Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

SOBRE A SEMISSIMPLICIDADE DE ÁLGEBRAS DE HOPF FINITO-DIMENSIONAIS E O DUPLO DE DRINFELD

Dissertação de Mestrado

GRASIELA MARTINI

Porto Alegre, 25 de outubro de 2013

Dissertação submetida por Grasiela Martini*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (UFRGS)
Prof. Dra. Daiana Aparecida da Silva Flôres (UFSM)
Prof. Dr. Dirceu Bagio (UFSM)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus, por me guiar sempre. Dedico este trabalho a meus pais, que me apoiaram em todos os momentos de minha vida, pelo amor incondicional. Vocês são um exemplo para mim, tenho muito orgulho de ser filha de vocês.

Agradeço a todos os professores, colegas e amigos que estiveram presentes nesta etapa. Mas sem dúvida, um agradecimento especial, aos meus eternos amigos Alessandro e Danielle, vocês mostraram o significado da verdadeira amizade nesse período. Tiveram paciência comigo nos momentos que mais precisei. Tive sempre um ombro amigo para desabafar todos os problemas e após, uma palavra de incentivo. Nas disciplinas que cursamos juntos, não mediram esforços para me ajudar, pois na maioria das vezes, estava sempre atrasada, devido a produção desta dissertação. Apesar de sempre brincarem com o meu jeito, cada um sabe a importância que teve na minha vida. Muito obrigada mesmo.

Também gostaria de agradecer ao meu orientador Alveri Alves Sant'Ana, por todos os ensinamentos, dedicação, incentivo e, principalmente, paciência. E por fim, agradeço, aos professores que aceitaram participar da minha banca: Antonio Paques, Daiana A. da Silva Flores e Dirceu Bagio.

Aos meus pais, meus exemplos de vida.

Resumo

Neste trabalho discutimos a semissimplicidade de álgebras de Hopf finito-dimensionais e construímos o Duplo de Drinfeld $D(H)$ de uma tal álgebra H. Além disso, apresentamos um resultado mostrando a equivalência entre as categorias de representações dos módulos sobre $D(H)$ e dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre H^{cop}. Como consequência deste estudo, apresentamos um resultado que caracteriza uma álgebra de Hopf quase triangular.

Abstract

In this work we discuss the semisimplicity of some finite-dimensional Hopf Algebras and we set up the Drinfel´d double D(H) of such an algebra H. In addiction, we present a result showing the equivalence between the representation category of modules over D(H) and the Yetter-Drinfeld modules over H^{cop}. As a consequence of this, we present a result that features a quasitriangular Hopf algebra.

Índice

Introdução

Neste trabalho discutiremos a semissimplicidade de álgebras de Hopf de dimensão finita e a construção do Duplo de Drinfeld de $D(H)$ de uma álgebra de Hopf H finito dimensional. Vamos mostrar que $D(H)$ é uma álgebra de Hopf quase triangular e discutir a semissimplicidade do mesmo. Após, mostraremos que a categoria dos módulos sobre o Duplo de Drinfeld é uma categoria monoidal trançada: Para isso verificamos que essa categoria coincide com uma categoria muito conhecida, a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H^{cop}. Por fim, caracterizaremos as álgebras de Hopf H de dimensão finita, para as quais a categoria dos módulos de H é uma categoria monoidal trançada.

O Duplo de Drinfeld de uma álgebra de dimensão finita foi definido por Drinfeld a fim de proporcionar soluções para a equação de Yang-Baxter quântica decorrente da mecânica estatística. A construção de Duplo de Drinfeld relaciona uma álgebra de Hopf, a qual sabemos que nem sempre é quase triangular, com uma álgebra de Hopf quase triangular, que é o Duplo de Drinfeld. Essa estrutura quase triangular está vinculada com a estrutura quase triangular de alguns grupos quânticos.

A categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H é uma categoria monoidal e, no caso da antípoda sobre H ser bijetora, é uma categoria trançada. Esse exemplo de categoria é muito importante, pois satisfaz a equação de Yang-Baxter quântica, já que a equação das tranças é verificada. Com isso conseguimos uma equivalência com a categoria do Duplo de Drindeld.

O trabalho está dividido em 4 capítulos, cujos assuntos abordados são descritos abaixo.

No Capítulo 1, apresentamos alguns pré-requisitos que são utilizados ao longo do trabalho. Entre eles, estão os conceitos e algumas propriedades de álgebra, coálgebra, módulos, comódulos e álgebras de Hopf, assim como as subcoálgebras das Matrizes. Além disso, mencionaremos um pouco sobre álgebras semissimples e álgebras separáveis.

No Capítulo 2, fazemos um estudo a cerca da semissimplicidade de álgebras de Hopf de dimensão finita. Para desenvolver esse capítulo, estudamos as notas *Lectures on Hopf Algebras* (veja [25]), juntamente com [10]. Um dos resultados que caracteriza semissimplicidade de uma álgebra de Hopf de dimensão finita (que é nosso caso) é devido a Maschke, o qual a relaciona com o espaço das integrais. Como muitas vezes temos dificuldade em calcular o espaço das integrais de algumas álgebras de Hopf, temos um segundo Teorema, devido à Larson e Radford, que utiliza somente a antípoda S da álgebra de Hopf para tratar a semissimplicidade. Outro resultado importante, devido à Radford, é uma fórmula para S^4, a qual é muito útil para mostrarmos que a ordem da antípoda de uma álgebra de Hopf de dimensão finita é finita.

No Capítulo 3, os objetivos são a construção do Duplo de Drinfeld de uma álgebra de Hopf de dimensão finita, mostrar que é uma álgebra de Hopf quase triangular e discutir a sua semissimplicidade. As principais bases para esses resultados foram o capítulo 10 de [16], [10], [22] e [12]. Também apresentamos exemplos do Duplo de Drinfeld de duas álgebras de Hopf conhecidas: a álgebra de grupo ($\Bbbk G$) e a álgebra de Taft (T_q).

No capítulo 4, estudamos a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H, que é uma categoria monoidal trançada quando a antípoda de H for bijetora (veja [1] e [17]). Além disso, mostraremos a equivalência entre a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld com a categoria de representações do Duplo de Drinfeld e, por fim, mostraremos que uma álgebra de Hopf é quase triangular se, e somente se, a categoria das representações dessa álgebra for trançada. Nesses últimos dois resultados, utilizamos como embasamento teórico [10] e [16].

Para comodidade de escrita denotaremos o produto tensorial sobre um corpo $\Bbbk$ simplesmente por $\otimes$. Outras notações, serão explicadas ao longo do texto. Para unificação dos resultados deste trabalho estamos utilizando uma álgebra de Hopf H de dimensão finita, apesar de alguns resultados não exigirem essa finitude. Para facilitar a leitura, lembraremos este fato ao leitor, em cada resultado.

Capítulo 1

Pré-requisitos

No primeiro capítulo desta dissertação serão apresentados algumas das propriedades básicas de álgebras e módulos de Hopf, para o bom entendimento do trabalho. Para mais detalhes o leitor pode encontrar esses resultados em [5], [26] ou [16].

1.1 Álgebras de Hopf

Nesta seção introduziremos os conceitos necessários para definir uma álgebra de Hopf. Com o objetivo de apresentar os conceitos duais de álgebra e coálgebra, vamos iniciar apresentando a definição de álgebra via diagramas, os quais serão dualizadas para obtermos o conceito de coálgebra.

Definição 1.1.1. *Uma* $\Bbbk$-***álgebra*** *(ou simplesmente álgebra) é um* $\Bbbk$*-espaço vetorial* A *com duas aplicações* $\Bbbk$*-lineares,* $m : A \otimes A \to A$ *(multiplicação) e* $u : \Bbbk \to A$ *(unidade), tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes id_A"] \arrow[d, "id_A\otimes m"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A\otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\Bbbk\otimes A \arrow[ur, "u\otimes id_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A\otimes\Bbbk \arrow[ul, "id_A\otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

Note que o primeiro diagrama representa a associatividade da multiplicação e o segundo, a existência de unidade de A, dada por $1_A = u(1_{\Bbbk})$.

Com isso, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 1.1.2. *Sejam A e B álgebras com multiplicações m_A e m_B e unidades u_A e u_B, respectivamente. Uma aplicação $f : A \to B$ é um **homomorfismo de álgebras** se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B\otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[r, "u_A"] \arrow[dr, "u_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

Assim, dualizando os diagramas acima obtemos a definição de coálgebra e de homomorfismo de coálgebras.

Definição 1.1.3. *Uma $\Bbbk$-**coálgebra** (ou simplesmente coálgebra) é um $\Bbbk$-espaço vetorial C com duas aplicações $\Bbbk$-lineares, $\Delta : C \to C \otimes C$ (comultiplicação) e $\varepsilon : C \to \Bbbk$ (counidade), tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes id_C"] \\
C\otimes C \arrow[r, "id_C\otimes\Delta"'] & C\otimes C\otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
\Bbbk\otimes C & & C\otimes\Bbbk \\
& C\otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

Definição 1.1.4. *Sejam C e D coálgebras com comultiplicações Δ_C e Δ_D e counidades ε_C e ε_D, respectivamente. Uma aplicação $f : C \to D$ é um* ***homomorfismo de coálgebras****, se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbb{k} \end{tikzcd}$$

Agora, apresentaremos a notação de Sweedler, a qual é muito eficaz para o cálculo de longas composições envolvendo a comultiplicação Δ.

A definição recursiva da sequência de aplicações $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ é definida como $\Delta_1 = \Delta$ e, para $n \geq 2$, $\Delta_n : C \longrightarrow C\otimes C ... \otimes C$ (n+1 vezes) temos que $\Delta_n = (\Delta \otimes id^{n+1})\Delta_{n-1}$.

A notação de Sweedler para Δ se escreve como $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$ (omitiremos o somatório), para qualquer $c \in C$, evitando assim a escrita $\Delta(c) = \sum_i c_{i1} \otimes c_{i2}$. Indutivamente, $\Delta_n(c) = c_1 \otimes ... \otimes c_{n+1}$, para todo $n \geq 2$. Para mais detalhes ver [[5], p.4].

Então as comutatividades dos dois diagramas da definição de coálgebras na notação de Sweedler nos dão que

$$\Delta(c) = c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$$
$$c = \varepsilon(c_1)c_2 = c_1\varepsilon(c_2)$$

Dando sequência, estamos em condições de definir uma biálgebra:

Definição 1.1.5. *Um $\mathbb{k}$-espaço vetorial B é dito uma* ***biálgebra*** *se existem aplicações $\mathbb{k}$-lineares $m : B\otimes B \to B, u : \mathbb{k} \to B, \Delta : B \to B\otimes B$ e $\varepsilon : B \to \mathbb{k}$ tais que (B, m, u) é uma álgebra, (B, Δ, ε) é uma coálgebra e vale uma das seguintes condições (equivalentes):*

(i) Δ *e* ε *são homomorfismos de álgebras,*

(ii) m *e* u *são homomorfismos de coálgebras.*

E, consequentemente, definimos:

Definição 1.1.6. *Sejam* B *e* B' *duas biálgebras. Uma aplicação* $f : B \to B'$ *é dita um* ***homomorfismo de biálgebras*** *se* f *é simultaneamente um homomorfismo de álgebras e de coálgebras.*

Nosso próximo objetivo será apresentar o conceito de álgebras de Hopf, para isso, precisamos da seguinte definição:

Definição 1.1.7. *Sejam* (C, Δ, ε) *uma coálgebra e* (A, m, u) *uma álgebra. Definimos no conjunto* $Hom_{\mathbb{k}}(C, A)$*, dos homomorfismos* $\mathbb{k}$*-lineares, uma estrutura de álgebra em que a unidade é dada por* $u \circ \varepsilon$ *e a multiplicação é dada pelo produto convolução* $*$*:*

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

para todos $f, g \in Hom_{\mathbb{k}}(C, A)$*.*

Usando a notação de Sweedler temos:

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2)$$

para todos $f, g \in Hom_{\mathbb{k}}(C, A)$ e $c \in C$.

Definição 1.1.8. *Seja* $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *uma biálgebra. Dizemos que* H *é uma* ***álgebra de Hopf*** *se existe um elemento* $S \in Hom_{\mathbb{k}}(H, H)$ *que é o inverso de* id_H *com relação ao produto convolução* $*$*, isto é:*

$$S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = h_1S(h_2)$$

para todo $h \in H$*. A aplicação* S *é chamada* ***antípoda*** *de* H*.*

Abaixo, listaremos alguns exemplos de álgebras de Hopf que serão utilizados ao longo deste trabalho:

Exemplo 1.1.9. Álgebra de grupo. Sejam G um grupo e $\Bbbk G = \{\sum_{g\in G} kg; g \in G\}$ o $\Bbbk$-espaço vetorial com base $\{g\}_{g\in G}$. Então $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf com as seguintes estruturas: para todos $h, g \in G$,

$$m(g \otimes h) = gh \qquad u(1_{\Bbbk}) = 1_G$$

$$\Delta(g) = g \otimes g \qquad \varepsilon(g) = 1_{\Bbbk}$$

$$S(g) = g^{-1}.$$

Exemplo 1.1.10. O dual de uma álgebra de Grupo. Seja G um grupo finito, temos que $(\Bbbk G)^* = \{p_g; g \in G\}$ onde $p_g(h) = \delta_{g,h}$. Logo, com as estruturas abaixo, $(\Bbbk G)^*$ é uma álgebra de Hopf: Dados $h, g \in G$,

$$m(p_g \otimes p_h) = \delta_{g,h} p_g \qquad u(1_{\Bbbk}) = \sum_{g\in G} p_g = 1_{(\Bbbk G)^*}$$

$$\Delta(p_g) = \sum_{h\in G} p_{gh^{-1}} \otimes p_h \qquad \varepsilon(p_g) = \delta_{1,g}$$

$$S(p_g) = p_{g^{-1}}.$$

Exemplo 1.1.11. Álgebra de Sweedler (H_4). Assumimos que $car(\Bbbk) \neq 2$. Seja H_4 uma $\Bbbk$-álgebra gerada por c e x, satisfazendo as relações $c^2 = 1$, $x^2 = 0$ e $xc = -cx$. Ou seja, $H_4 = \Bbbk < c, x : c^2 - 1, x^2, xc + cx >$. A estrutura de coálgebra e da antípoda é dada por:

$$\Delta(c) = c \otimes c \qquad \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1$$

$$\varepsilon(c) = 1 \qquad \varepsilon(x) = 0$$

$$S(c) = c^{-1} \qquad S(x) = -cx.$$

Com estas condições H_4 é uma álgebra de Hopf.

Generalizando o exemplo descrito acima, temos a seguinte álgebra de Hopf:

Exemplo 1.1.12. Álgebra de Taft (Tq). Sejam $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ e q uma raiz n-ésima primitiva da unidade. Consideramos a $\Bbbk$-álgebra definida pelos geradores g e x, com as relações:

$$g^n = 1,\ x^n = 0 \text{ e } xg = qgx.$$

Ou seja, $Tq = \Bbbk < x, g : x^n, g^n - 1, xg - qgx >$. Esta álgebra possui estrutura de coálgebra dada por

$$\begin{aligned} \Delta(g) &= g \otimes g & \qquad \Delta(x) &= g \otimes x + x \otimes 1 \\ \varepsilon(g) &= 1 & \qquad \varepsilon(x) &= 0. \end{aligned}$$

E antípoda definida por:

$$S(g) = g^{n-1} \qquad\qquad S(x) = -g^{n-1}x.$$

Com estas estruturas, T_q é uma álgebra de Hopf.

Exemplo 1.1.13. Grupos Quânticos. Sejam $q \in \Bbbk^*$, $q^l = 1$, $l \geq 5$. Definimos à $\Bbbk$-álgebra $Uq = Uq(sl_2) = \Bbbk < E, F, K, K^{-1} : KE = q^2EK, KF = q^2FK, EF - FE = \dfrac{K - K^{-1}}{q^2 - q^{-2}}, KK^{-1} = 1 = K^{-1}K >$.

Definindo-se $\Delta : U_q \longrightarrow U_q \otimes U_q$, $\varepsilon : U_q \longrightarrow \Bbbk$ e $S : Uq \longrightarrow U_q$ de modo que

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= E \otimes K^{-1} + K \otimes E & \qquad \Delta(F) &= F \otimes K^{-1} + K \otimes F \\ \Delta(K) &= K \otimes K & \qquad \Delta(K^{-1}) &= K^{-1} \otimes K^{-1} \\ \varepsilon(F) &= \varepsilon(E) = 0 & \qquad \varepsilon(K) &= 1 \end{aligned}$$

$$S(E) = -q^{-2}E \qquad S(F) = -q^{-2}F \qquad S(K) = K^{-1}.$$

Pode-se verificar que U_q é uma álgebra de Hopf.

Analogamente, aos conceitos dados acima, podemos definir um homomorfismo de álgebras de Hopf, como segue:

Definição 1.1.14. *Uma aplicação $f : H \to H'$ é dita um **homomorfismo de álgebras de Hopf** se é um homomorfismo de biálgebras.*

Agora apresentaremos algumas propriedades das álgebras de Hopf, muito utilizadas durante este trabalho. Todos esses resultados podem ser encontrados com mais detalhes em [5].

Proposição 1.1.15. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então, para todos $g, h \in H$,*

(i) $S(hg) = S(g)S(h)$.

(ii) $S(1_H) = 1_H$.

(iii) $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$.

(iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

As propriedades (i) e (ii) significam que S é um anti-homomorfismo de álgebras, e as propriedades (iii) e (iv), que S é um anti-homomorfismo de coálgebras.

Observação 1.1.16. Seja H uma álgebra de Hopf com a antípoda S bijetiva. Usando as propriedades listadas acima para S, é fácil ver que S^{-1} satisfaz, para todos $h, g \in H$:

(i) $S^{-1}(hg) = S^{-1}(g)S^{-1}(h)$.

(ii) $S^{-1}(h_2)h_1 = h_2 S^{-1}(h_1) = \varepsilon(h)1_H$.

(iii) $\varepsilon(S^{-1}(h)) = \varepsilon(h)$.

(iv) $\Delta(S^{-1}(h)) = S^{-1}(h_2) \otimes S^{-1}(h_1)$.

Definição 1.1.17. *Sejam H uma álgebra de Hopf e $\tau : H \otimes H \longrightarrow H \otimes H$ é o isomorfismo tal que $\tau(h \otimes k) = k \otimes h$, para todos $h, k \in H$.*

(i) Dizemos que H é ***comutativa*** *se $m \circ \tau = m$.*

(ii) Dizemos que H e ***cocomutativa*** *se $\Delta = \tau \circ \Delta$.*

Lema 1.1.18. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $S^2 = id$.

(ii) $h_2 S(h_1) = \varepsilon(h) 1_H$, para todo $h \in H$.

(iii) $S(h_2)h_1 = \varepsilon(h) 1_H$, para todo $h \in H$.

Corolário 1.1.19. *Se H é comutativa ou cocomutativa então $S^2 = id$.*

Seja S a antípoda de H, denotaremos por S^* a antípoda de H^*. Com isso, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.1.20. *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S, então H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*.*

Observação 1.1.21. H é cocomutativa se, e somente se, H^* é comutativa.

Definição 1.1.22. *Sejam C uma coálgebra e $c \in C$, c é dito um elemento* ***group-like***, *se $\Delta(c) = c \otimes c$ e $\varepsilon(c) = 1$. O conjunto de todos elementos group-like de C é denotado por $G(C)$.*

Observação 1.1.23. Se H é uma álgebra de Hopf, então o conjunto $G(H)$ dos elementos group-like de H é um grupo. De fato:

1. $1_H \in G(H)$, pois $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ e $\varepsilon(1_H) = 1_{\Bbbk}$.

2. Se $g, h \in G(H)$ então $\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = gh \otimes gh$ e $\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h) = 1$, ou seja, $gh \in G(H)$.

3. Dado $g \in G(H)$, temos $g^{-1} = S(g) \in G(H)$ pois, por 1.1.15, $\Delta(S(g)) = S(g) \otimes S(g)$, $\varepsilon(S(g)) = \varepsilon(g) = 1_{\Bbbk}$ e, pela definição, de S temos $S(g)g = gS(g) = \varepsilon(g)1_H = 1_H$.

Com isso, podemos concluir que se Γ é um grupo então $G(\Bbbk\Gamma) \simeq \Gamma$.

Proposição 1.1.24. *Com as notações acima, se $g \neq h \in G(H)$ então $\{g, h\}$ é linearmente independente sobre $\Bbbk$.*

Demonstração: Suponha que $\lambda g + \mu h = 0$, para certos $\lambda, \mu \in K$. Suponhamos que $\lambda \neq 0$, em particular, podemos supor $\lambda = 1$. Seja $x = g + \mu h = 0$. Assim, $g = -\mu h$ e

$$\begin{aligned} 0 = \Delta(x) &= \Delta(g) + \mu\Delta(h) \\ &= g \otimes g + \mu h \otimes h \\ &= -\mu h \otimes g + \mu h \otimes h \\ &= \mu(h \otimes -g + h) = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $\mu = 0$ ou $g = h$. Absurdo, pois no primeiro caso teríamos $g = 0$ e no segundo $g \neq h$ por hipótese. Logo $\lambda = 0$ e consequentemente $\mu = 0$, ou seja, $\{g, h\}$ é linearmente independente. ■

Analogamente, utilizando o processo de indução, mostra-se que se $g_1, ..., g_n \in G(H)$ e $g_i \neq g_j$, para todo $i \neq j$, então $\{g_1, ..., g_n\}$ é linearmente independente sobre $\Bbbk$.

Observação 1.1.25. ([5], Example 4.1.5 (3)) Seja $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva. Então, a partir de H podemos construir novos exemplos de álgebras de Hopf:

1. $H^{op} = (H, m^{op}, u, \Delta, \varepsilon, S^{-1})$ é uma álgebra de Hopf, onde $m^{op} = m \circ \tau$.

2. $H^{cop} = (H, m, u, \Delta^{cop}, \varepsilon, S^{-1})$ é também uma álgebra de Hopf, onde $\Delta^{cop} = \tau \circ \Delta$.

3. $(H^{op})^{cop} = (H, m^{op}, u, \Delta^{cop}, \varepsilon, S)$ é também uma álgebra de Hopf. Neste caso, não é necessário que S seja bijetiva.

1.2 Módulos de Hopf

Vamos começar esta seção apresentando a definição de módulo via diagramas, com o objetivo de dualizá-las, para determinar então o conceito de comódulo e por fim, introduzir o conceito de módulos de Hopf.

Definição 1.2.1. *Sejam M um $\Bbbk$-espaço vetorial e A uma $\Bbbk$-álgebra. Dizemos que M é um A-**módulo à esquerda**, se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear $\mu_M : A \otimes M \longrightarrow M$, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes \mu_M"] \arrow[d, "m_A \otimes id_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\mu_M"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\mu_M"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes M \arrow[dd, "\mu_M"] \\ \Bbbk \otimes M \arrow[ur, "u_A \otimes id_M"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \\ & M \end{tikzcd}$$

Note que os diagramas nos dizem que, para todos $a, b \in A$ e $x \in M$ temos:

(i) $a.(b.x) = (ab).x$ e

(ii) $1_A.x = x$.

Analogamente, definimos A-módulo à direita.

Definição 1.2.2. *Seja A uma álgebra. Um A-módulo M é dito A-**módulo livre** se ele possui uma base, ou seja, se todo elemento de M pode ser escrito unicamente como uma combinação linear finita de elementos da base com coeficientes em A.*

Definição 1.2.3. *Sejam M e N A-módulos à esquerda. Uma aplicação $\Bbbk$-linear $f : M \longrightarrow N$ é um* ***homomorfismo de A-módulos à esquerda*** *se o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes f"] \arrow[d, "\mu_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\mu_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Dualizando os diagramas acima, obtemos os conceitos de comódulo e de homomorfismo de comódulos como segue.

Definição 1.2.4. *Sejam M um $\Bbbk$-espaço vetorial e C uma $\Bbbk$-coálgebra. Dizemos que M é um* ***C-comódulo à direita*** *se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear $\rho_M : M \longrightarrow M \otimes C$ tal que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \Delta_C"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho_M \otimes id_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\rho_M"'] & \\ & M \otimes \Bbbk \\ M \otimes C \arrow[ur, "id_M \otimes \varepsilon_C"'] & \end{tikzcd}$$

A notação de Sweedler é usada também para comódulos, ou seja, para qualquer $m \in M$, denotamos $\rho_M(x) = x_0 \otimes x_1$. Então, o segundo diagrama nos diz que $x = x_0\varepsilon(x_1)$. Isto é chamado de propriedade da counidade. Similarmente para o primeiro diagrama.

Analogamente, definimos C-comódulo à esquerda. Ao longo desse trabalho, para qualquer comódulo usamos a mesma notação ρ para designar sua estrutura.

Definição 1.2.5. *Sejam M e N C-comódulos à direita. Uma aplicação $\Bbbk$-linear $f : M \longrightarrow N$ é um* ***homomorfismo de C-comódulos à direita*** *se o seguinte* *diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes id_C"'] & M \otimes C \end{tikzcd}$$

Agora definiremos um módulo racional. Para isso, sejam C uma $\Bbbk$-coálgebra e $C^* = Hom_{\Bbbk}(C, \Bbbk)$ sua $\Bbbk$-álgebra dual. Se M é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\rho : M \longrightarrow M \otimes C$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear onde $\rho(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$, nós definimos a estrutura de C^*-módulo à esquerda sobre M pelo homomorfismo $\mu_\rho : C^* \otimes M \longrightarrow M$, dado por $\mu_\rho(c^* \otimes m) = \sum_i c^*(c_i)m_i$.

Com isso, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.6. *(M, ρ) é um C-comódulo à direita se, e somente se, (M, μ_ρ) é um C^*-módulo à esquerda.*

Agora definimos:

$$\theta_M : M \longrightarrow Hom(C^*, M), \text{ por } \theta_M(m)(c^*) = c^*m,\ m \in M, c^* \in C^*.$$

Sejam $j : C \longrightarrow C^{**}, j(c)(c^*) = c^*(c)$ a injeção canônica, e

$$f_M : M \otimes C^{**} \longrightarrow Hom(C^*, M),$$
$$f_M(m \otimes c^{**})(c^*) = c^{**}(c^*)m$$

que é um homomorfismo injetor. Segue que

$$\gamma_M : M \otimes C \longrightarrow Hom(C^*, M), \gamma_M = f_M(id \otimes j)$$

é injetor. É claro da definição que $\gamma_M(m \otimes c)(c^*) = c^*(c)m$, para $c \in C$, $c^* \in C^*$ e $m \in M$.

Definição 1.2.7. *M é um C^*-**módulo à esquerda racional** se,*

$$\theta_M(M) \subseteq \gamma_M(M \otimes C).$$

Portanto, se M é um C^*-módulo à esquerda racional, então M é um C-comódulo à direita.

Observação 1.2.8. Se $\gamma_M(M \otimes C) = Hom_{\Bbbk}(C^*, M)$, então M é um C^*-módulo racional. De fato, pois $\theta_M(M) \subseteq Hom_{\Bbbk}(C^*, M) = \gamma_M(M \otimes C)$.

Observação 1.2.9. M é um C^*-módulo racional se, e somente se, para todo $m \in M$, existem duas família finitas de elementos $(m_i)_i \subseteq M$ e $(c_i)_i \subseteq C$ tais que

$$c^* \cdot m = \sum_i c^*(c_i) m_i$$

para todo $c^* \in C^*$.

Observação 1.2.10. Se C é uma coálgebra de dimensão finita, então C^* é um C^*-módulo à esquerda racional. Basta mostrar que $\gamma_{C^*}(C^* \otimes C) = Hom(C^* \otimes C^*)$, o que não é difícil pois já temos por hipótese que γ_{C^*} é injetor.

Após todas essas definições podemos introduzir os módulos de Hopf, os quais serão muito úteis para exemplos das ações utilizadas no capítulo 2.

Definição 1.2.11. *Sejam H uma álgebra de Hopf e M um $\Bbbk$-espaço vetorial. Dizemos que M é um H-**módulo de Hopf à direita**, se:*

(i) M é um H-módulo à direita via $M \otimes H \longrightarrow M$, tal que $x \otimes h \longmapsto xh$.

(ii) M é H-comódulo à direita via $M \longrightarrow M \otimes H$, tal que $x \longmapsto x_0 \otimes x_1$.

(iii) $\rho(xh) = x_0 h_1 \otimes x_1 h_2$, para $x \in M$, $h \in H$, com $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$.

Analogamente, definimos H-módulo de Hopf à esquerda.

Exemplo 1.2.12. *Seja H uma álgebra de Hopf. H é um H-módulo de Hopf tanto à esquerda como à direita.*

Mais adiante, mostraremos outro exemplo de módulo de Hopf (ver 2.1.13).

Definição 1.2.13. *Sejam M, N H-módulos de Hopf à direita e $f : M \longrightarrow N$ aplicação $\Bbbk$-linear. Dizemos que f é um **homomorfismo de H-módulos de Hopf à direita** se f é homomorfismo de H-módulos à direita e de H-comódulos à direita.*

Definição 1.2.14. *Seja M um H-módulo à esquerda. O conjunto*

$$M^H = \{m \in M; h.m = \varepsilon(h)m, \forall h \in H\},$$

*é um subespaço vetorial chamado **subespaço dos invariantes de** M.*

Definição 1.2.15. *Seja M um H-comódulo à direita via $\rho : M \longrightarrow M \otimes H$. O conjunto*

$$M^{coH} = \{x \in H; \rho(x) = x \otimes 1_H\},$$

*é um subspaço vetorial chamando **subespaço dos coinvariantes de** M.*

Teorema 1.2.16. ***(Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf)*** *Se M é um H-módulo de Hopf à direita, então a aplicação $f : M^{coH} \otimes H \longrightarrow M$ tal que $x \otimes h \longmapsto xh$, para $x \in M^{coH}$, $h \in H$, é um isomorfismo de H-módulos de Hopf à direita.*

1.3 Álgebras semissimples e separáveis

Nesta seção, fazemos um resumo de conceitos e resultados que vamos necessitar neste trabalho sobre álgebras semissimples e álgebras separáveis. Maiores detalhes, porém, podem ser encontrados em [6], [2] e [13].

Definição 1.3.1. *Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda. Então dizemos que M é um R-**módulo simples** se M é não nulo e só admite os submódulos triviais 0 e M. O anel R é dito **simples** se não possui ideais (bilaterais) além dos triviais. Ainda, M é dito um R-**módulo semissimples** se é uma soma (direta) de R-módulos simples. Um anel R é dito semissimples (à esq.) se o R-módulo regular ${}_RR$ é semissimples.*

Apresentaremos a seguir alguns resultados que caracterizam a semissimplicidade para anéis e módulos (veja [13]).

Teorema 1.3.2. ***(Wedderburn-Artin)*** *Seja R um anel semissimples à esquerda. Então, temos que*

$$R \simeq M_{n_1}(D_1) \times ... \times M_{n_r}(D_r)$$

para adequados anéis de divisão $D_1, ..., D_r$ e inteiros positivos $n_1, ..., n_r$. Além disso, r é unicamente determinado, assim como os pares (n_1, D_1), ..., (n_r, D_r) (a menos de permutação), e existem exatamente r módulos à esquerda simples sobre R mutuamente não-isomorfos.

Como $M_{n_1}(D_1) \times ... \times M_{n_r}(D_r)$ é semissimples tanto à direita como à esquerda, concluimos pelo Teorema acima que um anel R é semissimples à esquerda se, e somente se, R é semissimples à direita. Isto permite falarmos em anéis semissimples, sem nenhum adjetivo de lateralidade.

Teorema 1.3.3. *Seja R um anel. Para que um R-módulo M seja semissimples é necessário e suficiente que cada R-submódulo de M seja um somando direto de M.*

Teorema 1.3.4. *Seja R um anel. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *O R módulo regular à esquerda ${}_RR$ é semissimples.*

(ii) Todos R-módulos à esquerda são semissimples.

(iii) Toda sequência exata de R-módulos à esquerda cinde.

Definição 1.3.5. *Uma álgebra de Hopf H é dita* ***semissimples*** *se é semissimples como uma $\Bbbk$-álgebra, ou seja, se todo H-módulo à esquerda é semissimples.*

Agora definiremos a separabilidade de uma $\Bbbk$-álgebra:

Definição 1.3.6. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra. Dizemos que A é* ***separável*** *se existem r_i, $l_i \in A, 1 \leq i \leq n$ ($dimA = n$), tais que:*
(i) $\sum_i r_i l_i = 1$.
(ii) $\forall x \in A$, $\sum_i x r_i \otimes l_i = \sum_i r_i \otimes l_i x$ em $A \otimes A$.
Se a família $\{(r_i, l_i)\}_{i=1}^n$ satisfaz os itens acima, podemos mostrar que $e := \sum\limits_i r_i \otimes l_i \in A \otimes A$ é um elemento idempotente chamado **idempotente de separabilidade de A.**

Apresentemos agora alguns exemplos de álgebras separáveis.

Exemplo 1.3.7. O anel R é uma R- álgebra separável, mais geralmente, $R^{(n)} = R \oplus R \oplus ... \oplus R$ é também uma R-álgebra separável. De fato, sabemos que os elementos $e_1 = (1, 0, ..., o)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$ de $R^{(n)}$ são idempotentes ortogonais e formam uma base de $R^{(n)}$. Então, $e = \sum\limits_{j=1}^{n} e_j \otimes e_j$ é um idempotente de separabilidade de R.

Exemplo 1.3.8. A R-álgebra $M_n(R)$, das matrizes de ordem $n \times n$ sobre R, é separável. De fato, consideremos as matrizes canônicas E_{ij}, para $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, e definimos então $e = \sum\limits_{i=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{ji}$, onde o índice j é fixo. Assim, e é um idempotente de separabilidade de $M_n(R)$.

Observemos que, neste exemplo, fica claro que o idempotente de separabilidade de uma álgebra separável não é único necessariamente.

Exemplo 1.3.9. Sejam R um anel e G um grupo multiplicativo finito, de ordem n, tal que $n = n1_R$ é um elemento invertível em R. Então pode-se mostrar facilmente que a R-álgebra RG é separável sobre R, com idempotente de separabilidade dado por, $e = \frac{1}{n}\sum_{g \in G} g \otimes g^{-1}$. E, reciprocamente, se RG é uma álgebra separável, então n é um elemento inversível em R.

1.4 Subcoálgebras de Matrizes

Nesta seção serão mencionados alguns resultados importantes sobre as subcoálgebras de matrizes, as quais são importantes para a demonstração do último teorema do capítulo 2. Para maiores detalhes, esses resultados podem ser encontrados na seção 7.3 de [5].

A coálgebra das matrizes $C = M^c(n, \Bbbk)$, para algum inteiro positivo n, é uma $\Bbbk$-coálgebra com as seguintes estruturas:

$$\Delta(c_{ij}) = \sum_{1 \leq p \leq n} c_{ip} \otimes c_{pj} \quad \text{ e } \quad \varepsilon(c_{ij}) = \delta_{ij},$$

para $(c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ base de C.

Neste caso, temos que $C^* \simeq M_n(\Bbbk)$ é a álgebra das matrizes, onde os elementos de C^* são da forma $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \subseteq C^*$, definidos por $E_{ij}(c_{rs}) = \delta_{ir}\delta_{js}$.

Identificando C^* e $M_n(\Bbbk)$, podemos considerar também o traço de $c^* \in C^*$, $Tr(c^*)$, o qual é a soma de todos os coeficientes dos $E'_{ii}s$ na representação de C^* na base $(c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de C^*.

Definimos uma forma bilinear $(\mid) : C \times C \longrightarrow \Bbbk$ por $(c_{ij|C_{rs}}) = \delta_{is}\delta_{jr}$, para todos $1 \leq i, j, r, s \leq n$. Esta forma induz uma aplicação linear $\xi : C \longrightarrow C^*$, por $\xi(c)(d) = (c|d)$, para todos $c, d \in C$. Claramente temos que $\xi(c_{ij}) = E_{ij}$, para todos

i, j, assim ξ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Lema 1.4.1. ([5], Lema 7.3.1) *Com as notações acima, para qualquer $c, d \in C$, temos:*

(i) $(c|d) = Tr(\xi(c)\xi(d))$.

(ii) $\varepsilon(c) = \sum_{i=1}^{n}(c|c_{ii}) = Tr(\varepsilon(c))$.

Se ξ é um isomorfismo linear, nós podemos transferir a estrutura de $\Bbbk$-álgebra de $C^* = M_n(\Bbbk)$ para o espaço C, de tal modo que a multiplicação é definida por $c \circ d = \xi^{-1}(\xi(c)\xi(d))$, para todos $c, d \in C$. Em particular, $c_{ij} \circ c_{rs} = \delta_{is}c_{rj}$. O elemento identidade de $(C, \circ)$ é dado por $\xi^{-1}(\sum_{i=1}^{n} E_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ e denotamos por $X_C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$.

Denotamos por $c^{(r)}$ o elemento $c \circ c \circ ... \circ c$ (r vezes) e $c^{(-1)}$ o inverso de c em $(C, \circ)$. Com estas notações, temos os seguintes resultados:

Proposição 1.4.2. ([5], Proposition 7.3.3) *Seja $\phi : C \longrightarrow C$ um homomorfismo linear. Então ϕ é um homomorfismo de coálgebras se, e somente se, existe $t \in C$, invertível em $(C, \circ)$ tal que $\phi(c) = t^{(-1)} \circ c \circ t$, para todo $c \in C$. Mais ainda, neste caso, nós temos que $Tr(\phi) = \varepsilon(t)\varepsilon(t^{(-1)})$.*

Proposição 1.4.3. ([5], Lema 7.3.10) *Seja H uma álgebra de Hopf cossemissimples, $\lambda \in I_l(H^*)$ e C uma subcoálgebra de matrizes de H. Seja $t \in C$ um elemento invertível em $(C, \circ)$ tal que $S^2(c) = t^{(-1)} \circ c \circ t$, para todo $c \in C$. Então $\varepsilon(t) \neq 0$ e $\varepsilon(t^{(-1)}) \neq 0$.*

Capítulo 2

Semissimplicidade

Nesse capítulo apresentaremos três teoremas importantes, muito úteis na caracterização de álgebras de Hopf semissimples. Eles estão presentes, por exemplo, em [25], [5], [19] e [14]. O texto que segue está fortemente baseado em [10].

2.1 O espaço das integrais

O objetivo dessa seção é mostrar um teorema devido a Larson e Sweedler para álgebras de Hopf de dimensão finita, o qual mostra que a antípoda dessas álgebras é bijetiva. Além disso, o resultado mostra a unidimensionalidade do espaço das integrais.

Definição 2.1.1. *Seja H uma álgebra de Hopf. O $\Bbbk$-espaço linear das integrais à esquerda e à direita de H são definidos, respectivamente, como:*

$$I_l(H) := \{h \in H : xh = \varepsilon(x)h, \forall x \in H\} \quad e \tag{2.1}$$

$$I_r(H) := \{h \in H : hx = \varepsilon(x)h, \forall x \in H\} \tag{2.2}$$

*H será chamado **unimodular**, se $I_l(H) = I_r(H)$.*

Observação 2.1.2. Com esta definição, o espaço das integrais $I_l(H)$ de H é o ideal dos invariantes (à esq) com respeito a ação de H sobre si mesma, dada pela multiplicação. Afirmação similar pode ser feita para $I_r(H)$.

Exemplo 2.1.3. Seja H a Álgebra de Grupo definida no Exemplo 1.1.9, com G finito, e consideremos $t = \sum_{g\in G} g$. Então $t \in I_l(H)$ e $t \in I_r(H)$.

De fato, para todo $h \in G$

$$ht = h\sum_{g\in G} g = \sum_{g\in G} hg = \sum_{g\in G} g = t = \varepsilon(h)t,$$

pois hg percorre todo G e $\varepsilon(h) = 1_{\Bbbk}$, para todo $h \in G$. Analogamente, $th = \varepsilon(h)t$. Portanto, $t \in I_l(H)$ e $t \in I_r(H)$.

Exemplo 2.1.4. Seja $H = (\Bbbk G)^*$ a álgebra definida no Exemplo 1.1.10, com base $\{p_g : g \in G\}$, onde $p_g(h) = \delta_{g,h}$. Se $t = p_1$, então $t \in I_l(H)$ e $t \in I_r(H)$.

De fato, para todos $g \in G$ e $f \in (\Bbbk G)^*$, temos

$$(f * p_1)(g) = f(g)p_1(g) = \begin{cases} f(1_H), & \text{se} \quad g = 1_H \\ 0, & \text{se} \quad g \neq 1_H. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\varepsilon_{H^*}(f)p_1(g) = f(1_H)p_1(g) = \begin{cases} f(1_H), & \text{se} \quad g = 1_H \\ 0, & \text{se} \quad g \neq 1_H. \end{cases}$$

Logo, $t = p_1 \in I_l(H)$. Analogamente, mostra-se que $t = p_1 \in I_r(H)$.

Exemplo 2.1.5. Sejam $H = T_q$ a Álgebra de Taft definida no Exemplo 1.1.12. Então temos:

$$\begin{aligned} t &= (1 + g + ... + g^{n-1})x^{n-1} \in I_l(T_q) \ \ e \\ t' &= (q^{n-1}1 + q^{n-2}g + ... + 1g^{n-1})x^{n-1} \in I_r(T_q). \end{aligned}$$

Observe que para mostrar que t e t' são integrais basta verificar (2.1) e (2.2) para os elementos g e x, geradores de T_q. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
xt &= x(1+g+...+g^{n-1})x^{n-1} \\
&= (x+xg+xg^2+...+xg^{n-1})x^{n-1} \\
&= (x+qgx+qgxg+...+qgxg^{n-2})x^{n-1} \\
&= (x+qgx+q^2g^2x+...+q^{n-1}g^{n-1}x)x^{n-1} \\
&= (1+qg+q^2g^2+...+q^{n-1}g^{n-1})xx^{n-1} \\
&= (1+qg+q^2g^2+...+q^{n-1}g^{n-1})x^{n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
t'x &= (q^{n-1}1+q^{n-2}g+...+1g^{n-1})x^{n-1}x \\
&= (q^{n-1}1+q^{n-2}g+...+1g^{n-1})x^{n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\varepsilon(x)=0$, temos $xt=0=\varepsilon(x)t$ e $t'x=0=\varepsilon(x)t'$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
gt &= g(1+g+...+g^{n-1})x^{n-1} \\
&= (g+g^2+...+g^{n-1}+g^n)x^{n-1} \\
&= (g+g^2+...+g^{n-1}+1)x^{n-1} \\
&= t.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
t'g &= (q^{n-1}1+q^{n-2}g+...+1g^{n-1})x^{n-1}g \\
&= (q^{n-1}1+q^{n-2}g+...+1g^{n-1})q^{n-1}gx^{n-1} \\
&= (q^{n-1}1q^{n-1}g+q^{n-2}gq^{n-1}g+...+1g^{n-1}q^{n-1}g)x^{n-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (q^{n-2}g + q^{n-3}g^2 + ... + q^{n-1}1)x^{n-1} \\
&= t'.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como $\varepsilon(g) = 1$, segue que $gt = t = \varepsilon(g)t$ e $t'g = t' = \varepsilon(g)t'$.

Portanto, $t = (1 + g + ... + g^{n-1})x^{n-1} \in I_l(Tq)$ e $t' = (q^{n-1}1 + q^{n-2}g + ... + 1g^{n-1})x^{n-1} \in I_r(Tq)$.

Observação 2.1.6. Note que se $n = 2$ e $q = -1$ nós obtemos que H é a álgebra de Sweedler, geralmente denotada por H_4. Assim, para H_4 temos

$$t = (1 + g)x \in I_l(H_4) \text{ e } t = (1 - g)x \in I_r(H_4).$$

O próximo resultado caracteriza integrais à esquerda de H^*.

Lema 2.1.7. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então $\phi \in I_l(H^*)$ se, e somente se, para todo $h \in H$,*

$$\phi(h)1_H = h_1\phi(h_2).$$

Demonstração: De fato, $\phi \in I_l(H^*)$ se, e somente se, $\psi\phi = \varepsilon_{H^*}(\psi)\phi$, para todo $\psi \in H^*$.

Lembramos que a multiplicação em H^* é o produto convolução e a counidade é dada por $\varepsilon_{H^*}(f) = f(1_H)$, para todo $f \in H^*$, temos

$$
\begin{aligned}
\psi * \phi(h) = \varepsilon_{H^*}(\psi)\phi(h) &\Leftrightarrow \psi(h_1)\phi(h_2) = \psi(1_H)\psi(h) \\
&\Leftrightarrow \psi(h_1\phi(h_2)) = \psi(\phi(h)1_H).
\end{aligned}
$$

Como $\psi \in H^*$ foi tomada arbitraria, segue que $h_1\phi(h_2) = \phi(h)1_H$. ■

Exemplo 2.1.8. Usando o Teorema acima podemos (re)obter a integral à esquerda de $(\Bbbk G)^*$ dada no Exemplo 2.1.4. De fato, dado $g \in \Bbbk G$, temos

$$\begin{aligned} \phi \in I_l((\Bbbk G)^*) &\Leftrightarrow \phi(g)1_G = g\phi(g) \\ &\Leftrightarrow g = 1_G \\ &\Leftrightarrow \phi = p_1. \end{aligned}$$

Logo, $\phi = p_1 \in I_l((\Bbbk G)^*)$. E mais, neste caso, $\Bbbk \cdot (p_1) = I_l((\Bbbk G)^*)$.

Se A é uma álgebra de dimensão finita, faremos uso da seguinte notação:

$$< f, a >= f(a) \quad f \in A^*,\ a \in A.$$

Vamos construir agora exemplos de ações e coações, as quais serão necessárias para a prova de um Lema de Larson e Sweedler adiante.

Observação 2.1.9. Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Nós podemos considerar H^* como um H-comódulo à direita. Logo pela Proposição 1.2.6 temos que H^* é um H^*-módulo, via a multiplicação (produto convolução) e em particular é racional pela Observação 1.2.10. Assim, temos:

$$< g, h_1 >< f, h_2 >=< g, f_1 >< f_0, h >, \quad \forall g, f \in H^*, \forall h \in H.$$

De fato, pois se a aplicação

$$\begin{aligned} \rho : H^* &\longrightarrow H^* \otimes H \\ f &\longmapsto \rho(f) = f_0 \otimes f_1 \end{aligned}$$

dá a estrutura de H-comódulo à direita, como acima, então segue que da Observação 1.2.9, que $g * f = g(f_1)f_0$, ou seja, $< g * f, h >=< g, f_1 >< f_0, h >$, para todos $h \in H$, $f, g \in H^*$. Portanto,

$$< g, h_1 >< f, h_2 >=< g * f, h >=< g, f_1 >< f_0, h >, \quad \forall g, f \in H^*, \forall h \in H..$$

Exemplo 2.1.10. Seja H uma álgebra de Hopf. Consideremos H como um H-comódulo à direita, via a coação $\rho : H \longrightarrow H \otimes H$, dada por $\rho(h) = h_0 \otimes h_1$. Então, H é um H^*-módulo à esquerda via:

$$h^* \rightharpoonup h =< h^*, h_1 > h_0,$$

para todos $h^* \in H^*$ e $h \in H$.

De fato, vamos verificar os dois itens da definição:

$i)$ $1_H^* \rightharpoonup h = \varepsilon \rightharpoonup h =< \varepsilon, h_1 > h_0 = h$, pois H é um H-comódulo.

$ii)$ Sejam $f, g \in H^*$. Então

$$\begin{aligned}
(f * g) \rightharpoonup h &= < f * g, h_1 > h_0 \\
&= < f, h_{11} >< g, h_{12} > h_0 \\
&= < f, h_1 >< g, h_2 > h_0 \\
&= f \rightharpoonup (< g, h_1 > h_0) \\
&= f \rightharpoonup (g \rightharpoonup h)
\end{aligned}$$

para todo $h \in H$.

Analogamente, temos que H é um H^*-módulo à direita via:

$$h \leftharpoonup h^* =< h^*, h_0 > h_1,$$

para todos $h^* \in H^*$ e $h \in H$.

Agora introduziremos as seguintes estruturas de H-módulos:

Exemplo 2.1.11. Como H é um H-módulo à direita via multiplicação, podemos induzir uma ação de H em H^* pela direita, via a aplicação

$$\begin{aligned}
\leftharpoonup : H^* \otimes H &\longrightarrow H^* \\
h^* \otimes h &\longmapsto (h^* \leftharpoonup h)(g) =< h^*, hg >,
\end{aligned}$$

para todos $f, g \in H$ e $h^* \in H^*$.

De fato, seja $h^* \in H^*$, Então:

$i)$ $< h^* \leftharpoonup 1_H, g >=< h^*, 1_H g >=< h^*, g >$, para todo $g \in H$. Assim, $h^* \leftharpoonup 1_H = h^*$, para todo $h^* \in H^*$.

$ii)$ Para todos $h, k, g \in H$, temos

$$\begin{aligned}
< (h^* \leftharpoonup h) \leftharpoonup k, g > &= < h^* \leftharpoonup h, kg > \\
&= < h^*, h(kg) > \\
&= < h^*, (hk)g > \\
&= < h^* \leftharpoonup (hk), g > .
\end{aligned}$$

ou seja, $(h^* \leftharpoonup h) \leftharpoonup k = h^* \leftharpoonup (hk)$, para todos $h^* \in H^*$ e $h, k \in H$.

Analogamente, temos que H^* é um H-módulo à esquerda, via

$$< h \rightharpoonup h^*, g >=< h^*, gh >,$$

para todos $h^* \in H^*$ e $h, g \in H$.

Exemplo 2.1.12. Por meio da antípoda, nós obtemos ações de H em H^* pela direita, ou seja, H^* é um H-módulo à direita, via:

$$< h^* \leftharpoondown h, g >=< S(h) \rightharpoonup h^*, g >=< h^*, gS(h) >.$$

De fato, seja $h^* \in H^*$. Então:

$i)$ $< h^* \leftharpoondown 1_H, g >=< h^*, gS(1_H) >=< h^*, g >$, para todo $g \in H$. Assim, $h^* \leftharpoondown 1_H = h^*$, para todo $h^* \in H$.

$ii)$ Para todos $h, k, g \in H$,

$$\begin{aligned} < (h^* \leftharpoondown h) \leftharpoondown k, g > &= < h^* \leftharpoondown h, gS(k) > \\ &= < h^*, gS(k)S(h) > \\ &= < h^*, gS(hk) > \\ &= < h^* \leftharpoondown (hk), g > . \end{aligned}$$

ou seja, $(h^* \leftharpoondown h) \leftharpoondown k = h^* \leftharpoondown (hk)$, para todos $h, k \in H$ e $h^* \in H^*$.

Analogamente, mostra-se que H^* é um H-módulo à esquerda, via

$$< h \rightharpoondown h^*, g >=< h^* \leftharpoonup S(h), g >=< h^*, S(h)g >$$

Conseguimos determinar para H^* uma estrutura de H-comódulo e de H-módulo ambos à direita. Com isso podemos mostrar o seguinte resultado.

Lema 2.1.13. (Larson-Sweedler, 1969) *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então H^* é um H-módulo de Hopf à direita, com ação $\leftharpoondown$ e coação ρ, dadas anteriormente.*

Demonstração: De fato, pelos Exemplos 2.1.12 e 2.1.9, H^* é um H-módulo com ação $\leftharpoondown$ e H-comódulo com coação ρ, ambos à direita. Falta apenas mostrar a compatibilidade, ou seja, se $f \in H^*$ e $h \in H$, então

$$\rho(f \leftharpoondown h) = f_0 \leftharpoondown h_1 \otimes f_1 h_2.$$

Para isso, basta mostrar que vale a seguinte relação:

$$g(f \leftharpoondown h) = g(f_1 h_2)(f_0 \leftharpoondown h_1),$$

para todos $f, g \in H^*$ e $h \in H$.

De fato, pois se $x \in H$, então temos

$$
\begin{aligned}
< g(f_1h_2)(f_0 \leftharpoondown h_1), x > &= < g, f_1h_2 >< f_0 \leftharpoondown h_1, x > \\
&= < g, f_1h_2 >< f_0, xS(h_1) > \\
&= < h_2 \rightharpoonup g, f_1 >< f_0, xS(h_1) > \\
&\overset{2.1.9}{=} < h_2 \rightharpoonup g, (xS(h_1))_1 >< f, (xS(h_1)_2) > \\
&= < h_3 \rightharpoonup g, x_1S(h_2) >< f, x_2S(h_1) > \\
&= < g, x_1S(h_2)h_3 >< f, x_2S(h_1) > \\
&= < g, x_1\varepsilon(h_2) >< f, x_2S(h_1) > \\
&= < g, x_1 >< f, x_2S(h_1\varepsilon(h_2)) > \\
&= < g, x_1 >< f, x_2S(h) > \\
&= < g * (f \leftharpoondown h), x >,
\end{aligned}
$$

mostrando assim a relação dada. ■

O próximo teorema, devido à *Larson e Sweedler* é uma consequência do Teorema 1.2.16 (Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf) e do Lema 2.1.13.

Teorema 2.1.14. ***(Larson - Sweedler, 1969)*** *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então:*

(i) $dim(I_l(H)) = dim(I_r(H)) = 1$.

(ii) A antípoda S é bijetiva e $S(I_l(H)) = I_r(H)$.

(iii) Para $0 \neq \lambda \in I_l(H^*)$, a aplicação $H \longrightarrow H^*$, dada por $h \longmapsto (h \rightharpoonup \lambda)$, é um isomorfismo linear à esquerda.

Demonstração: (i) Consideremos a estrutura de H^*-módulo de Hopf apresentada pelo Lema 2.1.13. Aplicando-a ao Teorema 1.2.16, segue que

$$(H^*)^{coH} \otimes H \cong H^*.$$

Como $dim(H) < \infty$, nós podemos afirmar que $dim((H^*)^{coH})$=1. De fato, seja $dim(H) = n$, então $dim(H^*) = n$. Logo $n = dim(H^*) = dim((H^*)^{coH} \otimes H) = dim((H^*)^{coH})dim(H) = n\ dim((H^*)^{cop})$. Portanto, $dim((H^*)^{coH})$=1.

Pela Observação 2.1.9, temos que $< \psi, f_1 >< f_0, h >=< \psi, h_1 >< f, h_2 >$, para todos $\psi, f \in H^*$ e $h \in H$, onde $\rho(f) = f_0 \otimes f_1$. Em particular, se $\phi \in (H^*)^{coH} = \{\varphi \in H^* : \rho(\varphi) = \varphi \otimes 1\}$, temos que $< \psi, 1 >< \phi, h >=< \psi, h_1 >< \phi, h_2 >$. Logo,

$$\begin{aligned}
\phi \in (H^*)^{coH} \quad & \Longleftrightarrow \quad < \psi, 1 >< \phi, h >=< \psi, h_1 >< \phi, h_2 > \\
& \Longleftrightarrow \quad < \psi, < \phi, h > 1_H >=< \psi, < \phi, h_2 > h_1 > \\
& \overset{\forall \psi \in H^*}{\Longleftrightarrow} \quad < \phi, h > 1_H =< \phi, h_2 > h_1 \\
& \overset{2.1.7}{\Longleftrightarrow} \quad \phi \in I_l(H^*).
\end{aligned}$$

Portanto, $dim(I_l(H^*)) = 1$. Por fim trocando, H^* por $H^{**} \simeq H$ (novamente usamos que H tem dimensão finita), obtemos $dim(I_l(H)) = 1$.

Para provarmos que $dim(I_r(H)) = 1$, primeiro vamos verificar o próximo item.

(ii) O intem anterior nos dá o isomorfismo

$$\begin{aligned}
\varphi : I_l(H^*) \quad & \otimes \quad H \longrightarrow H^* \\
\lambda \quad & \otimes \quad h \longmapsto \lambda \leftharpoonup h
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Queremos mostrar que S é bijetiva. Para isso, sejam $0 \neq \lambda \in I_l(H^*)$ e $h \in H$ tal que, $h \in Ker(S)$, ou seja, $S(h) = 0$. Então,

$$\varphi(\lambda \otimes h)(1_H) = \lambda \leftharpoonup h(1_H) = S(h) \rightharpoonup \lambda(1_H) = \lambda(1_H S(h)) = \lambda(1_H 0) = 0.$$

Pelo fato de φ ser um isomorfismo, segue que $\lambda \otimes h = 0$, e portanto, $h = 0$. Logo S é injetiva e, pelo fato da $dim(H) < \infty$, concluímos que S é bijetiva.

Finalmente, podemos provar que $dim(I_r(H)) = 1$. Seja $h \in I_l(H)$,

$$\begin{aligned} S(h)k &= S(h)S(S^{-1}(k)) \\ &= S(S^{-1}(k)h) \\ &= S(\varepsilon(S^{-1}(k))h) \\ &= \varepsilon(S^{-1}(k))S(h) \\ &= \varepsilon(k)S(h) \end{aligned}$$

Logo, $S(h)k = \varepsilon(k)S(h)$, ou seja, $S(h) \in I_r(H)$. Com isso, mostramos que $S(I_l(H)) \subseteq I_r(H)$. Analogamente, mostra-se que $I_r(H) \subseteq S(I_l(H))$. Portanto, $S(I_l(H)) = I_r(H)$, de onde segue que $dim(I_r(H)) = 1$.

(iii) Recordando o isomorfismo (2.3), nós temos, para qualquer $0 \neq \mu \in I_l(H^*)$,

$$H^* = \mu \leftharpoonup H = S(H) \rightharpoonup \mu.$$

Assim, como S é bijetiva, concluímos que $H^* = H \rightharpoonup H^*$. Portanto, a aplicação $H \longrightarrow H^*$, dada por $h \longmapsto h \rightharpoonup \lambda$, para todos $h \in H$ e $\lambda \in H^*$ é sobrejetiva. Mas como $dim(H) < \infty$, concluímos que esta aplicação é um isomorfismo linear à esquerda, como queríamos demonstrar. ■

Agora, com esse resultado, voltamos aos exemplos do início desta seção:

Exemplo 2.1.15. No Exemplo 1.1.9 mostramos que se $t = \sum_{g \in G} g$, então $t \in I_l(\Bbbk G)$ e $t \in I_r(\Bbbk G)$. Como a dimensão de $\Bbbk G$ é finita, segue do Teorema anterior, que

$$\Bbbk \cdot t = \Bbbk \cdot \sum_{g \in G} g = I_l(\Bbbk G) = I_r(\Bbbk G).$$

Portanto, $\Bbbk G$ é unimodular

Exemplo 2.1.16. No Exemplo 1.1.10 mostramos que se $t = p_1$, então $t \in I_l((\Bbbk G)^*)$ e $t \in I_r((\Bbbk G)^*)$. Aqui também temos dimensão finita, logo pelo Teorema anterior temos

$$\Bbbk \cdot t = \Bbbk \cdot p_1 = I_l((\Bbbk G)^*) = I_r((\Bbbk G)^*).$$

Portanto, $(\Bbbk G)^*$ é unimodular

Exemplo 2.1.17. No Exemplo 1.1.12 mostramos que se $t = (1+g+...+g^{n-1})x^{n-1}$, então $t \in I_l(T_q)$. Temos também que a dimensão é finita logo pelo Teorema anterior

$$\Bbbk \cdot t = \Bbbk \cdot ((1+g+...+g^{n-1})x^{n-1}) = I_l(T_q).$$

Analogamente, tínhamos que se $t' = (q^{n-1}1 + q^{n-2}g + ... + 1g^{n-1})x^{n-1}$, então $t' \in I_r(T_q)$. Logo pelo Teorema anterior

$$\Bbbk \cdot t' = \Bbbk \cdot ((q^{n-1}1 + q^{n-2}g + ... + 1g^{n-1})x^{n-1}) = I_r(T_q).$$

Portanto, Tq não é unimodular, já que $I_l(T_q) \neq I_r(T_q)$.

2.2 Álgebras de Frobenius

Nessa seção serão apresentados alguns resultados importantes envolvendo álgebras de Frobenius para, ao final, mostrarmos um **Teorema de Maschke** para álgebras de Hopf de dimensão finita. Esse resultado caracteriza a semissimplicidade dessas álgebras, via o espaço das integrais.

Se A é uma $\Bbbk$-álgebra, a representação regular à esquerda (resp. à direita) de A é a estrutura de módulo em A dada pela multiplicação à esquerda (resp. à direita). Ela é denotada por ${}_AA$ (resp. A_A).

Recordamos que se M é um A-módulo à direita, então o espaço dual M^* é um A-módulo à esquerda por

$$< a \cdot f, m > = < f, m \cdot a >,$$

para todo $a \in A, f \in M^*, m \in M$.

Definição 2.2.1. *Sejam A uma álgebra de dimensão finita, $f \in A^*$ e $r_i, l_i \in A, 1 \leq i \leq n = dim(A)$. Então f é chamado um homomorfismo de Frobenius, com bases duais (r_i, l_i), se vale uma das seguintes condições:*
(i) $x = \sum_i < f, l_i x > r_i, \forall x \in A$.
(ii) $x = \sum_i l_i < f, x r_i >, \forall x \in A$.

Proposição 2.2.2. *Seja A uma álgebra de dimensão finita e seja $f \in A^*$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A aplicação

$$\begin{aligned} \phi :_A A &\longrightarrow A^*_A \\ x &\longmapsto (x \rightharpoonup f)(a) = f(ax) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de A-módulo à esquerda.

(ii) Existe $r_i, l_i \in A$, $1 \leq i \leq n = dim(A)$, tal que f é um isomorfismo de Frobenius com base dual (r_i, l_i).

(iii) A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : A_A &\longrightarrow {}_A A^* \\ x &\longrightarrow (f \leftharpoonup x)(a) = f(xa) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de A-módulos à direita.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $(l_i)_{i=1}^n$ uma base de A e seja $(f_i)_{i=1}^n$ a base dual de A^*. Por hipótese, ${}_A A \simeq A^*_A$, então existe $r_i \in A$, $1 \leq i \leq n$ tal que $f_i = r_i \rightharpoonup f$. Assim, para $x \in A$, temos

$$x = \sum_i < f_i, x > l_i = \sum_i < r_i \rightharpoonup f, x > l_i = \sum_i < f, x r_i > l_i.$$

Logo, f é um homomorfismo de Frobenius com bases duais (r_i, l_i), $1 \leq i \leq n$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que existem $r_i, l_i \in A$, $1 \leq i \leq n$, tais que f é homomorfismo de Frobenius com bases duais (r_i, l_i), ou seja, $x = \sum_i l_i < f, xr_i >$, para todo $x \in A$.

Queremos mostrar que $\varphi : A_A \longrightarrow_A A^*$ é um isomorfismo de A-módulos à direita. É fácil ver que φ está bem definida e é um homomorfismo de A-módulos, logo mostraremos apenas o isomorfismo linear.

Seja $x \in A$ tal que $x \in Ker\varphi$, ou seja,

$$< f \leftharpoonup x, y >=< f, xy >= 0,$$

para todos $x, y \in A$. Em particular, $< f, xr_i >= 0$, $\forall i = 1, ..., n$. Logo

$$x = \sum_i l_i < f, xr_i >= 0.$$

Ou seja, φ é injetora. Como A é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, segue que φ é um isomorfismo.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Analogamente ao que se fez em $(i) \Rightarrow (ii)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ De maneira similar a $(ii) \Rightarrow (iii)$, mostra-se que ϕ é um isomorfismo linear. ■

Definição 2.2.3. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Se A satisfaz qualquer das condições equivalentes da Proposição anterior, então A é chamada uma* **Álgebra de Frobenius.**

Corolário 2.2.4. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita então H é uma álgebra de Frobenius.*

Demonstração: De fato, pelo Teorema 2.1.14, temos que para $0 \neq \lambda \in I_l(H^*)$ a aplicação $H \longrightarrow H^*$, dada por $h \longmapsto h \rightharpoonup \lambda$ (resp. $h \longmapsto \lambda \rightharpoonup h$) é um isomorfismo de H-módulos à esquerda (resp. à direita). Logo, pela Proposição anterior, H é uma álgebra de Frobenius. ■

O próximo resultado segue diretamente da aplicação do Corolário anterior com o Teorema 2.2.2.

Corolário 2.2.5. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então existe um isomorfismo linear $\phi : H \longrightarrow H^*$ que satisfaz: $\phi(xy) = x \rightharpoonup \phi(y)$, para todo $x, y \in H$ e $\phi^{-1}(fg) = \phi^{-1}(f) \leftharpoonup g$, para todo $f, g \in H^*$*

Observação 2.2.6. Seja $\varepsilon \in H^*$, então pelo isomorfismo anterior, existe $\Lambda \in H$ tal que $\varepsilon = \lambda \leftharpoonup \Lambda$. Afirmamos que $\Lambda \in I_r(H)$.

De fato, se $k \in I_r(H)$ então:

$$< \lambda \leftharpoonup k, h >=< \lambda, kh >=< \varepsilon, h >< \lambda, k >,$$

logo $< \lambda \leftharpoonup k, h >=< \varepsilon, h >< \lambda, k >$, para todo $h \in H$. Ou seja, $\lambda \leftharpoonup k =< \lambda, k > \varepsilon$.

Desta forma podemos escolher k tal que $< \lambda, k >= 1$, logo $\lambda \leftharpoonup k = \varepsilon$. Como $h \longmapsto \lambda \leftharpoonup h$ é um isomorfismo então nós temos que $k = \Lambda$. Assim $\Lambda \in I_r(H)$. Consequentemente, $\varepsilon = \lambda \leftharpoonup \Lambda \Leftrightarrow < \lambda, \Lambda >= 1$, para $\Lambda \in I_r(H)$.

Teorema 2.2.7. *Seja $0 \neq \lambda \in I_l(H^*)$ e seja $\Lambda \in H$ tal que $\varepsilon = \lambda \rightharpoonup \Lambda$. Então λ é um homomorfismo de Frobenius com bases duais $(S(\Lambda_1), \Lambda_2)$.*

Demonstração: Primeiramente, observemos que, pelo Lema 2.1.7, temos:

$$\phi \in I_l(H^*) \Leftrightarrow < \phi, h > 1_H = h_1 < \phi, h_2 >, \text{ para todo } h \in H.$$

Então, seja $x \in H$ e tomemos $h = \Lambda_2 x \in H$. Como $\lambda \in I_l(H^*)$,

$$< \lambda, \Lambda_2 x > 1_H = \Lambda_2 x_1 < \lambda, \Lambda_3 x_2 >.$$

Agora, vamos mostrar que λ satisfaz (i) da Definição 2.2.1:

$$\begin{aligned}
S(\Lambda_1) < \lambda, \Lambda_2 x > &= S(\Lambda_1)\Lambda_2 x_1 < \lambda, \Lambda_3 x_2 > \\
&= \varepsilon(\Lambda_1) x_1 < \lambda, \Lambda_2 x_2 > \\
&= x_1 < \lambda, \varepsilon(\Lambda_1)\Lambda_2 x_2 > \\
&= x_1 < \lambda, \Lambda x_2 > \\
&= x_1 < \lambda \leftharpoonup \Lambda, x_2 > \\
&= x_1 < \varepsilon, x_2 > \\
&= x.
\end{aligned}$$

para todo, $x \in H$. Portanto, λ é um homomorfismo de Frobenius. ■

De uma forma semelhante, pode-se ver que se $0 \neq \gamma \in I_r(H^*)$, então existe $\Gamma \in I_l(H)$ tal que $\Gamma \rightharpoonup \gamma = \varepsilon$. E também temos que γ é um homomorfismo de Frobenius com bases duais $(\Gamma_1, S(\Gamma_2))$.

No que segue, fixamos $0 \neq \lambda \in I_l(H^*)$ e $\Lambda \in I_r(H)$ tal que $< \lambda, \Lambda >= 1$. E analogamente, $0 \neq \gamma \in I_r(H^*)$ e $\Gamma \in I_l(H)$ tal que $< \gamma, \Gamma >= 1$.

Observação 2.2.8. Seja A uma álgebra de Frobenius, com homomorfismo de Frobenius $f \in A^*$ e bases duais (r_i, l_i). Então, em $A \otimes A$, nós temos a seguinte identidade:

$$\sum_i x r_i \otimes l_i = \sum_i r_i \otimes l_i x, \ \forall x \in A.$$

De fato, consideramos a aplicação linear.

$$\begin{aligned}
\eta : A \otimes A &\xrightarrow{\phi} A \otimes A^* \xrightarrow{\varphi} End(A) \\
a \otimes b &\longmapsto a \otimes f \leftharpoonup b \longmapsto < f \leftharpoonup b, - > a
\end{aligned}$$

onde A é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e f é o homomorfismo de Frobenius.

Vamos mostrar que η é um isomorfismo linear. Para tanto, vamos verificar que ϕ e φ os são. Inicialmente, observamos que segue diretamente do item (iii) da Proposição 2.2.2 que ϕ é um isomorfismo, já que $f \in A^*$ é homomorfismo de Frobenius com bases duais (r_i, l_i).

Agora, consideremos

$$\begin{aligned} \varphi : A \otimes A^* &\longrightarrow End(A) \\ a \otimes f &\longmapsto \, < f, \_ > a \end{aligned}$$

e seja $a \otimes f \in \mathrm{Ker}\varphi$, com $a \neq 0$. Então $\varphi(a \otimes f) =< f, \_ > a = 0$. Como $a \neq 0$, segue que $< f, \_ >$ é o homomorfismo nulo, o que implica que $a \otimes f = 0$, mostrando assim que φ é injetora. Agora, como A é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, segue que φ é um isomorfismo linear.

Com isso temos,

$$\begin{aligned} \eta(\sum_i xr_i \otimes l_i)(a) &= \sum_i < f \leftharpoonup l_i, a > xr_i \\ &= x \sum_i < f, l_i a > r_i \\ &= xa. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta(\sum_i r_i \otimes l_i x)(a) &= \sum_i < f \leftharpoonup l_i x, a > r_i \\ &= \sum_i < f, l_i x a > r_i \\ &= xa. \end{aligned}$$

Como η é isomorfismo, segue que $\sum_i xr_i \otimes l_i = \sum_i r_i \otimes l_i x$.

Esta observação nos faz lembrar a Definição 1.3.6. O objetivo é investigar a semissimplicidade para álgebras de Hopf. Para isso mostraremos um resultado importante chamado de *Teorema de Maschke* para álgebras de Hopf.

Teorema 2.2.9. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então as seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) H é semissimples;

(ii) H é separável;

(iii) $< \varepsilon, I_l(H) > \neq 0$;

(iii') $< \varepsilon, I_r(H) > \neq 0$;

Demonstração:

$(iii) \Leftrightarrow (iii')$ Note que como $S(I_l(H)) = I_r(H)$ e $\varepsilon(S(x)) = \varepsilon(x)$, para todo $x \in H$, então temos que:

$$< \varepsilon, I_l(H) > \neq 0 \Leftrightarrow < \varepsilon, I_r(H) > \neq 0.$$

$(iii') \Rightarrow (ii)$ Lembramos que toda álgebra de Hopf de dimensão finita é uma álgebra de Frobenius com bases duais $(r_i, p_i) = (S(\Gamma_1), \Gamma_2)$, onde $0 \neq \Gamma \in I_r(H)$. Então,

$$\sum_i r_i p_i = S(\Gamma_1)\Gamma_2 =< \varepsilon, \Gamma > 1_H.$$

Definindo então $t :=< \varepsilon, \Gamma >$, temos $t \neq 0$ e chamando $l_i = t^{-1}p_i$, $(1 \leq i \leq dim(H))$ temos que $\sum_i r_i \otimes l_i$ é um idempotente de separabilidade de H. De fato, vamos mostrar que $\sum_i r_i \otimes l_i$ satisfaz os itens da Definição 1.3.6:

- $\sum_i r_i l_i = \sum_i t^{-1} r_i p_i = t^{-1}(\sum_i r_i p_i) = 1.$

- $$\begin{aligned} \sum_i x r_i \otimes l_i &= \sum_i x r_i \otimes t^{-1} p_i \\ &= t^{-1} \sum_i x r_i \otimes p_i \\ &\overset{2.2.8}{=} t^{-1} \sum_i r_i \otimes p_i x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i r_i \otimes t^{-1} p_i x \\
&= \sum_i r_i \otimes l_i x.
\end{aligned}
$$

Portanto, H é separável.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sejam X um H-módulo de dimensão finita e $Y \subseteq X$ um H-submódulo de X. Pela Definição 1.3.5, basta provarmos que, existe um H-submódulo Z tal que $X = Y \oplus Z$.

Seja $\pi : X \longrightarrow Y$ a projeção linear e defina $\Pi : X \longrightarrow Y$, via $\Pi(x) = \sum_i r_i \pi(l_i x)$ onde $\sum_i r_i \otimes l_i$ é um idempotente de separabilidade. Nós afirmamos que Π é uma projeção H-linear. Para mostrarmos isto, precisamos da seguinte observação:

$H \otimes X$ é $H \otimes H$-módulo à esquerda via a acão:

$$
(h \otimes h') \cdot (g \otimes x) = hg \otimes h' \cdot x, \ \forall h, h', g \in H \text{ e } \forall x \in X.
$$

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_i hr_i \otimes l_i \cdot x &= (\sum_i hr_i \otimes l_i) \cdot (1_H \otimes x) \\
&\overset{(ii)}{=} (\sum_i r_i \otimes l_i h) \cdot (1_H \otimes x) \\
&= \sum_i r_i \otimes l_i h \cdot x.
\end{aligned}
$$

Então definindo, $\psi = \cdot \circ (id \otimes \pi)$, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_i hr_i \otimes l_i \cdot x &= \sum_i r_i \otimes l_i h \cdot x \Leftrightarrow \\
\psi(\sum_i hr_i \otimes l_i \cdot x) &= \psi(\sum_i r_i \otimes l_i h \cdot x) \Leftrightarrow \\
\sum_i hr_i \pi(l_i \cdot x) &= \sum_i r_i \pi(l_i h \cdot x).
\end{aligned}
$$

Como Y é um H-submódulo, segue da observação acima que $\Pi(x) \subseteq Y$. Logo, para todos $h \in H$, $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
\Pi(h \cdot x) &= \sum_i r_i \pi(l_i h \cdot x) \\
&= \sum_i h r_i \pi(l_i \cdot x) \\
&= h \cdot \sum_i r_i \pi(l_i \cdot x) \\
&= h \cdot \Pi(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Pi(x)$ é H-linear. Agora, seja $y \subseteq Y$. Então temos

$$\Pi(y) = \sum_i r_i \pi(l_i y) = \sum_i r_i l_i y = y.$$

Logo, $\Pi^2 = \Pi$. Seja, $Z =$Ker$\Pi \subseteq X$, como H-submódulo. Afirmamos que $X = Y \oplus Z$. De fato, seja $x \in Y \cap$ KerΠ, então $\Pi(x) = 0$, mas como $x \in Y$, temos $x = \Pi(x) = 0$. Resta mostrar que todo elemento de $x \in X$ se escreve como $x = y + z$, com $y \in Y$ e $z \in Z$.

Note que, $x = x + \Pi(x) - \Pi(x) = \Pi(x) + (x - \Pi(x))$. Mas já sabíamos que $\Pi(x) \subseteq Y$, logo falta apenas vermos que $x - \Pi(x) \in$ Ker$\Pi = Z$. De fato, como $\Pi(x) \subseteq Y$, $\forall x \in X$, segue que

$$\Pi(x - \Pi(x)) = \Pi(x) - \Pi^2(x) = \Pi(x) - \Pi(x) = 0.$$

Portanto, $x = y \oplus z$, ou seja, H é semissimples.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Suponha H semissimples, então pela Proposição 1.3.4, toda sequência exata curta de H-módulos (à esq.)

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\mu} V \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0$$

cinde. Isto é, existe uma aplicação H-linear $\eta : W \longrightarrow V$ tal que $\pi \circ \eta = id_W$.

Aplicando isso a sequência exata curta $0 \longrightarrow \text{Ker } \varepsilon \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\varepsilon} \Bbbk \longrightarrow 0$, temos que ela cinde, ou seja, existe $\eta : \Bbbk \longrightarrow H$ tal que $\varepsilon \circ \eta = id_{\Bbbk}$. Em particular, $< \varepsilon, \eta(1_{\Bbbk}) >= 1_{\Bbbk}$.

Agora, se $h \in H$ e η é H-linear então,

$$\begin{aligned} h\eta(1_{\Bbbk}) &= \eta(h1_{\Bbbk}) \\ &= \eta(h < \varepsilon, \eta(1_{\Bbbk}) >) \\ &= \eta(< \varepsilon, h\eta(1_{\Bbbk}) >) \\ &= \eta(< \varepsilon, h >< \varepsilon, \eta(1_{\Bbbk}) >) \\ &= < \varepsilon, h > \eta(< \varepsilon, \eta(1_{\Bbbk}) >) \\ &= < \varepsilon, h > \eta(1_{\Bbbk}). \end{aligned}$$

Logo, $\eta(1_{\Bbbk}) \in I_l(H)$. Como H tem dimensão finita, sabemos que $\dim I_l(H) = 1$ e, mais ainda, $< \varepsilon, \eta(1_{\Bbbk}) >= 1_{\Bbbk} \neq 0$, então $< \varepsilon, I_l(H) >\neq 0$, como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.2.10. Este Teorema nos diz que, em dimensão finita, temos:

$$H \text{ é semissimples} \Leftrightarrow < \varepsilon, I_l(H) >\neq 0 \Leftrightarrow < \varepsilon, I_r(H) >\neq 0.$$

Então, nessas condições, para $0 \neq \Lambda \in I_r(H)$, que tínhamos fixado anteriormente, temos $< \varepsilon, \Lambda >\neq 0$, pois $dim(I_r(H)) = 1$.

Observação 2.2.11. Trocando H por H^* no Teorema acima, nós obtemos que H^* é semissimples $\Leftrightarrow < \lambda, 1 >\neq 0$, para algum $0 \neq \lambda \in I_l(H^*)$.

De fato, em H^* $< \varepsilon_{H^*}, I_l(H^*) >\neq 0 \Leftrightarrow < \varepsilon_{H^*}, \lambda >\neq 0 \Leftrightarrow < \lambda, 1 >\neq 0$ para algum $0 \neq \lambda \in I_l(H^*)$.

Corolário 2.2.12. *Seja G um grupo finito. Então*

$$H = \Bbbk G \textit{ é semissimples} \Leftrightarrow car(\Bbbk) \nmid |G|.$$

Demonstração: Sabemos pelo Exemplo 2.1.16 que $0 \neq t = \sum_{g \in G} g \in I_l(H) = I_r(H)$. Então

$$< \varepsilon, t > \neq 0 \Leftrightarrow < \varepsilon, \sum_{g \in G} g > \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{g \in G} < \varepsilon, g > \neq 0 \Leftrightarrow |G| 1_{\Bbbk} \neq 0 \Leftrightarrow car(\Bbbk) \nmid |G|.$$

Logo, pelo Teorema 2.2.9, $\Bbbk G$ é semissimples $\Leftrightarrow car(\Bbbk) \nmid |G|$ ■

Observação 2.2.13. Do Corolário acima temos que se a $car(\Bbbk) = 0$ então $\Bbbk G$ é semissimples, para todo grupo G finito.

Corolário 2.2.14. *A álgebra de Taft* (T_q) *não é semissimples.*

Demonstração: De fato, pelo Exemplo 2.1.17, sabemos que $0 \neq t = (1 + g + ... + g^{n-1})x^{n-1} \in I_l(T_q)$, logo

$$< \varepsilon, t > = < \varepsilon, (1 + g + ... + g^{n-1})x^{n-1} > = < \varepsilon, 1 + g + ... + g^{n-1} >< \varepsilon, x^{n-1} > = 0.$$

Logo, pelo Teorema 2.2.9, T_q não é semissimples. ■

Definição 2.2.15. *Uma álgebra de Hopf de dimensão finita é chamada* ***cossemissimples*** *se* H^* *é semissimples.*

Exemplo 2.2.16. Seja G um grupo finito. Então $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf cossemissimples.

De fato, vamos mostrar que $(\Bbbk G)^*$ é semissimples. Sabemos pelo Exemplo 2.1.16 que $0 \neq t = p_1 \in I_l((\Bbbk G)^*) = I_r((\Bbbk G)^*)$, logo $< \varepsilon, p_1 > = \delta_{1,1} = 1 \neq 0$. Portanto, pelo Teorema 2.2.9, $(\Bbbk G)^*$ é semissimples, ou seja, $\Bbbk G$ é cossemissimples.

Exemplo 2.2.17. Seja G um grupo finito, então $(\Bbbk G)^*$ é cossemissimples se, e somente se, a característica de $\Bbbk$ não divide a ordem de G.

De fato, como $dim(H) < \infty, (H^*)^* \simeq H$, logo $((\Bbbk G)^*)^* \simeq \Bbbk G$ que é semissimples $\Leftrightarrow car(\Bbbk) \nmid |G|$.

2.3 A Fórmula de Radford para S^4

Nessa seção mostraremos uma importante fórmula para a antípoda, chamada Fórmula de Radford para S^4. Ela é fundamental para provarmos que a ordem da antípoda de uma álgebra de Hopf de dimensão finita é finita.

Recordamos que se A é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, pela demonstração de 2.2.8 nós temos o seguinte isomorfismo canônico $\varphi : A^* \otimes A \longrightarrow End(A)$ dado por

$$\varphi(f \otimes v)(w) =< f, w > v.$$

$\forall\ v, w \in A$ e $f \in A^*$. Via essa identificação temos que a função traço é dada por $Tr : A^* \otimes A \longrightarrow \Bbbk$ onde $Tr(f \otimes v) =< f, v >$, para todo $v \in A$ e $f \in A^*$. De fato, sejam $dim(A) = n$, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de A e $\{v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*\}$ sua base dual. Então $v = \sum_i^n v_i^*(v)v_i$, para qualquer $v \in A$. Assim calculando o traço da matriz $f \otimes v$ na base dada cima temos,

$$Tr(f \otimes v) = \sum_i^n v_i^*(f(v_i)v) = \sum_i^n f(v_i)v_i^*(v) = f(\sum_i^n v_i^*(v)v_i) = f(v)$$

para todo $v \in A$. Essa identificação do traço será útil nos resultados que seguem.

Lema 2.3.1. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e $F \in End(H)$. Então o traço de F é dado por*

$$Tr(F) =< \lambda, F(\Lambda_2)S(\Lambda_1) >.$$

Demonstração: Seja $F \in \mathrm{End}(H)$. Sabemos pelo Teorema 2.2.7 que para todo $x \in H$,

$$F(x) =< \lambda, F(x)S(\Lambda_1) > \Lambda_2,$$

pois, λ é um homomorfismo de Frobenius com bases duais $(S(\Lambda_1), \Lambda_2)$.

Dado o isomorfismo $H^* \otimes H \simeq \text{End}(H)$ conhecido, temos a seguinte identificação $F \longmapsto < \lambda, F(-)S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2 >$. Então:

$$\begin{aligned} Tr(F) &= Tr(< \lambda, F(-)S(\Lambda_1) > \otimes \Lambda_2) \\ &= < \lambda, F(\Lambda_2)S(\Lambda_1) > . \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

Em uma álgebra de Hopf de dimensão finita, o traço e a antípoda desempenham um papel muito importante como veremos a seguir. Mas antes observemos que, para um elemento $h \in H$, chamamos $L_h \in \text{End}(H)$, o endomorfismo de H dado por $L_h(x) = hx$, $x \in H$ (multiplicação à esquerda). Isto define uma aplicação $\Bbbk$-linear $Tr_H : H \longrightarrow \Bbbk$ da forma

$$Tr_H(h) = Tr(L_h), \tag{2.4}$$

para todo $h \in H$.

Esta aplicação será de grande importância no futuro, como veremos. Como uma consequência do Lema anterior, nós temos a seguinte proposição:

Proposição 2.3.2. *Seja H uma álgebra de dimensão finita. Então:*

(i) $Tr(S^2) =< \varepsilon, \Lambda >< \lambda, 1 >$;

(ii) Se $S^2 = id$, então $Tr(H) =< \varepsilon, \Lambda > \lambda$;

Demonstração: (i) Tomando $F = S^2$, temos, pelo Lema anterior, que:

$$\begin{aligned} Tr(S^2) &= < \lambda, S^2(\Lambda_2)S(\Lambda_1) > \\ &= < \lambda, S(\Lambda_1 S(\Lambda_2)) > \\ &= < \lambda, S(\varepsilon(\Lambda)1_H) > \\ &= < \lambda, \varepsilon(\Lambda)S(1_H) > \\ &= < \varepsilon, \Lambda >< \lambda, 1_H > . \end{aligned}$$

Portanto, $Tr(S^2) =< \varepsilon, \Lambda >< \lambda, 1 >$.

(ii) Suponhamos que $S^2 = id$. Segue do Lema 1.1.18 que $h_2S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$, para todo $h \in H$. Tomando $F = Tr(L_h)$ e, utilizando o Lema 2.3.1, temos que

$$\begin{aligned} Tr(L_h) &= < \lambda, L_h(\Lambda_2)S(\Lambda_1) > \\ &= < \lambda, h\Lambda_2S(\Lambda_1) > \\ &= < \lambda, h\varepsilon(\Lambda)1_H > \\ &= < \varepsilon, \Lambda >< \lambda, h > \end{aligned}$$

para todo $h \in H$. Mas por (2.4), $Tr(L_H) = Tr_H(h)$. Com isso, $Tr_H(h) =< \varepsilon, \Lambda ><\lambda, h >$, para todo $h \in H$. Portanto, $Tr_H =< \varepsilon, \Lambda > \lambda$. ■

Corolário 2.3.3. *Com as mesmas notações anteriores, temos:*

(i) H e H^* são semissimples se, e somente se, $Tr(S^2) \neq 0$.

(ii) Se $S^2 = id$ e a característica de $\Bbbk$ não divide a dimensão de H, então H e H^* são semissimples.

Demonstração: (i) Pelo Teorema de Maschke 2.2.9, H é semissimples se, e somente se, $< \varepsilon, \Lambda >\neq 0$. Além disso, H^* é semissimples se, e somente se, $< \varepsilon_{H^*}, \lambda >=< \lambda, 1 >\neq 0$. Lembrando que $\lambda \in I_l(H)$ e $\Lambda \in I_r(H)$ foram fixados anteriormente.

Logo, pelo item (i) da Proposição anterior, $Tr(S^2) =< \varepsilon, \Lambda >< \lambda, 1 >\neq 0 \Leftrightarrow < \varepsilon, \Lambda >\neq 0$ e $< \lambda, 1 >\neq 0$.

(ii) Se $S^2 = id$ então $Tr(S^2) = Tr(id) = dim(H)$, logo

$$H \text{ e } H^* \text{ são semissimples} \Leftrightarrow Tr(S^2) = (dim(H))1_\Bbbk \neq 0 \Leftrightarrow car(\Bbbk) \nmid |H|.$$

O resultado então segue. ■

Combinando os Corolários 1.1.19 e 2.3.3, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.4. *Sejam $\Bbbk$ um corpo de característica zero e H uma álgebra de Hopf de dimensão finita cocomutativa. Então H é semissimples e cossemissimples. Além disso, se $\Bbbk$ é algebricamente fechado H, então H é uma álgebra de grupo.*

Demonstração: Por hipótese H é cocomutativa. Logo, pelo Corolário 1.1.19, temos $S^2 = id$. Agora, se $car(\Bbbk) = 0$, então o Corolário 2.3.3 nos diz que H é semissimples e cossemissimples.

Vamos mostrar agora que se $\Bbbk$ é algebricamente fechado, então existe um grupo finito Γ tal que $H \simeq \Bbbk\Gamma$. Suponhamos $dim(H) = n$. Então $dim(H)^* = n$. Da primeira parte, temos que H^* é uma álgebra semissimples e, pelo Teorema de Wederburn (ver 1.3.2), segue que $H^* \simeq \oplus_{i=1}^{n} M_{n_i}(D_i)$, onde cada $M_{n_i}(D_i)$ é uma matriz sobre um anel de divisão D_i. Pela Observação 1.1.21, H^* é comutativa, logo todas essas matrizes tem ordem 1×1, e pelo fato de $\Bbbk$ ser algebricamente fechado temos que $D_i \simeq \Bbbk$, $1 \leq i \leq n$. Portanto, $H^* \simeq \Bbbk^n$ como álgebras.

Podemos então considerar $\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$ base linear de H^*, com $\delta_i\delta_j = \delta_{i,j}\delta_i$. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a base dual de H, isto é, $\delta_i(e_j) = \delta_{i,j}$, para $i, j = 1, ..., n$. Como $\Delta(e_j) \in H \otimes H$, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta(e_j) &= \sum_{i,k} < \delta_i \otimes \delta_k, \Delta(e_j) > e_i \otimes e_k \\
&= \sum_{i,k} < \delta_i * \delta_k, e_j > e_i \otimes e_k \\
&= \sum_{i,k} \delta_{i,k} < \delta_i, e_j > e_i \otimes e_k \\
&= \sum_{i} < \delta_i, e_j > e_i \otimes e_i \\
&= \sum_{i} \delta_{i,j} e_i \otimes e_i \\
&= e_j \otimes e_j.
\end{aligned}$$

Logo, $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de H, formada por elementos grouplikes. Mas sabemos, por 1.1.23, que o conjunto dos elementos grouplikes de H formam um grupo com a multiplicação induzida pela multiplicação de H. Como essa base de elementos grouplikes tem cardinalidade igual a dimensão de H e como o conjunto de grouplikes é linearmente independente sobre $\Bbbk$ (veja 1.1.24), concluímos que $H \simeq \Bbbk\Gamma$, onde $\Gamma = \{e_1, ..., e_n\}$ é um grupo finito. $\blacksquare$

No que segue nós desenvolveremos uma fórmula para S^4, devido a Radford, que é válida sobre um corpo arbitrário $\Bbbk$. Também provaremos a finitude da ordem da antípoda para álgebras de Hopf de dimensão finita.

Observação 2.3.5. Se $0 \neq t \in I_r(H)$ e $h \in H$, então $ht \in I_r(H)$. De fato, pois

$$\begin{aligned} t \in I_r(H) \quad &\Leftrightarrow \quad tg = \varepsilon(g)t, \qquad \forall g \in H \\ &\Leftrightarrow \quad htg = h\varepsilon(g)t \\ &\Leftrightarrow \quad htg = \varepsilon(g)ht, \qquad \forall g \in H \\ &\Leftrightarrow \quad ht \in I_r(H). \end{aligned}$$

Como H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, segue que a $dim(I_r(H)) = 1$, e então nós podemos encontrar um $\alpha = \alpha(h) \in \Bbbk$, tal que $ht = \alpha(h)t$. Isto define um elemento $\alpha \in H^*$ de modo natural.

Agora observemos que $\alpha \in \text{Alg}(H, \Bbbk) = G(H^*)$. Note que $t = 1t = \alpha(1)t = 1$ e também que $k(ht) = k\alpha(h)t = \alpha(h)\alpha(h)t$. Por outro lado, $(kh)t = \alpha(kh)t$, $\forall$ $0 \neq t \in I_r(H)$. Logo $\alpha(kh) = \alpha(k)\alpha(h)$.

Outra observação importante é que α não depende da escolha particular do elemento t escolhido no espaço das integrais. De fato, seja, $0 \neq t' \in I_r(H)$ e $0 \neq \alpha' \in G(H^*)$ tal que $ht' = \alpha'(h)t'$. Mas $t' = kt$, para algum $k \in \Bbbk$ pois a $dim(I_r(H)) = 1$ e $t \in I_r(H)$. Assim $\alpha'(h)t' = ht' = hkt = kht = k\alpha(h)t = \alpha(h)kt = \alpha(h)t'$. Então, $\alpha'(h)t' = \alpha(h)t'$, para todo $0 \neq t' \in I_r(H)$. Logo, $\alpha'(h) = \alpha(h)$, para todo $h \in H$. Portanto, $\alpha' = \alpha$.

De maneira análoga, mudando as funções de H e H^* na discusão anterior temos que se $0 \neq k \in I_r(H^*)$, então $f * k \in I_r(H^*)$ para toda $f \in H^*$. Com isso, nós podemos encontrar um elemento $a \in H$ tal que $f*k = f(a)k$, pois a $dim(I_r(H^*)) = 1$. Continuando o mesmo raciocínio, temos que a é um elemento grouplike em H ($a \in G(H)$) e a não depende da escolha particular de I no espaço das integrais.

Definição 2.3.6. *Sejam $a \in G(H)$ e $\alpha \in G(H^*)$ como acima. Então a, α são chamados de* ***elementos modulares*** *de H.*

Como $a \in G(H)$, seque que $S(a)a = u\varepsilon(a)$, ou seja, $S(a) = a^{-1}$. Analogamente como $\alpha \in G(H^*)$ então $S(\alpha) = \alpha^{-1}$.

Observação 2.3.7. Segue, a partir da Definição acima que:

(i) H é unimodular $\Leftrightarrow \alpha = \varepsilon$.

(ii) H^* é unimodular $\Leftrightarrow a = 1$.

De fato, recordamos que H é unimodular se $I_l(H) = I_r(H)$. Assim, e se $0 \neq t \in I_r(H)$ então $ht \in I_r(H)$, para todo $h \in H$, ou seja, $ht = \alpha(h)t$. Logo, $0 \neq t \in I_r(H) = I_l(H) \Leftrightarrow \varepsilon(h)t = ht = \alpha(h)t \Leftrightarrow \alpha = \varepsilon$, pois vale para todo $h \in H$ e $0 \neq t \in I_r(H)$. De maneira análoga, mostra-se o segundo item.

Observação 2.3.8. Se H é semissimples, então H é unimodular.

De fato, seja $0 \neq t \in I_r(H)$, como H é semissimples, segue do Teorema 2.2.9 que $< \varepsilon, t > \neq 0$. Além disso, $ht = \alpha(h)t$. Aplicando ε nessa igualdade, temos

$$\begin{aligned} < \varepsilon, ht > &= < \varepsilon, \alpha(h)t > \\ < \varepsilon, h >< \varepsilon, t > &= < \alpha, h >< \varepsilon, t > \\ < \varepsilon, h > &= < \alpha, h >, \end{aligned}$$

pois $< \varepsilon, t > \neq 0$. Logo temos que $\varepsilon = \alpha$, pois $h \in H$ foi tomado arbitrário. Pelo primeiro item da observação anterior, segue então que H é unimodular.

Seja $\gamma \in I_r(H^*)$ o homomorfismo de Frobenius de H condiderado inicialmente. Então pela Proposição 2.2.2 , γ determina um isomorfismo $H \longrightarrow H^*$ tal que $h \longmapsto h \rightharpoonup \gamma$, $\forall\ h \in H$. Agora, para $x \in H$ fixado, nós podemos considerar um elemento $\phi_x \in H^*$, definido por $\phi_x(y) =< \gamma, xy >$.

Observamos também que pelo isomorfismo acima, como $\phi_x \in H^*$, existe um único $\rho = \rho(x) \in H$, tal que, $\phi_x = \rho(x \rightharpoonup \gamma)$, isto é, $< \gamma, xy >=< \gamma, y\rho(x) >$, para todo $y \in H$. Em outras palavras, $\gamma \leftharpoonup x = \rho(x) \rightharpoonup \gamma$. Assim, a aplicação $\rho : H \longrightarrow H$, dada por, $x \longmapsto \rho(x)$, para $x \in H$, define claramente um isomorfismo de H.

Definição 2.3.9. *O isomorfismo ρ definido acima é chamado de **Automorfismo de Nakayama** de H com respeito ao homomorfismo de Frobenius γ.*

As duas proposições que seguem nos auxiliarão na prova da Fórmula de Radford para S^4. Para isso, sejam $0 \neq \gamma \in I_r(H^*)$, $\Gamma \in I_l(H)$ tais que $< \gamma, \Gamma >= 1$. Mais ainda, sejam $t = S(\Gamma)$, a e α os elementos modulares de H. Então, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.3.10. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Com as notações anteriores temos:*

(i) $(S^{-1}(t_2), t_1)$ são bases duais para o homomorfismo de Frobenius γ.

(ii) Para todo $h \in H$, $\rho(h) =< \alpha, h_1 > S^{-2}(h_2)$.

Demonstração: (i) Seja $h \in H$, usando o fato que $t = S(\Gamma)$ e que S é um antimorfismo, temos que:

$$\begin{aligned} S^{-1}(t_2) < \gamma, t_1 h > &= S^{-1}(S(\Gamma)_2) < \gamma, S(\Gamma)_1 h > \\ &= S^{-1}(S(\Gamma_1)) < \gamma, S(\Gamma_2) h > \\ &= \Gamma_1 < \gamma, S(\Gamma_2) h > \\ &= h. \end{aligned}$$

Essa última igualdade vem do Teorema 2.2.7 , o qual nos diz que $(\Gamma_1, S(\Gamma_2))$ são bases duais para γ. Logo, $h = S^{-1}(t_2) < \gamma, t_1 h >$, ou seja, $(S^{-1}(t_2), t_1)$ são também bases duais para γ.

(ii) Sejam $h \in H$ e $\rho(h) \in H$. Então por (i), temos

$$\begin{aligned} \rho(h) &= S^{-1}(t_2) < \gamma, t_1\rho(h) > \\ &= S^{-1}(t_2) < \gamma, ht_1 >, \end{aligned}$$

onde esta última igualdade segue da definição da ρ.

Aplicando S^2 em ambos os membros da igualdade acima e, lembrando que $\gamma \in I_r(H^*)$, nós obtemos:

$$\begin{aligned} S^2(\rho(h)) &= S^2(S^{-1}(t_2) < \gamma, ht_1 >) \\ &= < \gamma, ht_1 > S(t_2) \\ &= < \gamma, ht_1 > 1_H S(t_2) \\ &\overset{2.1.7}{=} < \gamma, h_1t_1 > h_2t_2S(t_3) \\ &= < \gamma, h_1t_1 > h_2\varepsilon(t_2)1_H \\ &= < \gamma, h_1\varepsilon(t_2)t_1 > h_2 \\ &= < \gamma, h_1t > h_2 \\ &= < \gamma, \alpha(h_1)t > h_2 \\ &= < \alpha, h_1 >< \gamma, t > h_2. \end{aligned}$$

Note que $< \gamma, t >= 1$. De fato, $1_H \in H$, logo por (i), $1_H = S^{-1}(t_2) < \gamma, t_1 >$. Aplicando ε nessa igualdade, temos:

$$\begin{aligned} 1_{\Bbbk} = \varepsilon(1_H) &= \varepsilon(S^{-1}(t_2) < \gamma, t_1 >) \\ &= < \gamma, t_1 >< \varepsilon, S^{-1}(t_2) > \\ &= < \gamma, t_1 >< \varepsilon, t_2 > \\ &= < \gamma, t_1\varepsilon(t_2) >=< \gamma, t > . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S^2(\rho(h)) &= <\alpha, h_1> h_2 \\ \rho(h) &= S^{-2}(<\alpha, h_1> h_2) \\ &= <\alpha, h_1> S^{-2}(h_2). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ∎

Proposição 2.3.11. *Novamente, com as notações anteriores, e supondo $dim(H) < \infty$ temos:*

(i) $(S(t_1)a, t_2)$ são bases duais para γ.

(ii) Para todo $h \in H$, $\rho(h) = a^{-1}S^2(h_1) < \alpha, h_2 > a$.

Demonstração: (i) Primeiramente note que, para todo $f \in H^*$, temos

$$x_1 < \gamma, x_2 >= a < \gamma, x >, \tag{2.5}$$

onde a é elemento modular de H.

De fato, sabemos que $f * \gamma = f(a)\gamma$. Então para qualquer $x \in H$, $f(x_1)\gamma(x_2) = f(a)\gamma(x)$. Logo, $f(x_1 < \gamma, x_2 >) = f(a < \gamma, x >)$. Como esta igualdade vale para toda $f \in H^*$, obtemos que $x_1 < \gamma, x_2 >= a < \gamma, x >$.

Portanto, para todo $h \in H$, temos que

$$\begin{aligned} S(t_1)a < \gamma, t_2h > &\overset{(2.5)}{=} S(t_1)t_2h_1 < \gamma, t_3h_2 > \\ &= \varepsilon(t_1)1_H h_1 < \gamma, t_2h_2 > \\ &= h_1 < \gamma, \varepsilon(t_1)t_2h_2 > \\ &= h_1 < \gamma, th_2 > \\ &\overset{t\in I_r(H)}{=} h_1 < \gamma, \varepsilon(h_2)t > \\ &= h_1\varepsilon(h_2) < \gamma, t > \\ &= h < \gamma, t >= h. \end{aligned}$$

Nessa última igualdade usamos que $<\gamma, t>=1$, mostrado na Proposição anterior. Portanto, $(S(t_1)a, t_2)$ são bases de Frobenius para γ.

(ii) Por (i) podemos escrever,

$$\rho(h) = S(t_1)a < \gamma, t_2\rho(h) >, \forall h \in H.$$

Então,

$$\begin{aligned}
aS^{-2}(\rho(h))a^{-1} &= aS^{-2}(S(t_1)a < \gamma, t_2\rho(h) >)a^{-1} \\
&= aS^{-2}(S(t_1))aa^{-1} < \gamma, t_2\rho(h) > \\
&= aS^{-1}(t_1) < \gamma, t_2\rho(h) > \\
&\overset{def \rho}{=} aS^{-1}(t_1) < \gamma, ht_2 > \\
&= a < \gamma, ht_2 > S^{-1}(t_1) \\
&\overset{(2.5)}{=} < \gamma, h_2t_3 > h_1t_2S^{-1}(t_1) \\
&= < \gamma, h_2t_2 > h_1\varepsilon(t_1) \\
&= < \gamma, h_2\varepsilon(t_1)t_2 > h_1 \\
&= < \gamma, h_2t > h_1 \\
&\overset{t\in I_r(H)\Rightarrow h_2t\in I_r(H)}{=} < \gamma, \alpha(h_2)t > h_1 \\
&= < \alpha, h_2 >< \gamma, t > h_1 \\
&\overset{<\gamma,t>=1}{=} < \alpha, h_2 > h_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
aS^{-2}(\rho(h))a^{-1} =< \alpha, h_2 > h_1 &\Leftrightarrow S^{-2}(\rho(h)) = a^{-1} < \alpha, h_2 > h_1a \\
&\Leftrightarrow \rho(h) = S^2(a^{-1} < \alpha, h_2 > h_1a),
\end{aligned}$$

ou seja, temos que

$$\begin{aligned}
\rho(h) &= S^2(a^{-1} < \alpha, h_2 > h_1a) \\
&= < \alpha, h_2 > S^2(a^{-1}h_1a)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ <\alpha, h_2> S(S(a)S(h_1)S(a^{-1})) \\
&= \ <\alpha, h_2> S^2(a^{-1})S^2(h_1)S^2(a) \\
&= \ <\alpha, h_2> a^{-1}S^2(h_1)a.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\rho(h) = a^{-1}S^2(h_1) < \alpha, h_2 > a$. ■

Antes de apresentarmos a Fórmula de Radford para S^4, relembremos as estruturas de H^*-módulo à esquerda e à direita dadas no Exemplo 2.1.11.

$$h^* \rightharpoonup h = h_1 < h^*, h_2 >$$

$$h \leftharpoonup h^* =< h^*, h_1 > h_2,$$

para todos $h \in H$ e $h^* \in H^*$. Com isso, podemos finalmente enunciar o nosso próximo resultado, que apresenta uma fórmula para S^4, devido a Radford

Teorema 2.3.12. ***(Radford, 1976)*** *Sejam $a \in G(H)$ e $\alpha \in Alg(H, \Bbbk) = G(H^*)$ elementos modulares de H. Então temos a seguinte fórmula para S^4:*

$$S^4(h) = a(\alpha^{-1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha)a^{-1} = \alpha^{-1} \rightharpoonup (aha^{-1}) \leftharpoonup \alpha. \tag{2.6}$$

para todo $h \in H$.

Demonstração: Primeiro, mostraremos que , para todo $h \in H$, temos

$$a(\alpha^{-1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha)a^{-1} = \alpha^{-1} \rightharpoonup (aha^{-1}) \leftharpoonup \alpha.$$

Facilmente percebe-se que a ordem em que realizamos as ações acima não fazem diferença. Então sem perda de generalidade vamos calcular da esquerda para a direita essas ações, ou seja,

$$
\begin{aligned}
a(\alpha^{-1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha)a^{-1} &= a(h_1 < \alpha^{-1}, h_2 >\leftharpoonup \alpha)a^{-1} \\
&= a(h_1 \leftharpoonup \alpha) < \alpha^{-1}, h_2 > a^{-1} \\
&= a < \alpha, h_1 > h_2 < \alpha^{-1}, h_3 > a^{-1} \\
&= \ < \alpha, h_1 > ah_2a^{-1} < \alpha^{-1}, h_3 > .
\end{aligned}
$$

Por outro lado, lembrando que $a \in G(H)$, $\alpha \in Alg(H, \Bbbk)$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1} \rightharpoonup (aha^{-1}) \leftharpoonup \alpha &= (ah_1a^{-1} < \alpha^{-1}, ah_2a^{-1} >) \leftharpoonup \alpha \\
&= (ah_1a^{-1}) \leftharpoonup \alpha < \alpha^{-1}, ah_2a^{-1} > \\
&= < \alpha, ah_1a^{-1} > ah_2a^{-1} < \alpha^{-1}, ah_3a^{-1} > \\
&= (\alpha, a) < \alpha, h_1 > (\alpha, a^{-1})ah_2a^{-1}(\alpha^{-1}, a) < \alpha^{-1}, h_3 > (\alpha^{-1}, a^{-1}) \\
&= < \alpha, h_1 > ah_2a^{-1} < \alpha^{-1}, h_3 > .
\end{aligned}$$

Portanto, $a(\alpha^{-1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha)a^{-1} = \alpha^{-1} \rightharpoonup (aha^{-1}) \leftharpoonup \alpha$.

Agora, pelas Proposições 2.3.10 e 2.3.11, temos que, para todo $h \in H$,

$$< \alpha, h_1 > S^{-2}(h_2) = \rho(h) = a^{-1}S^2(h_1)a < \alpha, h_2 >.$$

Aplicando agora S^2 e depois conjugando por a, obtemos

$$a < \alpha, h_1 > h_2a^{-1} = S^4(h_1) < \alpha, h_2 >,$$

ou seja,

$$< \alpha, h_1 > ah_2a^{-1} = S^4(h_1) < \alpha, h_2 > .$$

Agora, note que:

$$\begin{aligned}
S^4(h) &= S^4(h_1\varepsilon(h_2)) \\
&= S^4(h_1)\varepsilon(h_2) \\
&= S^4(h_1) < \alpha * \alpha^{-1}, h_2 > \\
&= \underbrace{S^4(h_1) < \alpha, h_2 >}_{<\alpha,h_1>ah_2a^{-1}} < \alpha^{-1}, h_3 > \\
&= < \alpha, h_1 > ah_2a^{-1} < \alpha^{-1}, h_3 > .
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $h \in H$,

$$\begin{aligned} S^4(h) &= <\alpha, h_1> ah_2a^{-1} <\alpha^{-1}, h_3> \\ &= a(\alpha^{-1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha)a^{-1} \\ &= \alpha^{-1} \rightharpoonup (aha^{-1}) \leftharpoonup \alpha. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

O Teorema acima possui uma importante consequência, a saber:

Corolário 2.3.13. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então, a ordem da antípoda é finita.*

Demonstração: Primeiro mostraremos que

$$(S^4)^2(h) = a^2(\alpha^{-2} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^2)a^{-2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} (S^4)^2 &= (S^4 \circ S^4)(h) \\ &= S^4(S^4(h)) \\ &\overset{(2.6)}{=} a(\alpha^{-1} \rightharpoonup S^4(h) \leftharpoonup \alpha)a^{-1} \\ &= a(\alpha^{-1} \rightharpoonup (\alpha^{-1} \rightharpoonup aha^{-1} \leftharpoonup \alpha)\alpha)a^{-1} \\ &= a(\alpha^{-2} \rightharpoonup aha^{-1} \leftharpoonup \alpha^2)a^{-1} \\ &= a(ah_1a^{-1} <\alpha^{-2}, ah_2a^{-1}> \leftharpoonup \alpha^2)a^{-1} \\ &= a(<\alpha^{-2}, ah_3a^{-1}><\alpha^2, ah_1a^{-1}> ah_2a^{-1})a^{-1} \\ &= a(<\alpha^2, ah_1a^{-1}> ah_2a^{-1} <\alpha^{-2}, ah_3a^{-1}>)a^{-1} \\ &= <\alpha^2, a><\alpha^2, h_1><\alpha^2, a^{-1}> aah_2a^{-1}a^{-1} <\alpha^{-2}, a><\alpha^{-2}, h_3><\alpha^{-2}, a^{-1}> \\ &= a^2(<\alpha^2, h_1> h_2 <\alpha^{-2}, h_3>)a^2 \\ &= a^2(\alpha^{-2} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^2)a^{-2} \end{aligned}$$

Raciocinando por indução, podemos concluir que, $\forall\ m \in N$,

$$(S^4)^m = a^m(\alpha^{-m} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^m)a^{-m}. \tag{2.7}$$

Mas $a \in G(H)$, e como $|G(H)| \leq dim(H)$, existe $n' \in N$ tal que $a^{n'} = 1$. Além disso, $\alpha \in G(H^*)$, e como $|G(H^*)| \leq \dim H^*$, existe $n'' \in N$ tal que $\alpha^{n''} = \varepsilon$. Tomando então $n =$ mmc $\{n', n''\}$, temos, por (2.7), que $|S^4| \leq n$, de onde segue que $|S| \leq 4n$. ■

Corolário 2.3.14. *Seja H uma álgebra de Hopf finito-dimensional. Mantendo as notações anteriores, temos:*

(i) Se H é unimodular, então S^4 é a conjugação por $a \in G(H)$ e $|S| \leq 4$ $dim(H)$.

(ii) Se H e H^* são unimodulares, então $S^4 = id$.

Demonstração: (i) De fato, por 2.3.7, H é unimodular se, e somente se, $\alpha = \varepsilon$. Logo pela Fórmula de Radford (2.6), seque que

$$\begin{aligned} S^4(h) &= a(\alpha^{-1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha)a^{-1} \\ &= <\alpha, h_1> ah_2a^{-1} <\alpha^{-1}, h_3> \\ &\overset{\alpha=\varepsilon}{=} <\varepsilon, h_1> ah_2a^{-1} <\varepsilon^{-1}, h_3> \\ &= a <\varepsilon, h_1> h_2a^{-1} <\varepsilon, h_3> \\ &= ah_1 <\varepsilon, h_2> a^{-1} \\ &= aha^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, $S^4(h) = aha^{-1}$. Portanto pelo Corolário anterior, $|S^4| \leq dim(H)$ e, com isso, $|S| \leq 4\ dim(H)$.

(ii) Novamente por 2.3.7, H e H^* são unimodulares se, e somente se, $\varepsilon = \alpha$ e $a = 1$. Logo por (i) temos, para todo $h \in H$, que

$$S^4(h) = aha^{-1} \overset{a=1}{=} h.$$

e, portanto, $S^4 = id$. ■

2.4 Um Teorema de Larson e Radford (1988)

Nosso objetivo agora é encontrar uma importante caracterização da semisimplicidade de H e H^*, envolvendo a antípoda. Inicialmente, vamos recordar um fato importante de álgebra linear, muito utilizado nos próximos resultados.

Observação 2.4.1. Sejam M e N espaços vetoriais com bases $\{b_1, ..., b_n\}$ e $\{c_1, ..., c_m\}$, respectivamente. Seja $\sigma : M \longrightarrow N$ uma aplicação $\Bbbk$-linear com matriz $[\sigma] = [a_{ji}]$, onde $\sigma(b_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}c_j$. Então, σ induz uma aplicação $\Bbbk$-linear $\sigma^* : N^* \longrightarrow M^*$, dado por $\sigma^*(g) = g \circ \sigma$, $\forall g \in N^*$, cuja matriz relativa às bases duais, é dada por $[\sigma^*] = [\sigma]^t$, onde $[\sigma]^t$ significa a transposta de $[\sigma]$.

Lema 2.4.2. *Seja A uma álgebra de Frobenius com homomorfismo de Frobenius ϕ e bases duais (r_i, l_i). Sejam $k \in \Bbbk$ e $e \in A$ tais que $e^2 = ke$. Se $f \in End(eA)$, então temos:*

(*i*) $kTr(f) =< \phi, \sum_i f(el_i)r_i >$.

(*ii*) $kTr(f) =< \phi, \sum_i l_i f(er_i) >$.

Demonstração: (*i*) Seja $x \in A$, nós podemos escrever $ex = \sum_i < \phi, exr_i > l_i$, por 2.2.2. Multiplicando então essa igualdade por e e já utilizando a hipótese que $e^2 = ke$, obtemos

$$kex = \sum_i < \phi, exr_i > el_i$$

Agora aplicando $f \in \text{End}(eA)$ na relação acima, obtêm-se:

$$f(kex) \;=\; f(\sum_i <\phi, exr_i> el_i)$$

ou seja,

$$kf(ex) \;=\; \sum_i <\phi, exr_i> f(el_i)$$

Como no Lema 2.3.1, dado o isomosrfismo canônico: $(eA)^* \otimes eA \longrightarrow \mathrm{End}(eA)$, temos a seguinte identificação $kf \longmapsto \sum_i <\phi, -r_i> \otimes f(el_i)$. Portanto, $kTr(f) = Tr(kf) = \sum_i <\phi, f(el_i)r_i>$.

(ii) A prova é análoga ao anterior apenas usando que $ex = \sum_i r_i <\phi, l_i ex>$, pois A é uma álgebra de Frobenius. ■

Para o que segue, vamos lembrar a definição de *Carácter* e algumas propriedades básicas.

Definição 2.4.3. *Seja V um H-módulo à esquerda de dimensão finita, e seja $\rho_V : H \longrightarrow End(V)$, onde $\rho_V(h)(v) = hv$. Então, o elemento $\mathcal{X}_V \in H^*$, definido por $<\mathcal{X}_V, h> = Tr(\rho_V(h))$ é chamando* ***carácter*** *de V.*

Em particular, quando consideramos H como um H-módulo à esquarda com a multiplicação, temos que $\mathcal{X}_H = Tr_H$. De fato, recordamos que chamamos $L_h \in \mathrm{End}(H)$ o endomorfismo dado por $L_h(x) = hx$, para todo $x \in H$, e também tínhamos que $Tr_H(h) = Tr(L_h)$, $\forall h \in H$. Logo

$$<\mathcal{X}_H, h> = Tr(\rho_H(h)) = Tr(L_h) = Tr_H(h),$$

para todo $h \in H$. Portanto, $\mathcal{X}_H = Tr_H$.

O próximo resultado é bastante conhecido da álgebra linear e sua demonstração será omitida por esta razão. Para o leitor interessado, recomendamos [11].

Lema 2.4.4. *Sejam V, W dois H-módulos à esquerda de dimensão finita. Então:*

(i) $< \mathcal{X}_V, 1 >= dimV$.

(ii) *Se* $V \simeq W$, *então* $\mathcal{X}_V = \mathcal{X}_W$.

(iii) $\mathcal{X}_{V \oplus W} = \mathcal{X}_V + \mathcal{X}_W$.

(iv) $\mathcal{X}_{V \otimes W} = \mathcal{X}_V * \mathcal{X}_W$.

(v) $\mathcal{X}_{V^*} = \mathcal{X}_V S$.

Com estas propriedades, podemos mostrar o seguinte resultado.

Lema 2.4.5. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Com as notações anteriores, temos:*

(i) $\mathcal{X}_H^2 = (dim(H))\mathcal{X}_H$.

(ii) $S_{H^*}^2(\mathcal{X}_H) = \mathcal{X}_H$ *em* H^*.

Demonstração: (i) Seja V um H-módulo de dimensão finita. Denotamos por V_ε o H-módulo trivial no espaço vetorial V dado por $h.v = \varepsilon(h)v$, para todos $h \in H$ e $v \in V$. Consideremos a aplicação linear:

$$\begin{array}{rcl} \phi : H \otimes V_\varepsilon & \longrightarrow & H \otimes V \\ h \otimes v & \longmapsto & h_1 \otimes h_2.v \end{array}$$

Afirmamos que ϕ é um isomorfismo de H-módulos. De fato, primeiro vamos mostrar que ϕ é um homomorfismo de H-módulos. Sejam $l, h \in H$. Então

$$\begin{array}{rcl} \phi(l.(h \otimes v)) & = & \phi(l_1 h \otimes l_2.v) \\ & = & \phi(l_1 h \otimes \varepsilon(l_2)v) \\ & = & \phi(l_1 \varepsilon(l_2) h \otimes v) \\ & = & \phi(lh \otimes v) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= l_1h_1 \otimes l_2h_2.v \\
&= l.(h_1 \otimes h_2.v) \\
&= l.\phi(h \otimes v).
\end{aligned}
$$

Para provarmos o isomoformismo desejado, definimos uma aplicação inversa da ϕ. Seja

$$
\begin{aligned}
\psi : H \otimes V &\longrightarrow H \otimes V_\varepsilon \\
h \otimes v &\longmapsto h_1 \otimes S(h_2).v
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\phi \circ \psi(h \otimes v) &= \phi(h_1 \otimes S(h_2).v) \\
&= h_1 \otimes h_2 S(h_3).v \\
&= h_1 \otimes \varepsilon(h_2)1_H.v \\
&= h_1\varepsilon(h_2) \otimes v \\
&= h \otimes v.
\end{aligned}
$$

Analogamentes mostra-se que $\psi \circ \phi = id_{H \otimes V_\varepsilon}$. Logo, $H \otimes V_\varepsilon \simeq H \otimes V$. Aplicando então o item (ii) do Lema 2.4.4, temos que $\mathcal{X}_{H \otimes V_\varepsilon} = \mathcal{X}_{H \otimes V}$ e pelo item (iv) desse mesmo resultado, obtemos $\mathcal{X}_H * \mathcal{X}_{V_\varepsilon} = \mathcal{X}_H * \mathcal{X}_V$.

Observemos agora que, $\mathcal{X}_{V_\varepsilon}(h) = Tr(\rho_{V_\varepsilon}(h)) = Tr(\varepsilon(h) id_V) = Tr(id_V)\varepsilon(h) = dim(V)\varepsilon(h)$, para todo $h \in H$. Então, $\mathcal{X}_H * \mathcal{X}_V = (dim(V)\varepsilon)\mathcal{X}_V = dim(V)(\varepsilon \mathcal{X}_V) = (dim(V))\mathcal{X}_V$, pois $\mathcal{X}_V \in H^*$ e ε é a unidade. Em particular, para $H = V$, concluímos que $\mathcal{X}_H^2 = (dim(H))\mathcal{X}_H$.

(ii) Seja $h \in H$, então:

$$
\begin{aligned}
< S_{H^*}^2(\mathcal{X}_H), h > &\overset{2.4.1}{=} < \mathcal{X}_H \circ S^2, h > \\
&= < \mathcal{X}_H, S_H^2(h) > \\
&= Tr(\rho_H(S_H^2(h)))
\end{aligned}
$$

$$= \quad Tr(L_{S_H^2(h)}).$$

Ou seja, $< S_{H^*}^2(\mathcal{X}_H), h >= Tr(L_{S_H^2(h)})$.

Note que,

$$\begin{aligned} L_{S_H^2(h)}(S^2(l)) &= S^2(h)S^2(l) \\ &= S(S(l)S(h)) \\ &= S^2(hl) \\ &= (S^2 \circ L_h)(l), \quad \forall l \in H. \end{aligned}$$

Como S é bijetiva (pois $dim(H) < \infty$), segue que $L_{S_H^2(h)} = S^2 \circ L_h \circ S^{-2}$. Então, $Tr(L_{S_H^2(h)}) = Tr(S^2 \circ L_h \circ S^{-2}) = Tr(L_h) = Tr_H(h)$, para todo $h \in H$. Ou seja,

$$S_{H^*}^2(\mathcal{X}_H)(h) = Tr(L_{S_H^2(h)}) = Tr_H(h) = \mathcal{X}_H(h), \text{ para todo } h \in H.$$

Portanto, $S_{H^*}^2(\mathcal{X}_H) = \mathcal{X}_H$ em H^*. ■

Estamos agora em condições de provar o seguinte teorema:

Teorema 2.4.6. *Sejam* $0 \neq \gamma \in I_r(H^*)$, $0 \neq \Gamma \in I_l(H)$ *tal que* $< \gamma, \Gamma >= 1$. *Então*

$$Tr_{H^*}(S_{H^*}^2) =< \varepsilon, \Gamma >< \gamma, 1 >= (dim(H))Tr(S^2|_{\mathcal{X}_H H^*}).$$

Demonstração: Seja $\Gamma^* \in (H^*)^*$, definida por

$$< \Gamma^*, f >=< f, \Gamma >, \quad \forall f \in H^* \tag{2.8}$$

Afirmamos que Γ^* é um homomorfismo de Frobenius com bases duais $(S_{H^*}(\gamma_1), \gamma_2)$. De fato, pois se $f \in H^*$, então temos

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 < \Gamma^*, f * S_{H^*}(\gamma_1) > &\overset{(2.8)}{=} \gamma_2 < f * S_{H^*}(\gamma_1), \Gamma > \\
&= \gamma_2 < f, \Gamma_1 >< S_{H^*}(\gamma_1), \Gamma_2 > \\
&\overset{2.4.1}{=} \gamma_2 < f, \Gamma_1 >< \gamma_1 \circ S_H, \Gamma_2 > \\
&= \gamma_2 < f, \Gamma_1 >< \gamma_1, S_H(\Gamma_2) > .
\end{aligned}
$$

Aplicando agora esta última expressão em um elemento $h \in H$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 < f, \Gamma_1 >< \gamma_1, S_H(\Gamma_2) > (h) &= < f, \Gamma_1 >< \gamma_1, S_H(\Gamma_2) > \gamma_2(h) \\
&= < f, \Gamma_1 >< \gamma, S_H(\Gamma_2) h > \\
&= < f, h > .
\end{aligned}
$$

A última igualdade decorre do fato de $(\Gamma_1, S(\Gamma_2))$ serem bases duais do homomorfismo de Frobenius γ. Como $h \in H$ foi tomado arbitrário, seque que $f = \gamma_2 < \Gamma^*, f * S_{H^*}(\gamma_1) >$. Sendo assim, Γ^* é um homomorfismo de Frobenius com bases duais $(S_{H^*}(\gamma_1), \gamma_2)$.

Aplicando o Lema 2.4.2 para $S^2 \in \mathrm{End}(H^*)$, e tomando $e = 1$ e $k = 1$, temos

$$
\begin{aligned}
Tr(S^2) &= < \Gamma^*, S^2(\gamma_2) S(\gamma_1) > \\
&= < \Gamma^*, S(\gamma_1 S(\gamma_2)) > \\
&= < \Gamma^*, S(\varepsilon_{H^*}(\gamma) 1_{H^*}) > \\
&= < \varepsilon_{H^*}, \gamma >< \Gamma^*, 1_{H^*} > \\
&= < \gamma, 1 >< \Gamma^*, \varepsilon > \\
&= < \gamma, 1 >< \varepsilon, \Gamma > .
\end{aligned}
$$

Falta mostrar a outra igualdade. Vimos pelo Lema 2.4.5 que $S^2(\mathcal{X}_H) = \mathcal{X}_H$ em H^*. Utilizando esse fato, observemos que $S^2|_{\mathcal{X}_H H^*} \in \mathrm{End}(\mathcal{X}_H H^*)$, pois para toda

$f \in H^*$, temos $S^2(\mathcal{X}_H f) = S^2(\mathcal{X}_H)S^2(f) = \mathcal{X}_H S^2(f) \in \mathcal{X}_H H^*$. Com isso, podemos utilizar novamente o Lema 2.4.2, tomando $e = \mathcal{X}_H$ e $k = dim(H)$, para obter

$$\begin{aligned}
dim(H)Tr(S^2|_{\mathcal{X}_H H^*}) &= <\Gamma^*, S^2(\mathcal{X}_H\gamma_2)S(\gamma_1)> \\
&= <\Gamma^*, S^2(\mathcal{X}_H)S^2(\gamma_2)S(\gamma_1)> \\
&= <\Gamma^*, S^2(\mathcal{X}_H)S(\gamma_1 S(\gamma_2))> \\
&= <\Gamma^*, S^2(X_H)S(\varepsilon_{H^*}(\gamma)1_{H^*})> \\
&= <\varepsilon_{H^*}, \gamma><\Gamma^*, S^2(\mathcal{X}_H), \Gamma> \\
&\overset{2.8}{=} <\gamma, 1><S^2(\mathcal{X}_H), \Gamma> \\
&\overset{2.4.5}{=} <\gamma, 1><\mathcal{X}_H, \Gamma> .
\end{aligned}$$

Novamente utilizando o Lema 2.4.2 para $e = 1$, $k = 1$, $f = L_\Gamma$, onde $L_\Gamma(h) = \Gamma h$, e usando o homomorfismo de Frobenius Γ, temos:

$$\begin{aligned}
Tr(L_\Gamma) &= <\gamma, S(\Gamma_2)L_\Gamma(\Gamma_1)> \\
&= <\gamma, S(\Gamma_2)\Gamma\Gamma_1> \\
&\overset{\Gamma\in I_l(H)}{=} <\gamma, \varepsilon(S(\Gamma_2))\Gamma\Gamma_1> \\
&= <\gamma, \varepsilon(\Gamma_2)\Gamma\Gamma_1> \\
&= <\gamma, \Gamma\Gamma> \\
&\overset{\Gamma\in I_l(H)}{=} <\gamma, \varepsilon(\Gamma)\Gamma> \\
&= <\varepsilon, \Gamma><\gamma, \Gamma> \\
&\overset{<\gamma,\Gamma>=1}{=} <\varepsilon, \Gamma> .
\end{aligned}$$

Mas $<\mathcal{X}_H, \Gamma> = Tr(L_\Gamma) = <\varepsilon, \Gamma>$. Portanto, $dim(H)Tr(S^2|_{\mathcal{X}_H H^*}) = <\gamma, 1><\varepsilon, \Gamma>$. ■

Antes de apresentarmos o último Teorema desta seção, vamos fazer algumas observações.

Observação 2.4.7. Seja H uma álgebra de Hopf tal que $0 \neq \lambda \in I_l(H^*)$. Pelo Teorema 1.2.16 temos que $\phi : H \longrightarrow H^*$, dada por $\phi(h) = \lambda \leftharpoondown h$, $\forall h \in H$, é um isomorfismo de H-módulos de Hopf à direita. Então ϕ é um morfismo de H-comódulos à direita, e com isso temos também que ϕ é um homomorfismos de H^*-módulos à esquerda (por 1.2.6), ou seja, $\forall h \in H$ e $p \in H^*$ nós temos que

$$\lambda \leftharpoondown (p \rightharpoonup h) = p(\lambda \leftharpoondown h),$$

se nós aplicarmos essa igualdade para um elemento $g \in H$, nós obtemos

$$\lambda((g \leftharpoonup p)S(h)) = \lambda(gS(p \rightharpoonup h)). \tag{2.9}$$

Afirmamos agora que se C, D são subcoálgebras de H tais que $C \cap D = 0$, então $\lambda(cS(d)) = 0$, para todos $c \in C$, $d \in D$. De fato, tome X um subespaço linear de H tal que $H = C \oplus D \oplus X$, e considere $p \in H^*$ tal que a restrição de p para D é 0 e a restrição de p para C é ε (identidade na coálgebra). Então para $c \in C$, $d \in D$ nós temos:

$$\lambda(cS(d)) = \lambda((c \leftharpoonup p)S(d)) \overset{(2.9)}{=} \lambda(cS(p \rightharpoonup d)) = 0.$$

Lema 2.4.8. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita cossemissimples com a antípoda S. Então $S^2(C) = C$, para todo $C \subseteq H$ subcoálgebra.*

Demonstração: Se $C = 0$ essa igualdade é válida. Agora vamos supor que $C \neq 0$. Como H é cossemissimples, existe $< \lambda, 1 > \neq 1$, para algum $0 \neq \lambda \in I_l(H)$. Mais ainda, temos $\lambda \circ S = \lambda$. A existência de uma tal integral não nula mostra que a antípoda é bijetiva. Observe que para este resultado, não precisamos que a dimensão de H seja finita, mas se o fosse, teríamos a bijetividade da antípoda pelo Teorema 2.1.14, e a hipótese de cossemissimplicidade não seria necessária.

Continuando a prova, temos que qualquer subcoálgebra não nula é soma de subcoálgebras simples, então basta provar que $S^2(C) = C$, para qualquer subcoálgebra simples C de H.

Se C é simples, então $S^2(C)$ é uma subcoálgebra simples de H, já que S^2 é um homomorfismo injetivo de coálgebras. Então $S^2(C) = C$ ou $C \cap S^2(C) = 0$. Se acontecer a segunda situação, então para qualquer $d, c \in C$, nós temos $\lambda(S^2(c)S(d)) = 0$, pela argumentação anterior ao Lema. Assim,

$$0 = \lambda(S^2(c)S(d)) = \lambda(S(dS(c))) = (\lambda \circ S)(dS(c)) \overset{\lambda\circ S=\lambda}{=} \lambda(dS(c)).$$

Com isso obtemos que $\lambda(dS(c)) = 0, \forall\ c, d \in C$. Em particular, para qualquer $c \in C$, nós temos

$$\varepsilon(c) = \varepsilon(c)\lambda(1) = \lambda(\varepsilon(c)1) = \lambda(c_1 S(c_2)) = 0$$

Como C é simples, seus únicos ideias são os triviais, logo $Ker(\varepsilon) = 0$ ou $Ker(\varepsilon) = C$. Mas, pelo que mostramos acima, para qualquer $c \in C$, $c \in ker(\varepsilon)$, ou seja, $C = 0$, uma contradição. Portanto $S^2(C) = C$. ■

Por fim, apresentamos o último resultado dessa seção, que será muito útil para garantir a semisimplicidade de algumas álgebras de Hopf de dimensão finita sobre um corpo de característica zero, que até o momento do trabalho não foram apresentadas.

Teorema 2.4.9. ***(Larson e Radford, 1988)*** *Seja $\Bbbk$ um corpo de característica zero. Seja H uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf de dimensão finita. São equivalentes:*

(i) H é semissimples.

(ii) H^* é semissimples.

(iii) $S_H^2 = id$.

Demonstração: Como a característica de $\Bbbk$ é zero e $S_H^2 = id$, segue do Corolário 2.3.3 que $(iii) \Rightarrow (i)$ e $(iii) \Rightarrow (ii)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que H é uma álgebra de Hopf cossemissimples sobre um corpo $\Bbbk$ (pois H^* é semissimples), e seja K uma extensão de $\Bbbk$. Claramente H é cossemissimples se, e somente se, $K \otimes H$ é cossemissimples. Com isso nós podemos assumir que $\Bbbk$ é algebricamente fechado.

Seja C uma subcoálgebra de matrizes de H. Então, pelo Lema 2.4.8, nós sabemos que $S^2(C) = C$ e, pela Proposição 1.4.2, existe $t \in (C, \circ)$ invertível e tal que $S^2(c) = t^{(-1)} \circ c \circ t$, para todo $c \in C$.

Seja r a ordem de S^2, pois sabemos que a ordem na antípoda é finita por 2.3.13. Então, $c = S^{2r}(c) = t^{(-r)} \circ c \circ t^{(r)}$, para todo $c \in C$. Multiplicando por $t^{(r)}$ essa última igualdade temos que $t^{(r)} \circ c = t^{(r)} \circ t^{(-r)} \circ c \circ t^{(r)} = c \circ t^{(r)}$, ou seja, $t^{(r)}$ pertence ao centro de $(C, \circ)$.

Como C é simples, tome $\xi : C \longrightarrow M_n(\Bbbk)$ o isomorfismo de álebras. Lembremos que a identidade em $(C, \circ)$ é da forma $X_C = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii}$, e esta pertence trivialmente ao centro, logo existe $\alpha \in k$ tal que $t^{(r)} = \alpha X_C$. Já que t é invertível, nós temos que $\alpha \neq 0$ e então, substituindo t por $\alpha^{\frac{-1}{r}} t$, nós podemos assumir que $t^{(r)} = X_C$. Assim, $\xi(t)^r = id$ (matriz identidade), ou seja, o polinômio minimal de $\xi(t)$ divide $X^r - 1$, onde temos somente raiz simples. Isto implica que a matriz é diagonalizável com autovalores raízes n-ésimas da unidade.

Já que $\Bbbk$ tem característica zero, nós podemos assumir que o corpo dos números racionais $\mathbb{Q} \subseteq \Bbbk$, e então, já que $\Bbbk$ é algebricamente fechado, $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \Bbbk$ ($\overline{\mathbb{Q}}$= fecho algébrico de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{C}$).

Como a inversa de uma raiz complexa da unidade é o conjugado da raiz, ou seja, nós obtemos que $\xi(t^{(-1)})$ é diagonalizável, com autovalores (complexos) conjugados dos autovalores de $\xi(t)$. Em particular,

$$Tr(\xi(t^{(-1)}))Tr(\xi(t)) = \overline{Tr(\xi(t))}Tr(\xi(t)) \in \mathbb{R}_+.$$

onde $\mathbb{R}_+$ são os números reais positivos. Assim temos:

$$Tr(S^2|_C) \overset{1.4.2}{=} \varepsilon(t)\varepsilon(t^{(-1)})(ii) \overset{1.4.1}{=} Tr(\xi(t^{(-1)}))Tr(\xi(t)).$$

Mais ainda, pelo Lema 1.4.3, temos que $\varepsilon(t), \varepsilon(t^{(-1)}) \neq 0$. Portanto $Tr(S^2|_C) > 0$. Nós concluímos assim que $Tr(S^2)$ é a soma de números positivos, já que H é a soma de subcoálgebras de matrizes (simples). Então $Tr(S^2) > 0$. Em particular, $Tr(S^2) \neq 0$, e pelo Corolário 2.3.3, concluindo que H é semissimples.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponnha que H é semissimples, então H^* é cosemissimples e por $(ii) \Rightarrow (i)$, nós obtemos que H^* é semissimples.

Por fim, vamos provar que (i) e $(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponhamos que H e H^* são semissimples, logo já vimos que pela Observação 2.3.8, H e H^* são unimodulares, e consequentemente por 2.3.7 $a = 1$ e $\alpha = \varepsilon$ são os elementos modulares. Então pelo Corolário 2.3.14 $S_H^4 = id$, ou seja, $(S_H^2)^2 = id$. Logo, S_H^2 é diagonalizável e seus autovalores são todos iguais a 1 ou -1. Então $Tr(S_H^2) \leq \dim H$. Temos também que pelo Corolário 2.3.3, $Tr(S_H^2) \neq 0$.

Note que $Tr_{H^*}(S_{H^*}^2) = Tr(S_H^2)$, por 2.4.1. Com isso, podemos usar o Teorema 2.4.6, o qual nos diz que $Tr(S_H^2) = dim(H)Tr(S^2|_{\chi_H H^*})$, o que mostra que $dim(H)$ divide $Tr(S_H^2)$. Assim, $Tr(S_H^2) = \pm n$, mas $S^2(1_H^*) = 1_H^*$, isto é, um dos autovalores é igual a 1. Concluindo então que $Tr(S^2) = dim(H)$, e isto força que todos os autovalores sejam iguais a 1. Portanto, $S^2 = id$, o que prova o Teorema. ■

Vamos usar agora este resultado para discutir a semissimplicidade de certas álgebras de Hopf.

Exemplo 2.4.10. Seja $H = \Bbbk G$ a álgebra de grupo sobre um corpo de característica zero dada em 1.1.9. Como $S(g) = g^{-1}$, para todo $g \in H$, segue que $S^2 = id$ e aplicando o útimo Teorema (re)obtemos que $\Bbbk G$ é uma álgebra semissimples. Analogamente, (re)obtemos que $(\Bbbk G)^*$ são álgebras semissimples.

Exemplo 2.4.11. Seja a álgebra de Taft (T_q) dada em 1.1.12 temos que $S(g) = g^{-1}$ e $S(x) = -g^{-1}x$. Logo

$S^2(x) = S(-g^{-1}x) = -S(x)S(g^{-1}) = g^{-1}xg = g^{-1}gxq^{-1} = q^{-1}x \neq x$. Portanto, pelo Teorema anterior (re)obtemos que T_q não é semissimples. Além disso, obtemos também que $(T_q)^*$ não é semissimples, resultado que até o momento não tínhamos. No próximo capítulo, calcularemos o dual de T_q.

A semissimplicidade dos grupos quânticos não havia sido abordada antes. Faremos isto no próximo exemplo.

Exemplo 2.4.12. Consideremos os grupos quânticos, dados em 1.1.13, onde temos que $S(E) = -q^{-2}E$, $S(F) = -q^{-2}F$ e $S(K) = K^{-1}$. Logo, $S^2(E) = -q^{-2}S(E) = -q^{-4}E \neq E$. Portanto pelo Teorema anterior, Uq e $(Uq)^*$ não são semissimples.

Capítulo 3

O Duplo de Drinfeld D(H)

Este capítulo tem como base o capítulo 10 de [16] juntamente com [10] e [12]. O principal objetivo será a construção do Duplo de Drinfeld $D(H)$ de uma álgebra de Hopf de dimensão finita H e verificar que $D(H)$ é uma álgebra de Hopf quase triangular. Mostraremos também um resultado que caracteriza quando o Duplo de Drinfeld é semissimples.

3.1 Álgebras de Hopf quase triangulares

Nosso objetivo nesta seção, será generalizar a noção de Álgebras de Hopf cocomutativa, mas mantendo algumas de suas propriedades. Observemos que para a primeira definição e a primeira proposição, precisamos apenas que nossa Álgebra de Hopf H tenha antípoda S bijetiva, mas para o restante do capítulo vamos precisar que H seja de dimensão finita, logo, por comodidade, assumiremos desde já a finitude da dimensão de H e isto nos garante a bijeção da antípoda (Proposição 2.1.14).

Definição 3.1.1. *Dizemos que uma álgebra de Hopf H (de dimensão finita) é* ***quase cocomutativa****, se existe um elemento invertível $R \in H \otimes H$ tal que, para todo $h \in H$, temos*

$$\tau\Delta(h) = R\Delta(h)R^{-1}, \tag{3.1}$$

onde τ é a aplicação twist usual.

Nosso primeiro lema apresenta uma generalização de um fato básico sobre álgebras de Hopf cocomutativas [16].

Lema 3.1.2. *Seja H uma álgebra de Hopf quase cocomutativa e sejam V, W H-módulos à esquerda. Então $V \otimes W \cong W \otimes V$, como H-módulos à esquerda.*

Demonstração: Definimos a aplicação $\Bbbk$-linear,

$$\begin{array}{rcl} \phi : V \otimes W & \longrightarrow & W \otimes V \\ v \otimes w & \longmapsto & R^{-1}(w \otimes v) \end{array}$$

Claramente, ϕ é um isomorfismo linear. Vamos então provar que ϕ é um homomorfismo de H-módulos. De fato, para todos $h \in H$, $v \in V$ e $w \in W$,

$$\begin{array}{rcl} \phi(h \cdot (v \otimes w)) & = & \phi(h_1 v \otimes h_2 w) \\ & = & R^{-1}(h_2 w \otimes h_1 v) \\ & = & R^{-1}\tau(\Delta(h))(w \otimes v) \\ & \overset{(3.1)}{=} & R^{-1}R\Delta(h)R^{-1}(w \otimes v) \\ & = & \Delta(h)R^{-1}(w \otimes v) \\ & = & h \cdot \phi(v \otimes w). \end{array}$$

Portanto, ϕ é um isomorfismo de H-módulos à esquerda. ■

Exemplo 3.1.3. Toda álgebra de Hopf cocomutativa H é quase cocomutativa.

De fato, basta tomar $R = 1 \otimes 1$ e lembrar que a cocomutatividade nos dá $\tau\Delta = \Delta$. Logo, para todo $h \in H$ temos:

$$\tau\Delta(h) = \Delta(h) = 1 \otimes 1\Delta(h)1 \otimes 1 = R\Delta(h)R^{-1}.$$

Neste mesmo caso, H pode também ser quase cocomutativa para um R não trivial, o que será mostrado no próximo exemplo:

Exemplo 3.1.4. Seja $H = \Bbbk\mathbb{Z}_2$, onde $\mathbb{Z}_2 =< 1, g \mid g^2 = 1 >$, com a multiplicação usual de grupo e a característica de $\Bbbk$ é distinta de 2. Então para

$$R = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g),$$

$\Bbbk\mathbb{Z}_2$ é quase cocomutativa.

De fato, vamos mostrar que vale (3.1) para os geradores 1 e g de H. Para isso, note que $R^{-1} = R$, pois

$$\begin{aligned} RR &= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g)\frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) \\ &= \frac{1}{4}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g + 1 \otimes g + 1 \otimes 1 + g \otimes g - g \otimes 1 + g \otimes 1 \\ &+ g \otimes g + 1 \otimes 1 - 1 \otimes g - g \otimes g - g \otimes 1 - 1 \otimes g + 1 \otimes 1) \\ &= \frac{1}{4}4.(1 \otimes 1) \\ &= 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

Para $1 \in H$ temos que $\tau(\Delta(1)) = 1 \otimes 1$. Por outro lado,

$$R\Delta(1)R^{-1} = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g)(1 \otimes 1)R^{-1} = RR^{-1} = 1 \otimes 1.$$

Para $g \in H$, $\tau(\Delta(g)) = g \otimes g$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
R\Delta(g)R^{-1} &= \frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g)(g\otimes g)\frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g) \\
&= \frac{1}{4}(g\otimes g + g\otimes 1 + 1\otimes g - 1\otimes 1)(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g) \\
&= \frac{1}{4}(g\otimes g + g\otimes 1 + 1\otimes g - 1\otimes 1 + g\otimes 1 + g\otimes g + 1\otimes 1 - 1\otimes g \\
&+ 1\otimes g + 1\otimes 1 + g\otimes g - g\otimes 1 - 1\otimes 1 - 1\otimes g - g\otimes 1 + g\otimes g) \\
&= \frac{1}{4}4.(g\otimes g) \\
&= g\otimes g.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\Bbbk\mathbb{Z}_2, \frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g))$ é quase cocomutativa.

No próximo exemplo apresentamos de uma álgebra de Hopf H não-cocomutativa com dimensão 4, mas que é quase cocomutativa.

Exemplo 3.1.5. Seja $H_4 = \Bbbk < g, x \mid g^2 = 1, x^2 = 0, xg = -gx >$ a álgebra de Sweedler, sendo a característica de $\Bbbk$ distinta de 2, onde a estrutura de coálgebra é dada por:

$$\Delta(g) = g\otimes g \text{ e } \Delta(x) = g\otimes x + x\otimes 1.$$

Então, para cada $0 \neq \alpha \in \Bbbk$, definimos:

$$R_\alpha = \underbrace{\frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g)}_{*} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}(x\otimes x - x\otimes gx + gx\otimes x + gx\otimes gx)}_{**}.$$

Afirmamos que (H_4, R_α) é quase cocomutativa. Primeiramente note que

$$R_\alpha^{-1} = \underbrace{\frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g)}_{*'} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}(x\otimes x + x\otimes gx - gx\otimes x + gx\otimes gx)}_{**'}.$$

De fato, queremos que mostrar que $R_\alpha R_\alpha^{-1} = 1\otimes 1$. Já mostramos no exemplo anterior que $*(*') = 1\otimes 1$ e, por definição de H_4, temos que $x^2 = 0$, logo facilmente observamos que $**\,(**') = 0\otimes 0$.

Então para mostrar que $R_\alpha R_\alpha^{-1} = 1\otimes 1$, basta mostrar que $*(**')+**(*') = 0\otimes 0$. De fato, pois

$$\begin{aligned}
*(**') + **(*') &= \frac{\alpha}{4}((1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g)(x\otimes x + x\otimes gx - gx\otimes x + gx\otimes gx)\\
&+ (x\otimes x - x\otimes gx + gx\otimes x + gx\otimes gx)(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g))\\
&= \frac{\alpha}{4}(x\otimes x + x\otimes gx - gx\otimes x + gx\otimes gx + x\otimes gx + x\otimes x - gx\otimes gx\\
&+ gx\otimes x + gx\otimes x + gx\otimes gx - x\otimes x + x\otimes gx - gx\otimes gx - gx\otimes x\\
&+ x\otimes gx - x\otimes x + x\otimes x + x\otimes xg + xg\otimes x - xg\otimes xg - x\otimes gx\\
&+ x\otimes x - xg\otimes gx - xg\otimes x + gx\otimes x + gx\otimes xg - x\otimes x + x\otimes xg\\
&+ gx\otimes gx - gx\otimes x - x\otimes gx - x\otimes x)\\
&= \frac{\alpha}{4}(0\otimes 0)\\
&= 0\otimes 0.
\end{aligned}$$

Agora mostraremos que vale (3.1), para os geradores de H_4. Note que como Δ é um homomorfismo de álgebras, não precisamos mostrar esta propriedade para o produto dos geradores.

Assim,

$$\begin{aligned}
R_\alpha(g\otimes g)R_\alpha^{-1} &= \frac{1}{2}(g\otimes g + g\otimes 1 + 1\otimes g - 1\otimes 1) + \frac{\alpha}{2}(xg\otimes xg + xg\otimes x - x\otimes xg + x\otimes x)\\
&+ \frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes g + g\otimes 1 - g\otimes g) + \frac{\alpha}{2}(x\otimes x + x\otimes gx - gx\otimes x + gx\otimes gx)\\
&= \frac{1}{4}(g\otimes g + g\otimes 1 + 1\otimes g - 1\otimes 1 + g\otimes g + 1\otimes 1 - 1\otimes g + 1\otimes g + 1\otimes 1\\
&+ g\otimes g - g\otimes 1 - 1\otimes 1 - 1\otimes g - g\otimes 1 + g\otimes g) + \frac{\alpha}{4}(xg\otimes xg + xg\otimes x\\
&+ x\otimes xg - x\otimes x + xg\otimes x + xg\otimes xg + x\otimes x - x\otimes xg - x\otimes xg - x\otimes x\\
&- xg\otimes xg + xg\otimes x + x\otimes x + x\otimes xg + xg\otimes x - xg\otimes xg + gx\otimes gx\\
&+ gx\otimes x - x\otimes gx + x\otimes x + gx\otimes x + gx\otimes gx - x\otimes x + x\otimes gx + x\otimes gx\\
&+ x\otimes x - gx\otimes gx + gx\otimes x - x\otimes x - x\otimes gx + gx\otimes x - gx\otimes gx)\\
&+ \frac{\alpha^2}{4}(0\otimes 0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}4.(g \otimes g) + \frac{\alpha}{4}(0 \otimes 0) + 0 \otimes 0 \\
&= g \otimes g \\
&= \tau(\Delta(g)).
\end{aligned}
$$

De forma análoga, mostra-se

$$\tau(\Delta(x)) = \tau(g \otimes x + x \otimes 1) = x \otimes g + 1 \otimes x = R_\alpha(g \otimes x + x \otimes 1)R_\alpha^{-1}.$$

O próximo exemplo mostra que nem toda álgebra de Hopf é quase cocomutativa.

Exemplo 3.1.6. Seja $H = (\Bbbk G)^*$ a álgebra de Hopf dada em 1.1.10, com G um grupo não abeliando. Então existem V, W tais que $V \otimes W \ncong W \otimes V$, e segue do Lema 3.1.2, que $(\Bbbk G)^*$ não é quase cocomutativa.

De fato, seja G um grupo finito não abeliano. Dados $g, h \in G$, tais que $gh \neq hg$, consideremos $V = \Bbbk p_g$ e $W = \Bbbk p_h$. Assim, V e W são $(\Bbbk G)^*$-módulos de dimensão finita, dados pela multiplicação em $(\Bbbk G)^*$, ou seja, $p_n.p_g = \delta_{n,g}p_g$ e $p_n.p_h = \delta_{n,h}p_h$, $\forall n \in G$.

Suponhamos agora que existe um $(\Bbbk G)^*$-homomorfismo $\varphi : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ não-nulo. Logo, dados $\alpha \in (\Bbbk G)^*$, devemos ter $\varphi(\alpha \cdot v \otimes w) = \alpha \cdot \varphi(v \otimes w)$. Mas isto não acontece quando tomamos $\alpha = p_{gh}$. De fato, pois claramente temos que $p_{gh} \cdot (p_g \otimes p_h) = p_g \otimes p_h$ e, por outro lado, $p_{gh} \cdot (p_h \otimes p_g) = 0$, onde nesta última igualdade utilizamos o fato que G não é abeliano.

Portanto, como $\varphi(p_g \otimes p_h) = k(p_h \otimes p_g)$, com $k \in \Bbbk$, temos que $p_{gh} \cdot \varphi(p_g \otimes p_h) = p_{gh} \cdot k(p_h \otimes p_g) = 0$. Por outro lado, $\varphi(p_{gh} \cdot p_g \otimes p_h) = \varphi(p_g \otimes p_h)$ que não pode ser zero, a não ser que φ seja identicamente nulo. Logo $V \otimes W \ncong W \otimes V$.

Lembramos que se H é cocomutativa, então $S^2 = id$ (ver 1.1.19). Este fato pode ser generalizado para o contexto de álgebras de Hopf quase cocomutativas, como mostra o seguinte resultado:

Proposição 3.1.7. *Seja H uma álgebra de Hopf quase cocomutativa. Então S^2 é um automorfismo interno de H. Mais precisamente, escrevendo $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ e $u = \sum_i S(b_i)a_i$, então u é invertível em H e, para todo $h \in H$,*

$$S^2(h) = uhu^{-1} = S(u)^{-1}hS(u).$$

Consequentemente, $S(u)u$ é um elemento central de H.

Demonstração: Vamos provar primeiro que $uh = S^2(h)u$. De fato, por hipótese H é quase cocomutativa, então para $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$, temos $R(h_1 \otimes h_2) = (h_2 \otimes h_1)R$, por (3.1). Assim, podemos escrever $(R \otimes id)(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3) = (h_2 \otimes h_1 \otimes h_3)(R \otimes id)$. Sejam $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ e $u = \sum_i S(b_i)a_i$. Então

$$\sum_i a_i h_1 \otimes b_i h_2 \otimes h_3 = \sum_i h_2 a_i \otimes h_1 b_i \otimes h_3.$$

Aplicando $\phi = m(S^2 \otimes S \otimes id)(\tau \otimes id)(id \otimes \tau)(\tau \otimes id)$ em ambos os lados desta igualdade, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_i S^2(h_3)S(b_i h_2)a_i h_1 &= \sum_i S^2(h_3)S(h_1 b_i)h_2 a_i \\
\sum_i S^2(h_3)S(h_2)S(b_i)a_i h_1 &= \sum_i S^2(h_3)S(b_i)S(h_1)h_2 a_i \\
\sum_i S(h_2 S(h_3))S(b_i)a_i h_1 &= \sum_i S^2(h_2)S(b_i)\varepsilon(h_1)a_i \\
\sum_i S(\varepsilon(h_2)1_H)S(b_i)a_i h_1 &= \sum_i S^2(h_2\varepsilon(h_1))S(b_i)a_i \\
\sum_i 1_H S(b_i)a_i h &= \sum_i S^2(h)S(b_i)a_i,
\end{aligned}$$

isto é,

$$uh = S^2(h)u \tag{3.2}$$

Nosso próximo passo será mostrar que u é invertível. Escrevendo $R^{-1} = \sum_j c_j \otimes d_j$ e $v = \sum_j S^{-1}(d_j)c_j$, temos

$$
\begin{aligned}
uv &= \sum_j uS^{-1}(d_j)c_j \\
&\overset{(3.2)}{=} \sum_j S^2(S^{-1}(d_j))uc_j \\
&= \sum_j S(d_j)uc_j \\
&= \sum_{i,j} S(d_j)S(b_i)a_ic_j \\
&= \sum_{i,j} S(b_id_j)a_ic_j.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que $\sum_{i,j} S(b_id_j)a_ic_j = 1$. De fato, pois $1 \otimes 1 = RR^{-1} = (\sum_i a_i \otimes b_i)(\sum_j c_j \otimes d_j) = \sum_{i,j} a_ic_j \otimes b_id_j$. Aplicando $\sigma = m(S \otimes id)\tau$ na igualdade acima obtemos $1 = \sum_i S(b_id_j)a_ic_j$, como queríamos mostrar.

Assim, $1 = uv \overset{(3.2)}{=} S^2(v)u$, ou seja, u tem inverso pelos dois lados e, pela unicidade do inverso, segue que $u^{-1} = v = S^2(v)$. Portanto, $S^2(h) = uhu^{-1}$, para todo $h \in H$, mostrando que S^2 é um automorfismo interno de H.

Para mostrarmos a última igualdade no enunciado, aplicando S em $S^2(h) = uhu^{-1}$, temos

$$S^3(h) = S(S^2(h)) = S(uhu^{-1}) = S(u)^{-1}S(h)S(u).$$

Como S é bijetiva, trocando $S(h)$ por h, concluímos que $S^2(h) = S(u)^{-1}hS(u)$.

Finalizando, como $uhu^{-1} = S(u)^{-1}hS(u)$, claramente temos que, $S(u)uh = hS(u)u$, para todo $h \in H$, ou seja, $S(u)u$ é um elemento central de H. ■

Definição 3.1.8. *Uma álgebra de Hopf H é **quase triangular** (QT, por brevidade), se H é quase cocomutativa via $R = \sum_i a_i \otimes b_i \in H \otimes H$ e*

$$(\Delta \otimes id)(R) = R^{13}R^{23} \tag{3.3}$$

$$(id \otimes \Delta)(R) \;=\; R^{13}R^{12}, \tag{3.4}$$

onde, $R^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1, R^{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$ *e* $R^{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$.

Dizemos que H *é* ***triangular*** *se também vale:*

$$R^{-1} = \tau(R). \tag{3.5}$$

Exemplo 3.1.9. Toda álgebra de Hopf cocomutativa é quase triangular, tomando $R = 1 \otimes 1$, como no Exemplo 3.1.3. Claramente uma tal álgebra de Hopf é também triangular.

Exemplo 3.1.10. Seja $(\Bbbk\mathbb{Z}_2, R = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g))$ dada no exemplo 3.1.4. Então $(\Bbbk\mathbb{Z}_2, R)$ é quase triangular.

Já mostramos em 3.1.4 que $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ é quase cocomutativa, falta verificarmos (3.3) e (3.4). No nosso caso, temos

$R^{12} = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes g \otimes 1 + g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes g \otimes 1)$

$R^{23} = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + 1 \otimes g \otimes 1 - 1 \otimes g \otimes g)$

$R^{13} = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes 1 \otimes g)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)(R) &= (\Delta \otimes id)(\frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g)) \\
&= \frac{1}{2}(\Delta(1) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes g + \Delta(g) \otimes 1 - \Delta(g) \otimes g) \\
&= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g).
\end{aligned}$$

E por outro lado,

$$\begin{aligned}
R^{13}R^{23} &= \frac{1}{4}((1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes 1 \otimes g)(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g \\
&+ 1 \otimes g \otimes 1 - 1 \otimes g \otimes g)) \\
&= \frac{1}{4}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + 1 \otimes g \otimes 1 - 1 \otimes g \otimes g + 1 \otimes 1 \otimes g + 1 \otimes 1 \otimes 1 \\
&+ 1 \otimes g \otimes g - 1 \otimes g \otimes 1 + g \otimes 1 \otimes 1 + g \otimes 1 \otimes g + g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g \\
&- g \otimes 1 \otimes g - g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes g \otimes g + g \otimes g \otimes 1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} 2 \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g)$$
$$= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g).$$

Logo vale (3.3). Analogamente, $(id \otimes \Delta)(R) = R^{13}R^{12}$ e vale (3.4).

Exemplo 3.1.11. Para $0 \neq \alpha \in \Bbbk$, a álgebra de Hopf (H_4, R_α), definida em 3.1.5 é quase triangular. De fato, temos

$R_\alpha = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) + \frac{\alpha}{2}(x \otimes x - x \otimes gx + gx \otimes x + gx \otimes gx)$

$R_\alpha^{12} = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes g \otimes 1 + g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes g \otimes 1) + \frac{\alpha}{2}(x \otimes x \otimes 1 - x \otimes gx \otimes 1 + gx \otimes x \otimes 1 + gx \otimes gx \otimes 1)$

$R_\alpha^{23} = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + 1 \otimes g \otimes 1 - 1 \otimes g \otimes g) + \frac{\alpha}{2}(1 \otimes x \otimes x - 1 \otimes x \otimes gx + 1 \otimes gx \otimes x + 1 \otimes gx \otimes gx)$

$R_\alpha^{13} = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes 1 \otimes g) + \frac{\alpha}{2}(x \otimes 1 \otimes x - x \otimes 1 \otimes gx + gx \otimes 1 \otimes x + gx \otimes 1 \otimes gx)$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)(R_\alpha) &= \frac{1}{2}(\Delta(1) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes g + \Delta(g) \otimes 1 - \Delta(g) \otimes g) + \frac{\alpha}{2}(\Delta(x) \otimes x \\
&- \Delta(x) \otimes gx + \Delta(gx) \otimes x + \Delta(gx) \otimes gx) \\
&= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g) + \frac{\alpha}{2}(x \otimes 1 \otimes x \\
&+ g \otimes x \otimes x - x \otimes 1 \otimes gx - g \otimes x \otimes gx + gx \otimes g \otimes x + 1 \otimes gx \otimes x \\
&+ gx \otimes g \otimes gx + 1 \otimes gx \otimes gx).
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a expressão da $R^{13}R^{23}$ do exemplo anterior temos:

$$\begin{aligned}
R_\alpha^{13}R_\alpha^{23} &= R^{13}R^{23} + \frac{\alpha}{4}(1 \otimes x \otimes x - 1 \otimes x \otimes gx + 1 \otimes gx \otimes x + 1 \otimes gx \otimes gx \\
&+ 1 \otimes x \otimes gx - 1 \otimes x \otimes x + 1 \otimes gx \otimes gx + 1 \otimes gx \otimes x + g \otimes x \otimes x \\
&- g \otimes x \otimes gx + g \otimes gx \otimes x + g \otimes gx \otimes gx - g \otimes x \otimes gx + g \otimes x \otimes x \\
&- g \otimes gx \otimes gx - g \otimes gx \otimes x + x \otimes 1 \otimes x + x \otimes 1 \otimes xg + x \otimes g \otimes x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
- &\quad x\otimes g\otimes xg - x\otimes 1\otimes gx - x\otimes 1\otimes gxg - x\otimes g\otimes gx + x\otimes g\otimes gxg\\
+ &\quad gx\otimes 1\otimes x + gx\otimes 1\otimes xg + gx\otimes g\otimes x - gx\otimes g\otimes xg + gx\otimes 1\otimes gx\\
+ &\quad gx\otimes 1\otimes gxg + gx\otimes g\otimes gx - gx\otimes g\otimes gxg) + \frac{\alpha^2}{4}(0\otimes 0)\\
= &\quad \frac{1}{2}(1\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes g + g\otimes g\otimes 1 - g\otimes g\otimes g) + \frac{\alpha}{4}2\cdot(x\otimes 1\otimes x\\
+ &\quad g\otimes x\otimes x - x\otimes 1\otimes gx - g\otimes x\otimes gx + gx\otimes g\otimes x + 1\otimes gx\otimes x\\
+ &\quad gx\otimes g\otimes gx + 1\otimes gx\otimes gx).
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\Delta\otimes id)(R) = R_\alpha^{13}R_\alpha^{23}$. Da mesma forma, mostra-se que $(id\otimes\Delta)(R) = R_\alpha^{13}R_\alpha^{12}$.

Exemplo 3.1.12. Pelo exemplo 3.1.6 temos que se G é um grupo não abeliano então $H = (\Bbbk G)^*$ não é quase cocomutativa. Logo $(\Bbbk G)^*$ não pode ser quase triangular.

Mais adiante vamos verificar que qualquer álgebra de Hopf H de dimensão finita pode ser imersa em uma álgebra de Hopf quase triangular, chamada de Duplo de Drinfeld de H.

Proposição 3.1.13. *Toda álgebra de Hopf quase triangular (H,R) possui as seguintes propriedades:*

(i) $R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}$.

(ii) $(S\otimes id)(R) = R^{-1} = (id\otimes S^{-1})(R)$.

(iii) $(S\otimes S)(R) = R$.

(iv) $(\varepsilon\otimes id)(R) = 1_{H\otimes H} = (id\otimes\varepsilon)(R)$.

Demonstração: (i) Note que $R^{12} = R\otimes 1\in H\otimes H\otimes H$. Assim,

$$
\begin{aligned}
R^{12}R^{13}R^{23} &\overset{(3.3)}{=} R^{12}(\Delta\otimes id)(R)\\
&= (R\otimes 1)(\sum_i \Delta(a_i)\otimes b_i)\\
&= \sum_i R\Delta(a_i)\otimes b_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3.1)}{=} \sum_i \tau\Delta(a_i)R \otimes b_i \\
&= (\sum_i \tau\Delta(a_i) \otimes b_i)(R \otimes 1) \\
&= (\tau\Delta \otimes id)(\sum_i a_i \otimes b_i)R^{12} \\
&= (\tau\Delta \otimes id)(R)R^{12} \\
&\overset{(3.3)}{=} R^{23}R^{13}R^{12}.
\end{aligned}
$$

(iv) Para mostrar esse item, vamos aplicar $\varepsilon \otimes id \otimes id$ em $(\Delta \otimes id)(R) = R^{13}R^{23}$. Por um lado, $(\varepsilon \otimes id \otimes id)(\Delta \otimes id)(R) = ((\varepsilon \otimes id)\Delta \otimes id)(R) = R$, onde na última igualdade estamos usando a propriedade da counidade.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id \otimes id)(R^{13}R^{23}) &= (\varepsilon \otimes id \otimes id)(\sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_ib_j) \\
&= \sum_{i,j} \varepsilon(a_i) \otimes a_j \otimes b_ib_j \\
&\simeq \sum_{i,j} \varepsilon(a_i)a_j \otimes b_ib_j \\
&= \sum_i (\varepsilon(a_i) \otimes b_i)(\sum_j a_j \otimes b_j) \\
&= ((\varepsilon \otimes id)(R))(R).
\end{aligned}
$$

Logo, $((\varepsilon \otimes id)(R))(R) = R$ e como R é invertível em $H \otimes H$, segue que $(\varepsilon \otimes id)(R) = 1_{H\otimes H}$.

Analogamente, aplicando $(id \otimes id \otimes \varepsilon)$ em (3.4), temos $(id \otimes \varepsilon)(R) = 1_{H\otimes H}$.

(ii) Como R é invertível, ao invés de mostrarmos que $(S \otimes id)(R) = R^{-1}$, vamos mostrar que $R((S \otimes id)(R)) = 1_{H\otimes H}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
R((S \otimes id)(R)) &= (\sum_i a_i \otimes b_i)(\sum_j S(a_j) \otimes b_j) \\
&= \sum_{i,j} a_iS(a_j) \otimes b_ib_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (m \otimes id)(\sum_{i,j} a_i \otimes S(a_j) \otimes b_i b_j) \\
&= (m \otimes id)(id \otimes S \otimes id)(\sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j) \\
&= (m \otimes id)(id \otimes S \otimes id)(R^{13}R^{23}) \\
&\overset{(3.3)}{=} (m \otimes id)(id \otimes S \otimes id)(\Delta \otimes id)(R) \\
&= (m \otimes id)((id \otimes S)\Delta \otimes id)(R) \\
&= (m(id \otimes S)\Delta \otimes id)(R) \\
&= (\varepsilon \otimes id)(R) \\
&= 1_{H \otimes H}.
\end{aligned}
$$

Para mostrar a segunda igualdade de (ii), afirmamos que $(H^{cop}, \tau(R))$ é uma álgebra de Hopf quase triangular. De fato, por 1.1.25, sabemos que H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda S^{-1}. Facilmente percebemos a quase cocomutatividade de H^{cop}, pois

$$
\begin{aligned}
\tau\Delta^{cop}(h) &= \tau(\tau\Delta(h)) \\
&\overset{(3.1)}{=} \tau(R\Delta(h)R^{-1}) \\
&= \tau(R)\tau(\Delta(h))\tau(R^{-1}) \\
&= \tau(R)\Delta^{cop}(h)\tau(R)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Agora seja $R\sum_i a_i \otimes b_i$ então $\tau(R) = \sum_i b_i \otimes a_i$. Como (H, R) é QT temos que vale (3.3) e (3.4), logo

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)(R) = R^{13}R^{23} &\Leftrightarrow \sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i = \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j \\
&\Leftrightarrow \sum_i b_i \otimes a_{i2} \otimes a_{i1} = \sum_{i,j} b_i b_j \otimes a_j \otimes a_i \\
&\Leftrightarrow (id \otimes \Delta^{cop})(\tau(R)) = (\tau(R))^{13}(\tau(R))^{12}.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(id\otimes\Delta)(R)=R^{13}R^{12} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_i a_i\otimes b_{i1}\otimes b_{i2}=\sum_{i,j} a_ia_j\otimes b_j\otimes b_i\\
&\Leftrightarrow \quad \sum_i b_{i2}\otimes b_{i1}\otimes a_i=\sum_{i,j} b_i\otimes b_j\otimes a_ia_j\\
&\Leftrightarrow \quad (\Delta^{cop}\otimes id)(\tau(R))=(\tau(R))^{13}(\tau(R))^{23}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $(H^{cop},\tau(R))$ é uma álgebra de Hopf QT. Logo pela primeira igualdade de (ii) e pelo fato acima obtêm-se

$$(S^{-1}\otimes id)(\tau(R))=\tau(R)^{-1}.$$

Aplicando τ em ambos os lados da igualdade acima, verifica-se que:

$$(id\otimes S^{-1})(R)=R^{-1}.$$

(iii) Precisamos verificar que $(S\otimes S)(R)=R$. Mas,

$$
\begin{aligned}
(S\otimes S)(R) &= (id\otimes S)(S\otimes id)(R)\\
&\overset{(ii)}{=} (id\otimes S)(R^{-1})\\
&\overset{(ii)}{=} (id\otimes S)(id\otimes S^{-1})(R)\\
&= (id\otimes SS^{-1})(R)\\
&= R.
\end{aligned}
$$

Concluindo assim a prova da proposição. ■

A equação (i) da Proposição anterior é chamada de **Equação de Yang Baxter Quântica**. Esta equação emergiu de diversos sistemas físicos e serviu de motivação original para o estudo de álgebras de Hopf quase triangulares.

O próximo teorema nos dá uma propriedade muito mais forte para a antípoda das álgebras de Hopf quase triangulares. Para sua demonstração vamos usar a seguinte notação: Se $R = \sum_i a_i \otimes b_i$, então notaremos por $R^{ij} \in R^{\otimes n}$, com $i < j$ e $n \geq 3$, o elemento definido por $R^{ij} = 1 \otimes ... \otimes a_i \otimes ... \otimes b_i \otimes ... \otimes 1 \in R^{\otimes n}$, onde a_i aparece na i-ésima entrada e b_i na j-ésima entrada, sendo as demais todas iguais a 1.

Também vamos precisar da seguinte estrutura de módulos: Seja $A = H \otimes H \otimes H \otimes H$ visto como uma $\Bbbk$-álgebra. Afirmamos que $H \otimes H$ é um A- módulo à direita via

$$(h \otimes k) \cdot (x \otimes y \otimes z \otimes w) = S(z)hx \otimes S(w)ky$$

para todos $h, k, x, y, z, w \in H$. De fato,

$$\begin{aligned}
((h \otimes k) \cdot (x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 \otimes w_1)) \cdot (x_2 \otimes y_2 \otimes z_2 \otimes w_2) &= \\
&= (S(z_1)hx_1 \otimes S(w_1)ky_1) \cdot (x_2 \otimes y_2 \otimes z_2 \otimes w_2) \\
&= S(z_2)S(z_1)hx_1x_2 \otimes S(w_2)S(w_1)ky_1y_2 \\
&= S(z_1z_2)hx_1x_2 \otimes S(w_1w_2)ky_1y_2 \\
&= (h \otimes k) \cdot (x_1x_2 \otimes y_1y_2 \otimes z_1z_2 \otimes w_1w_2) \\
&= (h \otimes k) \cdot ((x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 \otimes w_1)(x_2 \otimes y_2 \otimes z_2 \otimes w_2)).
\end{aligned}$$

e $(h \otimes k) \cdot (1_H \otimes 1_H \otimes 1_H \otimes 1_H) = S(1_H)h1_H \otimes S(1_H)k1_H = h \otimes k$.

Portanto, $H \otimes H$ é um A-módulo à direita. Agora podemos, apresentar o seguinte resultado:

Teorema 3.1.14. *Seja (H, R) uma álgebra de Hopf quase triangular. Então, para todo $h \in H$, temos*

$$S^4(h) = ghg^{-1},$$

onde $g = uS(u)^{-1}$ é um elemento grouplike de H, com $u = \sum_i S(b_i)a_i$, como na Proposição 3.1.7.

Demonstração: Nosso primeiro objetivo será provar que $g \in G(H)$ e para isso precisamos calcular $\Delta(u)$ e $\Delta(Su)$. Começaremos por mostrar que $\Delta(u) = (R^{21}R)^{-1}(u\otimes u) = (u \otimes u)(R^{21}R)^{-1}$, onde denotaremos por R^{21} o elemento $\tau(R) = \sum_i b_i \otimes a_i$, para simplificar notação.

De fato,

$$\begin{aligned}
R^{21}R\Delta(u) &\overset{(3.1)}{=} R^{21}\tau\Delta(u)R \\
&= \tau(R)\tau\Delta(u)R \\
&= \tau(R\Delta(u))R \\
&\overset{(3.1)}{=} \tau(\tau\Delta(u)R)R \\
&= \Delta(u)\tau(R)R \\
&= \Delta(u)R^{21}R.
\end{aligned}$$

Agora é suficiente mostrar que $\Delta(u)R^{21}R = u \otimes u$. Note que,

$$\begin{aligned}
\Delta(u)R^{21}R &= \Delta(\sum_i S(b_i)a_i)R^{21}R \\
&= \sum_i \Delta(S(b_i))\Delta(a_i)R^{21}R \\
&= \sum_i (S \otimes S)(\tau\Delta(b_i))R^{21}R\Delta(a_i) \\
&= \sum_{i,k,j} (S \otimes S)(b_{i2} \otimes b_{i1})(b_k \otimes a_k)(a_j \otimes b_j)(a_{i1} \otimes a_{i2}) \\
&= \sum_{i,k,j} S(b_{i2})b_k a_j a_{i1} \otimes S(b_{i1})a_k b_j a_{i2} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i,j} (\sum_k b_k \otimes a_k) \cdot (a_j a_{i1} \otimes b_j a_{i2} \otimes b_{i2} \otimes b_{i1}) \\
&= \sum_{i,j} R^{21} \cdot ((a_j \otimes b_j \otimes 1_H \otimes 1_H)(\Delta(ai) \otimes \tau\Delta(b_i))) \\
&= R^{21} \cdot (R^{12}(\Delta \otimes \tau\Delta)(R)).
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ estamos usando o fato de $H\otimes H$ ser um A- módulo à direita, mencionado antes.

Como (H,R) é QT, segue que

$$(\Delta \otimes id)(R) = \sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i \overset{(3.3)}{=} \sum_{j,k} a_j \otimes a_k \otimes b_j b_k \tag{3.6}$$

$$(id \otimes \Delta)(R) = \sum_i a_i \otimes b_{i1} \otimes b_{i2} \overset{(3.4)}{=} \sum_{l,r} a_l a_r \otimes b_r \otimes b_l \tag{3.7}$$

Com isso, temos

$$\begin{array}{rcl}
R^{12}(\Delta \otimes \tau\Delta)(R) & = & R^{12}((id \otimes id \otimes \tau\Delta)(\Delta \otimes id)(R)) \\
& \overset{(3.6)}{=} & R^{12}((id \otimes id \otimes \tau\Delta)(\sum_{j,k} a_j \otimes a_k \otimes b_j b_k)) \\
& = & R^{12}(\sum_{j,k} a_j \otimes a_k \otimes \tau\Delta(b_j b_k)) \\
& = & R^{12}(\sum_{j,k} a_j \otimes a_k \otimes b_{j2} b_{k2} \otimes b_{j1} b_{k1}) \\
& = & R^{12}((\sum_j a_j \otimes 1_H \otimes b_{j2} \otimes b_{j1})(\sum_k 1_H \otimes a_k \otimes b_{k2} \otimes b_{k1})) \\
& \overset{(3.7)}{=} & R^{12}((\sum_{l,r} a_l a_r \otimes 1_H \otimes b_l \otimes b_r)(\sum_{s,t} 1_H \otimes a_s a_t \otimes b_s \otimes b_t)) \\
& = & R^{12}(\sum_{l,r,s,t} a_l a_r \otimes a_s a_t \otimes b_l b_s \otimes b_r b_t) \\
& = & R^{12}(R^{13} R^{23} R^{14} R^{24}) \\
& = & (R^{12} R^{13} R^{23}) R^{14} R^{24} \\
& \overset{(i),\ 3.1.13}{=} & (R^{23} R^{13} R^{12}) R^{14} R^{24}
\end{array}$$

Assim temos $\Delta(u) R^{21} R = R^{21} \cdot (R^{23} R^{13} R^{12} R^{14} R^{24})$. Agora usando a estrutura de A-módulo à direita de $H \otimes H$, segue que

$$\begin{array}{rcl}
R^{21} \cdot R^{23} & = & \sum_i (b_i \otimes a_i) \cdot (\sum_j 1 \otimes a_j \otimes b_j \otimes 1) \\
& = & \sum_{i,j} S(b_j) b_i 1 \otimes S(1) a_i a_j \\
& = & \sum_{i,j} S(b_j) b_i \otimes a_i a_j
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} S(S^{-1}(b_i)b_j) \otimes a_i a_j \\
&= (S \otimes id)[(\sum_i S^{-1}(b_i) \otimes a_i)(\sum_j b_j \otimes a_j)] \\
&= (S \otimes id)[(id \otimes S^{-1})(R)R]^{21} \\
&\overset{(ii),\, 3.1.13}{=} (S \otimes id)[R^{-1}R]^{21} \\
&= (S \otimes id)(1 \otimes 1) \\
&= 1 \otimes 1.
\end{aligned}
$$

Dando sequência, obtemos

$$
\begin{aligned}
(R^{21} \cdot R^{23}) \cdot R^{13} &= (1 \otimes 1)(\sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i \otimes 1) \\
&= \sum_i S(b_i)1a_i \otimes S(1)11 \\
&= u \otimes 1.
\end{aligned}
$$

de onde segue que

$$
\begin{aligned}
(R^{21} \cdot R^{23} \cdot R^{13}) \cdot R^{12}R^{14} &= (u \otimes 1) \cdot (\sum_{i,j} a_i a_j \otimes b_i \otimes 1 \otimes b_j) \\
&= \sum_{i,j} S(1)ua_i a_j \otimes S(b_j)1b_i \\
&= \sum_i ua_i a_j \otimes S(b_j)b_i \\
&= (u \otimes 1)\tau(\sum_{i,j} S(b_j)b_i \otimes a_i a_j) \\
&\overset{(\dagger)}{=} (u \otimes 1)\tau(1 \otimes 1) \\
&= u \otimes 1.
\end{aligned}
$$

onde em ($\dagger$) usamos que $S(b_j)b_i \otimes a_i a_j = 1 \otimes 1$ o que foi obtido quando mostramos que $R^{21}R^{23} = 1 \otimes 1$ acima.

Finalmente, temos então

$$
((R^{21} \cdot R^{23} \cdot R^{13}) \cdot R^{12}) \cdot R^{14}R^{24} = (u \otimes 1) \cdot (\sum_i 1 \otimes a_i \otimes 1 \otimes b_i)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i S(1)u1 \otimes S(b_i)1a_i \\
&= u \otimes \sum_i S(b_i)a_i \\
&= u \otimes u.
\end{aligned}
$$

Logo, $\Delta(u)R^{21}R = u \otimes u$ e, portanto, $R^{21}R\Delta(u) = \Delta(u)R^{21}R = u \otimes u$, ou seja, $\Delta(u) = (R^{21}R)^{-1}(u \otimes u) = (u \otimes u)(R^{21}R)^{-1}$.

Para calcular $\Delta(S(u))$ vamos observar inicialmente que (H, R) e $(H, \tau(R) = R^{21})$ são QT, e portanto temos $(S \otimes id)(R) = R^{-1} = (id \otimes S^{-1})(R)$ e $(S^{-1} \otimes id)(R^{21}) = (R^{21})^{-1} = (id \otimes S)(R^{21})$ (3.1.13 (ii)). Assim,

$$
\begin{aligned}
(S \otimes S)(RR^{21})^{-1} &= (S \otimes S)((R^{21})^{-1}R^{-1}) \\
&= (S \otimes S)(R^{-1})(S \otimes S)(R^{21})^{-1} \\
&= (S \otimes S)(id \otimes S^{-1})(R)(S \otimes S)(S^{-1} \otimes id)(R^{21}) \\
&= (S \otimes id)(R)(id \otimes S)(R^{21}) \\
&= R^{-1}(R^{21})^{-1} \\
&= (R^{21}R)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Segue daí que

$$
\begin{aligned}
\Delta(S(u)) &= (S \otimes S)(\tau\Delta(u)) \\
&= (S \otimes S)(\tau((R^{21}R)^{-1}(u \otimes u))) \\
&= (S \otimes S)(\tau(R^{21}R)^{-1}\tau(u \otimes u)) \\
&\overset{(\star)}{=} (S \otimes S)((RR^{21})^{-1}(u \otimes u)) \\
&= (S \otimes S)(u \otimes u)(S \otimes S)(RR^{21})^{-1} \\
&= (S(u) \otimes S(u))(R^{21}R)^{-1}.
\end{aligned}
$$

onde em $(\star)$ estamos usando a igualdade $\tau(R^{21}R)^{-1} = (RR^{21})^{-1}$, a qual é facilmente verificada. Agora, se $g = uS(u)^{-1}$, então temos

$$\begin{aligned}
\Delta(g) &= \Delta(u)\Delta(S(u))^{-1} \\
&= (u \otimes u)(R^{21}R)^{-1}[(S(u) \otimes S(u))(R^{21}R)^{-1}]^{-1} \\
&= (u \otimes u)(R^{21}R)^{-1}(R^{21}R)(S(u)^{-1} \otimes S(u)^{-1}) \\
&= uS(u)^{-1} \otimes uS(u)^{-1} \\
&= g \otimes g.
\end{aligned}$$

Portanto, $g = uS(u)^{-1} \in G(H)$, como queríamos mostrar.

Finalizaremos a demonstração mostrando que S^4 é dado por conjugação pelo elemento $g = uS(u)^{-1}$. De fato, pois H é cocomutativa (por ser QT) e segue do Teorema 3.1.7 que $S^2(h) = uhu^{-1} = S(u)^{-1}hS(u)$, para todo $h \in H$. Temos então

$$\begin{aligned}
S^4(h) &= S^2(S^2(h)) \\
&= uS^2(h)u^{-1} \\
&= uS(u)^{-1}hS(u)u^{-1} \\
&= ghg^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, $S^4(h) = ghg^{-1}$, para todo $h \in H$, e o Teorema está mostrado. ■

Como uma álgebra de Hopf pode vir a ser quase triangular com estruturas dadas por distintos elementos $R \in H \otimes H$, encerraremos esta seção com a noção de equivalência entre estas estruturas, além de alguns exemplos pertinentes.

Definição 3.1.15. *(i) Se (H, R) e (H', R') são álgebras de Hopf quase triangulares, então elas são isomorfas como álgebras de Hopf quase triangulares se existe um isomorfismo $f : H \longrightarrow H'$ de álgebras de Hopf tal que $R' = (f \otimes f)(R)$*

(ii) Duas estruturas R, R' de uma álgebra de Hopf quase triangular H são equivalentes se $(H, R) \cong (H, R')$ como álgebras de Hopf quase triangulares.

Exemplo 3.1.16. Seja $H = \Bbbk\mathbb{Z}_2$ definimos no Exemplo 3.1.10, seja $R = 1 \otimes 1$ e $R' = \dfrac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g)$. Já mostramos que (H, R) e (H, R') são quase triangulares. Afirmamos que R não é equivalente a R'.

De fato, $\mathbb{Z}_2$ é gerado apenas por dois elementos e nosso isomorfismo f de H em H satisfaz $f(1) = 1$, então f necessariamente é a identidade. Assim, facilmente verificamos que $(f \otimes f)(R) \neq R'$.

Exemplo 3.1.17. Seja $H = H_4$ como no Exemplo 3.1.11, onde mostramos que (H_4, R_α) é QT com $R_\alpha = \dfrac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) + \dfrac{\alpha}{2}(x \otimes x - x \otimes gx + gx \otimes x + gx \otimes gx)$, para $0 \neq \alpha \in \Bbbk$. Se $\Bbbk$ é algébricamente fechado, então $(H, R_\alpha) \cong (H, R_1)$ para todo $\alpha \neq 0$.

De fato, definimos o isomorfismo $f : H \longrightarrow H$ tal que $f(g) = g$ e $f(x) = \alpha^{\frac{1}{2}}x$. Note que $\Bbbk$ é algébricamente fechado, logo $\alpha^{\frac{1}{2}} \in \Bbbk$ e $f(1) = f(g^2) = g^2 = 1$, preservando também a unidade. Seguindo da mesma forma, claramente temos que f é um isomorfismo de álgebras de Hopf. Falta apenas mostrarmos que $R_\alpha = (f \otimes f)(R_1)$. Para tanto, basta observar que

$(f \otimes f)(\dfrac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) + \dfrac{1}{2}(x \otimes x - x \otimes gx + gx \otimes x + gx \otimes gx)) =$
$= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) + \frac{1}{2}(\alpha^{\frac{1}{2}}x \otimes \alpha^{\frac{1}{2}}x - \alpha^{\frac{1}{2}}x \otimes g\alpha^{\frac{1}{2}}x + g\alpha^{\frac{1}{2}}x \otimes \alpha^{\frac{1}{2}}x + g\alpha^{\frac{1}{2}}x \otimes g\alpha^{\frac{1}{2}}x = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) + \frac{\alpha}{2}(x \otimes x - x \otimes gx + gx \otimes x + gx \otimes gx) = R_\alpha$.

3.2 O Duplo de Drinfeld

O Duplo de Drinfeld de uma álgebra de Hopf de dimensão finita foi definida por Drinfeld (ver [7]) a fim de proporcionar soluções para a equanção de Yang-Baxter Quântica, decorrente da mecânica estatística. Um dos objetivos dessa seção é mostrar que o Duplo de Drinfeld é sempre uma álgebra de Hopf quase triangular. Logo conseguimos ver toda álgebra de Hopf de dimensão finita imersa numa álgebra de Hopf quase triangular. Após essa construção estudaremos a semissimplicidade do Duplo de Drinfeld além de apresentar dois exemplos onde ilustramos a construção do Duplo de Drinfeld de algumas álgebras de Hopf conhecidas.

Seja H qualquer álgebra de Hopf de dimensão finita sobre $\Bbbk$ com antípoda S e seja S^* a antípoda de H^*. Para facilitar a notação utilizaremos S para as duas antípodas, não havendo perigo de confusão, pois vamos deixar claro em quais elementos aplicaremos cada antípoda. Para a construção do Duplo de Drinfeld nós precisamos definir algumas novas ações de H em H^*.

Definição 3.2.1. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva e sejam $h \in H$ e $f \in H^*$. Então:*

(i) A ação coadjunta à esquerda de H em H^* é dada por

$$h \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup f = h_1 \rightharpoonup f \leftharpoonup S^{-1}(h_2). \tag{3.8}$$

(ii) A ação coadjunta à direita de H em H^* é dada por

$$f \leftharpoonup\!\!\!\leftharpoonup h = S^{-1}(h_1) \rightharpoonup f \leftharpoonup h_2. \tag{3.9}$$

onde $\rightharpoonup$ e $\leftharpoonup$ são as ações dadas em 2.1.11 e 2.1.10, respectivamente.

Podemos escrever (i) e (ii), para todo elemento $k \in H$, da forma

$$< h \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup f, k >=< f, S^{-1}(h_2)kh_1 > \text{ e } < f \leftharpoonup\!\!\!\leftharpoonup h, k >=< f, h_2kS^{-1}(h_1) > . \tag{3.10}$$

Analogamente, se H tem dimensão finita, nós podemos inverter as fechas para obter ações à esquerda e à direita de H^* em H, dadas por

$$f \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup h = f_1 \rightharpoonup h \leftharpoonup S^{-1}(f_2) \quad \text{e} \quad h \leftharpoonup\!\!\!\leftharpoonup f = S^{-1}(f_1) \rightharpoonup h \leftharpoonup f_2. \tag{3.11}$$

Para melhorar a escrita das ações vistas até aqui, apresentemos o seguinte lema:

Lema 3.2.2. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então, temos:*

(i) $f \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup h = < f, h_3 S^{-1}(h_1) > h_2$, $\forall\, f \in H^*$, $\forall\, h \in H$.

(ii) $h \leftharpoonup\!\!\!\leftharpoonup f = < f, S^{-1}(h_3) h_1 > h_2$, $\forall\, f \in H^*$, $\forall\, h \in H$.

(iii) $h \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup f = < f_3 S^{-1}(f_1), h > f_2$, $\forall\, f \in H^*$, $\forall\, h \in H$.

Demonstração: (i) Dados $f \in H^*$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
f \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup h &\overset{(3.11)}{=} f_1 \rightharpoonup h \leftharpoonup S^{-1}(f_2)\\
&\overset{2.1.10}{=} f_1 \rightharpoonup (< S^{-1}(f_2), h_1 > h_2)\\
&= < S^{-1}(f_2), h_1 > f_1 \rightharpoonup h_2\\
&\overset{2.1.10}{=} < S^{-1}(f_2), h_1 > h_2 < f_1, h_3 >\\
&\overset{2.4.1}{=} < f_2, S^{-1}(h_1) >< f_1, h_3 > h_2\\
&= < f_1, h_3 >< f_2, S^{-1}(h_1) > h_2\\
&= < f, h_3 S^{-1}(h_1) > h_2.
\end{aligned}$$

(ii) Sejam $f \in H^*$ e $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
h \leftharpoonup\!\!\!\leftharpoonup f &\overset{(3.11)}{=} S^{-1}(f_1) \rightharpoonup h \leftharpoonup f_2\\
&\overset{2.1.10}{=} < S^{-1}(f_1), h_2 > h_1 \leftharpoonup f_2\\
&\overset{2.1.10}{=} < S^{-1}(f_1), h_3 >< f_2, h_1 > h_2\\
&\overset{2.4.1}{=} < f_1, S^{-1}(h_3) >< f_2, h_1 > h_2\\
&= < f, S^{-1}(h_3) h_1 > h_2.
\end{aligned}$$

(iii) Dado $k \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(< f_3 S^{-1}(f_1), h > f_2)(k) &= < f_3 S^{-1}(f_1), h >< f_2, k >\\
&= < f_3, h_1 >< S^{-1}(f_1), h_2 >< f_2, k >\\
&\overset{2.4.1}{=} < f_3, h_1 >< f_1, S^{-1}(h_2) >< f_2, k >
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \; < f_1, S^{-1}(h_2)k >< f_2, h_1 > \\
&= \; < f, S^{-1}(h_2)kh_1 > \\
&\overset{(3.10)}{=} \; (h \rightharpoonup f)(k).
\end{aligned}
$$

Assim, a prova do Lema está completa. ■

Definição 3.2.3. *Seja H uma álgebra de Hopf. Um H-**módulo coálgebra** à esquerda C é uma coálgebra com uma estrutura de H-módulo à esquerda tal que $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ é um homomorfismo de H-módulos, ou seja, para todos $c \in C$ e $h \in H$, temos*

$$\Delta(h \cdot c) = h \cdot \Delta(c).$$

A próxima proposição será muito útil para mostrar que o Duplo de Drinfeld, que será construido mais adiante, é de fato uma álgebra de Hopf.

Proposição 3.2.4. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então:*

(i) $(H^*)^{cop}$ é um H-módulo coálgebra à esquerda via $\rightharpoonup$.

(ii) H é um $(H^*)^{cop}$-módulo coálgebra à direita via $\leftharpoonup$.

Demonstração: (i) Vamos mostrar que para todos $f \in (H^*)^{cop}$ e $h \in H$, temos $\Delta^{cop}(h \rightharpoonup f) = h \rightharpoonup \Delta^{cop}(f)$, onde $\Delta^{cop} = \tau\Delta$. De fato, seja $l \otimes k \in H \otimes H$. Então

$$
\begin{aligned}
< \Delta^{cop}(h \rightharpoonup f), l \otimes k > \; &= \; < (h \rightharpoonup f)_2, l > \otimes < (h \rightharpoonup f)_1, k > \\
&= \; < (h \rightharpoonup f)_2, l >< (h \rightharpoonup f)_1, k > \otimes 1 \\
&\simeq \; < h \rightharpoonup f, kl > \\
&\overset{(3.10)}{=} \; < f, S^{-1}(h_2)klh_1 > .
\end{aligned}
$$

e, por outro lado,

$$
\begin{aligned}
< h \rightharpoonup \Delta^{cop}(f), l \otimes k > &= < h \rightharpoonup (f_2 \otimes f_1), l \otimes k > \\
&= < h_1 \rightharpoonup f_2 \otimes h_2 \rightharpoonup f_1, l \otimes k > \\
&= < h_1 \rightharpoonup f_2, l > \otimes < h_2 \rightharpoonup f_1, k > \\
&= < h_1 \rightharpoonup f_2, l >< h_2 \rightharpoonup f_1, k > \otimes 1 \\
&\simeq < h_1 \rightharpoonup f_2, l >< h_2 \rightharpoonup f_1, k > \\
&\overset{(3.10)}{=} < f_2, S^{-1}(h_2) l h_1 >< f_1, S^{-1}(h_4) k h_3 > \\
&= < f, S^{-1}(h_4) k h_3 S^{-1}(h_2) l h_1 > \\
&= < f, S^{-1}(h_3) k \varepsilon(h_2) l h_1 > \\
&= < f, S^{-1}(h_3 \varepsilon(h_2)) k l h_1 > \\
&= < f, S^{-1}(h_2) k l h_1 > .
\end{aligned}
$$

(ii) Agora vamos provar que $\Delta(h \leftharpoonup f) = \Delta(h) \leftharpoonup f$, para todos $h \in H$ e todo $f \in (H^*)^{cop}$. De fato, pois

$$
\begin{aligned}
\Delta(h \leftharpoonup f) &\overset{(ii),\ 3.2.2}{=} \Delta(< f, S^{-1}(h_3) h_1 > h_2) \\
&= < f, S^{-1}(h_3) h_1 > \Delta(h_2) \\
&= < f, S^{-1}(h_4) h_1 > h_2 \otimes h_3.
\end{aligned}
$$

e, por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\Delta(h) \leftharpoonup f &= h_1 \leftharpoonup f_2 \otimes h_2 \leftharpoonup f_1 \\
&\overset{(ii),\ 3.2.2}{=} < f_2, S^{-1}(h_3) h_1 > h_2 \otimes < f_1, S^{-1}(h_6) h_4 > h_5 \\
&= < f_1, S^{-1}(h_6) h_4 >< f_2, S^{-1}(h_3) h_1 > h_2 \otimes h_5 \\
&= < f, S^{-1}(h_6) h_4 S^{-1}(h_3) h_1 > h_2 \otimes h_5 \\
&= < f, S^{-1}(h_5) \varepsilon(h_3) 1 h_1 > h_2 \otimes h_4 \\
&= < f, S^{-1}(h_4) h_1 > h_2 \otimes h_3.
\end{aligned}
$$

■

Podemos agora definir o Duplo de Drinfeld de uma álgebra de Hopf finito-dimensional, como seque:

Definição 3.2.5. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. O* ***Duplo de Drinfeld*** *de H é uma álgebra de Hopf $D(H)$, onde $D(H) := (H^*)^{cop} \bowtie H \simeq (H^*)^{cop} \otimes H$, como espaço vetorial. As estruturas de álgebra de Hopf são dadas por:*

Multiplicação: $(f \bowtie h)(g \bowtie k) = f(h_1 \rightharpoonup g_2) \bowtie (h_2 \leftharpoonup g_1)k.$

Unidade: $1_{(H^*)^{cop}} \bowtie 1_H = \varepsilon_H \bowtie 1_H.$

Comultiplicação: $\Delta(f \bowtie h) = f_2 \bowtie h_1 \otimes f_1 \bowtie h_2.$

Counidade: $\varepsilon = \varepsilon_{(H^*)^{cop}} \bowtie \varepsilon_H.$

Antípoda: $S_{D(H)} : D(H) \longrightarrow D(H)$, *dada por* $S_{D(H)}(f \bowtie h) = (S_H(h_2) \rightharpoonup S_{(H^*)^{cop}}(f_1)) \bowtie (f_2 \rightharpoonup S_H(h_1)).$

Para todos $f, g \in (H^*)^{cop}$, $h, k \in H$ e $f \bowtie h, g \bowtie k \in D(H)$.

No que segue, vamos mostrar que $D(H)$ é de fato uma álgebra de Hopf de dimensão finita (pois H possui dimensão finita), com as estruturas definidas acima. Antes porém, vamos mostrar um resultado que será muito útil. A partir de agora, vamos continuar escrevendo apenas S para as antípodas dadas acima pois não há perigo de confusão, como observamos antes.

Lema 3.2.6. *Com as notações anteriores, temos que:*

(i) $S(f \bowtie h) = (S(f_2) \leftharpoonup h_1) \bowtie (S(h_2) \leftharpoonup S(f_1)).$

(ii) $h \rightharpoonup \varepsilon =< \varepsilon, h > \varepsilon.$

(iii) $H \simeq (\varepsilon \bowtie H)$ *é uma subálgebra e uma subcoálgebra de* $D(H)$, *onde* $\varepsilon \in (H^*)^{cop}$.

(iv) $(H^*)^{cop} \simeq ((H^*)^{cop} \bowtie 1)$ *é uma subálgebra e uma subcoálgebra de* $D(H)$*, onde* $1 = 1_H$*.*

(v) $D(H)$ *é gerado como álgebra e como coálgebra por* H *e* $(H^*)^{cop}$*.*

Demonstração: (i) Aplicando $S(f \bowtie h)$ em $k \otimes id$, para todo $k \in H$, temos

$$\begin{aligned}
< S(f \bowtie h), k \otimes id > &= < (S(h_2) \rightharpoonup S(f_1)) \bowtie (f_2 \rightharpoonup S(h_1)), k \otimes id > \\
&= < S(h_2) \rightharpoonup S(f_1), k > \bowtie (f_2 \rightharpoonup S(h_1)) \\
&= 1_{(H^*)^{cop}} \bowtie < S(h_2) \rightharpoonup S(f_1), k > (f_2 \rightharpoonup S(h_1)) \\
&\overset{2.1.11}{=} 1_{(H^*)^{cop}} \bowtie < S(f_1), kS(h_2) > (f_2 \rightharpoonup S(h_1)) \\
&\overset{2.1.10}{=} 1_{(H^*)^{cop}} \bowtie < S(f_1), kS(h_3) >< f_2, S(h_1) > S(h_2) \\
&\overset{2.4.1}{=} 1_{(H^*)^{cop}} \bowtie < f_1, S(kS(h_3)) >< f_2, S(h_1) > S(h_2) \\
&= 1_{(H^*)^{cop}} \bowtie < f, S^2(h_3)S(k)S(h_1) > S(h_2).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&< (S(f_2) \leftharpoonup h_1) \bowtie (S(h_2) \leftharpoonup S(f_1)), k \otimes id > = \\
&= < S(f_2) \leftharpoonup h_1, k > \bowtie S(h_2) \leftharpoonup S(f_1) \\
&= 1_{(H^*)^{cop}} \bowtie < S(f_2) \leftharpoonup h_1, k > S(h_2) \leftharpoonup S(f_1) \\
&\overset{2.1.11}{=} 1_{(H^*)^{cop}} \bowtie < S(f_2), h_1 k > S(h_2) \leftharpoonup S(f_1) \\
&\overset{2.1.10}{=} 1_{(H^*)^{cop}} \bowtie < S(f_2), h_1 k >< S(f_1), S(h_3) > S(h_2) \\
&\overset{2.4.1}{=} 1_{(H^*)^{cop}} \bowtie < f_1, S^2(h_3) >< f_2, S(h_1 k) > S(h_2) \\
&= 1_{(H^*)^{cop}} \bowtie < f, S^2(h_3)S(k)S(h_1) > S(h_2).
\end{aligned}$$

o que mostra (i).

(ii) para todos $\varepsilon \in (H^*)^{cop}$, h e $k \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
(h \rightharpoonup \varepsilon)(k) &\overset{3.10}{=} < \varepsilon, S^{-1}(h_1)kh_2 > \\
&= < \varepsilon, S^{-1}(h_1) >< \varepsilon, kh_2 > \\
&= < \varepsilon, h_1 >< \varepsilon, kh_2 > \\
&= < \varepsilon, k\varepsilon(h_1)h_2 > \\
&= < \varepsilon, kh > \\
&= < \varepsilon, k >< \varepsilon, h > \\
&= < \varepsilon, h >< \varepsilon, k >, \qquad \forall k \in H.
\end{aligned}
$$

Logo $h \rightharpoonup \varepsilon =< \varepsilon, h > \varepsilon$.

(iii) Para mostrar que $H \simeq (\varepsilon \bowtie H)$ é uma subálgebra de $D(H)$, vamos mostrar que o produto em $\varepsilon \bowtie H$ é fechado. De fato,

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon \bowtie h)(\varepsilon \bowtie k) &= \varepsilon(h_1 \rightharpoonup \varepsilon) \bowtie (h_2 \leftharpoonup \varepsilon)k \\
&\overset{(ii)}{=} \varepsilon < \varepsilon, h_1 > \varepsilon \bowtie (h_2 \leftharpoonup \varepsilon)k \\
&\overset{(ii)\ 3.2.2}{=} \varepsilon < \varepsilon, h_1 > \bowtie < \varepsilon, S^{-1}(h_4)h_2 > h_3k \\
&= \varepsilon \bowtie < \varepsilon, h_4 >< \varepsilon, h_2 > h_3 < \varepsilon, h_1 > k \\
&= \varepsilon \bowtie hk \in \varepsilon \bowtie H.
\end{aligned}
$$

Logo, H é uma subálgebra de $D(H)$. Por fim $\Delta(\varepsilon \bowtie h) = \varepsilon \bowtie h_1 \otimes \varepsilon \bowtie h_2 \in H \otimes H$. Ou seja, H é também uma subcoálgebra de $D(H)$.

(iv) Analogamente ao item anterior, mostra-se que $(H^*)^{cop} \simeq ((H^*)^{cop} \bowtie 1)$ é uma subálgebra e uma subcoálgebra de $D(H)$.

(v) Temos, para todos $f \in (H^*)^{cop}$ e $h \in H$:

$$\begin{aligned}(f \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h) &= f(1 \rightharpoonup \varepsilon) \bowtie (1 \leftharpoonup \varepsilon)h \\ &\overset{3.2.2}{=} f(<\varepsilon, 1> \varepsilon) \bowtie (<\varepsilon, 1> 1h) \\ &= f\varepsilon \bowtie h \\ &= f \bowtie h.\end{aligned}$$

Logo, $(f \bowtie h) = (f \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h) \subseteq ((H^*)^{cop} \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie H) \simeq (H^*)^{cop} \bowtie H$. Como, pelos itens (iii) e (iv), temos $H \simeq (\varepsilon \bowtie H)$ e $(H^*)^{cop} \simeq ((H^*)^{cop} \bowtie 1)$, segue que $D(H)$ é gerado como álgebras e como coálgebras por $(H^*)^{cop}$ e H. ■

Proposição 3.2.7. *Com as notações anteriores $D(H)$ é uma álgebra de Hopf de dimensão finita.*

Demonstração: Pelo item (v) do lema anterior sabemos que $D(H)$ é uma álgebra e uma coálgebra com as estruturas dadas. Também poderíamos mostrar isso diretamente, utilizando a definição de álgebra e coálgebra usuais, mas não utilizamos esse caminho pelo enorme tamanho dos cálculos. Daremos apenas um exemplo, mostrando que de fato, $(\varepsilon \bowtie 1)$ é a unidade de $D(H)$. Para todo $f \in (H^*)^{cop}$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}(f \bowtie h)(\varepsilon \bowtie 1) &= f(h_1 \rightharpoonup \varepsilon) \bowtie (h_2 \leftharpoonup \varepsilon)1 \\ &\overset{(ii),\ 3.2.6}{=} f <\varepsilon, h_1> \varepsilon \bowtie (h_2 \leftharpoonup \varepsilon)1 \\ &\overset{(ii),\ 3.2.2}{=} f\varepsilon <\varepsilon, h_1> \bowtie <\varepsilon, S^{-1}(h_4)h_2> h_3 1 \\ &= f \bowtie <\varepsilon, h_4><\varepsilon, h_2> h_3 <\varepsilon, h_1> \\ &= f \bowtie h.\end{aligned}$$

Analogamente, $(\varepsilon \bowtie 1)(f \bowtie h) = f \bowtie h$.

Dando sequência, para mostrar que $D(H)$ é uma biálgebra precisamos apenas mostrar que Δ e ε são morfismos de álgebras. De fato, pois se $f, g \in (H^*)^{cop}$ e

$h, k \in H$, então

$$\begin{aligned}
\Delta((f \otimes h)(g \otimes k)) &= \Delta(f(h_1 \rightharpoonup g_2) \bowtie (h_2 \leftharpoonup g_1)k) \\
&= (f(h_1 \rightharpoonup g_2))_2 \bowtie ((h_2 \leftharpoonup g_1)k)_1 \otimes (f(h_1 \rightharpoonup g_2))_1 \bowtie ((h_2 \leftharpoonup g_1)k)_2 \\
&= f_2(h_1 \rightharpoonup g_2)_2 \bowtie (h_2 \leftharpoonup g_1)_1 k_1 \otimes f_1(h_1 \rightharpoonup g_2)_1 \bowtie (h_2 \leftharpoonup g_1)_2 k_2 \\
&\overset{(i),\, 3.2.4}{=} f_2(h_1 \rightharpoonup g_3) \bowtie (h_3 \leftharpoonup g_1)_1 k_1 \otimes f_1(h_2 \rightharpoonup g_2) \bowtie (h_3 \leftharpoonup g_1)_1 k_2 \\
&\overset{(ii),\, 3.2.4}{=} f_2(h_1 \rightharpoonup g_4) \bowtie (h_3 \leftharpoonup g_2)k_1 \otimes f_1(h_2 \rightharpoonup g_3) \bowtie (h_4 \leftharpoonup g_1)k_2.
\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Delta(f \bowtie h)\Delta(g \bowtie k) &= ((f_2 \bowtie h_1) \otimes (f_1 \bowtie h_2))((g_2 \bowtie k_1) \otimes (g_1 \bowtie k_2)) \\
&= (f_2 \bowtie h_1)(g_2 \bowtie k_1) \otimes (f_1 \bowtie h_2)(g_1 \bowtie k_2) \\
&= f_2(h_1 \rightharpoonup g_4) \bowtie (h_2 \leftharpoonup g_3)k_1 \otimes f_1(h_3 \rightharpoonup g_2) \bowtie (h_4 \leftharpoonup g_1)k_2.
\end{aligned}$$

Para mostrar que as equações acima coincidem, vamos aplicar ambas num elemento $l \otimes id \otimes p \otimes id$, para $l, p \in H$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
&< f_2(h_1 \rightharpoonup g_4) \bowtie (h_3 \leftharpoonup g_2)k_1 \otimes f_1(h_2 \rightharpoonup g_3) \bowtie (h_4 \leftharpoonup g_1)k_2, l \otimes id \otimes p \otimes id > \ = \\
&\quad =< f_2(h_1 \rightharpoonup g_4), l > \bowtie (h_3 \leftharpoonup g_2)k_1 \otimes < f_1(h_2 \rightharpoonup g_3), p > \bowtie (h_4 \leftharpoonup g_1)k_2 \\
&\quad \overset{(*)}{=} < f_2, l_1 >< g_4 S^{-1}(h_2) l_2 h_1 > \bowtie < g_2, S^{-1}(h_7)h_5 > h_6 k_1 \otimes < f_1, p_1 >< g_3, S^{-1}(h_4) p_2 h_3 > \\
&\quad \bowtie < g_1, S^{-1}(h_{10}) h_8 > h_9 k_2 \\
&\quad =< f, p_1 l_1 >< g, S^{-1}(h_{10}) h_8 S^{-1}(h_7) h_5 S^{-1}(h_4) p_2 h_3 S^{-1}(h_2 h_1) > \bowtie h_6 k_1 \otimes 1 \bowtie h_9 k_2 \\
&\quad =< f, p_1 l_1 >< g, S^{-1}(h_7) \varepsilon(h_5) \varepsilon(h_3) p_2 \varepsilon(h_2) l_2 h_1 > \bowtie h_4 k_1 \otimes 1 \bowtie h_6 k_2 \\
&\quad =< f, p_1 l_1 >< g, S^{-1}(h_4) p_2 l_2 h_1 > \bowtie h_2 k_1 \otimes 1 \bowtie h_2 k_2.
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
&< f_2(h_1 \rightharpoonup g_4) \bowtie (h_2 \leftharpoonup g_3)k_1 \otimes f_1(h_3 \rightharpoonup g_2) \bowtie (h_4 \leftharpoonup g_1)k_2, l \otimes id \otimes p \otimes id > \ = \\
&\quad =< f_2(h_1 \rightharpoonup g_4), l > \bowtie (h_2 \leftharpoonup g_3)k_1 \otimes < f_1(h_3 \rightharpoonup g_2), p > \bowtie (h_4 \leftharpoonup g_1)k_2
\end{aligned}$$

$$\overset{(*)}{=} \quad < f_2, l_1 >< g_4, S^{-1}(h_2)l_2h_1 > \bowtie < g_3, S^{-1}(h_5)h_3 > h_4k_1 \otimes < f_1, p_1 >< g_2, S^{-1}(h_7)p_2h_6 >$$

$$\bowtie \quad < g_1, S^{-1}(h_{10})h_8 > h_9k_2$$

$$= \quad < f, p_1l_1 >< g, S^{-1}(h_{10})h_8S^{-1}(h_7)p_2h_6S^{-1}(h_5)h_3S^{-1}(h_2)l_2h_1 > \bowtie h_4k_1 \otimes 1 \bowtie h_9k_2$$

$$= \quad < f, p_1l_1 >< g, S^{-1}(h_7)\varepsilon(h_5)p_2\varepsilon(h_4)\varepsilon(h_2)l_2h_1 > \bowtie h_3k_1 \otimes 1 \bowtie h_6k_2$$

$$= \quad < f, p_1l_1 >< g, S^{-1}(h_4)p_2l_2h_1 > \bowtie h_2k_1 \otimes 1 \bowtie h_2k_2.$$

Onde em $(*)$ estamos usando (3.10) e o Lema 3.2.2.

Além disso, temos ainda

$$(\varepsilon_{(H^*)^{cop}} \bowtie \varepsilon_H)((f \bowtie h)(g \bowtie k)) \quad =$$

$$= (\varepsilon_{(H^*)^{cop}} \bowtie \varepsilon_H)(f(h_1 \rightharpoonup g_2) \bowtie (h_2 \leftharpoonup g_1)k)$$

$$= \varepsilon_{(H^*)^{cop}}(f(h_1 \rightharpoonup g_2)) \bowtie \varepsilon_H((h_2 \leftharpoonup g_1)k)$$

$$= \varepsilon_{(H^*)^{cop}}(f(h_1 \rightharpoonup g_2))\varepsilon_H((h_2 \leftharpoonup g_1)k) \bowtie 1$$

$$\overset{(ii),3.2.2}{=} (f(h_1 \rightharpoonup g_2))(1_H)\varepsilon_H(< g_1, S^{-1}(h_4)h_2 > h_3)\varepsilon_H(k) \bowtie 1$$

$$\overset{(\dagger)}{=} f(1_H)(h_1 \rightharpoonup g_2)(1_H) < g_1, S^{-1}(h_4)h_2 > \varepsilon_H(h_3)\varepsilon_H(k) \bowtie 1$$

$$\overset{(3.10)}{=} f(1_H) < g_2, S^{-1}(h_2)1_Hh_1 >< g_1, S^{-1}(h_5)h_3\varepsilon_H(h_4) > \varepsilon_H(k) \bowtie 1$$

$$= f(1_H) < g_2, \varepsilon_H(h_1)1_H >< g_1, S^{-1}(h_3)h_2 > \varepsilon_H(k) \bowtie 1$$

$$= f(1_H)\varepsilon_H(h_1) < g_2, 1_H >< g_1, \varepsilon_H(h_2) > \varepsilon_H(k) \bowtie 1$$

$$= f(1_H)\varepsilon_H(h_1\varepsilon(h_2)) < g_2, 1_H >< g_1, 1_H > \varepsilon_H(k) \bowtie 1$$

$$= f(1_H)\varepsilon_H(h) < g, 1_H > \varepsilon_H(k) \bowtie 1$$

$$= \varepsilon_{(H^*)^{cop}}(f)\varepsilon_{(H^*)^{cop}}(g) \bowtie \varepsilon_H(k)\varepsilon_H(k)$$

$$= (\varepsilon_{(H^*)^{cop}} \bowtie \varepsilon_H)(f \bowtie h)(\varepsilon_{(H^*)^{cop}} \bowtie \varepsilon_H)(g \bowtie k),$$

onde em $(\dagger)$ estamos a utilizando o fato de que a multiplicação em $(H^*)^{cop}$ é o produto convolução. Portanto, Δ e $(\varepsilon_{(H^*)^{cop}} \bowtie \varepsilon_H)$ são morfismos de álgebras, e com isso, $D(H)$ é uma biálgebra.

Para finalizarmos a prova que $D(H)$ é uma álgebra de Hopf, falta mostrarmos que a antípoda dada no enunciado é de fato a inversa convolutiva da identidade de $D(H)$ e um antimorfismo de álgebras. Pelo que fizemos antes, basta verificarmos isto para $S(f \bowtie 1)$ e $S(\varepsilon \bowtie h)$. Assim,

$$\begin{aligned}
S(f \bowtie 1) &= (S(1) \rightharpoonup S(f_1)) \bowtie (f_2 \rightharpoonup S(1)) \\
&= 1 \rightharpoonup S(f_1) \bowtie f_2 \rightharpoonup 1 \\
&\overset{2.1.10}{=} S(f_1) \bowtie < f_2, 1 > 1 \\
&= S(f_1) \bowtie \varepsilon(f_2) \\
&= S(f_1 \varepsilon(f_2)) \bowtie 1 \\
&= S(f) \bowtie 1.
\end{aligned}$$

Lembrando que a antípoda de $(H^*)^{cop}$ é dada por S^{-1} e que estamos denotando-a por S. Analogamente, mostramos que $S(\varepsilon \bowtie h) = \varepsilon \bowtie S(h)$.

Com isso, vamos agora mostrar que $\varepsilon_{(H^*)^{cop}} \bowtie \varepsilon_H(f \bowtie 1) = S * id(f \bowtie 1) = S(f_2 \bowtie 1)(f_1 \bowtie 1)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(H^*)^{cop}} \bowtie \varepsilon_H(f \bowtie 1) &= \varepsilon_{(H^*)^{cop}}(f) \bowtie 1 \\
&= S^{-1}(f_2) f_1 \bowtie 1 \\
&= S^{-1}(f_3) f_2 \varepsilon_{(H^*)^{cop}}(f_1) \bowtie 1 \\
&= S^{-1}(f_3) f_2 \bowtie \varepsilon_{(H^*)^{cop}}(f_1) \\
&= S^{-1}(f_3) f_2 \bowtie f_1(1) \\
&= S^{-1}(f_3) f_2 \bowtie < f_1, S^{-1}(1) 1 > 1 \\
&= S^{-1}(f_3)(1 \rightharpoonup f_2) \bowtie (1 \leftharpoonup f_1) 1 \\
&= (S^{-1}(f_2) \bowtie 1)(f_1 \bowtie 1) \\
&= S(f_2 \bowtie 1)(f_1 \bowtie 1).
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que

$$\varepsilon_{(H^*)^{cop}} \bowtie \varepsilon_H(\varepsilon \bowtie h) = S * id(\varepsilon \bowtie h) = S(\varepsilon \bowtie h_1)(\varepsilon \bowtie h_2).$$

Agora, mostraremos que a antípoda é um antimorfismo de álgebras. De fato, pois

$$
\begin{aligned}
S(\varepsilon \bowtie h)S(f \bowtie 1) \;\; = & \\
& = (\varepsilon \bowtie S(h))(S^{-1}(f) \bowtie 1) \\
& = \varepsilon(S(h)_1 \rightharpoonup S^{-1}(f)_2) \bowtie (S(h)_2 \leftharpoonup S^{-1}(f)_1)1 \\
& = S(h_2) \rightharpoonup S^{-1}(f_1) \bowtie S(h_1) \leftharpoonup S^{-1}(f_2) \\
& \overset{3.2.2}{=} < S^{-1}(f_1)S^{-2}(f_3), S(h_4) > S^{-1}(f_2) \bowtie < S^{-1}(f_4), h_1S(h_3) > S(h_2) \\
& = < S^{-1}(S^{-1}(f_3)f_1), S(h_4) > S^{-1}(f_2) \bowtie < S^{-1}(f_4), h_1S(h_3) > S(h_2) \\
& \overset{2.4.1}{=} < S^{-1}(f_3)f_1, S^{-1}(S(h_4)) > S^{-1}(f_2) \bowtie < f_4, S^{-1}(h_1S(h_3)) > S(h_2) \\
& = < S^{-1}(f_3)f_1, h_4) > S^{-1}(f_2) \bowtie < f_4, h_3S^{-1}(h_1)) > S(h_2) \\
& = < S^{-1}(f_3), h_4 >< f_1, h_5 > S^{-1}(f_2) \bowtie < f_4, h_3 >< f_5, S^{-1}(h_1) > S(h_2) \\
& = < f_4, h_3 >< S^{-1}(f_3), h_4 >< f_5, S^{-1}(h_1) > S^{-1}(f_2) \bowtie < f_1, h_5 > S(h_2) \\
& = < f_4S^{-1}(f_3), h_3 >< f_5, S^{-1}(h_1) > S^{-1}(f_2) \bowtie < f_1, h_4 > S(h_2) \\
& = < \varepsilon(f_3)\varepsilon, h_3 >< f_4, S^{-1}(h_1) > S^{-1}(f_2) \bowtie < f_1, h_4 > S(h_2) \\
& = < \varepsilon, h_3 >< \varepsilon, f_3 >< f_4, S^{-1}(h_1) > S^{-1}(f_2) \bowtie < f_1, h_4 > S(h_2) \\
& = < f_3, S^{-1}(h_1) > S^{-1}(f_2) \bowtie < f_1, h_3 > S(h_2) \\
& \overset{2.4.1}{=} < S^{-1}(f_3), h_1 > S^{-1}(f_2) \bowtie < S^{-1}(f_1), S(h_3) > S(h_2) \\
& = < S^{-1}(f_2)_1, h_1 > S^{-1}(f_2)_2 \bowtie < S^{-1}(f_1), S(h_2)_1 > S(h_2)_2 \\
& \overset{2.1.10}{=} < S^{-1}(f_2)_1, h_1 > S^{-1}(f_2)_2 \bowtie S(h_2) \leftharpoonup S^{-1}(f_1) \\
& \overset{2.1.11}{=} S^{-1}(f_2) \leftharpoonup h_1 \bowtie S(h_2) \leftharpoonup S^{-1}(f_1) \\
& \overset{(*)}{=} S(f_2) \leftharpoonup h_1 \bowtie S(h_2) \leftharpoonup S(f_1) \\
& = S(f \bowtie h).
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$ estamos convertendo S^{-1} para $S_{(H^*)^{cop}}$. Portanto, $S((f \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h)) = S(f \bowtie h) = S(\varepsilon \bowtie h)S(f \bowtie 1)$, ou seja, S é um antimorfismo de álgebras.

Por fim, note que S é a inversa convolutiva da identidade de $D(H)$, uma vez que se $f \in (H^*)^{cop}$ e $h \in H$, então

$$\begin{aligned}
S * id(f \bowtie h) &= S(f_2 \bowtie h_1)f_1 \bowtie h_2 \\
&= S((f_2 \bowtie h_1)(\varepsilon \bowtie h_1))(f_1 \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h_2) \\
&= S(\varepsilon \bowtie h_1)S(f_2 \bowtie h_1)(f_1 \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h_2) \\
&= (\varepsilon \bowtie S(h_1))(S^{-1}(f_2) \bowtie 1)(f_1 \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h_2) \\
&= (\varepsilon \bowtie S(h_1))(S^{-1}(f_2)f_1 \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h_2) \\
&= (\varepsilon \bowtie S(h_1))(\varepsilon(f) \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h_2) \\
&= \varepsilon(f)(\varepsilon \bowtie S(h_1)h_2) \\
&= \varepsilon(f) \bowtie \varepsilon(h) \\
&= \varepsilon_{D(H)}(f \bowtie h).
\end{aligned}$$

Portanto, $D(H)$ é uma álgebra de Hopf de dimensão finita. ■

Após termos mostrado que o Duplo de Drinfeld é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, nosso próximo passo será verificar que a mesma é quase triangular. Mas para isso, vamos dar uma descrição mais simples da multiplicação em $D(H)$, da seguinte forma:

Lema 3.2.8. *Seja H uma álgbra de Hopf de dimensão finita. Com as notações anteriores, para todos $f, g \in (H^*)^{cop}$ e $h, k \in H$, temos:*

(i) $h_1 \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup f_2 \otimes h_2 \leftharpoonup\!\!\!\leftharpoonup f_1 = (h_1 \rightharpoonup f \leftharpoonup S^{-1}(h_3)) \otimes h_2 = f_2 \otimes (S^{-1}(f_1) \rightharpoonup h \leftharpoonup f_3)$.

(ii) $(f \bowtie h)(g \bowtie k) = f(h_1 \rightharpoonup g \leftharpoonup S^{-1}(h_3)) \bowtie h_2 k$.

(iii) $(f \bowtie h)(g \bowtie k) = f g_2 \bowtie (S^{-1}(g_1) \rightharpoonup h \leftharpoonup g_3)k$.

Demonstração: (i) Sejam $h \in H$, $f \in (H^*)^{cop}$. Para mostrar a primeira igualdade, vamos aplicá-la em $l \otimes id$, para qualquer $l \in H$. Assim,

$$\begin{aligned}
< h_1 \rightharpoonup\!\!\!\!\rightharpoonup f_2 \otimes h_2 \leftharpoonup\!\!\!\!\leftharpoonup f_1, l \otimes id > &= \; < h_1 \rightharpoonup\!\!\!\!\rightharpoonup f_2, l > \otimes h_2 \leftharpoonup\!\!\!\!\leftharpoonup f_1 \\
&\overset{(3.10)}{=} 1 \otimes < f_2, S^{-1} l h_1 > h_3 \leftharpoonup\!\!\!\!\leftharpoonup f_1 \\
&\overset{(ii),\, 3.2.2}{=} 1 \otimes < f_2, S^{-1} l h_1 >< f_1, S^{-1}(h_5) h_3 > h_4 \\
&= 1 \otimes < f, S^{-1}(h_5) h_3 S^{-1}(h_2) l h_1 > h_4 \\
&= 1 \otimes < f, S^{-1}(h_4) \varepsilon(h_2) l h_1 > h_3 \\
&= 1 \otimes < f, S^{-1}(h_3) l h_1 > h_2 \\
&= \; < f, S^{-1}(h_3) l h_1 > \otimes h_2 \\
&= \; < h_1 \rightharpoonup f \leftharpoonup S^{-1}(h_3), l > \otimes h_2 \\
&= \; < h_1 \rightharpoonup f \leftharpoonup S^{-1}(h_3) \otimes h_2, l \otimes id > .
\end{aligned}$$

Portanto temos que $h_1 \rightharpoonup\!\!\!\!\rightharpoonup f_2 \otimes h_2 \leftharpoonup\!\!\!\!\leftharpoonup f_1 = h_1 \rightharpoonup f \leftharpoonup S^{-1}(h_3) \otimes h_2$. A segunda igualdade segue direto da primeira, pois

$$\begin{aligned}
< f, S^{-1}(h_3) l h_1 > \otimes h_2 &= 1 \otimes < f_1, S^{-1}(h_3) >< f_2, l >< f_3, h_1 > h_2 \\
&= \; < f_2, l > \otimes < f_1, S^{-1}(h_3) >< f_3, h_1 > h_2 \\
&\overset{(*)}{=} \; < p_2, l > \otimes (S^{-1}(f_1) \rightharpoonup h \leftharpoonup f_3), \qquad \forall\, l \in H.
\end{aligned}$$

onde a igualdade $(*)$ segue do fato que

$$\begin{aligned}
S^{-1}(f_1) \rightharpoonup h \leftharpoonup f_3 &\overset{2.1.10}{=} S^{-1}(f_1) \rightharpoonup < f_3, h_1 > h_2 \\
&= \; < f_3, h_1 > S^{-1}(f_1) \rightharpoonup h_2 \\
&\overset{2.1.10}{=} \; < f_3, h_1 >< S^{-1}(f_1), h_3 > h_2 \\
&\overset{2.4.1}{=} \; < f_3, h_1 >< f_1, S^{-1}(h_3) > h_2.
\end{aligned}$$

A igualdade dada em (ii) segue diretamente do item anterior, pois se $f, g \in$

$(H^*)^{cop}$ e $h, k \in H$, temos

$$\begin{aligned}(f \bowtie h)(g \bowtie k) &= f(h_1 \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup g_2) \bowtie (h_2 \leftharpoonup\!\!\!\leftharpoonup g_1)k \\ &\overset{(i)}{=} f(h_1 \rightharpoonup g \leftharpoonup S^{-1}(h_3)) \bowtie h_2 k.\end{aligned}$$

(iii) Analogamente ao anterior temos que,

$$\begin{aligned}(f \bowtie h)(g \bowtie k) &= f(h_1 \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup g_2) \bowtie (h_2 \leftharpoonup\!\!\!\leftharpoonup g_1)k \\ &\overset{(i)}{=} fg_2 \bowtie (S^{-1}(g_1) \rightharpoonup h \leftharpoonup g_3)k.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposição 3.2.9. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então, com as notações anteriores, $D(H)$ é uma álgebra de Hopf quase triangular.*

Demonstração: Precisamos construir um elemento $R \in D(H) \otimes D(H)$ invertível, que satisfaça as equações (3.1), (3.3) e (3.4). Para tanto consideremos $\{h_i\}$ uma base de H, $\{h_i^*\}$ a base dual de H^* e seja $R = \sum_i \varepsilon \bowtie h_i \otimes h_i^* \bowtie 1$. Note que R não depende da base $\{h_i\}$. De fato, consideremos o isomorfismo $\varphi : H \otimes H^* \simeq End(H)$ dado em 2.2.8. Então segue que $\varphi(\sum_i h_i \otimes h_i^*)(k) = \sum_i < h_i^*, k > h_i = k = id(k)$, para todo $k \in H$, ou seja, chamando $c = \sum_i h_i \otimes h_i^*$ temos que c é o correspondente de id_H no isomorfismo acima, para qualque escolha de $\{h_i\}$. Portanto podemos escrever $R = \varepsilon \otimes c \otimes 1$.

Agora para mostrarmos que R é invertível, precisamos verificar que dado uma base $\{h_i\}$ de H e $\{h_i^*\}$ sua base dual, temos que $\sum_{i,j} h_i S(h_j) \otimes h_i^* h_j^* = 1 \otimes \varepsilon$. Para isso vamos avaliá-los em $id \otimes k$, para todo $k \in H$. Assim,

$$\begin{aligned}< \sum_{i,j} h_i S(h_j) \otimes h_i^* h_j^*, id \otimes k > &= \sum_{i,j} h_i S(h_j) \otimes < h_i^* h_j^*, k > \\ &= \sum_{i,j} h_i S(h_j) < h_i^*, k_1 >< h_j^*, k_2 > \otimes 1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i < h_i^*, k_1 > h_1 \sum_j < h_j^*, k_2 > S(h_j) \otimes 1 \\
&= k_1 S(\sum_j < h_j^*, k_2 > h_j) \otimes 1 \\
&= k_1 S(k_2) \otimes 1 \\
&= \varepsilon(k) 1 \otimes 1 \\
&= 1 \otimes \varepsilon(k) \\
&= < 1 \otimes \varepsilon, id \otimes k), \qquad \forall\, k \in H.
\end{aligned}
$$

Mostrando assim, que de fato,

$$\sum_{i,j} h_i S(h_j) \otimes h_i^* h_j^* = 1 \otimes \varepsilon. \tag{3.12}$$

Seja agora $T = \sum_i S(\varepsilon \bowtie h_i) \otimes h_i^* \bowtie 1 = \sum_i \varepsilon \bowtie S(h_i) \otimes h_i^* \bowtie 1$. Então

$$
\begin{aligned}
RT &= \sum_{i,j} (\varepsilon h_i \otimes h_i^* \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie S(h_j) \otimes h_j^* \bowtie 1) \\
&= \sum_{i,j} (\varepsilon \bowtie h_i)(\varepsilon \bowtie S(h_j)) \otimes (h_i^* \bowtie 1)(h_j^* \bowtie 1) \\
&\overset{(iii),(iv),\,3.2.6}{=} \sum_{i,j} \varepsilon \bowtie h_i S(h_j) \otimes h_i^* h_j^* \bowtie 1 \\
&\overset{(3.12)}{=} \varepsilon \bowtie 1 \otimes \varepsilon \bowtie 1 \\
&= 1_{D(H)} \otimes 1_{D(H)} \\
&= 1_{D(H)\otimes D(H)}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $TR = 1_{D(H)\otimes D(H)}$ e portanto R é invertível com $R^{-1} = T$.

Agora passamos a verificação da cocomutatividade, ou seja, que $\tau\Delta(f \bowtie h) = R\Delta(f \bowtie h)R^{-1}$, $\forall\ f \bowtie h \in D(H)$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
(\tau\Delta(f \bowtie h))R &= (f_1 \bowtie h_2 \otimes f_2 \bowtie h_1)(\varepsilon \bowtie h_i \otimes h_i^* \bowtie 1) \\
&= (f_1 \bowtie h_2)(\varepsilon \bowtie h_i) \otimes (f_2 \bowtie h_1)(h_i^* \bowtie 1)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\overset{3.2.8}{=} f_1\varepsilon \bowtie (S^{-1}(\varepsilon) \rightharpoonup h_2 \leftharpoonup \varepsilon)h_i \otimes f_2h^*_{i2} \bowtie (S^{-1}(h^*_{i1}) \rightharpoonup h_1 \leftharpoonup h^*_{i3})1\\
&= h_1 \bowtie < \varepsilon, h_4 > h_3 \leftharpoonup \varepsilon h_i \otimes f_2h^*_{i2} \bowtie < S^{-1}(h^*_{i1}), h_2 > h_1 \leftharpoonup h^*_{i3}\\
&= f_1 \bowtie < \varepsilon, h_6 >< \varepsilon, h_4 > h_5h_i \otimes f_2h^*_{i2} \bowtie < S^{-1}(h^*_{i1}), h_3 >< h^*_{i3}, h_1 > h_2\\
&= f_1 \bowtie h_4h_i \otimes f_2h^*_{i2} \bowtie < h^*_{i1}, S^{-1}(h_3) >< h_{i3}, h_1 > h_2.
\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
R\Delta(f \bowtie h) &= (\varepsilon \bowtie h_i \otimes h^*_i \bowtie 1)(f_2 \bowtie h_1 \otimes f_1 \bowtie h_2)\\
&= (\varepsilon \bowtie h_i)(f_2 \bowtie h_1) \otimes (h^*_i \bowtie 1)(f_1 \bowtie h_2)\\
&\overset{3.2.8}{=} \varepsilon f_5 \bowtie (S^{-1}(f_4) \rightharpoonup h_i \leftharpoonup f_6)h_1 \otimes h^*_i f_2 \bowtie (S^{-1}(f_1) \rightharpoonup 1 \leftharpoonup f_3)h_2\\
&= f_5 \bowtie < S^{-1}(f_4), h_{i3} >< f_6, h_{i1} > h_{i2}h_1 \otimes h^*_i f_2 \bowtie < S^{-1}(f_1), 1 >< f_3, 1 > h_2\\
&= f_5 \bowtie < S^{-1}(f_4), h_{i3} >< f_6, h_{i1} > h_{i2}h_1 \otimes h^*_i f_2 \bowtie < \varepsilon, f_1 >< \varepsilon, f_3 > h_2\\
&= f_3 \bowtie < S^{-1}(f_2), h_{i3} >< f_4, h_{i1} > h_{i2}h_1 \otimes h^*_i f_1 \bowtie h_2.
\end{aligned}$$

Para mostrar que as equações acima de fato coincidem, vamos aplicar ambas em $(a \otimes id \otimes b \otimes id)$, para todos $a, b \in H$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
&< f_1 \bowtie h_4h_i \otimes f_2h^*_{i2} \bowtie < h^*_{i1}, S^{-1}(h_3) >< h_{i3}, h_1 > h_2, a \otimes id \otimes b \otimes id > =\\
&=< f_1, a > \bowtie h_4h_i \otimes < f_2, b_1 >< h^*_{i2}, b_2 >< h^*_{i1}, S^{-1}(h_3) >< h^*_{i3}, h_1 > \bowtie h_2\\
&=< f, ab_1 > \bowtie h_4h_i \otimes < h^*_i, S^{-1}(h_3)b_2h_1 > \bowtie h_2\\
&=< f, ab_1 > \bowtie h_4 < h^*_i, S^{-1}(h_3)b_2h_1 > h_i \otimes 1 \bowtie h_2\\
&\overset{(*)}{=}< f, ab_1 > \bowtie h_4S^{-1}(h_3)b_2h_1 \otimes 1 \bowtie h_2\\
&=< f, ab_1 > \bowtie \varepsilon(h_3)b_2h_1 \otimes 1 \bowtie h_2\\
&=< f, ab_1 > \bowtie b_2h_1 \otimes 1 \bowtie h_2,
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ estamos usando o fato que $c = \sum_i h^*_i(c)h_i$, para qualquer $c \in H$, onde $\{h_i\}$ é uma base de H e $\{h^*_i\}$ sua base dual. Antes de calcularmos o outro lado, precisamos aplicar $(\Delta\otimes id)\Delta$ em c dado acima. Logo,

$$\begin{aligned} c=\sum_i h_i^*(c)h_i &\Leftrightarrow (\Delta\otimes id)\Delta(c)=(\Delta\otimes id)\Delta(\sum_i h_i^*(c)h_i)\\ &\Leftrightarrow (\Delta\otimes id)(c_1\otimes c_2)=\sum_i h_i^*(c)(\Delta\otimes id)(h_{i1}\otimes h_{i2})\\ &\Leftrightarrow c_1\otimes c_2\otimes c_3=\sum_i h_i^*(c)h_{i1}\otimes h_{12}\otimes h_{13}.\end{aligned}$$

Portanto, acabamos de mostrar que, para qualquer $c\in H$, temos

$$c_1\otimes c_2\otimes c_3=\sum_i h_i^*(c)h_{i1}\otimes h_{12}\otimes h_{13}. \tag{3.13}$$

E, por fim, temos que

$$\begin{aligned} < f_3\bowtie< S^{-1}(f_2),h_{i3}>< f_4,h_{i1}> h_{i2}h_1\otimes h_i^*f_1\bowtie h_2, a\otimes id\otimes b\otimes id> &= \\ &=< f_3,a>\bowtie< f_2,S^{-1}(h_{i3})>< f_4,h_{i1}> h_{i2}h_1\otimes < h_i^*,b_1>< f_1,b_2>\bowtie h_2\\ &\overset{(3.13)}{=}< f_3,a>\bowtie< f_2,S^{-1}(b_3)>< f_4,b_1> b_2h_1\otimes < f_1,b_4>\bowtie h_2\\ &=< f,b_4S^{-1}(b_3)ab_1>\bowtie b_2h_1\otimes 1\bowtie h_2\\ &=< f,\varepsilon(b_3)ab_1>\bowtie b_2h_1\otimes 1\bowtie h_2\\ &=< f,ab_1>\bowtie b_2h_1\otimes 1\bowtie h_2.\end{aligned}$$

Portanto, $(\tau\Delta(f\bowtie h))R=R\Delta(f\bowtie h)$, $\forall\ f\bowtie h\in D(H)$.

Por fim mostremos (3.3) e (3.4). Por um lado, temos

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes id)(R) &= (\Delta\otimes id)(\sum_i \varepsilon\bowtie h_i\otimes h_i^*\bowtie 1)\\ &= \sum_i \Delta(\varepsilon\bowtie h_i)\otimes h_i^*\bowtie 1\\ &= \sum_i \varepsilon\bowtie (h_i)_1\otimes \varepsilon(h_i)_2\otimes h_i^*\bowtie 1.\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo

$$R^{13}=\sum_i \varepsilon\bowtie h_i\otimes\varepsilon\bowtie 1\otimes h_i^*\bowtie 1$$

e

$$R^{23} = \sum_j \varepsilon \bowtie 1 \otimes \varepsilon \bowtie h_j \otimes h_j^* \bowtie 1$$

temos que

$$\begin{aligned}
R^{13}R^{23} &= \sum_{i,j} (\varepsilon \bowtie h_i \otimes \varepsilon \bowtie 1 \otimes h_i^* \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie 1 \otimes \varepsilon \bowtie h_j \otimes h_j^* \bowtie 1) \\
&= \sum_{i,j} (\varepsilon \bowtie h_i)(\varepsilon \bowtie 1) \otimes (\varepsilon \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h_j) \otimes (h_i^* \bowtie 1)(h_j^* \bowtie 1) \\
&\overset{(iii),(iv),\,3.2.6}{=} \sum_{i,j} \varepsilon \bowtie h_i \otimes \varepsilon \bowtie h_j \otimes h_i^* h_j^* \bowtie 1.
\end{aligned}$$

Para verificar que as duas expressões coincidem, basta mostrar que

$$\sum_i (h_i)_1 \otimes (h_i)_2 \otimes h_i^* = \sum_{i,j} h_i \otimes h_j \otimes h_i^* h_j^*.$$

Para tanto, consideremos $f \otimes g \otimes id$, onde $f, g \in (H^*)^{cop}$ são tomadas arbitrariamente. Então como

$$\begin{aligned}
\sum_i < f \otimes g \otimes id, (h_i)_1 \otimes (h_i)_2 \otimes h_i^* > &= \sum_{i,j} < f, (h_i)_1 > \otimes < g, (h_i)_2 > \otimes h_i^* \\
&= 1 \otimes 1 \otimes \sum_i < fg, h_i > h_i^* \\
&= 1 \otimes 1 \otimes fg \\
&= 1 \otimes 1 \otimes \sum_i < f, h_i > h_i^* \sum_j < g, h_j > h_j^* \\
&= \sum_{i,j} < f, h_i > \otimes < g, h_j > \otimes h_i^* h_j^* \\
&= \sum_{i,j} < f \otimes g \otimes id, h_i \otimes h_j \otimes h_i^* h_j^* >
\end{aligned}$$

a igualdade desejada se verifica. Concluimos assim que $(\Delta \otimes id)(R) = R^{13}R^{23}$. Analogamente verificamos que $(id \otimes \Delta)(R) = R^{13}R^{23}$. Portanto, $D(H)$ é quase triangular. ■

Agora vamos apresentar o Duplo de Drinfeld de duas álgebras de Hopf conhecidas.

Exemplo 3.2.10. Pelos Exemplos 1.1.9 e 1.1.10, conhecemos as estruturas de $\Bbbk G$ e $(\Bbbk G)^*$ como álgebras de Hopf. Com isto vamos dar a estrutura da álgebra de Hopf $D(\Bbbk G)$.

Pelo item (ii) do Lema 3.2.8, para todos $p_g, p_h \in ((\Bbbk G)^*)^{cop}$ e $l, s \in \Bbbk G$, temos

$$\begin{aligned}
(p_g \bowtie l)(p_h \bowtie s) &= p_g(l_1 \rightharpoonup p_h \leftharpoonup S^{-1}(l_3)) \bowtie l_2 s \\
&= p_g(l \rightharpoonup p_h \leftharpoonup l^{-1}) \bowtie ls \\
&\overset{2.1.11}{=} p_g(< (p_h)_2, l > (p_h)_1 \leftharpoonup l^{-1}) \bowtie ls \\
&= p_g(\sum_u < p_u, l > p_{hu^{-1}}) \leftharpoonup l^{-1} \bowtie ls \\
&= p_g(\sum_u \delta_{u,l} p_{hu^{-1}} \leftharpoonup l^{-1}) \bowtie ls \\
&\overset{u=l}{=} p_g(p_{hl^{-1}} \leftharpoonup l^{-1}) \bowtie ls \\
&\overset{2.1.11}{=} p_g(< (p_{hl^{-1}})_1, l^{-1} > (p_{hl^{-1}})_2) \bowtie ls \\
&= p_g(\sum_u < p_u, l^{-1} > p_{u^{-1}hl^{-1}}) \bowtie ls \\
&= p_g(\sum_u \delta_{u,l^{-1}} p_{u^{-1}hl^{-1}}) \bowtie ls \\
&\overset{u^{-1}=l}{=} p_g(p_{lhl^{-1}}) \bowtie ls.
\end{aligned}$$

Portanto, a multiplicação é dada por $(p_g \bowtie l)(p_h \bowtie s) = p_g(p_{lhl^{-1}}) \bowtie ls$.

A unidade é dada por $u_{D(\Bbbk G)} = 1_{(\Bbbk G)^*} \bowtie 1_{\Bbbk G} = \sum_g p_g \bowtie 1_G$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(p_g \bowtie l) &= ((p_g)_2 \bowtie l_1) \otimes ((p_g)_1 \bowtie l_2) \\
&= \sum_h (p_h \bowtie l) \otimes (p_{gh^{-1}} \bowtie l).
\end{aligned}$$

Portanto, a comultiplicação é dada por $\Delta(p_g \bowtie l) = \sum_h (p_h \bowtie l) \otimes (p_{gh^{-1}} \bowtie l)$. Para obter a counidade, consideremos $p_g \in ((\Bbbk G)^*)^{cop}$ e $h \in \Bbbk G$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{D(\Bbbk G)}(p_g \bowtie l) &= \varepsilon_{((\Bbbk G)^*)^{cop}}(p_g) \bowtie \varepsilon_{\Bbbk G}(l) \\
&= \delta_{1_G,g} \bowtie 1_{\Bbbk}.
\end{aligned}$$

Por fim, a antípoda pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
S_{D(\Bbbk G)}(p_g \bowtie l) &= S(l) \rightharpoonup S(p_{gh^{-1}}) \bowtie p_h \rightharpoonup S(l) \\
&= l^{-1} \rightharpoonup p_{hg^{-1}} \bowtie p_h \rightharpoonup l^{-1} \\
&\overset{2.1.11}{=} \sum_u < p_u, l^{-1} > p_{hg^{-1}u^{-1}} \bowtie p_h \rightharpoonup l^{-1} \\
&\overset{2.1.10}{=} \sum_u < p_u, l^{-1} > p_{hg^{-1}u^{-1}} \bowtie < p_h, l^{-1} > l^{-1} \\
&= \sum_u \delta_{u,l^{-1}} p_{hg^{-1}u^{-1}} \bowtie \delta_{h,l^{-1}} l^{-1} \\
&\overset{u=l^{-1}=h}{=} p_{l^{-1}g^{-1}l} \bowtie h.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.11. Suponha $n > 1$ e $q \in \Bbbk$ uma raiz primitiva n-ésima da unidade. Consideremos a álgebra de Hopf T_q dada em 1.1.12, com as estruturas:

$$g^n = 1,\ x^n = 0 \text{ e } xg = qgx$$
$$\Delta(g) = g \otimes g,\ \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x$$
$$S(g) = g^{-1},\ S(x) = -xg^{-1}$$

Agora definimos a álgebra de Hopf $H_n(p,q)$, onde $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \Bbbk$, dada por:

$$ba = qab,\ db = qbd$$
$$ca = qac,\ dc = qcd$$
$$bc = cb,\ da - qad = p(1 - bc)$$
$$\Delta(a) = a \otimes b + 1 \otimes a,\ \Delta(b) = b \otimes b$$
$$\Delta(c) = c \otimes c,\ \Delta(d) = d \otimes c + 1 \otimes d$$

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 0,\ \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 1$$
$$S(a) = -ab^{-1},\ S(b) = b^{-1}$$
$$S(c) = c^{-1},\ S(d) = -dc^{-1}$$

Nós vamos considerar o caso quando $p = 1$ e q é uma raiz primitiva da unidade. Logo, $H_n(1, q)$ possui as relações de álgebra dadas para $H_n(p, q)$, além das seguintes relações:

$$a^n = 0,\ b^n = 1,\ c^n = 1 \text{ e } d^n = 0.$$

Nosso objetivo será mostrar que $D(T_q) = ((T_q)^*)^{cop} \bowtie T_q \simeq H_n(1, q)$. Para não alongar demasiadamente nosso texto, daremos as idéias da demonstração desse isomorfismo. O leitor interessado, poderá consultar [4] e [3]. Vamos precisar dos seguintes resultados para mostrar tal isomorfismo:

(i) $T_q \simeq (T_q)^*$. Para mostrar esse isomorfismo precisamos descrever o coproduto de T_q. Observe que como espaço vetorial a $dim(T_q) = n^2$ e $\{g^i x^j | 0 \leq i, j \leq n\}$ é uma base para T_q. Sejam $(0)_q = 0$ e $(0)_q! = 1$. Para $j > 0$, sejam $(j)_q = 1 + ... + q^{j-1} = \dfrac{(1-q^j)}{1-q}$ e $(j)_q! = (j)_q(j-1)_q...(1)_q$. Observe que $(j)_q \neq 0$ para $0 \leq j \leq n$.

O coproduto de T_q é então dado por:

$$\Delta(g^i x^j) = \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l}_q g^i x^{j-l} \otimes g^{i+(j-l)} x^l$$

para todos $0 \leq i, j \leq n$, onde $\dbinom{j}{l}_q = \dfrac{(j)_q!}{(j-l)_q!(l)_q!}$, para todo $0 \leq l \leq j$, e estamos convencionando $\binom{j}{l}_q = 0$, quando $l < 0$ e $j < l$.

Sejam $G, X \in (T_q)^* : T_q \longrightarrow \Bbbk$ funcionais lineares dados por

$$G(g^i x^j) = q^i \delta_{j,0} \text{ e } X(g^i x^j) = \delta_{j,1},\ 0 \leq i, j \leq n.$$

Vamos mostrar que $\phi : T_q \xrightarrow{\sim} (T_q)^*$, dado por $g \longmapsto G$ e $x \longmapsto X$.

Note que estamos trabalhando em dimensão finita e assim, o isomorfismo linear acima é claro. Para mostrar que ϕ é um homomorfismo de álgebra vamos verificar que $X^n = 0$, $G^n = 1$ e $XG = qGX$.

Seja $\{g^i x^j\}$ base de T_q. Lembremos que a multiplicação em $(T_q)^*$ é o produto convolução, logo

$$\begin{aligned} X^2(g^i x^j) &= X * X(g^i x^j) \\ &= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l}_q X(g^i x^{j-l}) X(g^{i+(j-l)} x^l) \\ &= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l}_q \delta_{j-l,1}\delta_{l,1} \\ &\overset{l=1,\, j=2}{=} \binom{2}{1}_q \\ &= (2)_q!. \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma, ao calcularmos n vezes o produto de X, vamos obter que $j = n$. Com isso, na combinação $\binom{n}{l}_q$ temos o fator $(n)_q! = (n)_q(n-1)_q ... (1)_q$, e nele, $(n)_q = \dfrac{(1-q^n)}{1-q} = 0$, pois $q^n = 1$. Logo $\binom{n}{l}_q = 0$. Portanto, $X^n(g^i x^j) = 0$, $\forall\ 0 \leq i, j \leq n$.

Agora, por definição, $G(g^i x^j) = q^i \delta_{j,0}$, logo

$$G^n(g^i x^j) = q^{in}\delta_{j,0} = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$$

e segue que

$$\begin{aligned} XG(g^i x^j) &= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l}_q X(g^i x^{j-l}) G(g^{i+(j-l)} x^l) \\ &= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l}_q \delta_{j-l,1} q^{i+(j-l)} \delta_{l,0} \\ &\overset{l=0,\, j=1}{=} q^{i+1}. \end{aligned}$$

e, por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
GX(g^i x^j) &= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l}_q G(g^i x^{j-l}) X(g^{i+(j-l)} x_l) \\
&= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l}_q q^i \delta_{j-l,0} \delta_{l,1} \\
&\overset{l=1,\, j=1}{=} q^i.
\end{aligned}
$$

Portanto, $XG = q^{i+1} = qq^i = qGX$, ou seja, $XG = qGX$. Logo, temos que ϕ é um homomorfismo de álgebras. Da mesma forma mostra-se que ϕ é um homomorfismo de coálgebras, apenas lembrando que, a comultiplicação no dual H^* de uma álgebra de Hopf H é dada por: $\Delta^*(f) = \sum_{i,j} f(e_i e_j) e_i^* \otimes e_j^*$, onde $f \in H^*$, $\{e_i\}$ é uma base de H e $\{e_i^*\}$ sua base dual. Por fim, o isomorfismo linear é claro, pois $dim(T_q) = n^2 = dim((T_q)^*)$. Para maiores detalhes o leitor pode consultar [27] e [24].

(ii) $(T_q)^{op} \simeq ((T_q)^{op})^*$. Pela Observação 1.1.25, sabemos que em $(T_q)^{op}$ a multiplicação é dada por $m^{op} = m \circ \tau$. Com isso, similarmente ao item *(i)* verifica-se esse isomorfismo. Logo a estrutura de $((T_q)^{op})^*$ é dada por

$$
\begin{gathered}
G^n = 1,\ X^n = 0 \text{ e } GX = qXG \\
\Delta(G) = G \otimes G,\ \Delta(X) = X \otimes G + 1 \otimes X \\
\varepsilon(G) = 1,\ \varepsilon(X) = 0 \\
S(G) = G^{-1},\ S(X) = -XG^{-1}.
\end{gathered}
$$

(iii) $((T_q)^{op})^* \simeq ((T_q)^*)^{cop}$. Novamente pela Observação 1.1.25, segue que dada uma álgebra de Hopf H, então $H^{op} = (H, m^{op}, u, \Delta, \varepsilon, S^{-1})$ e $H^{cop} = (H, m, u, \Delta^{cop}, \varepsilon, S^{-1})$ são também álgebras de Hopf. Ao dualizarmos H^{op}, a comultiplicação Δ, dessa nova álgebra, é dada por Δ^{cop}. Procedendo com um raciocício similar, para as outras estruturas, temos que $(H^{op})^* \simeq (H^*)^{cop}$. Para maiores detalhes, ver [5] e [15].

(iv) $((T_q)^*)^{cop} \bowtie T_q \simeq ((T_q)^{op})^* \bowtie T_q$. Como T_q possui dimensão finita, esse isomorfismo segue diretamente do item anterior.

Finalmente estamos em condições de provar o nosso isomorfismo inicial, ou seja, $D(T_q) = ((T_q)^*)^{cop} \bowtie T_q \overset{(iv)}{\simeq} ((T_q)^{op})^* \bowtie T_q \simeq H_n(1,q)$.

Sejam $A = X \bowtie 1$, $B = G \bowtie 1$, $C = \varepsilon \bowtie g$ e $D = \varepsilon \bowtie x$. Então consideremos o seguinte isomorfismo:

$$
\begin{aligned}
\varphi : ((T_q)^{op})^* \bowtie T_q &\longrightarrow H_n(1,q)\\
A &\longmapsto a\\
B &\longmapsto b\\
C &\longmapsto c\\
D &\longmapsto d
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que (A, B, C, D) satisfazem as relações de álgebra de $H_n(1,q)$. De fato, claramente temos que $A^n = 0$, $B^n = 1$, $C^n = 1$, $D^n = 0$. *Além disso, temos:*

$$BA = (G \bowtie 1)(X \bowtie 1) = (GX \bowtie 1) = qXG \bowtie 1 = q(X \bowtie 1)(G \bowtie 1) = qAB.$$

$$DC = (\varepsilon \bowtie x)(\varepsilon \bowtie g) = (\varepsilon \bowtie xg) = (\varepsilon \bowtie qgx) = q(\varepsilon \bowtie gx) = qCD.$$

$$
\begin{aligned}
CB = (\varepsilon \bowtie g)(G \bowtie 1) &= \varepsilon(g \rightharpoondown G) \bowtie (g \leftharpoondown G)1\\
&= < GS^{-1}, g > G \bowtie < G, S^{-1}(g)g > g\\
&= < \varepsilon(G), g >< G, \varepsilon(g) > G \bowtie g\\
&= G(g)G \bowtie g\\
&= G \bowtie g\\
&= (G \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie g)\\
&= BC.
\end{aligned}
$$

Analogamente, podemos verificar as demais relações de álgebra. O homomorfismo de coálgebras também é fácil de mostrar, pois as comultiplicações são essencialmente as mesmas. E finalmente, o isomorfismo linear vem do fato de $dim(D(T_q)) = n^4 = dim(H_n(1,q))$. Portanto, φ é um isomorfismo de álgebras de Hopf, ou seja, $D(T_q) \simeq H_n(1,q)$.

O último resultado deste capítulo dará uma caracterização da semissimplicidade do Duplo de Dinfeld. Para isso apresentaremos algumas propriedades que nos serão úteis para esta finalidade. Algumas demonstrações estão simplificadas, para evitar estender demaseadamente nosso texto. A referência para estes resultados é o artigo de David Radford [23].

Proposição 3.2.12. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $\phi : H \longrightarrow H^*$ o isomorfismo do Corolário 2.2.5, $d = \phi^{-1}(\varepsilon)$ e $g = \phi(1)$. Então:*

(i) $d \in I_l(H)$ e $g \in I_r(H^*)$.

(ii) $\phi(x) = x \rightharpoondown g$, para $x \in H$ e $\phi^{-1}(f) = d \leftharpoonup f$, para $f \in H^*$. Assim $(H^*, \rightharpoondown)$ é um H-módulo livre à esquerda com base $\{g\}$ e $(H, \leftharpoonup)$ é um H^*-módulo livre à direita com base $\{d\}$.

(iii) $d \leftharpoonup (x \rightharpoondown f) = x$, para todo $x \in H$, e $(d \leftharpoonup f) \rightharpoondown g = f$, para todo $f \in H^*$.

(iv) $g(d) = 1 = g(S(d))$.

(v) $S^{-1}(x) = d \leftharpoonup (g \leftharpoonup x) = g(xd_1)d_2$, para todo $x \in H$.

(vi) Seja $d' \in I_r(H)$ tal que $g(d') = 1$. Então $S(x) = d' \leftharpoonup (x \rightharpoonup g) = g(d_1x)d_2$, para todo $x \in H^{op}$.

Demonstração: (i) Por hipótese $d = \phi^{-1}(\varepsilon)$, agora note que

$$\begin{aligned} \phi(xd) &= x \rightharpoondown \phi(d) \\ &= x \rightharpoondown \varepsilon \\ &= \varepsilon(x)\varepsilon \\ &= \phi(\varepsilon(x)d), \end{aligned}$$

para todo $x \in H$. Observamos que na terceira igualdade estamos usando que $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Por ϕ ser isomorfismo segue que $xd = \varepsilon(x)d$, para todo $x \in H$. Similarmente, mostramos que $g \in I_r(H^*)$.

(ii) A prova desse item se resume basicamente a observar que:

$$\phi(x) = \phi(x1) = a \rightharpoondown \phi(1) = x \rightharpoondown g, \text{ para todo } x \in H \text{ e}$$

$$\phi^{-1}(f) = \phi^{-1}(\varepsilon f) = \phi^{-1}(\varepsilon) \leftharpoonup f = d \leftharpoonup f, \text{ para todo } f \in H^*.$$

(iii) Utilizando o item anterior temos que

$$x = \phi^{-1}(\phi(x)) = \phi^{-1}(x \rightharpoondown g) = d \leftharpoonup (a \rightharpoondown g) \text{ e}$$

$$f = \phi(\phi^{-1}(f)) = \phi(d \leftharpoonup f) = (d \leftharpoonup f) \rightharpoondown g.$$

(iv) Aplicando ε em ambos os lados da primeira igualdade do item anterior quando $x = 1$, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon(d \leftharpoonup (x \rightharpoondown g)) = \varepsilon(x) \quad & \overset{x=1}{\Rightarrow} \quad \varepsilon(d \leftharpoonup g) = 1 \\ & \overset{2.1.10}{\Rightarrow} \quad \varepsilon(g(d_1)d_2) = 1 \\ & \Rightarrow \quad g(d_1\varepsilon(d_2)) = 1 \\ & \Rightarrow \quad g(d) = 1. \end{aligned}$$

Analogamente, aplicando os dois lados da segunda equação do item anterior em 1, quando $f = \varepsilon$, temos $g(S(d)) = 1$.

(v) Pelo exemplo 2.1.10 segue que $S^{-1}(x) \rightharpoondown g = g \leftharpoonup x$ para todo $x \in H$. Logo pelo item (iii) temos que $S^{-1}(x) = d \leftharpoonup (g \leftharpoonup x) = g(xd_1)d_2$ para todo $x \in H$.

(vi) Segue direto o item anterior. ■

O seguinte resultado é uma consequência direta do anterior:

Corolário 3.2.13. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita.*

(i) Suponha que $0 \neq d \in I_l(H)$ ou $0 \neq d \in I_r(H)$, então $(H, \leftharpoonup)$ e $(H, \rightharpoonup)$ são H^*-módulos livre com base $\{d\}$.

(ii) Suponha que $0 \neq g \in I_r(H^*)$ ou $0 \neq g \in I_r(H^*)$, então $(H^*, \leftharpoonup)$ e $(H^*, \rightharpoonup)$ são H-módulos livres com base $\{g\}$.

Proposição 3.2.14. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Suponha que $d \in I_l(H)$ e $g \in I_r(H^*)$. Seja $a \in G(H)$ e $\alpha \in G(H^*)$. Então*

(i) $g(xy) = g(S^2(y \leftharpoonup \alpha)x)$, para $x, y \in H$.

(ii) $g_2 \otimes g_1 = \alpha(g_1 \circ S^2) \otimes g_2$.

(iii) $d_2 \otimes d_1 = d_1 \otimes S^2(d_2)a$.

Demonstração: (i) Nós podemos assumir que $g(d) = 1$. Pelo item (v) da Proposição 3.2.12 nós temos que $S^{-1}(x) = g(xd_1)d_2$, para todo $x \in H$. Logo $S(y) = S^{-1}(S^2(y)) = g(S^2(y)d_1)d_2$. Por outro lado, é fácil de verificarmos que $d \leftharpoonup \alpha$ e $\alpha^{-1}g$ são integrais à direita tais que $\alpha^{-1}g(d \leftharpoonup \alpha) = 1$. Assim, segue do item (vi) de 3.2.12 que

$$\begin{aligned} S(y) &= \alpha^{-1}g((d_1 \leftharpoonup \alpha)y)d_2 \\ &= \alpha^{-1}g((d_1(y \leftharpoonup \alpha^{-1}))\alpha)d_2 \\ &= g(d_1(y \leftharpoonup \alpha^{-1}))d_2. \end{aligned}$$

Então $g(S^2(y)d_1)d_2 = g(d_1(y \leftharpoonup \alpha^{-1}))d_2$, para todo $y \in H$. Aplicando $f \in H^*$ em ambos os lados da última igualdade e usando o Corolário 3.2.13, temos que

$$\begin{aligned} g(S^2(y)d_1)f(d_2) = g(d_1(y \leftharpoonup \alpha^{-1}))f(d_2) \quad &\Leftrightarrow \quad g(S^2(y)d_1f(d_2)) = g(d_1f(d_2)(y \leftharpoonup \alpha^{-1})) \\ &\overset{x=d_1f(d_2)}{\Leftrightarrow} \quad g(S^2(y)x) = g(x(y \leftharpoonup \alpha^{-1})) \\ &\Leftrightarrow \quad g(S^2(y \leftharpoonup \alpha)x) = g(xy), \end{aligned}$$

para $x, y \in H$. Portanto, o resultado segue.

(ii) Sabemos que $f(xy) = f_1(x)f_2(y)$, pela definição de comultiplicação em H^*. Logo, pelo item anterior, temos que

$$\begin{aligned} g(xy) = g(S^2(y \leftharpoonup \alpha)x) \quad &\Leftrightarrow \quad g_1(x)g_2(y) = (g_1 \circ S^2)(y \leftharpoonup \alpha)g_2(x) \\ &\overset{(2.1.10)}{\Leftrightarrow} \quad g_2(y)g_1(x) = (g_1 \circ S^2)(< \alpha, y_1 > y_2)g_2(x) \\ &\Leftrightarrow \quad g_2(y)g_1(x) =< \alpha, y_1 > (g_1 \circ S^2)(y_2)g_2(x) \\ &\Leftrightarrow \quad g_2(y)g_1(x) = \alpha(g_1 \circ S^2)(y)g_2(x). \end{aligned}$$

Assim, $g_2 \otimes g_1 = \alpha(g_1 \circ S^2) \otimes g_2$.

(iii) Por hipótese, $d \in I_l(H)$, logo $S(d) \in I_r(H)$. Temos também que $g \circ S \in I_r(H^*)$, logo $(g \circ S) \in I_l(H^*)$. Pela Observação 2.3.5, temos que $(g \circ S)f = f(a^{-1})(g \circ S)$, onde $a \in G(H)$. Por (ii), segue que

$$\begin{aligned} S(d)_2 \otimes S(d)_1 &= a^{-1}(S^2(S(d)_1)) \otimes S(d)_2 \\ S(d_1) \otimes S(d_2) &= S(S^2(d_2)a) \otimes S(d_1) \\ S(d_2 \otimes d_1) &= S(d_1 \otimes S^2(d_2)a). \end{aligned}$$

Como estamos trabalhando em dimensao finita, segue que S é bijetiva e, portanto, $d_2 \otimes d_1 = d_1 \otimes S^2(d_2)a$. ■

Lema 3.2.15. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $\lambda \in I_l(H^*)$, $\Lambda \in I_r(H)$, $a \in G(H)$ e $\alpha \in G(H^*)$. Então:*

(i) $S^{-1}(\Lambda_3)a^{-1}\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 = 1 \otimes \Lambda$.

(ii) $\lambda_2 \otimes \lambda_3\alpha^{-1}S^{-1}(\lambda_1) = \lambda \otimes \varepsilon$.

(iii) $h\Lambda = \alpha^{-1}(h)\Lambda$ para $h \in H$.

(iv) $\lambda p =< p, a^{-1} > \lambda$ para $p \in H^*$.

Demonstração: Sejam $\lambda \in I_l(H^*)$, $\Lambda \in I_r(H)$, $a \in G(H)$ e $\alpha \in G(H^*)$. Então:

(i) Pelo Teorema 2.1.14 temos que $S(t) = \Lambda$, para algum $t \in I_l(H)$. E pela parte (iii) da Proposição 3.2.14, temos que $t_2 \otimes t_1 = t_1 \otimes S^2(t_2)a$. Agora aplicando $S \otimes S$ em ambos os lados desta equação obtemos que

$$\begin{aligned}
S(t_2) \otimes S(t_1) = S(t_1) \otimes S(S^2(t_2)a) \quad &\Leftrightarrow \quad \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 = \Lambda_2 \otimes S(a)S^2(S(t_2)) \\
&\Leftrightarrow \quad \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 = \Lambda_2 \otimes a^{-1}S^2(\Lambda_1) \\
&\overset{\Delta\otimes S^{-1}}{\Leftrightarrow} \quad \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 \otimes S^{-1}(\Lambda_3) = \Lambda_2 \otimes \Lambda_3 \otimes S(\Lambda_1)a \\
&\Leftrightarrow \quad \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 \otimes S^{-1}(\Lambda_3)a^{-1} = \Lambda_2 \otimes \Lambda_3 \otimes S(\Lambda_1) \\
&\overset{id\otimes\tau}{\Leftrightarrow} \quad \Lambda_1 \otimes S^{-1}(\Lambda_3)a^{-1} \otimes \Lambda_2 = \Lambda_2 \otimes S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_3 \\
&\overset{\tau\otimes id}{\Leftrightarrow} \quad S^{-1}(\Lambda_3)a^{-1} \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 = S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2 \otimes \Lambda_3 \\
&\overset{m\otimes id}{\Leftrightarrow} \quad S^{-1}(\Lambda_3)a^{-1}\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 = S(\Lambda_1)\Lambda_2 \otimes \Lambda_3 \\
&\Leftrightarrow \quad S^{-1}(\Lambda_3)a^{-1}\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 = \varepsilon(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2 \\
&\Leftrightarrow \quad S^{-1}(\Lambda_3)a^{-1}\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 = 1 \otimes \Lambda.
\end{aligned}$$

Portanto, $S^{-1}(\Lambda_3)a^{-1}\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 = 1 \otimes \Lambda$.

(ii) Aqui também denotamos S a antípoda de H^*. Analogamente ao anterior, temos que $S(p) = \lambda$, para algum $p \in I_r(H^*)$. Pela parte (ii) da Proposição 3.2.14 nós temos que $p_2 \otimes p_1 = \alpha S^2(p_1) \otimes p_2$. Um cálculo similar ao anterior, mostramos que $\lambda_2 \otimes \lambda_3 \alpha^{-1} S^{-1}(\lambda_1) = \lambda \otimes \varepsilon$.

(iii) Seja $h \in H$. Como $\Lambda \in I_r(H)$ segue que $S(\Lambda) \in I_l(H)$ e mais, $S(\Lambda)S(h) \in I_l(H)$, para todo $h \in H$. Logo,

$$\begin{aligned}
h\Lambda &= S^{-1}(S(\Lambda)S(h)) \\
&\overset{2.3.5}{=} S^{-1}(S(\Lambda)\alpha(S(h))) \\
&= \alpha^{-1}(h)\Lambda.
\end{aligned}$$

(iv) De forma similar ao anterior mostra-se que $\lambda p =< p_1, a^{-1} > \lambda$ para $p \in H^*$.

■

Estamos agora em condições de mostrar o seguinte resultado, do qual vai decorrer a caracterização da semissimplicidade dada de $D(H)$.

Teorema 3.2.16. *Suponha H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Sejam $\lambda \in I_l(H^*)$ e $\Lambda \in I_r(H)$. Então $\lambda \bowtie \Lambda$ é uma integral à direita e à esquerda para $D(H)$. Em particular, $D(H)$ é unimodular.*

Demonstração: Sejam $a \in G(H)$, $\alpha \in G(H^*)$, $p \in H^*$ e $h \in H$. Vamos primeiro mostrar que $\lambda \bowtie \Lambda \in I_l(D(H))$. De fato, pois

$$\begin{aligned}
(p \bowtie h)(\lambda \bowtie \Lambda) &\overset{(iii),3.2.8}{=} p\lambda_2 \bowtie (S^{-1}(\lambda_1) \rightharpoonup h \leftharpoonup \lambda_3)\Lambda \\
&\overset{(iii),3.2.15}{=} p\lambda_2 \bowtie < \alpha^{-1}, S^{-1}(\lambda_1) \rightharpoonup h \leftharpoonup \lambda_3 > \Lambda \\
&\overset{2.1.10}{=} p\lambda_2 \bowtie < \alpha^{-1}, S^{-1}(\lambda_1) \rightharpoonup < \lambda_3, h_1 > h_2 > \Lambda \\
&\overset{2.1.10}{=} p\lambda_2 \bowtie < \alpha^{-1}, < \lambda_3, h_1 >< S^{-1}(\lambda_1), h_3 > h_2 > \Lambda \\
&= p\lambda_2 \bowtie < \lambda_3, h_1 >< \alpha^{-1}, h_2 >< S^{-1}(h_1), h_3 > \Lambda \\
&= p\lambda_2 \bowtie < \lambda_3 \alpha^{-1} S^{-1}(\lambda_1), h > \Lambda \\
&\overset{(ii),3.2.15}{=} p\lambda \bowtie \varepsilon(h)\Lambda \\
&\overset{\lambda \in I_l(H^*)}{=} \varepsilon(p)\varepsilon(h)\lambda \bowtie \Lambda \\
&= \varepsilon_{D(H)}(p \bowtie h)\lambda \bowtie \Lambda.
\end{aligned}$$

Portanto segue que $\lambda \bowtie \Lambda \in I_l(D(H))$. De uma forma similar podemos mostrar que o mesmo percente a $I_r(D(H))$.

$$\begin{aligned}
(\lambda \bowtie \Lambda)(p \bowtie h) &\overset{(ii),3.2.8}{=} \lambda(\Lambda_1 \rightharpoonup p \leftharpoonup S^{-1}(\Lambda_3)) \bowtie \Lambda_2 h \\
&\overset{(iv),3.2.15}{=} \lambda < \Lambda_1 \rightharpoonup p \leftharpoonup S^{-1}(\Lambda_3), a^{-1} > \bowtie \Lambda_2 h \\
&\overset{3.10}{=} \lambda < p, S^{-1}(\Lambda_3)a^{-1}\Lambda_1 > \bowtie \Lambda_2 h \\
&\overset{(i),3.2.15}{=} \lambda < p, 1 > \bowtie \Lambda h
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{\Lambda\in I_r(H^*)}{=} && < p,1 > \lambda \bowtie \Lambda\varepsilon(h) \\
&= && < p,1 > \varepsilon(h)\lambda \bowtie \Lambda \\
&= && \varepsilon_{D(H)}(p \bowtie h)\lambda \bowtie \Lambda.
\end{aligned}
$$

Como $D(H)$ tem dimensão finita, pelo Teorema 2.1.14, segue que $\Bbbk \cdot (\lambda \bowtie \Lambda) = I_l(D(H)) = I_r(D(H))$. Concluindo assim que $D(H)$ é unimodular. ■

Corolário 3.2.17. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então as seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) $D(H)$ é semissimples.

(ii) H e H^* são semissimples.

(iii) H e H^* são cosemissimples.

(iv) $D(H)$ é cosemissimples.

Demonstração: Esse resultado segue direto do Teorema de Maschke (2.2.9) e do Teorema anterior, pois

$$
\begin{aligned}
H \quad \text{e} \quad H^*\text{são semissimples} &\stackrel{2.2.9}{\Leftrightarrow} < \varepsilon, I_l(H) > \neq 0 \ \ e < \varepsilon, I_l(H^*) > \neq 0 \\
&\stackrel{3.2.16}{\Leftrightarrow} < \varepsilon, I_l(D(H)) > \neq 0 \\
&\stackrel{2.2.9}{\Leftrightarrow} D(H)\text{é semissimples.}
\end{aligned}
$$

E, pelo teorema de Teorema de Larson e Radford (2.4.9), temos que

$$H \text{ e } H^* \text{ são semissimples} \Leftrightarrow H \text{ e } H^* \text{ são cosemissimples}$$

e assim,

$$D(H) \text{ é semissimples} \Leftrightarrow D(H) \text{ é cosemissimples.}$$

o que completa a prova. $\blacksquare$

Para finalizar o capítulo, discutiremos a semissimplicidade do Duplo de Drinfeld das álgebras de Hopf obtidas anteriormente.

Exemplo 3.2.18. Seja $(D(\Bbbk G))$ dada no exemplo 3.2.10. Pelo Corolário 2.2.12 temos que $\Bbbk G$ é semissimples $\Leftrightarrow car(\Bbbk) \nmid |G|$ e pelo Exemplo 2.2.16 sabemos que $(\Bbbk G)^*$ é semissimples. Logo pelo Corolário anterior temos que $D(\Bbbk G)$ é semissimples $\Leftrightarrow car(\Bbbk) \nmid |G|$.

Exemplo 3.2.19. Seja $D(Tq)$ a álgebra de Hopf dada no Exemplo 3.2.10. Por 2.2.14 e pelo Corolário anterior temos que $D(Tq)$ não é semissimples.

Observação 3.2.20. O Duplo de Drinfeld construído neste capítulo é um caso particular de Skew Hopf Pairing. Para mais detalhes o leitor pode consultar [18].

Capítulo 4

A categoria de representação de D(H)

Nesse capítulo apresentaremos dois resultados principais. O primeiro será mostrar que a categoria de representações do Duplo de Drinfeld, de uma álgebra de Hopf finito-dimensional, equivale a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld. O segundo será verficar que uma álgebra de Hopf de dimensão finita é quase triangular se, e somente se, a categoria de representações dessa álgebra é trançada. As duas primeiras seções foram baseadas em [9], [1] e [17]. E a terceira seção, pode ser encontrada em [16].

4.1 Categorias monoidais trançadas

Nesta seção apresentamos os conceitos de categoria monoidal e categoria trançada. Nosso principal exemplo, será a categoria de representações de H, quando H for uma biálgebra cocomutativa.

Definição 4.1.1. *Uma **categoria** $\mathcal{C}$ é definida como uma classe de objetos e uma classe de conjuntos de morfismos que satisfazem os seguintes axiomas:*

(i) Para todo par (U, V) de objetos em $\mathcal{C}$ existe um conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(U, V)$ de morfismos de U para V tal que $Hom_{\mathcal{C}}(U, V) \cap Hom_{\mathcal{C}}(W, X) = \emptyset$ se, $(U, V) \neq (W, X)$, para (W, X) objetos em $\mathcal{C}$. Um morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(U, V)$ é denotado por $f : U \longrightarrow V$.

(ii)Para quaisquer U, V e X objetos em $\mathcal{C}$ existe uma função

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{C}}(U, V) \times Hom_{\mathcal{C}}(V, X) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(U, X) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

chamada composição de morfismos, que é associativa.

(iii) Para cada objeto U em $\mathcal{C}$ existe um morfismo $I_U \in Hom_{\mathcal{C}}(U, U)$ tal que $f \circ I_U = f$ e $I_U \circ g = g$, para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(U, V)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(V, U)$, sendo V um objeto qualquer em $\mathcal{C}$. Tal morfismo é chamado morfismo identidade de U.

Exemplo 4.1.2. A classe dos conjuntos juntamente com a classe das funções é uma categoria.

Exemplo 4.1.3. A classe dos anéis juntamente com a classe dos morfismos de anéis é uma categoria.

Exemplo 4.1.4. Seja H uma álgebra. A classe dos H-módulos à esquerda juntamente com a classe dos H-morfismos à esquerda é uma categoria, chamada **categoria de representações de** H e denotada por $Rep(H)$.

Definição 4.1.5. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um **funtor covariante** (ou simplesmente **funtor**) F de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$, denotado por $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, é um par de aplicações (ambas denotadas por F), uma aplicação objeto qua associa cada objeto U em $\mathcal{C}$ a um objeto $F(U)$ em $\mathcal{D}$ e uma aplicação morfismo que associa cada $f : U \longrightarrow V$ em $\mathcal{C}$ ao morfismo $F(f) : F(U) \longrightarrow F(V)$ em $\mathcal{D}$, tal que:*

(i) $F(I_U) = I_{F(U)}$, $\forall\ I_U$ *em* $\mathcal{C}$.

(ii) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, $\forall\ f, g$ *em* $\mathcal{C}$.

Observemos que se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são duas categorias então $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ também é uma categoria, logo podemos menionar o seguinte Exemplo:

Exemplo 4.1.6. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Então $\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \times \mathcal{C}$ que associa cada objeto (U, V) em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ao objeto (V, U) em $\mathcal{D} \times \mathcal{C}$ e cada morfismo (f, g) em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ao morfismo (g, f) em $\mathcal{D} \times \mathcal{C}$ é um funtor.

Definição 4.1.7. *Sejam* $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ *categoria e* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *funtores. Uma* ***transformação natural*** $\alpha : F \longrightarrow G$ *é uma aplicação que associa cada objeto* U *em* $\mathcal{C}$ *a um morfismo* $\alpha_U : F(U) \longrightarrow G(U)$ *em* $\mathcal{D}$ *tal que, para cada morfismo* $f : U \longrightarrow V$ *em* $\mathcal{C}$*, o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(U) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(V) \arrow[r, "\alpha_V"'] & G(V) \end{tikzcd}$$

Chamamos α *um* ***isomorfismo natural*** *quando* α_U *for um isomorfismo em* $\mathcal{D}$*, para cada* $U \in \mathcal{C}$.

Definição 4.1.8. *Uma* ***categoria monoidal*** *é uma coleção* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r)$ *onde, para quaisquer objetos* U*,* V *e* W *de* $\mathcal{C}$*:*

(i) $\mathcal{C}$ *é uma categoria e* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *é um funtor, chamado produto tensorial.*

(ii) $\mathbb{I}$ *é um objeto de* $\mathcal{C}$.

(iii) $a_{U,V,W} : V \otimes (W \otimes U) \longrightarrow (V \otimes W) \otimes U$, $l_V : V \longrightarrow V \otimes \mathbb{I}$ *e* $r_V : V \longrightarrow \mathbb{I} \otimes V$ *são isomorfismos naturais satisfazendo os axiomas do "pentágono"e do "triângulo", ou seja, para quaisquer objetos* U*,* V*,* W *e* X *em* $\mathcal{C}$*, os diagramas abaixo comutam:*

$$
\begin{tikzcd}
 & (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) \arrow[dr, "a_{U \otimes V, W, X}"] & \\
U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) \arrow[ur, "a_{U,V,W \otimes X}"] \arrow[d, "I_U \otimes a_{V,W,X}"'] & & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X \\
U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) \arrow[rr, "a_{U,V \otimes W, X}"'] & & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X \arrow[u, "a_{U,V,W} \otimes I_X"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
U \otimes (\mathbb{I} \otimes V) \arrow[rr, "a_{U,\mathbb{I},V}"] & & (U \otimes \mathbb{I}) \otimes V \\
 & U \otimes V \arrow[ul, "I_U \otimes r_V"] \arrow[ur, "l_U \otimes I_V"'] &
\end{tikzcd}
$$

Esses axiomas essencialmente mostram que o produto tensorial de um número finito de objetos está bem definido, indiferente do lugar onde parenteses são inseridos e $\mathbb{I}$ é a unidade para o produto tensorial.

Exemplo 4.1.9. Seja, $\mathbb{k}$ um corpo e $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra sobre $\mathbb{k}$. Consideremos a categoria $Rep(H)$, $\otimes := \otimes_{\mathbb{k}}$, o produto tensorial usual sobre $\mathbb{k}$, $\mathbb{I} = \mathbb{k}$, e definimos:

$$
\begin{aligned}
a_{M,N,P} : M \otimes (N \otimes P) &\longrightarrow (M \otimes N) \otimes P \\
m \otimes (n \otimes p) &\longmapsto (m \otimes n) \otimes p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_M : M &\longrightarrow \mathbb{k} \otimes M \\
m &\longmapsto 1_{\mathbb{k}} \otimes m
\end{aligned}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{aligned}
l_M : M &\longrightarrow M \otimes \mathbb{k} \\
m &\longmapsto m \otimes 1_{\mathbb{k}}
\end{aligned}
$$

para quaisquer M, N e P H-módulos á esquerda e elementos $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$. Então $(Rep(H), \otimes, \mathbb{k}, a, l, r)$ é uma categorial monoidal.

Para justificar a afirmação acima, nosso primeiro passo será mostrar que $a_{M,N,P}$, r_M e l_M são isomorfismos de H-módulos. Note que se M e N são H-módulos à esquerda, então $M \otimes N$ também o é com ação dada por, $h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n$, para todos $h \in H$, $m \in M$ e $n \in N$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
hk \cdot (m \otimes n) &= (hk)_1 \cdot m \otimes (hk)_2 \cdot n \\
&= (h_1 k_1) \cdot m \otimes (h_2 k_2) \cdot n \\
&= h_1 \cdot (k_1 \cdot m) \otimes h_2 \cdot (k_2 \cdot n) \\
&= h \cdot (k_1 \cdot m \otimes k_2 \cdot n) \\
&= h \cdot (k \cdot (m \otimes n))
\end{aligned}
$$

e $1_H \cdot (m \otimes n) = 1_H \cdot m \otimes 1_H \cdot n = m \otimes n$, $\forall\ h, k \in H$, $m \in M$ e $n \in N$.

Da mesma forma, se $f : M \longrightarrow M^{'}$ e $g : N \longrightarrow N^{'}$ são morfismos em $Rep(H)$, então $f \otimes g$ também o é, onde definimos, para todos $m \in M$ e $n \in N$,

$$
\begin{aligned}
f \otimes g : M \otimes N &\longrightarrow M^{'} \otimes N^{'} \\
m \otimes n &\longmapsto f(m) \otimes g(n)
\end{aligned}
$$

pois se $h \in H$, $m \in M$ e $n \in N$, então

$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)(h \cdot (m \otimes n)) &= f(h_1 \cdot m) \otimes g(h_2 \cdot n) \\
&= h_1 \cdot f(m) \otimes h_2 \cdot g(n) \\
&= h \cdot (f(m) \otimes g(n)) \\
&= h \cdot ((f \otimes g)(m \otimes n)).
\end{aligned}
$$

Assim o funtor $\otimes$ está bem definido. Além disso, $\Bbbk$ é um H-módulo com a ação

$h \cdot 1_{\Bbbk} = \varepsilon(h)1_{\Bbbk}$. De fato, pois como ε é homomorfismo de álgebras segue que:

$$\begin{aligned} h \cdot (g \cdot 1_{\Bbbk}) &= h \cdot \varepsilon(g)1_{\Bbbk} \\ &= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_{\Bbbk} \\ &= \varepsilon(hg)1_{\Bbbk} \\ &= hg \cdot 1_{\Bbbk} \end{aligned}$$

e $1_H \cdot 1_{\Bbbk} = \varepsilon(1_H)1_{\Bbbk} = 1_{\Bbbk}1_{\Bbbk} = 1_{\Bbbk}$, $\forall\ h, g \in H$.

Agora sejam M, N, P H-módulos à esquerda, $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$. Então:

$$\begin{aligned} a_{M,N,P}(h \cdot (m \otimes (n \otimes p))) &= a_{M,N,P}(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot (n \otimes p)) \\ &= a_{M,N,P}(h_1 \cdot m \otimes (h_2 \cdot n \otimes h_3 \cdot p)) \\ &= (h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \otimes h_3 \cdot p \\ &= h_1 \cdot (m \otimes n) \otimes h_2 \cdot p \\ &= h \cdot ((m \otimes n) \otimes p) \\ &= h \otimes (a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p))). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} l_M(h \cdot m) &= (h \cdot m) \otimes 1_{\Bbbk} \\ &= (h_1\varepsilon(h_2) \cdot m) \otimes 1_{\Bbbk} \\ &= h_1 \cdot m \otimes \varepsilon(h_2)1_{\Bbbk} \\ &= h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot 1_{\Bbbk} \\ &= h \cdot (m \otimes 1_{\Bbbk}) \\ &= h \cdot (l_M(m)). \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $r_M(h \cdot m) = h \cdot r_M(m)$. Portanto, $a_{M,N,P}$, l_M e r_M são H-morfismos e, claramente, são bijetores, ou seja, são isomorfismos de H-módulos à esquerda.

Num segundo momento, verficaremos que a, l e r são transformações naturais. Sejam M, N, P, M', N', P' H-módulos, $f : M \longrightarrow M'$, $g : N \longrightarrow N'$ e $h : P \longrightarrow P'$ H-morfismos. Notemos que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes (N \otimes P) \arrow[r, "a_{M,N,P}"] \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"'] & (M \otimes N) \otimes P \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"] \\
M' \otimes (N' \otimes P') \arrow[r, "a_{M',N',P'}"'] & (M' \otimes N') \otimes P'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "l_M"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes \Bbbk \arrow[d, "f\otimes id_{\Bbbk}"] \\
M' \arrow[r, "l_{M'}"'] & M' \otimes \Bbbk
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "r_M"] \arrow[d, "f"'] & \Bbbk \otimes M \arrow[d, "id_{\Bbbk}\otimes f"] \\
M' \arrow[r, "r_{M'}"'] & \Bbbk \otimes M'
\end{tikzcd}$$

De fato, dados $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$, temos

$$\begin{aligned}
((f \otimes g) \otimes h) \circ a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p)) &= ((f \otimes g) \otimes h)((m \otimes n) \otimes p) \\
&= ((f \otimes g)(m \otimes n)) \otimes h(p) \\
&= (f(m) \otimes g(n)) \otimes h(p) \\
&= a_{M',N',P'}(f(m) \otimes (g(n) \otimes h(p))) \\
&= a_{M',N',P'} \circ (f \otimes (g \otimes h))(m \otimes (n \otimes p)).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(f \otimes id_{\Bbbk}) \circ l_M(m) &= (f \otimes id_{\Bbbk})(m \otimes 1_{\Bbbk}) \\
&= f(m) \otimes 1_{\Bbbk} \\
&= l_{M'}(f(m)) \\
&= (l_{M'} \circ f)(m).
\end{aligned}$$

mostrando a comutatividade dos dois primeiros diagramas. A comutatividade do terceiro diagrama é mostrada de forma análoga. Logo a, l e r são transformações naturais e mais, são isomorfismos naturais.

Por fim, mostraremos que valem os axiomas do pentágono e do triângulo. Sejam M, N, P, Q H-módulos à esquerda, $m \in M$, $n \in N$, $p \in P$ e $q \in Q$, temos

$a_{M\otimes N,P,Q} \circ a_{M,N,P\otimes Q}(m \otimes (n \otimes (p \otimes q))) =$

$$\begin{aligned}
&= a_{M\otimes N,P,Q}((m \otimes n) \otimes (p \otimes q)) \\
&= (((m \otimes n) \otimes p) \otimes q) \\
&= (a_{M,N,P} \otimes id_Q)((m \otimes (n \otimes p)) \otimes q) \\
&= (a_{M,N,P} \otimes id_Q) \circ a_{M,N\otimes P,Q}(m \otimes ((n \otimes p) \otimes q)) \\
&= (a_{M,N,P} \otimes id_Q) \circ a_{M,N\otimes P,Q} \circ (id_M \otimes a_{N,P,Q})(m \otimes (n \otimes (p \otimes q))).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_{M,\Bbbk,N} \circ (id_M \otimes r_N)(m \otimes n) &= a_{M,\Bbbk,N}(m \otimes (1_{\Bbbk} \otimes n)) \\
&= (m \otimes 1_{\Bbbk}) \otimes n \\
&= (l_M \otimes id_N)(m \otimes n).
\end{aligned}$$

Portanto, $(Rep(H), \otimes, \Bbbk, a, l, r)$ é uma categoria monoidal.

Observemos que a associatividade nem sempre é a trivial. Um exemplo neste sentido aparece em [8]. Resumidamente apresentemos tal exemplo abaixo:

Exemplo 4.1.10. ([8], Example 1.3.7) Sejam G um grupo, A um grupo abeliano e w um 3-cociclo de G com valores em A, isto é, $w : G \times G \times G \longrightarrow A$ tal que satisfaz a seguinte equação, para todos $g, h, m, n \in G$,

$$w(gh, m, n)w(g, h, mn) = w(g, h, m)w(g, hm, n)w(h, m, n)$$

Definimos a categoria $\mathcal{C}_G^w(A)$, onde os objetos são da forma δ_g (rotulados por elementos de G). Logo, existe somente um objeto para cada classe de morfismos e $\mathrm{Hom}(\delta_g, \delta_h) = \emptyset$ se $g \neq h$ e $\mathrm{Hom}(\delta_g, \delta_g) = A$.

O funtor $\otimes$ é definido por $\delta_g \otimes \delta_h = \delta_{gh}$ e o tensor produto de morfismos definidos por $a \otimes b = ab$. A unidade é dada pela unidade do grupo.

Neste caso, o isomorfismo associativo a^w é definido pela fórmula:

$$a^w_{\delta_g,\delta_h,\delta_m} = w(g,h,m)$$

para todos $g, h, m \in G$. Portanto, com a estrutura acima, pode-se mostrar que $\mathcal{C}^w_G(A)$ é uma categoria monoidal onde o isomorfismo associativo não é o trivial.

Definição 4.1.11. *Uma* ***categoria (monoidal) trançada*** *é uma coleção* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r, c)$, *onde*

(i) $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r)$ *é uma categoria monoidal.*

(ii) Para V, W *objetos de* $\mathcal{C}$, $c_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ *é um isomorfismo natural tal que os axiomas do hexágono são satisfeitas, ou seja, para quaisquer* V, W, U *objetos de* $\mathcal{C}$ *os diagramas abaixo comutam:*

$$\begin{tikzcd}
 & (U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "c_{U\otimes V,W}"'] & W \otimes (U \otimes V) \arrow[dr, "a_{W,U,V}"] & \\
U \otimes (V \otimes W) \arrow[ur, "a_{U,V,W}"] \arrow[dr, "I\otimes c_{V,W}"'] & & & (W \otimes U) \otimes V \\
 & U \otimes (W \otimes V) \arrow[r, "a_{U,W,V}"'] & (U \otimes W) \otimes V \arrow[ur, "c_{U,W}\otimes I"'] &
\end{tikzcd} \qquad (H1)$$

$$\begin{tikzcd}
 & U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "c_{U,V\otimes W}"'] & (V \otimes W) \otimes U \arrow[dr, "a^{-1}_{V,W,U}"] & \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[ur, "a^{-1}_{U,V,W}"] \arrow[dr, "c_{U,V}\otimes I"'] & & & V \otimes (W \otimes U) \\
 & (V \otimes U) \otimes W \arrow[r, "a^{-1}_{V,U,W}"'] & V \otimes (U \otimes W) \arrow[ur, "I\otimes c_{U,W}"'] &
\end{tikzcd} \qquad (H2)$$

Exemplo 4.1.12. Sejam $\Bbbk$ um corpo e H uma biálgebra. Mostramos no Exemplo 4.1.9 que $(Rep(H), \otimes, \Bbbk, a, l, r)$ é uma categoria monoidal. Se H for cocomutativa, então definindo, para quaisquer M, N H-módulos, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} c_{M,N} : M \otimes N & \longrightarrow & N \otimes M \\ m \otimes n & \longrightarrow & n \otimes m \end{array}$$

Então segue que $(Rep(H), \otimes, \Bbbk, a, l, r, c)$ é uma categoria trançada.

Primeiramente, mostraremos que $c_{M,N}$ é um isomorfismo natural de H-módulos à esquerda, para quaisquer M, N H-módulos. De fato, para todos $h \in H$, $m \in M$ e $n \in N$, temos

$$\begin{array}{rcl} c_{M,N}(h \cdot (m \otimes n)) & = & c_{M,N}(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \\ & = & h_2 \cdot n \otimes h_1 \cdot m \\ & \overset{(*)}{=} & h \cdot (m \otimes n) \\ & = & h \cdot (c_{M,N}(m \otimes n)). \end{array}$$

Notemos que na passagem $(*)$ estamos usando o fato de H ser cocomutativa. Claramente $c_{M,N}$ é um isomorfismo de $\Bbbk$-espaço vetoriais.

Para mostrar que c é uma transformação natural, vamos mostrar que dados M, M', N, N' H-módulos, $f : M \longrightarrow M'$ e $g : N \longrightarrow N'$ morfismos, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, "c_{M,N}"] \arrow[d, "f \otimes g"'] & N \otimes M \arrow[d, "g \otimes f"] \\ M' \otimes N' \arrow[r, "c_{M',N'}"'] & N' \otimes M' \end{tikzcd}$$

De fato, sejam $m \in M$, $n \in N$. Então:

$$\begin{aligned}
(g \otimes f) \circ c_{M,N}(m \otimes n) &= (g \otimes f)(n \otimes m) \\
&= g(n) \otimes f(m) \\
&= c_{M',N'}(f(m) \otimes g(n)) \\
&= c_{M',N'} \circ (f \otimes g)(m \otimes n).
\end{aligned}$$

Portanto, $c_{M,N}$ é um isomorfismo natural de H-módulos. Por fim, mostraremos que $\mathcal{C}$ satisfaz os axiomas do hexágono. Sejam M, N e P H-módulos, $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$, então

$$\begin{aligned}
a_{P,M,N} \circ c_{M \otimes N,P} \circ a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p)) &= a_{P,M,N} \circ c_{M \otimes N,P}((m \otimes n) \otimes p) \\
&= a_{P,M,N}(p \otimes (m \otimes n)) \\
&= ((p \otimes m) \otimes n) \\
&= (c_{M,P} \otimes id_N)((m \otimes p) \otimes n) \\
&= (c_{M,P} \otimes id_N) \circ a_{M,P,N}(m \otimes (p \otimes n)) \\
&= (c_{M,P} \otimes id_N) \circ a_{M,P,N} \circ (id_M \otimes c_{N,P})(m \otimes (n \otimes p)).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a^{-1}_{N,P,M} \circ c_{M,N \otimes P} \circ a^{-1}_{M,N,P}((m \otimes n) \otimes p) &= a^{-1}_{N,P,M} \circ c_{M,N \otimes P}(m \otimes (n \otimes p)) \\
&= a^{-1}_{N,P,M}(n \otimes (p \otimes m)) \\
&= (id_N \otimes c_{M,N})(n \otimes (m \otimes p)) \\
&= (id_N \otimes c_{M,N}) \circ a^{-1}_{N,M,P}((m \otimes n) \otimes p) \\
&= (id_N \otimes c_{M,N}) \circ a^{-1}_{N,M,P} \circ (c_{M,N} \otimes id_W)((m \otimes n) \otimes p).
\end{aligned}$$

Portanto, $(Rep(H), \otimes, \Bbbk, a, l, r, c)$ é uma categoria trançada.

Para finalizar essa seção faremos uma breve observação referente a uma característica muito conhecida sobre categorias trançadas. Para isso definimos,

Definição 4.1.13. *Sejam V um espaço vetorial e $c : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ um isomorfismo linear. Então (V, c) é um **espaço vetorial trançado** se c é uma solução da equação da trança, ou seja, se*

$$(c \otimes id)(id \otimes c)(c \otimes id) = (id \otimes c)(c \otimes id)(id \otimes c) \tag{4.1}$$

Uma consequência importante dos axiomas de categoria trançada é a equação das tranças dada acima. Com isso, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.1.14. Seja (H, R) é uma álgebra de Hopf quase triangular e

$$\begin{aligned} c : H \otimes H &\longrightarrow H \otimes H \\ h \otimes k &\longmapsto \tau(R)k \otimes h \end{aligned}$$

Então $(c \otimes id)(id \otimes c)(c \otimes id) = (id \otimes c)(c \otimes id)(id \otimes c)$.

De fato, primeiro observemos que

$$\begin{aligned} (c \otimes id)(id \otimes c)(c \otimes id)(h \otimes k \otimes l) &= (c \otimes id)(id \otimes c)(\tau(R)k \otimes h \otimes l) \\ &= (c \otimes id)(\tau(R)k \otimes \tau(R)l \otimes h) \\ &= \tau(R)\tau(R)\tau(R)l \otimes k \otimes h. \end{aligned}$$

e, por outro lado, temos

$$\begin{aligned} (id \otimes c)(c \otimes id)(id \otimes c)(h \otimes k \otimes l) &= (id \otimes c)(c \otimes id)(h \otimes \tau(R)l \otimes k) \\ &= (id \otimes c)(c \otimes id)(h \otimes \tau(R)l \otimes k) \\ &= (id \otimes c)(\tau(R)\tau(R)l \otimes h \otimes k) \\ &= \tau(R)\tau(R)\tau(R)l \otimes k \otimes h. \end{aligned}$$

Logo temos a igualdade desejada. Ou seja, $((H, R), c)$ é um espaço vetorial trançado.

4.2 Módulos de Yetter-Drinfeld

Nesta seção apresentamos a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H, que é uma categoria trançada quando a antípoda de H for bijetora.

Definição 4.2.1. *Seja H uma álgebra de Hopf. Um* ***módulo de Yetter-Drinfeld ($\mathcal{YD}$)*** *sobre H é um espaço vetorial M tal que:*

(i) M é um módulo à esquerda sobre (H, m, u).

(ii) M é um comódulo à esquerda sobre (H, Δ, ε).

(iii) Vale a seguinte lei de compatibilidade:

$$\rho(h \cdot m) = h_1 m_{-1} S(h_3) \otimes h_2 \cdot m_0.$$

para quaisquer $h \in H$ e $m \in M$.

Exemplo 4.2.2. Todo $\Bbbk$-espaço vetorial é um módulo de Yetter-Drinfeld.

De fato, basta considerar V como um H-módulo dador por $h \cdot v = \varepsilon(h)v$ e H-comódulo dado por $\rho(v) = 1_{\Bbbk} \otimes v$.

Denotamos por ${}^H_H\mathcal{YD}$ a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H, em que os objetos são os módulos de Yetter-Drinfeld e os morfismos são aqueles que, simultaneamente, são morfismos de H-módulos e de H-comódulos.

Apresentaremos no próximo lema vários resultados muito úteis para demostrarmos o principal teorema desta seção, que afirma que a categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal trançada.

Lema 4.2.3. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, M, N e $L \in {}^H_H\mathcal{YD}$ de dimensão finita. Então:*

(i) $M \otimes N \in {}^H_H\mathcal{YD}$ *via* $h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n$ *e* $\rho(m \otimes n) = m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0$.

(ii) Se f *e* g *são morfismos em* ${}^H_H\mathcal{YD}$*, então* $f \otimes g$ *é morfismo em* ${}^H_H\mathcal{YD}$.

(iii) $\Bbbk$ *é um módulo em* ${}^H_H\mathcal{YD}$ *via* $h \cdot 1_{\Bbbk} = \varepsilon(h)1_{\Bbbk}$ *e* $\rho(1_{\Bbbk}) = 1_H \otimes 1_{\Bbbk}$.

(iv) $(M \otimes N) \otimes L \simeq M \otimes (N \otimes L)$ *em* ${}^H_H\mathcal{YD}$.

(v) $M \otimes \Bbbk \simeq M \simeq \Bbbk \otimes M$ *em* ${}^H_H\mathcal{YD}$.

(vi) Se a antípoda de H *é bijetiva então a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} c : M \otimes N & \longrightarrow & N \otimes M \\ m \otimes n & \longmapsto & m_{-1} \cdot n \otimes m_0 \end{array}$$

é um isomorfismo de módulos ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Demonstração: (i) Sejam quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $h, k \in H$, então:

- H age sobre $M \otimes N$ via $h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n$, o que já foi verificado no exemplo 4.1.9.

- A coação de $M \otimes N$ sobre H é dado por $\rho(m \otimes n) = m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0$. De fato, verificaremos a comutatividade dos diagramas abaixo:

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & H \otimes M \otimes N \arrow[d, "id_H \otimes \rho"] \\ H \otimes M \otimes N \arrow[r, "\Delta \otimes id_{M \otimes N}"'] & H \otimes H \otimes M \otimes N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dd, "\rho"] \\ \Bbbk \otimes M \otimes N & \\ & H \otimes M \otimes N \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_{M \otimes N}"] \end{tikzcd}$$

Sejam $m \in M$ e $n \in N$, então

$$\begin{aligned} (id_H \otimes \rho) \circ \rho(m \otimes n) &= (id_H \otimes \rho)(m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0) \\ &= m_{-1}n_{-1} \otimes m_{0-1}n_{0-1} \otimes m_{00} \otimes n_{00} \\ &= m_{-2}n_{-2} \otimes m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0 \\ &= (\Delta \otimes id_{M \otimes N})(m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0) \end{aligned}$$

$$= \quad (\Delta \otimes id_{M\otimes N}) \circ \rho(m \otimes n).$$

e

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id_{M\otimes N}) \circ \rho(m \otimes n) &= (\varepsilon \otimes id_{M\otimes N})(m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0) \\
&= \varepsilon(m_{-1}n_{-1}) \otimes m_0 \otimes n_0 \\
&= 1_{\Bbbk} \otimes \varepsilon(m_{-1})m_0 \otimes \varepsilon(n_{-1})n_0 \\
&= 1_{\Bbbk} \otimes m \otimes n \\
&\simeq m \otimes n.
\end{aligned}$$

- Agora verificaremos a compatibilidade do item (iii) da definição de módulos $\mathcal{YD}$, isto é,

$$\rho(h \cdot (m \otimes n)) = h_1(m \otimes n)_{-1}S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m \otimes n)_0.$$

Primeiro, note que, como M e N são módulos $\mathcal{YD}$, temos:

$$(h_1 \cdot m)_{-1} \otimes (h_1 \cdot m)_0 = \rho(h_1 \cdot m) = h_{11}m_{-1}S(h_{13}) \otimes h_{12} \cdot m_0 \tag{4.2}$$

e

$$(h_2 \cdot n)_{-1} \otimes (h_2 \cdot n)_0 = \rho(h_2 \cdot n) = h_{21}n_{-1}S(h_{23}) \otimes h_{22} \cdot n_0 \tag{4.3}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\rho(h \cdot (m \otimes n)) &= \rho(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \\
&= (h_1 \cdot m)_{-1}(h_2 \cdot n)_{-1} \otimes (h_1 \cdot m)_0 \otimes (h_1 \cdot n)_0 \\
&\overset{4.2 \text{ e } 4.3}{=} h_{11}m_{-1}S(h_{13})h_{21}n_{-1}S(h_{23}) \otimes h_{12} \cdot m_0 \otimes h_{22} \cdot n_0 \\
&= h_1m_{-1}S(h_3)h_4n_{-1}S(h_6) \otimes h_2 \cdot m_0 \otimes h_5 \cdot n_0 \\
&= h_1m_{-1}\varepsilon(h_3)n_{-1}S(h_5) \otimes h_2 \cdot m_0 \otimes h_4 \cdot n_0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h_1 m_{-1} n_{-1} S(h_4) \otimes h_2 \cdot m_0 \otimes h_3 \cdot n_0 \\
&= h_1 m_{-1} n_{-1} S(h_3) \otimes h_{21} \cdot m_0 \otimes h_{22} \cdot n_0 \\
&= h_1 m_{-1} n_{-1} S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m_0 \otimes n_0) \\
&= h_1 (m \otimes n)_{-1} S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m \otimes n)_0.
\end{aligned}
$$

Logo, $M \otimes N$ é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H.

(ii) Sejam M, N, M', N' H-módulos em ${}_H^H\mathcal{YD}$, $f : M \longrightarrow M'$ e $g : N \longrightarrow N'$ morfimos em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Já mostramos no Exemplo 4.1.9 que $f \otimes g$ é um morfismo de H-módulos à esquerda. Para mostrar que o mesmo é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$, falta apenas mostrar que é um morfismo de H-comódulos à esquerda, ou seja, que o diagrama abaixo comuta:

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes N \arrow[r, "f\otimes g"] \arrow[d, "\rho_{M\otimes N}"'] & M' \otimes N' \arrow[d, "\rho_{M'\otimes N'}"] \\
H \otimes M \otimes N \arrow[r, "id_H\otimes(f\otimes g)"'] & H \otimes M' \otimes N'
\end{tikzcd}
$$

Primeiramente, note que f e g são morfismos de H-comódulos à esquerda, logo

$$\rho(f(m)) = (id_H \otimes f) \circ \rho(m) \quad \Rightarrow \quad f(m)_{-1} \otimes f(m)_0 = m_{-1} \otimes f(m_0) \tag{4.4}$$

e

$$\rho(g(n)) = (id_H \otimes g) \circ \rho(n) \Rightarrow g(n)_{-1} \otimes g(n)_0 = n_{-1} \otimes g(n_0) \tag{4.5}$$

Assim, para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$,

$$
\begin{aligned}
\rho_{M'\otimes N'}(f \otimes g)(m \otimes n) &= \rho(f(m) \otimes g(n)) \\
&= f(m)_{-1} g(n)_{-1} \otimes f(m)_0 \otimes g(n)_0 \\
&\overset{4.4 \text{ e } 4.5}{=} m_{-1} n_{-1} \otimes f(m_0) \otimes f(n_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (id_H \otimes (f \otimes g))(m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0) \\
&= (id_H \otimes (f \otimes g)) \circ \rho_{M\otimes N}(m \otimes n).
\end{aligned}
$$

Portanto, $f \otimes g$ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$, como queríamos mostrar.

(iii) Pelo Exemplo 4.1.9 sabemos que $\Bbbk$ é um H-módulo via $h \cdot 1_{\Bbbk} = \varepsilon(h)1_{\Bbbk}$, para qualquer $h \in H$. Agora verificaremos que $\Bbbk$ é um H-comódulo via $\rho(1_{\Bbbk}) = 1_H \otimes 1_{\Bbbk}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
(id_H \otimes \rho) \circ \rho(1_{\Bbbk}) &= (id_H \otimes \rho)(1_H \otimes 1_H \otimes 1_{\Bbbk}) \\
&= (\Delta \otimes id_{\Bbbk})(1_H \otimes 1_{\Bbbk}) \\
&= (\Delta \otimes id_{\Bbbk}) \circ \rho(1_{\Bbbk}).
\end{aligned}
$$

e

$$
(\varepsilon \otimes id_{\Bbbk})\rho(1_{\Bbbk}) = \varepsilon(1_H) \otimes 1_{\Bbbk} = 1_{\Bbbk} \otimes 1_{\Bbbk} \simeq 1_{\Bbbk}.
$$

No caso da compatibilidade, temos que

$$
\begin{aligned}
h_1 1_H S(h_3) \otimes h_2 \cdot 1_{\Bbbk} &= h_1 S(h_3) \otimes \varepsilon(h_2)1_{\Bbbk} \\
&= h_1 S(h_3\varepsilon(h_2)) \otimes 1_{\Bbbk} \\
&= h_1 S(h_2) \otimes 1_{\Bbbk} \\
&= \varepsilon(h)1_H \otimes 1_{\Bbbk} \\
&= \varepsilon(h)\rho(1_{\Bbbk}) \\
&= \rho(\varepsilon(h)1_{\Bbbk}) \\
&= \rho(h \cdot 1_{\Bbbk}).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\Bbbk$ é um módulo em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

(iv) Sejam M, N, $P \in {}_H^H\mathcal{YD}$. Novamente pelo Exemplo 4.1.9 sabemos que $\varphi : (M \otimes N) \otimes P \longrightarrow M \otimes (N \otimes P)$ é um isomorfismo de H-módulos à esquerda.

Logo, falta apenas mostrar que é um morfismo de H-comódulos à esquerda, ou seja, que $\rho \circ \varphi = (id_H \otimes \varphi) \circ \rho$.

De fato, para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$, temos

$$\begin{aligned} \rho \circ \varphi((m \otimes n) \otimes p) &= \rho(m \otimes (n \otimes p)) \\ &= m_{-1}(n \otimes p)_{-1} \otimes m_0 \otimes (n \otimes p)_0 \\ &= m_{-1}(n_{-1}p_{-1}) \otimes m_0 \otimes (n_0 \otimes p_0). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} (id_H \otimes \varphi) \circ \rho((m \otimes n) \otimes p) &= (id_H \otimes \varphi)((m \otimes n)_{-1}p_{-1} \otimes (m \otimes n)_0 \otimes p_0) \\ &= (m_{-1}n_{-1})p_{-1} \otimes (m_0 \otimes n_0) \otimes p_0. \end{aligned}$$

Como a multiplicação em$H$ e o produto tensorial são associativos, temos a igualdade desejada.

(v) Seguindo o mesmo raciocínio do intem anterior, precisamos apenas mostrar que dado $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$, $\phi : \Bbbk \otimes M \longrightarrow M$ é um morfismo de H-comódulos à esquerda via $\phi(1_\Bbbk \otimes m) = m$, para qualquer $m \in M$. De fato,

$$\begin{aligned} \rho \circ \phi(1_\Bbbk \otimes m) &= \rho(m) \\ &= m_{-1} \otimes m_0 \\ &= m_{-1} \otimes \phi(1_\Bbbk \otimes m_0) \\ &= (id_H \otimes \phi)(m_{-1} \otimes 1_\Bbbk \otimes m_0) \\ &= (id_H \otimes \phi)(1_H m_{-1} \otimes 1_\Bbbk \otimes m_0) \\ &= (id_H \otimes \phi) \circ \rho(1_\Bbbk \otimes m). \end{aligned}$$

Analogamente $\phi' : M \longrightarrow M \otimes \Bbbk$ é um morfismo de H-comódulos à esquerda.

Portanto, $M \otimes \Bbbk \simeq M \simeq \Bbbk \otimes M \in {}^H_H\mathcal{YD}$.

(vi) Seja H uma álgebra de Hopf, com a antípoda bijetiva. Dados M, $N \in {}_H^H\mathcal{YD}$, $m \in M$ e $n \in N$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} c : M \otimes N &\longrightarrow N \otimes M \\ m \otimes n &\longmapsto m_{-1} \cdot n \otimes m_0 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que c é um morfismo de H-módulos. De fato,

$$\begin{aligned} c(h \cdot (m \otimes n)) &= c(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \\ &= (h_1 \cdot m)_{-1} \cdot (h_2 \cdot n) \otimes (h_1 \cdot m)_0 \\ &\overset{4.2}{=} (h_1 m_{-1} S(h_3) h_4) \cdot n \otimes h_2 \cdot m_0 \\ &= (h_1 m_{-1} \varepsilon(h_3)) \cdot n \otimes h_2 \cdot m_0 \\ &= (h_1 m_{-1}) \cdot n \otimes h_2 \cdot m_0 \\ &= h_1 \cdot (m_{-1} \cdot n) \otimes h_2 \cdot m_0 \\ &= h \cdot (m_{-1} n \otimes m_0) \\ &= h \cdot (c(m \otimes n)). \end{aligned}$$

para todos $h \in H$, m, $n \in M$.

Agora, mostramos que c é um morfismo de H-comódulo, ou seja, dados $m \in M$ e $n \in N$, temos $\rho(c(m \otimes n)) = (id_H \otimes c) \circ \rho(m \otimes n)$. Desde que $m_{-1} \in H$ e N é um H-módulo em $\mathcal{YD}$, temos:

$$\rho(m_{-1} \cdot n) = m_{-3} n_{-1} S(m_{-1}) \otimes m_{-2} n_0 \tag{4.6}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \rho(c(m \otimes n)) &= \rho(m_{-1} \cdot n \otimes m_0) \\ &= (m_{-1} n)_{-1} m_{0-1} \otimes (m_{-1} n)_0 \otimes m_0 \\ &\overset{4.6}{=} m_{-4} n_{-1} S(m_{-2}) m_{-1} \otimes m_{-3} n_0 \otimes m_0 \\ &= m_{-3} n_{-1} \varepsilon(m_{-1}) \otimes m_{-2} n_0 \otimes m_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m_{-2}n_{-1} \otimes m_{-1}n_0 \otimes m_0 \\
&= m_{-1}n_{-1} \otimes c(m_0 \otimes n_0) \\
&= (id_H \otimes c)(m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0) \\
&= (id_H \otimes c) \circ \rho(m \otimes n).
\end{aligned}
$$

Para ver que c é bijetiva, consideremos a aplicação

$$
\begin{aligned}
c^{-1} : N \otimes M &\longrightarrow M \otimes N \\
n \otimes m &\longmapsto m_0 \otimes S^{-1}(m_{-1}) \cdot n
\end{aligned}
$$

Analogamente ao feito para o morfismo c, mostra-se que c^{-1} é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Afirmamos que c^{-1} é a inversa de c. De fato, pois para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$, temos:

$$
\begin{aligned}
c^{-1} \circ c(m \otimes n) &= c^{-1}(m_{-1} \cdot n \otimes m_0) \\
&= m_{00} \otimes S^{-1}(m_{0-1}) \cdot (m_{-1} \cdot n) \\
&= m_0 \otimes (S^{-1}(m_{-1})m_{-2}) \cdot n \\
&= m_0 \otimes \varepsilon(m_{-1})1 \cdot n \\
&= m_0\varepsilon(m_{-1}) \otimes n \\
&= m \otimes n.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
c \circ c^{-1}(n \otimes m) &= c(m_{-1} \cdot n \otimes m_0) \\
&= (m_{-1}S^{-1}(m_{-2})) \cdot n \otimes m_0 \\
&= \varepsilon(m_{-1})1 \cdot n \otimes m_0 \\
&= n \otimes m.
\end{aligned}
$$

Portanto, c é um isomorfismo de módulos em ${}_H^H\mathcal{YD}$. $\blacksquare$

Estamos agora em condições de provar o seguinte resultado:

Teorema 4.2.4. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal.*

Demonstração: Precisamos definir a coleção $({}^H_H\mathcal{YD}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r)$. Consideremos $\otimes := \otimes_{\mathbb{k}}$ o produto tensorial sobre $\mathbb{k}$, que está bem definido pelos itens (i) e (ii) do Lema anterior. Pelo intem (iii) desse mesmo lema, definimos $\mathbb{I} := \mathbb{k}$ que é um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Agora seja,

$$\begin{aligned} a_{M,N,P} : M \otimes (N \otimes P) &\longrightarrow (M \otimes N) \otimes P \\ m \otimes (n \otimes p) &\longmapsto (m \otimes n) \otimes p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_M : M &\longrightarrow \mathbb{k} \otimes M \\ m &\longmapsto 1_{\mathbb{k}} \otimes m \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} l_M : M &\longrightarrow M \otimes \mathbb{k} \\ m &\longmapsto m \otimes 1_{\mathbb{k}} \end{aligned}$$

para quaisquer M, N e P H-módulos á esquerda e elementos $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$. Claramente, $a_{M,N,P}$, l_M e r_M são bijetoras. Pelo item (iv) do Lema 4.2.3 $a_{M,N,P}$ é um morfismo em $\mathcal{YD}$ e, por (v), l_M e r_M também o são. Ainda, pelo Exemplo 4.1.9 temos que $a_{M,N,P}$, l_M e r_M são transformações naturais. Podemos concluir assim que estas aplicações são isomorfismos naturais em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Mais ainda, novamente pelo Exemplo 4.1.9, estas aplicações satisfazem os axiomas do triângulo e do pentágono. Portanto, $({}^H_H\mathcal{YD}, \otimes, \mathbb{k}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal. ■

Agora ao colocarmos hipóteses sobre a álgebra de Hopf, obtemos novas propriedades para esta categoria. O teorema abaixo retrata o que acabamos de dizer.

Teorema 4.2.5. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Então $({}^H_H\mathcal{YD}, \otimes, \mathbb{k}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal trançada.*

Demonstração: Definimos, para qualquer M, N em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e elementos $m \in M$ e

$n \in N$, a função

$$\begin{aligned} c_{M,N} : M \otimes N &\longrightarrow N \otimes M \\ m \otimes n &\longmapsto m_{-1} \cdot n \otimes m_0 \end{aligned}$$

Já mostramos pelo item (vi) do Lema 4.2.3 que c é um isomorfismo de módulos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Agora verificaremos que c é uma transformação natural, ou seja, dados M, N, M', N' objetos em ${}^H_H\mathcal{YD}$, $f : M \longrightarrow M'$ e $g : N \longrightarrow N'$ morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, "c_{M,N}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & N \otimes M \arrow[d, "g\otimes f"] \\ M' \otimes N' \arrow[r, "c_{M',N'}"'] & N' \otimes M' \end{tikzcd}$$

De fato, sejam $m \in M$ e $n \in N$. Assim

$$\begin{aligned} c_{M',N'} \circ (f \otimes g)(m \otimes n) &= c_{M',N'}(f(m) \otimes g(n)) \\ &= f(m)_{-1} \cdot g(n) \otimes f(m)_0 \\ &\overset{4.4}{=} m_{-1} \cdot g(n) \otimes f(m_0) \\ &= g(m_{-1} \cdot n) \otimes f(m_0) \\ &= (g \otimes f)(m_{-1} \cdot n \otimes m_0) \\ &= (g \otimes f) \circ c_{M,N}(m \otimes n). \end{aligned}$$

Agora basta mostrarmos que c satisfaz os axiomas do hexágono. Sejam M, N, P objetos em ${}^H_H\mathcal{YD}$, $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$, então

$$\begin{aligned} (c_{M,P} \otimes id) \circ a_{M,P,N} \circ (id \otimes c_{N,P})(m \otimes (n \otimes p)) &= (c_{M,P} \otimes id) \circ a_{M,P,N}(m \otimes (n_{-1} \cdot p \otimes n_0)) \\ &= (c_{M,P} \otimes id)((m \otimes n_{-1} \cdot p) \otimes n_0) \\ &= (m_{-1} \cdot (n_{-1} \cdot p) \otimes m_0) \otimes n_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{P,M,N}((m_{-1}n_{-1}) \cdot p \otimes (m_0 \otimes n_0)) \\
&= a_{P,M,N}((m \otimes n)_{-1} \cdot p \otimes (m \otimes n)_0) \\
&= a_{P,M,N} \circ (c_{M\otimes N,P})((m \otimes n) \otimes p) \\
&= a_{P,M,N} \circ (c_{M\otimes N,P}) \circ a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p)).
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(id \otimes c_{M,P}) \circ a^{-1}_{N,M,P} \circ (c_{M,N} \otimes id)((m \otimes n) \otimes p) &= (id \otimes c_{M,P}) \circ a^{-1}_{N,M,P}((m_{-1} \cdot n \otimes m_0) \otimes p) \\
&= (id \otimes c_{M,P})(m_{-1} \cdot n \otimes (m_0 \otimes p)) \\
&= m_{-2} \cdot n \otimes (m_{-1} \cdot p \otimes m_0) \\
&= a^{-1}_{N,P,M}((m_{-2} \cdot n \otimes m_{-1} \cdot p) \otimes m_0) \\
&= a^{-1}_{N,P,M}(m_{-1} \cdot (n \otimes p) \otimes m_0) \\
&= a^{-1}_{N,P,M} \circ c_{M,N\otimes P}(m \otimes (n \otimes p)) \\
&= a^{-1}_{N,P,M} \circ c_{M,N\otimes P} \circ a^{-1}_{M,N,P}((m \otimes n) \otimes p).
\end{aligned}
$$

Portanto, $({}_H^H\mathcal{YD}, \otimes, \Bbbk, a, l, r, c)$ é uma categoria trançada. ■

O próximo exemplo retorna à última definição apresentada na seção anterior.

Exemplo 4.2.6. Todo módulo de Yetter-Drinfeld é um espaço vetorial trançado.

De fato, seja M um módulo de Yetter-Drinfeld. Como a categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$ é trançada, existe o isomorfismo $c_{M,M} : M \otimes M \longrightarrow M \otimes M$ que satisfaz a equação da trança.

4.3 A categoria Rep(D(H))

Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Nesta seção nosso objetivo é provar dois resultados principais. O primeiro deles será mostrar que a categoria dos módulos $Rep(D(H))$ é uma categoria trançada e o segundo, será dar uma condição necessária e suficiente para que a categoria dos módulos $Rep(H)$ seja uma categoria trançada. Para isso iniciaremos apresentando o seguite lema:

Lema 4.3.1. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Um $\Bbbk$ - espaço M é um $D(H)$-módulo à esquerda, se e somente se, para todos $h \in H$, $f \in (H^*)^{cop}$ e $m \in M$:*

(i) M é um H-módulo à esquerda via $h \cdot m = (\varepsilon \bowtie h) \cdot m$.

(ii) M é um $(H^*)^{cop}$- módulo à esquerda $f \cdot m = (f \bowtie 1) \cdot m$.

(iii) $h \cdot (f \cdot m) = (h_1 \rightharpoonup f_2) \cdot ((h_2 \leftharpoonup f_1) \cdot m)$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que M é um $D(H)$ - módulo à esquerda. Vamos mostrar que vale (i), (ii) e (iii).

(i) Esse fato segue do item (iii) de 3.2.6, onde $H \hookrightarrow D(H)$ (como álgebra), via $h \mapsto \varepsilon \bowtie h$.

(ii) Analogamente ao anterior, temos por (iv) do Lema 3.2.6, que $(H^*)^{cop} \hookrightarrow D(H)$ (como álgebra), via $f \mapsto f \bowtie 1$.

(iii) Por fim, para todos $h \in H$, $f \in (H^*)^{cop}$ e $m \in M$,

$$\begin{aligned} h \cdot (f \cdot m) &= (\varepsilon \bowtie h) \cdot ((f \bowtie 1) \cdot m) \\ &\overset{(*)}{=} ((\varepsilon \bowtie h)(f \bowtie 1)) \cdot m \\ &= (h_1 \rightharpoonup f_2 \bowtie h_2 \leftharpoonup f_1) \cdot m \\ &= (h_1 \rightharpoonup f_2 \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h_2 \leftharpoonup f_1) \cdot m \\ &\overset{(*)}{=} (h_1 \rightharpoonup f_2 \bowtie 1) \cdot ((\varepsilon \bowtie h_2 \leftharpoonup f_1) \cdot m). \end{aligned}$$

onde em $(*)$ estamos usando a hipótese que M é um $D(H)$-módulo à esquerda. Portanto, (i), (ii) e (iii) valem.

($\Leftarrow$) Suponhamos que (i), (ii) e (iii) são verdadeiras, logo

$$\begin{aligned}
(g \bowtie k) \cdot ((f \bowtie h) \cdot m) &= (g \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie k)((f \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie h) \cdot m) \\
&= g \cdot k \cdot (f \cdot h \cdot m) \\
&\overset{(iii)}{=} g \cdot (k_1 \rightharpoonup f_2) \cdot ((k_2 \leftharpoonup f_1) \cdot (h \cdot m)) \\
&\overset{(i)}{=} g \cdot (k_1 \rightharpoonup f_2) \cdot ((k_2 \leftharpoonup f_1) \cdot h) \cdot m \\
&\overset{(ii)}{=} (g \cdot (k_1 \rightharpoonup f_2)) \cdot ((k_2 \leftharpoonup f_1) \cdot h) \cdot m \\
&= ((g \bowtie 1)(k_1 \rightharpoonup f_2 \bowtie 1))((\varepsilon \bowtie k_2 \leftharpoonup f_1)(\varepsilon \bowtie h)) \cdot m \\
&= (g(k_1 \rightharpoonup f_2) \bowtie 1)(\varepsilon \bowtie (k_2 \leftharpoonup f_1)h) \cdot m \\
&= (g(k_1 \rightharpoonup f_2) \bowtie (k_2 \leftharpoonup f_1)h) \cdot m \\
&= ((g \bowtie k)(f \bowtie h)) \cdot m.
\end{aligned}$$

e $1_{D(H)} \cdot m = (\varepsilon \bowtie 1) \cdot m \overset{(ii)\ ou\ (i)}{=} m$. Portanto, M é um $D(H)$-módulo à esquerda. ∎

Proposição 4.3.2. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Um $\Bbbk$- espaço M é um $D(H)$-módulo à esquerda se e somente se, M é um H-módulo à esquerda e um H-comódulo à direita, tal que vale*

$$(h \cdot m)_0 \otimes (h \cdot m)_1 = h_2 \cdot m_0 \otimes h_3 m_1 S^{-1}(h_1) \tag{4.7}$$

para todos $h \in H$ e $m \in M$.

Demonstração: Primeiramente observe que no Lema 4.3.1 não usamos a comultiplicação de H^*, logo por esse resultado temos que M é um $D(H)$-módulo à esquerda se, e somente se, M é um H-módulo à esquerda e um H^*-módulo à esquerda satisfazendo

$$h \cdot (f \cdot m) = (h_1 \rightharpoonup f_2) \cdot ((h_2 \leftharpoonup f_1) \cdot m) \tag{4.8}$$

para todos $h \in H$, $f \in H^*$ e $m \in M$.

Como H tem dimensão finita, então pela Observação 1.2.8, M é um H^*-módulo racional. Logo, M é um H^*-módulo à esquerda, se e somente se, M é um H-comódulo à direita. Ainda, se $m \longmapsto m_0 \otimes m_1$ é a aplicação de comódulos, então $f \cdot m =< f, m_1 > m_0$, para qualquer $f \in H^*$. Usando esta relação, vamos reescrever (4.8) nesta nova linguagem:

$$h \cdot (f \cdot m) = h\cdot < f, m_1 > m_0 =< f, m_1 > h \cdot m_0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(h_1 \rightharpoonup f_2) \cdot ((h_2 \leftharpoonup f_1) \cdot m) &= < h_1 \rightharpoonup f_2, ((h_2 \leftharpoonup f_1) \cdot m)_1 > ((h_2 \leftharpoonup f_1) \cdot m)_0 \\
&\overset{(ii),\ 3.2.2}{=} < f_1, S^{-1}(h_4)h_2 >< h_1 \rightharpoonup f_2, (h_3 \cdot m)_1 > (h_3 \cdot m)_0 \\
&\overset{def. \rightharpoonup}{=} < f_1, S^{-1}(h_5)h_3 >< f_2, S^{-1}(h_2)(h_4 \cdot m)_1 h_1 > (h_4 \cdot m)_0 \\
&= < f, S^{-1}(h_5)h_3 S^{-1}(h_2)(h_4 \cdot m)_1 h_1 > (h_4 \cdot m)_0 \\
&= < f, S^{-1}(h_4)\varepsilon(h_2)(h_3 \cdot m)_1 h_1 > (h_3 \cdot m)_0 \\
&= < f, S^{-1}(h_3)(h_2 \cdot m)_1 h_1 > (h_2 \cdot m)_0.
\end{aligned}$$

Logo $< f, m_1 > h \cdot m_0 =< f, S^{-1}(h_3)(h_2 \cdot m)_1 h_1 > (h_2 \cdot m)_0$, para todo $f \in H^*$. E isto é equivalente à

$$h \cdot m_0 \otimes m_1 = (h_2 \cdot m)_0 \otimes S^{-1}(h_3)(h_2 \cdot m)_1 h_1.$$

Portanto M é um $D(H)$-módulo á esquerda se, e somente se, M é um H-módulo à esquerda e um H-comódulo à direita satisfazendo

$$h \cdot m_0 \otimes m_1 = (h_2 \cdot m)_0 \otimes S^{-1}(h_3)(h_2 \cdot m)_1 h_1. \tag{4.9}$$

Para finalizar, mostraremos que 4.9 é equivalente a

$$(h \cdot m)_0 \otimes (h \cdot m)_1 = h_2 \cdot m_0 \otimes h_3 m_1 S^{-1}(h_1).$$

De fato, se vale (4.9), então temos:

$$\begin{aligned}
h_2 \cdot m_0 \otimes h_3 m_1 S^{-1}(h_1) &= (h_3 \cdot m)_0 \otimes h_5 S^{-1}(h_4)(h_3 \cdot m)_1 h_2 S^{-1}(h_1) \\
&= (h_2 \cdot m)_0 \otimes h_4 S^{-1}(h_3)(h_2 \cdot m)_1 \varepsilon(h_1) \\
&= (h_2 \cdot m)_0 \otimes \varepsilon(h_3)(h_2 \cdot m)_1 \varepsilon(h_1) \\
&= (h \cdot m)_0 \otimes (h \cdot m)_1.
\end{aligned}$$

Por outro lado se vale a igualdade $(h \cdot m)_0 \otimes (h \cdot m)_1 = h_2 \cdot m_0 \otimes h_3 m_1 S^{-1}(h_1)$, então

$$\begin{aligned}
(h_2 \cdot m)_0 \otimes S^{-1}(h_3)(h_2 \cdot m)_1 h_1 &= h_3 \cdot m_0 \otimes S^{-1}(h_5) h_4 m_1 S^{-1}(h_2) h_1 \\
&= h_2 \cdot m_0 \otimes \varepsilon(h_3) m_1 \varepsilon(h_1) \\
&= h \cdot m_0 \otimes m_1.
\end{aligned}$$

Concluindo então que M é um $D(H)$-módulo à esquerda se, e somente se, M é um H-módulo à esquerda e um H-comódulo à direita satisfazendo

$$(h \cdot m)_0 \otimes (h \cdot m)_1 = h_2 \cdot m_0 \otimes h_3 m_1 S^{-1}(h_1)$$

para todos $h \in H$ e $m \in M$. Isto conclui nossa demonstração. ∎

Estamos agora em condições de mostrar o seguinte resultado.

Teorema 4.3.3. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então*

$$Rep(D(H)) = {}^{H^{cop}}_{H^{cop}}\mathcal{YD}.$$

Demonstração: De fato, lembrando que H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda S^{-1}, segue que para todos $h \in H$ e $m \in M$, temos

$$
\begin{array}{rcl}
M \in {}^{H^{cop}}_{H^{cop}}\mathcal{YD} \Leftrightarrow & \bullet & M \text{ é um } H^{cop} - \text{módulo à esquerda} \\
& \bullet & M \text{ é um } H^{cop} - \text{comódulo à esquerda} \\
& \bullet & \rho(h \cdot m) = (h \cdot m)_{-1} \otimes (h \cdot m)_0 = h_3 m_{-1} S^{-1}(h_1) \otimes h_2 \cdot m_0 \\
\Leftrightarrow & & \\
& \bullet & M \text{ é um } H - \text{módulo à esquerda} \\
& \bullet & M \text{ é um } H - \text{comódulo à direita via } m \longmapsto m_0 \otimes m_1 := m_0 \otimes m_{-1} \\
& \bullet & (h \cdot m)_0 \otimes (h \cdot m)_1 = h_2 \cdot m_0 \otimes h_3 m_1 S^{-1}(h_1) \\
\overset{4.3.2}{\Leftrightarrow} & & M \in Rep(D(H)).
\end{array}
$$

■

Os dois próximos resultados são então evidentes, a partir do Teorema anterior e do Teorema 4.2.5.

Corolário 4.3.4. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então a categoria $Rep(D(H))$ é uma categoria monoidal trançada.*

Corolário 4.3.5. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então*

$$
{}^{H}_{H}\mathcal{YD} = Rep(D(H^{cop})).
$$

Para demonstrar o último resultado deste trabalho, precisamos do seguinte lema.

Lema 4.3.6. *Seja H uma biálgebra e considere o isomorfismo $a_{V,W,U}$ dado no exemplo 4.1.9. Se existe um elemento $Q \in H \otimes H$ tal que, para todos V, $W \in Rep(H)$ e elementos $v \in V$ e $w \in W$, a aplicação*

$$
\begin{array}{rcl}
c_{V,W} : V \otimes W & \longrightarrow & W \otimes V \\
v \otimes w & \longmapsto & Q \cdot (w \otimes v)
\end{array}
$$

é um isomorfismo natural, então para todos U, V, $W \in Rep(H)$, temos

(i) $a_{W,U,V} \circ c_{U\otimes V,W} \circ a_{U,V,W} = (c_{U,W} \otimes id) \circ a_{U,W,V} \circ (id \otimes c_{V,W})$ *se, e somente se,* $(id \otimes \Delta)(Q) = Q^{12}Q^{13}$.

(ii) $a^{-1}_{V,W,U} \circ c_{U,V\otimes W} \circ a^{-1}_{U,V,W} = (id \otimes c_{U,W}) \circ a^{-1}_{V,U,W} \circ (c_{U,V} \otimes id)$ *se, e somente se* $(\Delta \otimes id)(Q) = Q^{23}Q^{13}$.

Demonstração: Sejam $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$ e $Q = \sum_i a_i \otimes b_1$

(i) Por um lado, temos

$$\begin{aligned} a_{W,U,V} \circ c_{U\otimes V,W} \circ a_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) &= a_{W,U,V} \circ c_{U\otimes V,W}((u \otimes v) \otimes w) \\ &= a_{W,U,V}(Q \cdot (w \otimes (u \otimes v))) \\ &= \sum_i a_{W,U,V}(a_i w \otimes (b_{i1}u \otimes b_{i2}v)) \\ &= (a_i w \otimes b_{i1}u) \otimes b_{i2}v \\ &= ((id \otimes \Delta)(Q))((w \otimes u) \otimes v). \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} (c_{U,W} \otimes id) \circ a_{U,W,V} \circ (id \otimes c_{V,W})(u \otimes (v \otimes w)) &= (c_{U,W} \otimes id) \circ a_{U,W,V}(u \otimes (Q \cdot (w \otimes v))) \\ &= \sum_i (c_{U,W} \otimes id) \circ a_{U,W,V}(u \otimes (a_i w \otimes b_i v))) \\ &= \sum_i (c_{U,W} \otimes id)((u \otimes a_i w) \otimes b_i v) \\ &= \sum_i Q \cdot (a_i w \otimes u) \otimes b_i v \\ &= \sum_{i,j} (a_j a_i w \otimes b_j) \otimes b_i v \\ &= (Q^{12}Q^{13})((w \otimes u) \otimes v). \end{aligned}$$

(ii) Por um lado, obtemos

$$\begin{aligned} a^{-1}_{V,W,U} \circ c_{U,V\otimes W} \circ a^{-1}_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w) &= a^{-1}_{V,W,U} \circ c_{U,V\otimes W}(u \otimes (v \otimes w)) \\ &= a^{-1}_{V,W,U}(Q \cdot ((v \otimes w) \otimes u)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i a^{-1}_{V,W,U}((a_{i1}v \otimes a_{i2}w) \otimes b_i u)\\
&= \sum_i a_{i1}v \otimes (a_{i2}w \otimes b_i u)\\
&= ((\Delta \otimes id)(Q))(v \otimes (w \otimes u)).
\end{aligned}
$$

e por outro lado, segue que

$$
\begin{aligned}
(id \otimes c_{U,W}) \circ a^{-1}_{V,U,W} \circ (c_{U,V} \otimes id)((u \otimes v) \otimes w) &= \sum_i (id \otimes c_{U,W}) \circ a^{-1}_{V,U,W}((a_i v \otimes b_i u) \otimes w)\\
&= \sum_i (id \otimes c_{U,W})(a_i v \otimes (b_i u \otimes w))\\
&= \sum_{i,j} c_i v \otimes (a_j w \otimes b_j b_i u)\\
&= (Q^{23}Q^{13})(v \otimes (w \otimes u)).
\end{aligned}
$$

O lema está demonstrado, então. ■

Finalizamos este trabalho com um resultado que caracteriza as álgebras de Hopf H finito dimensionais, para as quais $Rep(H)$ é uma categoria monoidal trançada.

Teorema 4.3.7. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então existe $R \in H \otimes H$ tal que (H, R) é quase triangular se, e somente se, $Rep(H)$ é uma categoria monoidal trançada.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos que (H, R) é quase triangular. Em particular, H é quase-cocomutativa, logo pelo Lema 3.1.2, se V, $W \in Rep(H)$, então

$$
\begin{aligned}
c_{V,W} : V \otimes W &\longrightarrow W \otimes V\\
v \otimes w &\longmapsto R^{-1} \cdot (w \otimes v)
\end{aligned}
$$

é um isomorfismo de H- módulos à esquerda, para todos $v \in V$ e $w \in W$. Note que, pelo Exemplo 4.1.9, $Rep(H)$ já é uma categoria monoidal para qualquer álgebra de Hopf H, com isso precisamos apenas mostrar que vale os axiomas do hexágono.

Como (H, R) é quase triangular, temos que vale (3.3) e (3.4). Logo se $(\Delta \otimes id)(R) = R^{13}R^{23}$, então temos que $(\Delta \otimes id)(R^{-1}) = (R^{23})^{-1}(R^{13})^{-1}$. Tomando $R^{-1} = Q$, onde Q é o elemento do Lema 4.3.6, temos que vale o segundo axioma do hexágono.

De forma similar, se $(id \otimes \Delta)(R) = R^{13}R^{12}$, então segue que $(id \otimes \Delta)(R^{-1}) = (R^{12})^{-1}(R^{13})^{-1}$. Assim, pelo Lema 4.3.6, vale o primeiro axioma do hexágono. Portanto, $Rep(H)$ é uma categoria monoidal trançada.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $Rep(H)$ é uma categoria monoidal trançada, ou seja, existe o isomorfismo de H- módulos $c_{V,W}$. Suponhamos que existe $Q \in H \otimes H$ tal que $c_{V,W}(v \otimes w) = Q \cdot (w \otimes v)$. Note que $c_{V,W}$ é um isomorfismo se, e somente se, Q é invertível e $c_{V,W}$ satisfaz os axiomas do hexágono se, e somente se, $(\Delta \otimes id)(Q) = Q^{23}Q^{13}$ e $(id \otimes \Delta)(Q) = Q^{12}Q^{13}$ pelo Lema 4.3.6.

Afirmamos que (H, R) é quase triangular com $R = Q^{-1}$. Claramente, se existe tal elemento $Q \in H \otimes H$ mencionado acima e $R = Q^{-1}$, segue que existe $R \in H \otimes H$ é invertível e valem as relações (3.3) e (3.4) da definição de álgebra de Hopf quase triangular.

Agora mostraremos a quase comutatividade de H. Dado $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
Q\tau\Delta(h) &= Q(h_2 \otimes h_1) \\
&= c_{H,H}(h_1 \otimes h_2) \\
&= c_{H,H}(h \cdot (1_H \otimes 1_H)) \\
&= h \cdot c_{H,H}(1_H \otimes 1_H) \\
&= h \cdot Q(1_H \otimes 1_H) \\
&= h \cdot Q \\
&= \Delta(h)Q.
\end{aligned}$$

Ou seja, $Q\tau\Delta(h) = \Delta(h)Q$, mas $R = Q^{-1}$ e então, $\tau\Delta(h) = R\Delta(h)R^{-1}$.

Para finalizar a demonstração, precisamos mostrar a existência do elemento $Q \in H \otimes H$. Note que $H \otimes H \in Rep(H)$. Logo, definindo $Q := c_{H \otimes H}(1_H \otimes 1_H)$, segue que $c_{H,H}$ vale que $c_{H \otimes H}(1_H \otimes 1_H) = Q(1_H \otimes 1_H) = Q$.

Agora, mostremos que para todos os $V, W \in Rep(H)$ temos que $c_{V,W}(v \otimes w) = Q \cdot (w \otimes v)$. De fato, Sejam V, $W \in Rep(H)$, $v \in V$ e $w \in W$. Considere as aplicações de H- módulos à esquerda

$$
\begin{array}{ccc}
f_v : H \longrightarrow V & \quad e \quad & f_W : H \longrightarrow W \\
h \longmapsto h \cdot v & & h \longmapsto h \cdot w
\end{array}
$$

Logo o diagrama abaixo comuta por naturalidade,

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "f_v \otimes f_w"] \arrow[d, "c_{H \otimes H}"'] & V \otimes W \arrow[d, "c_{V,W}"] \\
H \otimes H \arrow[r, "f_W \otimes f_v"'] & W \otimes V
\end{tikzcd}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
c_{V,W}(v \otimes w) &= c_{V,W}(f_v \otimes f_w)(1_H \otimes 1_H) \\
&= (f_w \otimes f_v)(c_{H,H}(1_H \otimes 1_H)) \\
&= (f_w \otimes f_v)(Q) \\
&= Q(w \otimes v)
\end{aligned}
$$

Então, para todo $c_{V,W}$ existe Q tal que $c_{V,W}(v \otimes w) = Q(w \otimes v)$. Concluindo assim a prova de que (H, R) é quase triangular. ■

Exemplo 4.3.8. Seja $(\Bbbk\mathbb{Z}_2, R = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g))$. Sabemos do Exemplo 3.1.10, que $(\Bbbk\mathbb{Z}_2, R)$ é quase triangular. Logo pelo Teorema anterior temos que $Rep(\Bbbk\mathbb{Z}_2)$ é uma categoria trançada.

Exemplo 4.3.9. Sabemos do Exemplo 3.1.11, que (H_4, R_α) é quase triangular. Logo pelo Teorema anterior $Rep(H_4)$ é uma categoria monoidal trançada.

Exemplo 4.3.10. Seja G um grupo não abeliano. Então pelo Exemplo 3.1.12 temos que $H = (\Bbbk G)^*$ não é quase triangular. Concluímos, então, pelo Teorema anterior, $Rep((\Bbbk G)^*)$ não é uma categoria monoidal trançada.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRUSKIEWITSCH, N. e SCHNEIDER, H-J.; *Pointed Hopf Algebras*, in: Recent developments in Hopf algebra Theory, MSRI Publications 43 (2002), 168, Cambridge Univ. Press.

[2] CAVEDON, C. S.; *Extensões Separáveis de Anéis Comutativos.* Porto Alegre, Instituto de Matemática da UFRGS, 1981. [Dissertação de Mestrado].

[3] CHEN, H. X.; *A Class of Noncommutative and Noncocomutative Hopf Algebras: The Quantum Version.* Comm. Algebra, 27, 5011-5032 (1999).

[4] CHEN, H. X.; *Irreducible Representations of a Class of Quantum Doubles*, Journal of Algebra 225, 391-409 (2000).

[5] DASCALESCU, S., NASTASESCU C. e RAIANU, S.; *Hopf algebras: An Introduction*, Marcel Dekker, A Series of Monographs and Textbooks, 2001.

[6] DEMEYER, E. e INGRAHAM, E.; *Separable Algebras over Commutative Rings.* Lecture Notes in Math., 181 Springer-Verlag, Berlim (1971).

[7] DRINFELD, V. G.; *On almost cocommutative Hopf algebras*, Leningrad Math J. 1, 321-342 (1990) (Russian original in Algebra and Analysis, 1989).

[8] ETINGOF, P., GELAKI, S., NIKSHYCH, D. e OSTRIK, V.; *Tensor Categories*, Lecture notes for the course 18.769 Topics in Lie Theory: Tensor Categories, MIT, 2009.

[9] FRANK, A. W. e FULLER, K. R.; *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Mathematics, 13 Springer-Verlag, New York (1992).

[10] IGLESIAS, A. G.; *Álgebras de Hopf - Parte II*, Notas de minicurso, Programa de Pós Graduação em Matemática, UFSM, 2012.

[11] ISSACS, I. M.; *Character Theory of Finite Groups.* Academic Press, New York, 1976.

[12] KASSEL, C.; *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Volume 155, Springer-Verlag, New York, 1995.

[13] LAM, T. Y.; *A First Course in Noncommutative Rings.* Graduate Texts in Mathematics, Volume 131, Springer-Verlag, New York, 2001.

[14] LARSON, R. G.; *Finite Dimensional Cosemisimple Hopf Algebras in Characteristic 0 are Semisimple*, Journal of Algebra, 117, 267-289 (1988).

[15] LU, J. H.; *On the Drinfeld Double and the Heisenberg Double of a Hopf Algebra*, Duke Math. J. 74, 763-776 (1994).

[16] MONTGOMERY, S.; *Hopf Algebras and their actions on rings.* American Mathematical Society, (1993).

[17] PINTER, S. R. R.; *Álgebras de Hopf Trançadas.* Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemática da UFSC, 2013 [Dissertação de Mestrado].

[18] QING-NIAN, P. e ZHI-FENG, H.; *Modules over double crossproducts of Skew-Hopf pairs*, Applied Mathematics and Mechanics, Volume 23, Issue 7, 828-834 (2002).

[19] RADFORD, D. E.; *The order of the antipode of a finite dimensional Hopf algebra is finite*, Amer. J. Math. 98, 333-355 (1976).

[20] RADFORD, D. E.; *The group of Automorphisms of a Semissimple Hopf Algebra Over a Field of Characteristc 0 is finite*, Ammer. J. Math. 112 (1990), 331- 357.

[21] RADFORD, D. E.; *On the Quasitriangular Structures of a Semisimple Hopf Algebra*, Journal of Algebra 141, 354-358 (1991).

[22] RADFORD, D. E.; *Minimal Quasitriangular Hopf Algebras*, Journal of Algebra 157, 258-315 (1993).

[23] RADFORD, D. E.; *The Trace Function and Hopf Algebras*, Journal of Algebra 163, 583-622 (1994).

[24] RADFORD, D. E., WESTREICH, S.; *Trace-Like Functionals on the Double of the Taft Hopf Algebra*, Journal of Algebra 301, 1-34 (2006).

[25] SCHNEIDER, H. J.; *Lectures on Hopf Algebras*, Notes by Sonia Natale. Trabajos de Matemática 31/95, FaMAF, 1995.

http://www.famaf.unc.edu.ar/andrus/paper/schn1.pdf

[26] SWEEDLER, M.; *Hopf Algebras*. WA Benjamin, (1969).

[27] TAFT, E. J.; *The Order of the Antipode of Finite-Dimensional Hopf Algebra*, Proc. Nat. Acad. of Sci. USA 68, No. 11 2631-2633 (1971).