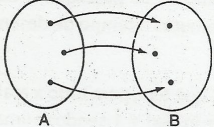
Figura 14 – Recorte do Livro 1, página 77.

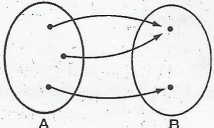
Salientamos novamente a incoerência do autor ao utilizar a expressão “grande parte das funções” na frase, pois se fosse verdade que “as funções são descrições algébricas”, necessariamente teremos uma fórmula para representá-las.

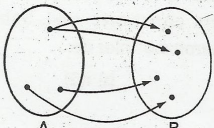
No livro 2 deparamo-nos com outro problema relacionado a funções definidas por fórmulas: o hábito de sugerir/levar o leitor a pensar que existe uma única função interpolando um conjunto finito de pontos. A Figura 15 reproduz um trecho retirado do livro, salientando o emprego do artigo definido, sugerindo a unicidade mencionada:

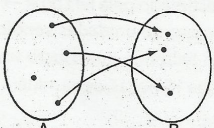
Exercícios

7. Verifique, em cada caso, se o esquema define ou não uma função de A em B :

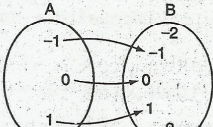
a) 

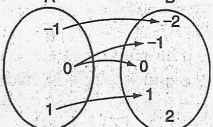
b) 

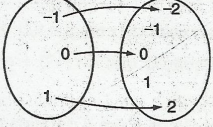
c) 

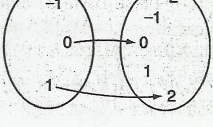
d) 

8. Em cada caso, verifique se o esquema representa uma função de A em B , sendo $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Em caso afirmativo, dê a lei que define tal função:

a) 

b) 

c) 

d) 

| 49 |

Figura 15 – Recorte do livro 2, página 49.

O erro do autor pode ser comprovado quando verificamos as respostas aos exercícios propostos, apresentadas no final do livro. No item (a) do exercício 8 apresentado acima, onde o autor apresenta uma única resposta: $y = x$, ignorando que $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7 \dots$, $y = x^n$ sendo n ímpar, são todas fórmulas que também se adequam à tabela apresentada.

3.3 EXEMPLOS DE FUNÇÃO

Alguns exemplos que são usados durante o desenvolvimento do conteúdo funções são muito interessantes, porém os autores, na nossa opinião, por várias vezes, os apresentam de forma equivocada. Por exemplo, no Livro 1:

2. Explorando intuitivamente a noção de função

A ideia de função está presente quando relacionamos duas grandezas variáveis. Vejamos alguns exemplos.

9) Número de litros de gasolina e preço a pagar

Considere a tabela ao lado que relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em maio de 2009).

Observe que o preço a pagar é dado *em função* do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar *depende* do número de litros comprados.

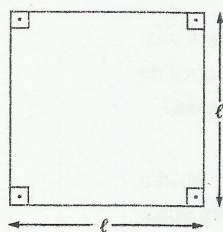
preço a pagar = R\$ 2,40 vezes o número de litros comprados ou

$p = 2,40x$ → lei da função ou fórmula matemática da função
ou regra da função

Número de litros	Preço a pagar (R\$)
1	2,40
2	4,80
3	7,20
4	9,60
⋮	⋮
40	96,00
x	2,40x

9) Lado do quadrado e perímetro

Veja agora a tabela que relaciona a medida do lado de um quadrado (ℓ) e o seu perímetro (P):



Medida do lado (ℓ)	Perímetro (P)
1	4
2	8
2,5	10
3	12
4,1	16,4
⋮	⋮
ℓ	4ℓ

Para refletir

p é símbolo de semiperímetro. Não existe um símbolo para perímetro. Muitas pessoas utilizam $2p$ para representá-lo. Aqui usaremos P para indicar perímetro.

Observe que o perímetro do quadrado é dado *em função* da medida do seu lado, isto é, o perímetro *depende* da medida do lado. A cada valor dado para a medida do lado corresponde um único valor para o perímetro.

perímetro = 4 vezes a medida do lado ou

$P = 4\ell$ → lei da função ou fórmula matemática da função ou regra da função

Como o perímetro depende da medida do lado, ele é a *variável dependente*, e a medida do lado é chamada de *variável independente*.

9) A máquina de dobrar

Observe ao lado o desenho imaginário de uma máquina de dobrar números.

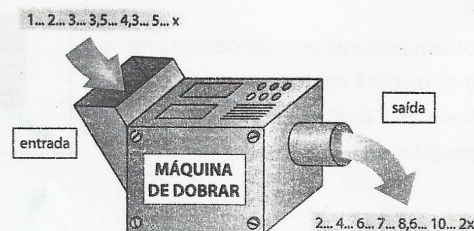
Veja que os números que saem são dados *em função* dos números que entram na máquina, ou seja, os números que saem *dependem* dos números que entram. Assim, a *variável dependente* é o número de saída e a *variável independente* é o número de entrada.

Neste caso, temos:

número de saída (n) é igual a duas vezes o

número de entrada (x) ou

$n = 2x$ → regra da função ou lei da função, ou, ainda,
fórmula matemática da função



FORMATO COMUNICAÇÕES/
ARQUIVO DA EDITORA

Figura 16 – Recorte do Livro 1, página 72.

- 4º) Numa rodovia, um carro mantém uma velocidade constante de 90 km/h. Veja a tabela que relaciona o tempo t (em horas) e a distância d (em quilômetros):

Tempo (h)	0,5	1	1,5	2	3	4	t
Distância (km)	45	90	135	180	270	360	$90t$

Observe que a distância percorrida é dada *em função* do tempo, isto é, a distância percorrida *depende* do intervalo de tempo. A cada intervalo de tempo considerado corresponde um único valor para a distância percorrida. Dizemos, então, que a distância percorrida é *função* do tempo e escrevemos:

$$\begin{aligned} \text{distância} &= 90 \cdot \text{tempo} \\ d &= 90t \end{aligned}$$

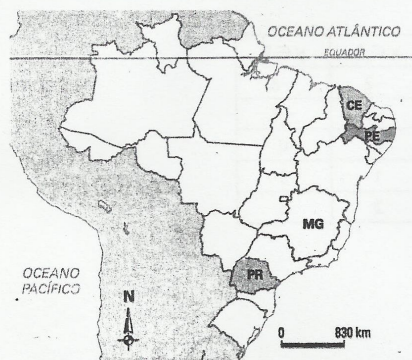
\swarrow variável independente
 \searrow variável dependente

Exercícios propostos

ATENÇÃO! NÃO EScreva NO LIVRO.

1. A tabela a seguir indica o nome de alguns estados e de suas respectivas capitais.

Estados	Capitais
Ceará	Fortaleza
Minas Gerais	Belo Horizonte
São Paulo	São Paulo
Paraná	Curitiba
Pernambuco	Recife



Fonte: Adaptado de *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2007.

- a) O nome da capital é dado em função do nome do estado?
 b) O nome da capital depende do nome do estado?
 c) A cada estado corresponde uma única capital?
2. Observe na tabela a medida do lado (em cm) de uma região quadrada e sua área (em cm^2).
- | Medida do lado (em cm) | 1 | 3 | 4 | 5,5 | 10 | ... | ℓ |
|--------------------------|---|---|----|-------|-----|-----|----------|
| Área (em cm^2) | 1 | 9 | 16 | 30,25 | 100 | ... | ℓ^2 |
- a) O que é dado em função do quê?
 b) Qual é a variável dependente?
 c) Qual é a variável independente?
- d) Qual é a lei da função que associa a medida do lado com a área?
 e) Qual é a área de uma região quadrada cujo lado mede 12 cm?
 f) Qual é a medida do lado da região quadrada cuja área é de 169 cm^2 ?
3. Responda às seguintes questões:
 a) A diagonal (d) de um quadrado é dada em função do seu lado (ℓ). Qual é a fórmula matemática que indica essa função?
 b) O comprimento (c) da circunferência é dado em função do seu raio (r). Qual é a expressão que indica essa função?
 c) O número de diagonais (d) de um polígono é dado em função do número de lados (n) do polígono. Qual é a fórmula matemática que indica essa função?
4. A tabela abaixo indica o custo de produção de certo número de peças para informática:
- | Número de peças | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Custo (R\$) | 1,20 | 2,40 | 3,60 | 4,80 | 6,00 | 7,20 | 8,40 | 9,60 |
- a) A cada número de peças corresponde um único valor em reais?
 b) O que é dado em função do quê?
 c) Qual é a fórmula matemática que dá o custo (c) em função do número de peças (x)?
 d) Qual é o custo de 10 peças? E de 20 peças? E de 50 peças?
 e) Com um custo de R\$ 120,00, quantas peças podem ser produzidas?
5. Um cabeleireiro cobra R\$ 12,00 pelo corte para clientes com hora marcada e R\$ 10,00 sem hora marcada. Ele atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável x de clientes sem hora marcada.
 a) Escreva a fórmula matemática que fornece a quantidade Q arrecadada por dia em função do número x .

Ao analisarmos a maneira como o autor encaminha os exemplos e as conclusões, observamos algumas incoerências. O autor apresenta quatro exemplos para explorar intuitivamente a ideia de função, todos eles com domínio restrito a números positivos (embora ainda não aborde a questão do domínio de uma função) e todos eles geram funções que em nossa proposta chamamos *do tipo* Linear. Consideramos esta maneira de conduzir o assunto um tanto quanto deseducativa, pois pode parecer a um estudante que esteja recém iniciando o estudo das funções, que a linearidade, isto é, a proporcionalidade, faz parte da definição de função, o que certamente vai gerar dificuldades na compreensão do conceito de função. Outros dois pontos a salientar dizem respeito à maneira como o autor coloca no segundo exemplo que “perímetro” é variável dependente e “medida do lado” é variável independente:

- sem definir o que é uma variável dependente ou o que é uma variável independente, o que pode gerar no estudante a dúvida: o que isto significa?

- pelo fato de o autor ter usado apenas funções *do tipo* Linear, que são invertíveis, pode-se escolher livremente qual é a variável dependente.

Novamente no exercício 4 da Figura 17 temos uma função *do tipo* Linear, que é invertível, e portanto não temos determinado de forma unívoca quem é variável dependente e quem é variável independente. Portanto, a solicitação que aparece em (b) exige um pouco mais de discussão, uma vez que a forma como foi colocada a pergunta induz a uma resposta única - a resposta apresentada pelo autor ao final do livro é de fato única!

3.4 FRASES QUE ENVOLVEM UMA CONTEXTUALIZAÇÃO FORÇADA

Outro ponto importante observado durante a análise dos livros diz respeito aos exemplos e exercícios apresentados com o objetivo de contextualizar o assunto com temas do dia a dia, mas que acabam exagerados. Acreditamos ser de grande importância, inclusive no sentido da educação matemática, a tentativa de contextualizar assuntos do dia a dia e associá-los a funções ou a qualquer outro conteúdo de matemática. Porém o que observamos foi uma contextualização forçada em alguns momentos, não dando os autores a devida importância a detalhes que podem gerar confusões. Observe os exercícios encontrados no Livro 1:

Medida do lado (em cm)	1	3	4	5,5	10	...	ℓ
Área (em cm ²)	1	9	16	30,25	100	...	ℓ^2

a) O que é dado em função do quê?
 b) Qual é a variável dependente?
 c) Qual é a variável independente?

5. Um cabeleireiro cobra R\$ 12,00 pelo corte para clientes com hora marcada e R\$ 10,00 sem hora marcada. Ele atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável x de clientes sem hora marcada.
 a) Escreva a fórmula matemática que fornece a quantidade Q arrecadada por dia em função do número x .

Capítulo 3 | Funções

73

Figura 18 – Recorte do Livro 1, página 73.

b) Qual foi a quantidade arrecadada num dia em que foram atendidos 16 clientes?
 c) Qual foi o número de clientes atendidos num dia em que foram arrecadados R\$ 212,00?
 d) Qual é a expressão que indica o número C de clientes atendidos por dia em função de x ?

d) Qual é a regra que associa um número natural ao seu sucessor?
 e) Qual é o sucessor do maior número natural de três algarismos?

Desafio em dupla

Figura 19 – Recorte do Livro 1. Página 74.

No exercício 5 das Figuras 18 e 19, temos o problema de não limitar o número de clientes por dia. A falta de discussão sobre o domínio descontextualiza a discussão, confirmada pela resposta ao item (a), o que dá margem ao questionamento: “É possível que o cabeleireiro atenda, por exemplo, a 1000 clientes em um único dia? Temos aí duas possíveis respostas: *sim* e *não*: *sim* se olharmos a resposta dada pelo autor; *não* se pensarmos na situação descrita. É verdade que, talvez, para o aluno leitor, seja imperceptível essa falta de cuidado, mas se perguntássemos qual seria o número ideal de atendimentos em um dia, já estaríamos oportunizando o conceito de domínio e de domínio contextual.

Também o Livro 2 encontramos descuido com relação ao domínio, se analisamos os exercícios e exemplos que contextualizam de forma forçada o assunto funções:

Introdução: a noção intuitiva de função

No estudo científico de qualquer fenômeno, sempre procuramos identificar grandezas mensuráveis ligadas a ele e, em seguida, estabelecer as relações existentes entre essas grandezas.

Exemplo 1

Tempo e espaço
 Uma pista de ciclismo tem marcações a cada 500 m. Enquanto um ciclista treina para uma prova, o técnico anota seu desempenho. O resultado pode ser observado na tabela abaixo.

Instante (min)	0	1	2	3	4	5	...
Distância (m)	0	500	1000	1500	2000	2500	...

A cada instante (x) corresponde uma única distância (y). Dizemos, por isso, que a distância é função do instante. A fórmula que relaciona y com x é:

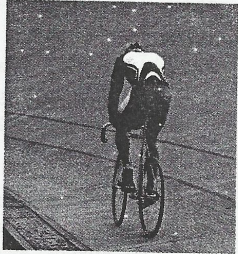
$$y = 500x$$


Figura 20 – Recorte do livro 2, página 44.

Da mesma forma que no Livro 1, a ideia é boa, porém falta a devida atenção a questões de fato contextuais. Este autor apresenta ainda uma tabela, com reticências, ficando a pergunta no ar: o ciclista não irá se cansar jamais e conseguirá manter a proporcionalidade explicitada na fórmula?

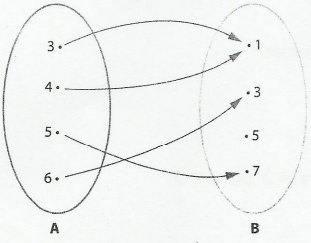
3.5 REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES (DIAGRAMA, GRÁFICO E ESBOÇO DO GRÁFICO, TABELA, FÓRMULA)

Ao tratarem da representação de funções, os livros analisados apresentam-nas de vários tipos.

No Livro 1, quando o autor estuda a função por meio de diagramas, várias são as vezes em que acaba gerando incoerências. Na Figura 21, reproduzimos o exemplo 12 onde é solicitado ao estudante que identifique alguns aspectos da função e, mais adiante, na Figura 22, quando novamente usa diagramas para outro exemplo:

Exercícios propostos

12. Considere a função $A \xrightarrow{f} B$ dada pelo diagrama e determine:



a) $D(f)$; f) x , quando $f(x) = 1$;
 b) $\text{Im}(f)$; g) $f(x)$, quando $x = 6$;
 c) $f(4)$; h) y , quando $x = 3$;
 d) y , quando $x = 5$; i) x , quando $y = 7$.
 e) x , quando $y = 3$;

13. Considere $A \xrightarrow{g} B$ a função para a qual $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{3, 9, 12\}$ e $g(x)$ é o triplo de x , para todo $x \in A$.

a) Construa o diagrama de flechas da função.
 b) Determine $D(g)$, $CD(g)$ e $\text{Im}(g)$.
 c) Determine $g(3)$.
 d) Determine x para o qual $g(x) = 12$.

Figura 21 – Recorte do Livro 1, página 77.

Mais adiante, o autor apresenta o seguinte exemplo:

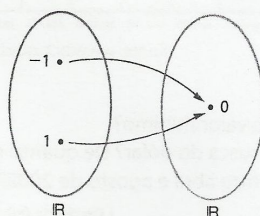
Exemplos:

1) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$ não é injetiva, pois:

- para $x = 1$ corresponde $f(1) = 0$;
- para $x = -1$ corresponde $f(-1) = 0$.

Neste caso, para dois valores diferentes de x encontramos um mesmo valor para a função.

No diagrama:



A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ é injetiva, pois faz corresponder a cada número real x o seu dobro $2x$ e não existem dois números reais diferentes que tenham o mesmo dobro. Simbolicamente:

$$\text{Para quaisquer } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Observação: Podemos verificar se uma função é injetiva olhando seu gráfico. Sabemos que, se a função é estritamente crescente ou decrescente, não há elemento do conjunto imagem que seja imagem de mais de um elemento do domínio. Assim, imaginando linhas horizontais cortando o gráfico, essas linhas só podem cruzar o gráfico uma única vez para cada valor de y .

Figura 22 – Recorte do Livro 1, página 94.

No exemplo 12 o autor usa o diagrama para que o estudante reconheça, entre outros aspectos, o domínio da função, sendo obviamente esperado que o mesmo utilize todos os valores apresentados no diagrama. Porém, mais adiante, o mesmo usa um exemplo que tem como domínio o conjunto de todos os números reais, portanto infinito, e apresenta um diagrama limitado a dois valores (-1 e 1). Mais uma das incoerências do autor consigo

mesmo, pois, o primeiro exemplo sugere ao estudante que o domínio é o conjunto de todos os valores que são apresentados no diagrama (exemplo 12), e portanto, no exemplo seguinte, teríamos uma função cujo domínio deveria ser apenas o conjunto $\{-1, 1\}$. Consideramos um tanto preocupante esta falta de ênfase no fato de que tanto tabelas quanto diagramas são inadequados para representar funções de domínio infinito.

O autor do livro 2 é passível de crítica análoga:

Funções definidas por fórmulas

Existe um interesse especial no estudo de funções em que y pode ser calculado a partir de x por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei).

Exemplo 6

A lei de correspondência que associa cada número racional x ao número racional y , sendo y o dobro de x , é uma função f definida pela fórmula $y = 2x$, ou $f(x) = 2x$.

Nessa função:

- para $x = 5$, vem $y = 2 \cdot 5 = 10$. Dizemos que $f(5) = 10$.
- a imagem de $x = -3$ é $f(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$.
- $x = 11,5$ corresponde a $y = 2 \cdot (11,5) = 23$.
- $y = 7$ é a imagem de $x = \frac{7}{2}$.
- $f(3) = 6$

Figura 23 – Recorte do Livro 2, página 48.

No entanto, este autor, em alguns outros exemplos, mas não em todos, faz uso do diagrama para visualizar um conjunto infinito, porém “tenta melhorar” essa visualização colocando “...” sugerindo que o aluno entenda que se trata da representação de uma parte do conjunto que é infinito. Observe na figura abaixo:

Exemplo 9

Seja $A = \mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}$, a função $f: A \rightarrow B$ tal que $f(x) = 2x$ tem domínio A e contradomínio B .

Figura 24 – Recorte do Livro 2, página 51.

Continuando com a análise: no Livro 2, em determinado momento nos deparamos com o seguinte exemplo, que trata de análise de (esboço de) gráficos:

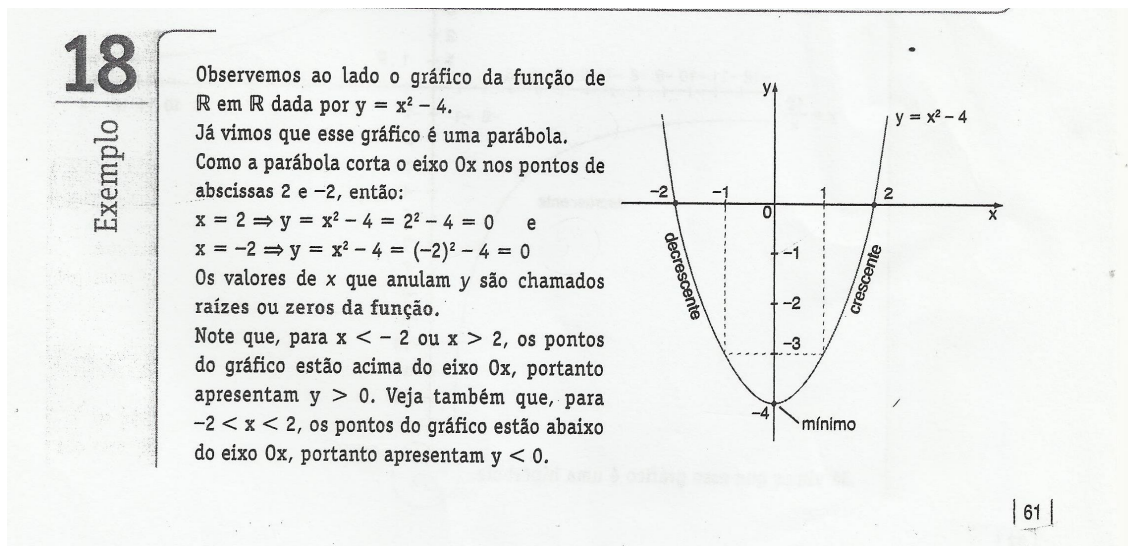


Figura 25 – Recorte do livro 2, página 61.

Notamos aqui que o autor transforma “condição necessária” em “condição suficiente”, pois o mesmo parte do esboço do gráfico para concluir que, para $x = 2$ e $x = -2$, teremos $y = 0$. O mesmo conduz a análise como se esta condição não dependesse da fórmula que definiu a função. O próprio esboço do gráfico é um resultado da fórmula e não o contrário, neste caso.

Ao tratar de função Afim, o autor do Livro 2 apresenta o seguinte exemplo:

3. Obter a equação da reta que passa pelos pontos $P(-1, 3)$ e $Q(1, 1)$.
Solução:
 A reta \overline{PQ} tem equação $y = ax + b$. Precisamos determinar a e b .
 Como $(-1, 3)$ pertence à reta, temos:
 $3 = a(-1) + b$, ou seja, $-a + b = 3$
 Como $(1, 1)$ pertence à reta, temos:
 $1 = a \cdot 1 + b$, ou seja, $a + b = 1$
 Assim, a e b satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

 cuja solução é $a = -1$ e $b = 2$. Portanto, a equação procurada é $y = -x + 2$.

Figura 26 – Recorte do livro 2, página 73.

Nossa crítica está no erro de lógica apresentado pelo autor. Sabemos que uma equação da forma $y = ax + b$ gera uma reta como gráfico, porém nem toda reta admite para equação uma expressão desta forma - por exemplo, a reta vertical que passa pelos pontos $(3, 5)$ e $(3, -2)$. Por conduções deste tipo certamente só contribuem para encontrarmos alunos com dificuldades para compreender princípios básicos da matemática.

Sobre plano cartesiano, o autor do livro 2 apresenta ao leitor uma noção do mesmo:

Noções básicas de plano cartesiano

Usaremos a notação (a, b) para indicar o par ordenado em que a é o primeiro elemento e b é o segundo.

Vejam os:

- $(1, 3)$ é o par ordenado em que o primeiro elemento é 1 e o segundo é 3.
- $(3, 1)$ é o par ordenado em que o primeiro elemento é 3 e o segundo é 1.

Note que os pares $(1, 3)$ e $(3, 1)$ diferem entre si pela ordem de seus elementos.

Existe uma maneira geométrica de representarmos o par ordenado (a, b) :

- 1º passo: desenhamos dois eixos perpendiculares e usamos a sua intersecção O como origem para cada um deles;
- 2º passo: marcamos no eixo horizontal o ponto P_1 , correspondente ao valor de a ;
- 3º passo: marcamos no eixo vertical o ponto P_2 , correspondente ao valor de b ;
- 4º passo: traçamos por P_1 uma reta r paralela ao eixo vertical;
- 5º passo: traçamos por P_2 uma reta s paralela ao eixo horizontal;
- 6º passo: destacamos a intersecção das retas r e s chamando-a de P , que é o ponto que representa graficamente o par ordenado (a, b) .

Figura 27 – Recorte do livro 2, página 56.

O autor fala em eixo horizontal e eixo vertical após ter dito que “desenhamos dois eixos perpendiculares”. Ao estudante pode gerar a confusão de que eixos perpendiculares serão sempre um vertical e um horizontal.

Mais adiante, o mesmo autor apresenta um exemplo, onde solicita ao aluno leitor que este analise algumas informações a respeito de um gráfico (mais precisamente, de um esboço de gráfico):

Análise de gráficos

Muitas informações a respeito do comportamento de uma função podem ser obtidas a partir do seu gráfico. Por meio dele, podemos ter uma visão do crescimento (ou decréscimo) da função, dos valores máximos (ou mínimos) que ela assume, de eventuais simetrias, do comportamento para valores de x muito grandes, etc.

Agora vamos analisar os gráficos já apresentados e observar os comportamentos das respectivas funções.

17

Exemplo

Observemos ao lado o gráfico da função de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por $y = 2x$.

Já vimos que esse gráfico é uma reta.

Como a reta corta o eixo Ox no ponto $x = 0$, então $x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = 2x = 2 \cdot 0 = 0.$$

O valor de x que anula y é chamado raiz ou zero da função.

Note que, para $x > 0$, os pontos do gráfico estão acima do eixo Ox , portanto apresentam $y > 0$. Veja também que, para

$x < 0$, os pontos do gráfico estão abaixo do eixo Ox , portanto apresentam $y < 0$.

Quanto maior o valor dado a x , maior será o valor do correspondente $y = 2x$. Dizemos, por isso, que essa função é crescente.

Quando os valores dados a x são cada vez maiores e positivos, os valores de $y = 2x$ crescem ilimitadamente, e y pode tornar-se maior que qualquer número em que se pense. Basta, para isso, escolher um x suficientemente grande. Por exemplo, se quisermos $y > 1\,000\,000$, basta tomarmos $x > 500\,000$.

Por outro lado, quando os valores dados a x são cada vez menores e negativos, os valores de $y = 2x$ decrescem ilimitadamente, e y pode tornar-se menor que qualquer número em que se pense. Basta, para isso, escolher um x suficientemente pequeno. Por exemplo, se quisermos $y < -2\,000\,000$, basta tomarmos $x < -1\,000\,000$.

Desse modo, o conjunto imagem dessa função é $\text{Im} = \mathbb{R}$.

Notamos também que $f(1) = 2$ e $f(-1) = -2$; $f(2) = 4$ e $f(-2) = -4$; etc.

De modo geral, $f(x) = 2x$ e $f(-x) = 2 \cdot (-x) = -2x$; portanto, $f(-x) = -f(x)$ para todo x . Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao ponto O (origem).

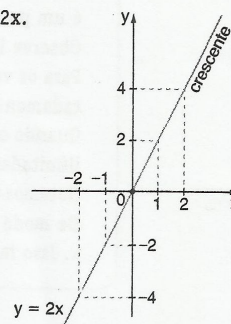


Figura 28 – Recorte do livro 2, página 61.

Nossa crítica, neste momento, refere-se ao erro cometido pelo autor quando se refere a “no ponto $x = 0$ ”. Talvez por isso, muitas vezes alguns estudantes de nível médio e inclusive alguns de graduação, quando solicitados a identificar os pontos de um gráfico através do seu esboço, cometam o erro de identificar um ponto apenas, quando são dois (por exemplo, é mostrado onde o esboço intercepta os eixos coordenados e pede-se que o aluno identifique estes pontos, supondo que no eixo das abscissas fosse em $x = 3$ e no eixo das ordenadas em $y = 5$, e o aluno ao invés de identificar $(3, 0)$ e $(0, 5)$ acaba por identificar o ponto $(3, 5)$.

Outro detalhe a se considerar é a forma como os esboços de gráficos são apresentados. No livro 2, o autor começa construindo um esboço para um domínio discreto, e a seguir utiliza a mesma fórmula mudando os domínios:

14

Exemplo

Vejamos como construir o gráfico da função dada por $y = 2x$, com domínio $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

1º passo:

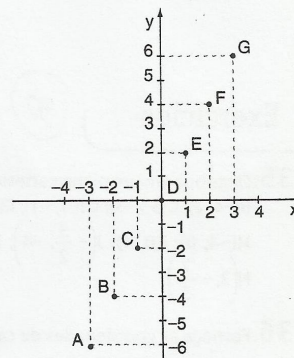
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

2º passo:

Representamos os pares ordenados que estão na tabela por pontos, a saber:

$$\begin{array}{ll} A(-3, -6) & E(1, 2) \\ B(-2, -4) & F(2, 4) \\ C(-1, -2) & G(3, 6) \\ D(0, 0) & \end{array}$$

Quando o conjunto D não é finito, podemos construir uma tabela e obter alguns pontos do gráfico; entretanto, o gráfico da função será constituído por infinitos pontos.



Vejamos como são os gráficos da função $y = 2x$ em domínios diferentes do caso acima.

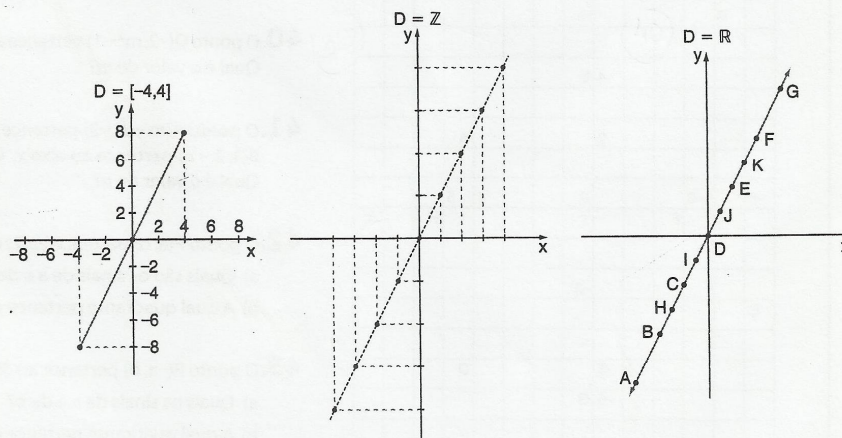


Figura 29 – Recorte do livro 2, página 58.

Nossa crítica reside na forma como os esboços são apresentados, pois além de o autor fazer uso da expressão *gráfico* em vez de *esboço de gráfico*, não há uma uniformidade nas representações: em determinados momentos há pontilhados, em outros, sem explicar, há setas nos gráficos, além de ser traçada uma reta como gráfico sem provar que de fato o gráfico é uma reta. O autor não aprofunda, de forma coerente, a diferença sutil, mas importante, que haveria entre um esboço cujo domínio é o conjunto dos reais e um esboço cujo domínio é apenas o conjunto dos racionais.

3.6 GRÁFICO X ESBOÇO DO GRÁFICO

Muitas das críticas que estamos aqui fazendo estão relacionadas à forma como os autores tratam dos gráficos de funções. Há visivelmente uma grande diferença entre gráfico e esboço de gráfico. No livro 2, quando o autor começa a tratar do assunto construção de gráficos, o mesmo define, mesmo que de forma não tão clara para o estudante, que gráfico é o conjunto de pontos (pares ordenados) obtidos pela correspondência entre x e a lei da função $y=f(x)$:

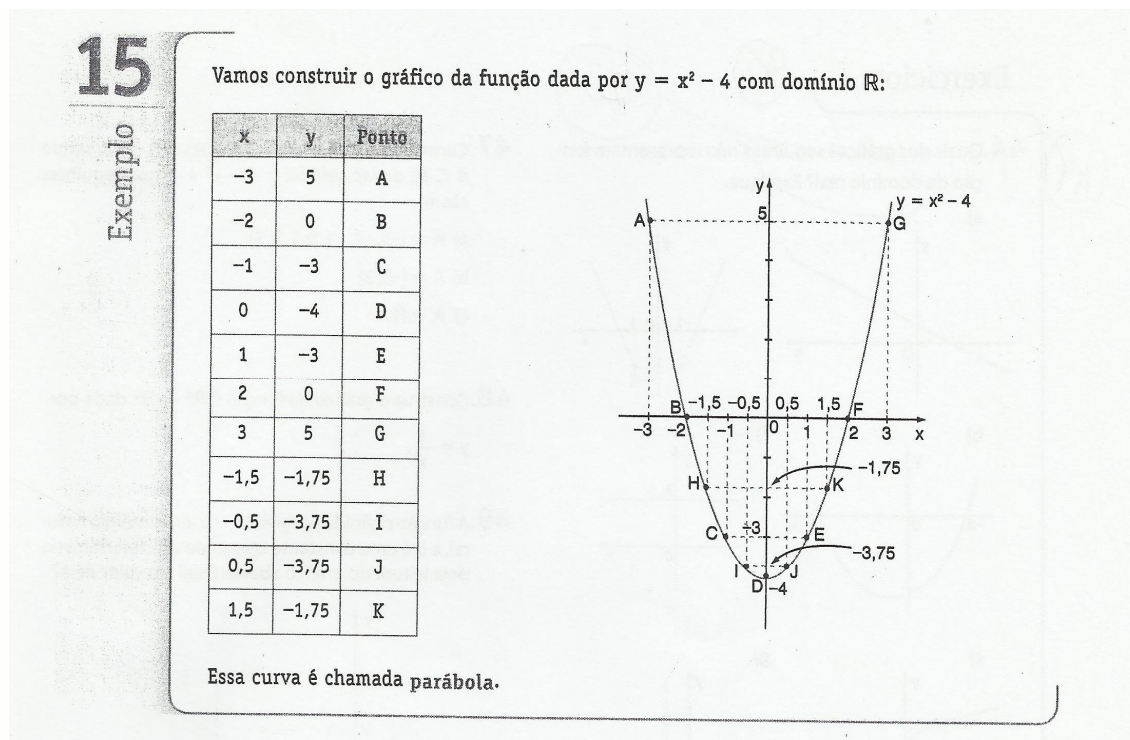


Figura 30 – Recorte do livro 2, página 59.

A crítica a este exemplo reside novamente no fato de o autor fazer uso de uma tabela, da qual obtém alguns pontos do gráfico, e, a partir dela, esboçar o gráfico sem maiores comentários a respeito desta passagem tabela – gráfico (afinal o domínio é o conjunto dos números reais) – e, o que é pior, afirmar ao final que o gráfico é uma parábola. Consideramos esta falta de rigor e clareza prejudicial ao estudante, que leva consigo essa falsa ideia do que é gráfico, bem como do que é uma parábola (por exemplo, será que o gráfico de $y = x^4$ também é uma parábola?) Nada é discutido sobre como um subconjunto finito do domínio é insuficiente para dar conta da construção de um gráfico, e que neste caso só podemos encará-lo como um *esboço* do mesmo, como nos evidencia a situação abaixo.

Observe a tabela abaixo e os esboços que foram produzidos utilizando o software Geogebra para as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$, com domínio \mathbb{R} :

x	$y = f(x)$
-1	-1
0	0
1	1

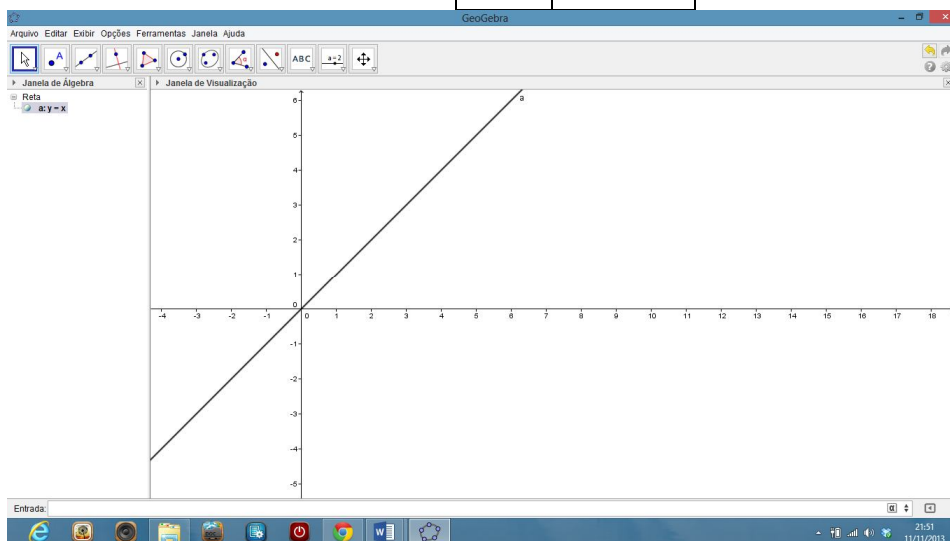


Figura 31 – Esboço do gráfico da função $f(x) = x$.

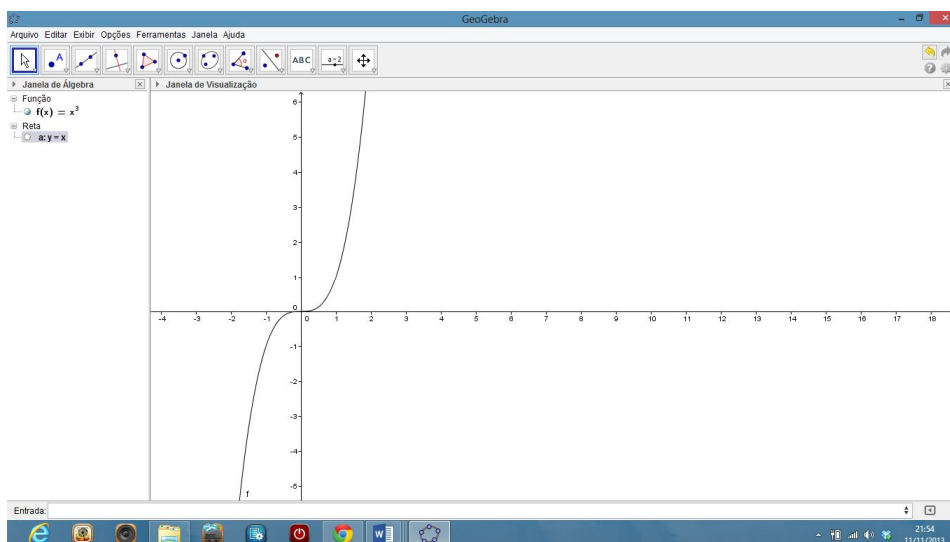


Figura 32 – Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3$.

Para os valores de x apresentados na tabela as duas funções seriam iguais, porém pelos esboços podemos verificar que não.

Também o autor do Livro 1 evidencia incoerência entre gráfico e esboço de gráfico:

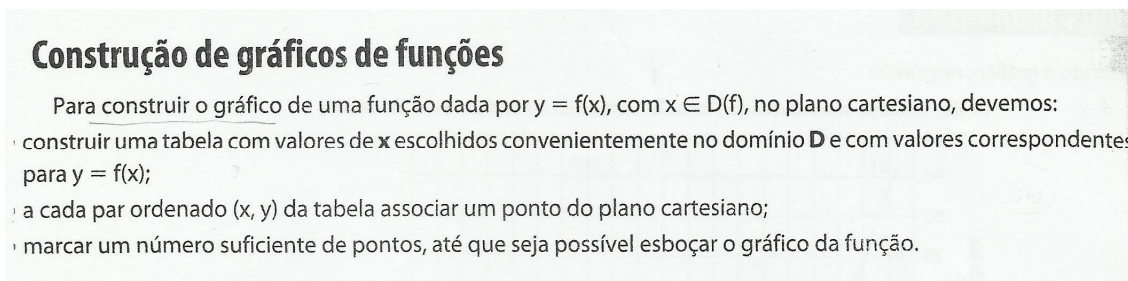


Figura 33 – Recorte do Livro 1, página 84.

Consideramos esta abordagem do autor mais falha ainda do que a do livro 2, que ao menos tinha uma definição de gráfico mais precisa. Aqui, apontamos duas questões que consideramos muito prejudiciais ao aprendizado do assunto pelo estudante:

1) quando os livros sugerem ao aluno leitor “construir uma tabela com valores de x escolhidos convenientemente no domínio”. Fica a pergunta: Qual a definição de “conveniente” neste contexto?

2) quando os livros sugerem ao aluno leitor “marcar um número suficiente de pontos, até que seja possível esboçar o gráfico da função”. Também fica a pergunta: Como saber quantos pontos são suficientes?

Encerramos esta discussão salientando que não encontramos nos PCN qualquer alerta quanto à distinção entre *gráfico* e *esboço do gráfico*. Uma breve alusão no documento a este aspecto poderia, na nossa opinião, evitar um tanto de mal entendidos na formação do estudante com relação ao tema funções.

3.7 FUNÇÕES A PARTIR DE GRÁFICOS

Muitos livros didáticos exploram a explicitação de uma função (mais precisamente de sua fórmula) por meio dos esboços de seus gráficos, ponto muito criticável. E os livros analisados não foram diferentes. No livro 2, o autor já começa essa temática com um deslize:

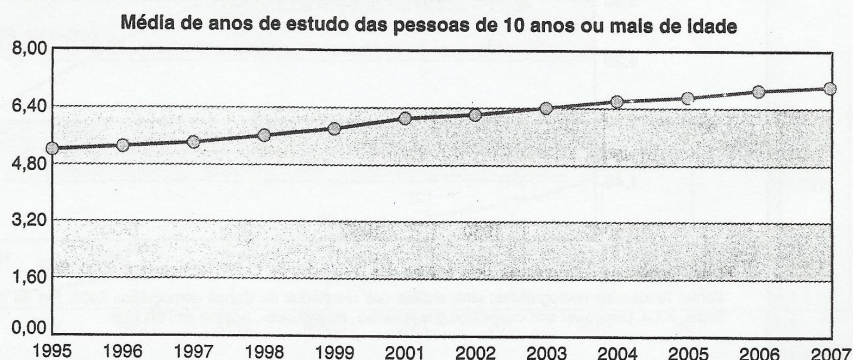
Leitura informal de gráficos

Vamos observar alguns gráficos extraídos de jornais, a partir dos quais podemos descobrir algumas propriedades das funções que cada um representa.

11

Exemplo

O gráfico mostra o avanço da escolaridade do brasileiro com 10 ou mais anos de idade, no período de 1995 a 2007.



Disponível em: <www.ibge.gov.br/series_estatisticas>. Acesso em: 09/11/2008.

Observe que a cada ano destacado no gráfico corresponde um único valor referente aos anos de estudo. Assim, o mesmo tempo de escolaridade é função do ano.

Por exemplo, em 1995, a média girava em torno de 5 anos de estudo; em 2003, avançou para 6,4 anos e, em 2007, a média já se aproximava dos 7 anos de estudo.

Note, como tendência geral, que o tempo de estudo cresce (aumenta) à medida que o tempo avança (aumenta). Dizemos que essa função é crescente.

53

Figura 34 – Recorte do livro 2, página 53.

Da forma com que a frase “Vamos observar alguns gráficos extraídos de jornais, a partir dos quais podemos descobrir algumas propriedades das funções que cada um representa.” foi posta, pode-se entender que todo gráfico representa uma função, o que sabemos que não é correto. No Livro 1 o aspecto sob análise é introduzido da seguinte forma:

Determinação do domínio e da imagem de uma função, conhecendo o gráfico

Observando o gráfico de uma função no plano cartesiano podemos, às vezes, determinar o domínio D e o conjunto imagem Im da função, projetando o gráfico nos eixos:

Figura 35 – Recorte do Livro 1, página 85.

Em todo o livro, não há distinção entre “gráfico” e “esboço do gráfico”, ponto relevante ao tratar-se de tentativa de explicitar a função a partir de seu gráfico. Nossa atenção também se volta aqui para a expressão “às vezes” utilizada no texto e não explicada.

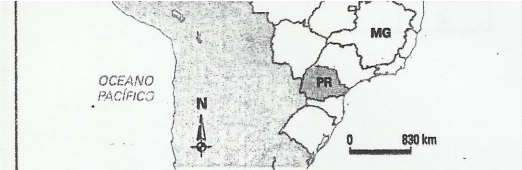
3.8 A ÊNFASE NO CONTRADOMÍNIO (A DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO, IMAGEM A PARTIR DO GRÁFICO)

Discutimos aqui a ênfase ao contradomínio que é dada pelos autores dos livros analisados no caso de funções numéricas e, posteriormente, as incoerências geradas por ela. No Livro 1 encontramos a frase: “... uma função consta de três componentes: domínio, contradomínio e lei de correspondência.”

A frase acima sugere que uma função só fica univocamente determinada a partir da terna (domínio, contradomínio, lei), o que implica que as funções que só diferem pelo contradomínio, como por exemplo, $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: Z \rightarrow 2Z$ com $f(x) = 2x = g(x)$ são distintas.

Sugerimos ao leitor a seguinte reflexão: Será que realmente queremos que as funções f e g , cujos gráficos são formados exatamente pelos mesmos pares ordenados, sejam funções diferentes, a tal ponto de, por exemplo, uma ser invertível e a outra não?

O autor do Livro 1 se contradiz ao propor o seguinte exercício:



Fonte: Adaptado de *Atlas geográfico escolar*.
Rio de Janeiro: IBGE, 2007.

a) O nome da capital é dado em função do nome do estado?
b) O nome da capital depende do nome do estado?
c) A cada estado corresponde uma única capital?

2. Observe na tabela a medida do lado (em cm) de uma região quadrada e sua área (em cm²).

4. A tabela abaixo indica o custo de produção de certo número de peças para informática:

Número de peças	1	2	3	4	5	6	7	8
Custo (R\$)	1,20	2,40	3,60	4,80	6,00	7,20	8,40	9,60

a) A cada número de peças corresponde um único valor em reais?
b) O que é dado em função do quê?
c) Qual é a fórmula matemática que dá o custo (c) em função do número de peças (x)?
d) Qual é o custo de 10 peças? E de 20 peças? E de 50 peças?
e) Com um custo de R\$ 120,00, quantas peças podem ser produzidas?

Figura 36 – Recorte do Livro 1, página 73.

Neste exercício o autor limita a tabela, o que dá a ideia de domínio limitado e, ao não explicitar o contradomínio, sugere que o mesmo coincide com a imagem da função. No entanto, ao perguntarem, no item (e), a quantidade de peças produzidas com R\$ 120,00, o mesmo está afirmando que o valor 120 está na imagem, porém 120,00 não consta da tabela.

Este exercício já nos permite reiterar a reflexão que propomos, no que diz respeito à discussão do papel do contradomínio em funções numéricas. Por exemplo, será que o não conhecimento do contradomínio faz com que deixemos de ter uma função bem determinada acima?

Resumindo, apontamos a incoerência gerada pelo autor a partir dos seguintes fatos:

- ao incluir o item (b) no exercício, o autor está dizendo que ali se tem uma função;
- não está mencionado o contradomínio e, portanto, a função não estaria, segundo o próprio autor, bem caracterizada.

Na Sequência Didática que construímos e implementamos, apresentada no Capítulo 4, procuramos evidenciar que a ênfase no contradomínio é desnecessária quando tratamos de uma função real de variável real, mesmo quando queremos abordar o aspecto inversibilidade, o próximo ponto sob análise.

3.9 FUNÇÃO INVERTÍVEL E A FUNÇÃO INVERSA

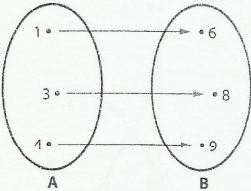
No que diz respeito a inversibilidade de uma função, em ambos os livros são introduzidos antes os conceitos de função injetiva, sobrejetiva e bijetiva. Observa-se que esta nomenclatura se deve principalmente à forma com que os autores definem função inversa. Por exemplo, o autor do Livro 1 coloca:

Definição de função inversa

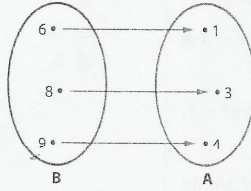
Dada uma função $f: A \rightarrow B$, bijetiva, denomina-se função inversa de f a função $g: B \rightarrow A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$.

Como já vimos, representamos a função inversa de f com o símbolo f^{-1} .
Exemplificando no diagrama de flechas:

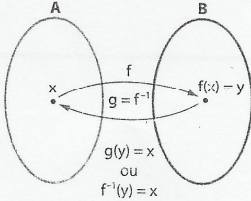
$f: A \rightarrow B$



$g: B \rightarrow A$



De modo geral, se f é bijetiva, temos:



Para refletir
Atenção!
 f^{-1} não é $\frac{1}{f}$.

Para refletir
Só existe função inversa de uma função bijetiva.

em que $g: B \rightarrow A$ é a função inversa da função $f: A \rightarrow B$, uma vez que se tem:

$$g(y) = g(f(x)) = x \text{ para todo } x \in A \text{ e } f(g(y)) = y \text{ para todo } y \in B.$$

Figura 37 – Recorte do Livro 1, página 102.

Salientamos neste trecho a condição citada pelo autor (e também pela grande maioria dos autores de livros didáticos) de que a função seja bijetiva para ser invertível. Portanto, em particular, a função precisa ser sobrejetora, isto é, seu contradomínio deve coincidir com o conjunto imagem. Novamente constata-se aí, nesta definição, obviamente uma ênfase ao contradomínio.

No entanto, o Livro 1 apresenta um processo para determinação da função inversa sem explicitar quem são os conjuntos A e B , como podemos ver na figura 34:

Processo para determinar a função inversa de uma função bijetiva dada

No exemplo dado anteriormente, a função bijetiva $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = 4x$, tem como função inversa a função $g: B \rightarrow A$, definida por $g(y) = \frac{y}{4}$, uma vez que:

$$g(y) = g(f(x)) = g(4x) = \frac{4x}{4} = x, \text{ para todo } x \in A \quad \text{e} \quad f(g(y)) = f\left(\frac{y}{4}\right) = 4 \cdot \frac{y}{4} = y, \text{ para todo } y \in B$$

Vejam os roteiros que nos permitem, a partir da fórmula da função bijetiva f , chegar à fórmula de f^{-1} :
escrevemos $f(x) = 4x$ na forma $y = 4x$;

em $y = 4x$, trocamos y por x e x por y , obtendo $x = 4y$;

em $x = 4y$, determinamos y em função de x , obtendo $y = \frac{x}{4}$ (pois não é comum, neste nível, considerar y como variável independente);

escrevemos $y = \frac{x}{4}$ na forma $f^{-1}(x) = \frac{x}{4}$, que é a inversa de f .

Figura 38 – Recorte do Livro 1, página 102.

Ressalte-se aqui: se $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{R}$ então, segundo este autor, que enfatiza o contradomínio, a função não seria invertível, fato não salientado por ele.

Convidamos o leitor a observar os dois trechos retirados do Livro 2, flagrantemente incoerentes:

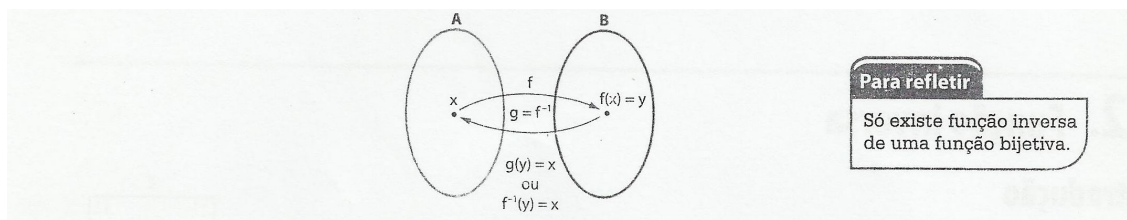


Figura 39 – Recorte do Livro 1, página 102.

62. Seja a função $f(x) = 3x - 4$ definida de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Determine:
a) $f^{-1}(x)$; b) $f^{-1}(2)$.

65. Seja uma função injetiva f que passa pelo ponto $(2, 5)$. Sua inversa passa pelo ponto $(5, y)$. Qual é o valor de y ?

Figura 40 – Recorte do Livro 1, página 103.

Na Sequência Didática que elaboramos, baseados no fato de defendermos que função seja definida como conjunto de pares ordenados, discutimos o tema inversibilidade, levando o aluno a concluir que, para uma função possuir inversa, basta que a mesma seja injetora. Estamos assim evitando várias das incoerências apontadas até aqui. Além disso, convidamos o leitor deste trabalho a refletir quanto à simplificação que a abordagem que propomos propicia no que diz respeito ao estudo de funções reais de variável real (pelo menos em um primeiro contato do aluno do Ensino Médio com o tema função).

3.10 A FUNÇÃO AFIM

Passamos agora à análise dos livros quanto ao texto sobre uma família específica de funções, a das funções Afins. Vamos iniciar pela definição apresentada no livro 2:

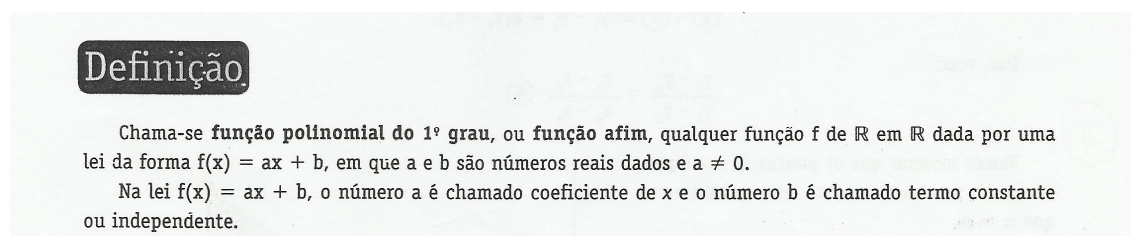


Figura 41 – Recorte do livro 2, página 71.

Salientamos os seguintes aspectos:

- o domínio é \mathbb{R} ;
- a lei/regra/fórmula é a fórmula $ax + b$
- a restrição $a \neq 0$

O autor logo se contradiz, propondo exemplos em que chama também de função Afim funções cujo domínio não é todo o conjunto dos reais:

Introdução

Antes de apresentarmos o conceito de função afim, vejamos a resolução de alguns problemas envolvendo questões do dia a dia.

1

Exemplo

Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada que fica a 15 km de distância. O valor cobrado engloba o preço da parcela fixa (bandeirada) de R\$ 4,00 mais R\$ 1,60 por quilômetro rodado.

Ou seja, ele pagou $15 \cdot \text{R\$ } 1,60 = \text{R\$ } 24,00$ pela distância percorrida e mais R\$ 4,00 pela bandeirada; isto é: $\text{R\$ } 24,00 + \text{R\$ } 4,00 = \text{R\$ } 28,00$.

Se a casa da namorada ficasse a 25 km de distância, Antonio Carlos teria pago, pela corrida:

$$25 \cdot \text{R\$ } 1,60 + \text{R\$ } 4,00 = \text{R\$ } 44,00.$$

Podemos notar que, para cada distância x percorrida pelo táxi, há certo preço $p(x)$ para a corrida. O valor $p(x)$ é uma função de x .

Para encontrar a fórmula que expressa $p(x)$ em função de x , fazemos:

$$p(x) = 1,60 \cdot x + 4,00$$

que é um exemplo de **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**.

Figura 42 – Recorte do livro 2, página 70.

Além disso, ao dizer que a função “é dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$ ” faz com que, para um estudante que está estudando a função Afim pela primeira vez, possa ser levado ao erro de não identificar como função Afim uma função que é apresentada pelo próprio autor em um exercício mais adiante, e onde registramos flagrante incoerência do autor consigo mesmo:

Exercícios

38. Classifique cada uma das funções afim dadas pelas leis seguintes em crescente ou decrescente:

a) $y = 3x - 2$

d) $y = 9x$

b) $y = -x + 3$

e) $y = (x + 3)^2 - (x + 1)^2$

c) $y = \frac{5 - 2x}{3}$

f) $y = 3 - 5x$

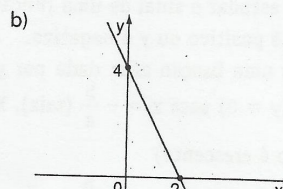


Figura 43 – Recorte do livro 2, página 84.

Em nossa sequência didática adotamos para definição de “função Afim” funções de domínio \mathbb{R} que podem ser (re)escritas na forma $f(x) = ax + b$ e para “função *do tipo Afim*” para representar funções que podem ser (re)escritas dessa forma e que têm domínio não necessariamente igual ao conjunto de todos os reais.

A incoerência sobre o domínio aparece também no Livro 1. Observe a definição dada pelo seu autor e um exemplo que vem apresentado logo após esta definição:

2. Definição de função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *função afim* quando existem dois números reais **a** e **b** tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por exemplo:

$$f(x) = 2x + 1 \quad (a = 2, b = 1)$$

$$f(x) = -x + 4 \quad (a = -1, b = 4)$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 5 \quad \left(a = \frac{1}{3}, b = 5\right)$$

$$f(x) = 4x \quad (a = 4, b = 0)$$

Observe outro exemplo:

Um motorista de táxi cobra uma taxa fixa de R\$ 3,20 pela bandeirada" mais R\$ 1,80 por quilômetro rodado. Assim, o preço de uma corrida de x quilômetros é dado, em reais, por:

$$f(x) = 1,80x + 3,20$$

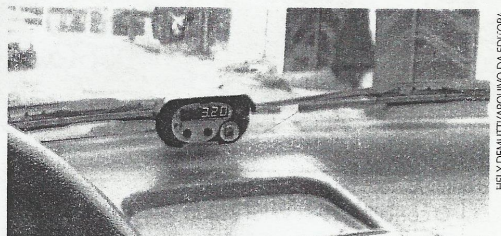


Figura 44 – Recorte do Livro 1, página 112.

Salientamos também a restrição $a \neq 0$ presente na definição em um livro e ausente no outro, impede que a função constante seja considerada uma função afim no livro 2, e é uma exigência na nossa opinião inadequada.

Ainda falando da função Afim, mais especificamente de seu gráfico, o Livro 1 novamente peca ao não dar a devida atenção a algumas frases, se observamos os seguintes trechos:

No estudo da Geometria analítica, que veremos no volume 3, os elementos geométricos são descritos por equações. Entre eles, a reta, que particularmente nos interessa, pois a equação que descreve uma reta não vertical é uma função afim.

Para refletir

A reta vertical não é gráfico de uma função. Por quê?

Figura 45 – Recorte do Livro 1, página 121.

5º) A reta, gráfico de uma função afim, passa pelos pontos $(-2, -63)$ e $(5, 0)$. Vamos determinar essa função e $f(16)$. Trata-se de uma função afim, então $f(x) = ax + b$.

Figura 46 – Recorte do Livro 1, página 126.

Fazendo um comparativo entre as duas citações, observamos que, enquanto a primeira sugere ao aluno refletir sobre a afirmação de que a reta vertical não é o gráfico de uma função, a segunda sugere que “reta” e “gráfico de uma função Afim” são sinônimos, dando margem a que o aluno registre uma informação errada.

Mais adiante, o autor do Livro 1 resolve demonstrar que o gráfico da função Afim é uma reta. Consideramos a atitude louvável, haja visto que, boa parte, tanto de autores de

livros didáticos da escola básica quanto de professores, tem uma tendência natural de não demonstrarem muitas afirmações e propriedades.

A seguir o trecho do Livro 1, onde aparece a forma utilizada pelo autor para demonstrar:

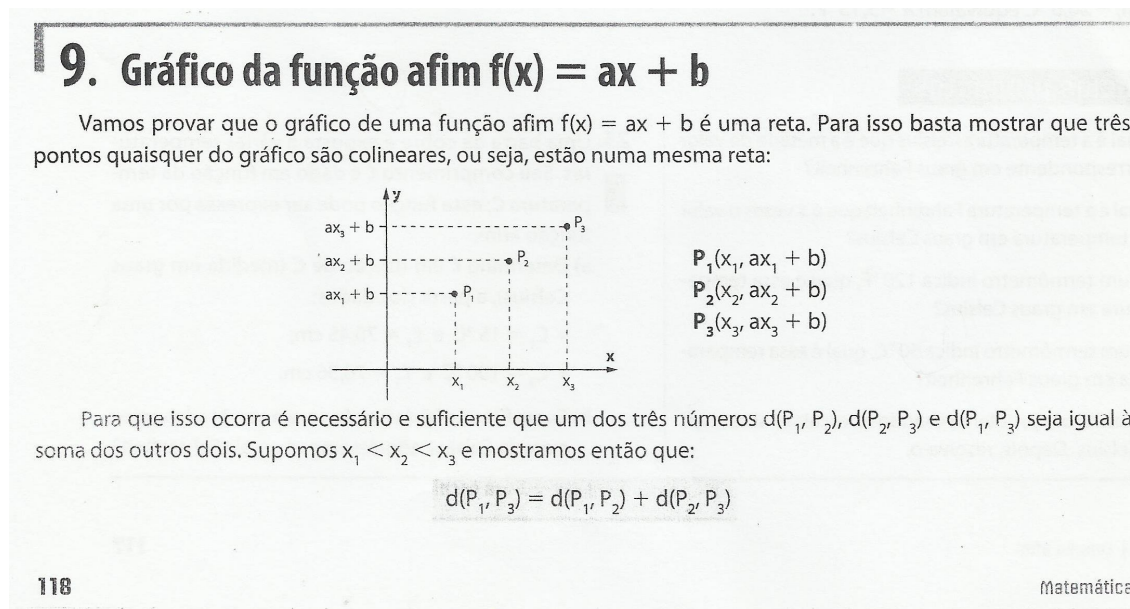


Figura 47 – Recorte do Livro 1, página 118.

Reiteramos: achamos a atitude de demonstrar extremamente importante; nossa crítica aqui está no argumento escolhido pelo autor para demonstrar o afirmado. O autor opta por provar que o gráfico de uma função afim é uma reta usando distância entre pontos, o que de fato não é difícil, porém o aluno de ensino médio normalmente só estudará distância entre pontos quando do estudo da Geometria Analítica, que ocorre no Ensino Médio usualmente após o estudo de funções. Seria mais recomendado, no nosso ponto de vista, utilizar o método de semelhança de triângulos, conteúdo abordado no ensino fundamental.

No Livro 1, encontramos mencionado, no capítulo que trata de função Linear, o tema proporcionalidade. Destacamos o trecho a seguir:

Função linear

É possível provar que, se uma função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade, então $f(x) = ax$, em que $a = f(1)$, para todo x positivo.

Por outro lado, já vimos que a *função linear* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = ax$, em que $a \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Quando $a > 0$, a função linear $f(x) = ax$ transforma um número real positivo x no número positivo ax . Portanto, define, com essa restrição, uma proporcionalidade $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. O coeficiente a chama-se *fator de proporcionalidade* ou *constante de proporcionalidade*.

É por isso que dizemos que a função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Figura 48 – Recorte do Livro 1, página 140.

Novamente aqui o autor apresenta função que tem para domínio e contradomínio o conjunto dos números reais positivos e a chama de Linear.

O autor usa o termo “proporcionalidade” de maneira incorreta. Sabemos que proporcionalidade pode ocorrer de duas formas, direta ou inversa. O autor usa o termo proporcionalidade referindo-se exclusivamente a proporcionalidade direta. Encontramos a última frase redigida de forma idêntica no livro *A Matemática do Ensino Médio – Volume 1* – de autoria do Prof. Élon Lages Lima. No entanto, Élon já havia convencionado anteriormente que o termo “proporcionalidade” seria empregado fazendo referência exclusivamente a proporcionalidade direta, o que não ocorre com o autor do livro que estamos analisando.

Também alertamos para a inadequada exigência $a > 0$, que sugere que proporcionalidade direta requer relacionamento entre grandezas que variam exclusivamente com mesmo sentido, o que é incorreto, pois podemos ter proporcionalidade direta mesmo no caso $a < 0$. Em outras palavras, *qualquer* função Linear serve de modelo matemático para problemas de proporcionalidade, e não apenas aquelas de coeficiente angular positivo.

CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA E FUNDAMENTAÇÃO

Neste capítulo, apresentamos a metodologia que adotamos para a elaboração deste trabalho, bem como a fundamentação teórica de alguns conceitos utilizados para embasar nosso ponto de vista em relação a alguns itens da Sequência Didática que elaboramos.

A metodologia que seguimos para a elaboração deste trabalho foi a seguinte: inicialmente fizemos uma análise dos PCNEM e uma análise de dois livros didáticos para o ensino de Matemática no Ensino Médio, bem como uma busca por outra bibliografia relacionada ao tema que pretendíamos abordar.

Foi um cuidado nosso escolher os livros didáticos dentro da coleção dos livros indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o ano de 2012 (o último programa para a disciplina de Matemática relativo ao Ensino Médio). No capítulo 3, apresentamos a análise crítica destes livros relativa ao tema Funções.

Como segunda etapa deste trabalho, elaboramos um questionário sondagem com o tema relacionamento entre grandezas para ser aplicado na turma em que implementaríamos a proposta, com o objetivo de verificar o nível de conhecimento e traquejo de nossos alunos em relação ao tema. O questionário (ver Apêndice) inclui grandezas que variam com mesmo sentido, grandezas que variam com sentido contrário, grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, além de incluir também pares de grandezas que não se relacionam. As questões aí apresentadas são todas retomadas durante o desenvolvimento da Sequência Didática que propomos.

A seguir, passamos à elaboração da Sequência Didática a ser implementada em uma sala de aula de primeiro ano do Ensino Médio. Durante o planejamento da mesma, tivemos em mente permanentemente a análise crítica que havíamos realizado tanto em relação aos PCN quanto em relação aos livros didáticos. Assim, por exemplo, tivemos a preocupação de tentar evitar que fossem geradas as incoerências apontadas no Capítulo 3. Tivemos também o cuidado de registrar, durante o planejamento, as expectativas sobre as atividades que propúnhamos, bem como os objetivos das mesmas.

Ao refletir sobre a tradução para a linguagem de funções, vimo-nos forçados a incluir no planejamento a motivação, o conceito e a definição de função, antes de tratarmos das funções que nos interessavam (monótonas, linear, afim, homográfica da forma k/x com k constante não nula). E durante a elaboração desta parte, sentimo-nos também na obrigação de ainda incluir funções invertíveis, para mostrar que uma das ideias que defendemos, a saber,

não dar ênfase ao contradomínio de uma função real de variável real, não causa inconsistência com a inversibilidade de funções.

Após a elaboração da Sequência Didática, a próxima etapa foi a implementação da mesma em uma turma de 1º ano de Ensino Médio de um Curso Técnico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul no Câmpus Caxias do Sul, em Caxias do Sul, RS. Tanto as expectativas e objetivos com relação às atividades propostas como observações sobre a implementação estão explicitadas no Capítulo 5.

A última etapa do trabalho consistiu na validação da Sequência Didática. É natural que esta fase já vá ocorrendo mesmo antes de finalizada a aplicação da Sequência Didática, pois durante a implementação as expectativas anteriormente registradas vão ou não se confirmando, e os resultados já vão se tornando válidos ou não. Esta etapa foi ocorrendo ao final de cada aula de aplicação da Sequência Didática, e as observações a ela pertinentes são também apresentadas no Capítulo 5.

Encerramos este capítulo apresentando abaixo alguns trechos de bibliografias nas quais nos orientamos para que o leitor compreenda com clareza os motivos que nos levaram a optar:

- pela definição de função que aqui será apresentada;
- por não dar ênfase ao contradomínio quando passamos a tratar de funções reais de variável real;
- por aqui fazer uma discussão sobre inversibilidade e apresentar uma caracterização para esta condição;
- pela definição que aqui apresentamos de grandezas diretamente proporcionais.

4.1 QUANTO À OPÇÃO PELA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO QUE AQUI APRESENTAMOS

A dissertação de Mestrado em Educação Matemática da PUC/SP apresentada por Ciro Braga sob o título “O Processo Inicial de Disciplinarização de Função na Matemática do Ensino Secundário Brasileiro”, em 2003, apresenta um resgate histórico de como o conceito de *função* foi introduzido no Ensino no Brasil.

Quanto à representação algébrica de função, o percurso de seu desenvolvimento tem o início vinculado a Fermat e Descartes; a seguir, temos a introdução da palavra função por Leibniz em 1673, e em 1837 Dirichlet nos dá a seguinte definição para função:

“Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x , existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável x . (BOYER, 1974, p. 405)”

Apesar de se restringir a variáveis numéricas e envolver termos imprecisos como *regra*, esta definição e suas variações atenderam as demandas do desenvolvimento da matemática por algum tempo. Segundo Ciro, nas décadas finais do século XIX, sentia-se uma necessidade de ampliação da definição de função para além dos conjuntos numéricos, e essa necessidade foi suprida por uma nova conceituação explicitada pelo grupo Bourbaki na segunda metade dos anos 30 do século XX.

Com o advento da Matemática Moderna, a ideia de dependência funcional foi eliminada da definição corrente de função.

A dissertação de Ciro nos apresenta ainda outro trecho:

Em quase todos livros didáticos de Álgebra, uma função é agora definida como uma relação entre elementos de dois conjuntos (não necessariamente numéricos) ou membros do mesmo conjunto, tal que cada elemento do domínio tenha apenas uma imagem. Algumas definições modernas incluem menção a uma regra; porém, a noção de dependência se foi. Assim, o ensino de funções em classes de Álgebra tende a enfatizar interpretações estruturais mais do que processuais (KIERAN, 1992, p.38 apud BRAGA, 2003).

Sobre o tema proporcionalidade versus função, Ciro Braga fala sobre o livro Curso de Matemática Elementar – Volume II de Euclides Roxo, o qual tinha por objetivo atender ao programa de ensino do 2º ano do curso secundário do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. No capítulo VIII do livro mencionado, intitulado Noção de Função – Proporcionalidade, é introduzido o tema função, o único tema abordado no livro que não fazia parte do programa do Colégio Pedro II. Foi considerado de grande importância para o movimento modernizador: tentava adequar-se às ideias de Felix Klein sobre a inserção da matemática do século XIX na Escola.

4.2 QUANTO À NÃO ÊNFASE AO CONTRADOMÍNIO QUANDO TRATAMOS DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL.

Neste trabalho, definimos função real de variável real de forma que o contradomínio é sempre \mathbb{R} (o que, num certo sentido, não é uma informação adicional, uma vez que estamos tratando de funções *reais* de variável real). Esta é uma forma de nos mantermos coerentes com a definição de função que escolhemos apresentar (função é um conjunto de pares ordenados satisfazendo determinadas condições).

Esta pouca ênfase ao contradomínio é referendada por Friedrichsdorf e Prestel,³ onde se lê:

...veremos duas funções f e g como idênticas se, e somente se, possuem o mesmo domínio de definição e, além disto, para todo x do domínio de definição, sempre vale $f(x) = g(x)$. A informação do “contradomínio” B pela escrita $f: A \rightarrow B$ dá uma informação adicional sobre onde se deve procurar o valor de $f(x)$ para um x de A . Esta informação adicional é extremamente útil para as considerações matemáticas. No entanto, ela pode ter nenhum papel para a identidade de funções, pois cada função de A em B pode ser também entendida como uma função de A em C , onde podemos tomar C como um sobreconjunto de B . Por isso uma função é unicamente determinada pelo conjunto das aplicações “ $x \rightarrow y$; onde x está no domínio de definição e $f(x) = y$.”

A sugestão de tratar funções reais de variável real sempre com contradomínio igual a \mathbb{R} e a falta de ênfase ao conceito de sobrejetividade refere-se apenas, num primeiro momento, à uma introdução ao tema Funções. Futuramente os alunos terão a oportunidade de discutir outros tipos de funções e outras questões que envolvem funções, em contextos mais abstratos, mesmo dentro de funções numéricas. Por exemplo, a questão sobre um conjunto numérico ser ou não enumerável envolve, sem dúvida, o conceito de sobrejetividade.

4.3 QUANTO À EQUIVALÊNCIA ENTRE AS CONDIÇÕES “SER INJETORA” E “SER INVERTÍVEL”

Outro ponto no qual nos concentramos em nossa proposta diz respeito à definição de função invertível. Em nossa Sequência Didática, devido à não importância ao contradomínio quando tratamos de funções reais de variável real, defendemos não ser necessário definir função sobrejetiva e, conseqüentemente, função bijetiva. No entanto, sentimo-nos compromissados a mostrar que esta proposta, na nossa opinião facilitadora para o ensino de funções reais de variável real no ensino médio pelo menos em um primeiro momento, pode ser mantida mesmo se queremos chegar a abordar inversibilidade de tais funções. Desenvolvemos, então, a ideia de tentar “desmanchar a ação de uma função”, mostrando que, para levarmos esta ideia a cabo e definir a função inversa de f como uma função que desmancha a ação de f e é desmanchada pela ação de f , continua desnecessária a condição de

³ Este livro está sendo traduzido pelo Prof. Samuel Volkweis Leite, da UFSM. O parágrafo mencionado foi tirado da tradução parcial já existente

sobrejetividade. E, novamente, sentimos reforçada nossa convicção em outro trecho do livro de Friedrichsdorf e Prestel:

Normalmente denotamos funções por $f: A \rightarrow B$ em argumentos matemáticos onde, paralelamente à função, seu domínio de definição bem como um “domínio alvo” já são conhecidos, no qual a imagem está contida como subconjunto.

Agora, com a escrita $f: A \rightarrow B$, fica expresso que o domínio alvo corresponde à imagem de f . Assim, o conceito de função sobrejetiva faz sentido apenas quando é dado um domínio alvo. Em contrapartida, o conceito de função injetiva faz sentido sem a informação do domínio alvo, pois a afirmação de que dois elementos distintos do domínio de definição são sempre aplicados em duas imagens distintas pela função refere-se apenas à função.

4.4 QUANTO À DEFINIÇÃO DE PROPORCIONALIDADE

Cabe ressaltar que encontramos em livros diferentes de um mesmo autor definições diferentes para proporcionalidade. A definição que defendemos:

Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

(...)

Em suma, a definição tradicional equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado constante de proporcionalidade) tal que $y = a \cdot x$ para todo valor de x . (LIMA, et al 2006, p. 93)

Que as funções Linear e Homográfica da forma k/x (k constante não nula) são, respectivamente, a tradução para a linguagem de funções da relação de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa entre duas grandezas confirma-se também neste livro:

Uma proporcionalidade é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = f(x) / c$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

(...)

Em suma, a definição tradicional equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado constante de proporcionalidade) tal que $y = ax$ para todo valor de x . (LIMA, et al 2006, p. 93)

No entanto, no livro *Temas e Problemas* da coleção PROFMAT da SBM também de autoria (parcial) de Élon Lages Lima, a definição de grandezas diretamente proporcionais é

outra: agora exige-se que grandezas diretamente proporcionais sejam grandezas que variam com mesmo sentido:

Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é proporcional a x quando:

i) As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y . Diz-se então que existe uma correspondência $x \rightarrow y$ e que y é *função* de x . Quando escrevermos $x \rightarrow y$ estaremos querendo dizer que y é o valor que corresponde a x .

ii) Quanto maior for x , maior será y . Em símbolos, se $x \rightarrow y$ e $x' \rightarrow y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.

iii) Se a um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número qualquer, então o valor de y que corresponde a cx_0 é cy_0 . Simbolicamente: se $cx_0 \rightarrow cy_0$ então $cx_0 \rightarrow cy_0$.” (LIMA, 2012).

Segundo Braga (2003, p. 108):

Este capítulo VIII inicia explorando o conceito de variável dependente e independente em diversas contextualizações e nas diferentes representações, algébrica, tabular e gráfica. Apresenta, em seguida, a função proporcional e justifica o seu gráfico, uma reta passando pela origem, relacionando a proporcionalidade com a tangente trigonométrica. Observa, em decorrência, a relação entre a declividade da reta e a constante de proporcionalidade.

Entendemos, com este trecho, a função Linear como o modelo matemático para representar os problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais, já sendo apresentada aos estudantes, embora sem o uso do nome “função Linear”.

CAPÍTULO 5 - IMPLEMENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresentamos a Sequência Didática que desenvolvemos e aplicamos aos alunos.

Esta Sequência Didática foi aplicada a uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, do Curso Técnico em Fabricação Mecânica do Campus Caxias do Sul do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) na cidade de Caxias do Sul. No total foram trinta e dois alunos, sendo trinta e um do sexo masculino e uma aluna do sexo feminino, sendo que 71,8% dos mesmos haviam concluído o Ensino Fundamental em escolas públicas, destes trinta e dois alunos, três eram repetentes, e as idades da turma variavam entre 14 e 17 anos.

A implementação teve duração de pouco mais de dois meses, divididos em duas aulas semanais, num total de dezenove aulas, sendo cada aula com duração de uma hora e quarenta minutos. Cabe ressaltar que o desenvolvimento da implementação foi adaptado à carga horária da instituição destinada ao ensino da Matemática, o que o autor considera um tanto quanto inferior ao ideal, haja visto que nas instituições que o autor atuava anteriormente a esta a carga horária semanal para a disciplina de Matemática era 50% maior do que a disponível aqui.

Relataremos neste capítulo quais foram nossos objetivos e expectativas, bem como as observações decorrentes da aplicação.

Para o relato das observações durante a implementação nos utilizamos de algumas gravações de áudio e também anotações que foram sendo feitas durante o desenvolvimento. Alertamos para o fato de não ter sido recolhido material dos alunos. Também tivemos a avaliação final da atividade um tanto prejudicada por, em se tratando de uma instituição pública, termos tido uma greve durante o ano letivo da aplicação.

Para melhor compreensão do leitor, apresentamos a Sequência Didática proposta em quadros, nos quais constam o material que foi usado pelo professor e pelos alunos, lembrando que o material dos alunos não contém os bilhetes “Ao Professor”.

AULA 1

Iniciamos nossa primeira aula apresentando 6 atividades que tratam sobre grandezas, solicitando que cada aluno trabalhasse de forma individual, com o intuito de que o aluno saiba relacionar duas grandezas e classificar as mesmas quanto a: diretas, inversas, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais e que também saiba identificar quando não há relação nenhuma entre as grandezas.

Nossa expectativa quanto a primeira atividade era que o aluno reconhecesse que estamos dobrando, triplicando e quadruplicando a quantidade de porções e portanto é preciso dobrar, triplicar e quadruplicar as quantidades de ingredientes.

5.1 REVISANDO GRANDEZAS DIRETAS, INVERSAS, DIRETAMENTE PROPORCIONAIS E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS.

Ao Professor: As atividades a seguir buscam que o aluno comece a trabalhar com grandezas ainda sem ter sido apresentado às definições de grandezas diretas, inversas, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Motivação:

Atividade 1

A receita de pão de queijo a seguir rende 5 porções:

Pão de Queijo Mineiro

4 copos de polvilho doce

1 colher de sal

2 copos de leite

1 copo de óleo

2 ovos

4 copos de queijo minas ralado

óleo para untar

Pergunta-se:

Que quantidades de ingredientes devemos usar se quisermos 10 porções?

E 15 porções?

E 20 porções?

O que você observa comparando as novas quantidades com as quantidades originais da receita?

Ao Professor: Espera-se que o aluno observe que, como a receita rende 5 porções, ao pedirmos 15, ele deve triplicar a quantidade de ingredientes e ao pedirmos 20 que ele quadruple a quantidade.

Observamos que os alunos não tiveram dificuldade em interpretar e concluir o que se esperava, isto por que rapidamente deram-se conta que 15 e 20 porções tratam-se,

respectivamente do triplo e quadruplo das cinco porções apresentadas na receita, alguns alunos deram-se conta muito rapidamente, o que fez com que todos concordassem, portanto não permitindo mostrar-se se alguns alunos tivessem dúvidas quanto a atividade.

Para a próxima atividade tivemos como expectativas que os alunos observassem que em a) a quantidade de porções é o dobro da quantidade na receita e portanto, deve-se dobrar a quantidade de ingredientes e em b) que trata-se da metade.

Atividade 2

Gustavo resolve impressionar a namorada e quer preparar um bolo de cenoura para ela. Para isso utiliza a seguinte receita:

Bolo de cenoura (rendimento: 8 porções)

1/2 xícara de óleo

3 cenouras médias raladas

4 ovos

2 xícaras de açúcar

2 1/2 xícaras de farinha de trigo

1 colher de fermento em pó

Cobertura:

1 colher (sopa) de manteiga

3 colheres (sopa) de chocolate em pó

1 xícara (chá) de açúcar

a) A namorada acha o bolo uma delícia e pede a Gustavo que ele prepare o bolo para toda a família que é formada por 4 pessoas. Estimando que cada familiar irá comer 4 porções, que quantidades de ingredientes Gustavo deve usar para que seja possível satisfazer a toda a família?

b) E se o bolo for preparado novamente apenas para o casal, sabendo que cada um irá comer apenas 2 porções, quais devem ser as quantidades de cada ingrediente? Pensando que não haja sobras!

Observamos que os alunos resolveram a atividade de forma muito rápida, afinal já tinham entendido o questionamento, que era praticamente idêntico ao da atividade 1, portanto novamente tivemos bastante agilidade no desenvolvimento da atividade.

Para a próxima atividade nossas expectativas concentraram-se na pergunta a) esperando que os alunos identifiquem que o peso vai simplesmente aumentando e em b) onde a intenção é que se dessem conta que o peso não dobra dobrando a quantidade de pessoas.

Atividade 3

Num elevador está escrito: “CAPACIDADE MÁXIMA: 6 pessoas ou 480 kg”.

- a) A cada andar entra uma pessoa no elevador, o que vai acontecendo com o peso do mesmo?
- b) Primeiramente entram duas pessoas e o elevador atinge um determinado peso, a seguir entram mais duas, ou seja, o número de pessoas dobra. Considerando que neste grupo de pessoas, todas tem o mesmo peso, pergunta-se: o peso deste elevador dobra?

Observamos que a pergunta a) foi respondida como esperado, já na pergunta b) gerou-se uma certa discussão, sendo que a maioria respondeu que dobrando o número de pessoas dobraria o peso do elevador. No momento da discussão um dos alunos se deu conta que o peso realmente não dobrava pois o peso do elevador sozinho não muda. Foi preciso exemplificar a situação, atribuindo um peso aleatório ao elevador e somando o peso das pessoas que iam entrando, esse diálogo foi sendo desenvolvido com anotações na lousa para que o raciocínio fosse acompanhado. Desta maneira os demais se convenceram do que realmente acontece.

Para a atividade 4 nossa expectativa era de que os alunos observassem facilmente que ao aumentar o número de contas, diminui-se a quantidade de dinheiro disponível.

Atividade 4

Tomemos o salário mensal de um trabalhador e o número de contas fixas (luz, água, telefone, condomínio, etc. a pagar todos os meses.

- a) A cada conta que for sendo paga, o que vai ocorrendo com a quantidade de dinheiro que sobra para outros gastos?
- b) Explique a relação existente entre quantidade de dinheiro disponível para gastos e quantidade de contas a pagar.

Observamos no decorrer da atividade 4 que rapidamente os alunos deram-se conta que aumentando a quantidade de contas a pagar diminuía o dinheiro, ocorrendo portanto o esperado. Esta discussão foi feita basicamente por dois alunos e acompanhada pelos demais. Um dos alunos questionou se seria um caso semelhante ao da atividade 3, porém foi imediatamente corrigido por um colega que usou do argumento, correto, que em nenhum

momento mencionava-se o valor de cada conta e portanto não teríamos contas iguais. Ao questionar os demais, tivemos a concordância de todos.

Para a atividade 5 nossa expectativa era de que os alunos observassem que aumentar o número de máquinas significa diminuir o número de dias, mantendo-se uma proporção.

Atividade 5

Uma empresa precisa produzir 500 peças. Uma máquina leva 10 dias para produzi-las. Supondo que todas as máquinas desta empresa têm o mesmo rendimento, em quantos dias as peças serão produzidas se a empresa usar duas máquinas? E cinco máquinas? Se a quantidade de máquinas for maior, o que ocorre com a quantidade de dias necessários para produzir as peças?

Pudemos observar que a grande maioria dos alunos usou a relação de que uma máquina produz 50 peças por dia e a partir daí foram calculando o número de dias e assim concluindo que o mesmo diminuía aumentando-se a quantidade de máquinas. Dois deles resolveram montar o esquema e resolver, por regra de três, utilizando assim conhecimentos do Ensino Fundamental haja visto que não falamos em regra de três em nenhum momento. A grande maioria conseguiu observar que ao dobrar o número de máquinas cairia pela metade a quantidade de dias, sendo que um dos alunos fez este comentário e os demais concordaram. Questionamos os mesmos em relação a questão de diminuir os dias e diminuir de forma igual, questionamento este que por alguns não foi entendido, reformulamos o questionamento e assim um aluno imediatamente afirmou que se uma máquina produz cinquenta peças por dia, então duas vão produzir cem e assim sucessivamente logo o número de dias não diminui aleatoriamente e sim de forma igual, os demais ao serem indagados concordaram. Considero a expectativa atendida já que a ideia não era montar via regra de três e sim usar o raciocínio lógico o que ocorreu com a maior parte dos alunos.

Para a atividade 6 nossa expectativa era de que os alunos identificassem que a relação existente não é previsível e portanto que não possa ser dada por uma fórmula, entre o horário que a neve cai e a quantidade de neve.

Atividade 6

No inverno Nova Iorque de 2012, nevou pela primeira vez dia 21 de janeiro. Considerando que nevou o dia todo, em alguns horários mais e em outros menos, pergunta-se: existe alguma relação entre a quantidade de neve que vai caindo com o horário em que ela caiu? Justifique.

Observamos que nossa expectativa foi atendida, visto que nenhum aluno teve dificuldade em compreender o que ocorre; alguns mencionaram que o raciocínio é igual ao da quantidade de chuva que cai em um determinado dia. Deram-nos portanto uma dica de que não precisávamos ter ido tão longe para criar uma situação de grandezas diretas.

Depois de trabalhadas as atividades acima definimos o que são Grandezas que variam com mesmo sentido, que variam com sentidos contrários, Diretamente Proporcionais e Inversamente Proporcionais.

5.2 DEFINIÇÕES

Definimos grandeza como tudo aquilo que pode ser medido ou contado.

Exemplos de grandezas: idade, comprimento, tempo, temperatura, massa, preço, entre outras.

Dizemos que duas grandezas estão relacionadas quando uma alteração em uma delas provoca alguma alteração na outra. Tal relacionamento pode ser de vários tipos, alguns deles muito especiais, e por isso recebem nomes especiais. Listamos a seguir aqueles com os quais vamos aqui trabalhar:

Grandezas que variam com mesmo sentido: Duas grandezas que se relacionam - e que vamos aqui denotar por x e y - são ditas Grandezas Diretas quando uma variação em uma delas provoca uma variação na outra tal que: se uma cresce a outra também cresce; se uma decresce, a outra também decresce.

Grandezas que variam com sentidos contrários: Duas grandezas que se relacionam - e que vamos aqui denotar por x e y - são ditas Grandezas Inversas quando uma variação em uma delas provoca uma variação na outra tal que: se uma cresce a outra decresce; se a primeira decresce, a segunda cresce.

Grandezas Diretamente Proporcionais: Duas grandezas x e y que se relacionam são diretamente proporcionais se o valor de x aumenta (ou diminui) o valor de y também aumenta (ou diminui), de tal forma que o quociente y/x se mantém constante, ou seja, de tal forma que existe uma constante k tal que $y/x = k$ para qualquer valor da grandeza x e o correspondente valor de y .

Grandezas Inversamente Proporcionais: Duas grandezas x e y que se relacionam são inversamente proporcionais se o valor de x aumenta (ou diminui) o valor de y diminui (ou aumenta), de tal forma que o produto $y.x$ se mantém constante, ou seja, de tal forma que existe uma constante k tal que $y.x = k$, para qualquer valor da grandeza x e o correspondente valor de y .

AULA 2

Esperamos que, após terem sido apresentadas as definições acima, os alunos saibam reconhecer que tipo de grandeza estava envolvida em cada atividade.

Atividade 7

Após definirmos alguns tipos de relações entre grandezas, complete, se possível, a tabela a seguir, assinalando o tipo de relação que ocorreu em cada uma das atividades trabalhadas no início deste capítulo:

	Com mesmo sentido	Com sentido contrário	Diretamente Proporcionais	Inversamente Proporcionais	Nenhuma das Anteriores
Atividade 1					
Atividade 2					
Atividade 3					
Atividade 4					
Atividade 5					
Atividade 6					

Depois de definirmos os tipos de grandezas, voltamos a cada uma das atividades para analisar o tipo de grandeza envolvida em cada uma e marcar na tabela. Como cada atividade já havia sido discutida antes de definirmos os tipos de grandezas, os alunos não tiveram dificuldades no momento de apontar a qual tipo de grandeza se referia cada uma das atividades. Mesmo na atividade 5 em que poderia haver uma certa confusão entre grandezas inversas com inversamente proporcionais.

Esperamos que após termos definido os tipos de grandezas os alunos consigam identificar a relação entre as grandezas apresentadas.

Considerando as definições acima, classifique as relações entre grandezas apresentadas a seguir, marcando: MS variam com mesmo sentido, SC variam com sentido contrário, DP para diretamente proporcionais, IP para inversamente proporcionais e NDA para nenhuma das anteriores.

- () velocidade x tempo
- () idade x altura
- () quantidade de trabalho a ser executado x número de operários para executá-lo (supondo que todos trabalham no mesmo ritmo)
- () número de unidades de produção de determinado produto x preço unitário do mesmo
- () distância percorrida x combustível gasto para percorrê-la de automóvel (supondo que o mesmo mantém um rendimento constante)
- () medida do lado de um polígono regular x perímetro do mesmo
- () medida do lado de um polígono não regular x perímetro do mesmo

- () peso x altura de uma pessoa
- () temperatura de uma taça de café fervente e tempo que o café leva para atingir a temperatura ambiente
- () tempo de produção de determinado produto x número de itens produzidos
- () escala x representação

Durante a realização da atividade houve uma certa discussão em relação à comparação de algumas grandezas, por exemplo, idade x altura, para muitos houve a confusão de pensarem que tratava-se de grandezas diretamente proporcionais, porém alguns alunos deram-se conta que em determinado momento para-se de crescer porém a idade segue aumentando. Outro item que mereceu especial discussão foi “número de unidades de produção de determinado produto x preço unitário do mesmo” pois a interpretação dada por um dos alunos foi que não existiria relação entre as grandezas pois preço unitário foi interpretado como constante, e esta interpretação foi aceita pela ampla maioria da turma.

Na próxima atividade esperamos que os alunos identifiquem o tipo de relação entre as grandezas x e y sem ter dúvidas sobre o tipo de relação estabelecida.

Atividade 8

Ao Professor: Observe que nas tabelas 1 e 3 temos respectivamente grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, já nas tabelas 2 e 4 temos respectivamente grandezas diretas e inversas e na tabela 5 temos nenhuma das situações anteriores.

Nas tabelas a seguir está indicada uma relação entre duas grandezas x e y . Supondo que nelas estão registrados todos os possíveis valores de x , classifique as grandezas x e y em: diretas, inversas, diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou nenhuma dessas relações.

Tabela 1:

x	y
1	2
2	4
3	6
4	8

Tabela 2:

x	y
1	2
2	7
3	9
4	10
5	11
6	13
7	20
8	22
9	47

Tabela 3:

x	y
1	8
2	4
4	2
8	1
16	$\frac{1}{2}$
32	$\frac{1}{4}$

Tabela 4:

x	y
1	15
2	13
4	11
8	10
16	8
32	6
64	5

Tabela 5:

x	y
1	2
2	7
3	11
4	3

Observamos que a identificação *do tipo* de relação apresentada foi mais fácil do que nas situações contextualizadas. Ao menos não houve discussões como nas situações contextualizadas, haja visto que em números não se permite muitas interpretações, ficou

visível que a comparação entre números nas colunas das tabelas facilitou a interpretação e também por se tratarem de tabelas limitadas.

Na atividade 9 a expectativa era de que os alunos conseguissem determinar os valores das grandezas procuradas por raciocínio multiplicativo sem recorrer a regra de três habitual no Ensino Fundamental e que o aluno consiga determinar valores de grandezas sabendo a forma com que esta se relaciona com outra grandeza de valores conhecidos.

Atividade 9

Ao Professor: Os exercícios a seguir foram usados na íntegra ou adaptados de um questionário sondagem aplicado anteriormente a este trabalho.

Resolva os exercícios a seguir:

- 1) Para construir um muro de 80 m de comprimento, 10 homens levam nove dias. Para construir o mesmo muro e mantendo todos o mesmo ritmo de trabalho, quantos dias levarão,
 - a) 5 homens?
 - b) 15 homens?
 - c) 20 homens?
- 2) Três sócios A, B e C, para abrir um negócio, investiram, respectivamente, R\$ 6.000,00, R\$ 8.000,00 e R\$ 12.000,00. Ao final de um ano de funcionamento, tiveram um lucro de R\$ 286.000,00. Explique o que você consideraria, nesta situação, ser uma “divisão justa dos lucros” e, a seguir, calcule, deste ponto de vista, quanto caberia a cada um.
- 3) Quatro pedreiros, trabalhando 8 horas por dia, constroem 50 metros de calçada em uma semana. Quantos metros de calçada serão construídos, ainda em uma semana, por 6 pedreiros trabalhando 8 horas por dia, supondo que esses trabalhadores tenham o mesmo rendimento nas duas situações?
- 4) Quatro pedreiros, trabalhando 8 horas por dia, constroem 50 metros de calçada em uma semana. Quantos metros de calçada serão construídos, ainda em uma semana, por 6 pedreiros trabalhando 6 horas por dia, supondo que esses trabalhadores tenham o mesmo rendimento nas duas situações?

Observamos que os alunos conseguiram determinar o valor das grandezas procuradas sem grandes dificuldades, a partir de discussões entre si e de ideias que cada um teve, haja visto que esta atividade foi desenvolvida em pequenos grupos, onde o professor apenas fazia a mediação. Um único aluno usou regra de três para determinação dos valores até o exercício 3. No exercício 4, que teoricamente é regra de três composta, nenhum aluno usou desse artifício

para resolução, uns poucos não conseguiram resolvê-lo e os demais foram resolvendo por partes. Notou-se que os alunos não tem muita clareza de quando realmente se pode usar regra de três simples, o que também não foi discutido, já que nossa intenção é que os alunos desenvolvam por raciocínio multiplicativo.

AULA 3

5.3 INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Neste capítulo você encontrará as noções de:

- produto cartesiano
- função real de variável real
- gráfico de uma função real de variável real
- função monótona
- função linear
- função afim
- função homográfica da forma $f(x) = k/x$
- funções inversíveis
- inversão das funções linear, afim e dadas por $f(x) = k/x$, bem como das funções *do tipo* linear, *do tipo* afim e *do tipo* $f(x) = k/x$,
- exploração da relação entre as funções acima com grandezas diretas, inversas, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

5.3.1 Produto cartesiano

Descrição: Introduzimos inicialmente a definição de par ordenado; a seguir, introduzimos a condição para que dois pares ordenados sejam iguais. Após a definição de produto cartesiano de dois conjuntos, seguida de exemplos nos quais se espera que o aluno saiba identificar um produto cartesiano, bem como construir pares ordenados e determinar a sua quantidade em função da quantidade de elementos dos conjuntos que formam um produto cartesiano.

Ao Professor: Os alunos, neste momento, já tiveram contato com a noção de conjuntos e de operações entre eles.

Dados dois conjuntos não vazios A e B , se escolhermos um elemento $x \in A$ e um elemento $y \in B$, denotaremos por (x, y) o par ordenado formado por x e y tomados nesta ordem. O par ordenado (x, y) representa o conjunto $\{x, y\}$ no qual foi imposta a seguinte ordem: x é o primeiro elemento e y é o segundo elemento.

Assim, dois pares ordenados, (x, y) e (s, t) , só são considerados iguais se tivermos simultaneamente $x = s$ e $y = t$.

Simbolicamente, escrevemos:

$$(x, y) = (s, t) \leftrightarrow x = s \text{ e } y = t$$

Definição: O conjunto de todos os pares ordenados (x, y) , nos quais $x \in A$ e $y \in B$, é denotado por $A \times B$ e é chamado de produto cartesiano de A por B .

Simbolicamente, escrevemos:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Quando ocorrer que $A = B$, costuma-se denotar $A \times A$ por A^2 .

Ao Professor: Neste momento os alunos já devem ter conhecimento do conceito de variável, por ocasião do estudo de conjuntos por compreensão.

A seguir apresentamos a Atividade 10, onde espera-se que os alunos consigam escrever os conjuntos que formam os produtos cartesianos pedidos e que encontrem a relação existente entre número de elementos de cada conjunto com o número de elementos do produto cartesiano.

Atividade 10

Ao professor: Na Atividade 10, espera-se que os alunos reconheçam a relação que existe entre número de elementos dos conjuntos que formam o produto cartesiano e o número de pares ordenados do produto cartesiano. Antes de passarmos ao raciocínio genérico, iremos propor mais um exemplo, desta vez sem conhecer os elementos dos conjuntos, justamente com a finalidade de estimular esta generalização.

Dados os conjuntos $A = \{-2, 3, 5\}$ e $B = \{-1, 2, 4, 7\}$, determine $A \times B$, $B \times A$, A^2 e B^2 .

- Observando $A \times B$ e $B \times A$, pergunta-se: são iguais? Justifique.
- Quantos elementos possui $A \times B$?
- Quantos elementos possui A^2 ?
- Você encontra alguma relação entre o número de elementos de A^2 e o número de elementos do conjunto A ? Em caso afirmativo, qual?
- Você encontra alguma relação entre o número de elementos de B^2 e o número de elementos do conjunto B ? Em caso afirmativo, qual?
- Você encontra alguma relação entre o número de elementos de $A \times B$ e o número de elementos dos conjuntos A e B ? Em caso afirmativo, qual?

Observamos que formar os pares ordenados e escrever o produto cartesiano foi tranquilo para a maioria, apenas dois alunos apresentaram dificuldade em gerar os pares. Quanto a determinar a relação entre número de elementos dos conjuntos com o número de elementos do produto cartesiano, dois alunos foram bem rápidos e identificaram imediatamente o que acontece, os mesmos se anteciparam e já esclareceram aos demais a relação existente, os demais concordaram com os dois e alguns tiveram certa dificuldade em visualizar o que acontece, para estes orientou-se especial atenção nas atividades a seguir (11 e 12). O uso de diagramas não foi citado aqui e nem indicado por nenhum aluno. O motivo de não tê-lo citado deve-se ao fato que após a atividade 12 será pedido para que o procedimento se repita, agora sim usando diagramas.

Nossa expectativa para a atividade 11 era de que o aluno conseguisse perceber que basta multiplicar o número de elementos de cada conjunto para obter o número de elementos do produto cartesiano.

Será que as relações que você encontrou na atividade 10 são sempre válidas? Sugerimos que você as teste em outra atividade:

Atividade 11

Um conjunto A possui 2 elementos e um conjunto B possui 3 elementos, determine o número de elementos de $A \times B$, $B \times A$, A^2 e B^2 , justificando sua resposta.

Observamos que a maioria dos alunos criou conjuntos com 2 e 3 elementos e desenvolveu o produto cartesiano para chegar a resposta, mas a seguir a grande maioria percebeu a não necessidade de ter-se os elementos explicitados. Nenhum aluno percebeu que o uso de “esquema” deixaria a visualização mais fácil, porém novamente não os alertei a respeito considerando a solicitação que virá após a atividade 12.

Na atividade 12 esperamos apenas que os alunos concluíssem que basta multiplicar m por s .

Atividade 12

Generalizando: é possível determinar o número de elementos de $A \times B$ a partir do número de elementos dos conjuntos A e B (digamos, sabendo que A tem m elementos e que B tem s elementos)? Justifique.

Observamos que, como na atividade 11 os alunos perceberam que bastava multiplicar as quantidades de elementos de cada conjunto, agora na atividade 12 os mesmos concluíram rapidamente que bastava substituir os números por m e s e portanto $m \times s$.

Esperávamos na questão a seguir, que os alunos os alunos conseguissem trabalhar com os diagramas.

Para uma visualização desta relação, tente construir, por meio de diagramas, os produtos cartesianos $A \times B$, $B \times A$, A^2 e B^2 da atividade 10.

Ao professor: Aproveite a oportunidade para evocar aqui o Princípio Multiplicativo.

Observamos que a maioria executou a atividade rapidamente e acharam mais fácil de visualizar do que escrevendo por extenso cada par. Esta atividade seria aplicada dependendo do desencadeamento das atividades 10, 11 e 12; como em nenhum momento os alunos

havam percebido a utilidade dos diagramas, a mesma foi de extrema valia. A visualização foi a facilidade mais apontada pelos alunos.

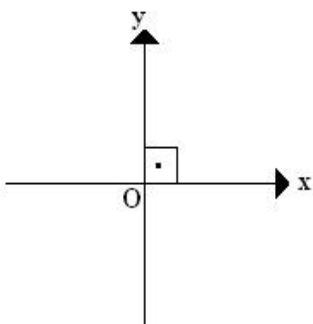
AULA 4

Nosso objetivo a seguir foi apresentar aos alunos o plano cartesiano, pois é um pré-requisito para o estudo de gráficos de funções reais de variável real.

5.3.1.1 Um produto cartesiano especial e o plano cartesiano

Ao professor: Para o estudo dos gráficos de funções reais de variável real iremos usar o Sistema Cartesiano Ortogonal.

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ admite uma visualização geométrica, fazendo-se uso de dois eixos perpendiculares entre si que se interseccionam precisamente no ponto escolhido/etiquetado por zero em cada um deles, por isso denominado Sistema Cartesiano Ortogonal. Costuma-se posicionar os eixos na horizontal e na vertical para facilitar a comunicação, bem como chamar ponto de intersecção dos eixos de origem do sistema cartesiano, e denotá-lo por O. Assim, $O = (0,0)$.



OBS: As flechas aqui apenas indicam o sentido de crescimento escolhido para este eixo.

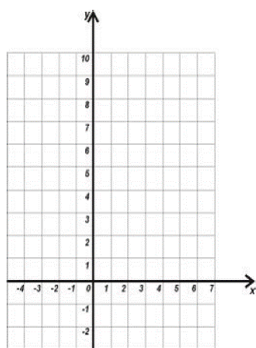
Cada eixo que compõe o Sistema Cartesiano será nomeado da seguinte forma:

-eixo Ox, o eixo horizontal, que será chamado de eixo das abscissas.

-eixo Oy, o eixo vertical, que será chamado de eixo das ordenadas.

Ao Professor: Mostre a seus alunos como se representa um ponto na visualização geométrica.

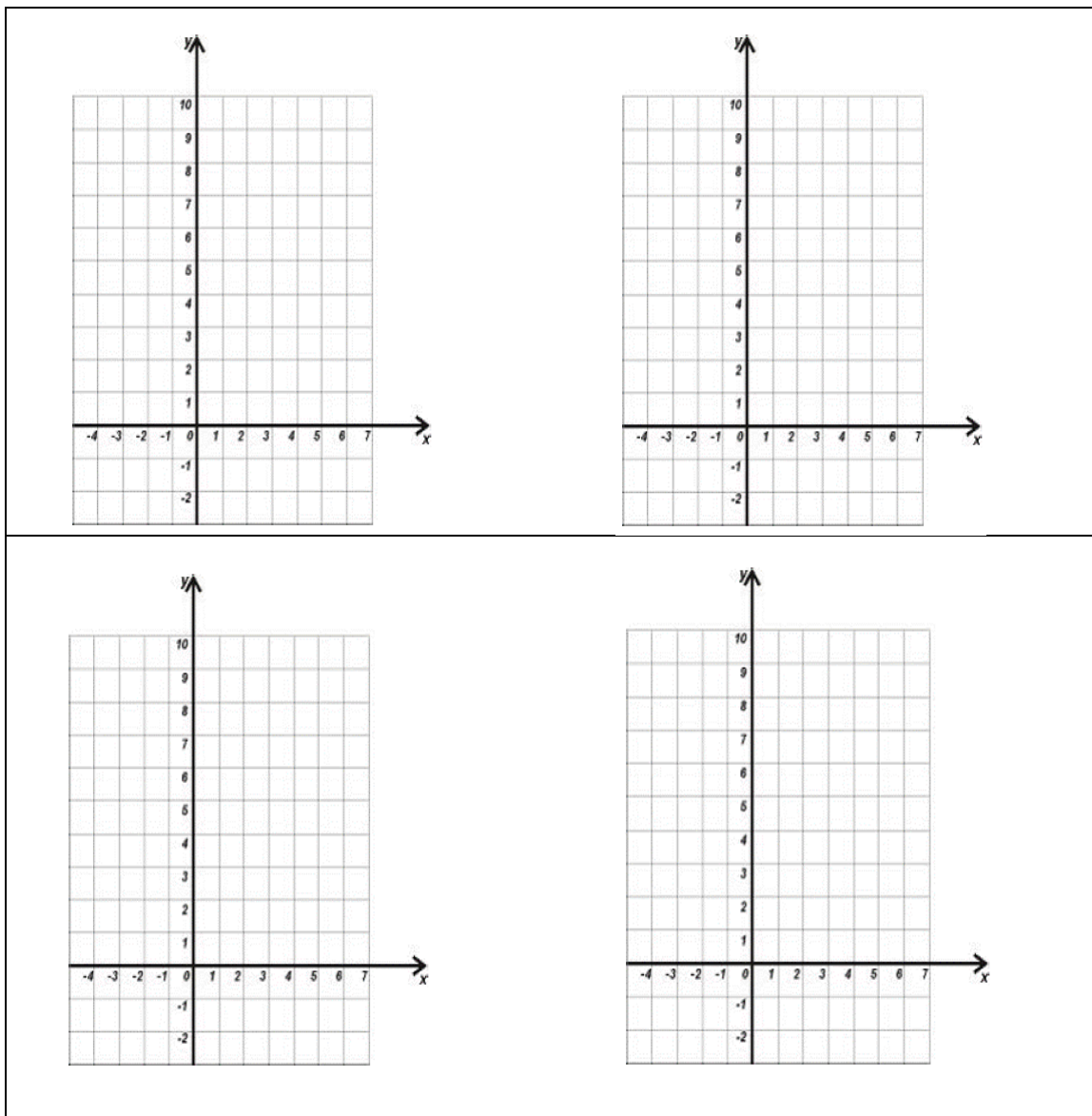
Vamos, no Sistema Cartesiano Ortogonal abaixo, representar os seguintes pontos A(-2, 3), B(3, 5), C(4, -1), D(0, 7), E(5, 0) e F(-1, -2).



Esperamos com a próxima atividade que os alunos tenham compreendido e consigam localizar os pares por meio dos pontos.

Atividade 13

Dados os conjuntos $A = \{-2, 3, 5\}$ e $B = \{-1, 2, 4, 7\}$, represente os conjuntos $A \times B$, $B \times A$, A^2 e B^2 , no sistema cartesiano ortogonal. (Observe que se trata dos mesmos conjuntos da atividade 10).



Observamos que a maioria realizou a atividade sem dificuldades. Dois alunos tiveram dificuldades em representar A^2 e B^2 , pois demoraram para visualizar que nos dois eixos deveriam usar os mesmos elementos, depois de alertados a dificuldade foi superada.

AULA 5

5.3.2 Funções reais de variável real

Ao Professor: Estamos neste trabalho introduzindo algumas demonstrações com o intuito de que os alunos comecem a familiarizar-se com as mesmas, visto que é muito raro o uso de demonstrações durante o Ensino Básico, o que faz com que alunos de graduação tenham muita dificuldade em trabalhar com as mesmas. Salientamos que “demonstração” não é sinônimo de “linguagem formal” e nem pressupõe a utilização de simbologia. Espera-se aqui apenas argumentações completas.

Ao professor: No texto que segue, tratamos primeiramente do conceito geral de função para em seguida tratarmos de função real de variável real.

Para motivarmos o estudo de funções que queremos aqui fazer, vamos começar observando algumas situações.

A partir daqui nossas expectativas gerais são de que o aluno comece a reconhecer que há uma possibilidade de unificar todas as situações a ele apresentadas via a linguagem de produto cartesiano.

Na atividade 14, espera-se que os alunos consigam escrever os pares ordenados e visualizar que há mais do que uma única regra possível para a correspondência.

Atividade 14

A tabela abaixo foi encontrada em uma página rasgada de um antigo livro.

X	Y
-1	-1
0	0
1	1

Observando a parte que ficou visível desta tabela, pergunta-se:

- Pode-se reescrever a informação constante nesta tabela fazendo uso de pares ordenados?
- Você consegue determinar uma regra que explique como a tabela foi gerada?
- Existem outras regras compatíveis com essa tabela?

Durante a realização da atividade 14 pudemos observar que, no item a, não tiveram dificuldades, no item b a maioria foi rápida em dizer que tratava-se de $y = x$, porém o item (c) envolveu uma grande discussão, alguns alunos rapidamente responderam que não, outro imediatamente respondeu “provavelmente sim”, mas ao questioná-los quais seriam estas regras nenhum deles conseguiu explicitar que regras poderiam ser, depois de incitá-los um pouco mais a observar a tabela um aluno deu-se conta que podiam ser $y = x^n$, então $y = x^3$, $y = x^5$ e $y = x^7$ e assim por diante, desde que o expoente de x fosse ímpar, questionei então os demais se concordavam, praticamente uma resposta unânime que sim, ainda assim para alguns não estava claro, foi preciso montar algumas tabelas com $y = x^3$, $y = x^5$ e $y = x^7$, depois deste procedimento acabaram convencidos. Chamou a atenção o aluno que visualizou $y = x^n$ não ter anunciado primeiramente as condições $y = x^3$, $y = x^5$ e $y = x^7$.

Para a atividade 15 a expectativa é de que os alunos não encontrem uma “regra” determinando a correspondência.

Atividade 15

Joãozinho estava andando na rua e, num determinado momento, se deparou com um pedaço de papel jogado no chão. Como ele não gosta de ver lixo jogado ao chão, resolveu juntá-lo, mas ao olhar para o papel viu que nele está registrada a seguinte tabela:

X	Y
-3	1
-1	3
1	7
3	5
5	-2
7	3
9	-8

Ao professor: Fica o alerta de que o fato de não se adivinhar como a tabela foi gerada não significa que a tabela não tenha sido gerada por uma regra. Lembre que, se a relação é funcional, então sempre existe uma função polinomial que interpola um número finito de pontos (por exemplo, a construída a partir do Polinômio Interpolador de Lagrange vai nos proporcionar a função polinomial de menor grau que interpola esses pontos).

Pergunta-se:

- É possível reescrever a informação constante nesta tabela fazendo uso de pares ordenados?
- Você consegue enunciar/determinar uma regra compatível com essa tabela?

O que observamos após a atividade 15 foi que, ao realizarem a mesma, o item a) novamente não apresentou dificuldades para ser respondido, no item b) novamente abriu-se uma discussão com alguns achando que era possível obter uma regra, outros achando que não, porém, como era esperado, nenhum aluno conseguiu imaginar uma regra para geração da tabela. Expliquei a eles que é possível determinar uma regra mas que não era esta nossa intenção imediata.

Na atividade 16, a expectativa era de que os alunos conseguissem escrever os elementos da tabela por meio de pares ordenados e de diagramas, e que futuramente utilizem esta atividade como justificativa para o fato de que, para se ter uma função, não necessariamente precisa existir uma relação de “causa e efeito” entre as variáveis dependente e independente (aqui representadas por dia do mês e mm de chuva no dia).

Atividade 16

Ao professor: A tabela desta atividade foi colocada na horizontal, esperando-se que o aluno consiga formar os pares ordenados, independentemente da forma com que uma tabela é construída.

Suponha que na cidade fictícia de Caxiapólis os índices pluviométricos nos 10 primeiros dias de um mês sejam dados pela seguinte tabela:

<i>Índice Pluviométrico</i>										
Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mm	23	14	0	0	3	7	11	0	0	16

Ao professor: Espera-se aqui que o aluno faça uso de pares ordenados.

a) É possível representar os dados desta tabela de outras formas? Se sim, que formas você escolheria então?

Observamos, bem como era esperado, que a maioria transcreveu a tabela por meio de pares ordenados. Apenas dois alunos transcreveram na forma de diagramas.

Ao professor: Espera-se aqui que o aluno se conscientize que o contexto determina que é impossível existir uma regra que determine a quantidade de chuva em função dos dias, mesmo existindo uma função interpoladora. Obviamente o contexto nos diz que ele não fará o menor sentido se quisermos “prever” quantos mm poderá chover no próximo dia.

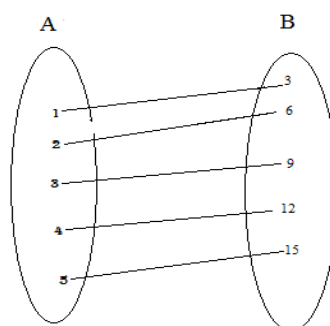
b) É possível estabelecer alguma relação entre a quantidade de chuva que cai e a sequência de dias que vai transcorrendo? Em outras palavras, existe alguma relação entre as grandezas tempo (representado pelo dia do mês) e a quantidade de chuva (representada em mm)? Justifique.

O que observamos neste momento é que apenas um aluno achou que há relação entre as grandezas, porém não conseguia explicitar qual, e logo foi corrigido pelos demais alunos que o alertaram da impossibilidade de se prever a quantidade de chuva de acordo com o transcorrer dos dias. Alguns lembraram da atividade que falava da neve em New York.

Na atividade 17 insere-se a linguagem de diagramas para representar a função, e espera-se que o aluno consiga expressar a relação por meio de pares ordenados. Na pergunta a) começamos introduzindo a proporcionalidade direta, na pergunta b) espera-se que o aluno represente a informação contida no diagrama por meio de pares ordenados.

Atividade 17

Algumas crianças estavam brincando com um jogo onde deveriam sortear 3 cartas, e a cada carta era atribuída uma certa pontuação. As cartas eram numeradas de 1 a 5 e a pontuação correspondente a cada carta, como indicado no manual com as instruções do jogo, está mostrada através do seguinte diagrama:



Observe o diagrama que estabelece carta sorteada x pontuação obtida e reflita sobre as seguintes questões:

Ao Professor: Na questão a) espera-se que o aluno identifique que a pontuação obtida é o triplo do número da carta e consiga estabelecer a fórmula $y = 3x$.

a) O que você observa sobre a pontuação da carta (B) em relação ao número da carta (A)? Por exemplo, é possível estabelecer alguma fórmula que relacione o número de pontos com o número da carta?

Verificamos que a grande maioria observou de imediato que a pontuação era baseada no triplo do valor da carta, porém no momento de tentar representar isso por meio de uma fórmula houve uma certa dificuldade por boa parcela da turma. Notei aqui uma grande dificuldade que nossos alunos têm em usar simbologia na matemática.

b) Você consegue representar, por meio de um conjunto de pares ordenados, a relação estabelecida entre a carta sorteada e a pontuação correspondente? Se sim, quais são estes pares?

Como nas outras atividades já era pedido para escreverem pares ordenados, não houve dificuldade em transcrever o diagrama para a forma de pares ordenados.

Nossa expectativa para a atividade 18 é de mostrar que até mesmo uma relação de correspondência entre variáveis que não são numéricas pode ser representada por um produto cartesiano.

Atividade 18

Um curso de Inglês tem turmas de cinco alunos. Observe a tabela, de uma dessas turmas, que associa a cada aluno o seu número de matrícula:

Aluno	Matricula
Alex	8731
Betânia	8739
Claudia	9142
Daner	5766
Michelsch	7391

É possível escrever por meio de um conjunto a relação estabelecida entre o nome do aluno e o número de matrícula do mesmo?

Observamos que nesta atividade criou-se uma discussão a respeito da mesma, pois para boa parte dos alunos, pelo fato de a tabela não ser exclusivamente numérica, entenderam como não sendo possível reescrever a informação por meio de conjuntos. Foi preciso retomar a definição de conjunto.

Para a atividade 19 esperávamos que o aluno conseguisse montar a tabela a partir de uma fórmula pré estabelecida.

Atividade 19

Sabendo que o cálculo do comprimento C de uma circunferência, é dado através da fórmula $C = 2\pi r$, onde r é a medida do raio desta circunferência, complete a tabela:

r	C
1	
2	
3	
4	
5	

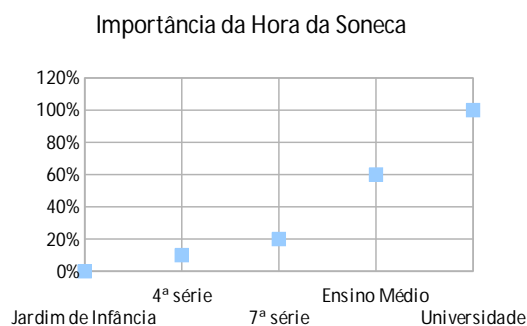
Agora pede-se que você represente por meio de um conjunto a relação entre a medida do raio e o comprimento da circunferência por ele determinada.

Para a grande maioria a realização da atividade foi tranquila, alguns alunos acabaram utilizando para π o valor 3,14. Foi preciso retomar a discussão a respeito do número π haja visto que já havia sido discutido/trabalhado quando definimos conjuntos.

Para a atividade 20 esperamos que o aluno já comece a se familiarizar com esboços de gráficos, e que possa transformar dados do esboço em pares ordenados.

Atividade 20

Observe o esboço a seguir:



Fonte: http://trolldeplantaio.blogspot.com.br/2011_03_13_archive.html

Observe que é possível relacionar o momento da vida com o percentual de importância da hora da soneca. É possível explicitar essa relação na forma de pares ordenados? Se sim, apresente-a nesta forma.

Pudemos observar que a grande maioria dos alunos respondeu sem dificuldade nenhuma a proposta da atividade. Alguns tiveram um pouco de dificuldade pois tentaram transformar Jardim de Infância, Ensino Médio e Universidade em números. Novamente veio à tona o fato de que para nossos alunos matemática é apenas números. Sugeri retomarmos a atividade 18 para que houvesse o convencimento necessário; feita a discussão mostraram-se convencidos.

Você pode observar que todos os exemplos acima dizem respeito a relações entre duas variáveis. Na maioria deles as variáveis são grandezas. Independente disto, todos os exemplos mencionados possuem uma característica em comum, você consegue identificar que característica é essa?

Ao professor: Neste momento, quer-se que os alunos observem que todos os exemplos puderam ser escritos na forma de pares ordenados – às vezes por extensão, às vezes só por compreensão, este último necessário quando se trata de um conjunto infinito de pares ordenados. Essa característica comum é precisamente a base da definição de função que adotaremos neste texto.

O que observamos nas situações apresentadas pelas atividades acima é que nem todas as relações são de causa e efeito, nem sempre existe fórmula, nem sempre existe regra, nem sempre é possível construir tabela ou diagrama, mas sempre é possível representar as relações na forma de par ordenado.

A expectativa que respondessem que é sempre possível escrever as relações por meio de pares ordenados não foi correspondida. A resposta que surgiu foi a de que é possível sempre associar as grandezas, neste momento, visto que a expectativa não havia sido correspondida, foi preciso induzi-los ao fato de que é possível sempre escrever em forma de par ordenado. Foi necessário rever uma a uma cada uma das atividades anteriores para que ficasse visível aos alunos essa condição. Mas feito este alerta, todos concordaram com ele.

AULA 7

5.3.2.1 A definição de função

As atividades anteriores nos fizeram ver que todas as relações possuem a característica comum de poderem ser escritas por meio de pares ordenados.

Algumas dessas atividades ainda satisfazem outras condições às quais quando satisfeitas chamamos de funções.

Estas condições, listadas a seguir, definem quando um conjunto de pares ordenados de um produto cartesiano é uma função.

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma função de A em B é um conjunto f de pares ordenados, do produto cartesiano $A \times B$ que satisfaz as seguintes condições:

- i) para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$
- ii) não existem dois pares ordenados distintos de f com o mesmo primeiro elemento.

Simbolicamente:

$$(x, y) \in f \text{ e } (x, z) \in f \rightarrow y = z.$$

(lê-se “se (x,y) e (x,z) são pares de f então $y=z$ ”)

Ao Professor: Ressalte para seus alunos o significado do símbolo “ \rightarrow ” e estimule a “tradução em palavras” da frase simbólica acima, fazendo os alunos reconhecerem que o que está ali escrito em símbolos reflete de fato as condições escritas acima.

Observe que as atividades de 14 a 20 satisfazem a definição, portanto temos aí funções.

Voltamos a cada uma das atividades de 14 a 20 e fizemos a análise baseados na definição dada. Os alunos mostraram-se muito interessados e também conseguiram com facilidade enxergar a definição nas atividades, convencendo-se que tratavam-se de funções.

Ao Professor: Retome as atividades citadas e verifique com seus alunos a veracidade desta informação.

Observe o exemplo a seguir:

Atividade 21

Cinco pessoas foram consultadas e deveriam assinalar em uma tabela suas preferências por algumas guloseimas. A tabela a seguir indica como foi a escolha:

Nome	Chocolate	Brigadeiro	Quindim
Carlos	x		
Bárbara	x	x	x
Eduardo		x	x
Liliana			x
Valéria	x		x

Represente essa tabela por meio de diagramas, onde o primeiro conjunto mostra as pessoas consultadas, e o segundo as guloseimas sugeridas.

Pergunta-se: Seguindo a definição, a relação que associa cada pessoa a suas guloseimas favoritas pode ser considerada uma função? Sim ou Não? Justifique.

Observamos que os alunos construíram a representação por meio de diagrama de forma muito rápida e sem erros. Para que respondessem a pergunta, num primeiro momento a maioria quis escrever na forma de pares ordenados. Logo deram-se conta, sem interferência minha, que por diagrama ficava mais fácil a visualização do que por meio de conjunto de pares ordenados. Neste momento achei positiva esta descoberta, e deixei para mais tarde interferir nesta conclusão, dando exemplos que envolvessem conjuntos com muitos elementos ou até mesmo infinitos para evidenciar o desconforto e até mesmo impossibilidade da representação por diagramas.

Ao Professor: Evoque com seus alunos a definição de função e induza-os a observarem que no exemplo anterior e no próximo, a mesma não está satisfeita.

Mais um exemplo:

Atividade 22

Tomando dois conjuntos, $A = \{1, 3, 4, 6\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, escreva por extenso a relação que associa a cada elemento do conjunto A o seu dobro no conjunto B.

Pergunta-se: Essa associação é uma função? Justifique.

Na atividade 22, a maioria dos alunos optou por visualizar via diagrama. Logo observaram que sobrava o 6 no conjunto A sem ter correspondente e portanto “não tem a condição i” (comentário de um aluno, e aceito pela grande maioria, para alguns foi preciso voltar à definição e analisar as duas situações i e ii). Como as duas atividades, 21 e 22, estavam postas no quadro, na forma de diagramas, aproveitei para questioná-los a respeito do que podiam observar. Um dos alunos respondeu que nenhuma das duas era função, os demais concordaram, segui o questionamento perguntando o que os levava a observar isto, e alguns responderam que na 21 “tinha mais de uma flecha partindo de um do mesmo elemento” e na 22 “tinha elemento no conjunto A sem flecha”. Segui o questionamento então perguntando como as condições i e ii estariam satisfeitas no diagrama. Após alguns momentos pensando, um dos alunos respondeu “que tem que sair só uma flecha de cada elemento do primeiro conjunto, mas tem que sair de todos”. Questionei os demais se concordavam, alguns se mostraram receosos, porém voltamos à definição e fomos aos diagramas verificar, o que fez com que todos concordassem.

Outras nomenclaturas associadas às funções:

Para cada par $(x, y) \in f$, dizemos que y é o valor de f em x e escrevemos isso como $y = f(x)$. Assim, ao escrevermos $y = f(x)$ estamos indicando que o valor assumido pela variável y fica determinado em função da variável x , isto é, pelo conhecimento do valor que a variável x está assumindo (situação garantida pela condição (ii) acima).

Aqui foi fácil a aceitação dos alunos quanto à questão da nomenclatura. Foram apresentados alguns exemplos de funções na forma de conjunto de pares ordenados e na forma de diagramas e escritos com a nova nomenclatura. Exemplo: Se o par $(2, 3)$ pertence a uma função f , então temos que $y = f(2) = 3$.

Atividade 23

Dada a função que associa a cada número natural o seu triplo, pergunta-se:

a) Para cada par (x, y) associado pela condição descrita, qual é a fórmula que pode representar essa função?

Ao Professor: Queremos que o aluno conclua que temos $y = 3x$ ou $f(x) = 3x$.

Responderam muito rapidamente e sem dificuldade.

b) Determine $f(7)$.

Para os poucos alunos que apresentaram um pouco de dificuldade em determinar $f(7)$, foi preciso detalhar um pouco mais a questão proposta; para os demais a resposta esperada veio rapidamente.

c) Qual(is) é(são) o(s) valor(es) de x que determina(m) $f(x) = 15$?

Para responder ao item c houve um pouco de dúvida, pois vários alunos responderam que deveria ser 45 (note que o triplo é 15). Tive que questioná-los se $f(x) = 15$ era a mesma coisa que $f(15)$? A resposta foi unânime que não. Então aproveitei para alertá-los da nomenclatura e de como interpretar o que estava sendo perguntado. Achei necessário fazer mais alguns exemplos, porém tive o cuidado de não apresentar o exemplo $f(x) = x^2$ por se tratar da atividade seguinte. Pareceu-nos então que estavam convencidos da diferença, haja visto que não houveram novos questionamentos após os exemplos. Note que até este momento ainda não foi definido o que é Domínio, Contradomínio e Imagem de uma função.

Pela definição de função o conjunto A é denominado domínio da função f e o conjunto B é dito contradomínio de f .

No exemplo anterior podemos dizer que A é o conjunto dos Naturais e B pode ser o conjunto dos Naturais ou dos Inteiros, ou mesmo dos Reais.

Ao Professor: Alertar seus alunos para que não façam confusão e acabem por deduzir que o contradomínio pode ser qualquer conjunto. Evoque o fato de que o contradomínio pode ser muito mais amplo do que os números que são apresentados como contradomínio em cada função, por exemplo, quando associamos cada número natural ao seu triplo, o contradomínio pode ser o conjunto dos Naturais ou dos Inteiros ou mesmo dos Reais, e mesmo assim não deixamos de ter uma função.

O conjunto dos valores de $y \in B$ determinado por $y = f(x)$ é chamado imagem de f .

Simbolicamente: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x)\}$

Aqui tivemos um momento delicado, sempre que se apresenta a simbologia na Matemática há um certo desconforto entre os alunos, pois como já mencionado, há uma certa resistência a tudo que não é apresentado com números a eles. Foi preciso usar vários exemplos mantendo a mesma regra e o mesmo Domínio e ir alterando o Contradomínio para que se convencessem que o Contradomínio pode ser qualquer conjunto que contenha os elementos associados pelos elementos do Domínio, e sempre ressaltando cada elemento do Domínio com sua correspondente Imagem.

AULA 8

Atividade 24

Seja uma função f que associa a cada número real x o seu quadrado, ou seja $f(x) = x^2$.

Pergunta-se:

- a) Qual a imagem de $x = 3$?
- b) Qual(is) elemento(s) do domínio tem imagem 25?

A pergunta a) foi respondida sem dúvidas, já na pergunta b) o problema foi que muitos não enxergaram que para uma imagem 25, na função que foi dada, temos dois elementos do domínio (5 e -5). Alguns ainda se equivocaram e calcularam $f(25)$. Foi necessário conversarmos um pouco em relação à atenção que deve-se dar ao domínio e a imagem.

Ao Aluno: Aqui é preciso ter cuidado para que não ocorra confusão de notação. Usamos a notação f para nomear o subconjunto do produto cartesiano que gera a função, enquanto $f(x)$ é o nome do segundo elemento do par ordenado de um elemento genérico de f , ou seja, $f(x)$ refere-se à imagem gerada pelo valor correspondente de x .

Ao Professor: As atividades a seguir devem ser desenvolvidas em conjunto professor-aluno.

Observe as seguintes situações:

Nossa expectativa para a atividade 25 é que o aluno consiga reconhecer o domínio, o contradomínio, a imagem, pares ordenados e identifique imagens de alguns elementos específicos.

Atividade 25

Um curso de Inglês tem turmas de cinco alunos. A matrícula de cada aluno é formada por um número de quatro algarismos significativos. Observe a tabela que associa a cada aluno o seu número de matrícula:

Aluno	Matricula
Alex	8731
Betânia	8739
Claudia	9142
Daner	5766
Michelsch	7391

Esta atividade, já citada na motivação para o estudo de funções, envolve uma função, considerando um domínio específico, pois esta correspondência satisfaz todos os requisitos explicitados na definição.

Vamos responder a alguns questionamentos:

a) Qual conjunto representa o domínio desta função?

Neste item da atividade 25 alguns responderam que seria o conjunto A, questionei-os quem seria o tal conjunto A e a resposta foi unânime de que era o conjunto com os alunos. Alertei-os para não nomearem o conjunto haja visto que a atividade não o fez. Entendemos

que esta confusão dos alunos em nomear o conjunto tenha surgido pelo que tratamos logo após a atividade 23.

b) Qual conjunto representa o contradomínio da função?

Considerando toda a discussão já feita anteriormente a respeito do contradomínio, a resposta da maioria foi que poderia ser qualquer número. Tivemos que voltar ao enunciado do problema pra que observassem a exigência de que o número deveria ter 4 algarismos significativos, logo um aluno respondeu que então deveria ser de 1234 até 9876. Note que a compreensão de “significativo” foi confundida com “repetido”. Foi preciso alertá-los a respeito dessa diferença. Em seguida convenceram-se de que bastavam números de 1000 a 9999.

c) Qual conjunto representa a imagem da função?

Foram rápidos em responder que era o conjunto com os números de matrícula apresentados nas tabelas.

d) Qual a imagem correspondente ao elemento Cláudia do domínio?

Todos responderam de forma correta.

e) Qual o elemento do domínio cuja imagem é 8731?

Todos responderam de forma correta.

f) O par (Firmino, 6785) pertence à função?

Unâнимes em dizer que não.

Na atividade 26 queremos que o aluno consiga reconhecer o domínio, bem como identificar alguns pares ordenados e a imagem de algum elemento específico. E também que o aluno reconheça que é impossível representar em uma tabela toda a função em questão.

Atividade 26

Considere a relação que calcula o comprimento C de uma circunferência, através da fórmula

$$C = 2\pi r,$$

onde r é a medida do raio desta circunferência. Esta relação entre comprimento e medida do raio, já citada anteriormente, também é função, pois da mesma forma esta relação satisfaz as condições adicionais da definição. Por isso, podemos também escrever $C(r)$ para o comprimento associado ao raio.

Solicita-se que você complete a tabela:

r	$C(r)$
1	
2	
3	
4	
5	

Pergunta-se:

a) Qual conjunto representa o domínio desta função?

Aqui as respostas foram contraditórias, pois para a maioria o domínio era o conjunto dos números naturais ou inteiros de 1 a 5. A resposta esperada, e que foi discutida logo em seguida, é que fosse o conjunto dos números reais positivos, haja visto que trata-se de uma medida (raio). A tabela com certeza gerou a confusão e a resposta diferente do que era esperado.

b) Qual a imagem correspondente ao elemento 4 do domínio?

Resposta correta de todos.

c) Qual o elemento do domínio cuja imagem é 4π ?

Resposta correta de todos.

d) O par $(8, 16\pi)$ pertence a função? E o par $(11, 54\pi)$?

Resposta correta de todos.

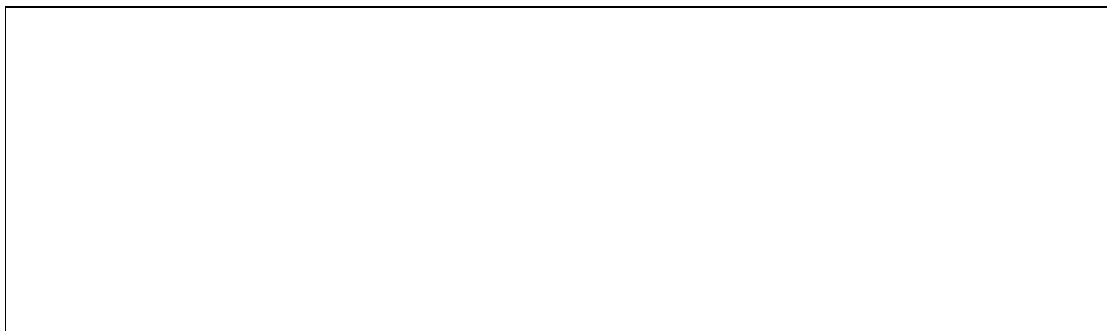
e) É possível seguir completando esta tabela até um último valor possível de r ?

Como a questão do domínio já havia sido muito discutida em a) a resposta acabou vindo de forma fácil e corretamente aqui.

Ao Professor: Sugere-se que, neste momento, seja introduzida a questão “É possível gerar nesta tabela um par formado só por números inteiros? E só por números racionais? Justifique”, aproveitando para trabalhar com números irracionais.

Ao Professor: Deseja-se que para a atividade anterior o aluno se dê conta, e consiga provar, que uma função desta forma tem necessariamente domínio e imagem positivos.

Usando a atividade anterior, prove que a imagem da função $C(r)$ é \mathbb{R}_+ .



AULA 9

Funções Reais de Variável Real

Ao professor: Como nosso estudo, a partir daqui, tratará apenas de funções numéricas, isto é, aquelas em que o domínio e o contradomínio são formados exclusivamente por números, sugerimos convencionar que toda função aqui considerada a partir de agora terá como contradomínio o conjunto dos números Reais. A justificativa para uma tal convenção é, principalmente, uma coerência com a noção de igualdade entre funções: segundo a definição aqui adotada para função, fica claro que o que interessa sobre uma função são os pares ordenados que a formam, e não os elementos que não fazem parte da imagem: basta voltar à Atividade 2 e perceber que não haveria nenhuma mudança significativa se trocássemos \mathbb{R}_+ por \mathbb{R} . O professor deve refletir sobre a seguinte situação relacionada a esta sugestão: “a função exponencial” é normalmente apresentada nos livros didáticos com contradomínio igual à imagem ($f(x) = a^x$ onde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, *$); porém se o contradomínio for o conjunto dos Reais, em nada se alteram os pares ordenados que constituem a função. (Além disso, reflita sobre a questão: por que a função quadrática f dada por $f(x) = x^2$ não é então apresentada com contradomínio $[0, +\infty)$?). Se voltarmos aos exemplos motivadores acima apresentados e que são funções numéricas, podemos observar que as situações não deixam de ser funções se restringimos o contradomínio apenas aos valores apresentados como imagem, ou se tomamos como contradomínio todo o conjunto dos números Reais. E é esta a parte importante que queremos ressaltar – ser ou não função - e não quem tomamos para contradomínio.

Nosso estudo sobre funções, neste texto, tratará apenas de funções numéricas, isto é, de funções cujo domínio e contradomínio são formados apenas por números reais. Por isso vamos, a partir de agora, considerar sempre como contradomínio o conjunto dos números Reais, isto é, $B = \mathbb{R}$.

Convenção: Neste texto, trataremos daqui em diante, não mais de funções quaisquer entre conjuntos A e B e sim apenas de funções chamadas funções reais de variável real, que são funções de A em \mathbb{R} com $A \subset \mathbb{R}$.

Notação: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ subentendendo $A \subset \mathbb{R}$.

Bastou relembrar a discussão a respeito de contradomínio já feita anteriormente para que se convencessem do que acabamos de definir.

Atividades:

Atividade 27

Verifique se os conjuntos de pares ordenados abaixo podem ou não representar funções $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (subentendendo A contido em \mathbb{R}) para uma conveniente escolha de domínio; em caso afirmativo, explicita o domínio e a imagem de tais funções.

a) $f = \{(1,3) (2,5) (3,7) (4,9)\}$

b) $f = \{(-1,1) (2,3) (-1,4) (2,7) (-1,8) (2,11)\}$

Na atividade 27 alguns poucos alunos ainda fizeram confusão no momento de determinar o domínio acreditando ser o conjunto dos números reais, dadas as devidas explicações e retomando a definição esta dúvida acabou sanada, outros ao tentarem responder de forma rápida, acabaram ignorando a definição e respondendo que em b) tínhamos função e que o domínio era o conjunto $\{-1, 2\}$, porém foram rapidamente corrigidos por vários colegas que haviam verificado de forma correta as condições da definição de função. Alguns acharam melhor representar os conjuntos na forma de diagramas para visualizarem melhor.

Atividade 28

Dados os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{R}$ e $f = \{(x, y) / x \in A \text{ e } y \in B \text{ tal que } y = 2x\}$.

a) Verifique se o conjunto f é ou não uma função. Justifique.

b) E se $A = \{\text{inteiros pares}\}$, mantendo B e f ?

Durante a atividade 28 alguns alunos (poucos) tiveram dificuldade em “ler” a regra. Os demais responderam de forma correta sem dificuldades, aqui sempre justificam evocando que as condições i) e ii) da definição de função estão satisfeitas.

Atividade 29

Com os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{R}$ e $f = \{(x, y) / x \in A \text{ e } y \in B \text{ tal que } y = x^2\}$, verifique se o conjunto f é ou não uma função. Justifique.

Na atividade 29 escreveram o conjunto f sem dificuldades. A seguir foram verificar se as condições i) e ii) da definição de função estavam satisfeitas, novamente grande parte deles usou diagramas para essa análise.

Atividade 30

Com os conjuntos $A = \{0, 1, 4, 9\}$, $B = \mathbb{R}$ e $f = \{(x, y) / x \in A \text{ e } y \in B \text{ tal que } x = y^2\}$, verifique se o conjunto f é ou não uma função. Justifique.

Enquanto realizavam a atividade 30 a maioria respondeu de forma errada, considerando que estariam satisfeitas as condições i) e ii) da definição de função e também pois nas atividades anteriores se habituaram a ter $y = \dots$. Foi preciso uma boa dose de convencimento e muita discussão a respeito para convencê-los do que estava ocorrendo nesta atividade.

Atividade 31

O conjunto dos pares ordenados cujo primeiro elemento é um número natural e o segundo elemento é o dobro do primeiro é uma função?

Para realização da atividade 31 alguns alunos montaram tabelas, outros diagramas e um deles fez o seguinte questionamento: “não é igual a atividade 28?”. Entramos na discussão de ser ou não igual, logo se convenceram de que a regra é a mesma porém para conjuntos diferentes.

Ao Professor: Para a questão a seguir, lembramos que existem números reais que admitem duas representações decimais, tais como $3,0 = 2,999\dots$ ou $4,230 = 4,22999\dots$

Atividade 32

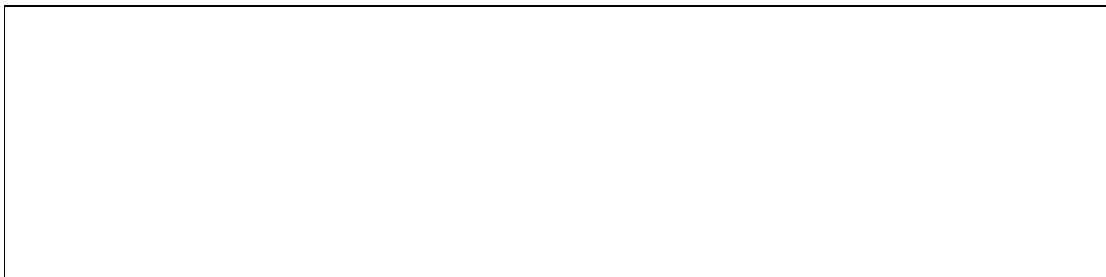
Decida se a regra que associa a cada número real x o algarismo dos décimos da expansão decimal de x é ou não uma função.

Durante a realização da atividade 32 pudemos notar que os alunos tiveram uma certa dificuldade em entender o enunciado, porém como os alunos dessa turma já trabalharam com Progressões, foi fácil usar os exemplos acima do alerta ao professor e transformar as dízimas periódicas. Para estes alunos a igualdade $3,0 = 2,999\dots$ não gerou dúvidas. Porém foi preciso vários exemplos de números nessas condições para convencê-los do que queríamos.

Atenção para o Domínio de Funções!

Em alguns casos, o domínio de uma função não nos é apresentado explicitamente;

Exemplos:



No quadro acima foram apresentados alguns exemplos apenas sendo mostrada a fórmula da função e foi pedido que calculassem a imagem para alguns valores que apenas eu sabia que não faziam parte do domínio, por exemplo: era dada a função $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ e era pedido que calculassem $f(3)$. Alguns alunos tiveram dificuldade pois o fato de não existir a divisão por zero ainda gera dificuldade em muitos, também se usou outros exemplos como $f(x) = \sqrt{x-5}$ e era pedido $f(2)$. Aqui foi preciso bastante cautela e muitos exemplos para convencê-los a respeito das situações apresentadas.

Em outros momentos o contexto prático faz com que o domínio seja menor do que o domínio que a Matemática comportaria. Chamamos estes diferentes domínios de domínio matemático (aquele que é regido exclusivamente pela regra que forma a função) e domínio contextual (que é o domínio matemático alterado pela situação prática). Vamos analisar as seguintes situações:

Ao Professor: Na questão a seguir falamos em maior domínio possível sugerindo ao aluno explorar o domínio matemático.

a) Qual é o maior domínio da função f dada pela fórmula $f(x) = x^2$?

b) Uma função que associa a área (A) de um quadrado em função do comprimento do lado (l) desse quadrado. Qual a fórmula que representa essa função? E qual o seu domínio?

A questão a) foi respondida sem dificuldades, um aluno sugeriu que não valesse para $x = 0$, porém questionado a respeito não soube argumentar, acredito que tenha feito confusão com não se poder dividir por zero. Na discussão da questão b) a fórmula foi dada rapidamente haja visto que já trabalharam geometria do Ensino Fundamental, porém no momento de

determinar o domínio um único aluno deu-se conta que só podemos usar valores positivos para o comprimento, os demais acabaram concordando e assim convencendo-se da diferença nas questões a) e b).

Observe que as situações (a) e (b) acima são funções definidas pela mesma fórmula, porém os domínios de ambas são distintos. Na atividade (a) temos o domínio matemático, determinado exclusivamente pela regra (no caso fórmula) que definiu a função. Já em (c), embora a fórmula seja a mesma, precisou-se levar em consideração o contexto do problema: no caso, a variável independente é o comprimento do lado, e conseqüentemente não podemos ter valores negativos nem nulos para ela; temos aí então o que chamamos um domínio contextual.

Ao Professor: Na questão a seguir falamos em maior domínio possível sugerindo ao aluno explorar o domínio matemático.

c) Uma função definida por uma fórmula: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ onde $f(x) = \frac{2x+3}{x}$. Qual é o maior domínio possível A desta função?

Consideramos que a função que escolhemos não foi a mais adequada, pois a mesma dá margem para a interpretação errônea de que não poder dividir por zero implica o domínio todos os números reais exceto o zero, ou seja, caso fosse dado uma função com denominador $3x + 5$, por exemplo, alguns imediatamente responderam que o domínio era o conjunto dos números reais exceto o zero. Porém a situação foi contornada retomando os exemplos que já havíamos usado no quadro anterior. Alerttei-os novamente para que não fizessem confusão na hora de obter o domínio desse tipo de função.

AULA 10

5.3.3 Gráfico de uma função real

Ao professor: Não podemos fazer confusão entre o que é gráfico e o que é função. Vamos denominar gráfico de uma função f o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) que tenham “a” pertencente ao domínio da função e $b = f(a)$. O leitor pode então se perguntar: “Portanto gráfico é o mesmo que função?” A resposta é: “em termos de conjuntos sim”, mas o que estamos aqui querendo salientar é que uma função pode não nos ser apresentada diretamente pelos pares ordenados que a formam – note que foi precisamente isto o que aconteceu na grande maioria dos exemplos motivadores, bem como nas atividades acima. Além disso, muitas vezes é impossível representar no plano cartesiano todo o conjunto f , por isso falamos esboço/caricatura do gráfico ao invés de gráfico propriamente dito.

O gráfico de uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) que tenham a pertencente ao domínio da função e b a sua imagem, isto é, $b = f(a)$.

Simbolicamente: $G(f) = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b = f(a)\}$

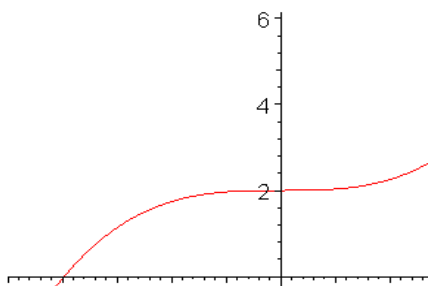
Observe que muitas vezes uma função nos é apresentada diretamente através do seu gráfico. Mas outras vezes não. Por exemplo, com relação a atividade 31 acima temos $G(f) = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } y = 2x\}$

Salientamos que, apesar de serem muitas as possíveis formas de representar uma função (como tabelas, diagramas ou esquemas), o fato de agora estarmos tratando especificamente de funções reais de variável real tem a grande vantagem de podermos “visualizar” uma função (pelo menos em partes ou através de um esboço no plano cartesiano, que tem o papel de uma caricatura do $G(f)$). Ressaltamos que muitas vezes é praticamente impossível e outras vezes é realmente impossível representar-se com precisão o conjunto $G(f)$, por isso, é comum nos contentarmos com um esboço do mesmo.

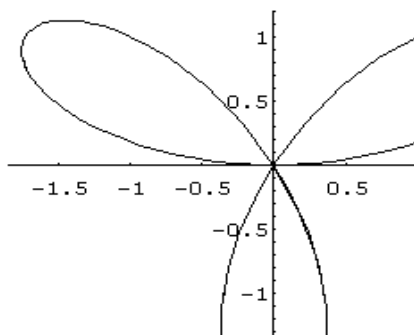
Ao professor: Sugerimos que saliente bastante junto a seus alunos a diferença entre função, gráfico, representação geométrica e esboço do gráfico, trazendo exemplos em que o esboço não é apenas uma caricatura, bem como outros em que é apenas uma caricatura sem a menor chance de vir a ser aprimorado a uma representação fiel.

Atividade 33

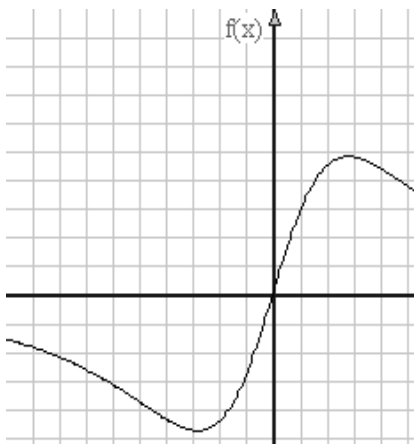
Vamos observar e analisar se os desenhos a seguir podem representar o esboço de uma função real de variável real, assinalando se representam ou não e justificando com as razões para sim ou não:



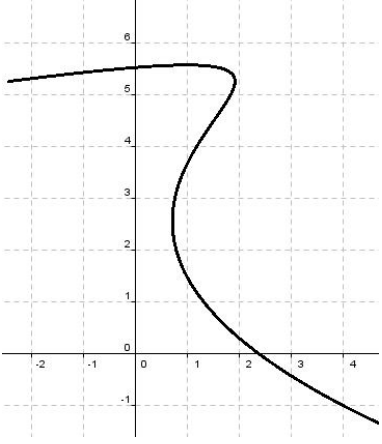
sim não Justificativa:



sim não Justificativa:



() sim () não Justificativa:



() sim () não Justificativa:

Para a atividade acima, primeiramente os deixei pensarem individualmente por alguns instantes. A seguir passei a questionar os alunos através da definição de gráfico. Poucos conseguiram formular algum raciocínio baseado nos esboços. Tive então que analisar um a um os esboços apresentados. Um dos alunos, que é repetente, argumentou “lembro que é só desenhar uma reta e cortar uma vez só”, aproveitei a “lembrança” do aluno para poder analisar os esboços usando a definição de função. Mostraram-se convencidos depois de toda a discussão gerada.

AULA 11

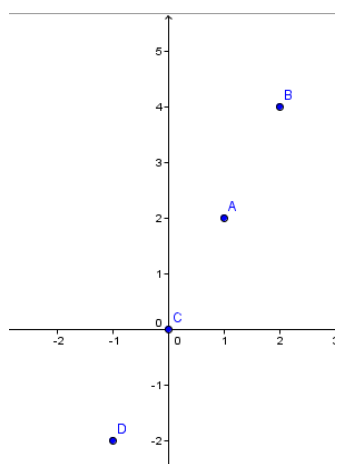
A partir da próxima atividade nossa expectativa era de que os alunos conseguissem observar a diferença nos esboços e conseguissem diferenciar funções monótonas das não monótonas.

5.3.4 Função monótona

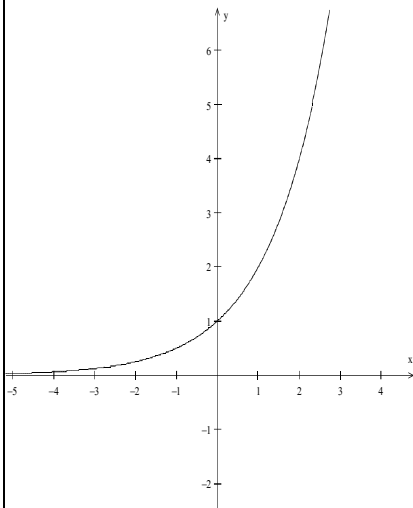
Motivação: Os esboços abaixo representam funções, convença-se disto e a seguir observe atentamente cada um dos esboços.

Ao professor: Sugerimos que, antes de iniciar a atividade, sugira aos alunos certificarem-se de que todos os desenhos abaixo podem sim representar esboços de funções reais de variável real (para um conveniente domínio).

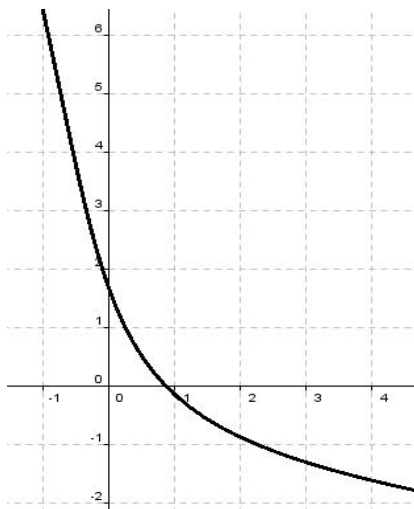
Esboço 1:



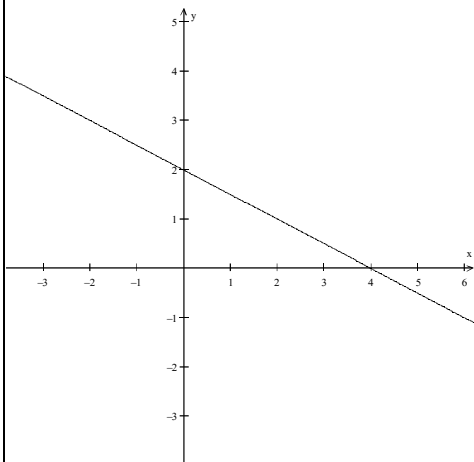
Esboço 2:



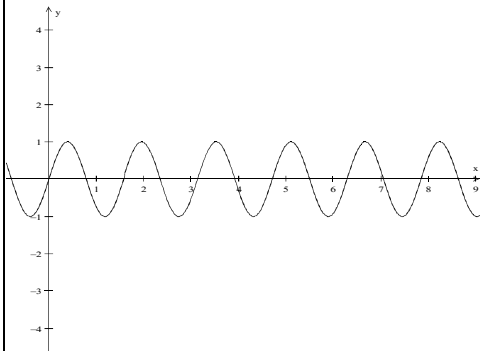
Esboço 3:



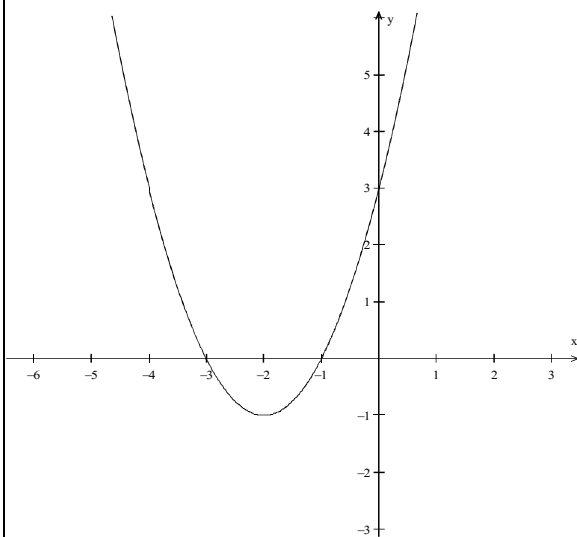
Esboço 4:



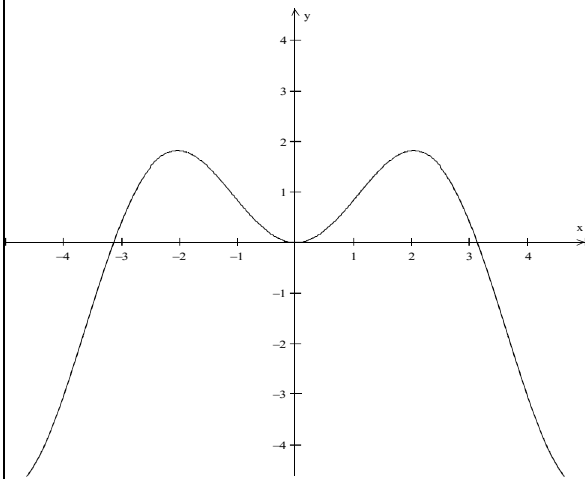
Esboço 5:



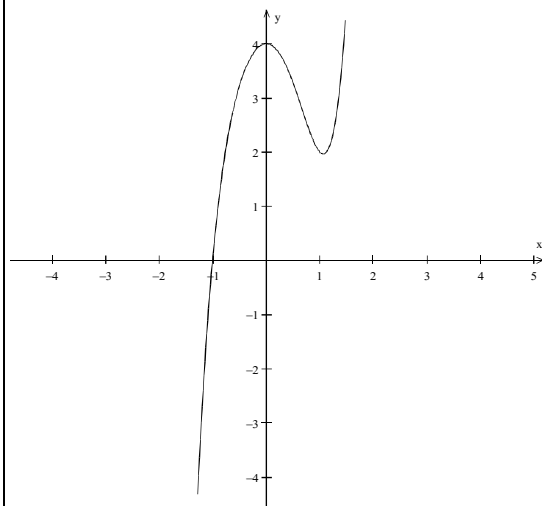
Esboço 6:



Esboço 7:



Esboço 8:



Vamos separar os esboços acima em dois grupos:

Grupo 1: esboços de 1 a 4 e

Grupo 2: esboços de 5 a 8.

Agora responda aos seguintes questionamentos:

a) Você reconhece alguma característica comum aos esboços do Grupo 1?

Ao professor: Encaminhe a discussão sobre as diferenças entre o Grupo 1 e o Grupo 2 em direção a salientar o fato de os esboços do Grupo 1 estarem associados a funções monótonas e o Grupo 2 não.

b) Que diferença(s) você observa comparando os esboços do Grupo 1 aos esboços do Grupo 2? Explique, com suas palavras, a(s) diferença(s) observada(s) (sugestão: tente utilizar usando os termos “estritamente crescente”, “estritamente decrescente”, “nem crescente nem decrescente”).

Infelizmente nenhum aluno conseguiu responder da forma esperada. O único questionamento foi de um aluno se poderia ligar os pontos do esboço 1. Tentei argumentar mais um pouco e incitá-los a obter a resposta pretendida, porém em vão. Tivemos que passar à próxima etapa.

As funções representadas no Grupo 1 são chamadas monótonas, por serem estritamente crescentes (1 e 2) ou estritamente decrescentes (3 e 4).

Já no Grupo 2 isso não ocorre pois temos momentos de crescimento e momentos de decrescimento no mesmo gráfico.

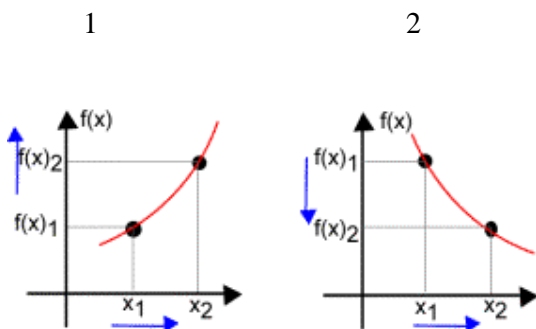
Tornemos precisos tais conceitos:

Função monótona crescente é toda função que preserva a condição de que, à medida que a variável independente cresce, a variável dependente também cresce.

Função monótona decrescente é toda função que preserva a condição de que, à medida que a variável independente cresce, a dependente decresce.

Depois de definir o que são funções monótonas, as respostas à motivação apresentada foram sendo dadas de forma correta, pois assim que definimos, voltamos à análise dos dois grupos de funções. Mesmo assim dois alunos ainda apresentaram uma certa dúvida, neste caso foi preciso a intervenção do professor de forma individualizada com os dois.

Abaixo, ilustramos a ideia fazendo uso de flechas, em 1 temos “função monótona crescente” e em 2 “função monótona decrescente”



Ao Professor: Alerta seus alunos para o fato de que a hipótese nas condições acima é a mesma: sempre observamos o que acontece enquanto a variável independente vai aumentando.

Usando a simbologia matemática: dada uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, temos:

i) f é monótona crescente se para quaisquer x_1 e $x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$. Ou ainda $\forall x_1$ e $x_2 \in A$, $[x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$ (*)

ii) f é monótona decrescente se para quaisquer x_1 e $x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$. Ou ainda $\forall x_1$ e $x_2 \in A$, $[x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$ (**)

Depois de conceituar e usar a simbologia para caracterizar monótonas crescentes e decrescentes, os alunos mostraram que haviam agora sim compreendido os conceitos que na visualização dos esboços não haviam ficado claros.

Ao Professor: A atividade a seguir deve ser respondida usando a definição de função monótona, e não através do esboço do gráfico. Deixaremos para tratar do crescimento/decrescimento da função linear e da afim (reta) quando tratarmos particularmente da função Linear e da função Afim. Sugerimos que a atividade seja respondida inicialmente com palavras e posteriormente seja reescrita a resolução fazendo uso de símbolos, preenchendo-se um quadro da forma:

<i>Resolução em palavras</i>	<i>Resolução fazendo uso da simbologia matemática</i>

Atividade 34

Determine se as funções abaixo, de domínio \mathbb{R} , são ou não monótonas (estritamente crescentes, estritamente decrescentes ou nenhum dos casos):

a) $f(x) = 3x$

Ao Professor: Reforçando que argumentação nada tem a ver com formalismo, sugerimos que a resolução a seguir seja feita de duas formas, uma em palavras e outra simbolicamente, conforme quadro apresentado abaixo. Neste primeiro caso trazemos um exemplo de preenchimento do quadro:

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática
<i>Observamos que, à medida que o valor de x aumenta, por propriedades dos números reais, o valor de $3x$ vai também aumentar. Assim, temos uma função estritamente crescente.</i>	<i>Para cada x_1, x_2 escolhidos no domínio de f, temos $x_1 < x_2 \rightarrow$ (propriedade: multiplicando ambos os lados de uma desigualdade por 3 a mesma permanece inalterada) $3x_1 < 3x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Pela definição concluímos: f é uma função estritamente crescente.</i>

b) $f(x) = -6x$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

c) $f(x) = 2x + 3$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

d) $f(x) = 5$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

e) $f(x) = x^2$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

f) $f(x) = x^3$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

$$g) f(x) = -2x + 1$$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

Como foi apresentado um exemplo e discutido o mesmo, o desenrolar da atividade 34 não apresentou muitas dificuldades, exceto no quadro onde deveriam fazer uso da simbologia que fui chamado várias vezes para auxiliá-los, haja visto que a atividade foi desenvolvida em pequenos grupos. Mais uma vez o problema em fazer uso da simbologia vem à tona.

Vamos trabalhar dois exercícios e neles observemos a monotonicidade nestas situações:

Ao professor: Neste próximo exemplo comece evocando o fato de que se pode tratar o problema na linguagem de funções, e que, neste caso, trata-se de uma função monótona crescente.

Atividade 35

Três trabalhadores constroem um muro de 20 metros em uma semana. Supondo que o rendimento seja o mesmo, quantos metros de muro construirão em uma semana:

- Seis trabalhadores?
- Nove trabalhadores?
- Doze trabalhadores?
- Quinze trabalhadores?
- Dezoito trabalhadores?

Durante a atividade 35 os alunos responderam de forma rápida a atividade, a partir daí questionei os mesmos se podia ou não trabalhar o problema em linguagem de funções? A maioria concordou que sim, questionei então quem seria o domínio e a imagem, novamente vários foram rápidos ao dizerem que se tratava do número de trabalhadores e da quantidade de muro construído. Perguntei a seguir se se tratava de uma função monótona e a resposta foi “sim, e é crescente”. Considero as expectativas atendidas.

Atividade 36

Quatro torneiras de mesma vazão, quando funcionando juntas, enchem um tanque em seis minutos. Se fecharmos uma delas, em quanto tempo as outras três, funcionando juntas, demorariam para encher o mesmo tanque? E se fecharmos duas? E se fecharmos 3?

A resolução da atividade 36 trouxe à tona o mesmo questionamento da atividade 35, e basicamente respondida da mesma forma, também logo deram-se conta que tratava-se de uma função monótona decrescente.

Nossa intenção com a próxima atividade é de que aos alunos seja apresentada uma função que não fosse nem crescente e nem decrescente.

Ao professor: Na próxima atividade, queremos abordar o caso de uma função que não é crescente nem decrescente.

Atividade 37

Uma pessoa resolve fazer uma dieta que promete a perda de 0,5 kg por semana. Porém esta pessoa não controla muito bem sua alimentação. Ao final da primeira semana seu peso não muda, ao final da segunda continua o mesmo e ao final da terceira novamente, ao se pesar, ela constata que continua com o mesmo peso da semana anterior. Ela desiste da dieta. Em termos de função podemos dizer que a relação “tempo X peso”, por exemplo, representa uma função? Se sim, ela é crescente, decrescente ou nenhum dos dois? Justifique.

Durante a atividade 37 os alunos observaram rapidamente que se tratava de “algo” que não cresce nem decresce. Porém houve um pouco de discussão para decidir se era função ou não. Um dos alunos sugeriu que não poderia ser pois o resultado era sempre o mesmo, o que levou outros ao mesmo erro. Questionei usando a definição de função e imediatamente vários observaram que as condições i) e ii) da definição estão satisfeitas, logo é função. Um aluno ainda levou em conta que se visualizarmos na forma de diagramas “vai sair uma flecha só de cada um” (visualização bastante adotada por eles, porém sempre avisados por mim de quando não é bom o uso de diagramas).

AULA 12

Nossa expectativa nestas próximas atividades é que o aluno saiba reconhecer se ocorre ou não monotonicidade, através do esboço do gráfico de funções.

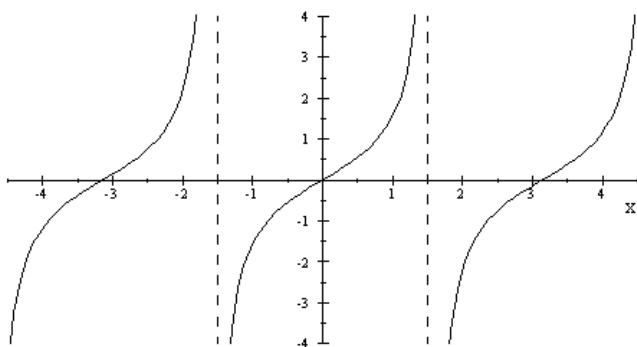
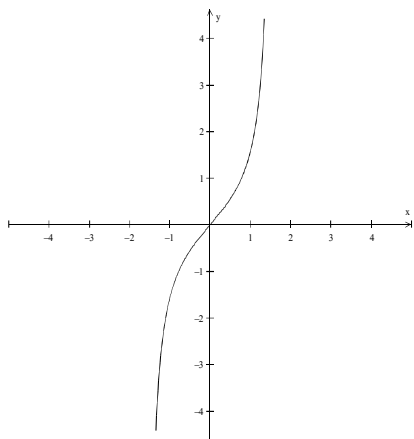
Exercícios:

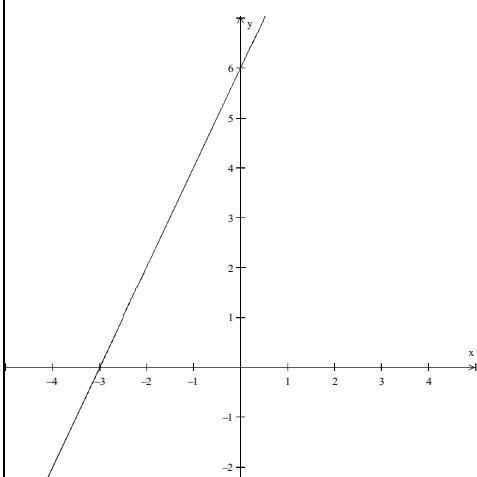
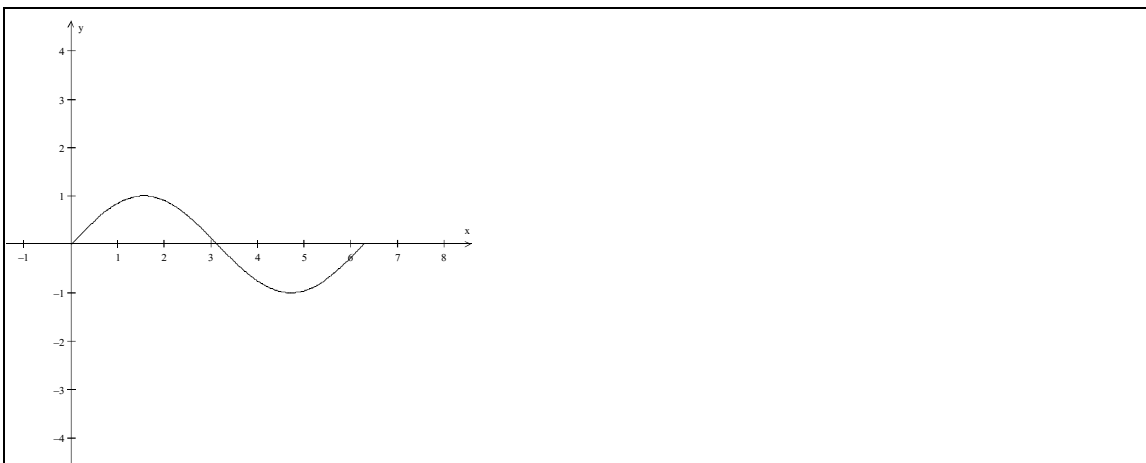
Ao Professor: Evoque neste momento as condições para que o esboço de um gráfico represente uma função estritamente crescente, estritamente decrescente ou nenhum dos casos. Sugere-se analisar os esboços utilizando:

- i) geometria (trabalhando com o sentido das flechas)
- ii) a simbologia matemática utilizada em (*) e (**) definida acima.

Atividade 38

Considerando que as curvas abaixo representam esboços de gráficos de funções. Vamos agora analisar quanto à monotonicidade os mesmos:





Ao professor: Queremos que os alunos reconheçam tanto a monotonicidade quanto a não monotonicidade de uma função também a partir da fórmula, isso fica evidenciado nas atividades 43 e 44.

Os alunos não tiveram dificuldades em realizar a atividade, usaram o esquema das flechas apresentado anteriormente.

Atividade 39

Observe as funções representadas pelos conjuntos a seguir. Determine, sem fazer o seu esboço, se as funções aqui representadas são crescentes, decrescentes ou nenhum dos casos.

a) $f = \{(-1,2) (0,3) (1,4) (2,5) (3,6) (4,7)\}$

b) $f = \{(-1,12) (0,10) (1,8) (2,6) (3,4) (4,2)\}$

c) $f = \{(-1,2) (0,3) (1,4) (2,4) (3,4) (4,7)\}$

d) $f = \{(-1,2) (0,2) (1,2) (2,2) (3,2) (4,2)\}$

Agora faça o esboço das mesmas e confirme geometricamente suas conclusões.

Quando da realização da atividade 39, a primeira observação de um aluno foi que todas tinham o mesmo domínio, e por ter alertado a todos tirou-se dos demais a oportunidade de tal visualização, em seguida outro acrescentou que estava em ordem crescente, e assim foi fácil determinarem a monotonicidade de cada uma. Apresentaram um pouco de desconfiança na questão c) pois, pela repetição da imagem 4 alguns não se sentiram seguros em verificar se a mesma era crescente ou não, mas a seguir convenceram-se e assim a questão d) não teve dificuldade nenhuma.

Atividade 40

Sejam $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e a função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -3x$. Determine se f é estritamente crescente, estritamente decrescente ou nem crescente nem decrescente.

Justifique sua resposta:

- i) geometricamente (trabalhando com o sentido das flechas)
- ii) fazendo uso da simbologia matemática utilizada em (*) e (**)

Atividade 41

Sejam $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e a função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x + 1$. Determine se f é estritamente crescente, estritamente decrescente ou nem crescente nem decrescente.

Justifique sua resposta:

- i) geometricamente (trabalhando com o sentido das flechas)
- ii) fazendo uso da simbologia matemática utilizada em (*) e (**)

Atividade 42

Sejam $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e a função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Determine se f é estritamente crescente, estritamente decrescente ou nem crescente nem decrescente.

Justifique sua resposta:

- i) geometricamente (trabalhando com o sentido das flechas)
- ii) fazendo uso da simbologia matemática utilizada em (*) e (**)

Atividade 43

Considere uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x$. Determine se f é estritamente crescente, estritamente decrescente ou nem crescente nem decrescente. Justifique sua resposta:

- i) geometricamente (trabalhando com o sentido das flechas)
- ii) fazendo uso da simbologia matemática utilizada em (*) e (**)

Atividade 44

Considere a uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -7x$. Determine se f é estritamente crescente, estritamente decrescente ou nem crescente nem decrescente. Argumente:

- i) geometricamente (trabalhando com o sentido das flechas)
- ii) a simbologia matemática utilizada em (*) e (**)

As observações são as mesmas para as atividades de 40 a 44, haja visto que foram realizadas primeiro pelos alunos e depois houve minha intervenção. A atividade foi realizada de forma rápida e sem dificuldades, o único porém foi o fato de alguns alunos terem ligado os pontos, motivo pelo qual tive que intervir e trabalhar novamente toda a questão do domínio,

refeita a atividade mostraram-se convencidos. Apresentaram uma leve dificuldade no momento de usar a simbologia, porém menos do que em outros momentos.

AULA 13

A partir de agora passamos a tratar de funções que podem ser dadas por fórmulas, iniciando pelos mais simples tipos de fórmulas e ressaltando características particulares de cada uma delas para depois explorar a relação que existe entre as variáveis dependente e independente, no sentido de serem ou não grandezas diretas, inversas, diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou nenhum destes casos.

Ao professor: Esclarecemos que por “mais simples tipos de fórmulas” estamos nos referindo às funções Linear, Afim e Homográfica, que pode ser expressa pela fórmula $f(x)=k/x$.

A partir de agora objetivamos que os alunos sejam capazes de decidir se uma função é ou não linear ou *do tipo* linear e de identificar que toda função linear é uma relação entre grandezas diretamente proporcionais.

5.3.5 Função linear

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser escrita na forma $f(x) = kx$ é chamada Função Linear. Neste caso, a constante k é chamada coeficiente angular de f .

Uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \neq \mathbb{R}$, que pode ser escrita na forma $f(x) = kx$, onde k é uma constante real, é chamada Função *do tipo* Linear.

Neste momento apenas definimos a função Linear e a *do tipo* Linear, houve o questionamento de quando seria *do tipo* Linear, apresentei um exemplo de cada e a seguir deixei que trabalhassem a atividade 45.

Ao professor: Atente para o termo “que pode ser escrita” na definição, e o trabalho requerido do aluno em decidir nos exemplos abaixo (de c a f) sobre a possibilidade de a função ser reescrita na forma $f(x) = kx$, onde k é uma constante real. Também ressaltamos a nomenclatura “*do tipo*” que aqui introduzimos e que não é usual na literatura nem nos livros didáticos para os casos em que o domínio não coincide com o conjunto \mathbb{R} .

Atividade 45

Verifique se cada função a seguir, explicitada por uma fórmula, é ou não linear (ou *do tipo* linear), justificando sua resposta:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = -5x$

c) $f(x) = 2x + 3$

d) $f(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$

e) $f(x) = \frac{-5x^3 + 10x^2 - 5x}{x^2 - 2x + 1}$

f) $f(x) = \frac{2x^3 - 4x}{x - 2}$

g) $f(x) = 0$

Para a realização da atividade 45 foi dado aos alunos alguns minutos para que tentassem decidir sozinhos se tratavam-se de funções lineares ou *do tipo* lineares ou nenhum caso. Como foi apresentado um exemplo de cada antes de iniciar a atividade o desenrolar da mesma foi tranquilo em relação a determinar o domínio das funções e observar os casos em que não seriam lineares, mas que poderiam ser *do tipo* linear. A dificuldade toda surgiu quando nas letras (d) (e) e (f) foi necessário usar fatoração para tentar visualizar a forma kx . Aqui foi preciso parar e retomar o estudo de fatoração do Ensino Fundamental. A seguir retomamos a atividade e então os alunos conseguiram responder tranquilamente as letras (d) e (e) porém na (f) tiveram novamente um pouco de dificuldade, pois para alguns ficou mal entendido que sempre deveria ser possível a simplificação, o que não ocorria neste momento. Novamente utilizei outros exemplos para ajudá-los nas conclusões, a seguir mostraram-se convencidos.

Ao Professor: Na questão a seguir deseja-se que o aluno conclua que, quando se tem uma função (*do tipo*) linear, que pode ser dada, digamos, por $f(x) = kx$, então:

–se $k > 0$, a função (*do tipo*) linear é crescente;

–se $k < 0$, a função (*do tipo*) linear é decrescente.

Note que esta atividade requer que o aluno trabalhe necessariamente com a função (*do tipo*) linear reescrita na forma $f(x) = kx$.

Atividade 46

Para cada função apresentada na tabela a seguir, marque com um “x” as características que dizem respeito a cada uma delas e, na última coluna, complete com o valor do coeficiente angular, se este existir:

FUNÇÃO	Linear	Do tipo linear	Crescente	Decrescente	Nenhuma delas	Coeficiente angular
$f(x) = 2x$						
$f(x) = -5x$						
$f(x) = 2x + 3$						
$f(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$						
$f(x) = \frac{-5x^3 + 10x^2 - 5x}{x^2 - 2x + 1}$						
$f(x) = \frac{2x^3 - 4x}{x - 2}$						
$f(x) = 0$						

Ao Professor: Estimule seus alunos a responderem fazendo uso da expressão analítica de f .

Como você justifica cada uma de suas respostas?

Durante a realização da atividade 46, responder quanto a linear ou *do tipo* linear não houve erros, haja visto que haviam recém trabalhado na atividade 45. Quanto a ser crescente, decrescente ou nenhum dos casos, acabaram “concluindo” atribuindo valores às funções (a grande maioria usou $x=1$, $x=2$, $x=3$ etc., questionando os mesmos do por que escolher estes valores e não outros, a resposta foi porque acham mais fácil, observam-se novamente hábitos trazidos do ensino fundamental, onde privilegiam-se demais os números inteiros positivos). Neste momento foi preciso alertá-los novamente de que uma tabela pode ser útil, porém não 100% segura ao afirmarmos certas propriedades. Erroneamente alguns alunos responderam na função $f(x) = 0$ que o coeficiente angular poderia ser qualquer número pois “sempre vai dar zero”, alertei-os da confusão que estavam fazendo entre a imagem que obteriam na função e o coeficiente angular.

Algumas funções podem ser definidas por várias fórmulas, uma para cada intervalo do domínio, essas funções dizemos que são funções por partes. Você terá uma função por partes na atividade a seguir.

Ao Professor: A seguir apresentamos um exercício de aplicação no dia a dia de função definida por partes que está sendo apresentado pela primeira vez neste capítulo, todas elas *do tipo* linear. Note que, no item “a”, ao mencionarmos as taxas extras, já estamos preparando o aluno para o que será perguntado no item “c”.

Atividade 47

Uma companhia de energia elétrica calcula as tarifas relativas ao fornecimento de energia elétrica residencial padrão de acordo com a tabela a seguir:

TARIFAS DE ENERGIA ELÉTRICA	
Faixa de Consumo em kWh	Tarifa em R\$ por kWh
até 20	0,68
até 50	0,83
acima de 50	1,02

a) Considerando apenas o consumo mensal, (ignorando as taxas extras que fazem parte de uma conta real de fornecimento de energia elétrica, tais como taxa de transmissão, distribuição, encargos, ICMS, PIS, COFINS, e taxa de iluminação pública) quais seriam os valores cobrados para um consumo de 15 kWh, 30 kWh e 60 kWh?

b) Introduzindo as variáveis q e c nesta situação, q para representar a quantidade consumida em kWh e c para representar o valor a ser cobrado, é possível estabelecer uma só fórmula para representar a relação entre q e c ? Ou é necessário mais de uma fórmula, ou seja, seria uma função por partes?

c) Sabendo que as taxas extras são valores fixos cobrados além do consumo, se introduzirmos por exemplo, a taxa de iluminação pública no valor de R\$ 3,65 ao valor cobrado “ c ”, a função continuaria sendo linear? Justifique.

Observe que muitas situações práticas podem ser equacionadas matematicamente por meio de fórmulas. Este fato é uma grande vantagem, pois assim podemos determinar mais rapidamente e muitas vezes mais facilmente alguns valores procurados.

Pudemos observar, durante a realização da atividade 47 que, no item “a” não tiveram dificuldade, responderam rapidamente sem erros. No item “b” houve um pouco de dificuldade

em introduzir as variáveis q e c , pois os mesmos já estavam demais habituados a usar x e y , foi necessário retomar alguns casos, como a função que calcula o perímetro de um quadrado usando p para perímetro e l para lado, em seguida conseguiram usar as variáveis pedidas sem problemas, a maioria conseguiu observar que se tratava de uma função por partes, poucos tiveram dificuldade e tentaram escrever toda a situação com uma fórmula apenas. No item “c” dois alunos compreenderam de forma errônea pois somaram os R\$ 3,65 ao valor da tarifa por kWh, os próprios colegas os alertaram que esta taxa era um valor extra, além da tarifa, que dependia do consumo e mais a taxa, e aí observaram que desta forma não tinha o formato de função linear.

Descrição: No que segue, espera-se que os alunos se deem conta da proporcionalidade direta estabelecida entre as duas grandezas envolvidas em qualquer função linear para, a seguir, tratarmos da recíproca.

5.3.5.1 Propriedades da função linear

Ao Professor: Neste momento é necessário relembrar os tipos de relações entre duas grandezas que estudamos no início deste capítulo.

Para estudarmos algumas propriedades da função linear vamos relembrar as definições de grandezas diretas, inversas, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais estudadas no início deste capítulo. (Neste momento devemos voltar ao início deste capítulo e rever cada uma das definições de grandezas já vistas lá).

Ao Professor: Oportunize a seus alunos formas de chegarem ao raciocínio genérico esperado, com o questionamento a seguir.

Agora pergunta-se: a relação entre as duas variáveis estabelecida por uma função linear se encaixa sempre em algum dos tipos estudados?

Ao Professor: Espera-se que os alunos intuem, após alguma reflexão ou exemplos, que:

Toda função linear ou *do tipo* linear estabelece uma relação de proporcionalidade direta entre as grandezas por ela relacionadas (estas grandezas são a variável dependente y ou $f(x)$ e a variável independente x).

Foram revisadas as definições de grandezas, porém diferente do esperado, num primeiro momento nenhum dos alunos respondeu prontamente, foi preciso retomar mais um

pouco as definições, direcionando os mesmos ao que era esperado, ainda assim parecia que não estava claro para eles o que se esperava aqui. Então pedi que tomassem a função linear e observassem se havia relação entre as variáveis x e y , o que prontamente foi respondido que sim, neste momento ficou claro aos mesmos que era uma relação de proporcionalidade direta.

Ao Professor: Cabe aqui ressaltar que apenas intuição ou alguns testes não nos permitem afirmar que a afirmação acima é verdadeira em matemática, e que precisamos nos certificar de que ela é verdadeira para todas as funções lineares. Novamente reforçando que argumentação nada tem a ver com formalismo, sugerimos também que a demonstração que aqui buscamos seja feita de duas formas, uma em palavras e outra simbolicamente, conforme quadro apresentado abaixo.

Vamos neste momento demonstrar esta importante propriedade para funções lineares ou *do tipo* lineares:

Resolução em palavras:	Resolução fazendo uso da simbologia matemática:

Ao Professor: Demonstração Sugerida:

Tomemos uma Função Linear ou *do tipo* linear, digamos, dada por $f(x) = kx$. Denotando por y a variável dependente temos que variável dependente e independente se relacionam através da fórmula $y = kx$.

Uma propriedade da proporção direta é que os valores de uma das grandezas “ y ” e os correspondentes valores da outra grandeza “ x ”, baseado na definição, determinam sempre o mesmo quociente, quaisquer que sejam os pares (x, y) escolhidos.

Ora, no caso da função linear ou *do tipo* linear acima, temos, para quaisquer valores não nulos x_1, x_2 escolhidos para a variável independente x (desde que pertencentes ao domínio da função, caso estejamos tratando de uma função *do tipo* linear):

$$y_1/x_1 = kx_1/x_1 = k \text{ e } y_2/x_2 = kx_2/x_2 = k.$$

Portanto a função f estabelece uma relação de proporcionalidade direta entre as grandezas y e x .

O que você acaba de fazer acima (tanto na primeira quanto na segunda coluna), é o que em matemática chamamos de demonstração para a afirmação “Toda função linear estabelece uma relação de proporcionalidade direta entre as grandezas por ela relacionadas”. Uma demonstração nada mais é do que uma justificativa/argumentação completa para uma afirmação em matemática, independentemente de termos feito uso de simbologia matemática.

Aos alunos, “demonstrar” ainda é algo muito novo e na concepção dos mesmos complicada. Fazendo a resolução em palavras notei que ficou muito mais fácil a compreensão dos mesmos para a seguir utilizar a simbologia. Não conseguiram sozinhos fazer a demonstração usando simbologia, mas conseguiram acompanhar sem dificuldade a construção da demonstração feita por mim, conforme a sugestão apresentada. Ao final, notei uma certa satisfação em terem acompanhado uma demonstração sem apresentarem dificuldades e participando da construção da mesma.

Atividade 48

Confirme a veracidade da propriedade acima, via definição, para as funções Lineares a seguir:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = -5x$

Ao verificarmos a propriedade da função linear, foi preciso retomar as definições de grandezas e como já falado anteriormente os mesmos tiveram que ser induzidos a concluir a propriedade, logo aqui na atividade 48 não tiveram dificuldade em fazer a verificação, quase todos justificaram que em “a” $f(x)$ dividido por x resultava na constante 2 e em “b” resultava na constante -5 , poucos alunos não se posicionaram, porém ao serem questionados responderam que concordavam com os argumentos dos colegas.

5.3.5.2 Esboço do gráfico de uma função linear

Objetivo(s): Que o aluno conclua que:

– o gráfico de uma Função Linear é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, e que no caso de coeficiente angular positivo (negativo) trata-se de uma função monótona crescente (decrecente);

– no caso da função nula, temos para gráfico uma reta horizontal (precisamente o eixo das abscissas);

– no caso de uma função *do tipo* linear teremos uma reta suporte para o gráfico, porém não contínuo.

Ao Professor: Espera-se que na próxima atividade o aluno inicie o seu raciocínio apelando para o uso de uma tabela de valores. Recomenda-se que seja reforçado com os alunos que uma tabela, apesar de incapaz neste caso de identificar a função de maneira unívoca por se tratar de uma função com domínio infinito pode servir como recurso interessante para, a partir dela, serem geradas conjecturas. Espera-se que a conjectura gerada seja a de que a representação do gráfico é uma reta. Explore também o fato de que esta reta particularmente passa pela origem do sistema cartesiano ou nas *do tipo* linear tem uma reta suporte, mas sem que esta conclusão seja obtida por tabela de valores (é muito tradicional os livros didáticos chegarem a esta conclusão exclusivamente a partir de tabelas, o que consideramos uma prática falha na educação matemática), mas sim pela demonstração destes fatos. Sugere-se que os alunos sejam também incentivados a relacionarem o sinal do coeficiente angular com a inclinação desta reta (ou reta suporte, no caso de função *do tipo* linear).

Atividade 49

Esboce o gráfico de cada uma das funções Lineares, até aqui trabalhadas:

i) $f(x) = 2x$

ii) $f(x) = -5x$

Após a construção dos esboços, pergunta-se:

a) Você encontrou alguma forma conhecida como esboço das funções acima? Qual forma geométrica você observa em relação aos esboços traçados?

b) Podemos generalizar e dizer que a forma geométrica que Você encontrou coincide com o gráfico da função?

Ao Professor: Na próxima pergunta espera-se que o aluno conclua que a inclinação de uma reta está associada ao sinal do coeficiente angular. Caso isto não ocorra, tente direcioná-los a

este raciocínio.

c) Qual a principal diferença entre os traçados de i) e ii)?

Antes de discutir com os alunos os resultados encontrados por eles, foi dado um tempo para que trabalhassem sozinhos e tentassem chegar a suas conclusões. A grande maioria usou tabelas para determinar pontos do gráfico, a seguir questionei-os se os pontos usados eram suficientes. A turma ficou dividida no momento da resposta, pois vários achavam que sim, e aos que achavam que não, questionei-os sobre a razão de não ser suficiente e para minha satisfação a resposta que obtive foi que “não, pois o domínio é o conjunto dos Reais, logo não bastam apenas alguns valores”, resposta que considerei muito boa, pois nota-se que já estão se preocupando com a questão do domínio da função mesmo antes de responderem a outros questionamentos. Ao passar às perguntas, em “a” a resposta foi imediata, que seria uma reta, porém observei que aqueles que usaram apenas alguns valores (construíram tabelas) já saíram ligando os pontos em forma de reta sem terem garantia disso. Passamos à pergunta “b”, e ao questioná-los da possibilidade de generalizar, eles responderam que não era possível se não provássemos primeiro, o que me deixou satisfeito também, pois pude observar que estão em busca da prova matemática antes de concluir/generalizar o que observam. Na pergunta “c” não responderam ao esperado de imediato, foi preciso usar mais dois exemplos para que os mesmos notassem o que estava sendo questionado, porém, feito isso, não tiveram dificuldades em responder o esperado.

“O gráfico de toda função linear é sempre uma reta”

Ao Professor: O aluno deve perceber que para $x = 0$ teremos imagem nula e portanto, observa-se que o gráfico, neste caso, sempre passa na origem.

O que acontece com toda função *do tipo* $f(x) = kx$ quando $x = 0$?

Ao trabalhar o questionamento dado, a respeito de $x = 0$ não houve dificuldade em responder que teríamos $f(0) = 0$. Questionei os alunos o que isto representaria no gráfico, e a maioria respondeu que teríamos o ponto $(0, 0)$, novamente questionei-os sobre o que isto representaria, imediatamente um deles respondeu que era a origem, então alertei os mesmos que isto aconteceria sempre no caso da função linear, visto que, independentemente do valor de k para $x = 0$, sempre teríamos o ponto $(0, 0)$, sendo que eles concordaram sem dúvidas.

Na atividade 50 nossa expectativa é que os alunos concluam que o gráfico é uma reta

porém é interrompido para valores não pertencentes ao domínio da função.

Atividade 50

Esboce o gráfico de cada uma das funções *do tipo* Lineares até aqui trabalhadas:

$$\text{i) } f(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{-5x^3 + 10x^2 - 5x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{iii) } f(x) = 0$$

Após a construção dos esboços, pergunta-se:

a) Você encontrou alguma forma conhecida como esboço das funções acima? Qual forma geométrica você observa em relação aos esboços traçados?

b) Podemos generalizar e dizer que a forma geométrica que Você encontrou coincide com o gráfico da função?

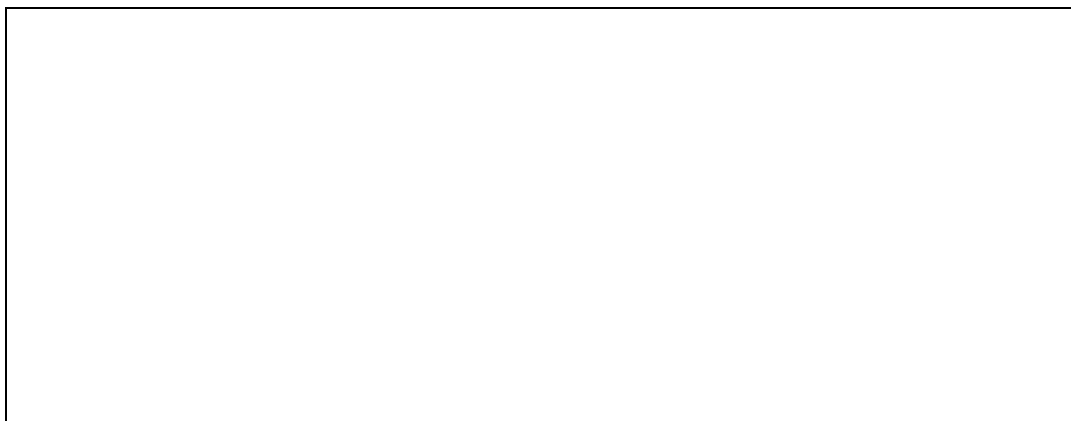
Como o enunciado da atividade já menciona que se tratam de funções *do tipo* lineares, os alunos primeiramente foram buscar a forma $f(x) = kx$, e a seguir já começaram a responder que o gráfico se tratava de reta, pois já haviam feito o mesmo na atividade 49. Neste momento foi preciso intervir, pois eles não haviam se dado conta do problema gerado pelo domínio das funções apresentadas, questionei-os se desta vez as funções eram válidas para todos os números reais e a resposta foi unânime que não, então questionei os mesmos da influência disto no gráfico? Houve um certo instante de silêncio, voltei a questionar os mesmos, e em seguida um dos alunos me respondeu que “para os números que não estão no domínio não vale, então não pode ter gráfico nesses pontos”, tive que alertá-los que os tais pontos citados pelo mesmo não existem visto que não estão definidos no domínio e portanto o gráfico se interrompe nesses pontos, tracei o esboço dos mesmos alertando do que deve acontecer para os valores não definidos no domínio da função, os mesmos concordaram. No caso da função $f(x) = 0$ observaram imediatamente que não tínhamos problema de domínio porém tiveram dificuldade tentando encontrar a inclinação da reta, foi preciso comparar com um caso de função linear (ou *do tipo*) crescente e um decrescente e pedir que comparassem com o que concluíram a pouco a respeito das mesmas. Logo um aluno deu-se conta que, neste caso, não temos inclinação na reta, que a função é constante, questionei o mesmo em relação à posição desta reta no sistema cartesiano e o mesmo não conseguiu me responder, a seguir alertei a todos do que ocorre neste caso, sendo que houve concordância do aluno e também dos

demais.

“O gráfico de toda função *do tipo* linear é sempre uma reta, porém não continua”

Tente, no quadro abaixo, fazer uma argumentação completa, a ponto de podermos decidir se as afirmações acima são ou não verdadeiras. Você pode ou não fazer uso de simbologia matemática. Reiteramos: a não utilização da simbologia matemática não torna o seu argumento inválido ou menos rigoroso.

Ao Professor: Use a simbologia para escrever a demonstração feita pela argumentação dos seus alunos.



Ao Professor: Demonstração Sugerida:

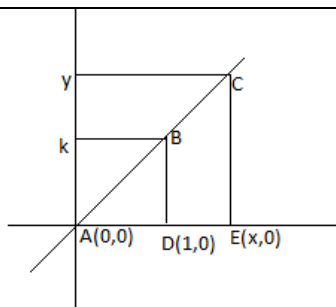
Tomando uma função *do tipo* $f(x) = kx$ teremos que os pontos $A = (0,0)$ e $B = (1, k)$ pertencem ao gráfico desta função. Tomemos a reta que liga esses dois pontos, e seja $C = (x, y)$ um outro ponto qualquer desta reta.

Se $D = (1, 0)$ e $E = (x, 0)$, são as projeções dos pontos B e C sobre o eixo x , vemos que os triângulos retângulos ADB e AEC são semelhantes, por semelhança de triângulos, o que implica que esses triângulos possuem lados proporcionais. Logo:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA} \rightarrow \frac{k}{1} = \frac{y}{x} \rightarrow y = kx.$$

Como as coordenadas de $C (x, y)$ satisfazem $y = kx$ temos que $C (x, y)$ pertence ao gráfico da função.

O que demonstra que o gráfico é uma reta que passa na origem.



Importante: A demonstração acima nos permite afirmar não só que uma reta serve de esboço para o gráfico de uma função linear como – mais exato ainda – a representação do gráfico é uma reta.

E que vantagem podemos tirar deste fato?

Um dos princípios da geometria nos diz que “Por dois pontos passa uma e só uma reta”. Para esboçar o gráfico de uma função linear, podemos fazê-lo com um mínimo de trabalho, resumindo-nos a uma tabela de uma única linha, pois já sabemos que um dos pontos é a origem do sistema cartesiano ortogonal, então basta determinarmos outro ponto.

No caso da função *do tipo* Linear, devemos primeiramente nos ater ao domínio da mesma, observando que a reta é interrompida nos pontos cuja abscissa não está definida no domínio da função.

Para a atividade 51 esperamos que o aluno observe que a diferença está apenas no caso do gráfico em “b” ser interrompido em $x = -2$.

Atividade 51

Construa o gráfico das funções:

a) $f(x) = 5x$

b) $f(x) = \frac{5x^2 + 10x}{x + 2}$

Que diferença você observa entre os traçados de ambos os gráficos?

No desenvolvimento da atividade 51 os alunos não tiveram dificuldade alguma em construir o gráfico em ambos os casos, apenas 3 alunos não encontraram diferença alguma, porém foram imediatamente corrigidos pelos colegas, que acertaram imediatamente.

Na atividade 52 esperamos que os alunos consigam determinar o coeficiente angular por meio de um exercício prático.

Atividade 52



Fonte: <http://www.oqueeu fiz nas ferias.com.br/blog/2010/11/ouro-preto-minas-gerais/>

A imagem acima reproduz uma das ladeiras da cidade de Ouro Preto em Minas Gerais, e nos mostra a inclinação da rua e a maneira como as edificações são feitas para se driblar esse detalhe. Olhando para a situação gerada estime o valor do coeficiente angular gerado pela inclinação desta ladeira.

Durante a atividade 52, primeiramente alertei os alunos que deveriam usar régua graduada para esta atividade. Os mesmos não tiveram dificuldade para o cálculo, questionei-os quanto à razão de tamanha rapidez em determinar o mesmo, sem ser necessária minha orientação, e obtive como resposta o fato de que já sabiam como proceder, pois já haviam usado um triângulo para provar que o gráfico era uma reta, então bastou usarem o triângulo aqui.

Ao Professor: Note que a questão acima oportuniza uma pesquisa sobre a maior declividade de acesso permitida para automóveis, caminhões, bicicletas, cadeirantes, pedestres. Esta questão será tratada no capítulo de funções afins.

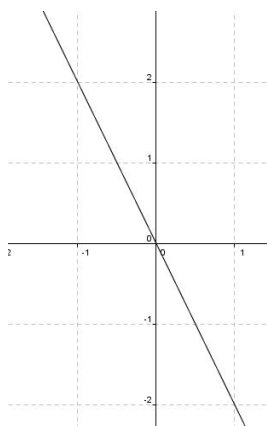
A partir de agora esperamos que o aluno consiga, a partir do gráfico de uma função linear, estimar o valor do seu coeficiente angular e assim determinar a fórmula aproximada para a mesma.

Atividade 53

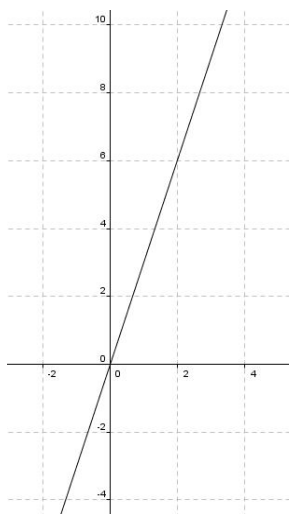
Ao Professor: Tente levar seus alunos a concluírem que o valor de k ocorre quando a variável independente x for igual a 1, isto é, $k = f(1)$. Nos casos em que não for possível obter k por meio de $x=1$, como no segundo esboço a seguir, oriente-os para o fato de que o conhecimento de um único par pertencente ao gráfico é suficiente para determinar o coeficiente angular.

Sabendo que cada esboço abaixo diz respeito a uma função linear (ou *do tipo* linear), estime o valor do coeficiente angular bem como uma fórmula para a função por ele representada:

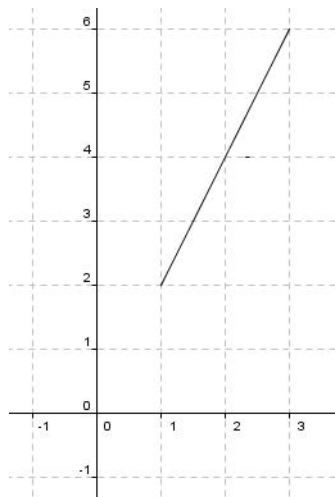
1)



2)



3)



Nos esboços 1 e 2 não houve dificuldades para a determinação do coeficiente angular, alertei-os para a facilidade de determinar quando $x = 1$, ao passo que fui imediatamente alertado por um aluno de que no caso 2 não era visível o par para $x = 1$, então aproveitei para questioná-los a respeito do que fazer se isto não fosse conhecido, vários responderam que podia ser qualquer outro ponto, alguns tiveram um pouco de dúvida por não haver a necessidade de saber dois pontos (já que para uma reta é necessário ter dois pontos para o traçado), porém alertei-os que eram sabidos dois pontos sim, sendo um deles a origem, mostraram-se convencidos e então passamos ao esboço 3, neste houve uma certa dificuldade/dúvida se se tratava de uma reta ou apenas um segmento de reta, questionei os mesmos do que mudaria se fosse apenas o segmento, imediatamente um aluno respondeu que seria o domínio, questionei os demais se estavam de acordo e obtive como resposta que sim.

Na atividade 54 esperamos que os alunos consigam determinar a fórmula da função linear conhecendo um único par ordenado pertencente ao gráfico.

Atividade 54

- Sabendo que o par ordenado $(1, 3)$ pertence ao gráfico de uma função linear, obtenha a fórmula que representa essa função.
- Obtenha a fórmula da função linear cujo gráfico contém o par ordenado $(-2, -14)$.
- Existe alguma função linear cujo gráfico contenha os pontos $(1,3)$ e $(-2,12)$? Justifique.

Ao desenvolver a atividade 54, um aluno questionou imediatamente se a atividade era idêntica à 53 só que sem esboço, respondi com a pergunta “vocês acham que sim ou não?” e unânimes responderam que sim, assim não tiveram dificuldade em realizar a atividade, somente na pergunta “c” alguns tiveram dificuldade em montar a fórmula da função e verificar, porém a maioria conseguiu rapidamente realizar a atividade montando a fórmula da função com o par (1, 3) e usando o par (-2, 12) apenas para testar se existia ou não a função, os que não conseguiram foram ajudados pelos colegas que se deram conta já na primeira tentativa.

AULA 15

Nossa expectativa é que o aluno consiga identificar, a partir da definição, que a mesma é uma generalização da Função Linear.

5.3.6 Função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser escrita na forma $f(x) = kx + b$, onde k e b são constantes reais, é chamada Função Afim. Neste caso, a constante k é chamada coeficiente angular e a constante b é chamada coeficiente linear.

Uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \neq \mathbb{R}$, que pode ser escrita na forma $f(x) = kx + b$, onde k e b são constantes reais, é chamada Função *do tipo* Afim.

Ao Professor: O comentário a seguir serve para que o aluno se dê conta que toda função Afim é uma generalização da função Linear.

Inicialmente observe que se $b=0$ então teremos a função Linear $f(x) = kx$, justificando-se assim para k a mesma nomenclatura “coeficiente angular” na função afim.

Ao Professor: Ressaltamos novamente a expressão “que pode ser escrita” na definição acima, observando o que ocorre nos itens c, d e e na atividade a seguir.

Atividade 55

Verifique se as funções a seguir, são ou não funções afim ou *do tipo* afim, justificando sua resposta.

a) $f(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = -3x + 1$

c) $f(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$

d) $f(x) = \frac{2x^2 + 6x}{2x}$

e) $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2}$

Os alunos responderam a atividade de forma muito rápida, justificando que já haviam feito este trabalho na função Linear, não foi preciso intervenção minha para a resolução do mesmo.

Esperamos que o aluno observe que a função Afim de coeficiente linear não nulo não envolve mais grandezas diretamente proporcionais, mas ainda grandezas diretas ou inversas.

5.3.6.1 Propriedades da função afim

Para estudarmos algumas propriedades da função afim vamos lembrar as definições de grandezas diretas, inversas, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais estudadas no início deste capítulo.

Após lembrar as definições de Grandezas responda aos seguintes questionamentos:

Ao Professor: Depois de voltar ao início deste capítulo e rever cada uma das definições de grandezas já vistas lá, discuta com seus alunos como se justifica a questão (a) e apresente a eles o termo “contraexemplo” bem como o seu significado. A seguir estimule-os de forma que concluam que a função Afim gera uma relação direta ou inversa entre grandezas e a seguir trabalhe a demonstração deste fato.

- a) O tipo de relação entre as variáveis dependente e independente proporcionada por uma função Linear, a saber, proporcionalidade direta, ainda se mantém para a função Afim? Justifique sua resposta.
- b) Alguma dessas definições encaixa-se na relação proporcionada por uma função afim?

Alguns alunos, sem analisar o suficiente deram ao item “a” a resposta sim, porém foram imediatamente corrigidos pelos colegas, que observaram que não podia ser relação diretamente proporcional pois não gerava uma constante a razão entre as grandezas x e y , considerei a resposta muito boa, pois realmente mostraram que dominaram a condição lá quando analisaram a função Linear. A seguir os questioneei qual seria essa relação então e a resposta foi que seriam apenas grandezas diretas, questioneei-os novamente pois claramente não estavam se dando conta da relação de grandezas inversas, pedi que observassem a diferença entre os itens “a” e “b” da atividade 55, o que gerou algumas discussões em pequenos grupos, após um pouco de questionamentos e debates tivemos a resposta aguardada.

Toda função Afim f relaciona as variáveis dependente $y = f(x)$ e independente x de forma direta ou inversa, diferente da Função Linear que relacionava as grandezas sempre de forma diretamente proporcional.

Ao Professor: Cabe aqui ressaltar que apenas intuição ou alguns testes não nos permitem afirmar que a afirmação acima é verdadeira em matemática, e que precisamos nos certificar de que ela é verdadeira para todas as funções lineares. Novamente reforçando que argumentação nada tem a ver com formalismo, sugerimos também que a demonstração que aqui buscamos seja feita de duas formas, uma em palavras e outra simbolicamente, conforme quadro apresentado abaixo.

Convidamos Você a demonstrar esta afirmação:

Resolução em palavras:	Resolução fazendo uso da simbologia matemática:

Confirme a propriedade demonstrada acima para as funções Afins a seguir:

a) $f(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = -3x + 1$

A resposta neste momento foi muito rápida, apenas confirmaram a discussão já ocorrida na atividade 55.

Queremos no bilhete ao professor que é apresentado a seguir, que os alunos observem que a propriedade continua valendo, porém é preciso observar o domínio.

Ao Professor: Questione seus alunos, neste momento, se a propriedade continua valendo para as funções *do tipo Afim*?

Após o questionamento alguns alunos ficaram pensativos, mas em seguida obtive a resposta que “achavam que sim”, questionei-os do por que acharem, e um dos alunos imediatamente respondeu que “deve ter alguma coisa com o domínio”, em seguida a maioria concordou, trabalhamos então um pouco mais a questão do domínio e a seguir concluíram que continua válida porém temos que observar o domínio da função. Cabe ressaltar aqui que os alunos já estão tendo por hábito analisar o domínio de qualquer função antes de partirem para

outros questionamentos.

Na atividade 56 nossa expectativa é que os alunos não tenham dificuldade na execução da atividade.

Ao Professor: Na atividade a seguir temos um problema que traz uma aplicação prática da Função *do tipo Afim*.

Atividade 56

Suponhamos que uma determinada operadora de telefonia oferece os planos a seguir.

Plano A: Taxa fixa de R\$ 30,00, inclusos 20 minutos, mais R\$ 0,80 por minuto excedente.

Plano B: Taxa fixa de R\$ 50,00, inclusos 30 minutos, mais R\$ 0,60 por minuto excedente.

Plano C: R\$ 1,80 por minuto, sem taxa fixa.

Pergunta-se:

- a) Quais serão os valores cobrados pela operadora, em cada plano, para uma utilização de 15 min, 40 min e 60 min, por mês?
- b) Qual será o plano mais econômico para uma utilização de 50 min por mês?

Conforme nossas expectativas para a atividade 56, a resposta veio mais rápido que o esperado, talvez por já terem trabalhado com uma situação parecida lá na função Linear. Não vi dificuldades na resolução da mesma e também todos apresentaram respostas corretas.

Ao Professor: A pergunta a seguir requer que os alunos representem, por meio de fórmulas, as três situações apresentadas no enunciado do nosso problema.

- c) Se escolhermos as variáveis A, B e C para representar os valores cobrados: A para o plano A, B para o plano B e C para o plano C e m para representar os minutos utilizados, que fórmulas representariam os três planos citados? Em cada caso, qual é a variável independente e qual é a dependente?

O cálculo dos valores no item “a” foi feito de forma correta, porém agora no momento de escrever as fórmulas que representam cada plano, tiveram uma certa dificuldade em escrever, foi preciso questioná-los várias vezes a respeito, fui colocando no quadro as sugestões dadas pelos alunos e calculando os valores do item “a” para que os mesmos vissem que as sugestões de fórmulas até então não estava corretas, a dificuldade toda se mostrou no termo “excedente”, após mais alguns exemplos, utilizando números, os mesmos se

convenceram de como deveria ser escrito. Noto que ainda aqui há uma certa resistência em usar a simbologia, mesmo depois de já terem concordado na importância do uso de demonstrações e simbologia.

Queremos a seguir que o aluno conclua que o gráfico de uma Função Afim é uma reta, porém diferente da Linear, nem sempre passa pela origem do sistema cartesiano.

5.3.6.2 Esboço do gráfico da função afim

Ao Professor: Explore a construção do gráfico da Função Afim de modo a levar seus alunos a intuírem o fato de ser uma reta e que neste caso, na maioria das vezes, não passa pela origem, aproveitando para explicitar as intersecções do mesmo com os eixos. Também leve seus alunos a constatar que o sinal do coeficiente angular determina a inclinação dessa reta. Não deixe de salientar que, no entanto, intuição e experimentação não é demonstração (porque a Matemática não é uma ciência empírica, e sim uma ciência dedutiva).

Atividade 57

Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo:

i) $f(x) = 2x + 6$

ii) $f(x) = -5x + 10$

iii) $f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{6x}$

a) Você encontrou alguma forma conhecida como esboço dos gráficos das funções acima? Qual forma geométrica você observa em relação aos esboços traçados?

Na atividade 57 os alunos foram rápidos quanto a determinar que tratava-se de uma reta, alguns ficaram se “enrolando” um pouco ao tentar que a mesma passasse pela origem. Questionei os mesmos da razão do gráfico da Linear passar pela origem? Neste momento tive que passar a pergunta “e” antes das demais, visto que a mesma trata disso. Obtive como resposta o fato de que na função Linear $f(0)$ é 0, logo temos o par $(0, 0)$, então questionei-os se na função Afim o mesmo ocorre? Obtive algumas respostas que sim e outras que não, porém observei que os alunos estavam “chutando”, não haviam se concentrado. Pedi que novamente analisassem o que aconteceria na função Afim, e agora obtive a seguinte resposta de um aluno: “na i) a $f(0)$ é 6, na ii) a $f(0)$ é 10 e na iii) não dá pra calcular, pois o zero não tá no domínio”, perguntei aos demais se concordavam, e a resposta foi sim, a seguir perguntei então o que isso implica e obtive novamente do mesmo aluno, que: “então não passa no ponto $(0, 0)$ ”. Pedi então que me respondessem a pergunta “e” já neste momento, e a resposta foi

que “não”, aproveitei para questioná-los “onde então passa a reta se $x = 0$?”, e imediatamente obtive a resposta de um aluno: “no coeficiente linear”. Voltei ao gráfico de i) e ii) para que os mesmos confirmassem, o que ocorreu.

b)Podemos generalizar e dizer que a forma geométrica que Você encontrou coincide com o gráfico da função?

Conforme as expectativas, esperava que os mesmos respondessem que sim, porém os mesmos me responderam que “teremos que provar primeiro”. Fiquei satisfeito com a resposta pois observa-se que os mesmos já estão não mais aceitando as “verdades” por simples deduções e sim estão esperando provas reais das mesmas.

Ao Professor: Espera-se que na pergunta a seguir o aluno conclua que o gráfico da Linear sempre passa pela origem, enquanto o da Afim nem sempre.

c)Que diferença Você encontrou com relação ao gráfico de uma função linear?

Como a pergunta “a” havia gerado muita discussão, a resposta esperada para o item c) foi a obtida. Não houve questionamentos nesse momento.

Ao Professor: Na pergunta a seguir, espera-se que os alunos respondam que a diferença está na inclinação da reta, caso isso não ocorra naturalmente, tente induzi-los a isso.

d)Qual a principal diferença entre os traçados de i) e ii)?

Aqui os alunos responderam novamente de forma correta, levando em consideração a discussão que já haviam feito na função Linear. Um aluno deu a seguinte resposta: “igual ao que ocorreu na Linear, se o coeficiente angular for positivo é crescente e se for negativo é decrescente”, questionei os demais se concordavam e a resposta foi que sim.

e)A reta que representa o gráfico da função Afim passa pela origem do sistema cartesiano ortogonal? Justifique.

Esta questão foi tratada quando respondemos a letra “a”.

“O gráfico de uma função Afim é sempre uma reta”.

Tente, no quadro abaixo, fazer uma argumentação completa, a ponto de podermos decidir se a afirmação acima é ou não verdadeira. Você pode ou não fazer uso de simbologia matemática. O não uso da simbologia matemática não torna o seu argumento menos válido.

Ao Professor: Use a simbologia para reescrever, caso necessário, a demonstração feita pela argumentação dos seus alunos.

Qual a vantagem que a demonstração acima nos proporciona?

Da mesma forma que na função Linear, o gráfico de uma função afim é sempre uma reta, e portanto, para esboçá-lo, basta-nos determinar dois pontos do gráfico.

A única diferença entre os gráficos de uma função Linear e de uma função Afim é que a reta que representa o gráfico da função Afim nem sempre passa pela origem.

Como os alunos já haviam demonstrado na função Linear que o gráfico era uma reta, aqui na função Afim não houve dificuldade alguma em deduzirem e aceitarem o fato de o gráfico também ser reta, inclusive acompanharam de forma muito participativa a demonstração. Um dos alunos questionou o fato de na função Linear preocuparem-se apenas com um ponto e agora serem dois, tive que alertá-los que, em se tratando de reta, sempre é necessário dois pontos para o correto traçado, porém no caso da função Linear um deles já é conhecido antes de iniciarmos qualquer discussão a respeito (no caso a origem), como o aluno e os demais concordaram com a explicação passamos para a atividade seguinte.

Na atividade 58 queremos que o aluno visualize geometricamente as soluções determinadas algebricamente na atividade 57.

Atividade 58

Esboce o gráfico das funções da Atividade 57 e responda as mesmas perguntas, agora geometricamente.

Realmente, como a atividade 57 foi muito discutida, e também em seguida foi feita a demonstração, os alunos foram muito rápidos em construir os gráficos aqui nesta atividade.

Achei oportuno neste momento, antes de passar a atividade 59, que os mesmos fizessem a comparação entre os gráficos das seguintes funções $f(x) = 2x$, $f(x) = 2x + 5$, $f(x) = 2x + 8$, $f(x) = 2x - 3$. Deixei que os mesmos trabalhassem na sua construção e quando obtive a confirmação de que todos haviam acabado resolvi questioná-los sobre a principal diferença encontrada entre todos os gráficos traçados, a primeira resposta obtida e que obtive concordância de todos foi que o coeficiente angular de todas era igual e, portanto, todas as funções eram crescentes (boa resposta), então questionei-os sobre o que mais observavam. Para minha surpresa não obtive a resposta esperada (que os gráficos nada mais são do que o deslocamento da função Linear $f(x) = 2x$), ficaram em silêncio, então pedi aos mesmos que tentassem sobrepor no mesmo sistema cartesiano todos os gráficos traçados, eis que então veio a seguinte resposta: “são paralelos, muda onde corta o eixo y”, boa resposta, pois ficamos algum tempo discutindo o ocorrido. Então surgiu uma pergunta interessante: “nas *do tipo Afim*, fica tudo igual né professor, só vai ter um buraco no gráfico quando o x não tiver no domínio né?”, ótima colocação pois aproveitei para construir com os alunos alguns gráficos de funções *do tipo Afim* que tivessem coeficiente angular 2, ao final mostraram-se bem participativos e convencidos das diferenças e características entre as funções Linear, Afim e *do tipo Afim*.

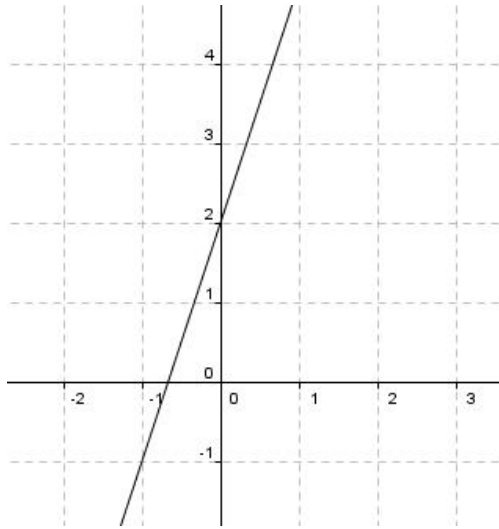
AULA 16

Para a atividade 59 queremos que o aluno consiga determinar uma fórmula para a função do tipo afim representada no esboço, e que se dê conta de que são necessários pelo menos dois pontos para determiná-la.

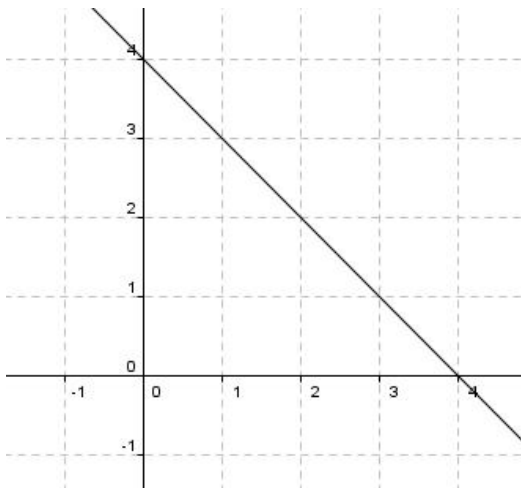
Atividade 59

Sabendo que as curvas abaixo são retas, determine as funções *do tipo Afim* representadas nos gráficos:

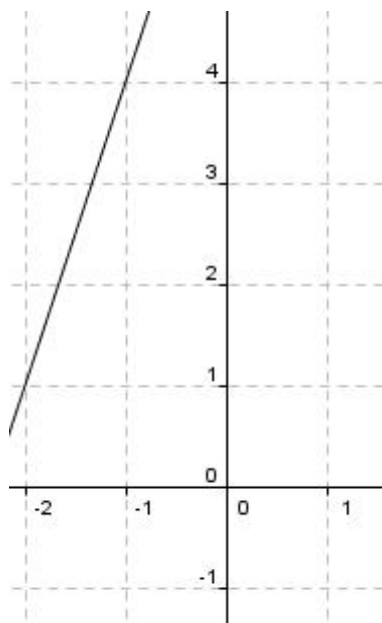
1)



2)



3)



Após determinar cada uma das funções representadas, raciocine: pode-se determinar o coeficiente angular e o coeficiente linear apenas observando o gráfico?

O início da atividade foi um pouco tumultuada, pois a maioria lembrou da função Linear, e tentou determinar o coeficiente angular pelo $x = 1$, tive que alertá-los que embora o gráfico seja reta também, há características diferentes. Quanto ao coeficiente linear, a maioria não teve dificuldade em 1 e 2, porém em 3 reclamaram que o mesmo não estava mostrado no gráfico. Como no início do ano letivo havíamos feito uma grande revisão incluindo sistemas lineares, vários foram direto ao uso de sistemas (tomando dois pares ordenados conhecidos), sem tentar pela visualização. Alguns ainda tiveram dificuldade, pois “imaginaram” que o coeficiente angular seria o ponto em que a reta corta o eixo x, para que corrigissem esse pensamento errôneo pedi aos mesmos que observassem os gráficos que construíram logo após a atividade 58, e se era isso que acontecia, neste momento a resposta foi unânime que não, então passamos à discussão da situação apresentada, no final “deduziram” que a maneira mais segura para eles seria encontrar os coeficientes usando sistemas lineares.

Ao Professor: Atenção: A próxima atividade só deve ser trabalhada caso seus alunos já tenham estudado Progressões Aritméticas.

Na atividade extra queremos que o aluno observe que as funções *do tipo* linear e *do tipo* afim com domínio em Progressão Aritmética geram imagens também em Progressão Aritmética.

Atividade Extra:

Ao preencher a tabela a seguir, escolha para valores da variável independente das funções números em Progressão Aritmética e a seguir calcule a imagem correspondente em cada uma das funções apresentadas.

Domínio	Imagem para $f(x) = 3x$	Imagem para $f(x) = 3x + 2$

Ao Professor: Trabalhar com progressões é uma forma de perceber o comportamento distinto das funções, basta observar o comportamento das quadráticas, das exponenciais e das logarítmicas em comparação com as lineares e afins. Sugere-se que retome esta discussão futuramente, por ocasião do estudo de tais funções.

Questionamento: é verdadeira ou falsa a afirmação “toda função (*do tipo*) afim leva progressões aritméticas em progressões aritméticas”?

A atividade foi realizada com certa rapidez pelos alunos, porém o que observou-se é que a maioria usou para domínio a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7. Questionei os mesmos sobre o motivo desta escolha, e a resposta que mais apareceu foi que “é mais fácil”, sugeri então que os mesmos mudassem a sequência, aí alguns usaram uma sequência de números ímpares, outros escolheram um primeiro valor e a seguir atribuíram uma razão para a PA, enfim, efetuaram a atividade de forma correta. No momento de responder ao questionamento a

resposta foi quase unânime que sim, pedi que cada um que usou domínios diferentes e citasse os mesmos e fizemos um comparativo, porém não houve discordância de que PA leva em PA.

No quadro abaixo, tente escrever uma argumentação completa, por meio de palavras e simbologia matemática, para justificar a resposta dada ao questionamento acima.

Por palavras:	Por meio da simbologia matemática:

Ao professor: Saliente aos seus alunos de que acima (com ou sem simbologia matemática), acabamos de fazer novamente o que chamamos em matemática de demonstração.

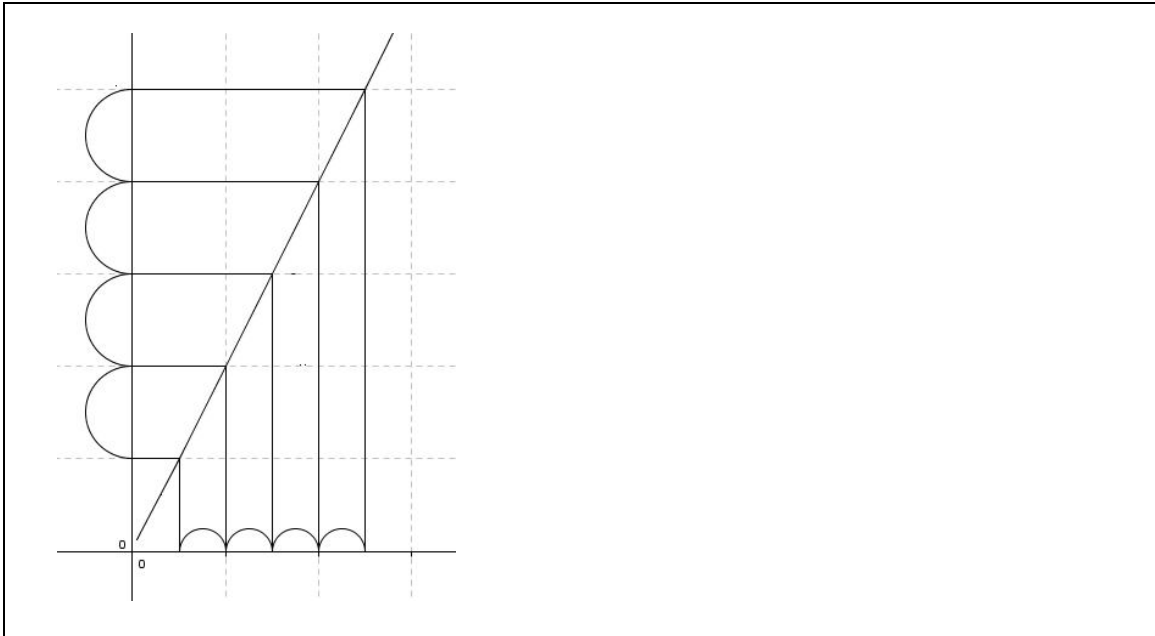
A demonstração foi acompanhada de forma participativa pelos alunos, observei aqui uma certa segurança dos alunos em relação a demonstrações.

Para a atividade a seguir esperamos que os alunos observem geometricamente que PA leva em PA no caso de funções Lineares ou Afins.

Vamos agora demonstrar geometricamente que, toda vez que o domínio de funções *do tipo* Linear ou *do tipo* Afim for uma PA, sua imagem também será PA.

GEOMÉTRICA:

Ao Professor: Sugere-se evidenciar, no desenho abaixo, os termos das progressões aritméticas, bem como as razões das mesmas.



Portanto, agora podemos afirmar que toda vez que o domínio de uma função *do tipo* linear ou de uma função *do tipo* afim for um conjunto cujos elementos estão em Progressão Aritmética, as correspondentes imagens também estarão em Progressão Aritmética, ou seja, pelas funções *do tipo* Linear e *do tipo* Afim, PA leva em PA.

Os alunos usaram os valores que empregaram no quadro da atividade extra para se certificarem desta propriedade.

Ao Professor: Sugere-se trabalhar neste momento desenhando algumas rampas no quadro, atribuindo medidas e pedindo aos alunos para que estimem o coeficiente angular. Para que as rampas de acesso a pessoas com necessidades especiais sejam construídas, existem algumas regras que devem ser seguidas: elas podem ser encontradas na ABNT NBR 5090. Na atividade a seguir, sugerimos que o professor explique aos alunos o significado da porcentagem aqui empregada.

Contextualizando: Segundo a ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) NBR 5090, as rampas de acesso a portadores de necessidades especiais devem ter inclinações máximas de acordo com a seguinte fórmula:

$$i = (h \times 100)/c,$$

onde

i é a inclinação, em %,

h é a altura do desnível,

c é o comprimento da projeção horizontal (h e c devem estar na mesma unidade de medida).

Ainda segundo especificações da ABNT o percentual máximo de inclinação é de 10%. Vamos supor que deve ser construída uma rampa de acesso com 5% de inclinação. Pergunta-se:

a) a função que determina esse comprimento em relação à altura da desnível é uma função de que tipo?

b) qual o comprimento da projeção horizontal desta rampa, se ela tiver 1m de altura, 2m de altura, 3m de altura e 4m de altura?

Alguns alunos tiveram um pouco de dificuldade pela maneira como a fórmula foi apresentada e, principalmente, por terem tentado usar a porcentagem na forma centesimal, foi preciso intervir e alertá-los para o uso correto da porcentagem. Em seguida, ao responderem a pergunta “a”, não tiveram dificuldade em responder que tratava-se de uma função Linear, já na pergunta “b” calcularam corretamente, porém alguns não conseguiram entender o “comprimento” obtido para a rampa, bastou que fizesse alguns desenhos ilustrando os cálculos para que a dúvida fosse sanada.

AULA 17

Nosso objetivo para a próxima pergunta é que o aluno determine o domínio da função

$f(x) = \frac{k}{x}$ e, por meio dele, se dê conta que o gráfico de uma função desta forma não irá interceptar o eixo y .

5.3.7 Funções que podem ser expressas por $f(x) = \frac{k}{x}$.

Aqui iremos tratar do caso específico da função real de variável real definida por $f(x) = \frac{k}{x}$, com k uma constante real não nula.

Qual o domínio de uma função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$? O que significa isto geometricamente?

Como os alunos já estão bem acostumados a trabalhar com o domínio das funções, a resposta para o domínio foi dada de forma muito rápida, porém ao terem que responder o que significava geometricamente demoraram um pouco, tiveram que ser um pouco induzidos por mim, porém em seguida lembraram que já havia ocorrido em outros momentos (principalmente na função *do tipo* Afim) de o zero não estar no domínio da função. Um dos alunos fez o seguinte comentário: “se a função não vale pra $x = 0$, então não passa na origem do sistema cartesiano”, observa-se que o mesmo se baseou nas retas das funções Lineares e Afins (ou *do tipo*), porém ninguém deu a resposta esperada, tive que retomar o significado de um número não pertencer ao domínio e então alertá-los para o fato de o gráfico então não interceptar o eixo y , o que fez com que concordassem imediatamente pois lembraram que toda vez que construímos gráfico das funções *do tipo* Linear e *do tipo* Afim existia todo um “eixo” vertical que o gráfico não poderia interceptar.

Ao Professor: Sugere-se que a prova pedida nesta atividade seja feita por comparação de domínios e/ou por absurdo.

Uma função desta forma pode ser *do tipo* Linear? Pode ser *do tipo* Afim? Justifique sua resposta.

Ao Professor: Demonstrações sugeridas:

1º demonstração: comparando domínios

Ao tomarmos uma função da forma $f(x) = k/x$, observamos que o domínio matemático é $\mathbb{R} - \{0\}$ enquanto as funções $f(x) = kx$ e $f(x) = kx + b$ têm domínio matemático \mathbb{R} , logo, por comparação, a função $f(x) = k/x$ não pode ser *do tipo* linear nem *do tipo* afim.

2º demonstração: por absurdo.

Queremos provar que $f(x) = k/x$ não é linear. Por absurdo vamos supor que $f(x) = k/x$ é linear.

Para isto deve existir um número real c , c e $k \neq 0$, tal que $k/x = f(x) = cx$ para todos os valores x do domínio de f , logo $k/x = cx \rightarrow cx^2 = k \rightarrow x^2 = k/c \rightarrow x = \pm \sqrt{k/c}$ o que é um absurdo.

Portanto $f(x) = k/x$ não é linear.

Prove que a função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$ também não é uma função Afim.

Atividade 62

Verifique se as funções dadas abaixo podem ou não ser expressas na forma $f(x) = \frac{k}{x}$. Em

caso afirmativo, especifique seus domínios:

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{5x + 10}{x^2 + 2x}$

c) $f(x) = \frac{5x^2}{x}$

Durante a atividade 62 alguns alunos apresentaram dificuldade em simplificar a letra b, ao verificar o que estava ocorrendo, vi que tentavam colocar x em evidência no numerador, após alertar os mesmos da impossibilidade do que estavam tentando, conseguiram verificar. Na letra c, alguns perguntaram se o termo ao quadrado não deveria estar no denominador, alertados de que não, simplificaram de forma correta.

Com o questionamento a seguir esperamos que os alunos observem que a função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$ gera uma relação entre grandezas inversamente proporcionais.

5.3.7.1 Propriedades da função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$ com $k \neq 0$.

Recomendamos a Você mais uma vez lembrar as definições de Grandezas Diretas, Inversas, Diretamente Proporcionais e Inversamente Proporcionais.

Ao Professor: Oportunize a seus alunos formas de chegarem ao raciocínio genérico esperado com esse questionamento.

Após, responda ao seguinte questionamento: a relação entre a variável dependente e a variável independente estabelecida por uma função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$ é alguma das relações especiais mencionadas acima? Justifique.

Como as definições já haviam sido retomadas duas vezes anteriormente, agora, ao retomar pela terceira vez, antes de acabar a retomada das definições os alunos já responderam que x e y tratavam-se de grandezas inversamente proporcionais. Considerei satisfeito com a rapidez com que chegaram à conclusão esperada.

Toda função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$ estabelece uma relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas por ela relacionadas (estas grandezas são a variável dependente y ou $f(x)$ e a variável independente x).

Ao Professor: Mais uma vez, reforçando que demonstração nada tem a ver com formalismo e simbologia, sugerimos que a demonstração a seguir seja feita de duas formas, uma em palavras e outra simbolicamente, conforme quadro apresentado abaixo.

Vamos neste momento demonstrar esta importante propriedade para funções da forma $f(x) = \frac{k}{x}$:

Resolução em palavras:	Resolução fazendo uso da simbologia matemática:

Na atividade 63 esperamos que primeiro os alunos simplifiquem as funções e a seguir concluam a veracidade da propriedade apresentada.

Atividade 63

Verifique a veracidade da propriedade acima para as funções da forma $f(x) = \frac{k}{x}$ a seguir:

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{5x + 10}{x^2 + 2x}$

Como já haviam simplificado as funções, na atividade 62, este passo foi apenas confirmado. A seguir, alguns alunos tentaram estabelecer a razão entre x e y (ou $f(x)$), observaram que não encontravam uma constante, alertei-os para a resposta que os próprios tinham me dado quando revisamos as definições de grandezas, que o que estavam fazendo era válido para grandezas diretamente proporcionais, convencidos de que estavam usando o raciocínio errôneo, lembraram-se que para grandezas inversamente proporcionais o produto entre as variáveis é que deve ser constante. Verificaram que realmente nos dois casos isto ocorre e, portanto, a propriedade que já haviam demonstrado era válida.

Na atividade 64 nossa expectativa era de que o aluno conseguisse determinar uma fórmula para a função homográfica da qual estamos aqui tratando.

Atividade 64

Precisamos dividir o total de R\$ 500,00 entre algumas pessoas.

- a) Quanto cada uma receberá se forem 10 pessoas? 20 pessoas? 40 pessoas?
- b) Qual fórmula representa a quantidade $q=q(x)$ que cada pessoa receberá, sendo x o número de pessoas?
- c) Qual o domínio contextual desta função?

Aqui os alunos já estão mais “espertos” e fazem comparações com as outras funções já estudadas. Para responder a letra “a” nenhum aluno respondeu de forma errônea, ao passarmos à letra “b”, um aluno fez a seguinte pergunta: “é só colocar x no lugar do 10 ou do 20 ou do 40 né professor?”, perguntei aos demais se concordavam e a resposta foi sim, então

passamos a letra “c”. Aí veio a minha pergunta: “por que estamos empregando o termo contextual?”, imediatamente um aluno respondeu: “igual quando a gente montou a função do perímetro e da área, que dependia dos lados e tinha que ser positivo, aqui divide por pessoas, e pessoas tem que ser inteiros”, resposta muito boa, mostrou que ainda lembrava de um momento bem anterior a esse, questionei os demais se concordavam e a resposta foi sim, porém lancei outro questionamento: “o domínio então é só números inteiros?”, a maioria retornou que sim, porém um dos alunos deu-se conta: “os inteiros tem números negativos também, e aqui é pessoas, só pode ser inteiro e positivo”, resposta esperada. Como todos concordaram, de imediato, passamos à próxima atividade.

Ao Professor: Trabalhe a questão a seguir com seus alunos, de forma que os mesmos visualizem que, para domínios convenientes, as funções *do tipo* k/x são monótonas, como na atividade anterior, por exemplo.

Curiosidade: Algumas funções *do tipo* $\frac{k}{x}$ são monótonas. Quando isto ocorre?

Foi preciso retomar a definição de função monótona para que os alunos pudessem responder. Muitas dúvidas e muitas respostas erradas nessa atividade, talvez respondessem de forma mais rápida caso já conhecessem o gráfico da função, porém a ideia aqui era responder ao questionamento apenas utilizando a função, alguns na tentativa de acertar usaram tabelas, o que neste trabalho estamos tentando não utilizar, devido a fragilidade em dar afirmações baseado em tabelas, porém acabou “funcionando”, a resposta correta veio de um aluno que usou uma tabela: “se a gente usar só x positivo ou só x negativo a função fica só crescente ou só decrescente”, considerei válida a resposta porém aproveitei para discutirmos juntos essa condição sem usar tabelas, apenas observando o domínio, o que mostrou-se válido, pois a maioria concordou ao final da discussão.

No próximo quadro esperamos que o aluno consiga visualizar/identificar o esboço que representa o gráfico de uma função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$, e que observe que existem assíntotas não só no esboço, como também no gráfico tanto em $x=0$ como em $y=0$.

5.3.7.2 Esboço do gráfico da função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$.

Ao Professor: Induza seus alunos de forma a observarem que o gráfico não pode ser uma reta, visto que já provaram que a função não é linear, nem afim. Questione-os para que participem sugerindo ideias do que imaginam que possa ser o gráfico de uma função dessa forma. A seguir, alerte-os para as assíntotas existentes em $x=0$ e em $y=0$ (é necessário introduzir o conceito de assíntota neste momento). Sugerimos abaixo um conceito de assíntota e que faça alguns esboços com seus alunos para que os mesmos se familiarizem com este conceito. Nossa sugestão de conceito apresenta uma forma mais simples do que a definição formal por julgarmos que alunos de 1º ano de ensino médio teriam dificuldade em entender o conceito por meio de limites e para curvas em geral.

Sugestão:

Assíntota vertical: A reta de equação $x = a$ é dita assíntota vertical para o gráfico de uma função f se a não pertence ao domínio da f , mas existem valores no $D(f)$ tão próximos de a quanto quisermos, ou seja, f está definida para valores de x tão próximos de a quanto quisermos.

Assíntota horizontal: A reta de equação $y = b$ é dita assíntota horizontal para o gráfico de uma função f se b não pertence à imagem da f , mas existem valores na $Im(f)$ tão próximos de b quanto quisermos.

Definir assíntotas foi fácil, pois os mesmos já estavam habituados com as mesmas desde o gráfico das funções *do tipo* Linear e *do tipo* Afim, mais especificamente com a assíntota vertical, pois necessitaram usar quando traçaram esboços das funções *do tipo*, nos pontos onde não estava definido no domínio das funções, porém o termo assíntota até aqui não havia sido empregado. Foram apresentados alguns exemplos de assíntotas para que os mesmos relembassem e, principalmente, observassem o caso da assíntota horizontal e a seguir passou-se a atividade seguinte.

Atividade 65

Ao Professor: Embora saibamos que tabelas não são formas seguras de se esboçar um gráfico, sugerimos que, neste caso, a abordagem comece com o uso de tabelas, mas em seguida informe seus alunos de que o gráfico é uma hipérbole, porém a demonstração deste fato se torna extremamente difícil para um aluno de 1º ano de Ensino Médio, portanto não trataremos da demonstração do mesmo.

Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

b) $f(x) = -\frac{3}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2x}$

d) $f(x) = -\frac{1}{2x}$

e) $f(x) = \frac{3x}{x^2}$

Como já citado anteriormente, a ideia deste trabalho é não usar tabelas para construir gráficos, porém considerando que estamos tratando com alunos de 1º ano de Ensino Médio, achamos um tanto complicado para os mesmos, e aqui sugeri, conforme bilhete ao professor, que usassem tabelas, os mesmos concordaram, lembrando-me que já haviam usado para responder a “curiosidade” anteriormente, muitos conseguiram obter o esboço de forma correta, alguns tentavam encontrar uma reta, tive que alertá-los que não estávamos mais tratando de função Linear ou Afim, foi necessário esboçar todos os itens de i a v no quadro para que os mesmos se certificassem dos traçados. A questão das assíntotas teve que ser muito frisada, principalmente o motivo de termos uma assíntota horizontal em $y = 0$. Considero que as expectativas foram atendidas até mais rapidamente do que o esperado, pois participaram muito da discussão no momento em que traçamos os esboços.

Nossa expectativa para a atividade 66 é que um problema simples pode ser representado por uma função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$.

Atividade 66

Para construir um muro, 10 homens levam nove dias. Mantendo o mesmo ritmo, quantos dias levarão, para construir o mesmo muro,

a) 5 homens?

b) 15 homens?

c) 20 homens?

d) 30 homens?

e) Para um número x de homens, quantos dias seriam necessários? Podemos representar essa situação por meio de uma função? Se sim, de que forma e qual seria seu domínio?

Os alunos responderam muito rapidamente a atividade e de forma correta, porém vi que isto ocorreu pois esta atividade é muito parecida com a atividade 64, que já havia sido discutida.

Atividade Extra:(Provão 2002)

A margem de erro em uma pesquisa eleitoral é inversamente proporcional à raiz quadrada do tamanho da amostra. Se, em uma pesquisa com 3600 eleitores, a margem de erro é de 2%, em uma pesquisa de 1600 eleitores ela será de:

a) 2,5% b) 2,75% c) 2,82% d) 3% e) 3,125%

Durante a atividade extra os alunos usaram a condição de inversamente proporcionais de forma correta, ou seja, deram-se conta que o produto das grandezas eleitores e porcentagem deveria ser constante, porém a grande maioria apresentou resultados errados, por não ter prestado atenção que tratava-se da “raiz quadrada”, e usaram os números de eleitores. Ao constatar o erro, pedi que relessem o enunciado com calma, e de fato vários deram-se conta do erro que haviam cometido, corrigido o erro obtiveram o resultado correto.

AULA 18

Esperamos a partir de agora que o aluno compreenda a definição de função inversa e, quando existir a inversa, o mesmo saiba determiná-la.

5.3.8 Funções inversíveis

5.3.8.1 Inversibilidade de funções reais de variável real

Introdução:

Certamente no Ensino Fundamental você escutou falar que a subtração é a operação inversa da adição e que a divisão é a operação inversa da multiplicação. Assim, por exemplo, a ação de somar 3 é desmanchada pela ação de subtrair 3 e vice-versa, a ação de multiplicar por 2 é desmanchada pela ação de dividir por 2.

Na linguagem de funções, as ações ou operações de somar 3 e de subtrair 3 podem ser expressas, respectivamente, pelas funções $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x - 3$.

Ao Professor: Ressaltamos que restringimos as operações a “somar 3” e “subtrair 3” simplesmente para podermos tratar de função de UMA variável real apenas. Sugere-se que você leve seus alunos a reconhecerem $f(x) = x + 3$ como uma outra forma de escrever a ação “somar 3”.

Observe que, com a linguagem de funções, é possível também mostrar que a ação de subtrair 3 desmancha a ação de somar 3 e vice-versa:

de fato, para um valor a ,

	<i>aplicando f</i>		<i>aplicando g</i>	
a		$b = f(a) = a + 3$		$g(b) = b - 3 = a + 3 - 3 = a$

voltando assim ao valor inicial a .

Ou seja: g desmancha a ação de f .

	<i>aplicando g</i>		<i>aplicando f</i>	
a		$b = g(a) = a - 3$		$f(b) = b + 3 = a - 3 + 3 = a$

Analogamente para um valor a

Ou seja: f desmancha a ação de g .

Na linguagem de funções dizemos também que duas funções f e g são inversas uma da outra, se uma desmancha a ação da outra.

Ao Professor: Estimule seus alunos a responderem a questão raciocinando com palavras, antes de “confirmarem a conta”.

Atividade 67

Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa e justifique.

A inversa da função f dada por $f(x) = 3x + 5$ é a função $g(x) = \frac{x-5}{3}$.

Durante a atividade 67 os alunos mostraram que estavam aptos quanto a operações que desmancham a ação uma da outra (subtração desmancha adição, divisão desmancha multiplicação, etc.). Porém na hora de se certificarem se g era inversa da f , o primeiro aluno a responder disse que não seria pois o mesmo encontrou para $g(x)$ a seguinte função $g(x) = \frac{x}{3} - 5$, sendo que a maioria da turma concordou com o mesmo, porém observou-se que os mesmos não estavam desmanchando as operações na ordem correta.

Na atividade 68 esperamos que os alunos consigam obter as inversas quando existirem.

Ao Professor: Fazer um exemplo de como seria “em palavras”.

Atividade 68

Determine, caso exista, a inversa da função f (sugestão: no primeiro momento interprete com palavras a ação da f para conseguir decidir se esta ação pode ser desmanchada), conforme o exemplo:

Função	Ação em palavras	Inversa em palavras (caso exista)	Lei da inversa, que por ora vamos denotar por g (caso exista)
a) $f(x) = x + 5$	somar 5	subtrair 5	$g(x) = x - 5$
b) $f(x) = x - 7$			
c) $f(x) = 2x + 3$			
$f(x) = x^2 + 9$			
$f(x) = 5 - 2x$			

Observamos, durante a resolução da atividade, que em b) não tiveram dificuldade alguma, porém em c) repetiu-se o erro da atividade 67, porém neste momento retomei a discussão da atividade 67 para que os alunos observassem o erro que estava ocorrendo e a seguir refazer a atividade novamente. Observa-se que compreenderam pois ao refazerem foi

de forma correta. Em d) a ação foi registrada de forma correta, porém na hora de “escrever” a inversa foi sugerida pelos alunos três formas de escrita, porém incorretas, foi preciso discutir muito esta questão, pois eu esperava que os mesmos tivessem se dado conta que para desmancharmos x^2 teríamos $\pm\sqrt{x}$, a grande maioria havia esquecido deste “detalhe” porém após instigá-los um pouco deram-se conta e ao mesmo tempo observaram que neste momento não poderíamos ter inversa, como era esperado. Em e) o problema maior esteve no sinal negativo do -2 , pois os alunos escreveram corretamente a ação e a inversa, porém no momento da escrita da inversa (chegaram a $\frac{x-5}{-2}$) o sinal negativo atrapalhou, e com um pouco de dificuldade os mesmos entenderam que $\frac{-x+5}{2}$ é a mesma coisa porém escrita de forma mais clara.

Se existir a inversa para uma função f então, toda vez que tivermos $f(a) = b$, denotando por g a inversa da f , teremos necessariamente $g(b) = a$ (note que só assim g tem chances de desmanchar a ação de f). Isto deve ocorrer para todos os valores a do $D(f)$ e b do $D(g)$.

O esquema acima nos ajuda a comprovar que uma desmancha a ação da outra.

De fato:

	<i>aplicando f</i>		<i>aplicando g</i>	
a	→	$b = f(a)$	→	$g(f(a)) = a$,

Bem como:

	<i>aplicando g</i>		<i>aplicando f</i>	
a	→	$b = g(a)$	→	$f(g(a)) = a$,

Qual a importância das conclusões às quais chegamos acima?

Observe que, quando temos uma função f que possui inversa g , necessariamente ocorre que $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$. Queremos mostrar que esta condição pode ser utilizada para determinarmos a inversa da função quando esta não for evidente.

Na atividade 69 queremos que os alunos consigam obter as inversas por meio da condição especificada.

Atividade 69

Vamos verificar a conclusão acima utilizando as mesmas funções da atividade 68.

Determine, caso exista, a inversa da função f , conforme o exemplo:

Ao Professor: Observe que esta atividade tem o mesmo enunciado que a atividade 68, porém neste momento o aluno deve ser estimulado a fazer uso da forma $f(g(x)) = x$ para determinar a inversa.

Função	Verificação
a) $f(x) = x + 5$	Se existir a inversa g , teremos $f(g(x)) = x$. Como $f(g(x)) = g(x) + 5$ concluímos $g(x) + 5 = x$, se e só se, $g(x) = x - 5$.
b) $f(x) = x - 7$	
c) $f(x) = 2x + 3$	
d) $f(x) = x^2 + 9$	
e) $f(x) = 5 - 2x$	

Enquanto realizavam a atividade 69 alguns alunos tiveram um pouco de dificuldade em “substituir” a $g(x)$ em x . Porém para aqueles que tiveram um pouco de dificuldade em realizar a atividade apenas utilizando as operações, o uso da condição facilitou a obtenção da inversa, inclusive em d) ficou mais visível a questão do $\pm \sqrt{x}$, inclusive um aluno anteviu o problema e lançou a seguinte pergunta: “como vai ficar em d?”, e também podemos ter funções que sejam bem complicadas de inverter pelo simples desmanchar das operações (ex:

$$f(x) = \frac{2x+5}{3x-7}), \text{ o que a condição permite determinar sem erros.}$$

Atividade 70

Ao Professor: Nesta atividade (tomando f função e g sua inversa) queremos que o aluno encontre a função inversa e também observe que existindo a inversa, se $f(a) = b$ teremos $g(b) = a$. Os itens a, b, d e e servem para que o aluno observe essa característica de uma função e sua inversa.

Tomando a função $f(x) = 2x + 5$, verifique se a função f possui inversa e em caso afirmativo, denotando por g a inversa, determine os valores de:

- a) $f(1)$
- b) $f(3)$
- c) $g(7)$
- d) $g(11)$

Na atividade 70 os alunos determinaram a inversa de forma fácil, muitos apenas “desmanchando” as operações e outros usando a condição $f(g(x)) = x$, da mesma forma que no momento de responderem aos itens c e d alguns deram-se conta que como $f(1) = 7$ e $f(3) = 11$ teríamos, pelo que já foi estudado e concluído, que $g(7) = 1$ e $g(11) = 3$, o que considero bom, alguns calcularam utilizando a fórmula obtida para a inversa, porém concordaram na não necessidade após debatermos a questão.

Queremos com a atividade 71 preparar os alunos para a definição de função injetora que será apresentada em breve.

Atividade 71

Ao Professor: Esta atividade serve como preparação para definirmos função injetora e mostrarmos, mais adiante, que toda função inversível é injetora. Para responder ao item c) estimule seus alunos a argumentarem exclusivamente em torno dos itens (a) e (b).

Dada a função $f(x) = x^2$, determine:

- a) $f(3)$
- b) $f(-3)$
- c) A inversa de f existe? Justifique.

Durante a realização da atividade 71 os itens a e b não apresentaram dificuldade alguma em serem respondidos, no momento de responderem ao item c, alguns tentaram usando a condição $f(g(x)) = x$ e deram-se conta que a inversa não existe neste caso, porém alguns alunos observaram que $f(3)$ e $f(-3)$ são iguais a 9 e (utilizaram diagrama), se

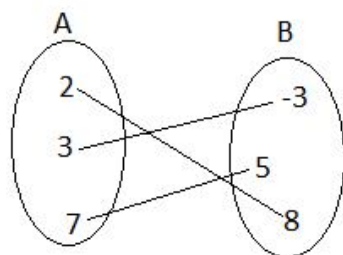
tentássemos inverter teríamos necessariamente dois pares com a mesma abscissa, o que não caracteriza função. Como acabou o tempo da aula antes que pudéssemos discutir a atividade mais a fundo, ela foi retomada no início da aula seguinte, agora sim apresentando as razões de não termos inversa por meio de diagramas e pares ordenados.

AULA 19

Atividade 72

Ao Professor: A próxima atividade serve para que os alunos concluam que, no caso de existir a inversa, cada imagem precisa ser imagem de um único elemento do domínio e que, desta forma, a imagem da função passa a ser domínio da inversa, e vice-versa. Atenção: estaremos utilizando diagramas, porém é preciso alertar aos alunos que não é a representação mais precisa para o conjunto dos números reais, mas para uma melhor compreensão estaremos adotando neste momento.

Observe a função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ representada no diagrama abaixo:



Pergunta-se:

- É possível representar por extensão a função f ?
- É possível inverter a função f ? Por quê? Justifique.
- Quem são o domínio e a imagem da função inversa de f ?

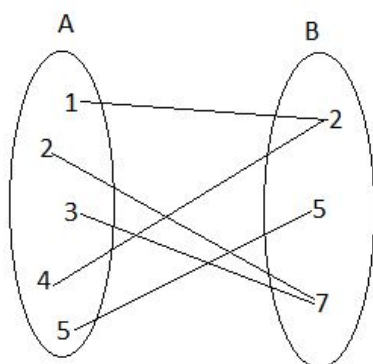
Antes de realizarem a atividade 72 imaginamos que os alunos teriam alguma dificuldade no item b, pois visualizando por meio de diagramas poderiam surgir dúvidas (por exemplo, sobrar elementos no conjunto de partida ao invertermos), porém foram muito rápidos em afirmar que sim, é possível inverter, questionei-os a respeito e vários justificaram que, invertendo a ordem dos pares ordenados, continuávamos satisfazendo as condições i) e ii) da definição de função. Considero muito satisfatória a resposta obtida, pois nota-se que os mesmos realmente aprenderam a definição de função, concordei com os mesmos e mesmo

assim discuti com os mesmos para que não fizessem confusão quando usassem diagramas. O item c também foi respondido de forma correta, e aqui achei que poderia haver dúvidas pela representação por diagramas, mas não houve.

Para a próxima atividade nossa expectativa é que os alunos observem que valores diferentes do domínio tem imagens iguais e portanto não teremos inversa.

Atividade 73

Observe a função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ representada no diagrama abaixo:



Pergunta-se:

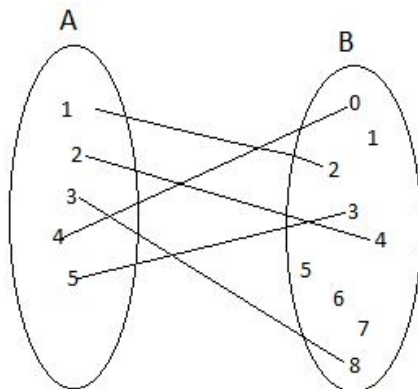
- $f(1)$
- $f(4)$
- é possível inverter a função f ? Justifique.

Os alunos foram rápidos e responderam de forma correta. Ao questioná-los a respeito, observaram que alguns pares ao serem invertidos teriam abscissas iguais e, portanto, não satisfaz as condições i) e ii) da definição de função, como já haviam observado na atividade 72. Como estamos querendo que os mesmos concluam que uma função seja inversível caso seja injetora, já fui induzindo os mesmos a observarem o que foi ocorrendo nas atividades 72 e 73.

Ao Professor: A próxima atividade serve para que os alunos certifiquem-se do que foi tratado nas atividades 72 e 73.

Atividade 74

Tomando uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ representada pelo diagrama abaixo:



É possível inverter essa função f ? Justifique.

Para a atividade 74 tivemos nossas expectativas atendidas, pois os alunos novamente responderam que, se tomarmos os pares que formam a função e os invertermos, continuam satisfeitas as condições i) e ii) da definição de função. Para a pergunta que será feita a seguir, foram colocadas no quadro novamente as três situações das atividades 72 a 74.

Atenção:

Você poderá encontrar em alguns livros didáticos e, até em provas de concurso, a notação f^{-1} para indicar a inversa de uma função f . Optamos por não utilizar esta nomenclatura para evitarmos um erro muito comum de interpretação que ocorre ao se perguntar um valor específico para uma função inversa. Por exemplo, ao se perguntar $f^{-1}(5)$ poderia ocorrer de alguém tentar determinar da forma $f^{-1}(5) = \frac{1}{f(5)}$, o que é totalmente equivocado.

Afinal, quando podemos garantir que uma função é inversível?

Ao Professor: “Quando não repete valores” é a resposta esperada dos alunos.

A resposta esperada para a pergunta feita era “quando não repete valores”, porém como as três atividades questionadoras apresentaram diagramas, a resposta dada por um aluno e que teve a concordância de todos os demais foi: “só se quem for imagem leva só uma flechada”, concordei com o mesmo, questionei os demais se realmente concordavam, obtive um sim como resposta. O próximo passo foi traduzir com os mesmos o que a resposta do aluno significava. Para evitar que ficassem presos ao diagrama, perguntei como seria olhando o conjunto de pares ordenados, neste momento um dos alunos respondeu o que mais próximo do esperado estava: “não pode ter dois y iguais”. Observei que o “dois” fora dito pois a atividade 73 apresenta duas vezes duas repetições do y, questionei-os se só dois ou poderia ser mais, e a maioria concordou que dois ou mais, aí considerando que os mesmos já haviam me dado a resposta esperada, embora em outros termos, finalizamos a discussão.

ATENÇÃO:

As atividades 72, 73 e 74 servem para intuir um fato muito importante nas funções inversas: “para que a inversa exista é necessário que cada elemento da imagem seja imagem de um único elemento do domínio”

5.3.8.2 Função injetora

A condição mencionada acima nos motiva a definir o que chamamos de função injetora.

Função Injetora: Uma função f é dita injetora quando não existem dois elementos distintos no domínio com mesma imagem. Em outras palavras: para $\{x_1, x_2\} \in D(f)$ temos $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Ou ainda: se $x_1, x_2 \in D(f)$ são tais que $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.

Ao Professor: A atividade a seguir deve ser resolvida usando valores distintos do domínio (na letra d induza seus alunos a criarem um contraexemplo a fim de completarem a argumentação matemática).

Atividade 75

Verifique se as funções a seguir são injetoras ou não, justificando sua resposta.

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = 5x + 7$

c) $f(x) = \frac{10}{x}$

d) $f(x) = x^2 + 5$

Esperava um pouco de dificuldade na resolução e também que não usassem tabelas. A grande maioria escolheu dois valores distintos para x e os aplicou, obtendo neste caso as quatro funções apresentadas como injetoras, pedi aos mesmos que usassem então os valores 3 e -3 que continuam sendo distintos, então concluíram que o item d não era injetora, porém questionei-os se obtendo as respostas dessa forma poderiam se considerar satisfeitos, concluíram que não, haja visto o próprio erro que haviam cometido no primeiro momento, como não quis adiantar a discussão da atividade 76, trabalhei com os alunos a análise dos itens a, b e c por meio do gráfico, como ainda não trabalhamos gráfico da função quadrática apresentei o gráfico do item d alertando-os que o estudariam mais adiante, o que se mostrou muito válido pois os mesmos mostraram ter compreendido a definição de injetora vendo o gráfico.

Atividade 76

Quais das funções da atividade 75 são inversíveis?

Como era esperado, na atividade 76, os alunos identificaram imediatamente que os itens a, b e c eram inversíveis enquanto d não. Perguntei então que relação os mesmos observaram com isto, e imediatamente um dos alunos respondeu: “se tem inversa é injetora”. Todos os demais concordaram, pois é isto que as atividades 75 e 76 nos mostram.

Uma função que possui inversa é necessariamente injetora.

Vamos agora provar o que as atividades 72, 73 e 74 nos fizeram intuir.

Ao Professor: A demonstração abaixo é por absurdo, e então seria interessante retomar a ideia de uma prova por absurdo antes de apresentá-la.

Ao Professor: Prova sugerida:

Sabemos que uma função f que possui inversa g satisfaz $f(a) = b$ se e só se $g(b) = a$ (já que uma desmancha o que a outra faz e vice-versa).

Vamos supor a existência de uma função f inversível (de inversa g) mas não injetora. Então existe $b \in \text{Im}(f)$ e existem a_1 e a_2 distintos tais que $f(a_1) = b$ e $f(a_2) = b$; mas sendo g a inversa de f temos necessariamente que $g(b) = a_1$ e $g(b) = a_2$, o que é uma contradição pois neste caso g não seria função (lembre-se que a_1 e a_2 são distintos). Vemos assim que inversível e não injetora nos levam a um conflito/absurdo. Assim, para que uma função possua inversa, ela necessariamente tem que ser injetora.

Ao Professor: Intua com seus alunos de que toda função injetora é inversível. Será que é coincidência ou vale também a recíproca?

Também vale a recíproca:

Toda função injetora possui inversa.

Vamos provar que toda função injetora possui inversa:

Ao Professor: Prova sugerida:

Para que uma função seja injetora temos $\{x_1, x_2\} \in D(f)$ para $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Nas atividades acima era esperado que os alunos acompanhem as demonstrações e certifiquem-se das conclusões apresentadas.

Como esperado os alunos acompanharam as demonstrações questionando quando algum passo não havia ficado muito claro.

Antes de seguirmos nosso estudo sobre funções inversíveis e suas inversas, reflita sobre as questões abaixo:

- é verdade que toda função linear é inversível? Justifique.
- é verdade que toda função afim é inversível? Justifique.
- é verdade que toda função da forma $f(x) = k/x$, com $k \neq 0$ é inversível? Justifique.

Quando feito o questionamento acima, a resposta foi “sim” aos três questionamentos, e, como justificativa, usaram a atividade 75, que apresentou as três funções em sua aplicação, considerei o argumento dos mesmos válido. Porém não fiquei satisfeito, pois vamos em seguida analisar cada uma dessas funções de forma individual.

Para a atividade 77 esperamos que o aluno consiga inverter a função Linear (o que se espera que consiga fazê-lo facilmente, através do raciocínio “desmanchar”), e que observe que ocorre a inversão da constante de proporcionalidade.

5.3.8.3 Inversibilidade da função linear ($f(x) = kx$)

Atividade 77

Determine a inversa, caso exista, de cada uma das funções da tabela usando as duas linguagens pedidas:

Função	Linguagem de operações	Linguagem de funções
$f(x) = 0$		
$f(x) = 2x$		
$f(x) = -5x$		
$f(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$		

2

Ao Professor: Queremos que o aluno seja induzido a observar que o que ocorre é a inversão do coeficiente angular.

Observando cada função *do tipo* linear inversível e sua inversa, o que se pode observar como principal característica disto?

Será que isto vale sempre?

Durante o desenvolvimento da atividade 77, os alunos responderam, de forma muito rápida, que a inversa de uma função linear também era uma função linear, questionei o que

mais podiam ver (o esperado era em relação ao coeficiente angular ser o inverso) e surgiu a seguinte resposta: “se a função é crescente a inversa também é”, resposta esta que não estava sendo a esperada mas foi válida, incitei-os um pouco mais a respeito, e, como a resposta esperada não foi dada, pedi que comparassem o coeficiente angular de cada função com sua inversa, neste momento alguns responderam que era o “oposto” (confusão frequentemente feita pelos alunos entre oposto e inverso, já foram alertados inúmeras vezes, porém a confusão sempre volta a aparecer), questionei-os se realmente era oposto, ao passo que deram-se conta e responderam então que era o inverso um do outro. Quando questionados se vale sempre, um dos alunos imediatamente respondeu: “temos que provar”, realizamos a prova e mostraram-se então convencidos, e encerrando esta parte tivemos o comentário de um aluno: “agora nem precisa mais ficar calculando, é só inverter o coeficiente”, questionei os demais se concordavam, obtendo resposta positiva ao questionamento. Considerei satisfeitas as expectativas.

5.3.8.4 Inversibilidade da função afim ($f(x) = kx + b$)

Atividade 78

Determine a inversa de cada uma das funções da tabela usando as duas linguagens pedidas:

Função	Linguagem de operações	Linguagem de funções
$f(x) = 2x + 3$		
$f(x) = -5x + 4$		
$f(x) = \frac{2x^2 + 6x}{2x}$		

Pergunta-se: A inversa de uma função afim é sempre afim?

Observamos durante o desenvolvimento da atividade 78 que ao inverter as funções não houve nenhuma dificuldade. Quando questionados se a inversa da afim é afim a resposta foi que sim também, aproveitei aqui para questioná-los quanto ao coeficiente angular se ocorria o mesmo que na função linear e para minha surpresa a resposta foi que não, ao analisar a razão

da resposta que me foi dada observei que ocorria o seguinte, por exemplo na função $f(x) = 2x + 3$ encontraram de forma correta a inversa $g(x) = \frac{x-3}{2}$, porém ao responderem o coeficiente angular olhavam como sendo 1, ou seja, estavam esquecendo o denominador 2, discutimos então as três funções apresentadas, lembrando-os da matemática básica que está envolvida, após este alerta quanto a escrita da função deram-se conta que como na linear o coeficiente angular da inversa é o inverso do coeficiente da função.

Queremos com a atividade 79 que o aluno consiga inverter a função da forma k/x e observe que neste caso a inversa é igual à própria função. Aqui espera-se também que a inversibilidade seja facilmente constatada, pelo argumento “desmanchar”.

5.3.8.5 Inversibilidade da função da forma $f(x) = \frac{k}{x}$

Atividade 79

Verifique se cada uma das funções da tabela é inversível usando as duas linguagens pedidas:

Função	Linguagem de operações	Linguagem de funções
$f(x) = 2/x$		
$f(x) = -5/x$		
$f(x) = 3x/x^2$		

O que você observa de cada função inversível acima em relação a sua inversa?

Como nas atividades 77 e 78, durante a atividade 79, também não houve dificuldade alguma em obterem a inversa de cada função. Quando questionados a respeito do que observavam, um dos alunos deu a seguinte resposta: “os coeficientes angulares são iguais

desta vez”, tive que intervir rapidamente, pois nota-se uma pequena confusão com as funções Linear e Afim, haja visto que nunca foi falado em coeficiente angular para função desta forma, após uma rápida conversa e alertá-los do equívoco, observaram imediatamente que a inversa é igual à própria função. A seguir fizemos a prova algebricamente. Aproveitei neste momento para compararmos as três funções Linear, Afim e da forma $f(x) = k/x$, observando as características da inversa de cada uma.

Na atividade 80 queremos que o aluno consiga relacionar as funções estudadas com grandezas diretas, inversas, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

5.3.9 Relação das funções *do tipo* linear, afim e da função que pode ser dada por $f(x)$

$= \frac{k}{x}$ com grandezas diretas, inversas, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Ao Professor: Nas atividades a seguir, seus alunos deverão relacionar as grandezas de forma direta, inversa, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais ou nenhuma delas e associar, quando for o caso, a uma das funções estudadas. Observe que alguns destes exercícios foram escolhidos e adaptados a partir do questionário sondagem.

Atividade 80

Nos exercícios a seguir, verifique se existe alguma relação entre as grandezas envolvidas e, nos casos afirmativos, diga se tal relação pode ser tratada como função, e, em caso afirmativo, diga que tipo de função pode representar tal relacionamento.

Ao Professor: Neste exercício, queremos que o aluno reconheça a relação de grandezas diretas entre número de bactérias e tempo, e que a mesma não pode ser descrita por nenhuma das funções estudadas.

a) Numa cultura de bactérias, a cada hora, o número de bactérias duplica.

Se em um determinado momento temos 30 bactérias, quantas bactérias teremos 1h após? E 2h após? E 3h após? Você conseguiria representar algebricamente essa situação para qualquer número inicial de bactérias?

Existe relação entre as grandezas número de bactérias e tempo? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim.

Em caso afirmativo:

Qual é a variável independente? _____

Qual é a variável dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou (linear, afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$ ou *do tipo* de uma destas)? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual? _____

Observamos durante a atividade 80 que a primeira resposta obtida foi unanimemente sim. Na segunda pergunta, houve alguns que responderam “grandezas diretas proporcionais”, mas a maioria respondeu corretamente “grandezas diretas”. Neste momento, retomamos mais uma vez a diferença entre serem apenas diretas e diretamente proporcionais, lembrados das definições não houve mais dúvidas quanto ao tipo de relações envolvidas. Na terceira pergunta, “A relação determina uma função?” tivemos uma discussão muito interessante, aqueles que se pronunciaram responderam que sim, e neste momento um dos alunos usou o seguinte raciocínio: “vai ser função sim, se o domínio for só números inteiros e positivos, porque o problema fala que duplica a cada hora, então não sei o que acontece enquanto a hora vai passando e, como é tempo, só pode ser positivo” , este comentário gerou uma ótima discussão pois aproveitamos para retomar domínio de funções e acabamos de forma coletiva concluindo que, baseado nestas condições, temos sim uma função, no próximo item quanto a variável independente a resposta foi correta, que tratava-se das horas, mais uma vez um aluno lembrou que só usamos “hora inteira” e quanto à variável dependente responderam que deveria ser o número de bactérias, não foi preciso discutir o item pois ao questioná-los da razão de serem estas as grandezas foi da maioria o comentário que o número de bactérias depende das horas, o que é correto e portanto objetivo cumprido neste item. No item que perguntava quanto a ser uma das funções já estudadas, novamente alguns foram muito rápidos em dizer que se tratava da função linear, porém tive que intervir e questioná-los se realmente era? Neste momento um dos alunos fez o seguinte comentário: “para ser linear tem que ser grandezas diretamente proporcionais, e essas não são, são só diretas”, comentário correto do aluno. Alguns alunos não se mostraram convencidos, então tive que lembrá-los da definição de grandezas diretamente proporcionais e verificar com os mesmos que neste caso não se aplica, depois de discutido isto tive a concordância de todos, e então ao questioná-los que caso

seria, a resposta imediata de um aluno foi: “afim, porque são só grandezas diretas”, novamente questionei-os se estava correta a afirmação e muitos afirmaram que sim, neste momento questionei os mesmos se o formato desta função obtida era o da função afim, neste momento os alunos observaram que não, então questionei-os que caso seria e a resposta, agora sim a resposta esperada, que não se trata de nenhum dos casos estudados, apenas alertei-os que trata-se de uma função *do tipo* exponencial que só será estudada mais adiante.

Ao Professor: O aluno deve reconhecer a relação de grandezas inversas entre quantidade e tempo, e que não se trata de nenhuma das funções estudadas.

b) Um determinado material radioativo se reduz à metade de sua quantidade a cada 10 anos.

Existe relação entre as grandezas quantidade e tempo? () Não () Sim. Qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim. Em caso afirmativo:

Qual é a variável independente? _____

Qual é a variável dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou (linear, afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$ ou *do tipo* de uma destas)? () Não () Sim. Em caso afirmativo, qual? _____

A primeira observação feita continua sendo o fato de que se a atividade não apresenta números explícitos, os alunos acabam atribuindo valores para que possam fazer as análises necessárias e também acabam chegando a conclusões errôneas pois utilizam poucos valores. O mesmo problema apresentado na atividade anterior foi visto aqui, a maioria dos alunos usou apenas dois valores e “chegou” a suas conclusões. Concluíram errado que tratava-se de grandezas inversamente proporcionais e que era uma função da forma $f(x) = k/x$. Ao retomar os questionamentos a primeira pergunta que fiz foi se a quantidade de valores que os mesmos usaram era suficiente para responder? A partir daí vários alunos já observaram que haviam chegado a conclusões erradas. Retomei o primeiro item e imediatamente alguns alunos observaram que se tratava de grandezas inversas, mas não proporcionais, e compararam com a atividade anterior afirmando que a relação era uma função sim, mas nenhum dos casos estudados novamente. O mesmo aluno que observou a questão do domínio na atividade anterior observou novamente esta questão nesta atividade, e tivemos a concordância do restante da turma. E quanto às variáveis dependente e independente também foram rápidos e

corretos, novamente ajudados pela discussão já feita na atividade anterior.

Ao Professor: O aluno deve observar que existe uma relação entre grandezas inversas, mas não proporcionais, e que trata-se de uma função *do tipo* afim.

c) Uma vela acesa vai diminuindo de tamanho com o passar do tempo. Se a mesma começa medindo 15 cm e sabe-se que, a cada hora que passa, a mesma diminui 2 cm, qual será a altura da vela passados x horas?

Existe relação entre as grandezas altura e horas? () Não () Sim. Qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim. Em caso afirmativo:

Qual é a variável independente? _____

Qual é a variável dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou (linear, afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$ ou *do tipo* de uma destas)? () Não () Sim. Em caso afirmativo, qual? _____

Como em a) e b) foi muito discutida a questão das relações entre grandezas e verificação *do tipo* de função que pode ser ou não, os alunos foram rápidos em responder, já estão bem rápidos em verificar se as grandezas são diretas ou inversas e, em caso afirmativo, a grande maioria já usa para verificação o produto e a razão entre as grandezas para ver se é constante (isso para as diretamente e inversamente proporcionais). Quanto a identificar as variáveis na independente foram corretos em responder que eram horas, na dependente alguns por não estarem atentos ao próprio enunciado da atividade responderam que era a vela, porém claramente fazendo alusão ao tamanho(altura) da mesma. Para verificar o tipo de função envolvida pela relação entre as grandezas, muitos usaram tabelas para identificar, e a grande maioria identificou de forma correta como sendo uma função afim, inclusive muitos determinaram a fórmula da função.

Ao Professor: O aluno deve reconhecer a relação de proporcionalidade direta entre preço de venda e custo, e tratar-se de função *do tipo* linear.

d) Sabendo que, numa determinada farmácia, cada medicamento é vendido com um lucro equivalente a metade do preço de custo, qual será o preço de venda de um medicamento que tem um custo fixo x ?

Existe relação entre as grandezas preço de venda e custo? () Não () Sim. Qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim. Em caso afirmativo:

Qual é a variável independente? _____

Qual é a variável dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou (linear, afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$ ou *do tipo* de uma destas)? () Não () Sim. Em caso afirmativo, qual? _____

Como na atividade c) aqui também os alunos foram rápidos nas respostas, alguns fizeram uma pequena confusão inicial, pois analisaram o preço de venda usando apenas o lucro, porém os próprios colegas os alertaram. Corrigido este pequeno lapso as respostas foram corretas. Também como em c) usaram a condição de verificação (razão entre grandezas constante) para determinar que trata-se de grandezas diretamente proporcionais. E como já haviam identificado que trata-se de função também foram incisivos em afirmar que tratava-se da função linear.

Ao Professor: O aluno deve observar a relação diretamente proporcional entre valor a ser pago e preço de venda, e tratar-se de função *do tipo* linear.

e) Uma loja oferece um desconto de 12% sobre o preço de venda para pagamento a vista. Qual será o preço a ser pago se o preço de venda da mercadoria é x ?

Existe relação entre as grandezas valor a ser pago e preço de venda? () Não () Sim. Qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim. Em caso afirmativo:

Qual é a variável independente? _____

Qual é a variável dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou (linear, afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$ ou *do tipo* de uma destas)? () Não () Sim. Em caso afirmativo, qual? _____

No início da atividade, alguns poucos alunos cometeram o engano de usar para valor pago $0,12x$, mas foram logo alertados pelos colegas que este teria que ser o desconto, então alguns já haviam escrito direto que o valor pago era $0,88x$ e outros chegaram a esse valor fazendo $100\% - 12\%$ para chegar aos 88% , enfim, de forma correta. Não erraram na hora de identificar as variáveis como dependente e independente. Novamente pela condição de verificação determinaram como sendo grandezas diretamente proporcionais e imediatamente associaram a função linear.

Ao Professor: O aluno deve reconhecer que existe uma relação entre grandezas diretas, mas estas não proporcionais, e que trata-se de uma função *do tipo* afim.

f) Uma peça tem um custo fixo de R\$ 3,00 e mais R\$ 0,80 por cada centímetro que aumente o tamanho da peça. Qual será o valor da peça se ela tiver x cm de comprimento?

Existe relação entre as grandezas valor e comprimento? () Não () Sim. Qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim. Em caso afirmativo:

Qual é a variável independente? _____

Qual é a variável dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou (linear, afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$ ou *do tipo* de uma destas)? () Não () Sim. Em caso afirmativo, qual? _____

Para responder à pergunta do enunciado “Qual será o valor da peça se ela tiver x cm de comprimento?” a grande maioria foi rápida e correta em responder, e reponderam logo “ $3 + 0,80x$ ”, um dos alunos questionou se não seria $3,80x$, porém foi corrigido pelos próprios colegas de que “os três reais não mudam independentemente do tamanho da peça”, discuti com os mesmos a respeito e após todos concordarem passamos ao próximo item que teve alguns respondendo de forma errônea afirmando que se tratava de grandezas diretamente proporcionais, porém vi que o erro estava na tentativa de responder rápido, ou seja, não fizeram a análise antes de responder, porém vários alunos “mais ligados” deram-se conta imediatamente após a resposta dos colegas que seria apenas grandezas diretas, discuti com os mesmos se concordavam e obtive a concordância de todos. Quando perguntados se “A relação determina uma função?” com o sim da resposta veio a constatação que o que haviam escrito

era uma função afim, esse comentário foi feito por vários alunos e com a concordância dos demais, o que já respondeu a última pergunta sem nem ter sido feita. E quanto às variáveis, novamente a resposta obtida foi correta.

Para a pergunta do item g esperamos que o aluno reconheça que não há nenhum tipo de relação estudada entre as grandezas envolvidas e que portanto não temos nenhuma das funções estudadas.

Ao Professor: O aluno deve reconhecer que não existe relação direta nem inversa entre tempo e comprimento de lado.

g) Um jardineiro levou 5 horas para limpar um canteiro quadrangular com 6m de lado. Quanto tempo precisará para limpar, no mesmo ritmo, um canteiro também quadrangular, mas com o dobro do lado? E com o triplo do lado?

Existe relação entre as grandezas tempo e comprimento do lado? () Não () Sim. Qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim. Em caso afirmativo:

Qual é a variável independente? _____

Qual é a variável dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou (linear, afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$ ou *do tipo* de uma destas)? () Não () Sim. Em caso afirmativo, qual? _____

Para responder a pergunta inicial os alunos ficaram por alguns instantes efetuando cálculos, durante este tempo um dos alunos me chamou para que verificasse se o raciocínio que o mesmo usou estava correto, e de fato estava, o mesmo calculou a área do quadrado inicial como sendo 36 m^2 e que levava 5 h para ser limpo, se dobrasse o comprimento do lado, o canteiro passaria a ter 12 m de lado e portanto 144 m^2 de área que dividido pelos 36 m^2 do original, daria uma área 4 vezes maior e portanto levaria 20h e triplicando o lado, ou seja 18 m teríamos 324 m^2 de área o que equivale a 9 vezes a área original e portanto 45 horas de tempo, raciocínio correto. Alguns ainda tentavam calcular por regra de três, porém, como esperado, não estavam conseguindo. Deixei o aluno apresentar aos demais o raciocínio que havia usado. A ideia do aluno foi muito bem aceita por todos. Quando questionados “Existe relação entre as grandezas tempo e comprimento do lado?” a resposta foi quase que unanime que sim, porém novamente observei a rapidez em tentar responder contra o raciocínio correto.

Pedi aos mesmos que prestassem mais atenção no que estava sendo perguntado, imediatamente um deles respondeu “realmente a relação é entre tempo e área e não comprimento”, questionei os demais se concordavam e a resposta foi sim, porém preferi discutir mais um pouco a respeito com os mesmos. Ao final mostraram-se convencidos do que realmente ocorre entre as grandezas. Após toda a discussão um aluno fez o seguinte comentário “então quer dizer que pode até ser função mas não vai ser nenhuma das que nós estudamos, nem precisa responder o resto”, entrei na discussão para questioná-los mais um pouco porém foram bem rápidos em determinar que a situação apresentada não se encaixava em nenhum dos tipos de grandezas estudadas e portanto não se encaixaria em nenhuma das funções também estudadas até agora.

Na pergunta h esperamos que os alunos além de identificar que as grandezas são inversamente proporcionais também temos uma função da forma $f(x) = k/x$.

Ao Professor: O aluno deve observar que as grandezas comprimento e largura são inversamente proporcionais neste caso e que ela estabelece uma função da forma k/x .

h) Uma sala retangular precisa ter 6 m^2 de área. Supondo que seu comprimento seja x e sua largura seja y , qual deve ser a largura dessa sala para que a área seja respeitada?

Existe relação entre as grandezas comprimento e largura? () Não () Sim. Qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim. Em caso afirmativo:

Qual é a variável independente? _____

Qual é a variável dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou (linear, afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$ ou *do tipo* de uma destas)? () Não () Sim. Em caso afirmativo, qual? _____

Durante a resolução do item h, a primeira pergunta feita por um aluno foi para confirmar o cálculo da área do retângulo, respondido a todos seguiram nos cálculos. Para minha surpresa (devido a rapidez) um aluno fez o seguinte comentário “se a área do retângulo é comprimento vezes largura, aqui nós temos x vezes y igual a 6 ($x.y = 6$) e assim pela definição nós temos grandezas inversamente proporcionais, então é função e é aquela da forma k/x ”, ou seja, resumiu em uma única frase todas as respostas. Como o aluno foi correto em responder, questionei os demais se concordavam ou não, a maioria disse que sim, porém

preferi retomar cada item para que não ficasse dúvidas em relação aos questionamentos, o que pude ver é que realmente haviam concordado por terem acompanhado o raciocínio do colega e concordarem com ele.

Para o item i espera-se que os alunos consigam determinar as inversas das que forem possíveis usando a injetividade.

Ao Professor: O aluno deve observar que temos uma função da forma k/x pois temos grandezas inversamente proporcionais.

- i) Quatro torneiras de mesma vazão, quando funcionando juntas, enchem um determinado tanque em seis minutos. Se fecharmos uma delas, em quanto tempo, as outras três, funcionando juntas, demorariam para encher o mesmo tanque? E se fecharmos duas? E se fecharmos 3?

E se tivermos x torneiras sendo fechadas, como se expressa o tempo que demora para encher o tanque?

Existe relação entre as grandezas número de torneiras e tempo? () Não () Sim. Qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim. Em caso afirmativo:

Qual é a variável independente? _____

Qual é a variável dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou (linear, afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$ ou *do tipo* de uma destas)? () Não () Sim. Em caso afirmativo, qual? _____

Ao Professor: A atividade objetiva reforçar a noção de inversibilidade de uma função e o critério estabelecido para reconhecer inversibilidade.

Para as funções a seguir:

- i) verifique se elas são inversíveis
ii) determine a inversa daquelas que são inversíveis

Ao Professor: Estimule a resolução de (i) via o critério estabelecido (inversível se e só se é injetora); e, para (ii), via definição (“desmanchar”)

a) $f(x) = 7x$

b) $f(x) = - 13x$

c) $f(x) = 3\sqrt{x}$

$$d) f(x) = 4x + 2$$

$$e) f(x) = -3x + 6$$

$$f) f(x) = x^2 - 16$$

$$g) f(x) = 7/x$$

$$h) f(x) = -9/x$$

A única função que apresentou um pouco de dúvida foi a da letra c), isto devido a raiz cúbica, porém os alunos usaram a condição $(f(g(x)) = x)$ para verificar a inversibilidade. Como o enunciado não falava em “injetora” questionei os mesmos sobre quais então seriam? O primeiro aluno a responder fez o seguinte comentário “todas as que tem inversa, pois se tem inversa é injetora”, questionei os demais se concordavam e a resposta foi que sim. Um aluno ainda fez a observação de que as únicas funções que não estavam nas estudadas eram a c) e a f) porém parecidas com a f) já haviam aparecido quando estudado função inversa.

CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa dissertação, pretendemos focar o estudo do relacionamento entre grandezas, na Matemática do Ensino Médio e sua tradução para a linguagem de funções. No entanto, a partir deste tema inicial, nossa proposta acabou ganhando uma dimensão maior, pois durante o seu desenvolvimento, novas questões foram surgindo. Por exemplo, sentimo-nos no compromisso de abordar inversibilidade de funções reais de variável real para mostrarmos como a ausência de ênfase, defendida por nós, no contradomínio de uma função e, conseqüentemente, no conceito de sobrejetividade, se reflete neste conceito.

Retomamos no Ensino Médio a ideia de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa, bem como de outro tipo de relacionamento entre grandezas, não só com o objetivo de tentar desfazer o obstáculo didático muitas vezes detectado entre os alunos de que todo par de grandezas que se relacionam está relacionado a proporcionalidade direta mas também com o objetivo de preparar o aluno para a reflexão que ele deverá fazer sobre o par de variáveis reais relacionadas por uma função real de variável real.

A Sequência Didática que elaboramos foi aplicada a uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, do Curso Técnico em Fabricação Mecânica do Campus Caxias do Sul do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) na cidade de Caxias do Sul, RS. Esta turma consistia de trinta e dois alunos, sendo trinta e um do sexo masculino. Do total de alunos, 71,8% haviam concluído o Ensino Fundamental em escolas públicas, três eram repetentes, e as idades variavam entre 14 e 17 anos.

Iniciamos a proposta didática para o primeiro ano do Ensino Médio com uma abordagem de grandezas que variam com o mesmo sentido, grandezas que variam com sentidos contrários, grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais na Matemática do Ensino Médio. As duas primeiras são novas para os alunos deste nível de escolaridade, mas as duas últimas são encaradas como uma revisão e aprofundamento do Ensino Fundamental, portanto não inéditas aos alunos. Minha avaliação quanto à introdução desta parte no currículo do primeiro ano é positiva pois não só foi possível com ela reinterpretar a relação entre as variáveis, em algumas famílias de funções reais de variável real estudadas, como também tentou-se com a abordagem deste tema corrigir uma concepção errada que muitos alunos trazem do Ensino Fundamental de que todo par de grandezas que se relacionam o fazem via proporcionalidade direta, isto muito observado durante os treze anos em que atuei como professor de primeiro ano de Ensino Médio.

Para trabalhar a tradução destes diferentes tipos de relacionamento entre grandezas

para a linguagem de funções e, conseqüentemente, a abordagem das funções Linear, Afim, Monótonas e Homográfica da forma k/x (k constante não nula), foi necessário trabalhar também a definição de função. E aí enfrentamos um problema que acabou gerando um objetivo paralelo para a proposta inicial, porém não menos importante. Explicamo-nos melhor: como professor de Ensino Médio há 13 anos, utilizei⁴ vários livros didáticos durante este período, porém sempre observando algumas contradições em alguns deles no que diz respeito ao tema *funções*, incluindo a definição de função.

Cabe ressaltar que a preocupação com a coerência e consistência que consistem em aspectos indiscutíveis para a matemática e para os matemáticos, não foi o que encontrei na maioria dos livros didáticos. Por isso, senti-me no compromisso de apontar estas incoerências, definições e encaminhamentos inadequados usualmente encontrados nos livros didáticos e propor um texto alternativo para conseguir seguir adiante com a proposta de traduzir as relações entre grandezas estudadas para a linguagem de funções.

Assim, ao desenvolvermos e implementarmos uma Sequência Didática que contemplasse esta proposta, tivemos não só o cuidado de tentar contemplar as orientações mencionadas nos PCN e nos PCN+, como também:

- fazer uso de uma linguagem clara e facilitadora ao estudante;
- apresentar não só situações variadas de relação unívoca entre variáveis como também apresentar uma definição de função que contemplasse todas elas;
- estimular no aluno a reflexão;
- introduzir o aluno ao pensamento matemático, através de demonstrações, sempre que possível, de toda conclusão ou propriedade intuída, utilizando uma linguagem adequada ao nível do aluno e não necessariamente fazendo uso de simbologia matemática, de modo a transmitir ao aluno.

Como estratégia para que o interesse pela demonstração ocorresse, utilizamos quadros onde os alunos pudessem formular suas demonstrações, primeiramente utilizando suas próprias palavras num quadro chamado “justificativa com palavras” e, a seguir, tentassem repetir a argumentação por meio da simbologia matemática, agora no quadro chamado “justificativa com simbologia”. Confirmou-se a expectativa sobre a dificuldade dos alunos com a simbologia matemática que, acreditamos estar relacionada ao fato de no Ensino Fundamental a linguagem simbólica não ser muitas vezes apresentada aos alunos. De fato,

⁴ A partir deste momento novamente utilizei a primeira pessoa do singular por tratar-se de um relato de experiência minha.

parece ter sido este o primeiro momento em que estes alunos foram convidados a fazer uso de simbologia. Assim, foi inevitável, em alguns momentos, que a conclusão do quadro “justificativa com simbologia” ficasse a cargo do professor.

No entanto pudemos notar que, gradativamente, este obstáculo foi sendo vencido. Além disto, a estratégia utilizada para trabalhar as demonstrações fez com que os alunos se envolvessem no processo matemático de argumentação, a ponto de, ao final da proposta, já tornar-se comum os mesmos procurarem demonstrar afirmações sem serem solicitados para tal.

Pude constatar, como consequência destes cuidados, uma motivação diferente nos estudantes durante a implementação da Sequência didática. Por exemplo, ao comparar com minha experiência de anos anteriores (quando a definição de função adotada era a constante nas bibliografias utilizadas nas escolas, e que pudemos ver, no Capítulo 2, nem sempre coerentes), percebi que a definição por nós adotada fez com que os alunos apresentassem maior segurança ao analisar uma relação entre variáveis e decidir se a mesma era função ou não.

A necessidade da introdução das funções *do tipo* linear, *do tipo* afim, *do tipo* k/x (k constante não nula) foi percebida pelos alunos, por exemplo, ao tratarem do problema de custo de uma corrida de táxi: tem-se aí uma função cujo domínio é diferente dos números reais, mas que é equacionada da mesma forma que uma função Afim.

Foi trabalhada a inversibilidade de uma forma que os alunos não usassem, em nenhum momento, a tradicional *receita* que envolve inclusive o truque (pois este nunca é justificado) “trocar x por y ”. Considerando que a função inversa tem o papel de desmanchar o que a função original constrói, adotamos este procedimento para obter a inversa das funções onde fosse possível. Observamos que para os alunos ficou claro o real sentido da função inversa. A injetividade da função foi outro ponto que também me pareceu que lhes foi de fácil compreensão.

Com respeito ao estudo das funções Linear, Afim, Monótonas e Homográfica, consideramos cumprido nosso maior objetivo, a saber, fazer com que os alunos associassem cada uma delas ao tipo de relacionamento entre as grandezas envolvidas. Ao final de nossa Sequência, os alunos não demonstraram dificuldades nas atividades finais da proposta, cujo objetivo era esse.

Não podemos deixar de citar aqui que, embora consideremos nossas expectativas cumpridas, em alguns momentos houveram dificuldades na implementação deste trabalho. Observei, em certos momentos, uma certa insegurança nos alunos ao utilizarem as operações

básicas, principalmente na inversibilidade de funções: por um lado os mesmos mostravam-se bastante seguros na escolha das operações a serem usadas; por outro lado, no momento de transcrever isto para a fórmula a qual representaria a função inversa, revelou-se a dificuldade de ordenar corretamente tais operações.

Finalizo este trabalho considerando-me satisfeito com os resultados obtidos a partir da implementação da Sequência Didática, onde procuramos, e espero que tenhamos conseguido, sermos bem cuidadosos no tratamento de um tema de tamanha importância na Matemática, que é o tema Funções, principalmente, em se comparando com os treze anos anteriores de minha experiência com alunos deste nível de ensino, pude notar uma segurança muito maior nos alunos em vários aspectos:

- tinham bem clara a definição de função;
- souberam muito tranquilamente associar cada função (linear, afim e homográfica) ao tipo de relacionamento entre grandezas associado;
- compreenderam bem a injetividade da função;
- a inversibilidade foi aprendida de uma maneira onde realmente se priorizou o entendimento e não receitas.

Esperamos assim, que este trabalho possa ser bem aproveitado e utilizado por outros professores e que possam também obter resultados positivos como os que julgamos ter conseguido aqui.

REFERÊNCIAS

- BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática, Volume 1**. São Paulo: Moderna, 2012.
- BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.
- BRAGA, C. **O Processo Inicial de Disciplinarização de Função na Matemática do Ensino Secundário Brasileiro**. São Paulo: PUC/SP, 2003.
- BRASIL. PCNEM - **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação. Brasília: SEMT/ MEC. 2002.
- BRASIL. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.
- DANTE, L.R. **Matemática – Contexto e Aplicações, Volume 1** . São Paulo: Ática, 2012.
- DEGENSZAJN, D. IEZZI, G. ALMEIDA, N. DOLCE, O. PÉRIGO, R. **Matemática Ciência e Aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2012.
- DINIZ, M. I. SMOLE, K. S. **Mátemática Ensino Médio**. São Paulo: Saraiva, 2012.
- FRIEDRICHSDORF, Ulf; PRESTEL, Alexander. **Mengenlehre für den athematiker**. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1985
- LIMA, E. L., CARVALHO; C., WAGNER, E., & MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 1**. Rio de janeiro: SBM.2006.
- LIMA, E. L., CARVALHO; C., WAGNER, E., & MORGADO, A. C. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- PAIVA, M. **Matemática Paiva, Volume 1**. São Paulo: Moderna, 2012.
- RIBEIRO, J. **Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia**. São Paulo: Scipione, 2012.
- SOUZA, J. **Novo Olhar – Matemática**. São Paulo: FTD, 2012.

APÊNDICE

PARTE A - APRESENTAÇÃO

Este trabalho consiste de uma proposta didática que visa retomar com alunos do Ensino Médio a ideia de proporcionalidade que o aluno traz do Ensino Fundamental, ampliar a discussão sobre relacionamento entre grandezas, definindo também grandezas que variam com mesmo sentido e grandezas que variam com sentido inverso e, a seguir, reconhecê-las também em contextos que fazem uso da linguagem de funções.

Para atingirmos este objetivo, é necessário inicialmente discutir os conceitos de função e de função real de variável real. Por isso, antes de iniciarmos o tema funções abordamos produto cartesiano e plano cartesiano.

Ao longo da discussão sobre funções, buscamos também corrigir várias incoerências e confusões usualmente encontradas em livros didáticos. As mais importantes são listadas a seguir:

I) PARA MANTER A COERÊNCIA ENTRE

- o conceito de função;
- o conceito de função real de variável real;
- igualdade de funções reais de variável real;

foi necessário refletir sobre a ênfase normalmente dada ao contradomínio de uma função real de variável real. Salientamos que a definição aqui adotada para função (uma função é um especial conjunto de pares ordenados) evidencia que, para termos uma função, basta conhecermos os pares ordenados que a formam, e por isso o contradomínio pode variar sem que necessariamente mudem seus pares ordenados.

Convidamos o leitor a refletir sobre um exemplo típico abordado em livros didáticos para o ensino médio:

Para fretar um ônibus de excursão de 40 lugares, paga-se ao todo R\$ 360,00. Essa despesa deverá ser igualmente repartida entre os participantes.

A fórmula que relaciona a quantidade que cada um deverá desembolsar (y) com o número de passageiros (x) é $y = \frac{360}{x}$.

Por outro lado, depois de trabalharem muitos exemplos deste tipo, nos quais o contradomínio não é informado, o que sugere que ele não é um dado importante quando se trata de funções numéricas, não são raros os livros didáticos nos quais a função exponencial é

definida com enorme ênfase no contradomínio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$. Cabe aqui ressaltar que:

- se o contradomínio for o conjunto dos Reais, em nada se alteram os pares ordenados que formam a função;
- outras funções estudadas antes da função exponencial, como a quadrática f dada por $f(x) = x^2$ não é apresentada com contradomínio igual à sua imagem, situação que consideramos um tanto forçada para a função exponencial.

Fazemos uso desta observação adiante quando, ao nos dedicarmos exclusivamente a funções reais de variável real, adotamos para contradomínio sempre o conjunto dos números reais, em consonância com Friedrichsdorf e Prestel:

“Funções, como objetos matemáticos, são abstrações de uma forma especial de ‘instrução’; vemos duas funções f e g como idênticas se e somente se possuem o mesmo domínio de definição e, além disto, para todo x do domínio de definição, sempre vale $f(x) = g(x)$. A informação do ‘contradomínio’ B pela escrita $f: A \rightarrow B$ dá uma informação adicional sobre onde se deve procurar o valor de $f(x)$ para um x de A . Esta informação adicional é extremamente útil para as considerações matemáticas. No entanto, ela pode ter nenhum papel para a igualdade de funções, pois cada função de A em B pode ser também entendida como uma função de A em C , onde C pode ser tomado como um sobreconjunto de B .”

II) PARA MANTER A COERÊNCIA ENTRE:

- a pouca ênfase que propomos que seja dada ao contradomínio de uma função real de variável real;
- os conceitos de inversibilidade e de função inversa de uma função real de variável real;

sentimo-nos na obrigação de incluir aqui também uma proposta de abordagem no ensino médio sobre o tema inversibilidade de uma função real de variável real.

Estamos nesta proposta estimulando o estudante a praticar e aprender a fazer algumas demonstrações com o intuito de que os alunos comecem a familiarizar-se com o pensamento e o método matemáticos. É muito raro o uso de demonstrações durante o Ensino Básico, o que

faz com que alunos encarem-nas como competência apenas dos (cientistas) matemáticos, e não como uma das características da matemática como ciência. Salientamos que “demonstração” não é sinônimo de “linguagem formal” e nem pressupõe a utilização de simbologia. Referimo-nos aqui a argumentações completas.

III) PARA EVITAR CONFUSÕES GERADAS PELA EXPRESSÃO “GRÁFICO”.

Fazemos, nesta proposta, distinção clara entre “gráfico” e “esboço do gráfico” de uma função numérica.

Denominamos “gráfico de uma função” f o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) que tenham “ a ” pertencente ao domínio de f e $b = f(a)$. O gráfico de uma função é, portanto, um objeto matemático. Já o esboço deste conjunto é uma tentativa de representá-lo no plano cartesiano, quando a função é real de variável real. Julgamos relevante para a formação do aluno propor situações em que se evidencie a impossibilidade de uma representação fiel ou completa do gráfico, gerando então a aceitação de apenas uma “caricatura” para o mesmo, por isso chamamos tal representação de “*esboço do gráfico*”. O esboço do gráfico de uma função não é um objeto matemático.

Na Parte B apresentamos o Questionário Sondagem que foi utilizado como auxiliar do planejamento desta Proposta Didática. Cabe ao professor a decisão de utilizá-lo ou não.

Na Parte C apresentamos a Proposta Didática.

PARTE B – QUESTIONÁRIO SONDA GEM

ALUNO _____ TURMA _____

DATA _____

Este questionário deve ser respondido da forma mais clara possível, isto é, todo raciocínio adotado deve ser transcrito na resolução, incluindo a justificativa para o mesmo. Lembramos que não é necessário (apesar de permitido) o uso de fórmulas já conhecidas por você.

*Definimos grandeza como tudo aquilo que pode ser **medido** (sendo contagem um caso particular de medida). Podemos exemplificar: idade, comprimento, tempo, temperatura, massa, preço, entre outras.*

Grandezas que variam com mesmo sentido

Duas grandezas que se relacionam são ditas grandezas que variam com mesmo sentido quando uma variação em uma delas implica uma variação ou mudança na outra, da seguinte forma: se uma cresce a outra cresce também; se uma decresce, a outra decresce também.

Grandezas que variam com sentidos contrários

Duas grandezas que se relacionam são ditas grandezas que variam com sentidos contrários quando uma variação em uma delas implica uma variação ou mudança na outra, da seguinte forma: se uma cresce a outra decresce; se a primeira decresce, a segunda cresce.

1) Três trabalhadores constroem um muro de 20 metros em uma semana. Supondo que o rendimento seja o mesmo, quantos metros de muro construirão em uma semana?

- a) Seis trabalhadores?
- b) Nove trabalhadores?
- c) Doze trabalhadores?
- d) Quinze trabalhadores?
- e) Dezoito trabalhadores?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

2) Quatro torneiras de mesma vazão, quando funcionando juntas, enchem um determinado tanque em seis minutos. Se fecharmos uma delas, em quanto tempo, as outras três, funcionando juntas, demorariam para encher o mesmo tanque? E se fecharmos duas? E se fecharmos 3?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

3) Uma escola tem 1 professor para cada grupo de 10 alunos e 4 funcionários para cada 10 professores. Qual o número de alunos por funcionário? E se a proporção for alterada para 2 professores para cada grupo de 10 alunos, mantendo-se o número de 4 funcionários para cada 10 professores, qual será o número de alunos por funcionário?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

4) Um jardineiro levou 5 horas para limpar um canteiro quadrangular com 6m de lado. Quanto tempo precisará para limpar, no mesmo ritmo, um canteiro também quadrangular, mas com o dobro do lado? Você consegue identificar, neste contexto, alguma relação de proporcionalidade? Se sim, entre quais grandezas?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

5) Para construir um muro de 80 m de comprimento, 10 homens levam nove dias. Mantendo o mesmo ritmo de trabalho, quantos dias levarão, para construir o mesmo muro,

- a) 5 homens?
- b) 15 homens?
- c) 20 homens?
- d) 30 homens?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

6) Um carro flex, abastecido com álcool e rodando a uma velocidade média de 80 Km/h , fez uma viagem de 150 Km . Sabendo-se que, nessa velocidade, o carro tem um consumo de 10 Km/litro , ou seja, que percorre 10 Km com 1 litro de álcool, responda:

- a) Quantos litros de álcool foram consumidos na viagem?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

--	--

b) supondo-se que o rendimento desse carro, quando abastecido com gasolina, seja de 15 km/litro e que os preços do litro do álcool e da gasolina, no período em que foi realizada a viagem, eram, respectivamente, R\$ $1,90$ e R\$ $2,80$, pergunta-se: compensaria ter feito a viagem usando gasolina? Justifique.

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

7) Numa cultura de bactérias, a cada hora, o número de bactérias duplica. Se em um determinado momento temos 30 bactérias, quantas bactérias teremos $1h$ após este momento? E $2h$ após? E $3h$ após? Você conseguiria representar algebricamente essa situação para qualquer número inicial de bactérias? Que relação há entre as grandezas tempo decorrido e número de bactérias?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

8) Três sócios A, B e C, para abrir um negócio, investiram, respectivamente, R\$ $6.000,00$, R\$ $8.000,00$ e R\$ $12.000,00$. Ao final de um ano de funcionamento tiveram um lucro de R\$ $286.000,00$. Explique o que você consideraria, nesta situação, o que seria uma “divisão justa dos lucros” e, a seguir, calcule, deste ponto de vista, quanto caberia a cada um.

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

--	--

9) Quatro pedreiros, trabalhando 8 horas por dia, constroem 50 metros de calçada em uma semana. Em uma semana, quantos metros de calçada serão construídos, se trabalharem 6 pedreiros, 8 horas por dia, supondo que esses trabalhadores tenham o mesmo rendimento nas duas situações?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

10) Quatro pedreiros, trabalhando 8 horas por dia, constroem 50 metros de calçada em uma semana. Em uma semana, quantos metros de calçada serão construídos, se trabalharem 6 pedreiros, 6 horas por dia, supondo que esses trabalhadores tenham o mesmo rendimento nas duas situações?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

11) Classifique as relações entre grandezas apresentadas a seguir, marcando: **MS** para grandezas que variam com mesmo sentido, **SC** para grandezas que variam com sentidos contrários, **DP** para grandezas diretamente proporcionais, **IP** para grandezas inversamente proporcionais e **NR** para grandezas que não se relacionam.

() velocidade e tempo

() idade e altura

() quantidade de trabalho a ser executado e número de operários para executá-lo

() quantidade de determinado produto e preço unitário do mesmo

() distância percorrida e combustível gasto para percorrê-la

() medida do lado de um polígono regular e perímetro do mesmo

() medida do lado de um polígono não regular e perímetro do mesmo

() peso e altura de uma pessoa

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

12) Um determinado material radioativo se reduz à metade de sua quantidade a cada 10 anos. Que tipo de relação pode ser atribuída às grandezas quantidade e tempo? Posso afirmar que essas grandezas são proporcionais? Por quê?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

13) Dividindo 63 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 4, qual será a parte maior? Justifique brevemente.

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

14) Sabendo que, numa determinada farmácia, cada medicamento é vendido com um lucro equivalente à metade do seu preço de custo, qual será o preço de venda de um medicamento que tem custo de:

- R\$ 20,00?

- R\$ 30,00?

- R\$ 40,00?

- R\$ 50,00?

- R\$ 60,00?

O que se observa no preço de venda de um medicamento, a cada aumento de R\$ 10,00 no seu preço de custo?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

É possível escrever uma expressão algébrica que represente a situação acima? Se sim, qual?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

15) Uma loja oferece um desconto de 12% sobre o preço de venda para pagamento a vista.

Qual será o preço a ser pago se o preço de venda da mercadoria é:

a) R\$ 100,00

b) R\$ 200,00

c) R\$ 300,00

d) R\$ 400,00

O que se observa, no pagamento a vista da mercadoria, a cada aumento de R\$ 100,00 no preço de venda da mesma?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

É possível escrever algebricamente uma relação que represente essa situação? Se sim, qual?

RESOLUÇÃO	JUSTIFICATIVA

--	--

PARTE C - PROPOSTA DIDÁTICA

“RETOMANDO O RELACIONAMENTO ENTRE GRANDEZAS NO ENSINO MÉDIO E TRADUZINDO ALGUNS DELES PARA A LINGUAGEM DE FUNÇÕES”

REVISANDO GRANDEZAS QUE VARIAM COM MESMO SENTIDO, COM SENTIDO INVERSO, DIRETAMENTE PROPORCIONAIS E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS E TRADUZINDO-AS PARA A LINGUAGEM DE FUNÇÕES.

Objetivo(s): Que o aluno saiba reconhecer relacionamentos entre duas grandezas e classificá-los (grandezas que variam com o mesmo sentido, grandezas que variam com o mesmo sentidos contrários, grandezas direta e inversamente proporcionais), bem como saiba identificar quando não há relação alguma entre as grandezas que lhe são apresentadas.

Ao Professor: As seis atividades a seguir servem para que o aluno comece a trabalhar com grandezas ainda sem ter sido apresentado às definições de grandezas que variam com o mesmo sentido, com sentidos contrários, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais. A última pergunta pretende que o aluno reconheça que, neste relacionamento, existe uma constante, um dado invariante (no caso, o fator multiplicativo) que, futuramente, receberá o nome de constante de proporcionalidade.

Motivação:

Atividade 1

A receita de pão de queijo a seguir rende 5 porções:

Pão de Queijo Mineiro

4 copos de polvilho doce

1 colher de sal

2 copos de leite

1 copo de óleo

2 ovos

4 copos de queijo minas ralado

óleo para untar

Pergunta-se:

Que quantidades de ingredientes devemos usar se quisermos 10 porções?

E 15 porções?

E 20 porções?

O que você observa comparando as novas quantidades com as quantidades originais da receita?

Ao Professor: Espera-se que o aluno observe que, como a receita rende 5 porções, quando perguntado sobre 15 porções, ele deve triplicar a quantidade de ingredientes e, quando perguntado sobre 20 porções, que ele quadruplique a quantidade.

Atividade 2

Gustavo resolve agradar a namorada e quer preparar um bolo de cenoura para ela. Para isso utiliza a seguinte receita:

Bolo de cenoura (rendimento: 8 porções)

1/2 xícara de óleo

3 cenouras médias raladas

4 ovos

2 xícaras de açúcar

2 1/2 xícaras de farinha de trigo

1 colher de fermento em pó

Cobertura:

1 colher (sopa) de manteiga

3 colheres (sopa) de chocolate em pó

1 xícara (chá) de açúcar

a) A namorada acha o bolo uma delícia e pede a Gustavo que ele prepare outro para toda a família que é formada por 4 pessoas. Estimando que cada familiar irá comer 4 porções, que quantidades de ingredientes Gustavo deve usar para que seja possível satisfazer a toda a família?

b) E se o bolo for preparado novamente apenas para o casal, sabendo que cada um irá comer apenas 2 porções, quais devem ser as quantidades de cada ingrediente? (Estamos aqui imaginando que não haja sobras.)

Atividade 3

Num elevador está escrito: “CAPACIDADE MÁXIMA: 6 pessoas ou 480 kg”.

a) Sabendo que a cada andar entra uma pessoa no elevador, pergunta-se: o que vai acontecendo com o peso do mesmo?

b) Primeiramente entram duas pessoas e o elevador atinge um determinado peso, a seguir entram mais duas, ou seja, o número de pessoas dobra. Considerando que neste grupo de pessoas, todas têm o mesmo peso, pergunta-se: o peso deste elevador dobra?

Atividade 4

Tomemos o salário mensal de um trabalhador e o número de contas fixas (luz, água, telefone, condomínio, etc. a pagar todos os meses.

a) A cada conta que for sendo paga, o que vai ocorrendo com a quantidade de dinheiro que sobra para outros gastos?

b) Explique a relação existente entre quantidade de dinheiro disponível para gastos e quantidade de contas a pagar.

Atividade 5

Uma empresa precisa produzir 500 peças. Uma máquina leva 10 dias para produzi-las. Supondo que todas as máquinas desta empresa têm o mesmo rendimento, em quantos dias as peças serão produzidas se a empresa usar duas máquinas deste tipo? E cinco máquinas? Se a quantidade de máquinas for maior, o que ocorre com a quantidade de dias necessários para produzir as peças?

Atividade 6

a) No inverno Nova Iorque de 2012, nevou pela primeira vez no dia 21 de janeiro. Sabendo que nevou o dia todo, pergunta-se: existe alguma relação entre a quantidade de neve cai em uma parte específica da cidade e o momento em que ela caiu? Justifique.

b) Uma caixa de água está furada e vazando, e a cada minuto diminui 3 litros do seu volume de água. Existe alguma relação entre a quantidade de tempo que vai passando (em minutos) e o volume de água que sobra na caixa de água? Justifique.

DEFINIÇÕES:

Definimos grandeza como tudo aquilo que pode ser medido ou contado.

Exemplos de grandezas: idade, comprimento, tempo, temperatura, massa, preço, entre outras.

Dizemos que duas grandezas estão relacionadas quando uma alteração em uma delas provoca alguma alteração na outra. Tal relacionamento pode ser de vários tipos, alguns deles

muito especiais, e por isso recebem nomes especiais. Listamos a seguir aqueles com os quais vamos aqui trabalhar:

Grandezas que variam com o mesmo sentido: Duas grandezas que se relacionam são ditas Grandezas que variam com o mesmo sentido quando uma variação em uma delas provoca uma variação na outra de tal modo que: se uma cresce a outra também cresce; se uma decresce, a outra também decresce.

Grandezas que variam com sentidos contrários: Duas grandezas que se relacionam são ditas Grandezas que variam com sentidos contrários quando uma variação em uma delas provoca uma variação na outra de tal modo que: se uma cresce a outra decresce; se uma decresce, a outra cresce.

Grandezas Diretamente Proporcionais: Duas grandezas que se relacionam – e que aqui vamos denotar por x e y – são ditas diretamente proporcionais se, ao variar o valor de x , o correspondente valor de y também varia, mas de tal forma que o quociente y/x se mantém constante. Mais precisamente, de tal forma que $x=0$ se e só se $y=0$ e existe uma constante k tal que $y/x = k$, para qualquer valor não nulo da grandeza x e o valor de y que lhe corresponde.

Grandezas Inversamente Proporcionais: Duas grandezas que se relacionam – e que aqui vamos denotar por x e y – são ditas inversamente proporcionais se, ao variar o valor de x , o correspondente valor de y também varia, mas de tal forma que o produto $x.y$ se mantém constante. Ou seja, de tal forma que existe uma constante k tal que $y.x = k$, para qualquer valor da grandeza x e o valor de y que lhe corresponde.

Atividade 7

Após definirmos alguns tipos de relações entre grandezas, complete, se possível, a tabela a seguir, assinalando o tipo de relação que ocorreu em cada uma das atividades trabalhadas no início deste capítulo:

	De mesmo sentido	No sentido inverso	Diretamente Proporcionais	Inversamente Proporcionais	Nenhuma das Anteriores
Atividade 1					
Atividade 2					
Atividade 3					

Atividade 4					
Atividade 5					
Atividade 6					

Objetivo(s): Que o aluno saiba identificar com precisão, após as definições, o tipo de relação existente entre os pares de grandezas apresentados e saiba também justificar, em cada caso, sua resposta.

Considerando as definições acima, classifique as relações entre grandezas apresentadas a seguir, marcando: MS para grandezas que variam com mesmo sentido, SI para para grandezas que variam com sentidos contrários, DP para grandezas diretamente proporcionais, IP para grandezas inversamente proporcionais e NA para nenhuma das anteriores.

- () velocidade x tempo
- () idade x altura
- () quantidade de trabalho a ser executado x número de operários para executá-lo (supondo que todos trabalham no mesmo ritmo)
- () número de unidades de produção de determinado produto x preço unitário do mesmo
- () distância percorrida x combustível gasto para percorrê-la de automóvel (supondo que o mesmo mantém um rendimento constante)
- () medida do lado de um polígono regular x perímetro do mesmo
- () medida do lado de um polígono não regular x perímetro do mesmo
- () peso x altura de uma pessoa
- () temperatura de uma taça de café fervente e tempo que o café leva para atingir a temperatura ambiente
- () tempo de produção de determinado produto x número de itens produzidos
- () escala x representação

Atividade 8

Objetivo(s): Que o aluno saiba identificar o tipo de relação entre duas grandezas, relação esta, dada na forma de tabela.

Ao Professor: Observe que nas tabelas 1 e 3 temos respectivamente grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais; já nas tabelas 2 e 4 temos

respectivamente grandezas que variam com o mesmo sentido e grandezas que variam com sentidos contrários, e, na tabela 5, temos nenhuma das situações anteriores.

Nas tabelas a seguir está indicada uma relação entre duas grandezas x e y . Supondo que nelas estão registrados todos os possíveis valores de x , classifique as grandezas x e y em: grandezas que variam com mesmo sentido, grandezas que variam com sentidos contrários, grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais ou nenhum desses tipos de relação.

Tabela 1:

x	y
1	2
2	4
3	6
4	8

Tabela 2:

x	y
1	2
2	7
3	9
4	10
5	11
6	13
7	20
8	22
9	47

Tabela 3:

x	y
1	8
2	4
4	2
8	1
16	$\frac{1}{2}$
32	$\frac{1}{4}$

Tabela 4:

x	y
1	15
2	13
4	11
8	10
16	8
32	6
64	5

Tabela 5:

x	y
1	2
2	7
3	11
4	3

Atividade 9

Objetivo(s): Que o aluno consiga determinar valores de uma grandeza sabendo a forma com que esta se relaciona com outra grandeza de valores conhecidos.

Ao Professor: Os exercícios a seguir foram usados na íntegra ou adaptados do questionário sondagem que pode ser aplicado anteriormente a este trabalho (veja Parte B do Apêndice).

Resolva os exercícios a seguir:

1) Para construir um muro de 80 m de comprimento, 10 homens levam 9 dias. Para construir o mesmo muro e mantendo todos o mesmo ritmo de trabalho, quantos dias levarão,

- a) 5 homens?
- b) 15 homens?
- c) 20 homens?

2) Três sócios A, B e C, para abrir um negócio, investiram, respectivamente, R\$ $6.000,00$, R\$ $8.000,00$ e R\$ $12.000,00$. Ao final de um ano de funcionamento, tiveram um lucro de R\$ $286.000,00$. Explique o que você consideraria, nesta situação, ser uma “divisão justa dos lucros” e, a seguir, calcule, deste ponto de vista, quanto caberia a cada um.

3) Quatro pedreiros, trabalhando 8 horas por dia, constroem 50 metros de calçada em uma semana. Quantos metros de calçada serão construídos, ainda em uma semana, por 6 pedreiros trabalhando 8 horas por dia, supondo que esses trabalhadores mantenham o mesmo ritmo de trabalho nas duas situações?

4) Quatro pedreiros, trabalhando 8 horas por dia, constroem 50 metros de calçada em uma semana. Quantos metros de calçada serão construídos, ainda em uma semana, por 6

pedreiros trabalhando 6 horas por dia, supondo que esses trabalhadores mantenham o mesmo ritmo de trabalho nas duas situações?

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Neste capítulo são discutidas as noções de:

- produto cartesiano
- função real de variável real
- gráfico de uma função real de variável real
- função monótona
- função linear
- função afim
- função homográfica da forma $f(x) = k/x$ (k constante não nula)
- diferença entre “gráfico” e “esboço de gráfico”
- funções invertíveis
- inversão das funções linear, afim e dadas por $f(x) = k/x$ (k constante não nula), bem como das funções *do tipo* linear, *do tipo* afim e *do tipo* $f(x) = k/x$ (k constante não nula),
- relação entre as funções acima com grandezas que variam com o mesmo sentido, grandezas que variam com sentidos contrários, grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

PRODUTO CARTESIANO

Objetivo(s) da Capítulo: Que o aluno saiba determinar o produto cartesiano entre dois conjuntos.

Pré-Requisitos: noções de conjunto e de operações entre conjuntos; conceito de variável (que aparece por ocasião do estudo de conjuntos por compreensão)

Descrição: Introduzimos inicialmente a definição de par ordenado; a seguir, introduzimos a condição para que dois pares ordenados sejam iguais. Após a definição de produto cartesiano de dois conjuntos, seguida de exemplos nos quais se espera que o aluno saiba identificar um produto cartesiano, bem como construir pares ordenados e determinar a sua quantidade em função da quantidade de elementos dos conjuntos que formam um produto cartesiano.

Dados dois conjuntos não vazios A e B , se escolhermos um elemento $x \in A$ e um elemento $y \in B$, denotaremos por (x, y) o par ordenado formado por x e y tomados nesta ordem. Assim,

- o par ordenado (x, y) representa o conjunto $\{x, y\}$ no qual foi imposta uma ordem: x é o primeiro elemento e y é o segundo elemento.

- dois pares ordenados, (x, y) e (s, t) , só são considerados iguais se tivermos simultaneamente $x = s$ e $y = t$.

Simbolicamente, escrevemos:

$$(x, y) = (s, t) \leftrightarrow x = s \text{ e } y = t$$

Definição: O conjunto de todos os pares ordenados (x, y) , nos quais $x \in A$ e $y \in B$, é denotado por $A \times B$ e é chamado de produto cartesiano de A por B .

Simbolicamente, escrevemos:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Quando ocorrer que $A = B$, costuma-se denotar $A \times A$ por A^2 .

Atividade 10

Ao professor: Espera-se, nesta atividade, que os alunos reconheçam a relação que existe entre o número de elementos dos conjuntos que formam o produto cartesiano e o número de pares ordenados do produto cartesiano. Antes de passarmos ao raciocínio genérico, propomos mais um exemplo, desta vez sem conhecer os elementos dos conjuntos, justamente com a finalidade de estimular o pensamento generalizador.

Dados os conjuntos $A = \{-2, 3, 5\}$ e $B = \{-1, 2, 4, 7\}$,

- determine $A \times B$, $B \times A$, A^2 e B^2 .
- Observando os conjuntos $A \times B$ e $B \times A$, pergunta-se: são eles iguais? Justifique.
- Quantos elementos possui $A \times B$?
- Quantos elementos possui A^2 ?
- Você encontra alguma relação entre o número de elementos de A^2 e o número de elementos do conjunto A ? Em caso afirmativo, qual?
- Você encontra alguma relação entre o número de elementos de B^2 e o número de elementos do conjunto B ? Em caso afirmativo, qual?
- Você encontra alguma relação entre o número de elementos de $A \times B$ e o número de elementos dos conjuntos A e B ? Em caso afirmativo, qual?

Será que as relações que você encontrou na Atividade 10, itens (e), (f) e (g), são sempre válidas? Sugerimos que você as teste em outra atividade:

Atividade 11

Sabendo que um conjunto A possui 2 elementos e um conjunto B possui 3 elementos, determine o número de elementos de $A \times B$, $B \times A$, A^2 e B^2 , justificando sua resposta.

Atividade 12

Generalizando: é possível determinar o número de elementos de $A \times B$ a partir do número de elementos dos conjuntos A e B (digamos, sabendo que A tem m elementos e que B tem s elementos)? Justifique sua resposta.

Para uma visualização desta relação, tente construir, por meio de diagramas, os produtos cartesianos $A \times B$, $B \times A$, A^2 e B^2 da Atividade 10.

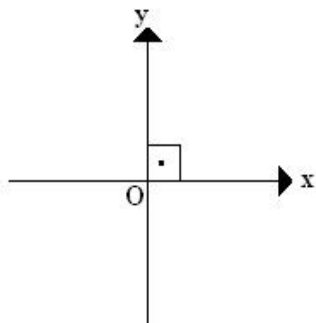
Ao professor: Aproveite a oportunidade para evocar aqui o Princípio Multiplicativo.

UM PRODUTO CARTESIANO ESPECIAL E O PLANO CARTESIANO

Objetivo: apresentar aos alunos o plano cartesiano, pois este é um pré-requisito para o estudo de gráficos de funções reais de variável real.

Ao professor: Para o estudo dos gráficos de funções reais de variável real iremos usar o Sistema Cartesiano Ortogonal.

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ admite uma visualização geométrica, fazendo-se uso de dois eixos perpendiculares entre si interseccionando-se precisamente no ponto escolhido/etiquetado por zero em cada um deles, por isso ser denominado Sistema Cartesiano Ortogonal. Costuma-se posicionar os eixos na horizontal e na vertical para facilitar a comunicação, bem como chamar ponto de intersecção dos eixos de origem do sistema cartesiano, e denotá-lo por O . Assim, $O = (0,0)$.



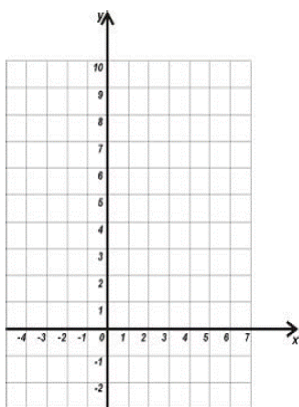
OBS: As flechas aqui apenas indicam o sentido de crescimento escolhido para cada eixo.

Cada eixo que compõe o Sistema Cartesiano será nomeado da seguinte forma:

- eixo Ox , o eixo horizontal, que será chamado de eixo das abscissas.
- eixo Oy , o eixo vertical, que será chamado de eixo das ordenadas.

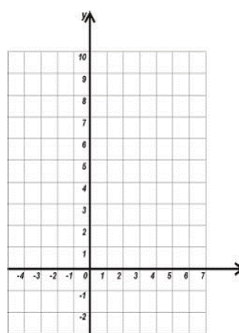
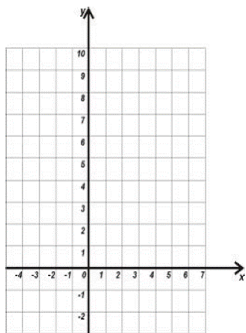
Ao Professor: Mostre a seus alunos como se representa um ponto na visualização geométrica.

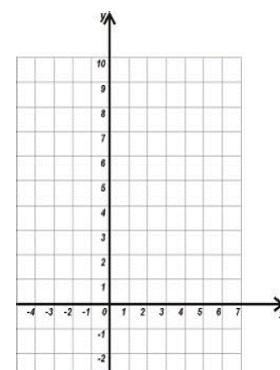
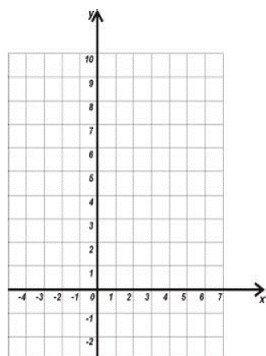
Vamos, no Sistema Cartesiano Ortogonal abaixo, representar os seguintes pontos: $A=(-2, 3)$, $B=(3, 5)$, $C=(4, -1)$, $D=(0, 7)$, $E=(5, 0)$ e $F=(-1, -2)$.



Atividade 13

Dados os conjuntos $A = \{-2, 3, 5\}$ e $B = \{-1, 2, 4, 7\}$, represente os conjuntos $A \times B$, $B \times A$, A^2 e B^2 , no sistema cartesiano ortogonal. (Observe que se trata dos mesmos conjuntos da Atividade 10)





FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Ao Professor: Estamos, neste trabalho, introduzindo algumas demonstrações com o intuito de que os alunos aprimorem o pensamento matemático e comecem a familiarizar-se com as mesmas, visto que é muito raro o uso de demonstrações durante o Ensino Básico. Salientamos que é comum alunos de graduação terem muita dificuldade em trabalhar com as mesmas. E – muito importante! - salientamos também que “demonstração” não é sinônimo de “linguagem formal” e nem pressupõe a utilização de simbologia. Espera-se em uma demonstração matemática apenas argumentações completas, e não o uso de simbologia. Por isso, nesta proposta, estimulamos o aluno a escrever uma demonstração primeiro com palavras, e depois, se possível, reescrevê-la fazendo uso da simbologia. Lembrando que mesmo que o aluno não consiga fazer uso adequado da simbologia, mas tenha conseguido desenvolver por meio de palavras, o mesmo demonstrou.

Ao professor: No texto que segue, tratamos primeiramente do conceito geral de função para, em seguida, tratarmos de função real de variável real.

Para motivarmos o estudo de funções que queremos aqui fazer, vamos começar refletindo sobre algumas situações.

Objetivo(s): Que o aluno comece a reconhecer que há uma possibilidade de unificar todas as situações de relacionamento entre grandezas a ele apresentadas via a linguagem de produto cartesiano, e que tabelas, relações de causa e efeito, diagramas, nem sempre são possíveis de serem utilizadas.

Objetivo(s): Nesta atividade, espera-se que os alunos consigam escrever os pares ordenados e visualizar que há mais do que uma regra possível para a correspondência, tal como $y=x$, mas também $y=x^3$ e, mais geralmente, $y=x^n$ com n um natural ímpar.

A tabela abaixo foi encontrada em uma página rasgada de um antigo livro.

x	Y
-1	-1
0	0
1	1

Observando a parte que ficou visível desta tabela, pergunta-se:

- Pode-se reescrever a informação constante nesta tabela fazendo uso de pares ordenados?
- Você consegue determinar uma regra que explique como a tabela foi gerada?
- Existem outras regras para essa mesma tabela?

Atividade 15

Objetivo(s): Neste exemplo, espera-se que os alunos não encontrem uma “regra” determinando a correspondência, mas reconheçam que, mesmo sem ela, é possível reescrever toda a informação na forma de pares ordenados.

Joãozinho estava andando na rua e, num determinado momento, se deparou com um pedaço de papel jogado no chão. Como ele não gosta de ver lixo jogado ao chão, resolveu juntá-lo, mas ao olhar para o papel viu que nele está registrada a seguinte tabela:

x	y
-3	1
-1	3
1	7
3	5
5	-2
7	3
9	-8

Ao professor: Fica o alerta que o fato de não se adivinhar como a tabela foi gerada

não significa que a tabela não tenha uma regra que permita gerá-la. Lembre que, se a relação é funcional, então sempre existe uma função que interpola um número finito de pontos (por exemplo, a construída a partir do Polinômio Interpolador de Lagrange vai nos proporcionar a função polinomial de menor grau que interpola esses pontos).

Pergunta-se:

a) É possível reescrever a informação constante nesta tabela fazendo uso de pares ordenados?

b) Você consegue enunciar uma regra que explique como esta tabela foi gerada?

Atividade 16

Objetivo(s): Neste exemplo, espera-se que os alunos consigam escrever os elementos da tabela por meio de pares ordenados e de diagramas, e que futuramente utilizem esta atividade como justificativa para o fato que, para se ter uma função, não necessariamente precisa existir uma relação de “causa e efeito” entre as variáveis dependente e independente (aqui representadas por dia do mês e mm de chuva no dia).

Ao professor: A tabela deste exemplo foi colocada na horizontal, esperando-se que o aluno consiga formar os pares ordenados, independentemente da forma com que uma tabela é construída.

Suponha que na cidade fictícia de Caxiapólis os índices pluviométricos nos 10 primeiros dias de um mês sejam dados pela seguinte tabela:

Índice Pluviométrico										
Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mm	23	14	0	0	3	7	11	0	0	16

Ao professor: Espera-se aqui que o aluno faça uso de pares ordenados.

a) É possível representar os dados desta tabela de outras formas? Se sim, que formas você escolheria então?

Ao professor: Espera-se aqui que o aluno se conscientize que o contexto determina que é impossível existir uma regra que determine a quantidade de chuva em função dos dias. De fato, mesmo existindo uma função interpoladora, obviamente o contexto nos diz que ele não fará o menor sentido se quisermos “prever” quantos mm poderá chover no próximo dia.

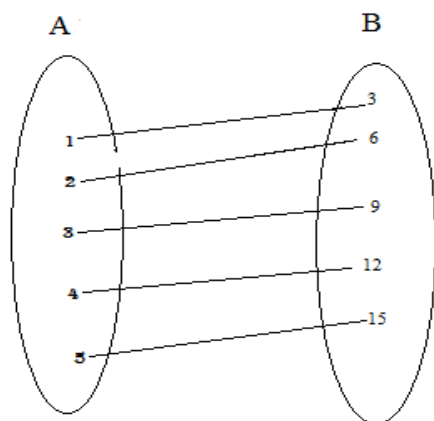
b) É possível estabelecer alguma relação entre a quantidade de chuva que cai e a

sequência de dias que vai transcorrendo? Em outras palavras, existe alguma relação entre as grandezas tempo (representado pelo dia do mês) e a quantidade de chuva (representada em mm)? Justifique.

Atividade 17

Objetivo(s): Neste exemplo, insere-se a linguagem de diagramas para representar a função, e espera-se que o aluno consiga expressar a relação por meio de pares ordenados. Na pergunta a) começamos introduzindo a proporcionalidade direta, na pergunta b) espera-se que o aluno represente a informação contida no diagrama por meio de pares ordenados.

Algumas crianças estavam brincando com um jogo onde deveriam sortear 3 cartas, e a cada carta era atribuída uma certa pontuação. As cartas eram numeradas de 1 a 5 e a pontuação correspondente a cada carta, como indicado no manual com as instruções do jogo, está mostrada através do seguinte diagrama:



O diagrama acima estabelece a carta sorteada (representada no conjunto A) x pontuação obtida (representada no conjunto B). Reflita sobre as seguintes questões:

Ao Professor: Na questão (a) espera-se que o aluno identifique que a pontuação obtida é o triplo do número da carta e consiga estabelecer a fórmula $y = 3x$.

a) Você observa alguma relação entre a pontuação da carta e o número da mesma? Por exemplo, é possível estabelecer alguma fórmula que relacione o número de pontos com o número da carta?

b) Você consegue representar, por meio de um conjunto de pares ordenados, a relação estabelecida entre a carta sorteada e a pontuação correspondente? Se sim, quais são estes pares?

Atividade 18

Objetivo(s): *Mostrar que até mesmo uma relação de correspondência entre variáveis que não são numéricas pode ser representada por um produto cartesiano.*

Um curso de Inglês tem turmas de cinco alunos. A tabela abaixo representa uma dessas turmas, associando a cada aluno o seu número de matrícula:

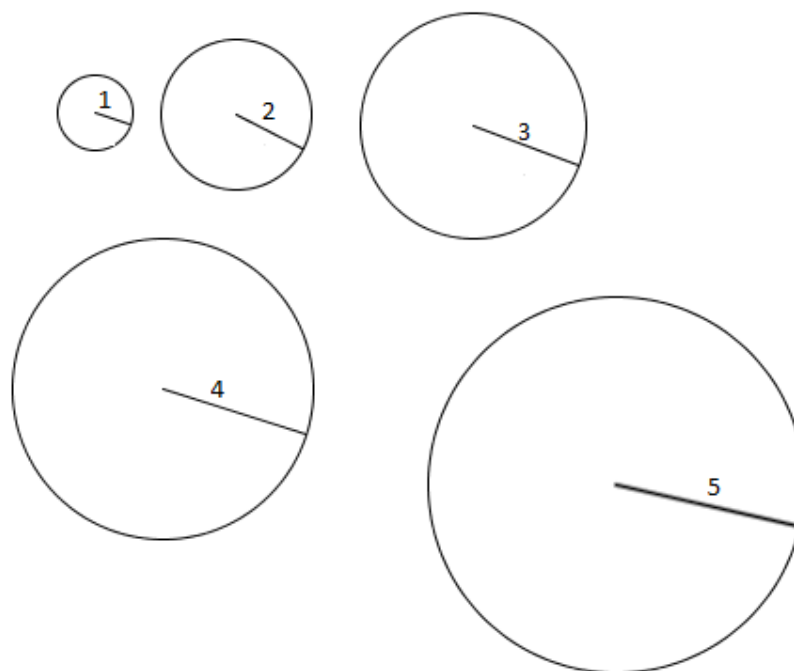
Aluno	Matricula
Alex	8731
Betânia	8739
Claudia	9142
Daner	5766
Michelsch	7391

É possível escrever por meio de um conjunto a relação estabelecida entre o nome do aluno e o número de matrícula do mesmo?

Atividade 19

Objetivo(s): *Que o aluno consiga construir uma tabela a partir de uma fórmula pré estabelecida.*

Sabendo que o cálculo do comprimento C de uma circunferência, é dado através da fórmula $C = 2\pi r$, onde r é a medida do raio desta circunferência, tomando os círculos abaixo, com seus raios indicados, complete a tabela, que informa o perímetro de cada círculo representado:



r	p
1	
2	
3	
4	
5	

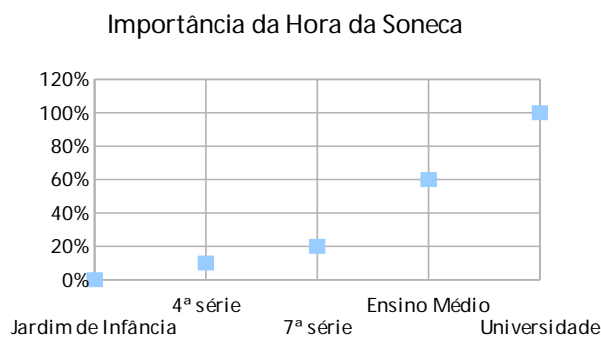
Agora represente, por meio de um conjunto a relação entre a medida do raio dos círculos e os seus perímetros.

Atividade 20

Objetivo(s): Que o aluno já comece a se familiarizar com (esboços de) gráficos, e que possa transformar dados de um gráfico em pares ordenados.

Observe o gráfico a seguir: (fonte:

http://trolldeplantaio.blogspot.com.br/2011_03_13_archive.html)



Observe que é possível relacionar alguns momentos da vida do ser humano com o percentual de importância da hora da soneca. É possível explicitar essa relação na forma de pares ordenados? Se sim, apresente-a nesta forma.

Você pode observar que todos os exemplos acima dizem respeito a relações entre duas variáveis. Na maioria deles as variáveis são grandezas. Independente disto, todos os exemplos mencionados possuem uma característica em comum. Você consegue identificar qual é esta característica? Escreva-a no quadro abaixo.

Ao professor: Neste momento, quer-se que os alunos observem que todos os exemplos desde a Atividade 14 puderam ser escritos na forma de pares ordenados – às vezes por extensão, às vezes só por compreensão, este último recurso necessário quando se trata de um conjunto infinito de pares ordenados a serem explicitados. Essa característica comum é precisamente a base da definição de função que adotaremos neste texto.

O que observamos nas situações apresentadas pelas atividades acima é que nem todas as relações são de causa e efeito, nem sempre existe fórmula, nem sempre existe regra, nem sempre é possível construir tabela ou diagrama, mas sempre é possível representar as relações na forma de par ordenado.

A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

As atividades anteriores nos fizeram ver que todas as relações possuem a característica comum de poderem ser escritas por meio de pares ordenados.

Algumas dessas relações ainda satisfazem outras condições que, quando satisfeitas, dão às relações um nome especial: funções.

Estas condições, listadas a seguir, definem quando um conjunto de pares ordenados de um produto cartesiano é uma função.

Definição:

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma função de A em B é um conjunto f de pares ordenados, do produto cartesiano $A \times B$ que satisfaz as seguintes condições:

- i) para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$
- ii) não existem dois pares ordenados distintos de f com o mesmo primeiro elemento.

Simbolicamente, escrevemos:

$$(x, y) \in f \text{ e } (x, z) \in f \rightarrow y = z.$$

(leia-se “se (x,y) e (x,z) são pares de f então $y=z$ ”)

Ao Professor: Sugerimos que você ressalte a seus alunos o significado do símbolo “ \rightarrow ” e estimule a “tradução em palavras” da frase simbólica acima, fazendo os alunos reconhecerem que o que está ali escrito em símbolos reflete de fato a condição escrita em (ii).

Observe que as atividades de 14 a 20 satisfazem a definição, portanto temos, em cada uma delas, exemplos de funções.

Ao Professor: Retome as atividades citadas e verifique com seus alunos a veracidade da afirmação acima, reiterando o último parágrafo que antecede esta Capítulo.

Atividade 21

Cinco pessoas foram consultadas e deveriam assinalar em uma tabela suas preferencias entre as guloseimas chocolate, brigadeiro e quindim. A tabela a seguir indica como foi a escolha:

Nome	Chocolate	Brigadeiro	Quindim
Carlos	x		
Bárbara	x	x	x

Eduardo		x	x
Liliana			x
Valéria	x		X

Pergunta-se: Seguindo a definição, a relação que associa cada pessoa a suas guloseimas favoritas pode ser considerada uma função? Sim ou Não? Justifique.

Ao Professor: Evoque com seus alunos a definição de função e induza-os a observarem que, no exemplo acima e também no próximo, as condições lá explicitadas não estão sendo satisfeitas.

Atividade 22

Tomando dois conjuntos, $A = \{1, 3, 4, 6\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, explicita os pares ordenados que descrevem a relação que associa a cada elemento do conjunto A o elemento do conjunto B (caso exista tal elemento), que é igual ao seu dobro.

A seguir responda: essa associação é uma função? Justifique.

Outras nomenclaturas associadas às funções:

Para cada par $(x, y) \in f$, dizemos que y é o valor de f em x e escrevemos isso como

$$y = f(x).$$

Assim, ao escrevermos $y = f(x)$, estamos indicando que o valor assumido pela variável y fica determinado em função da variável x , isto é, pelo conhecimento do valor que a variável x está assumindo (situação garantida pela condição (ii) acima).

Atividade 23

Dada a função que associa a cada número natural o seu triplo, pergunta-se:

a) Para cada par (x, y) associado pela condição descrita, qual é a fórmula que pode representar essa função?

Ao Professor: Esperamos que o aluno não tenha dificuldades de responder $y = 3x$ ou $f(x) = 3x$. Talvez a maior dificuldade seja a maneira como está posta a pergunta, já que esta é a primeira vez em que se fala em representar uma função.

b) Determine $f(7)$.

c) Qual(is) é(são) o(s) valor(es) de x tais que $f(x) = 15$?

O conjunto A mencionado na definição de função é denominado domínio da função f e o conjunto B é dito contradomínio de f .

No exemplo anterior, podemos afirmar que o domínio da função em questão é o conjunto dos números naturais, mas B pode ser o conjunto dos números naturais ou dos números inteiros, ou mesmo dos números reais ou qualquer conjunto que contenha o conjunto dos números naturais que são múltiplos de 3.

Ao Professor: Alerta seus alunos para o fato que o contradomínio pode ser qualquer conjunto que contenha o conjunto dos números naturais que são múltiplos de 3, levando-os ao completo entendimento desta afirmação: qualquer conjunto B satisfazendo esta condição vai proporcionar o mesmo conjunto de pares ordenados (ou seja, a mesma função!) Ressalte também o fato que, se para B tomarmos qualquer conjunto que deixe de conter algum múltiplo de 3, então deixamos de ter em mãos uma função.

O conjunto dos valores de $y \in B$ determinados por $y = f(x)$ para todos os valores de $x \in A$ é chamado imagem de f e representado por $Im(f)$. Simbolicamente:

$$Im(f) = \{y \in B / y = f(x)\}$$

Atividade 24

Considere a função f que associa a cada número real x o seu quadrado, ou seja, que é determinada pela fórmula $f(x) = x^2$. Pergunta-se:

- Qual a imagem de $x = 3$?
- Qual(is) elemento(s) do domínio tem(têm) imagem igual a 25?

Ao Aluno: Aqui é preciso ter cuidado para que não ocorra confusão de notação. Usamos a notação f para nomear o subconjunto do produto cartesiano que gera a função, enquanto que $f(x)$ é o nome do segundo elemento do par ordenado de um elemento genérico de f , ou seja, $f(x)$ se refere a imagem gerada pelo valor correspondente de x .

Simbolicamente:

$$f = \{(x, f(x)) / x \in A\}$$

Ao Professor: As atividades a seguir devem ser desenvolvidas em conjunto professor-aluno.

Atividade 25

Objetivo(s): Que o aluno consiga reconhecer em uma atividade já trabalhada no momento “motivação”, o domínio, o contradomínio, o conjunto imagem, pares ordenados pertencentes à função e identifique imagens de alguns elementos específicos.

Um curso de Inglês tem turmas de cinco alunos. A matrícula de cada aluno é formada por um número de quatro algarismos significativos. Observe a tabela que associa a cada aluno o seu número de matrícula:

Aluno	Matricula
Alex	8731
Betânia	8739
Claudia	9142
Daner	5766
Michelsch	7391

Nesta tabela está representada uma função, pois o conjunto de pares ordenados que ela origina satisfaz todos os requisitos explicitados na definição.

Vamos responder a alguns questionamentos:

- Qual conjunto é o domínio desta função?
- Qual conjunto é o contradomínio da função?
- Qual conjunto é a imagem da função?
- Qual é a imagem do elemento Claudia do domínio desta função?
- Qual o elemento do domínio cuja imagem é 8731?
- O par (Firmino, 6785) pertence à função explicitada pela tabela?

Atividade 26

Objetivo(s): Que o aluno consiga reconhecer, ao refletir sobre o item (c), que o domínio neste caso é um conjunto infinito, bem como identificar alguns pares ordenados, e tanto a imagem quanto a pré-imagem de algum número específico. E também que o aluno reconheça que é impossível representar em uma tabela toda a função em questão, uma vez que o domínio é um conjunto infinito.

Considere a relação entre as grandezas perímetro do círculo (C) e raio do círculo (r) estabelecida pela fórmula

$$C = 2\pi r.$$

Esta relação entre perímetro e medida do raio, já citada anteriormente, também estabelece uma função, pois o conjunto de pares ordenados (r, C) que ela origina satisfaz todos

os requisitos explicitados na definição de função. Por isso, podemos também escrever $C(r)$ para o perímetro associado ao raio.

Solicita-se que você complete a segunda coluna da tabela abaixo, que envolve *alguns* valores do raio, dados em centímetros:

r	$C(r)$
1	
2,3	
$3/5$	
4,2	
5	

Pergunta-se:

- Qual a imagem correspondente ao elemento 4,2 do domínio?
- O par $(8, 16\pi)$ pertence a função? E o par $(11, 54\pi)$?
- É possível completar a tabela acima com todos os valores possíveis de r ?
- Qual é, afinal, o domínio desta função?
- Existe algum elemento do domínio cuja imagem é 4π ?

Ao Professor: Deseja-se que, para a atividade acima, o aluno se dê conta, e consiga provar, que uma função desta forma tem necessariamente domínio e imagem positivos. Mas espera-se sim alguma dificuldade da parte do aluno no item (e) com o raciocínio “todo real positivo é imagem de alguém”.

Ao Professor: Sugere-se que, neste momento, aproveitando para trabalhar com números irracionais e lembrar alguns fatos sobre eles, seja introduzida a questão paralela “É possível gerar nesta tabela um par formado só por números inteiros? E só por números racionais? Justifique”.

Usando a atividade anterior, prove que a imagem da função $C(r)$ é \mathbb{R}_+ , escrevendo no quadro abaixo.

Convencionamos aqui $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_-^* = (-\infty, 0]$.

Funções Reais de Variável Real

Ao professor: Como nosso estudo, a partir daqui, tratará apenas de funções numéricas, isto é, aquelas onde o domínio e o contradomínio são formados exclusivamente por números reais, sugerimos convencionar que toda função aqui considerada a partir de agora terá como contradomínio o conjunto dos números Reais. A justificativa para uma tal convenção é, principalmente, uma coerência com a noção de igualdade entre funções: segundo a definição aqui adotada para função, fica claro que o que interessa sobre uma função são os pares ordenados que a formam, e não quais elementos não fazem parte da imagem: basta voltar à Atividade 2 e perceber que não haveria nenhuma mudança significativa se trocássemos \mathbb{R}_+ por \mathbb{R} . O professor deve refletir sobre a seguinte situação relacionada a esta sugestão e que pretende justificar e motivar tal convenção: “a função exponencial” é normalmente apresentada nos livros didáticos com contradomínio igual à imagem ($f(x) = a^x$ onde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$); porém, se o contradomínio for o conjunto \mathbb{R} , em nada se alteram os pares ordenados que formam a função. (Além disso, reflita sobre a questão: por que a função quadrática f dada por $f(x) = x^2$ não é então apresentada com contradomínio $[0, +\infty)$?). Se voltarmos aos exemplos motivadores acima apresentados que tratam de funções numéricas, podemos observar que as relações não só não deixam de ser funções se restringimos o contradomínio apenas ao conjunto imagem, ou se tomamos como contradomínio todo o conjunto \mathbb{R} como o conjunto de pares ordenados formados não se altera, ou seja, são funções iguais (pela definição de função que aqui adotamos – importante!), e por isso, com tal convenção, não estaremos excluindo de nossos estudos nenhuma função real de variável real.

Nosso estudo sobre funções, a partir daqui, tratará apenas de funções numéricas, isto é, de funções cujo domínio e contradomínio são formados apenas por números reais. Por isso vamos, a partir de agora, considerar sempre como contradomínio o conjunto \mathbb{R} dos números Reais.

Convenção: Neste texto, trataremos daqui em diante, não mais de funções quaisquer entre dois conjuntos A e B e sim apenas de funções chamadas funções reais de variável real, que são funções de A em \mathbb{R} com $A \subseteq \mathbb{R}$.

Notação: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \subseteq \mathbb{R}$

Atividade 27

Verifique se os conjuntos de pares ordenados abaixo podem ou não representar funções $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (com $A \subseteq \mathbb{R}$) para uma conveniente escolha do domínio A ; em caso afirmativo, explicita o domínio e a imagem de tais funções.

a) $f = \{(1,3) (2,5) (3,7) (4,9)\}$

b) $f = \{(-1,1) (2,3) (-1,4) (2,7) (-1,8) (2,11)\}$

Atividade 28

Dados os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $f = \{(x, y) / x \in A, y \in \mathbb{R} \text{ e } y=2x\}$.

a) Verifique se o conjunto f é ou não uma função. Justifique.

b) E se $A = \{\text{inteiros pares}\}$, mantendo o conjunto f , ainda temos uma função?

Atividade 29

Sabendo que $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $f = \{(x, y) / x \in A, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = x^2\}$, verifique se o conjunto f é ou não uma função. Justifique.

Atividade 30

Sabendo que $A = \{0, 1, 4, 9\}$ e $f = \{(x, y) / x \in A, y \in \mathbb{R} \text{ e } x = y^2\}$, verifique se o conjunto f é ou não uma função. Justifique.

Atividade 31

O conjunto dos pares ordenados cujo primeiro elemento é um número natural e o segundo elemento é o dobro do primeiro é uma função?

Ao Professor: Para a questão a seguir, lembramos que existem números reais que admitem duas representações decimais, tais como $3,0=2,999\dots$ ou $4,230=4,229999\dots$ (e por isso a expressão “de uma” e não “da” no enunciado abaixo)

Atividade 32

Decida se a regra que associa a cada número real x o algarismo dos décimos de uma expansão decimal de x é ou não uma função.

Domínio matemático x domínio contextual.

Atenção para o Domínio de Funções!

Em alguns casos, o domínio de uma função não nos é apresentado explicitamente; são muitas as situações em que uma função nos é apresentada sem que seu domínio seja evidenciado, como na Atividade 26, onde você foi convidado a refletir e explicitá-lo.

A atividade 26 é também um exemplo de situação em que o contexto prático (raio do círculo e seu perímetro, que obedecem a fórmula $C = 2\pi r$) faz com que o domínio seja menor do que o domínio que a Matemática comportaria (aqui estamos pensando exclusivamente na fórmula $y = 2\pi x$, onde podemos considerar valores negativos para x). Chamamos estes diferentes domínios de domínio matemático (aquele que é regido exclusivamente pela regra matemática que forma a função e que é o maior conjunto possível de números reais que poderíamos tomar para domínio) e domínio contextual (que é o domínio matemático alterado pela situação prática, e que é formado apenas pelos valores do domínio matemático que fazem sentido na situação prática em questão). Vamos analisar mais alguns exemplos:

Atividade 33

Ao Professor: Na questão a seguir falamos em maior domínio possível sugerindo ao aluno explorar o domínio matemático.

a) Qual é o maior domínio (isto é, o domínio matemático) da função f dada pela fórmula $f(x) = x^2$?

b) Considere a função que associa a área (A) de um quadrado em função do comprimento do lado (l) desse quadrado. Qual a fórmula que representa essa função? E qual o seu domínio?

Observe que as situações (a) e (b) acima são funções definidas pela mesma fórmula, porém os domínios de ambas são distintos. Na atividade (a) temos o domínio matemático, determinado exclusivamente pela regra (no caso fórmula) que definiu a função. Já em (b), embora a fórmula seja a mesma, precisou-se levar em consideração o contexto do problema: no caso, a variável independente é o comprimento do lado e, conseqüentemente, não podemos

ter valores negativos nem nulos para ela; temos aí então o que chamamos um domínio contextual.

Ao Professor: Na questão a seguir falamos em maior domínio possível sugerindo ao aluno explorar o domínio matemático.

Considere a função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela fórmula $f(x) = \frac{2x+3}{x}$. Qual é o maior domínio possível A para esta função?

O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

O gráfico de uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \subseteq \mathbb{R}$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) que tenham a pertencente ao domínio A da função e $b = f(a)$. Simbolicamente:

$$G(f) = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b = f(a)\}.$$

Ao professor: É muito provável que um aluno atento questione “Portanto gráfico é o mesmo que função?” Uma sugestão de resposta é: “em termos de conjuntos sim”, mas o que estamos aqui querendo salientar é que uma função pode não nos ser apresentada diretamente pelos pares ordenados que a formam – note que foi precisamente isto o que aconteceu na grande maioria dos exemplos motivadores, bem como nas atividades acima. É disso que trata o parágrafo a seguir.

Observe que, muitas vezes, uma função nos é apresentada diretamente através do seu gráfico. Mas outras vezes não. Por exemplo, na Atividade 31, a função foi apresentada por uma regra, enquanto

$$G(f) = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } y = 2x\}.$$

Ao professor: O que queremos salientar a seguir é a diferença entre “gráfico” e “esboço de gráfico”: muitas vezes é impossível representar no plano cartesiano todo o conjunto f , por isso falamos em esboço/caricatura do gráfico no lugar de gráfico propriamente dito.

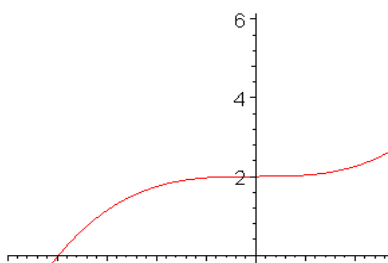
Salientamos que, apesar de muitas vezes ser possível representar uma função de outra forma (como fórmulas, regras, tabelas, diagramas ou esquemas), o fato de agora estarmos

tratando especificamente de funções reais de variável real tem a grande vantagem de podermos “tentar visualizar” uma função, tentando localizar no plano cartesiano os pares ordenados que a formam. Esta tentativa, que muitas vezes trata apenas de partes de f , é denominada esboço do gráfico de f , e tem o papel de ser uma *caricatura* do $G(f)$. Ressaltamos que muitas vezes é praticamente impossível e outras vezes é realmente impossível representar-se com precisão o conjunto $G(f)$, por isso, é comum nos contentarmos com um esboço do mesmo. As próximas atividades pretendem evidenciar isto.

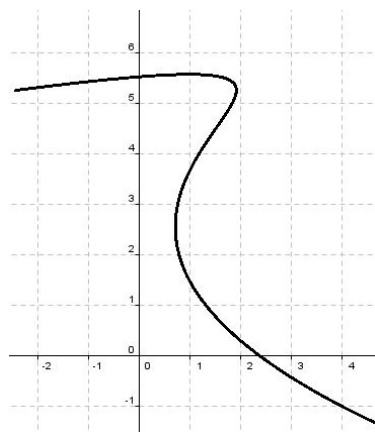
Ao professor: Sugerimos que seja bem reforçada com os alunos a diferença entre função, gráfico, representação geométrica e esboço do gráfico, trazendo tanto exemplos em que o esboço não é apenas uma caricatura, quanto exemplos em que apenas uma caricatura é obtida, sem a menor chance de a mesma poder ser aprimorada a uma representação fiel do $G(f)$.

Atividade 34

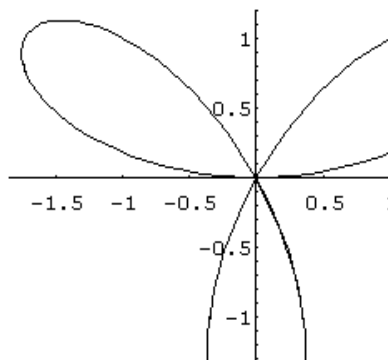
Analise se os desenhos a seguir podem representar o esboço de uma função real de variável real, assinalando se representam ou não, justificando a seguir sua resposta:



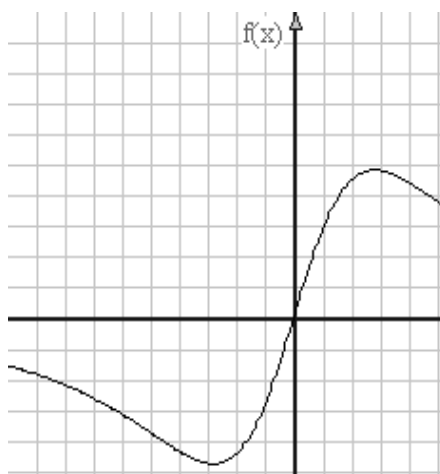
sim não Justificativa:



sim não Justificativa:



sim não Justificativa:



sim não Justificativa:

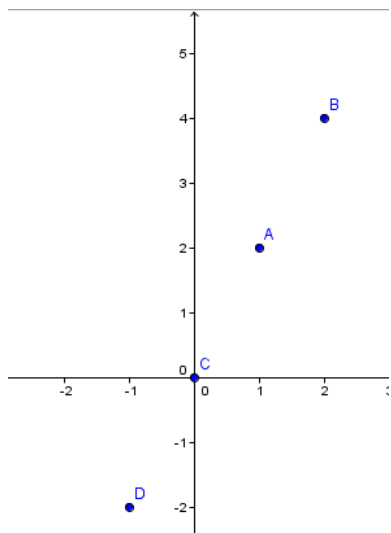
FUNÇÃO MONÓTONA

Objetivo(s): Espera-se que os alunos observem a diferença nos esboços e consigam diferenciar funções monótonas das não monótonas.

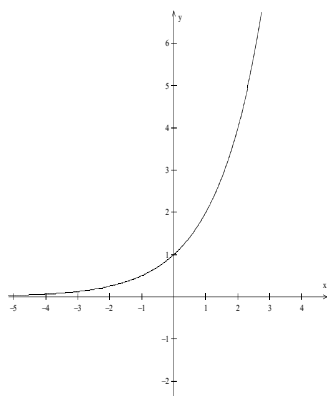
Motivação: Os esboços abaixo representam funções (convença-se disto!); a seguir, observe atentamente cada um deles.

Ao professor: Sugerimos que, antes de iniciar a atividade, seja reiterada aos alunos a orientação de certificarem-se antes de tudo que todos os desenhos abaixo podem sim representar esboços de funções reais de variável real (para um conveniente domínio).

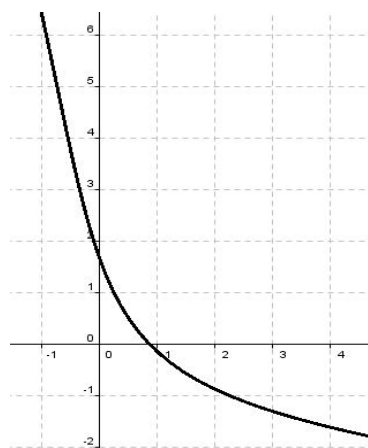
Esboço 1:



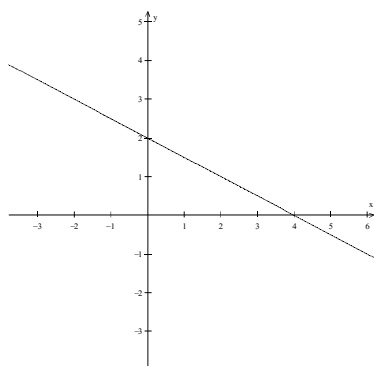
Esboço 2:



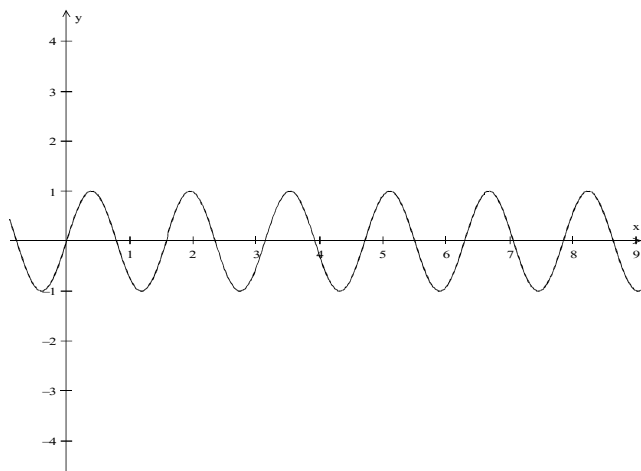
Esboço 3:



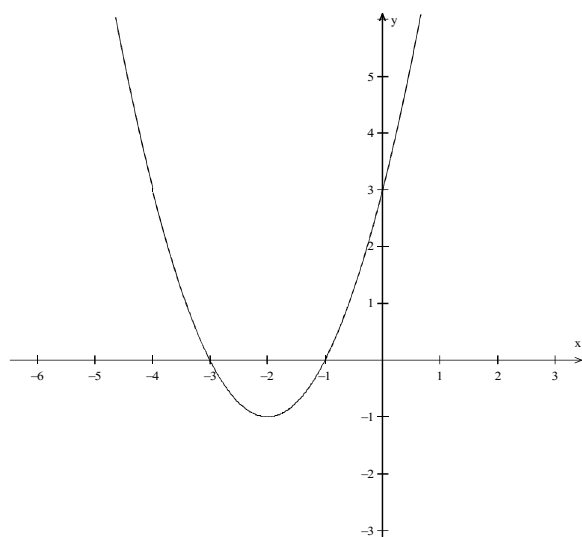
Esboço 4:



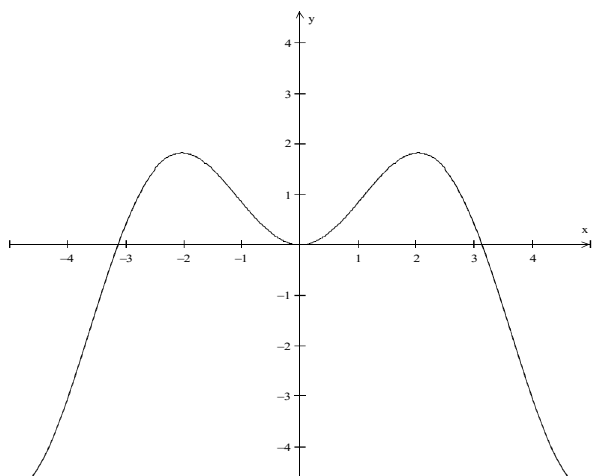
Esboço 5:



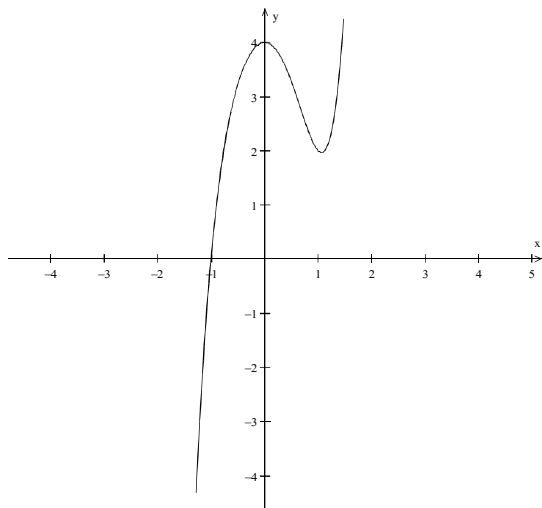
Esboço 6:



Esboço 7:



Esboço 8:



Vamos separar os esboços acima em dois grupos:

Grupo 1: esboços de 1 a 4 e

Grupo 2: esboços de 5 a 8.

Agora responda aos seguintes questionamentos:

a) Você reconhece alguma característica que é comum aos esboços pertencentes do Grupo 1 e que nenhum esboço do Grupo 2 possui?

Ao professor: Encaminhe a discussão sobre as diferenças entre o Grupo 1 e o Grupo 2 em direção a salientar o fato de os esboços do Grupo 1 estarem associados a funções monótonas e o Grupo 2 não.

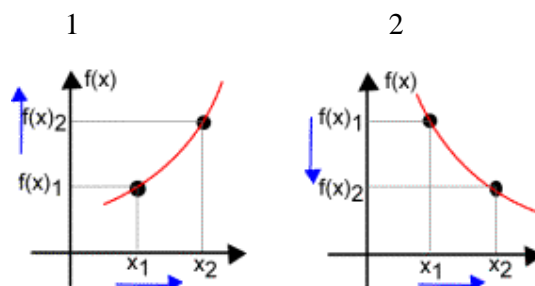
b) Que diferença(s) você observa comparando os esboços do Grupo 1 aos esboços do Grupo 2? Explique, com suas palavras, a(s) diferença(s) observada(s) (sugestão: tente utilizar os termos “estritamente crescente”, “estritamente decrescente”, “nem crescente nem decrescente”).

As funções representadas no Grupo 1 são chamadas monótonas, por serem estritamente crescentes (1 e 2) ou estritamente decrescentes (3 e 4). Já no Grupo 2 isso não ocorre, pois temos momentos de crescimento e momentos de decrescimento no mesmo gráfico. Tornemos precisos tais conceitos:

Função monótona crescente é toda função que preserva a condição de que, à medida que a variável independente cresce, a variável dependente também cresce.

Função monótona decrescente é toda função que preserva a condição de que, à medida que a variável independente cresce, a dependente decresce.

Na figura, ilustramos a ideia de funções monótonas fazendo uso de flechas: na esquerda temos uma função monótona crescente e na direita temos uma função monótona decrescente.



Ao Professor: Alerta seus alunos para o fato de que a hipótese nas condições acima é a mesma: sempre observamos o que acontece enquanto a variável independente vai aumentando.

Reescrevemos as definições acima usando agora simbologia matemática: dada uma função $f:A \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que:

- i) f é monótona crescente se, para quaisquer x_1 e $x_2 \in A$ e satisfazendo a condição $x_1 < x_2$, ocorre $f(x_1) < f(x_2)$. Ou ainda

$$\forall x_1, x_2 \in A, [x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)] \quad (*)$$

- ii) f é monótona decrescente se, para quaisquer x_1 e $x_2 \in A$ e satisfazendo a condição $x_1 < x_2$, ocorre $f(x_1) > f(x_2)$. Ou ainda

$$\forall x_1, x_2 \in A, [x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)] \quad (**)$$

Ao Professor: A atividade a seguir deve ser respondida usando a definição de função monótona, e não através do esboço do gráfico. Deixaremos para tratar do crescimento/decrescimento da função linear e da afim quando tratarmos particularmente destas funções. Sugerimos que a atividade seja respondida inicialmente com palavras e posteriormente seja reescrita a resolução fazendo uso da simbologia matemática, preenchendo-se um quadro da forma abaixo, tentando evitar que se crie para o aluno a ideia que uma “argumentação matemática” ou “demonstração” tem que necessariamente envolver simbologia matemática. Acreditamos também que, desta forma, a simbologia se torne mais “simpática” para o aluno, no momento em que ele percebe que ela é a ideal para se expressar com precisão.

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

Atividade 35

Determine se as funções abaixo, de domínio \mathbb{R} , são ou não monótonas (estritamente crescentes, estritamente decrescentes ou nenhum dos casos):

- a) a função f dada por $f(x) = 3x$

Ao Professor: Reforçando que “argumentação” em matemática nada tem a ver com “formalismo”, trazemos um exemplo de preenchimento do quadro que sugerimos para a resolução desta atividade. Sugere-se que o aluno seja estimulado a justificar cada implicação matemática que ele utilize.

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática										
<p><i>Observamos que, à medida que o valor de x aumenta, por propriedades dos números reais, o valor de $3x$ também aumenta, ou seja, o valor de $f(x)$ também aumenta. Assim, temos uma função estritamente crescente.</i></p>	<p><i>Para cada x_1, x_2 escolhidos no domínio de f, temos</i></p> <table border="1"> <tr> <td>$x_1 < x_2$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$3x_1 < 3x_2$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$f(x_1) < f(x_2)$</td> </tr> <tr> <td></td> <td>(1)</td> <td></td> <td>(2)</td> <td></td> </tr> </table> <p><i>(1):pela propriedade: multiplicando ambos os lados de uma desigualdade por 3 a mesma permanece inalterada</i></p> <p><i>(2): pela definição de f Pela definição de função monótona, concluímos que f é uma função estritamente crescente.</i></p>	$x_1 < x_2$	\rightarrow	$3x_1 < 3x_2$	\rightarrow	$f(x_1) < f(x_2)$		(1)		(2)	
$x_1 < x_2$	\rightarrow	$3x_1 < 3x_2$	\rightarrow	$f(x_1) < f(x_2)$							
	(1)		(2)								

b) a função f dada por $f(x) = -6x$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

c) a função f dada por $f(x) = 2x + 3$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

--	--

d) a função f dada por $f(x) = 5$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

e) a função f dada por $f(x) = x^2$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

f) a função f dada por $f(x) = x^3$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

g) a função f dada por $f(x) = -2x + 1$

Resolução em palavras	Resolução fazendo uso da simbologia matemática

--	--

Tente agora reconhecer a monotonicidade em situações contextualizadas:

Ao professor: Neste próximo exemplo comece evocando o fato de que se pode tratar o problema com a linguagem de funções, e que, neste caso, trata-se de uma função monótona crescente.

Atividade 36

Três trabalhadores constroem um muro de 20 metros em uma semana. Supondo que o rendimento seja o mesmo, quantos metros de muro construirão em uma semana:

- a) Seis trabalhadores?
- b) Nove trabalhadores?
- c) Doze trabalhadores?
- d) Quinze trabalhadores?
- e) Dezoito trabalhadores?

Ao professor: Neste próximo exemplo, deve-se alertar que, fazendo uso da linguagem de funções, temos em mãos uma função monótona decrescente.

Atividade 37

Quatro torneiras de mesma vazão, quando funcionando juntas, enchem um tanque em seis minutos. Se fechássemos uma delas, em quanto tempo as outras três, funcionando juntas, demorariam para encher o mesmo tanque? E se fechássemos duas? E se fechássemos três?

Ao professor: Na próxima atividade, queremos abordar o caso de uma função que é nem crescente e nem decrescente. Particularmente, trazemos à discussão uma situação que incomoda a muitos alunos: “função constante é uma função?”

Atividade 38

Uma pessoa resolve fazer uma dieta que promete a perda de 0,5 kg por semana. Porém esta pessoa não controla muito bem sua alimentação. Ao final da primeira semana seu peso não muda, ao final da segunda continua o mesmo e ao final da terceira novamente, ao se pesar, ela constata que continua com o mesmo peso da semana anterior. Ela desiste da dieta.

Em termos de função podemos dizer que a relação “tempo x peso” representa uma função? Se sim, ela é crescente, decrescente ou nenhum dos dois? Justifique.

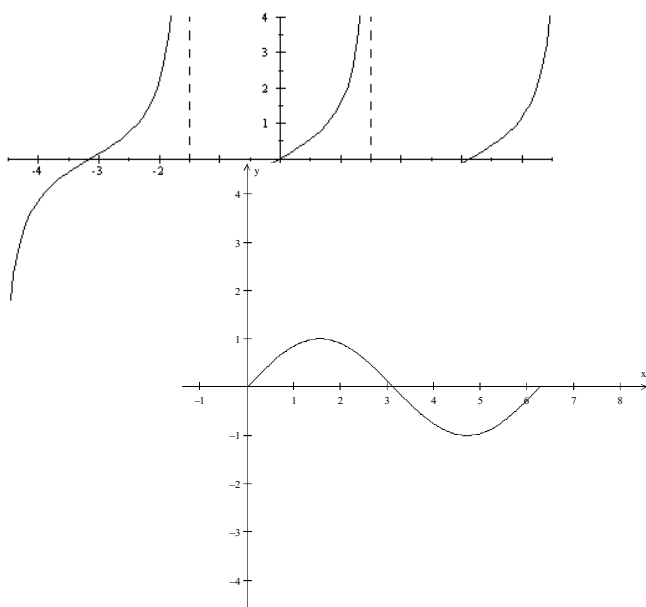
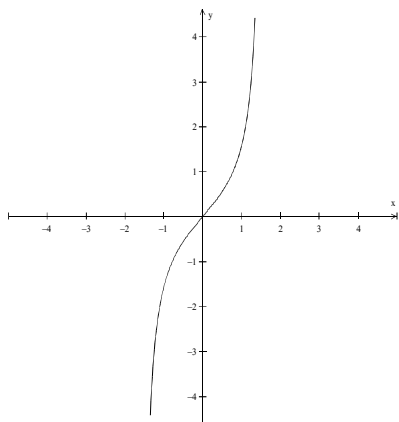
Objetivo(s): Que o aluno saiba reconhecer se ocorre ou não monotonicidade, através do esboço do gráfico de funções.

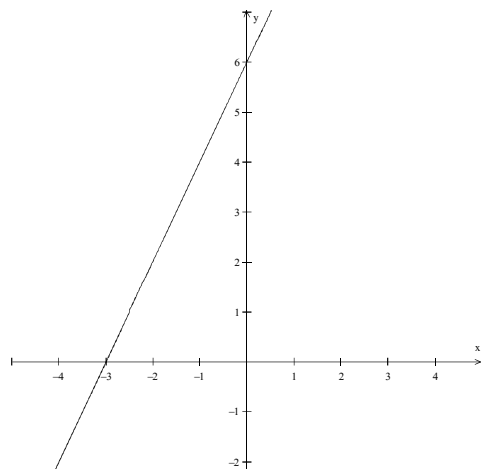
Ao Professor: Evoque neste momento as condições para que o esboço de um gráfico represente uma função estritamente crescente, estritamente decrescente ou nenhum dos casos. Sugere-se analisar os esboços utilizando:

- i) geometria (trabalhando com o sentido das flechas)*
- ii) a simbologia matemática utilizada em (*) e (**).*

Atividade 39

Considerando que as curvas abaixo representam esboços de gráficos de funções, analise as ali representadas quanto à monotonicidade:





Atividade 40

Observe as funções abaixo e, sem apelar para o esboço do gráfico das mesmas, decida se elas funções aqui representadas são crescentes, decrescentes ou nenhum dos casos.

- a) $f = \{(-1,2) (0,3) (1,4) (2,5) (3,6) (4,7)\}$
- b) $f = \{(-1,12) (0,10) (1,8) (2,6) (3,4) (4,2)\}$
- c) $f = \{(-1,2) (0,3) (1,4) (2,4) (3,4) (4,7)\}$
- d) $f = \{(-1,2) (0,2) (1,2) (2,2) (3,2) (4,2)\}$

Agora faça o esboço do gráfico de cada uma delas e confirme geometricamente suas respostas.

Ao professor: Queremos que os alunos reconheçam tanto a monotonicidade quanto a não monotonicidade de uma função também a partir da fórmula que a descreve, isso fica evidenciado nas próximas atividades.

Atividade 41

Considere a função $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -3x$, sendo $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Decida se f é estritamente crescente, estritamente decrescente ou nem crescente nem decrescente. Justifique sua resposta

- i) geometricamente (trabalhando com o sentido das flechas);
- ii) fazendo uso da simbologia matemática utilizada em (*) e (**).

Atividade 42

Considere a função $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5x + 1$, sendo $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Decida se f é estritamente crescente, estritamente decrescente ou nem crescente nem decrescente. Justifique sua resposta

- i) geometricamente (trabalhando com o sentido das flechas);
- ii) fazendo uso da simbologia matemática utilizada em (*) e (**).

Atividade 43

Considere a função $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, sendo $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Decida se f é estritamente crescente, estritamente decrescente ou nem crescente nem decrescente. Justifique sua resposta

- i) geometricamente (trabalhando com o sentido das flechas);
- ii) fazendo uso da simbologia matemática utilizada em (*) e (**).

Atividade 44

Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x$. Decida se f é estritamente crescente, estritamente decrescente ou nem crescente nem decrescente. Justifique sua resposta

- i) geometricamente (trabalhando com o sentido das flechas);
- ii) fazendo uso da simbologia matemática utilizada em (*) e (**).

Atividade 45

Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -7x$. Decida se f é estritamente crescente, estritamente decrescente ou nem crescente nem decrescente. Argumente

- i) geometricamente (trabalhando com o sentido das flechas);
- ii) usando a simbologia matemática, como em (*) e (**).

A partir de agora, passamos a tratar exclusivamente de funções que podem ser dadas por fórmulas, iniciando pelas fórmulas mais simples.

Queremos ressaltar características particulares de cada uma delas e depois explorar a relação que existe entre as variáveis dependente e independente, no sentido de serem ou não grandezas que variam com mesmo sentido, grandezas que variam com sentidos contrários, grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais ou nenhum destes casos.

Ao professor: Esclarecemos que por “fórmulas mais simples” estamos nos referindo às funções Linear, Afim e Homográfica expressa pela fórmula $f(x)=k/x$ com k constante não nula.

FUNÇÃO LINEAR

Objetivo(s): Que os alunos sejam capazes de decidir se uma função é ou não linear ou do tipo linear e de identificar que toda função linear é uma relação entre grandezas diretamente proporcionais.

Ao professor: Introduzimos nesta proposta a nomenclatura “função do tipo” (que não é usual na literatura nem nos livros didáticos) para evitar a incoerência de definir, por exemplo, função linear exigindo domínio igual a \mathbb{R} e depois considerar situações onde o domínio contextual não é igual a \mathbb{R} e continuar chamando a função de linear.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser escrita na forma $f(x) = kx$, onde k é alguma constante real é Função Linear. Neste caso, a constante k é chamada *coeficiente angular* de f .

Uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \subseteq \mathbb{R}$, que pode ser escrita na forma $f(x) = kx$, onde k é alguma constante real, é chamada Função *do tipo* Linear.

Ao professor: Atente na definição para o termo “que pode ser escrita”, e o trabalho requerido do aluno em decidir nos itens abaixo (de c a f) sobre a possibilidade de a função ser reescrita na forma $f(x) = kx$, onde k é uma constante real a ser encontrada.

Atividade 46

Verifique se cada função a seguir explicitada por uma fórmula é ou não linear (ou do

tipo linear), justificando sua resposta:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = -5x$

c) $f(x) = 2x + 3$

d) $f(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$

e) $f(x) = \frac{-5x^3 + 10x^2 - 5x}{x^2 - 2x + 1}$

f) $f(x) = (2x^3 - 4x) / (x - 2)$

g) $f(x) = 0$

Ao Professor: Na atividade a seguir, espera-se que o aluno conclua que, quando se tem uma função (do tipo) linear, que pode ser dada, digamos, por $f(x) = kx$, então:

– se $k > 0$, a função (do tipo) linear é crescente;

– se $k < 0$, a função (do tipo) linear é decrescente.

Note que esta atividade requer que o aluno trabalhe necessariamente com a função (do tipo) linear reescrita na forma $f(x) = kx$ (k constante).

Atividade 47

Para cada função apresentada na tabela a seguir, marque com um “x” as características que dizem respeito a cada uma delas e, na última coluna, complete com o valor do coeficiente angular, se este existir:

FUNÇÃO	linear	do tipo linear	crescente	decrescente	nenhuma delas	coeficiente angular
$f(x) = 2x$						
$f(x) = -5x$						
$f(x) = 2x + 3$						
$f(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$						
$f(x) = \frac{-5x^3 + 10x^2 - 5x}{x^2 - 2x + 1}$						

$f(x) = (2x^3 - 4x)/(x - 2)$						
$f(x) = 0$						

Ao Professor: Estimule seus alunos a responderem a questão a seguir fazendo uso da expressão analítica de f .

Como você justifica cada uma de suas respostas?

Algumas funções podem ser definidas por várias fórmulas, cada uma delas valendo em apenas uma parte do domínio; tais funções são ditas funções definidas por partes. Você tem uma função definida por partes na atividade a seguir.

Ao Professor: A seguir apresentamos um exercício de aplicação no dia a dia de função definida por partes, sendo todas as fórmulas do tipo linear. Note que, no item “a”, ao mencionarmos as taxas extras, já estamos preparando o aluno para o que será perguntado no item “c”.

Atividade 48

Uma companhia de energia elétrica calcula as tarifas relativas ao fornecimento de energia elétrica residencial padrão de acordo com a tabela a seguir:

<i>TARIFAS DE ENERGIA ELÉTRICA</i>	
<i>Faixa de Consumo em kWh</i>	<i>Tarifa em R\$ por kWh</i>
<i>até 20</i>	<i>0,68</i>
<i>até 50</i>	<i>0,83</i>
<i>acima de 50</i>	<i>1,02</i>

- Considerando apenas o consumo mensal, e ignorando as taxas extras que fazem parte de uma conta real de fornecimento de energia elétrica, tais como taxa de transmissão, distribuição, encargos, ICMS, PIS, COFINS, e taxa de iluminação pública, quais seriam os valores cobrados para um consumo de 15 kWh , 30 kWh e 60 kWh ?
- Introduzindo as variáveis q e c nesta situação, sendo q para representar a quantidade consumida em kWh e c para representar o valor a ser cobrado, explicita a função que representa a relação entre q e c usando, se necessário, mais de uma fórmula (ou seja, seria esta uma função definida por partes?)
- Você deve ter percebido que a função q é afinal composta por funções *do tipo* linear. Se ao valor cobrado c a taxa extra de iluminação pública no valor de R\$ 3,65 e sabendo que as taxas extras são valores fixos cobrados além do consumo, pergunta-se:

a função continuaria q continuaria sendo formada por funções *do tipo* linear? Justifique.

Observe que muitas situações práticas podem ser equacionadas matematicamente por meio de fórmulas. Este fato é uma grande vantagem, pois, assim, muitas propriedades da função podem ser detectadas pela análise da(s) fórmula(s) que a define(m).

Ao Professor: No que segue, espera-se que os alunos se deem conta da proporcionalidade direta estabelecida entre as duas grandezas envolvidas em qualquer função linear para, a seguir, tratarmos da recíproca (será que toda proporcionalidade entre duas grandezas pode ser equacionada por uma função linear?)

Propriedades da função Linear

Ao Professor: Neste momento é necessário relembrar com os alunos os tipos de relações entre duas grandezas que estudamos no início desta proposta.

Para estudarmos algumas propriedades da função linear, sugerimos que você recorde as definições de grandezas que variam com mesmo sentido, grandezas que variam com sentidos contrários, grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais estudadas no início deste capítulo.

Ao Professor: Oportunize a seus alunos formas de chegarem ao raciocínio genérico esperado, com o questionamento a seguir.

Agora pergunta-se: a relação entre as duas variáveis estabelecida por uma função linear se encaixa sempre em algum dos tipos estudados?

Ao Professor: Espera-se que os alunos intuem, após alguma reflexão ou exemplos, que:

Toda função linear ou *do tipo* linear estabelece uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis por ela relacionadas (estas grandezas são a variável dependente e a variável independente).

Ao Professor: Cabe aqui ressaltar que apenas intuição ou alguns testes não nos

permitem afirmar em matemática que a afirmação acima é verdadeira, e que precisamos nos certificar de que ela é verdadeira para todas as funções lineares e para todos os valores que as variáveis podem assumir. Novamente reforçando que em matemática “argumentação” não necessariamente envolve “formalismo” ou “simbologia matemática”, sugerimos também que a demonstração que aqui buscamos seja feita inicialmente em palavras, para só depois ser reescrita fazendo uso de simbologia matemática, conforme quadro apresentado abaixo. Neste momento, talvez o aluno já perceba a dificuldade que se tem se não fazemos uso da simbologia.

Vamos neste momento demonstrar esta importante propriedade para funções lineares ou *do tipo* lineares:

Justificando matematicamente a afirmação acima com palavras	Justificando matematicamente a afirmação acima fazendo uso da simbologia matemática:

Ao Professor: *Demonstração Sugerida fazendo uso da simbologia matemática:*

Denotemos por f uma função linear ou do tipo linear, digamos, dada por $f(x) = kx$ (k constante). Denotando por y a variável dependente, temos que variável dependente e independente se relacionam através da fórmula $y = kx$.

Por definição de proporcionalidade direta, as variáveis x e y são diretamente proporcionais se e só se todos os valores de “ x ” e os correspondentes valores de “ y ” determinam sempre o mesmo quociente.

Ora, no caso da função f acima, temos:

- ao valor $x=0$ corresponde o valor $y=k \cdot 0=0$;*
- para quaisquer valores não nulos x_1, x_2 escolhidos para a variável independente x e pertencentes ao domínio da função, temos que os valores de y que lhes correspondem são, respectivamente, $y_1 = kx_1$ e $y_2 = kx_2$.*

Daí:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{kx_1}{x_1} = k \quad e \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{kx_2}{x_2} = k$$

Portanto a função f , que é uma função (do tipo) linear, estabelece uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis dependente e independente, quaisquer que sejam os valores escolhidos para a variável independente.

O que você acaba de fazer acima (tanto na primeira quanto na segunda coluna), é o que em matemática chamamos de *demonstração* para a afirmação “Toda função linear ou *do tipo* linear estabelece uma relação de proporcionalidade direta entre as grandezas por ela relacionadas”. Uma demonstração em matemática muitas vezes, como no caso acima, é um encadeamento de deduções que mostram que a afirmação em questão é consequência lógica de definições ou resultados já aceitos ou provados como verdadeiros.

Atividade 49

Confirme a veracidade da propriedade acima, via definição, para as funções Lineares a seguir:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = -5x$

Esboço do Gráfico de uma Função Linear

Objetivo(s): *Que o aluno conclua que:*

– o gráfico de uma Função Linear é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, e que, no caso de coeficiente angular positivo (negativo) trata-se de uma função monótona crescente (decrescente);

– no caso da função nula, temos para gráfico uma reta horizontal (precisamente o eixo das abscissas);

– no caso de uma função do tipo linear teremos para gráfico um subconjunto de uma reta passando pela origem.

Ao Professor: *Sugere-se que, na primeira parte da próxima atividade, os alunos fiquem livres para construir um esboço do gráfico das funções propostas. Neste momento (esboço) aceita-se que uma tabela de valores, apesar de conter apenas parte da informação*

sobre a função, seja construída para ajudar na intuição de que uma reta é um bom esboço. Daí, surge naturalmente a questão: “mas será que o gráfico é de fato uma reta?”, explorada nos itens a e c. Este último, na verdade, requer como resposta uma demonstração (sugere-se que seja chamada a atenção dos alunos para o fato que aqui uma tabela de valores não ajuda a responder a pergunta. É muito comum os livros didáticos validarem esta conclusão por meio de tabelas, o que consiste uma prática falha na educação matemática). Sugere-se também que esta demonstração seja baseada na geometria e na semelhança de triângulos.

Atividade 50

Esboce o gráfico de cada uma das funções lineares, até aqui trabalhadas:

i) $f(x) = 2x$

ii) $f(x) = -5x$

Após a construção dos esboços, pergunta-se:

a) Você encontrou alguma forma conhecida como esboço das funções acima? Qual é ela?

Generalizando o raciocínio para estabelecer propriedades da função linear:

Ao Professor: O aluno deve dar-se conta que para $x = 0$ temos imagem nula e portanto, observa-se que o gráfico, neste caso, sempre passa na origem.

b) o que acontece com toda função linear quando a variável independente assume o valor 0?

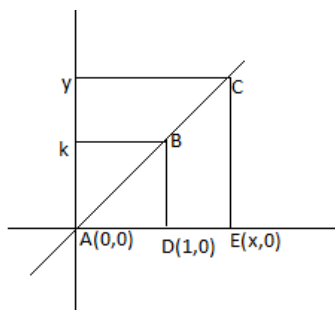
c) Podemos generalizar a resposta dada ao item a e dizer que a forma geométrica que Você encontrou coincide com a representação geométrica do gráfico da função? Escreva no quadro abaixo sua(s) conclusão(ões), argumentando matematicamente, (isto é, a ponto de podermos decidir se suas conclusões são ou não verdadeiras). Você pode ou não fazer uso de simbologia matemática. Reiteramos: a não utilização da simbologia matemática não torna o seu argumento inválido ou menos rigoroso.

Ao Professor: Certifique-se que no quadro acima fique registrada a demonstração da afirmação abaixo. É recomendável nesta demonstração, que antes de iniciá-la, seja discutida com os alunos a questão: “Como é que se demonstra que dois conjuntos são iguais?”

“A representação geométrica no plano cartesiano do gráfico de toda função linear é sempre uma reta passando pela origem.”

Ao Professor: Demonstração sugerida fazendo uso da simbologia matemática:

Denotando por f uma função linear, digamos, $f(x) = kx$ (k constante), temos que os pontos $A = (0,0)$ e $B = (1, k)$ pertencem ao gráfico desta função. Tomemos a reta que liga esses dois pontos, e seja $C = (m, n)$ um outro ponto qualquer desta reta. Note que com os pontos $D = (1, 0)$ e $E = (m, 0)$ temos construídos triângulos retângulos ADB e AEC , e estes triângulos são semelhantes (acompanhe na ilustração)



Por propriedade da semelhança de triângulos, estes triângulos possuem lados proporcionais:

$$|BD| / |DA| = |CE| / |EA|$$

Reescrevendo a igualdade acima, obtemos:

$$k/1 = n/m$$

ou seja,

$$x = km.$$

Assim, as coordenadas m, n do ponto C satisfazem a fórmula $y = kx$ que define a função f , e portanto C , que foi tomado como um ponto qualquer da reta que une dois pontos do gráfico de f pertence ao gráfico da função. Conclusão: qualquer ponto da reta que passa pela origem e pelo ponto $B=(1, k)=(1, f(1))$ pertence ao conjunto $G(f)$.

Agora mostremos que, reciprocamente, a representação geométrica de qualquer par

$P=(x,f(x))=(x,kx)$ do $G(f)$ pertence à reta que passa pela origem e pelo ponto $B=(1,k)$. Novamente, consideremos os pontos $A = (0,0)$, $B=(1,k)$ do $G(f)$, $D = (1, 0)$, bem como o ponto $Q=(x,0)$. Das igualdades

$$|PQ| / |BD| = kx/k=x \text{ e } |QA| / |DA|=x/1=x,$$

concluimos que os triângulos retângulos ADB e AQP são semelhantes. Mas então os ângulos internos destes dois triângulos são congruentes dois a dois, e portanto os pontos A , B e P são colineares. Assim, o ponto P que representa um par qualquer do gráfico de f pertence à reta que passa pela origem e pelo ponto $B=(1,k)$. Em outras palavras, todos os elementos do conjunto $G(f)$ são representados por pontos da reta que passa pela origem e pelo ponto $B=(1,k)$.

Portanto o conjunto $G(f)$ tem para representação geométrica uma reta que passa pela origem.

Importante: A demonstração acima nos permite afirmar não só que uma reta serve de esboço para o gráfico de uma função linear como – mais exato ainda – a representação do conjunto $G(f)$ é de fato uma reta.

Ao Professor: Para o próximo item, espera-se que o aluno conclua que a inclinação de uma reta está associada ao sinal do coeficiente angular. Espera-se que a demonstração geométrica feita no item b ajude na intuição desta propriedade, por exemplo, considerando a representação geométrica dos pares $A=(0,0)$ e $B=(1,k)$ pertencentes ao conjunto $G(f)$.

d) Qual a principal diferença entre a representação geométrica obtida em i) e em ii)?

Ao Professor: O objetivo da próxima atividade é explorar a propriedade acima para funções do tipo linear.

Atividade 51

Esboce o gráfico de cada uma das funções *do tipo* linear até aqui trabalhadas:

$$\text{i) } f(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{-5x^3 + 10x^2 - 5x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{iii) } f(x) = 0$$

Após a construção dos esboços, pergunta-se: Você encontrou alguma forma conhecida como esboço das funções acima? Qual é ela?

Generalizando o raciocínio para estabelecer propriedades da função *do tipo* linear:

Podemos generalizar e dizer que a forma geométrica que Você encontrou coincide com a representação geométrica do gráfico da função? Escreva no quadro abaixo sua(s) conclusão(ões), argumentando matematicamente, (isto é, a ponto de podermos decidir se suas conclusões são ou não verdadeiras).

Ao Professor: Certifique-se que no quadro acima fique registrada a demonstração da afirmação abaixo.

“A representação geométrica no plano cartesiano do gráfico de toda função *do tipo* linear é sempre uma reta passando pela origem ou parte dela.”

Que vantagem(ns) podemos tirar das propriedades salientadas acima sobre a função linear e a função *do tipo* linear?

Um dos princípios da geometria estabelece: “Por dois pontos passa uma e só uma reta”. Assim, para esboçar o gráfico de uma função linear, podemos fazê-lo com um mínimo de trabalho, resumindo-nos a uma tabela de uma única linha, pois já sabemos que um dos pontos é a origem do sistema cartesiano ortogonal, então basta determinarmos outro ponto. E se levarmos em conta que ao valor $x=1$ corresponde o valor do coeficiente angular e este estiver explícito, então podemos até dispensar a tabela de uma única linha.

No caso da função *do tipo* linear, devemos primeiramente nos ater ao domínio da mesma, observando que a reta é descontínua nos pontos cuja abscissa não está definida no domínio da função.

Ao Professor: Sugere-se que antes de propor a atividade abaixo, você discuta com os

alunos a seguinte questão: “quando é que duas funções são iguais?”. Certamente os alunos já passaram por exemplos de funções que podem ser definidas por fórmulas diferentes (por exemplo, na Atividade 46, item d), e então espera-se aqui que os alunos respondam “quando forem formadas exatamente pelos mesmos pares ordenados”.

Atividade 52

Construa o gráfico das funções:

i) $f(x) = 5x$

ii) $f(x) = 5x^2 + 10x / x + 2$

As funções definidas em (i) e em (ii) são iguais?

Em caso negativo,

- a) que diferença você observa entre os gráficos das mesmas?
- b) que diferença você observa entre as representações dos gráficos de ambas?

Atividade 53

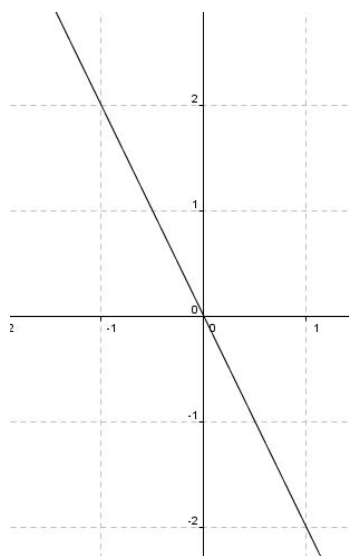
Objetivo(s): Que o aluno consiga, a partir do esboço do gráfico de uma função sabidamente (do tipo) linear; estimar o valor do seu coeficiente angular e, a partir dele, determinar uma fórmula aproximada para a função.

*Ao Professor: Sugere-se que, caso surja alguma dificuldade por parte dos alunos na estimativa do valor do coeficiente angular, que seja lembrado a eles que este é o valor da variável dependente em correspondência ao valor 1 da variável independente. Nos casos em que 1 não pertence ao domínio da função do tipo linear, como no **segundo esboço a seguir**, basta que seja reiterado aos alunos o fato de que o conhecimento de um único (e qualquer) par pertencente ao gráfico é suficiente para determinar o coeficiente angular da função.*

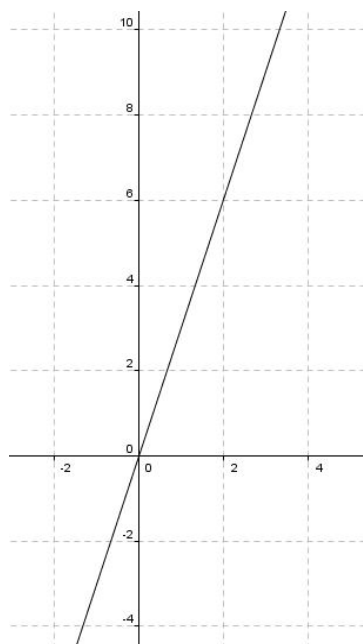
Cabe também salientar que, como se trata de esboços (que podem apenas estar representando parte do gráfico da função), existe uma liberdade para a escolha do domínio das funções ali representadas.

Sabendo que cada esboço abaixo diz respeito a uma função linear (ou *do tipo* linear), estime o valor do seu coeficiente angular e, a partir desta estimativa, estabeleça uma fórmula para tal função, explicitando também o seu domínio:

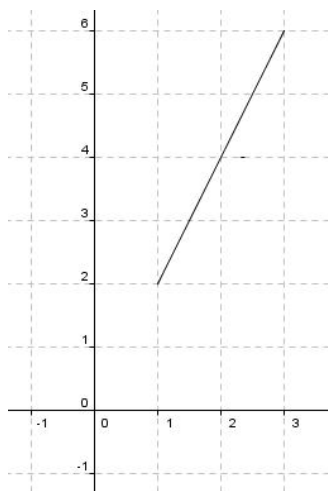
1)



2)



3)



Atividade 54

Objetivo: Que o aluno consiga estimar o coeficiente angular de uma função (do tipo) linear por meio de um exercício prático.



Figura 49 – Ladeira de Ouro Preto.

Fonte: <http://www.oqueeu fiznasferias.com.br/blog/2010/11/ouro-preto-minas-gerais/>

A Figura 49 reproduz uma das ladeiras da cidade de Ouro Preto em Minas Gerais, e nos mostra a inclinação da rua e a maneira como as edificações são feitas para se driblar esse detalhe. Olhando a figura e usando seus conhecimentos sobre função linear, como você poderia estimar a inclinação desta ladeira?

Ao Professor: Note que a questão acima oportuniza uma discussão sobre a relação entre “inclinação da reta” com o valor do coeficiente angular. Não se espera aqui a definição

de inclinação, mas uma reflexão por parte do aluno que o leve a concluir que se ele tentar imaginar um sistema cartesiano de eixos e encontrar uma fórmula para uma função linear que tem para esboço do seu gráfico a rua, então o coeficiente angular de tal função dá uma ideia da inclinação da mesma.

A questão abre espaço para uma pesquisa sobre a maior declividade de acesso permitida para automóveis, caminhões, bicicletas, cadeirantes, pedestres, que neste trabalho, é tratada no capítulo de funções Afim.

Sugere-se que agora seja discutido o significado da placa de trânsito da Figura 50



Figura 50 – Arquivo Pessoal Professora Cydara Cavedon Ripoll

Atividade 55

Objetivo(s): Que o aluno consiga não só determinar a fórmula da função linear conhecendo um único par ordenado pertencente ao gráfico como reconhecer a sua unicidade. Sugere-se que na justificativa seja aceito o esboço do gráfico da função, mas que o aluno também seja estimulado a apresentar a fórmula associada à função.

- Quantas funções lineares existem contendo o par ordenado $(1,3)$? Justifique.
- Quantas funções lineares existem contendo o par ordenado $(-2, -14)$? Justifique.
- Quantas funções lineares existem contendo os pontos $(1,3)$ e $(-2,12)$? Justifique.

FUNÇÃO AFIM

Objetivo(s): Que o aluno consiga identificar, a partir da definição, que função afim é uma generalização de função linear.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser escrita na forma $f(x) = kx + b$, onde k e b são constantes reais, é chamada Função Afim. Neste caso, a constante k é chamada coeficiente angular e a constante b é chamada coeficiente linear.

Uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \subseteq \mathbb{R}$, que pode ser escrita na forma $f(x) = kx + b$, onde k e b são constantes reais, é chamada Função do tipo Afim.

Ao Professor: O comentário a seguir serve para que o aluno se dê conta que toda função Afim é uma generalização da função Linear.

Inicialmente observe, na definição acima, que se $b=0$ então teremos a função afim é também linear, dada então por $f(x) = ax$, justificando-se assim a mesma nomenclatura “coeficiente angular”, tanto para função linear quanto para função afim.

Ao Professor: Ressaltamos novamente a expressão “que pode ser escrita” na definição acima, que pode ser enfatizada aos alunos por ocasião da resolução dos itens c, d e na atividade a seguir.

Atividade 56

Verifique se as funções a seguir, são ou não funções afim ou *do tipo* afim, justificando sua resposta.

a) $f(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = -3x + 1$

c) $f(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$

d) $f(x) = (2x^2 + 6x) / 2x$

e) $f(x) = (2x^2 - 4x) / (x - 2)$

Propriedades da função Afim

Objetivo(s): Que o aluno observe que a função Afim de coeficiente linear não nulo não estabelece mais uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis dependente e independente, mas sim uma relação entre grandezas que variam com mesmo sentido ou com sentidos contrários.

Para estudarmos algumas propriedades da função afim, sugerimos que você relembre

antes as definições de grandezas que variam com mesmo sentido, grandezas que variam com sentidos contrários, grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais estudadas no início deste capítulo. Após lembrar tais definições, responda aos seguintes questionamentos:

Ao Professor: Sugere-se que, ao discutir com seus alunos o item a, saliente-lhes o raciocínio que motiva tal pergunta: como função linear é um caso particular de função afim, é razoável perguntar-se se uma das propriedades da função linear é também uma propriedade da função afim.

Pode também ser salientado aos alunos que uma forma de justificar a questão (a) é apresentando um “contra-exemplo” (explicando-lhes também o significado deste termo). A seguir estimule a discussão de forma que leve os alunos a concluir que a função Afim gera uma relação direta ou inversa entre grandezas, trabalhando, inclusive, a demonstração deste fato.

a) O tipo de relação entre as variáveis dependente e independente proporcionada por uma função Linear, a saber, proporcionalidade direta, ainda se mantém para a função Afim? Justifique sua resposta.

b) Que(quais) tipo(s) de relação entre as variáveis dependente e independente é proporcionada por uma função afim? Justifique sua resposta, escrevendo-a no quadro abaixo.

--

Ao Professor: Cabe novamente ressaltar aos alunos que alguns testes servem para intuir uma propriedade (no caso, o tipo de relação entre as variáveis) mas eles não são suficientes para comprová-la/demonstrá-la para todas as funções afins. Novamente reforçando que argumentação nada tem a ver com formalismo, sugerimos que a demonstração que aqui buscamos seja feita de duas formas, uma em palavras e outra simbolicamente, conforme quadro apresentado abaixo.

Demonstração em palavras:	Demonstração fazendo uso da simbologia matemática:

--	--

A relação entre as variáveis dependente e independente em qualquer função afim é uma relação entre variáveis que variam com mesmo sentido ou com sentidos contrários.

c) Confirme a propriedade demonstrada acima para as funções afins a seguir:

a) $f(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = -3x + 1$

Ao Professor: O objetivo da próxima atividade é explorar a propriedade acima para funções do tipo afim.

Atividade 57

Verdadeiro ou Falso? Justifique.

A relação entre as variáveis dependente e independente em qualquer função *do tipo* afim é uma relação entre variáveis que variam com mesmo sentido ou com sentidos contrários.

Ao Professor: Na atividade a seguir trazemos uma aplicação de função do tipo afim.

Atividade 58

Uma operadora de telefonia oferece os planos a seguir.

Plano A: Taxa fixa de R\$ 30,00, inclusos 20 minutos, mais R\$ 0,80 por minuto excedente.

Plano B: Taxa fixa de R\$ 50,00, inclusos 30 minutos, mais R\$ 0,60 por minuto excedente.

Plano C: R\$ 1,80 por minuto, sem taxa fixa.

Pergunta-se:

a) Quais serão os valores cobrados pela operadora, em cada plano, para uma utilização

de 15 min, 40 min e 60 min, por mês?

b) Qual é o plano mais econômico para uma utilização de 50 min por mês?

Ao Professor: A pergunta a seguir requer que os alunos representem, por meio de fórmulas, as três situações apresentadas no enunciado do nosso problema.

c) Se escolhermos as variáveis A , B e C para representar os valores cobrados, respectivamente, para os planos A , B e C e a variável m para representar o número de minutos utilizados, que fórmulas representariam os três planos citados? Em cada caso, que variável você escolheu para variável dependente? E para variável independente?

Esboço do Gráfico de uma Função Afim

Objetivo(s): Que o aluno conclua que:

- o gráfico de uma Função Afim é também uma reta, porém, diferentemente da função Linear, ela nem sempre passa pela origem do sistema cartesiano.

- no caso de coeficiente angular positivo (negativo) trata-se de uma função monótona crescente (decrecente);

- no caso da função nula, temos para gráfico uma reta horizontal (precisamente o eixo das abscissas);

- no caso de uma função do tipo afim teremos para gráfico um subconjunto de uma reta que não necessariamente passa pela origem.

Ao Professor: Sugere-se que, na primeira parte da próxima atividade, os alunos fiquem livres para construir um esboço do gráfico das funções propostas. Neste momento (esboço) aceita-se que uma tabela de valores, apesar de conter apenas parte da informação sobre a função, seja construída para ajudar na intuição de que uma reta é um bom esboço. Daí, surge naturalmente a questão: “mas será que o gráfico é de fato uma reta?”, explorada nos itens a e c. Este último, na verdade, requer como resposta uma demonstração (sugere-se que seja chamada a atenção dos alunos para o fato que aqui uma tabela de valores não ajuda a responder a pergunta. É muito comum os livros didáticos validarem esta conclusão por meio de tabelas, o que consiste uma prática falha na educação matemática). Sugere-se também que esta demonstração seja baseada na geometria e na semelhança de triângulos.

Uma alternativa é explorar a construção do gráfico da Função Afim genérica, digamos, dada por $f(x) = ax + b$, de modo a levar seus alunos a intuírem o fato de o mesmo ser uma reta, uma vez que já sabem que isto acontece quando $b=0$. Sugere-se aproveitar a discussão para explicitar as intersecções da mesma com os eixos coordenados, concluindo

que a reta nem sempre passa pela origem, associando a este fato o valor do coeficiente linear. Também leve seus alunos a constatar que o sinal do coeficiente angular tem relação com a inclinação dessa reta, estimulando os alunos a raciocinarem genericamente.

Para a demonstração de que a representação geométrica do gráfico é uma reta, sugere-se novamente que seja reiterado o fato que intuição e experimentação não servem como demonstração (porque a Matemática não é uma ciência empírica, e sim uma ciência dedutiva).

Atividade 59

Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo:

i) $f(x) = 2x + 6$

ii) $f(x) = -5x + 10$

Ao Professor: Espera-se, no item a seguir, que os alunos reconheçam que ali está uma função do tipo afim.

iii) $f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{3x}$

Responda, a seguir:

a) Você encontrou alguma forma conhecida como esboço das funções acima? Qual é ela?

Ao Professor: Use a simbologia para reescrever, caso necessário, a demonstração feita pela argumentação dos seus alunos no item a seguir.

b) Podemos afirmar que a forma geométrica que Você encontrou acima efetivamente coincide com a representação do gráfico da função? Justifique sua resposta, escrevendo-a no quadro abaixo.

“O gráfico de uma função Afim é sempre uma reta”.

Ao Professor: Espera-se que, na pergunta a seguir, o aluno aponte que a representação geométrica do gráfico de uma função afim é uma reta que nem sempre passa pela origem.

c) Que diferença(s) Você encontra entre as representações geométricas dos gráficos de uma função linear e de uma função afim?

Ao Professor: Na pergunta a seguir, espera-se que os alunos respondam que uma diferença está na da inclinação da reta, caso isso não ocorra naturalmente, tente induzi-los a isso.

d) Que diferença(s) Você aponta entre os traçados obtidos em i) e em ii)?

e) O gráfico de uma função Afim sempre contém o par (0,0)? Justifique.

E qual a vantagem que a propriedade do gráfico de uma função afim evidenciada acima nos proporciona?

Da mesma forma que na função Linear, o gráfico de uma função afim é sempre uma reta, e portanto, para esboçá-lo, basta-nos determinar dois pontos do gráfico.

Objetivo(s): Que o aluno reflita sobre a única diferença entre os gráficos de uma função Linear e de uma função Afim, a saber, a reta que representa o gráfico da função Afim nem sempre passa pela origem.

Atividade 60

É possível traçar a reta que representa o gráfico de uma função afim apenas conhecendo um par $(a, f(a))$ como acontece com qualquer função linear? Justifique.

Atividade 61

Objetivo(s): Que o aluno construa geometricamente o esboço, agora usando a maneira econômica salientada acima, bem como atente para o domínio, quando a função é apenas do tipo afim.

Esboce o gráfico das funções a seguir:

i) $f(x) = -(5/2)x + 10/3$

ii) $f(x) = (x^2 + 10x)/x$

Atividade 62

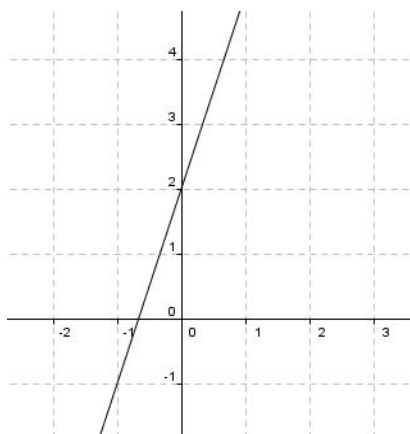
Objetivo(s): Que o aluno consiga determinar uma fórmula para uma função do tipo afim representada no esboço, atentando especialmente para os domínios que podem ser considerados.

Ao Professor: Sugere-se que na próxima atividade sejam estimuladas dois tipos de

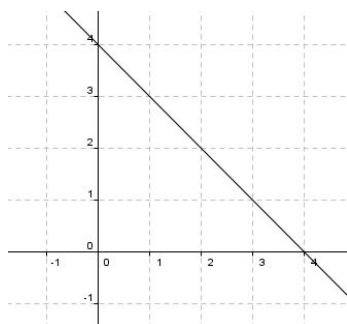
resolução: uma que faz uso de dois pontos e outra que, a partir do gráfico, tenta determinar o coeficiente angular e o coeficiente linear. O aluno deve perceber que esta última nem sempre é possível de ser aplicada.

Sabendo que as curvas abaixo são retas, determine funções *do tipo* Afim cujos gráficos podem ser representados por estas curvas:

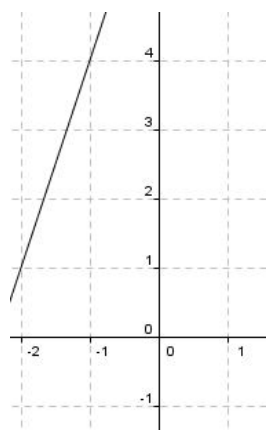
1)



2)



3)



Ao Professor: Atenção: A próxima atividade só deve ser trabalhada caso seus alunos já tenham estudado Progressões Aritméticas.

Atividade Extra:

Objetivo(s): Que o aluno observe que as funções do tipo linear e do tipo afim com domínio em Progressão Aritmética geram imagens também em Progressão Aritmética.

Ao preencher a tabela a seguir, escolha para cada uma das funções apresentadas, valores da variável independente que estejam em Progressão Aritmética e, a seguir, calcule a imagem destes valores.

Valores de x	Imagem para $f(x) = 3x$	Imagem para $f(x) = 3x + 2$

Ao Professor: Trabalhar com progressões é uma forma de perceber o comportamentos distintos das diferentes famílias de funções; sugere-se que futuramente, por ocasião do estudo de outras funções tais como quadráticas, exponenciais e logarítmicas, seja realizada uma atividade semelhante a esta, oportunizando aos alunos uma comparação de comportamento das mesmas em relação às funções lineares e afins.

Talvez os alunos tenham dificuldades em interpretar a frase “toda função (do tipo) afim leva progressões aritméticas em progressões aritméticas” por conta do verbo empregado “levar”. Esta interpretação de função, olhando-a como uma “ação” que transforma elementos do domínio em elementos do contradomínio vai ser útil por ocasião da discussão sobre inversibilidade, e por isso ter-se optado por uma redação nesta forma já aqui.

Decida se é verdadeira ou falsa a afirmação “toda função (do tipo) afim leva progressões aritméticas em progressões aritméticas”? Justifique.

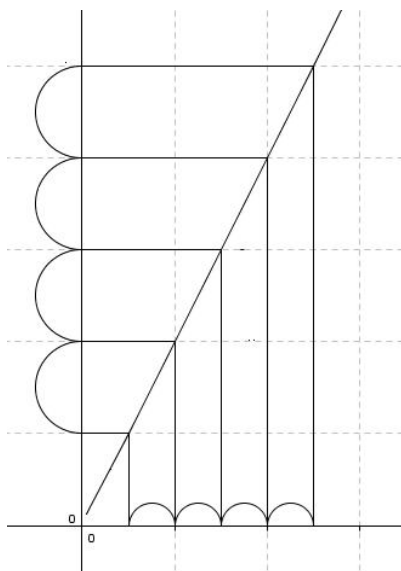
No quadro abaixo tente escrever sua argumentação, tanto por meio de palavras quanto por meio de simbologia matemática.

Justificativa em palavras:	Justificativa fazendo uso de simbologia matemática:

Ao professor: Sugere-se que, novamente, seja reiterado aos seus alunos de que acima (com ou sem simbologia matemática), acabaram de fazer o que chamamos em matemática de demonstração da veracidade da afirmação.

Vamos agora mostrar geometricamente o que foi demonstrado acima: toda vez que tomarmos no domínio de funções (do tipo) linear ou (do tipo) afim valores em progressão aritmética, suas imagens também estão em progressão aritmética.

Ao Professor: Sugere-se evidenciar, no desenho abaixo, os termos das progressões aritméticas, bem como as razões das mesmas. Sugere-se também que os alunos verifiquem esta propriedade em outras retas e outros valores, por exemplo, retas com declividade negativa, para valores negativos do domínio, para o esboço de uma função constante.



Uma aplicação do que estudamos até aqui

Objetivo: Que o aluno entenda o significado de uma porcentagem indicando a inclinação de uma reta.

Ao Professor: Sugere-se que inicialmente sejam desenhadas algumas rampas no quadro, atribuindo-lhes algumas medidas e que seja solicitado aos alunos que estimem o coeficiente angular de funções cujos gráficos podem ser representadas por estas retas. Para que as rampas de acesso a pessoas com necessidades especiais sejam construídas, existem algumas regras que devem ser seguidas e que podem ser encontradas na ABNT NBR 5090.

Na atividade a seguir sugere-se que o professor relembre com seus alunos o significado da porcentagem empregada para expressar inclinação de retas.

Segundo a ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) NBR 5090, as rampas de acesso a portadores de necessidades especiais devem ter inclinações máximas de acordo com a seguinte fórmula:

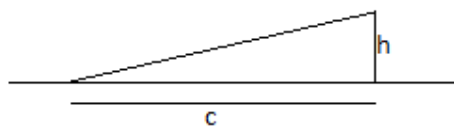
$$i = (h \times 100)/c,$$

onde

i é a inclinação da rampa, em %,

h é a altura do desnível,

c é o comprimento da projeção horizontal (h e c devem estar na mesma unidade de medida).



Ao Professor: na pergunta a seguir, talvez o aluno apresente uma natural dificuldade

em imaginar um dado que a princípio é uma variável, como uma constante.

a) Supondo fixada uma certa inclinação i , pergunta-se: de que tipo é a função que determina o comprimento c em relação à altura h do desnível?

Ainda segundo especificações da ABNT, o percentual máximo de inclinação é de 10%.

b) Supondo que deverá ser construída uma rampa de acesso com 5% de inclinação, pergunta-se: qual o comprimento da projeção horizontal desta rampa se, ela tiver

- i) 1m de altura?
- ii) 2m de altura?
- iii) 3m de altura?
- iv) 4m de altura?

FUNÇÕES QUE PODEM SER EXPRESSAS PELA FÓRMULA $f(x) = k/x$ (k constante não nula).

Ao Professor: Estas especiais funções homográficas são abordadas neste texto por contemplarem a tradução para a linguagem de funções qualquer relação de proporcionalidade inversa entre grandezas.

Entenda-se por função homográfica toda função real de variável real f que pode ser escrita na forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ com $c \neq 0$ e $ac-bd \neq 0$. No entanto, para o objetivo deste texto, só são relevantes as homográficas da forma $f(x) = k/x$ (k constante não nula).

Passamos a tratar agora de funções reais de variável real que podem ser definidas por fórmulas da forma $f(x) = k/x$, com k uma constante real não nula.

Atividade 63

Objetivo(s): Que o aluno determine o domínio da função $f(x) = k/x$ e, por meio dele, se dê conta que a representação geométrica do gráfico de uma tal função não intercepta o eixo y . Caso o aluno tenha dificuldades em imaginar k como uma constante, sugere-se que, em um primeiro momento, a atividade seja realizada substituindo k por 2 e, num segundo momento, estimulando a discussão sobre: mudaria alguma coisa se, no lugar de 2, tivéssemos algum outro valor real não nulo?

- i) Qual o domínio (matemático) da função f dada por $f(x) = k/x$ se k é uma

constante real não nula?

- ii) Sem tentar representar geometricamente o gráfico da função dada em (i), pergunta-se: qual o significado geométrico da sua resposta em (i) com relação à representação geométrica do gráfico da função?
- iii) A função f é uma função (do tipo) linear? Justifique sua resposta.

Ao Professor: Sugere-se que a argumentação para as questões acima sejam por absurdo e/ou via comparação de domínios, e então seria interessante retomar o significado de uma prova por absurdo antes de apresentá-la.

Algumas demonstrações sugeridas:

- Comparando domínios:

Inicialmente vemos que não se trata de uma função linear nem de uma função afim, já que o domínio matemático de f é $\mathbb{R} - \{0\}$, enquanto que função linear e afim têm \mathbb{R} para domínio.

Logo, resta-nos apenas decidir se f pode ser do tipo linear ou do tipo afim. Aqui é que fazemos uso do raciocínio por absurdo.

- Fazendo uso do raciocínio por absurdo para o caso de função do tipo linear (a prova para o caso de função do tipo afim é análoga):

Vamos supor que f é uma função (do tipo) linear. Então ela pode ser reescrita na forma $f(x) = cx$, para todos os x do domínio de f , onde c é um número real c . Assim, para todo x não nulo, temos

$$k/x = f(x) = cx,$$

logo $k/x = cx$, ou ainda,

$$cx^2 = k, \text{ para todo } x \text{ não nulo,}$$

o que é um absurdo porque, por exemplo, ora k teria que ser igual a c (quando x valesse 1), ora k teria que ser igual a $4c$ (quando x valesse 2 ou -2); para isso acontecer, só se $k=c=0$, o que é impossível, já que k é uma constante não nula.

Conclusão: a função f não é (do tipo) linear.

- iv) A função f é uma função (do tipo) afim? Justifique sua resposta.

Atividade 64

Verifique se as funções dadas abaixo podem ou não ser expressas na forma $f(x) = k/x$, para alguma constante não nula k . Em caso afirmativo, especifique seus domínios:

a) $f(x) = 2x/x^2$

b) $f(x) = (5x + 10)/(x^2 + 2x)$

$$c) f(x) = 5x^2/x$$

Propriedades das funções f que podem ser definidas por fórmulas da forma $f(x) = k/x$, para alguma constante não nula k .

Atividade 65

Recomendamos a Você mais uma vez relembrar os tipos de relações entre grandezas abordadas no início deste texto.

Feito isto, responda: a relação estabelecida entre as variáveis dependente e independente pela função f dada por $f(x) = k/x$, onde k é uma constante não nula é de

- proporcionalidade direta
- proporcionalidade inversa
- variáveis que variam com mesmo sentido
- variáveis que variam com sentidos contrários
- nenhuma das respostas anteriores

Justifique sua resposta.

Ao Professor: Sugere-se que seja oportunizado aos alunos formas de chegarem ao raciocínio genérico esperado com esse questionamento. Caso haja dificuldades em raciocinar com uma constante k genérica, sugere-se que, num primeiro momento, k seja substituída pelo, digamos, valor 3, para, num segundo momento, ser lançada a reflexão: e se o valor 3 for substituído por algum outro valor, a conclusão será outra?

Mais uma vez, reforçando que demonstração nada tem a ver com formalismo e simbologia, sugere-se que a justificativa seja feita de duas formas, uma em palavras e outra simbolicamente, conforme quadro apresentado abaixo.

<i>Justificativa com palavras:</i>	<i>Justificativa fazendo uso da simbologia matemática:</i>

Toda função que pode ser definida pela fórmula $f(x)=k/x$

para alguma constante não nula k , estabelece uma relação de proporcionalidade inversa entre as variáveis dependente e independente.

Atividade 66

Comprove a propriedade acima para as funções apresentadas nos itens (a) e (b) na Atividade 64.

Atividade 67

Objetivo(s): Que o aluno consiga determinar uma fórmula para a função homográfica que estamos estudando.

Quer-se dividir o total de R\$ 500,00 igualmente entre algumas pessoas.

- a) Quanto caberá a cada uma, se forem 10 pessoas? E se forem 20 pessoas? E se forem 40 pessoas?
- b) É possível obter uma fórmula que relaciona a quantidade q que cada pessoa receberá, com o número n de pessoas?
- c) A fórmula obtida em (b) define uma função? Em caso afirmativo, qual é a variável independente e qual é a variável dependente? Qual o domínio contextual desta função?

Esboço do Gráfico da Função f definida por $f(x) = k/x$, onde k é uma constante não nula.

Objetivo(s): Que o aluno consiga esboçar o gráfico da função homográfica f dada por $f(x) = k/x$ (k constante não nula), que reconheça que a função não é monótona e que intua a existência de retas assíntotas, tanto em $x=0$ como em $y=0$.

Atividade 68

Esboce o gráfico das seguintes funções:

- i) f definida por $f(x) = 2/x$;
- ii) f definida por $f(x) = -3/x$;
- iii) f definida por $f(x) = 1/2x$;

Ao Professor: Sugere-se nos itens acima que o ponto de partida para uma reflexão seja uma tabela de valores, como recurso para intuir o feitiço da curva que representa o

gráfico da função homográfica apresentada, mas não sem antes deixarem muito claro o que se espera de uma tal curva, a partir da análise do domínio da função: é uma curva necessariamente interrompida. Além dela, espera-se que os alunos atinem para o fato que o gráfico de tal função não pode estar contido em uma reta, visto que já provaram que a função não é do tipo linear nem do tipo afim. Sugere-se que os alunos sejam estimulados a participarem da discussão, uma vez que trata-se de uma curva totalmente nova para todos. A partir de raciocínios do tipo “o que acontece com a variável y quando x aumenta/diminui”, tanto na situação de x ser positivo quanto na situação de x ser negativo, espera-se que os alunos intuem o conceito de reta assíntota (no caso as de equação $x=0$ e $y=0$) através de um processo de limite não formalizado. Não se recomenda que a definição de reta assíntota seja apresentada aos alunos. Se os alunos mostrarem curiosidade quanto ao nome da curva que representa o gráfico de tais funções, sugere-se apenas que lhes seja apenas apresentado o nome hipérbole.

Ao Professor: Para a generalização sugerida no item a seguir, o aluno deve se dar conta, inspirado pelos itens anteriores, de que deve dividir o seu raciocínio em dois casos: k positivo e k negativo.

iv) f definida por $f(x) = k/x$, onde k é uma constante não nula.

Ao Professor: Trabalhe as questões (v) e (vi) com seus alunos de forma que os mesmos percebam, tanto geometricamente quanto analiticamente (isto é, analisando a fórmula que define a função) que nenhuma destas funções homográficas é monótona, mas que, para domínios convenientes, existem sim funções do tipo k/x que são monótonas, como a da atividade anterior, por exemplo.

v) Alguma das funções apresentadas em (i), (ii), (iii), (iv) é uma função monótona? Justifique.

vi) Alguma função do tipo k/x é uma função monótona? Justifique.

Atividade 69

Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) f definida por $f(x) = 3x/x^2$

b) f definida por $f(x) = (-x+3)/(5x^2-15x)$

Atividade 70

Objetivo(s): *Mostrar que um problema talvez já abordado no ensino fundamental (e certamente abordado no questionário sondagem) pode ser representado por uma função*

definida pela fórmula $f(x) = k/x$ com conveniente domínio.

Para construir um muro, 10 homens levam nove dias. Mantendo o mesmo ritmo, quantos dias levarão, para construir o mesmo muro,

- a) 5 homens?
- b) 15 homens?
- c) 20 homens?
- d) 30 homens?
- e) Quantos dias são necessários para que n homens realizem esta mesma tarefa?
- f) Podemos representar essa situação por meio de uma função? Em caso afirmativo, de que forma (não deixe de explicitar aqui quem seriam as variáveis independente e dependente, qual seria seu domínio)?

Atividade Extra: (Provão 2002)

Objetivo(s): Que o aluno saiba aproveitar a linguagem de funções em um problema que envolve a relação de proporcionalidade inversa.

A margem de erro em uma pesquisa eleitoral é inversamente proporcional à raiz quadrada do tamanho da amostra. Se, em uma pesquisa com 3600 eleitores, a margem de erro é de 2%, em uma pesquisa de 1600 eleitores ela será de:

- a) 2,5% b) 2,75% c) 2,82% d) 3% e) 3,125%

INVERSIBILIDADE DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Objetivo(s): Que o aluno compreenda as definições de função invertível e de função inversa, saiba reconhecer se existe ou não inversibilidade e, em caso afirmativo, o mesmo saiba determinar a função inversa.

Introdução:

Certamente no Ensino Fundamental você escutou falar que a subtração é a operação inversa da adição, bem como a divisão é a operação inversa da multiplicação. Assim, por exemplo, a ação de somar 3 é desmanchada pela ação de subtrair 3 e vice-versa; a ação de multiplicar por 2 é desmanchada pela ação de dividir por 2.

Na linguagem de funções, as ações ou operações de somar 3 e de subtrair 3 podem ser expressas respectivamente pelas funções $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x - 3$.

Ao Professor: Ressaltamos que restringimos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão a “somar 3”, “subtrair 3”, “multiplicar por 2”, dividir por 2”

simplesmente para podermos tratar de função de UMA variável real apenas. É essencial, neste momento, que os alunos reconheçam $f(x) = x + 3$ como uma outra forma de escrever a ação “somar 3”.

Observe que, com a linguagem de funções, é possível também mostrar que a ação de subtrair 3 desmancha a ação de somar 3 e vice-versa:

de fato, para um valor a ,

	<i>aplicando f</i>		<i>aplicando g</i>	
a		$b = f(a) = a + 3$		$g(b) = b - 3 = a + 3 - 3 = a$

voltando assim ao valor inicial a .

Ou seja: se encaramos uma função como uma *ação* que transforma valores da variável independente em valores da variável dependente, então o quadro acima nos mostra que a função g desmancha a ação da função f .

Analogamente, para um valor a ,

	<i>aplicando g</i>		<i>aplicando f</i>	
a		$b = g(a) = a - 3$		$f(b) = b + 3 = a - 3 + 3 = a$

Ou seja: novamente se encaramos uma função como uma *ação* que transforma valores da variável independente em valores da variável dependente, então o quadro acima nos mostra que a função f desmancha a ação da função g .

Com esta ideia de *ação* em mente, na linguagem de funções passamos agora a considerar a questão de uma função desmanchar a ação de outra. Dizemos então que uma função é invertível se existe uma função que desmancha a ação de f e cuja ação é também desmanchada por f ; neste caso, tal função é dita uma inversa para f .

Ao Professor: Salientamos o emprego da expressão “uma inversa” no lugar de “a inversa” na frase acima. A razão para isto é o fato de que não foi e não será discutido o fato de que a inversa de uma função, quando existe, é necessariamente única. Por ora, talvez o fato seja intuitivo para o aluno, mas o correto emprego da linguagem ajuda a sua formação matemática, mostrando-lhe como em matemática devemos ser cuidadosos antes de fazer afirmações.

Atividade 71

Ao Professor: Estimule seus alunos a responderem a questão a seguir raciocinando com palavras (isto é, fazendo uso das expressões “somar 5”, “multiplicar por 3”), antes de fazerem contas.

Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa e justifique.

A função f dada por $f(x) = 3x + 5$ é invertível e uma inversa para ela é a função g dada por $g(x) = (x - 5) / 3$.

Atividade 72

Determine, caso exista, a inversa de cada função f (sugestão: num primeiro momento, interprete com palavras a ação da f para conseguir decidir se esta ação pode ser desmanchada), conforme o exemplo:

Definição da função f	Ação de f , em palavras	Ação da inversa de f , em palavras, caso exista	Definição de uma inversa para f , que, caso exista, por ora vamos denotar por g
a) $f(x) = x + 5$	somar 5	subtrair 5	$g(x) = x - 5$
b) $f(x) = x - 7$			
c) $f(x) = 2x + 3$			
d) $f(x) = x^2 + 9$			
e) $f(x) = 5 - 2x$			

Se existe inversa para uma função f então, toda vez que tivermos $f(a) = b$, denotando por g uma inversa para f , teremos necessariamente $g(b) = a$ (note que só assim g tem chances de *desmanchar* a ação de f). Isto deve ocorrer para todos os valores a do domínio de f . Mas, também, toda vez que tivermos $g(b) = a$ deve ocorrer $f(a) = b$ (pois só assim g tem chances de *desmanchar* a ação de f). E isto deve ocorrer para todos os valores b do domínio de g .

O esquema abaixo (já utilizado anteriormente) nos ajuda a verificar se uma dada função g desmancha a ação de uma função f :

	<i>aplicando f</i>		<i>aplicando g</i>	
A	\rightarrow	$b = f(a)$	\rightarrow	$g(f(a)) = a,$

Bem como:

	<i>aplicando g</i>		<i>aplicando f</i>	
A	\rightarrow	$b = g(a)$	\rightarrow	$f(g(a)) = a,$

$$f(g(b)) = b \text{ e } g(f(a)) = a, \quad (*)$$

para todos os valores a do domínio de f e todos os valores b do domínio de g . Queremos agora mostrar que estas condições podem ser utilizada para descobrir a inversa de uma função.

Atividade 73

Determine, caso exista, a inversa de cada função f da atividade 72, mas agora fazendo uso das condições salientadas em (*):

Definição da função f	Verificando se f é ou não invertível
a) $f(x) = x + 5$	
b) $f(x) = x - 7$	
c) $f(x) = 2x + 3$	
d) $f(x) = x^2 + 9$	
e) $f(x) = 5 - 2x$	

Ao Professor: Sugere-se a seguinte argumentação para o item (a) acima:

Se existir uma inversa g para f , deve ocorrer $f(g(x)) = x$, para todo x do domínio de g . Como $f(g(x)) = g(x) + 5$ concluímos que g , se existir, deve ser tal que $g(x) + 5 = x$, para todo x do domínio de g , o que acontece só se $g(x) = x - 5$. Resta-nos mostrar que esta função g (cuja ação é desmanchada pela f), também desmancha a ação da f . E, de fato, para cada x pertencente ao domínio de f (no caso o conjunto \mathbb{R}),

$$g(f(x)) = f(x) - 5 = (x+5) - 5 = x.$$

Conclusão: f é invertível e a função g dada por $g(x) = x - 5$ é uma inversa para f .

Atividade 74

Objetivo: Que o aluno pratique a metodologia de determinar a inversa para uma função f e também observe que, uma vez existindo a inversa (aqui denotada por g), tem-se $f(a) = b$ se e só se $g(b) = a$.

Verifique se a função f definida por $f(x) = 2x + 5$ possui uma inversa; em caso afirmativo, denotando por g tal inversa, determine os valores de:

- a) $f(1)$
- b) $f(3)$
- c) $g(7)$
- d) $g(11)$

Atenção:

Você poderá encontrar em alguns livros didáticos e até em provas de concurso a notação f^{-1} para indicar a inversa de uma função f . Optamos por não utilizar esta nomenclatura para evitarmos um erro muito comum de interpretação desta simbologia. Por exemplo, ao se perguntar a imagem de 5 pela função inversa f^{-1} , poderia ocorrer a alguém tentar determiná-lo fazendo uso equivocado de uma notação utilizada com números reais, escrevendo $f^{-1}(5) = \frac{1}{f(5)}$ o que é totalmente equivocado: $\frac{1}{f(5)} = (f(5))^{-1}$ que não é a mesma coisa que $f^{-1}(5)$.

Atividade 75

Objetivo(s): Preparar os alunos para a definição de função injetora.

Ao Professor: Esta atividade serve como preparação para definirmos função injetora e mostrarmos, mais adiante, que toda função invertível é injetora. Sugere-se que os alunos sejam estimulados a responder ao item (c) baseados exclusivamente dos itens (a) e (b).

Dada a função f definida por $f(x) = x^2$,

- a) determine $f(3)$;
- b) determine $f(-3)$.
- c) Refletindo sobre suas respostas aos itens (a) e (b), responda: a função f é invertível?

Justifique.

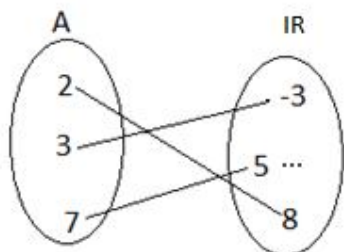
Atividade 76

Objetivo(s): Que os alunos concluam que, no caso de existir uma função inversa, cada elemento do conjunto imagem precisa ser imagem de um único elemento do domínio e que, desta forma, a imagem da função passa a ser domínio da sua inversa e vice-versa.

Ao Professor Atenção: estamos nesta atividade utilizando diagramas, com o objetivo

de ajudar na compreensão/visualização; porém é preciso alertar aos alunos que esta não é a melhor representação para o conjunto dos números reais, uma vez \mathbb{R} é um conjunto infinito.

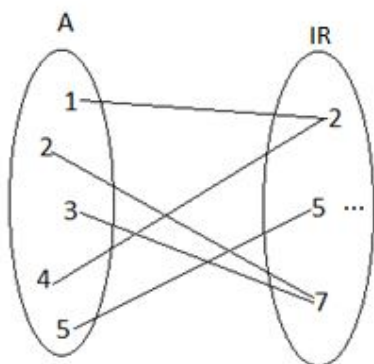
Observe a função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ parcialmente representada no diagrama abaixo (no qual $A = \{2, 3, 7\}$, mas apenas alguns elementos de \mathbb{R} estão representados):



- Reescreva f fazendo uso de pares ordenados.
- É f uma função invertível? Justifique e, em caso afirmativo, explicita quem são o domínio e a imagem da função inversa de f .

Atividade 77

Observe a função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ parcialmente representada no diagrama abaixo (no qual $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, mas apenas alguns elementos de \mathbb{R} estão representados):



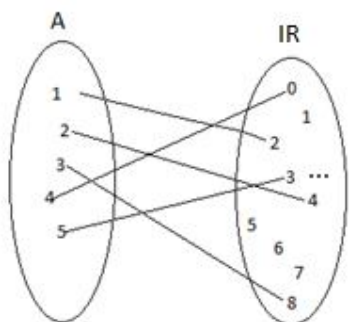
- Determine $f(1)$;
- determine $f(4)$.
- A função f é invertível? Justifique.

Atividade 78

Ao Professor: A próxima atividade serve para que os alunos certifiquem-se do que foi tratado nas atividades 76 e 77.

Observe a função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ parcialmente representada no diagrama abaixo (no qual $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, mas apenas alguns elementos de \mathbb{R} estão representados), responda: é

invertível essa função? Justifique.



De que outra forma podemos garantir que uma função é invertível?

Ao Professor: “Quando não repete valores” é a resposta esperada dos alunos, e sugere-se que sejam retomadas as atividades 76, 77 e 78 para que a injetividade fato seja intuída. Ainda, ressaltamos que este texto tem uma abordagem desta questão diferente de muitos livros didáticos: a forma como estamos tratando de funções reais de variável real dispensa o conceito de sobrejetividade, de modo que injetividade se torna uma condição também suficiente para a inversibilidade de uma função.

As atividades 76, 77 e 78 servem para intuir um fato muito importante sobre funções inversíveis:

“para que a inversa exista é necessário que cada elemento da imagem seja imagem de um único elemento do domínio”

Antes de provarmos que esta intuição é de fato verdadeira, damos um nome a esta condição: uma função f é dita *injetora* quando não existem dois elementos distintos em seu domínio $D(f)$ com mesma imagem. Simbolicamente:

Se $x_1, x_2 \in D(f)$ são tais que $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$. (****)

Ou, de outra forma:

Se $x_1, x_2 \in D(f)$ são tais que $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$. (**)

Atividade 79

Ao Professor: Sugere-se que a argumentação na atividade a seguir faça uso preferencialmente de (**); já para o item (d) sugere-se que os alunos sejam estimulados a completar a argumentação criando um contra exemplo. Se for utilizado o recurso esboço para intuir a resposta, sugere-se que seja reiterado ao aluno o fato de que “esboço” serve apenas para intuição, e em matemática não é possível evitar o raciocínio preciso.

i) Verifique se as funções definidas pelas fórmulas a seguir são injetoras ou não, justificando sua resposta.

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = 5x + 7$

c) $f(x) = 10/x$

d) $f(x) = x^2 + 5$

ii) Quais funções acima são invertíveis? Justifique.

iii) A partir de (i) e (ii), complete o quadro abaixo:

Objetivo(s): Que o aluno intua, após completar o quadro, que afinal uma função é invertível se e só se é injetora.

Definição da função f	Injetora?	Invertível?
a) $f(x) = 3x$		
b) $f(x) = 5x + 7$		
c) $f(x) = 10/x$		
d) $f(x) = x^2 + 5$		

Das atividades 76, 77 e 78 intuímos um fato importante sobre funções invertíveis, a saber, que para que exista uma função f seja invertível é necessário que cada elemento da imagem seja imagem de um único elemento do domínio, ou seja, que f seja uma função injetora. O que a atividade 79 agora sugere é que também toda função injetora é invertível.

Vamos agora nos dedicar à reflexão: estas intuições são de fato verdadeiras?

Atividade 80

Decida se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo, justificando sua resposta.

- i) Toda função invertível é injetora
- ii) Toda função injetora é invertível.

Ao Professor: A demonstração sugerida abaixo é por absurdo, e então seria interessante retomar o significado de uma prova por absurdo antes de apresentá-la.

Demonstração sugerida para (i)

Denotemos por f uma função invertível e por g uma inversa para f . Então sabemos que

$$f(a) = b \text{ se e só se } g(b) = a \text{ (***)}$$

(já que uma desmancha o que a outra faz e vice-versa).

*Suponhamos que f não é injetora. Isto significa que existe $b \in \text{Im}(f)$ e existem a_1 e a_2 distintos no domínio de f tais que $f(a_1) = b$ e $f(a_2) = b$; mas por (***) temos então necessariamente que $g(b) = a_1$ e $g(b) = a_2$, o que é uma contradição pois neste caso g não*

seria função (lembre que a_1 e a_2 são distintos). Vemos assim que invertível e não injetora nos levam a um conflito/absurdo.

Conclusão: para que uma função possua inversa ela necessariamente tem que ser injetora.

Atividade 81

Objetivo: Que o aluno traduza geometricamente a ideia de injetividade e que intua geometricamente a inversibilidade das funções linear, afim e homográfica.

Antes de seguirmos com o estudo sobre funções invertíveis e suas inversas, convidamos você a refletir sobre as questões abaixo:

*Ao Professor: Sugere-se para a reflexão sobre a questão (a) apelar para a condição (***) . Após a intuição geométrica nos itens (b), (c) e (d), sugere-se a comprovação da inversibilidade via a condição de injetividade, que é fácil de ser constatada algebricamente, através da condição (**).*

a) O que um bom esboço para o gráfico de uma função real de variável real injetora deve satisfazer?

b) É verdade que toda função linear é invertível? Justifique.

c) É verdade que toda função afim é invertível? Justifique.

d) É verdade que toda função f da forma $f(x) = k/x$, com $k \neq 0$ é invertível? Justifique.

Atividade 82

Objetivo(s): Que o aluno consiga inverter a função Linear não nula (o que se espera que consiga fazê-lo facilmente, através do raciocínio “desmanchar”), e que observe a relação que existe entre os coeficientes angulares da função e de sua inversa.

- i. Determine uma função inversa, caso exista, para cada uma das funções da tabela usando duas formas de argumentar, uma via operações e outra via funções:

Função	Linguagem de operações	Linguagem de funções
$f(x) = 0$		
$f(x) = 2x$		

$f(x) = -5x$		
$f(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$		

- ii. Você deve ter observado que todas as funções em (i) são funções (*do tipo*) linear. Para aquelas que são invertíveis, que tipo de função é a função inversa que você obteve em (i) ?
- iii. Decida se é verdadeira ou falsa a afirmação a seguir: a única função linear que não é invertível é a função nula.

Ao Professor: Ao final da demonstração da afirmação a seguir, sugere-se que seja salientado aos alunos a relação entre os coeficientes angulares da função e de sua inversa.

Decida se é verdadeira ou falsa a afirmação a seguir: se uma função (*do tipo*) linear é invertível, então uma função inversa para ela também é (*do tipo*) linear.

Atividade 83

Objetivo(s): Que o aluno perceba a inversibilidade da função (do tipo) afim não constante e que sua inversa é também uma função (do tipo) afim.

- i) Determine uma função inversa, caso exista, para cada uma das funções definidas pelas fórmulas abaixo:
- a) $f(x) = 2x + 3$
- b) $f(x) = -5$
- c) $f(x) = -5x + 4$
- d) $f(x) = \frac{2x^2 + 6x}{2x}$
- ii) Decida se é verdadeira ou falsa a afirmação a seguir: a única função linear que não é invertível é a função nula.
- iii) A inversa de uma função (*do tipo*) afim invertível é sempre uma função (*do tipo*) afim? Justifique.

Atividade 84

Objetivo(s): Que o aluno consiga inverter a função da forma k/x (k constante não

nula) e que observe que neste caso a inversa é igual à própria função. Aqui espera-se também que a inversibilidade seja facilmente constatada, pelo argumento “desmanchar”

- i) Verifique se é invertível cada uma das funções da tabela abaixo. A seguir, determine uma função inversa, caso exista, usando duas formas de argumentar, uma via operações e outra via funções:

Função	Linguagem de operações	Linguagem de funções
$f(x) = 2/x$		
$f(x) = -5/x$		
$f(x) = 3x/x^2$		

- ii) Decida se é verdadeira ou falsa a afirmação a seguir: toda função real de variável real f dada por $f(x)=k/x$ (k constante não nula) é invertível, e ela própria lhe serve como função inversa.

Conclusões:

Se uma função real de variável real é invertível f e g é uma inversa para ela então

$$\forall a \in D(f), g(f(a))=a \quad (1) \quad \text{e} \quad \forall b \in D(g), f(g(b))=b \quad (2)$$

destas condições retiramos também a seguinte informação:

Para uma função real de variável real ser invertível f deve existir uma função g tal que

$$\text{De (1): } D(f) \subseteq \text{Im}(g) \text{ e } \text{Im}(f) \subseteq D(g) \quad (3)$$

$$\text{De (2): } D(g) \subseteq \text{Im}(f) \text{ e } \text{Im}(g) \subseteq D(f) \quad (4)$$

Juntando as condições (3) e (4) concluímos também: se uma função real de variável real é invertível f e g é uma inversa para ela então $D(g) = \text{Im}(f)$ e $\text{Im}(g) = D(f)$.

Fechamento da Proposta

Objetivo(s): Que o aluno consiga relacionar as funções estudadas com as relações entre grandezas estudadas no início desta proposta.

Ao Professor: Nas atividades a seguir seus alunos deverão relacionar as grandezas de forma direta, inversa, diretamente proporcionais e inversamente proporcionais ou nenhuma

delas e associar, quando for o caso, a uma das funções estudadas. Observe que alguns destes exercícios foram escolhidos e adaptados a partir do questionário sondagem.

Atividade 85

Em cada item a seguir, verifique se existe alguma relação entre as grandezas envolvidas (grandezas que variam com mesmo sentido, grandezas que variam com sentidos contrários, grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais, ou outra situação) e, nos casos afirmativos, diga se tal relação pode ser explicitada com a linguagem de funções; em caso afirmativo, explicita o tipo de função que pode representar tal relacionamento.

Ao Professor: No item (a) espera-se que o aluno reconheça número de bactérias x tempo como relação de grandezas que variam com o mesmo sentido, e que a função que as relaciona é monótona crescente, mas não (do tipo) linear, (do tipo) afim, ou que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$.

a) Numa cultura de bactérias, a cada hora, o número de bactérias duplica. Se em um determinado momento temos 30 bactérias, quantas bactérias teremos 1h após este momento? E 2h após? E 3h após? Você conseguiria representar algebricamente essa situação para qualquer número inicial de bactérias?

Existe relação entre as grandezas número de bactérias e tempo? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim.

Em caso afirmativo:

Qual variável podemos tomar como independente? _____

Qual variável podemos tomar como dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou ((do tipo) linear, (do tipo) afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$, monótona crescente, monótona decrescente)? Em caso afirmativo, como você a classifica?

Ao Professor: No item (b) espera-se que o aluno reconheça quantidade x tempo como grandezas que variam com sentidos contrários, e que a função que as relaciona é monótona decrescente, mas não (do tipo) linear, (do tipo) afim, ou que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$.

b) Um determinado material radioativo se reduz à metade de sua quantidade a cada 10 anos.

Existe relação entre as grandezas quantidade de material e tempo? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim.

Em caso afirmativo:

Qual variável podemos tomar como independente? _____

Qual variável podemos tomar como dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou ((do tipo) linear, (do tipo) afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$, monótona crescente, monótona decrescente)? Em caso afirmativo, como você a classifica?

Ao Professor: No item (c) espera-se que o aluno reconheça tamanho x tempo como grandezas que variam com sentidos contrários, mas não proporcionais, e que trata-se de uma função do tipo afim.

c) Uma vela acesa vai diminuindo de tamanho com o passar do tempo. Se a mesma começa medindo 15 cm e sabe-se que a cada hora que passa a mesma diminui 2 cm, qual será a altura da vela passados t horas?

Existe relação entre as grandezas altura e horas? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim.

Em caso afirmativo:

Qual variável podemos tomar como independente? _____

Qual variável podemos tomar como dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou ((do tipo) linear, (do tipo) afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$, monótona crescente, monótona decrescente)? Em caso afirmativo, como você a classifica?

Ao Professor: No item (d) espera-se que o aluno reconheça preço de venda x custo como uma relação de proporcionalidade direta, e que se trata de função do tipo linear.

d) Sabendo que, numa determinada farmácia, cada medicamento é vendido com um lucro equivalente à metade do preço de custo, qual será o preço de venda de um medicamento que tem um custo c ?

Existe relação entre as grandezas preço de venda e custo? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim.

Em caso afirmativo:

Qual variável podemos tomar como independente? _____

Qual variável podemos tomar como dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou ((do tipo) linear, (do tipo) afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$, monótona crescente, monótona decrescente)? Em caso afirmativo, como você a classifica?

Ao Professor: No item (e) espera-se que o aluno reconheça valor a ser pago x preço de venda como uma relação de proporcionalidade direta, e que se trata de função do tipo linear.

e) Uma loja oferece um desconto de 12% sobre o preço de venda para pagamento a vista. Qual será o preço a ser pago se o preço de venda da mercadoria é p ?

Existe relação entre as grandezas valor a ser pago e preço de venda? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim.

Em caso afirmativo:

Qual variável podemos tomar como independente? _____

Qual variável podemos tomar como dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou ((do tipo) linear, (do tipo) afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$, monótona crescente, monótona decrescente)? Em caso afirmativo, como você a classifica?

Ao Professor: No item (f) espera-se que o aluno reconheça valor x comprimento como uma relação de grandezas que variam com mesmo sentido, e que trata-se de uma função do tipo afim.

f) Uma peça tem um custo fixo de R\$ 3,00 e mais R\$ 0,80 por cada centímetro que aumente o tamanho da peça. Qual será o valor da peça se ela tiver x cm de comprimento?

Existe relação entre as grandezas valor e comprimento? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim.

Em caso afirmativo:

Qual variável podemos tomar como independente? _____

Qual variável podemos tomar como dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou ((do tipo) linear, (do tipo) afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$, monótona crescente, monótona decrescente)? Em caso afirmativo, como você a classifica?

Ao Professor: No item (g) espera-se que o aluno reconheça tempo x comprimento do lado como uma relação de grandezas que variam com mesmo sentido, mas não de forma proporcional, e que uma função que descrevesse esta relação seria monótona crescente.

g) Um jardineiro levou 5 horas para limpar um canteiro quadrangular com 6m de lado. Quanto tempo precisará para limpar, no mesmo ritmo, um canteiro também quadrangular, mas com o dobro do lado? E com o triplo do lado?

Existe relação entre as grandezas tempo e comprimento do lado? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim.

Em caso afirmativo:

Qual variável podemos tomar como independente? _____

Qual variável podemos tomar como dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou ((do tipo) linear, (do tipo) afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$, monótona crescente, monótona decrescente)? Em caso afirmativo, como você a classifica?

Ao Professor: No item (h) espera-se que o aluno reconheça largura x comprimento como uma relação de grandezas inversamente proporcionais e que ela estabelece uma função da forma k/x .

h) Quer-se construir uma sala retangular com $6 m^2$ de área. Supondo que seu comprimento seja x , qual deve ser a largura dessa sala para que a área seja respeitada?

Existe relação entre as grandezas comprimento e largura? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim.

Em caso afirmativo:

Qual variável podemos tomar como independente? _____

Qual variável podemos tomar como dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou ((do tipo) linear, (do tipo) afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$, monótona crescente, monótona decrescente)? Em caso afirmativo, como você a classifica?

Ao Professor: No item (i) espera-se que o aluno reconheça número de torneiras abertas x tempo como uma relação de grandezas inversamente proporcionais, e que trata-se de uma função do tipo k/x .

i) Quatro torneiras de mesma vazão, quando funcionando juntas, enchem um

determinado tanque em seis minutos. Se fecharmos uma delas, em quanto tempo, as outras três, funcionando juntas, demorariam para encher o mesmo tanque? E se fecharmos duas? E se fecharmos 3?

E se tivermos x torneiras sendo fechadas, como se expressa o tempo que demora para encher o tanque?

Existe relação entre as grandezas número de torneiras e tempo? () Não () Sim.

Em caso afirmativo, qual tipo de relação ocorre? _____

A relação determina uma função? () Não () Sim.

Em caso afirmativo:

Qual variável podemos tomar como independente? _____

Qual variável podemos tomar como dependente? _____

Esta função é uma das funções que você estudou ((do tipo) linear, (do tipo) afim, que pode ser escrita na forma $f(x)=k/x$, monótona crescente, monótona decrescente)? Em caso afirmativo, como você a classifica?

Atividade 86

Ao Professor: A atividade objetiva reforçar a noção de inversibilidade de uma função e o critério estabelecido para reconhecer inversibilidade.

Para as funções a seguir:

i) verifique se elas são invertíveis

ii) determine a inversa daquelas que são invertíveis

Ao Professor: Estimule a resolução de (i) via o critério da injetividade.

a) $f(x) = 7x$

b) $f(x) = -13x$

c) $f(x) = 3\sqrt{x}$

d) $f(x) = 4x + 2$

e) $f(x) = -3x + 6$

f) $f(x) = x^2 - 16$

g) $f(x) = \frac{7}{x}$

h) $f(x) = -\frac{9}{x}$