

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**UM ESTUDO SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA
DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

por

ADRIANA ELISA LADEIRA PEREIRA

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes

ORIENTADOR

Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli

CO-ORIENTADOR

Rio Grande, dezembro de 1999.

*“ Nenhum trabalho é superior ou inferior;
o importante é a nossa atitude ao executá-lo.”*

Seicho Taniguchi

*Este trabalho é dedicado às minhas filhas **Raquel e Isabel,**
ao meu marido **Claiton,**
aos meus pais **Osmar e Telka**
e às minhas avós **Ida e**
Esmeralda (em memória).*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes por ser um excelente orientador e profissional, pela dedicação, paciência, compreensão, amizade e eficiência na transmissão de novos conhecimentos durante todo o trabalho e também pelo esforço para que esse Mestrado se realizasse.

Ao Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli, pela colaboração e eficiência na co-orientação deste trabalho.

À Profa. Dra. Maria Cristina Varriale, por permitir o acontecimento deste Mestrado.

Aos meus colegas do curso, pelo companherismo e troca de experiências.

Pelos colegas que colaboraram no desenvolvimento deste trabalho: José Luiz Fanaya Ewald, Denise Maria Varella Martinez, Celiane Machado, Catia Maria Machado, Tales Luiz Popiolek e Rosemberg de Almeida.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática da FURG e em especial ao meu colega de sala Vitor Paulo Leonardo.

Ao meu marido Claiton e às minhas filhas Raquel e Isabel, pelo amor e compreensão em todos os momentos, no decorrer deste trabalho e de toda a minha vida.

Aos meus pais, minhas avós e meus irmãos pela participação em todos os momentos da minha vida.

Gostaria de agradecer também à Angélica, que se mostrou muito amiga e que muito colaborou para que esse trabalho fosse terminado.

Finalmente, agradeço a Deus por ter me dado condições de realizar este trabalho.

RESUMO

Atualmente existem diversas aplicações envolvendo estruturas flexíveis, principalmente nos domínios da robótica ou ciência espacial. Geralmente, há a necessidade de projetar controladores para atenuarem, de forma ativa, as vibrações oriundas da ativação dos modos de vibração da estrutura, ativação esta provocada por algum esforço externo. A eficiência do controlador e, conseqüentemente, a sua aplicabilidade na prática dependem fundamentalmente da existência de um modelo dinâmico que seja realista e preditivo. Isto deve-se ao fato de que, significativas diferenças entre o modelo nominal (planta nominal) e a planta física podem fazer com que a lei de controle, projetada para o modelo nominal, leve a dinâmica do sistema em malha fechada à instabilidade. Portanto, dentre as etapas de um projeto envolvendo estruturas flexíveis, a fase de obtenção de um modelo dinâmico é fundamental. Entretanto, ao se realizar uma pesquisa bibliográfica envolvendo estruturas flexíveis, percebe-se um grande número de artigos devotados à teoria de controle, principalmente a partir dos anos oitenta, mas pouco se tem publicado especificamente sobre modelagem. Este foi o principal aspecto motivador da realização da presente dissertação, cujo primeiro objetivo é avaliar diversas técnicas de modelagem dinâmica para um tipo de estrutura que encontra bastante aplicação, principalmente no domínio da robótica flexível. Uma formulação analítica é desenvolvida, sendo determinadas assim as funções de transferência analíticas. Respostas freqüenciais oriundas destas funções de transferência servem de referência no processo de validação dos modelos, obtidos com as técnicas Formalismo Discreto (*Lumped Mass Approach*), Modos Assumidos e Deformações Polinomiais (derivada do método dos elementos finitos). Ao final, uma aplicação à robótica flexível é analisada sob a ótica da influência da dinâmica do atuador sobre a dinâmica estrutural.

ABSTRACT

Nowadays, several applications exist involving flexible structures, mainly in the domains of robotics or space sciences. Generally, it is necessary to project a control law to attenuate, in an active way, the vibrations originating from the structure modes activation, provoked by some external effort. The efficiency of the control law, and consequently its practical implementation, depends fundamentally on the existence of a realistic and predictive dynamic model. This happens because significant differences among the nominal model and the physical system may exist. And so, the control law, projected for the nominal model, can lead the closed loop system to instability. Therefore, in a project involving flexible structures, the obtaining stage of a dynamic model is fundamental. However, when making a bibliographical research involving flexible structures, one noticed a great number of papers that deal with control theory, mainly starting at the eighties, but not many papers have specifically been published on dynamic modeling. This was the main motivation aspect of the accomplishment of the present work, whose first objective is to evaluate several techniques of dynamic modeling for a structure with applications mainly in the domain of flexible robotics. An analytical formulation is developed and so, analytical transfer functions are determined. Frequency responses obtained from these transfer functions are references in the validation process of the models, obtained with the techniques Lumped Mass Approach, Assumed Modes and Polynomial Deformations (derived of the finite elements method). At the end, an application to the flexible robotics area is analyzed under the point of view of the actuator dynamics influence on the structural dynamics.

ÍNDICE

PENSAMENTO.....	i
DEDICATÓRIA.....	ii
AGRADECIMENTOS.....	iii
RESUMO.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÍNDICE.....	vi
LISTA DE FIGURAS.....	ix
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS.....	xvi
LISTA DE TABELAS.....	xviii
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II – ESTUDO ANALÍTICO DA DINÂMICA DA ESTRUTURA FLEXÍVEL	7
2.1 INTRODUÇÃO.....	8
2.2 DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA FLEXÍVEL.....	8
2.3 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO.....	9
2.4 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA.....	20
2.5 PÓLOS DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA.....	21
2.6 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO CASO COLOCADO.....	22
2.7 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO CASO NÃO COLO- CADO.....	24
2.8 GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA ABERTA.....	25
CAPÍTULO III – ABORDAGEM DISCRETA PARA ESTRUTURAS FLEXÍVEIS.....	27
3.1 INTRODUÇÃO.....	28
3.2 O FORMALISMO DISCRETO.....	28

3.3 MODELO COM UM MODO FLEXÍVEL.....	32
3.3.1 Gráficos das simulações.....	36
3.3.2 Funções de Transferência (sistema 1af).....	39
3.3.3 Diagramas de Bode (sistema 1af).....	41
3.4 MODELO COM DOIS MODOS FLEXÍVEIS.....	46
3.4.1 Gráficos das simulações.....	50
3.4.2 Funções de Transferência (sistema 2af).....	53
3.4.3 Diagramas de Bode (sistema 2af).....	54
3.5 MODELO COM TRÊS MODOS FLEXÍVEIS.....	59
3.5.1 Gráficos das simulações.....	64
3.5.2 Funções de Transferência (sistema 3af).....	67
3.5.3 Diagramas de Bode (sistema 3af).....	69
3.6 CONCLUSÕES.....	74
CAPÍTULO IV – O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS.....	75
4.1 INTRODUÇÃO.....	76
4.2 DESCRIÇÃO DO MÉTODO.....	76
4.3 OBTENÇÃO DO MODELO DINÂMICO.....	88
4.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES.....	90
CAPÍTULO V – O MÉTODO DAS DEFORMAÇÕES POLINOMIAIS.....	92
5.1 INTRODUÇÃO.....	93
5.2 DESCRIÇÃO DO MÉTODO.....	93
5.3 UTILIZAÇÃO DE UMA APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DO QUINTO GRAU...97	
5.4 APLICAÇÃO AO CASO DE UM MANIPULADOR COM UM ELO FLEXÍVEL...110	
5.5 GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA ABERTA.....112	
CAPÍTULO VI – APLICAÇÃO A MANIPULADORES COM ELOS FLEXÍVEIS.....	117
6.1 INTRODUÇÃO.....	118

6.2 INFLUÊNCIA DA INÉRCIA DO ROTOR.....	118
6.3 INFLUÊNCIA DO ATRITO LINEAR DO ATUADOR.....	122
6.4 INFLUÊNCIA DO ATRITO NÃO LINEAR DO ATUADOR.....	126
6.5 INFLUÊNCIA DA ELASTICIDADE INTERNA.....	130
CAPÍTULO VII – CONCLUSÕES.....	133
CAPÍTULO VIII – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	140

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Desenho de um robô manipulador para a montagem de estações orbitais.....	2
Figura 1.2 – Satélite artificial com apêndices flexíveis.....	3
Figura 1.3 – Sistema massa-mola-amortecedor.....	5
Figura 1.4 – Estrutura flexível considerada para o desenvolvimento da presente dissertação.....	5
Figura 2.1 – Estrutura flexível.....	9
Figura 2.2 – Gráfico da função de transferência analítica (caso colocado).....	26
Figura 2.3 – Gráfico da função de transferência analítica (caso não colocado).....	26
Figura 3.1 – Estrutura Flexível (vista de cima).....	28
Figura 3.2 – Estrutura dividida em duas partes rígidas com 1 articulação fictícia.....	29
Figura 3.3 – Estrutura dividida em duas partes rígidas.....	30
Figura 3.4 – Estrutura dividida em três partes rígidas com 2 articulações fictícias.....	30
Figura 3.5 – Estrutura dividida em três partes rígidas.....	31
Figura 3.6 – Estrutura dividida em quatro partes rígidas com 3 articulações fictícias.....	31
Figura 3.7 – Estrutura dividida em quatro partes rígidas.....	32
Figura 3.8 – Curvas da posição e velocidade angular do rotor (sistema 1af).....	37
Figura 3.9 – Curvas da posição e velocidade angular da carga (sistema 1af).....	38
Figura 3.10 – Velocidade de deformação angular na articulação fictícia (sistema 1af).....	38
Figura 3.11 – Sistema em malha aberta.....	40
Figura 3.12 – Diagrama de Bode – posição angular do rotor (caso colocado – 1af).....	42
Figura 3.13 – Diagrama de Bode – velocidade angular do rotor (caso colocado – 1af).....	42
Figura 3.14 – Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 1 modo flexível.....	43
Figura 3.15 – Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 1 modo flexível, sendo negligenciados os torques de atrito no Modelo Discreto.....	44
Figura 3.16 – Diagrama de Bode – Posição angular da carga (caso não colocado – 1af).....	45

Figura 3.17 – Diagrama de Bode – Velocidade angular da carga (caso não colocado – 1af).....	45
Figura 3.18 – Curvas da posição e velocidade angular do rotor (sistema 2af).....	51
Figura 3.19 – Curvas da posição e velocidade angular da carga (sistema 2af).....	52
Figura 3.20 – Velocidade de deformação angular na última articulação fictícia (sistema 2af).....	52
Figura 3.21 – Diagrama de Bode – Posição angular do rotor (caso colocado – 2af).....	55
Figura 3.22 – Diagrama de Bode – Velocidade angular do rotor (caso colocado – 2af).....	56
Figura 3.23 – Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 2 modos flexíveis...	56
Figura 3.24 – Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 2 modos flexíveis, sendo negligenciados os torques de atrito no Modelo Discreto.....	57
Figura 3.25 – Diagrama de Bode – Posição angular da carga (caso não colocado – 2af).....	58
Figura 3.26 – Diagrama de Bode – Velocidade angular da carga (caso não colocado – 2af).....	58
Figura 3.27 – Curvas da posição e velocidade angular do rotor (sistema 3af).....	65
Figura 3.28 – Curvas da posição e velocidade angular da carga (sistema 3af).....	66
Figura 3.29 – Velocidade de deformação angular na última articulação fictícia (sistema 3af).....	66
Figura 3.30 – Diagrama de Bode – Posição angular do rotor (caso colocado – 3af).....	69
Figura 3.31 – Diagrama de Bode – Velocidade angular do rotor (caso colocado – 3af).....	70
Figura 3.32 – Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 3 modos flexíveis....	71
Figura 3.33 – Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 3 modos flexíveis, sendo negligenciados os torques de atrito no Modelo Discreto.....	71
Figura 3.34 – Diagrama de Bode – Posição angular da carga (caso não colocado – 3af).....	73
Figura 3.35 – Diagrama de Bode – Velocidade angular da carga (caso não colocado – 3af).....	73
Figura 4.1 – Gráficos das funções de forma.....	88
Figura 4.2 – Funções de Transferência Analítica e por Modos Assumidos (caso colocado).....	91
Figura 4.3 – Funções de Transferência Analítica e por Modos Assumidos (caso não colocado)....	91
Figura 5.1 – Elemento clássico da estrutura.....	94
Figura 5.2 – Estrutura elementar com a representação de seis parâmetros cinemáticos.....	98

Figura 5.3 – Manipulador flexível	112
Figura 5.4 – Função de Transferência do Método das Deformações Polinomiais (caso colocado).....	114
Figura 5.5 – Função de Transferência do Método das Deformações Polinomiais (caso não colocado).....	114
Figura 5.6 – Funções de Transferência Analítica e do Método das Deformações Polinomiais (caso colocado).....	115
Figura 5.7 – Funções de transferência Analítica e do Método das Deformações Polinomiais (caso não colocado).....	115
Figura 5.8 – Funções de transferência Analítica e do Método das Deformações Polinomiais (caso colocado).....	116
Figura 6.1 – Desenho esquemático do manipulador flexível.....	119
Figura 6.2 – Variações dos pólos em malha aberta devidas ao acréscimo da inércia do rotor.....	120
Figura 6.3 – Ampliação enfatizando os deslocamentos dos pólos de mais baixa frequência.....	121
Figura 6.4 – Ampliação enfatizando os deslocamentos dos pólos de frequência intermediária.....	121
Figura 6.5 – Ampliação enfatizando os deslocamentos dos pólos de alta frequência.....	122
Figura 6.6 – Modelo combinando os atritos viscoso e seco.....	123
Figura 6.7 – Variação dos pólos devida ao acréscimo do torque de atrito no atuador.....	124
Figura 6.8 – Ampliação enfatizando as trajetórias dos pólos de baixa frequência.....	124
Figura 6.9 – Ampliação enfatizando as trajetórias dos pólos de frequência intermediária.....	125
Figura 6.10 – Ampliação enfatizando as trajetórias dos pólos de alta frequência.....	125
Figura 6.11 – Diagrama de Bode do caso colocado (torque motor/posição angular do rotor).....	127
Figura 6.12 – Simulação com a dinâmica global (atuador mais estrutura) do manipulador.....	128
Figura 6.13 – Torque motor, torque de saída do redutor e níveis de atrito seco	129
Figura 6.14 – Trajetórias dos pólos em devida às variações na constante elástica do atuador.....	131
Figura 6.15 – Primeira ampliação ressaltando as variações dos pólos dos modos estruturais.....	132

Figura 6.16 – Segunda ampliação ressaltando as variações dos pólos dos modos estruturais de
frequência intermediária e de mais baixa frequência.....132

LISTA DE SÍMBOLOS

A e B	matrizes do sistema na forma de estado
$a_i(t)$, $i = 0, \dots, 5$	coeficientes do polinômio
a_s	atrito seco
C	matriz de observação
$[C_{at}]$	matriz de atrito
c , c_1 , c_2 , c_3	coeficientes de atrito devido à deflexão angular nas articulações fictícias
C_c	matriz de observação no caso colocado
C_{nc}	matriz de observação no caso não colocado
c_r	coeficiente de atrito do rotor
$D(\lambda)$	determinante da matriz $M(\lambda)$
e	espessura da estrutura flexível
E_c	energia cinética
EI	módulo d'Young multiplicado pela inércia da seção transversal reta
E_p	energia potencial
$F_c(s)$, $F_{nc}(s)$	funções de transferência nos casos colocado e não colocado
$G(s)$	função de transferência
h	largura da estrutura flexível
$[I]$	matriz de inércia
I_B	inércia da estrutura flexível
I_r	inércia do rotor
I_T	momento de inércia de corpo rígido
k	constante elástica (formalismo discreto)
$[k]$	matriz de rigidez

k_{ij}	elementos da matriz $[k]$
K_t	constante elástica do atuador
l	comprimento da estrutura flexível
L	Lagrangeano
m ou m_b	massa da estrutura (lâmina flexível)
$[m]$	matriz de inércia (Modos Assumidos)
m_c	massa da carga
$m_i, i = 1, \dots, 4$	massas das partes rígidas
m_{ij}	elementos da matriz $[m]$
M_{fA}, M_{fB}	momentos fletores
$\tilde{M}, \tilde{K}, \tilde{S}$	matrizes do sistema transformado (Capítulo V)
$M(\lambda)$	matriz para a obtenção das constantes para as funções de transferência analíticas
n	número de modos de vibração ou número de articulações fictícias
$N_{yr}(\lambda)$	numerador da função de transferência do caso não colocado
$N_o(\lambda)$	numerador da função de transferência do caso colocado
O_r	linha fixa de referência
O_x	linha tangente ao eixo neutro do rotor
P	matriz de transformação de base
$[q], [q]^T, [\dot{q}], [\dot{q}]^T$	vetores com as coordenadas generalizadas
$q_i(t)$	coordenadas generalizadas dependentes do tempo
s	variável de Laplace
$sign$	função sinal
T_a	torque de atrito atuante no rotor
T_{al}	torque de atrito linear

T_{ani}	torque de atrito não linear
$\bar{T}(s)$	Transformada de Laplace de $T_m(t)$
T_m	torque aplicado no rotor
T_s	torque na saída do redutor
V_a	trabalho do torque aplicado ao rotor da estrutura
$w(x,t)$	deflexão elástica
w_i	frequências naturais de vibração (pólos da função de transferência)
\bar{X} e $\dot{\bar{X}}$	vetor de estado e sua derivada
$\tilde{\bar{X}}, \tilde{\dot{\bar{X}}}$	vetores de estado do sistema transformado (Capítulo V)
$y(x,t)$	variável sugerida por Brakwel
$\bar{y}(x,t)$	Transformada de Laplace da variável $y(x,t)$
$\bar{y}_i(s)$	posição da extremidade

LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

$\theta(t), \bar{\theta}(s)$	posição angular do rotor (Capítulo II)
ρ	massa por unidade de comprimento da linha elástica (massa específica)
δ	variacional
$\dot{\theta}(t)$	velocidade angular do rotor
ε, η	razões adimensionais
λ, β	variáveis complexas adimensionais
μ	variável da equação característica
λ_i^c	raízes da equação $N_\theta(\lambda) = 0$
Ω_i	zeros da função de transferência analítica do caso colocado
α_i^f	zeros da função de transferência analítica do caso não colocado
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	derivadas parciais em relação à variável x
$\frac{\partial^3}{\partial x^3}, \frac{\partial^4}{\partial x^4}$	derivadas parciais em relação à variável x
$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}$	derivadas parciais em relação à variável t
$\ddot{\theta}(t)$	derivada segunda da função $\theta(t)$ em relação à variável t
$\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$	derivadas totais em relação à x
$\frac{d^3}{dx^3}, \frac{d^4}{dx^4}$	derivadas totais em relação à x
$\frac{d^n}{d\lambda^n}$	derivada n -ésima em relação à λ
$(x_i, y_i), i = 1, \dots, 4$	coordenadas cartesianas dos centros de massa das partes rígidas
(x_c, y_c)	coordenadas cartesianas do centro de massa da carga
$\theta_i, i = 1, \dots, 4$	posições angulares

$\dot{\theta}_i, i = 1, \dots, 4$	velocidades angulares
$\frac{\partial L}{\partial \theta_i}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}$	derivadas parciais do lagrangeano em relação à $\theta_i, \dot{\theta}_i$, respectivamente
$\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}$ e $\ddot{\bar{\theta}}$	vetores posições, velocidades e acelerações angulares das articulações
$[0]_{n \times n}$	matriz de zeros
$[1]_{n \times n}$ e I	matriz identidade
$\chi_i, \gamma_j, \xi_i, \psi_j$	coeficientes dos polinômios em s das funções de transferência do formalismo discreto
$\phi_i(x)$	funções de forma
δ_{ij}	função
θ_r	ângulo do rotor (Capítulo VI)

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Pólos e zeros dos sistemas.....74

CAPÍTULO I
INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

A flexibilidade é uma característica presente em praticamente todos os materiais utilizados na fabricação de equipamentos, nas mais diversas aplicações. Seja em aeronaves, robôs-manipuladores, veículos, edificações, estruturas metálicas para a construção civil, etc., sempre existirão vibrações inerentes às dinâmicas desses sistemas. As principais aplicações atualmente, entretanto, se dão no domínio da chamada robótica flexível [Sridhar et al., 1985], [Tahk e Speyer, 1987], [Yoshida e Tanaka, 1990], [Chevallereau e Aoustin, 1991], [Talebi et al., 1997]. Nestes casos, os robôs possuem partes flexíveis, chamadas de elos (elementos que unem uma articulação a outra, ou uma articulação à carga terminal), as quais dificultam em muito as tarefas de controle. Esta aplicação é, atualmente, muito presente na engenharia aeroespacial. Um exemplo típico é o caso de um manipulador espacial, cuja principal existência deve-se à necessidade de realização de tarefas tais como montagem de estações orbitais e reparos em satélites artificiais. Um desenho de um manipulador espacial que está sendo construído atualmente pela SPAR (Agência Espacial Canadense) pode ser visto na Figura 1.1.

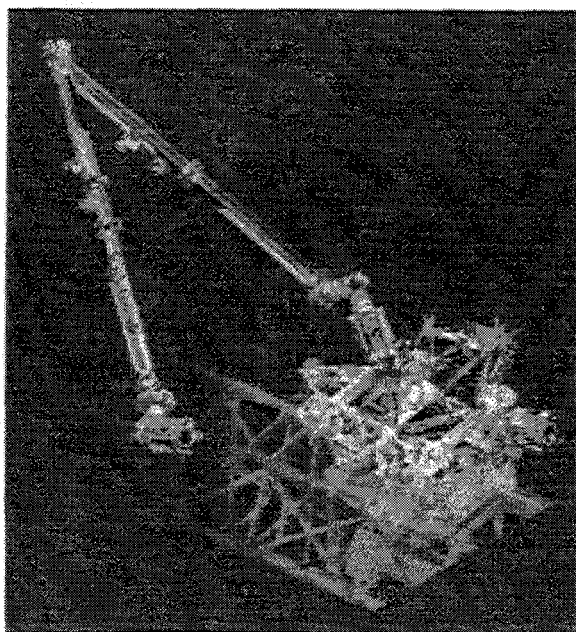


Figura 1.1 Desenho de um robô manipulador para a montagem de estações orbitais.

O manipulador (Figura 1.1) é fixo ao ônibus espacial ou na própria estação orbital a partir do atuador (moto-redutor) que está situado na sua base. Devido ao comprimento dos elos (alguns com *aproximadamente 10 m*), é inevitável que os mesmos apresentem importante flexibilidade.

Satélites artificiais com apêndices flexíveis constituem outra importante aplicação, também no domínio de sistemas espaciais. Estes apêndices flexíveis geralmente estão associados a painéis solares, os quais captam a energia solar para alimentar aos equipamentos de bordo (Figura 1.2). Estes painéis normalmente possuem grandes dimensões e, conseqüentemente, são também possuidores de flexibilidade estrutural. Idealmente, o controle de atitude do satélite necessita atenuar de forma ativa vibrações nos painéis, as quais repercutem sobre a plataforma de suporte dos mesmos, ou seja, o próprio satélite.

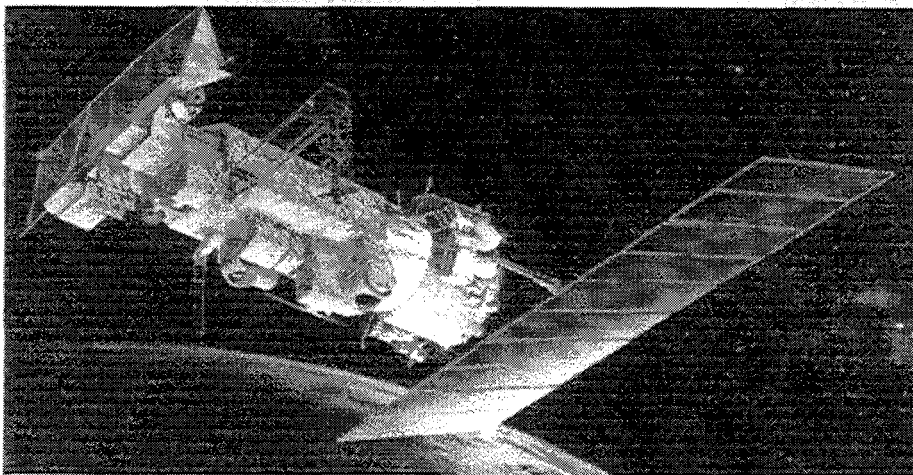


Figura 1.2 Satélite artificial com apêndices flexíveis.

Especificamente no campo da robótica industrial há também, atualmente, uma crescente necessidade de aumentar as velocidades de operação dos robôs [Gomes, 1994], o que só é possível com a diminuição das massas dos seus elos e, conseqüentemente, com um inevitável acréscimo da flexibilidade dos mesmos.

Controlar estruturas flexíveis, como as citadas anteriormente, é um problema complexo e que tem merecido muito a atenção da comunidade científica nos últimos anos [Khorrami e Jain,

1992], [Park e Asada, 1992], [Komatsu et al., 1992], [Fonseca e Góes, 1995], [Kim et al., 1997], [De Luca et al., 1998], [Isogai e Fukuda, 1999], [Yang et al., 1999]. Porém, o sucesso de uma lei de controle, tanto em termos de desempenho quanto de estabilidade, depende fundamentalmente do conhecimento de um bom modelo dinâmico, o qual idealmente deve ser realista e preditivo. Este é precisamente o contexto no qual se insere a presente dissertação, cujo principal objetivo é desenvolver um estudo sobre as principais técnicas de modelagem dinâmica de estruturas flexíveis.

Conforme é perceptível a partir das citações realizadas anteriormente, existe uma grande quantidade de trabalhos científicos sobre o controle de estruturas flexíveis. Em sua maioria eles versam sobre diferentes técnicas de controle destinadas à atenuação de forma ativa das vibrações inerentes à movimentação de tais estruturas. Cada um deles utiliza um certo formalismo de modelagem e, em muitos casos, são explicados de forma superficial, até porquê a ênfase do trabalho é o controle e não a modelagem. Não se detectou, entretanto, um trabalho contendo um estudo comparativo entre os diversos formalismos de modelagem dinâmica de estruturas flexíveis. Esta é uma das contribuições que a presente dissertação pretende oferecer, ou seja, realizar estudos comparativos entre as principais técnicas de modelagem, aplicadas a um tipo específico de estrutura flexível com bastante aplicabilidade prática, principalmente no domínio da robótica flexível e em sistemas espaciais, conforme explicitado anteriormente. Além desta contribuição, os métodos são desenvolvidos de forma bastante detalhada, facilitando assim a utilização deste trabalho como apoio básico no desenvolvimento de modelos dinâmicos semelhantes. Dá-se ênfase também a importantes interpretações físicas sobre variáveis ou parâmetros, decorrentes diretamente do desenvolvimento matemático, principalmente envolvendo análises freqüenciais.

Algumas considerações e definições iniciais devem ser feitas a fim de facilitar a compreensão de alguns conceitos introduzidos na seqüência do trabalho. Inicialmente, define-se o que vem a ser sistemas colocado e não colocado do ponto do vista do controle [Schmitz, 1985]. Considere, o sistema massa-mola-amortecedor da figura seguinte.

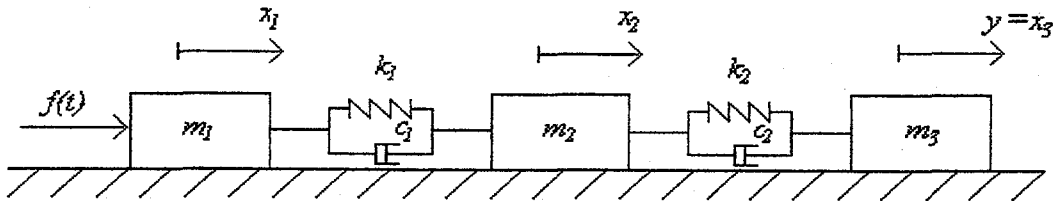


Figura 1.3- Sistema massa-mola-amortecedor.

A força de controle $f(t)$ está sendo aplicada na massa m_1 , enquanto que a observação que se faz no sistema consiste na posição da massa m_3 , localizada no outro extremo da estrutura. Esta situação caracteriza o **sistema não colocado** com relação a todos os modos de vibração. Caso a observação fosse feita de forma intermediária, na massa m_2 , o sistema seria não colocado com relação a um dos modos de vibração; enquanto que se a observação fosse realizada na massa m_1 , o sistema seria **colocado** uma vez que a força de controle seria aplicada no mesmo local da observação.

A estrutura flexível considerada para o desenvolvimento do presente trabalho (Figura 1.4) consiste em uma lâmina flexível acoplada em uma extremidade a um atuador do tipo motor elétrico, a partir do qual é aplicado o torque de controle. Na outra extremidade existe uma massa constante, normalmente denominada de carga terminal. Tal estrutura poderia ser associada, com algumas modificações, a diversas aplicações no domínio da engenharia, como as já citadas estruturas espaciais ou manipuladores com elos flexíveis por exemplo.

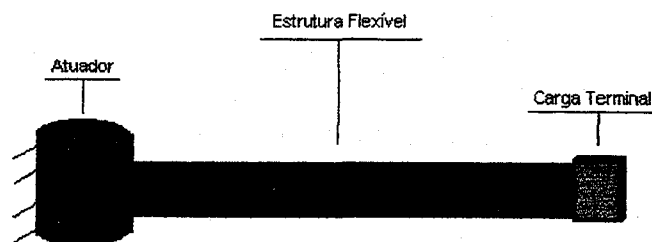


Figura 1.4 - Estrutura flexível considerada para o desenvolvimento da presente dissertação.

Portanto, o problema escolhido para estudo no presente trabalho é, evidentemente, acadêmico e genérico. Porém, o mesmo pode ser, com facilidade, modificado para alguma aplicação prática, consistindo basicamente em uma aplicação matemática na engenharia.

A seguir, faz-se uma descrição sumária do conteúdo dos diversos capítulos componentes deste trabalho. O Capítulo II contém um **Estudo Analítico** detalhado do problema, estudo este que servirá de referencial para avaliar a precisão dos modelos do ponto de vista freqüencial. O Capítulo III aborda a técnica de modelagem por **Formalismo Discreto**, o qual recebe o nome em língua inglesa de *lumped mass approach*. O Capítulo IV desenvolve e analisa a técnica por **Modos Assumidos**, a qual apresentou os melhores resultados. O Capítulo V aborda a técnica por **Deformadas Polinomiais**, técnica esta derivada dos elementos finitos. O Capítulo VI contém um estudo de aplicação a um manipulador mecânico com um elo flexível, estudo este que abrange os importantes efeitos da dinâmica de atuadores sobre a dinâmica estrutural. Finaliza-se com o Capítulo VII, o qual contém conclusões gerais sobre todo o estudo realizado na presente dissertação.

CAPÍTULO II
ESTUDO ANALÍTICO DA DINÂMICA DA
ESTRUTURA FLEXÍVEL

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão desenvolvidas as equações dinâmicas governantes do movimento da estrutura flexível já definida anteriormente. Serão ainda deduzidas as funções de transferência analíticas (exatas) com seus pólos e zeros para que se possa fazer comparações com as funções de transferência e seus respectivos pólos e zeros das demais técnicas de modelagem analisadas neste trabalho. Estas comparações serão fundamentadas, principalmente a partir de análises feitas com os diagramas de Bode, para os casos colocado e não colocado.

2.2 DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA FLEXÍVEL

Considera-se, inicialmente, uma estrutura flexível de comprimento l (Figura 2.1), fixa na extremidade chamada de rotor, onde é aplicado um torque T_m , e livre na outra extremidade na qual é colocada uma carga, sendo I_r a inércia do rotor e m_c a massa da carga (de momento de inércia rotacional desprezível). A linha Or é uma linha fixa de referência, Ox é a linha tangente ao eixo neutro no rotor. O deslocamento de qualquer ponto P ao longo do eixo neutro da lâmina com uma distância “ x ” do rotor é dado pelo ângulo $\theta(t)$ do rotor e pela pequena deflexão elástica $w(x,t)$, medida a partir da linha Ox , como mostra a Figura 2.1. As deformações relativas ao eixo são desprezíveis (não há cisalhamento [Meirovitch,1967]) e o ângulo do rotor $\theta(t)$ pode ser arbitrariamente grande.

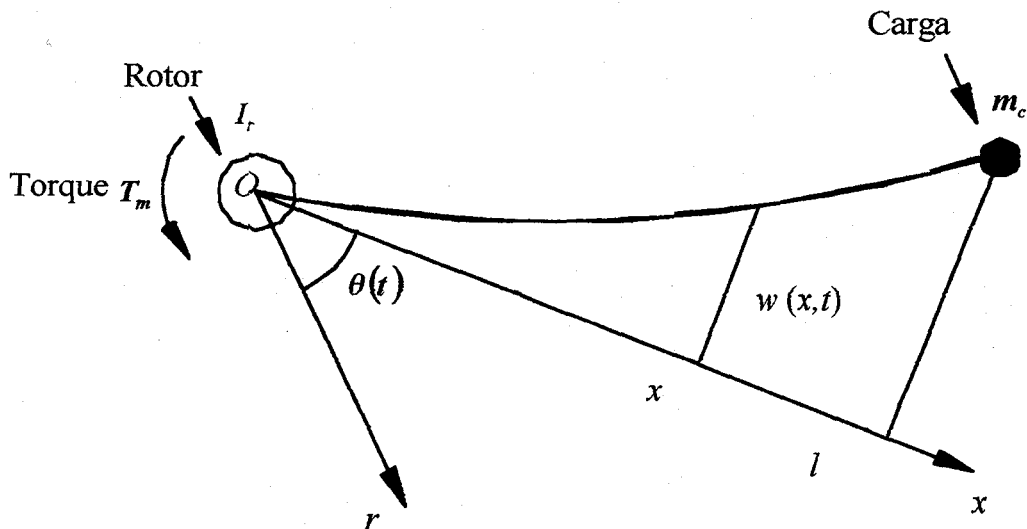


Figura 2.1 Estrutura flexível

2.3 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

A Energia Cinética é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x\dot{\theta} \right)^2 \rho dx + \frac{m_c}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x\dot{\theta} \right)^2 \Big|_{x=l}, \quad (2.1)$$

onde ρ é a massa por unidade de comprimento da linha elástica.

A Energia Potencial é escrita na forma:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 dx, \quad (2.2)$$

onde E é o Módulo d'Young e I é o momento de inércia da área da secção transversal da estrutura.

O trabalho do torque T_m aplicado ao rotor da estrutura é definido como:

$$V_a = -T_m \theta(t). \quad (2.3)$$

Pelo Princípio de Hamilton [Meirovitch, 1967], tem-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p - V_a) dt = 0. \quad (2.4)$$

Substituindo-se (2.1), (2.2) e (2.3) em (2.4), obtém-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} I_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x \dot{\theta} \right)^2 dx + \frac{m_c}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x \dot{\theta} \right)^2 \right]_{x=l} - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + T_m \dot{\theta} \Big] dt = 0. \quad (2.5)$$

Aplicando-se o variacional δ , a equação (2.5) transforma-se em:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} 2I_r \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + \frac{1}{2} \int_0^l \left(2\rho x \frac{\partial w}{\partial t} + 2\rho x^2 \dot{\theta} \right) \delta \dot{\theta} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(2\rho \frac{\partial w}{\partial t} + 2\rho x \dot{\theta} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx + \right. \\ \left. + \frac{m_c}{2} 2 \left(\dot{w}(l,t) + l \dot{\theta} \right) l \delta \dot{\theta} + \frac{m_c}{2} 2 \left(\dot{w}(l,t) + l \dot{\theta} \right) \delta \dot{w}(l,t) - \frac{1}{2} \int_0^l 2EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + T_m \delta \dot{\theta} \right] dt = 0$$

ou ainda,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[I_r \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + \rho \int_0^l x \frac{\partial w}{\partial t} \delta \dot{\theta} dx + \rho \int_0^l x^2 dx \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + \int_0^l \rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx + \int_0^l \rho x \dot{\theta} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx + \right. \\ \left. + m_c \left(\dot{w}(l,t) + l \dot{\theta} \right) \left(l \delta \dot{\theta} + \delta \dot{w}(l,t) \right) - EI \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + T_m \delta \dot{\theta} \right] dt = 0$$

Resolvendo-se uma das integrais em x obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[I_r \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + \rho \int_0^l x \frac{\partial w}{\partial t} \delta \dot{\theta} dx + \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + \int_0^l \rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx + \int_0^l \rho x \dot{\theta} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx + \right. \\ \left. + m_c \left(\dot{w}(l,t) + l \dot{\theta} \right) \left(\delta \dot{w}(l,t) + l \delta \dot{\theta} \right) - EI \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + T_m \delta \dot{\theta} \right] dt = 0$$

Aplicando-se os limites de integração e reagrupando-se alguns termos, conduz a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(I_r + \rho \frac{l^3}{3} \right) \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + \rho \int_0^l x \frac{\partial w}{\partial t} \delta \dot{\theta} dx + \int_0^l \rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx + \int_0^l \rho x \dot{\theta} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx + \right. \\ \left. + m_c \left(\dot{w}(l,t) + l \dot{\theta} \right) \left(\delta \dot{w}(l,t) + l \delta \dot{\theta} \right) - EI \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + T_m \delta \dot{\theta} \right] dt = 0 \quad (2.6)$$

Definindo-se $I_B = \rho \frac{l^3}{3}$ e substituindo-o na equação (2.6), resulta em:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(I_r + I_B \right) \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + \rho \int_0^l x \frac{\partial w}{\partial t} \delta \dot{\theta} dx + \int_0^l \rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx + \int_0^l \rho x \dot{\theta} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx + \right. \\ \left. + m_c \left(\dot{w}(l,t) + l \dot{\theta} \right) \left(\delta \dot{w}(l,t) + l \delta \dot{\theta} \right) - EI \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + T_m \delta \dot{\theta} \right] dt = 0 \quad (2.7)$$

Integrando-se por partes e sabendo-se que os valores de $\delta w(x,t)$ e $\delta \theta(t)$ são arbitrários nos pontos extremos e tomando-os iguais a zero nestes pontos, tem-se na primeira integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} (I_r + I_B) \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dt = (I_r + I_B) \int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dt = (I_r + I_B) \left[\underbrace{\dot{\theta}(t) \delta \theta(t)}_0 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\theta}(t) \delta \theta(t) dt \right],$$

ou ainda,

$$\int_{t_1}^{t_2} (I_r + I_B) \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dt = -(I_r + I_B) \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\theta}(t) \delta \theta(t) dt. \quad (2.8)$$

Na segunda integral tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho x \frac{\partial w}{\partial t} \delta \dot{\theta}(t) dx dt &= \rho \int_0^l x \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{d\theta}{dt} \right) dt dx = \rho \int_0^l x \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{d}{dt} (\delta \theta) dt dx = \\ &= \rho \int_0^l x \left[\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t} \delta \theta(t)}_0 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta \theta(t) dt \right] dx \end{aligned}$$

o que implica em:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho x \frac{\partial w}{\partial t} \delta \dot{\theta}(t) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta \theta(t) dx dt. \quad (2.9)$$

Na terceira integral fica-se com:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt &= \rho \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dt dx = \rho \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) dt dx = \\ &= \rho \int_0^l \left[\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t} \delta w(x,t)}_0 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w(x,t) dt \right] dx \end{aligned}$$

resultando:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w(x,t) dx dt. \quad (2.10)$$

Na quarta integral obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho x \dot{\theta}(t) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt &= \rho \int_0^l x \int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}(t) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dt dx = \rho \int_0^l x \int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}(t) \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) dt dx = \\ &= \rho \int_0^l x \left[\underbrace{\dot{\theta}(t) \delta w(x,t)}_0 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\theta}(t) \delta w(x,t) dt \right] dx \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho x \dot{\theta}(t) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho x \ddot{\theta}(t) \delta w(x, t) dx dt . \quad (2.11)$$

Na quinta integral resulta:

$$\begin{aligned} m_c \int_{t_1}^{t_2} (\dot{w}(l, t) + l\dot{\theta}) (\delta \dot{w}(l, t) + l\delta \dot{\theta}) dt &= m_c \underbrace{\left[(\dot{w}(l, t) + l\dot{\theta}) \delta (w(l, t) + l\theta) \right]_{t_1}^{t_2}}_0 + \\ - m_c \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{w}(l, t) + l\ddot{\theta}) \delta (w(l, t) + l\theta) dt &= - m_c \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{w}(l, t) + l\ddot{\theta}) \left(\underbrace{\delta w(l, t)}_0 + \delta (l\theta) \right) dt = \\ &= - m_c \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{w}(l, t) + l\ddot{\theta}) l \delta \theta dt \end{aligned}$$

ou seja,

$$m_c \int_{t_1}^{t_2} (\dot{w}(l, t) + l\dot{\theta}) (\delta \dot{w}(l, t) + l\delta \dot{\theta}) dt = - m_c \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{w}(l, t) + l\ddot{\theta}) l \delta \theta dt \quad (2.12)$$

Na sexta integral fica-se com:

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} EI \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dt &= - \int_{t_1}^{t_2} EI \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) dx dt = \\ - \int_{t_1}^{t_2} EI \left[\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w)}_0 \right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx \Bigg] dt &= \int_{t_1}^{t_2} EI \int_0^l \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} EI \left[\underbrace{\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w(x, t)}_0 \right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w(x, t) dx \Bigg] dt \end{aligned}$$

o que implica em:

$$- \int_{t_1}^{t_2} EI \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w(x, t) dx dt . \quad (2.13)$$

Substituindo-se as equações (2.8) a (2.13) em (2.7), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[- (I_r + I_B) \ddot{\theta}(t) \delta \theta(t) - \int_0^l \rho x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta \theta(t) dx - \int_0^l \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w(x, t) dx - \int_0^l \rho x \ddot{\theta}(t) \delta w(x, t) dx + \right. \\ \left. - m_c (\ddot{w}(l, t) + l\ddot{\theta}(t)) l \delta \theta(t) - \int_0^l EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w(x, t) dx + T_m \delta \theta(t) \right] dt = 0 \end{aligned}$$

e agrupando-se os termos da equação acima resulta a expressão:

$$\int_{l_1}^{l_2} \left[-(I_r + I_B) \ddot{\theta}(t) - \int_0^l \rho x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx + T_m - m_c l (\ddot{w}(l,t) + l \ddot{\theta}(t)) \right] \delta \theta(t) dt +$$

$$-\int_0^l \left[\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho x \ddot{\theta}(t) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] \delta w(x,t) dx dt = 0 \quad (2.14)$$

Da equação (2.14) podem ser obtidas as seguintes equações do movimento:

$$-(I_r + I_B) \ddot{\theta}(t) - \int_0^l \rho x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx + T_m - m_c l (\ddot{w}(l,t) + l \ddot{\theta}(t)) = 0 \quad (2.15)$$

e

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) + \rho x \ddot{\theta}(t) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) = 0. \quad (2.16)$$

Pode-se, então, reescrever as equações (2.15) e (2.16), da seguinte forma:

$$(I_r + I_B) \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx + m_c l (\ddot{w}(l,t) + l \ddot{\theta}(t)) = T_m \quad (2.17)$$

e

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0, \quad (2.18)$$

com as seguintes condições de contorno [Schmitz, 1985]:

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \Big|_{x=0} + T_m - I_r \ddot{\theta} = 0$$

$$w(x,t) \Big|_{x=0} = w(0,t) = 0$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \Big|_{x=l} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0 \quad (2.19)$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x,t) \Big|_{x=l} = m_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + x \ddot{\theta} \right) \Big|_{x=l}$$

As condições de contorno representadas pelas equações (2.19) podem ser divididas em dois tipos distintos: naturais e geométricas. As condições de contorno forçadas ocorrem quando $x=0$ entre a estrutura e o rotor e impõem que não haja deslocamento flexível nesta região, ou seja, o deslocamento e sua respectiva derivada são iguais a zero. Já as condições de contorno naturais ocorrem na extremidade livre da estrutura, na qual é colocada a carga.

Para resolver as equações (2.17) e (2.18), supõe-se que sobre o sistema não hajam forças externas, transformando-se a equação (2.17) numa equação diferencial homogênea.

Considerando-se a transformação de variável sugerida por Brakwel [Soares, 1997]]:

$$y(x, t) = w(x, t) + x\theta(t), \quad (2.20)$$

podem ser escritas as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \theta(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Rightarrow \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial t} + x\dot{\theta}(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + x\ddot{\theta}(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - x\ddot{\theta}(t) \end{aligned}, \quad (2.21)$$

$$\dot{w}(l, t) = \dot{y}(l, t) - l\dot{\theta}(t) \Rightarrow \ddot{w}(l, t) = \ddot{y}(l, t) - l\ddot{\theta}(t)$$

Substituindo-se (2.21) em (2.18), obtém-se:

$$(I_r + I_B)\ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - x\ddot{\theta}(t) \right) dx + m_c l (\ddot{y}(l, t) - l\ddot{\theta}(t) + l\ddot{\theta}(t)) = T_m,$$

ou ainda,

$$(I_r + I_B)\ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx - \rho \ddot{\theta}(t) \int_0^l x^2 dx + m_c l \ddot{y}(l, t) = T_m.$$

Resolvendo-se a última integral da equação acima obtém-se como resultado:

$$(I_r + I_B)\ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx - \rho \ddot{\theta}(t) \frac{l^3}{3} + m_c l \ddot{y}(l, t) = T_m. \quad (2.22)$$

Mas $I_B = \rho \frac{l^3}{3}$, desta forma, substituindo-o na equação (2.22) e simplificando-a, tem-se:

$$I_r \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + m_c l \ddot{y}(l, t) = T_m. \quad (2.23)$$

Substituindo-se (2.21) na equação (2.18) obtém-se:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) + \rho \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - x\ddot{\theta}(t) \right) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0.$$

Desta forma, resulta o sistema em função da variável $y(x, t)$:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (2.24)$$

e

$$I_r \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + m_c l \ddot{y}(l, t) = T_m \quad (2.23)$$

com as respectivas condições de contorno:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=0} + T_m - I_r \ddot{\theta} &= 0 \\ y(x, t) \Big|_{x=0} = y(0, t) = w(0, t) + 0 \cdot \theta(t) &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=l} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) &= 0 \\ EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) \Big|_{x=l} = m_c \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \Big|_{x=l} & \end{aligned} \quad (2.25)$$

A variável $\bar{y}(x, s)$ é definida como a transformada de Laplace da variável $y(x, t)$ sob a forma:

$$\bar{y}(x, s) = \int_0^\infty y(x, t) e^{-st} dt ,$$

onde s é a variável de Laplace.

Reescrevendo-se a equação (2.24) na forma:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\rho}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

e aplicando-se a transformada de Laplace nesta última equação obtém-se:

$$\frac{d^4 \bar{y}}{dx^4}(x, s) + \frac{\rho}{EI} \left[s^2 \bar{y}(x, s) - sy(x, 0) - \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) \right] = 0. \quad (2.26)$$

Como o sistema é relaxado no tempo inicial $t = 0$, tem-se:

$$sy(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

o que implica em:

$$\frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} + \frac{\rho s^2}{EI} \bar{y} = 0, \quad (2.27)$$

com as respectivas condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 \bar{y}(0,s) &= 0 \\
 EI \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \Big|_{x=0} + \bar{T}(s) &= I_r s^2 \frac{d\bar{y}}{dx} \Big|_{x=0} \\
 EI \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \Big|_{x=l} &= 0 \\
 EI \frac{d^3 \bar{y}}{dx^3} \Big|_{x=l} &= m_c s^2 \bar{y} \Big|_{x=l}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $\bar{T}(s)$ é a transformada de Laplace de $T_m(t)$.

Definindo-se a razão adimensional ε como:

$$\varepsilon = \frac{I_r}{ml^2}, \text{ onde } m = \rho l,$$

resulta:

$$\varepsilon = \frac{I_r}{\rho l^3}.$$

Como o momento de inércia da estrutura flexível é dado por :

$$I_B = \frac{\rho l^3}{3} \Rightarrow 3I_B = \rho l^3,$$

obtém-se:

$$\varepsilon = \frac{I_r}{\rho l^3} = \frac{I_r}{3I_B}. \tag{2.29}$$

Define-se agora a razão adimensional η como sendo:

$$\eta = \frac{m_c}{m} = \frac{m_c}{\rho l} = \frac{m_c l^2}{\rho l^3},$$

e lembrando que $3I_B = \rho l^3$, então tem-se:

$$\eta = \frac{m_c}{m} = \frac{m_c l^2}{3I_B}. \tag{2.30}$$

Definindo-se o número adimensional complexo λ e relacionando-o com a variável s de Laplace na forma [Schmitz,1985]:

$$\begin{aligned}
 \beta^4 &= -\frac{\rho}{EI} s^2, \\
 \lambda &= \beta l
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

obtém-se, ao substituir (2.31) em (2.27), a seguinte equação:

$$\frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} - \beta^4 \bar{y} = 0, \quad (2.32)$$

cuja equação característica é dada por:

$$\mu^4 - \beta^4 = 0 \Leftrightarrow (\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 + \beta^2) = 0,$$

a qual admite as seguintes raízes características: $\mu = \pm\beta$ e $\mu = \pm i\beta$, sendo que β é complexo.

Portanto, a solução geral da equação diferencial (2.32) possui a forma:

$$\bar{y} = A \operatorname{sen}(\beta x) + B \operatorname{senh}(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \operatorname{cosh}(\beta x). \quad (2.33)$$

Da aplicação da primeira condição de contorno (Equações (2.28)), obtém-se:

$$\bar{y}(0, s) = \underbrace{A \operatorname{sen} 0}_0 + \underbrace{B \operatorname{senh} 0}_0 + \underbrace{C \cos 0}_1 + \underbrace{D \operatorname{cosh} 0}_1 = C + D = 0 \quad (2.34)$$

Derivando-se duas vezes a solução geral (2.33) tem-se:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = A\beta \cos(\beta x) + B\beta \operatorname{cosh}(\beta x) - C\beta \operatorname{sen}(\beta x) + D\beta \operatorname{senh}(\beta x)$$

e

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} = -A\beta^2 \operatorname{sen}(\beta x) + B\beta^2 \operatorname{senh}(\beta x) - C\beta^2 \cos(\beta x) + D\beta^2 \operatorname{cosh}(\beta x)$$

Aplicando-se a segunda das condições de contorno (2.28) obtém-se:

$$\begin{aligned} EI \left(-A\beta^2 \underbrace{\operatorname{sen} 0}_0 + B\beta^2 \underbrace{\operatorname{senh} 0}_0 - C\beta^2 \underbrace{\cos 0}_1 + D\beta^2 \underbrace{\operatorname{cosh} 0}_1 \right) + \bar{T}(s) &= \\ = I_s^2 \left(A\beta \underbrace{\cos 0}_1 + B\beta \underbrace{\operatorname{cosh} 0}_1 - C\beta \underbrace{\operatorname{sen} 0}_0 + D\beta \underbrace{\operatorname{senh} 0}_0 \right) \end{aligned}$$

o que implica em

$$EI(-C\beta^2 + D\beta^2) + \bar{T}(s) = I_s^2(A\beta + B\beta).$$

Como $D = -C$, a equação acima transforma-se em:

$$-2CEI\beta^2 + \bar{T}(s) = I_s^2(A\beta + B\beta),$$

ou seja:

$$I_s^2 \beta A + I_s^2 \beta B + 2EI\beta^2 C = \bar{T}(s).$$

Colocando-se $EI\beta^2$ em evidência obtém-se:

$$EI\beta^2 \left(\frac{I_r s^2}{EI\beta} A + \frac{I_r s^2}{EI\beta} B + 2C \right) = \bar{T}(s),$$

A equação acima também pode ser escrita como:

$$EI\beta^2 \left[-\frac{I_r(-\rho)s^2}{EI\beta\rho} A - \frac{I_r(-\rho)s^2}{EI\beta\rho} B + 2C \right] = \bar{T}(s),$$

e sendo $\beta^4 = -\frac{\rho}{EI} s^2$, resulta para a equação anterior:

$$EI\beta^2 \left[-\frac{I_r\beta^4}{\beta\rho} A - \frac{I_r\beta^4}{\beta\rho} B + 2C \right] = \bar{T}(s) \Rightarrow EI\beta^2 \left[\frac{I_r\beta^3}{\rho} A + \frac{I_r\beta^3}{\rho} B - 2C \right] = -\bar{T}(s),$$

mas

$$\varepsilon = \frac{I_r}{\rho l^3} \Rightarrow I_r = \rho l^3 \varepsilon \quad \text{e} \quad \lambda = \beta l \Rightarrow \beta = \frac{\lambda}{l},$$

então, substituindo-se as relações acima na equação anterior tem-se:

$$EI\beta^2 \left[\frac{\rho l^3 \varepsilon \lambda^3}{\rho l^3} A + \frac{\rho l^3 \varepsilon \lambda^3}{\rho l^3} B - 2C \right] = -\bar{T}(s),$$

Simplificando-se esta equação obtém-se:

$$\varepsilon \lambda^3 A + \varepsilon \lambda^3 B - 2C = -\frac{1}{EI\beta^2} \bar{T}(s). \quad (2.35)$$

A aplicação da terceira condição de contorno conduz à expressão:

$$EI \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \Big|_{x=l} = EI \left[-A\beta^2 \operatorname{sen}(\beta l) + B\beta^2 \operatorname{senh}(\beta l) - C\beta^2 \cos(\beta l) + D\beta^2 \operatorname{cosh}(\beta l) \right] = 0,$$

Como $\beta l = \lambda$, então, substituindo-o na equação anterior, tem-se:

$$EI\beta^2 \left[-A \operatorname{sen} \lambda + B \operatorname{senh} \lambda - C \cos \lambda + D \operatorname{cosh} \lambda \right] = 0,$$

Porém, $D = -C$ e a equação anterior transforma-se em:

$$EI\beta^2 \left[-A \operatorname{sen} \lambda + B \operatorname{senh} \lambda - C (\cos \lambda + \operatorname{cosh} \lambda) \right] = 0. \quad (2.36)$$

Para aplicar a quarta condição de contorno é necessário calcular a terceira derivada da solução geral (2.33) que é dada por:

$$\frac{d^3 \bar{y}}{dx^3} = -A\beta^3 \cos(\beta x) + B\beta^3 \cosh(\beta x) + C\beta^3 \sin(\beta x) + D\beta^3 \sinh(\beta x).$$

Então, aplicando-se a quarta das condições de contorno (2.28) obtém-se:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^3 \bar{y}}{dx^3} \Big|_{x=l} &= EI [-A\beta^3 \cos(\beta l) + B\beta^3 \cosh(\beta l) + C\beta^3 \sin(\beta l) + D\beta^3 \sinh(\beta l)] = m_c s^2 \bar{y} \Big|_{x=l} = \\ &= m_c s^2 [A \sin(\beta l) + B \sinh(\beta l) + C \cos(\beta l) + D \cosh(\beta l)] \end{aligned}$$

mas como $D = -C$ e $\lambda = \beta l$, resulta em:

$$EI\beta^3 [-A \cos \lambda + B \cosh \lambda + C(\sin \lambda - \sinh \lambda)] = m \frac{m_c}{m} s^2 [A \sin \lambda + B \sinh \lambda + C(\cos \lambda - \cosh \lambda)]$$

e como $\eta = \frac{m_c}{m}$, então:

$$EI\beta^3 [-A \cos \lambda + B \cosh \lambda + C(\sin \lambda - \sinh \lambda)] = m\eta s^2 [A \sin \lambda + B \sinh \lambda + C(\cos \lambda - \cosh \lambda)].$$

Considerando ainda que $m = \rho l$, a última equação pode ser escrita sob a forma:

$$-A \cos \lambda + B \cosh \lambda + C(\sin \lambda - \sinh \lambda) = \frac{\rho l s^2}{EI\beta^3} [A \eta \sin \lambda + B \eta \sinh \lambda + C \eta (\cos \lambda - \cosh \lambda)].$$

Substituindo-se $\beta^4 = -\frac{\rho s^2}{EI}$ na equação acima tem-se:

$$-A \cos \lambda + B \cosh \lambda + C(\sin \lambda - \sinh \lambda) = -\beta l [A \eta \sin \lambda + B \eta \sinh \lambda + C \eta (\cos \lambda - \cosh \lambda)],$$

Como $\lambda = \beta l$, a equação anterior transforma-se em:

$$-A \cos \lambda + B \cosh \lambda + C(\sin \lambda - \sinh \lambda) = -\lambda [A \eta \sin \lambda + B \eta \sinh \lambda + C \eta (\cos \lambda - \cosh \lambda)],$$

ou seja:

$$(-\cos \lambda + \eta \lambda \sin \lambda)A + (\cosh \lambda + \eta \lambda \sinh \lambda)B + [\sin \lambda - \sinh \lambda + \eta \lambda (\cos \lambda - \cosh \lambda)]C = 0 \quad (2.37)$$

As equações (2.34) a (2.37), formam o seguinte sistema não linear:

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ \varepsilon \lambda^3 A + \varepsilon \lambda^3 B - 2C = -\frac{1}{EI\beta^2} \bar{T}(s) \\ (-\sin \lambda)A + (\sinh \lambda)B - (\cos \lambda + \cosh \lambda)C = 0 \\ (-\cos \lambda + \eta \lambda \sin \lambda)A + (\cosh \lambda + \eta \lambda \sinh \lambda)B + [\sin \lambda - \sinh \lambda + \eta \lambda (\cos \lambda - \cosh \lambda)]C = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

o qual, na forma matricial pode ser escrito como:

$$M(\lambda) \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\frac{1}{EI\beta^2} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

onde:

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} \varepsilon\lambda^3 & \varepsilon\lambda^3 & -2 \\ -\text{sen}\lambda & \text{senh}\lambda & -(\cos\lambda + \cosh\lambda) \\ -(\cos\lambda + \eta\lambda\text{sen}\lambda) & \cosh\lambda + \eta\lambda\text{senh}\lambda & \text{sen}\lambda - \text{senh}\lambda + \eta\lambda(\cos\lambda - \cosh\lambda) \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

As constantes A , B , C e D , as quais podem ser obtidas da solução de (2.38), são funções de λ e de $\bar{T}(s)$. Substituindo-as na solução geral (2.33), obtém-se $\bar{y}(s)$ em função de λ e de $\bar{T}(s)$.

2.4 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

As funções de transferência em malha aberta serão obtidas através das seguintes considerações (saídas):

- o ângulo do rotor: $\bar{\theta}(s) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(0, s)$ (caso colocado);
- a posição da extremidade: $\bar{y}_l(s) = \bar{y}(l, s)$ (caso não colocado).

As correspondentes funções de transferência são definidas como:

- no caso colocado, quando se observa a posição angular do rotor, local onde está sendo aplicado o torque motor, tem-se:

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_\theta(\lambda)}{D(\lambda)}. \quad (2.41)$$

- no caso não colocado, quando se observa o deslocamento da carga terminal, sendo o torque motor aplicado no rotor, tem-se:

$$\frac{\bar{y}_i(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_y(\lambda)}{D(\lambda)}. \quad (2.42)$$

As equações (2.41) e (2.42) correspondem às funções de transferência em malha aberta, nos casos colocado e não colocado, respectivamente. Observa-se que os pólos de ambas são os mesmos, ou seja, as raízes do denominador $D(\lambda)$. Os zeros no caso colocado são as raízes de $N_o(\lambda)$, enquanto que no caso não colocado são as raízes de $N_y(\lambda)$.

2.5 PÓLOS DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Conforme já mencionado anteriormente, os pólos das funções de transferência, também chamados de frequências naturais de vibração, são as raízes da equação $D(\lambda) = 0$, sendo $D(\lambda)$ obtido pelo determinante da matriz $M(\lambda)$ dada por (2.40), ou seja:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \varepsilon\lambda^3 & \varepsilon\lambda^3 & -2 \\ -\text{sen}\lambda & \text{senh}\lambda & -(\cos\lambda + \cosh\lambda) \\ -(\cos\lambda + \eta\lambda\text{sen}\lambda) & \cosh\lambda + \eta\lambda\text{senh}\lambda & \text{sen}\lambda - \text{senh}\lambda + \eta\lambda(\cos\lambda - \cosh\lambda) \end{vmatrix}.$$

Calculando-se o determinante acima chega-se a seguinte equação:

$$D(\lambda) = 2\{\text{sen}\lambda \cosh\lambda - \cos\lambda \text{senh}\lambda + 2\eta\lambda \text{sen}\lambda \text{senh}\lambda + \varepsilon\lambda^3[1 + \cos\lambda \cosh\lambda + \eta\lambda(\cos\lambda \text{senh}\lambda - \text{sen}\lambda \cosh\lambda)]\} \quad (2.43)$$

Deve-se lembrar que $\lambda = \beta l$ (Equação (2.31)), sendo β uma variável complexa definida conforme

$$\beta^4 = -\frac{\rho}{EI} s^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \beta^2 j.$$

Mas $\beta = \frac{\lambda}{l}$ resultando, desta forma:

$$s = wj = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda^2 j$$

onde $w = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda^2$ corresponde à frequência natural de vibração.

Existem infinitas raízes da equação $D(\lambda) = 0$ ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\infty$) e, portanto, as frequências naturais de vibração serão dadas por

$$w_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Se λ é uma raiz real de $D(\lambda) = 0$, então $-\lambda$, $j\lambda$ e $-j\lambda$ também são raízes desta equação. A função complexa $D(\lambda)$ pode ser expressa em séries de Taylor como:

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{d^n D}{d\lambda^n}(0). \quad (2.44)$$

De (2.43) pode-se mostrar que $\frac{d^i D}{d\lambda^i}(0) = 0$, para $i = 0, 1, 2$. Então de (2.43) e (2.44), pode-se fatorar $D(\lambda)$ como:

$$D(\lambda) = \frac{4}{3} \lambda^3 (1 + 3\varepsilon + 3\eta) \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^4}{\lambda_i^4} \right) = \frac{4}{3} \lambda^3 (1 + 3\varepsilon + 3\eta) \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{w^2}{w_i^2} \right). \quad (2.45)$$

Tendo sido fornecido $D(\lambda)$, passa-se a seguir para a determinação das funções de transferência.

2.6 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO CASO COLOCADO

Por (2.41) tem-se:

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_\theta(\lambda)}{D(\lambda)},$$

onde $D(\lambda)$ foi determinado usando (2.45) como:

$$D(\lambda) = \frac{4}{3} \lambda^3 (1 + 3\varepsilon + 3\eta) \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 + \frac{w_i^2}{\lambda^2} \right). \quad (2.45)$$

Então, para determinar $N_\theta(\lambda) = \bar{\theta}(s)$ usa-se a equação $\bar{\theta}(s) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(0, s)$ vista anteriormente,

ou seja, calcula-se as constantes A, B, C e D do sistema (2.38), substitui-se os valores destas constantes na solução geral (2.33) e calcula-se a derivada parcial da solução obtida em relação à variável x , obtendo-se [Schmitz, 1985]:

$$N_\theta(\lambda) = -\frac{2}{EI\beta} \left[1 + \cos \lambda \cosh \lambda + \eta \lambda (\sinh \lambda \cos \lambda - \sin \lambda \cosh \lambda) \right]$$

Se λ_i^c são as raízes de $N_\theta(\lambda) = 0$, então expandindo-se $N_\theta(\lambda)$ em séries de Taylor resulta:

$$N_\theta(\lambda) = -\frac{4}{EI\beta} \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{\lambda^4}{\lambda_i^{c4}} \right) = -\frac{4}{EI\beta} \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 + \frac{s^2}{\Omega_i^2} \right). \quad (2.46)$$

onde $\Omega_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda_i^{c2}$, $i = 1, 2, \dots, \infty$.

Portanto, substituindo-se (2.45) e (2.46) na função de transferência $\frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_\theta(\lambda)}{D(\lambda)}$, obtém-se:

se:

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{1}{I_T s^2} \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{\left(1 + \frac{s^2}{\Omega_i^2} \right)}{\left(1 + \frac{s^2}{w_i^2} \right)}, \quad (2.47)$$

onde $I_T = I_B + I_r + m_c l^2$ é o momento de inércia de corpo rígido.

2.7 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO CASO NÃO COLOCADO

Reescreve-se (2.42)

$$\frac{\bar{y}_y(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_{yy}(\lambda)}{D(\lambda)},$$

onde $D(\lambda)$ foi determinado por (2.45). Os zeros da função de transferência na posição da carga são as raízes de N_{yy} , onde [Schmitz, 1985]:

$$N_{yy}(\lambda) = -\frac{2}{EI\beta^2}(\text{sen}\lambda + \text{senh}\lambda), \quad (2.48)$$

sendo que N_{yy} também pode ser expressa na forma:

$$N_{yy}(\lambda) = -\frac{2l}{EI\lambda} \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 + \frac{\lambda^4}{\lambda_i^{t^4}}\right) = -\frac{2l}{EI\lambda} \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 + \frac{s^2}{\alpha_i^{t^2}}\right), \quad (2.49)$$

onde os zeros α_i^t são definidos como:

$$\alpha_i^t = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda_i^{t^2}.$$

Portanto, das equações (2.45) e (2.49), resulta

$$\frac{\bar{y}_y(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{l}{I_T s^2} \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{\left(1 - \frac{s^2}{\alpha_i^{t^2}}\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{w_i^2}\right)}. \quad (2.50)$$

Os zeros da função de transferência do caso não colocado são simétricos com relação ao eixo imaginário.

Tendo sido apresentada a determinação das funções de transferência dos caso colocado e não colocado, passa-se para a apresentação dos gráficos das funções de transferência em malha aberta.

2.8 GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA ABERTA

A seguir, apresentam-se os gráficos das funções de transferência analítica nos casos colocado e não colocado, ou seja, tem-se a resposta em frequência do sistema determinada pelo módulo da função de transferência do sistema.

Foram usados os seguintes dados:

- Comprimento da estrutura flexível: $l = 1.61m$
- espessura da estrutura flexível: $e = 0.005m$
- altura da estrutura flexível: $h = 0.1m$
- inércia do rotor: $I_r = 0.37568kgm^2$
- massa específica do material: $\rho = 2700kg/m^3$
- inércia da secção reta: $I = 1.04 \times 10^{-9}m^4$
- massa da carga: $m_c = 6.1kg$
- massa da estrutura flexível: $m_b = \rho.h.l.e$
- coeficiente de atrito atuando no rotor: $c_r = 2.56Nms/rd$
- coeficiente de atrito devido à deformação elástica da estrutura: $c = 0.005c_r$
- módulo d'Young: $E = 7360MPa$; $EI = 77Nm^2$

Na Figura 2.2 verifica-se a presença de picos que representam os valores nos quais a função de transferência tende a mais infinito, equivalentes, portanto, aos pares de pólos complexos e conjugados em malha aberta. Percebe-se também a existência de pontos nos quais a função de transferência tende a menos infinito, correspondentes aos pares de zeros complexos e conjugados em malha aberta.

Na Figura 2.3 identifica-se a presença de picos nos quais a função de transferência tende a mais infinito, representando os pares de pólos complexos e conjugados em malha aberta e verifica-se a ausência de pontos onde a função de transferência tende a menos infinito uma vez que o sistema é de fase não mínima.

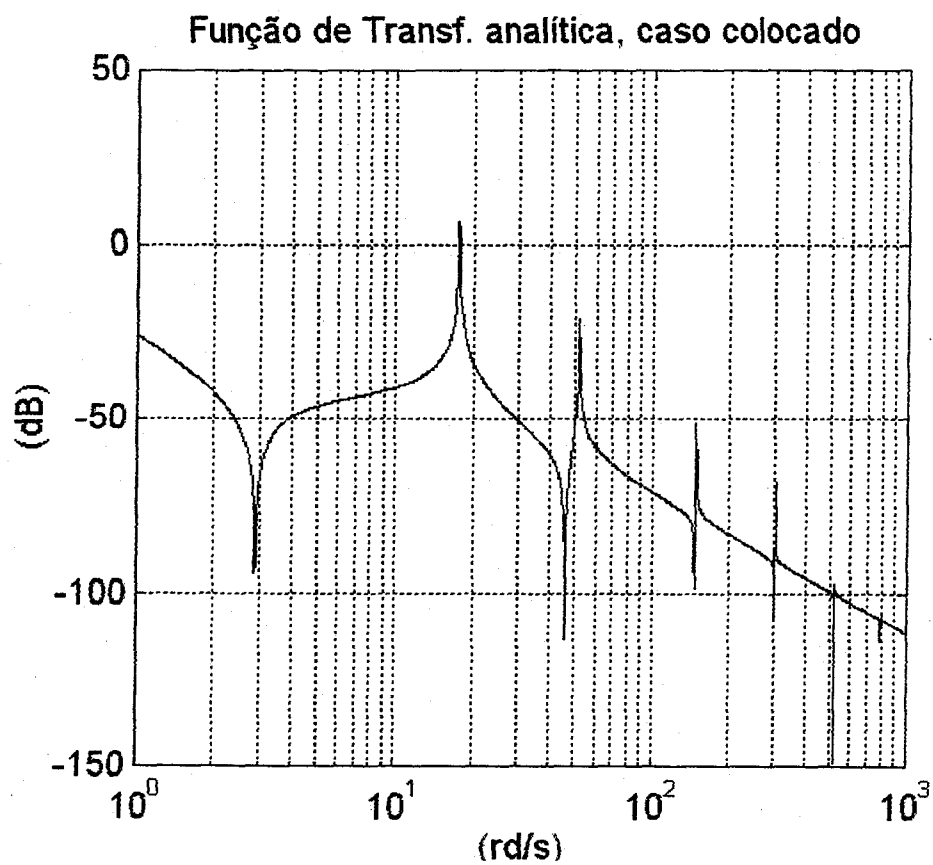


Figura 2.2 Gráfico da Função de Transferência Analítica (caso colocado).

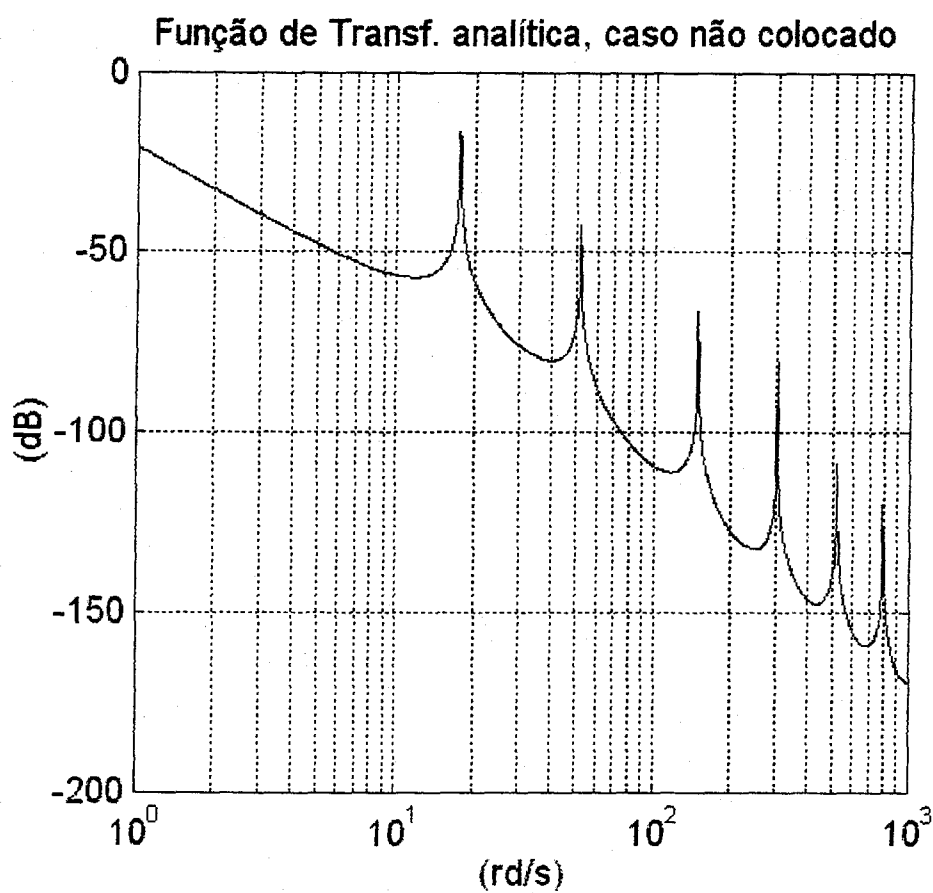


Figura 2.3 Gráfico da Função de Transferência Analítica (Caso não colocado).

CAPÍTULO III
ABORDAGEM DISCRETA PARA
ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

3.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo será apresentada, através da formulação de Lagrange, a modelagem matemática para a dinâmica de uma estrutura flexível, articulada numa extremidade e livre na outra, na qual é colocada uma carga. As equações da dinâmica serão obtidas a partir da abordagem discreta, que divide a estrutura de flexibilidade contínua em partes rígidas, conectadas por elementos flexíveis, chamados de articulações fictícias. Serão estudados os casos em que a abordagem discreta divide a estrutura em duas, três ou quatro partes rígidas, ou seja, os casos em que a estrutura possui uma, duas ou três articulações fictícias. Para cada um dos casos citados serão mostrados os gráficos das simulações e as funções de transferência, com seus respectivos pólos e zeros e os diagramas de Bode. Finalmente, será apresentada uma tabela, contendo um resumo sobre a análise frequencial realizada.

3.2 O FORMALISMO DISCRETO

Considere uma estrutura flexível de comprimento l , articulada em uma das extremidades e livre na outra. A articulação é constituída de um motor elétrico, sendo que a estrutura é fixa ao rotor deste motor. No rotor é aplicado um torque T_m , para que o mesmo se movimente com um ângulo θ e na extremidade livre é colocada uma carga de massa m_c , conforme mostra a Figura 3.1.

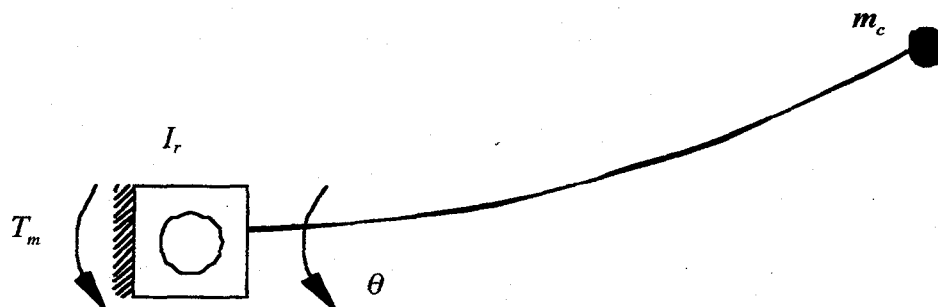


Figura 3.1 Estrutura flexível (vista de cima).

Na Abordagem Discreta, a estrutura de flexibilidade contínua é dividida em partes rígidas conectadas por articulações fictícias. No primeiro caso, a estrutura de comprimento l é dividida em

duas partes rígidas, ou seja, é colocada uma articulação fictícia exatamente na metade da estrutura, conforme mostra a Figura 3.2.

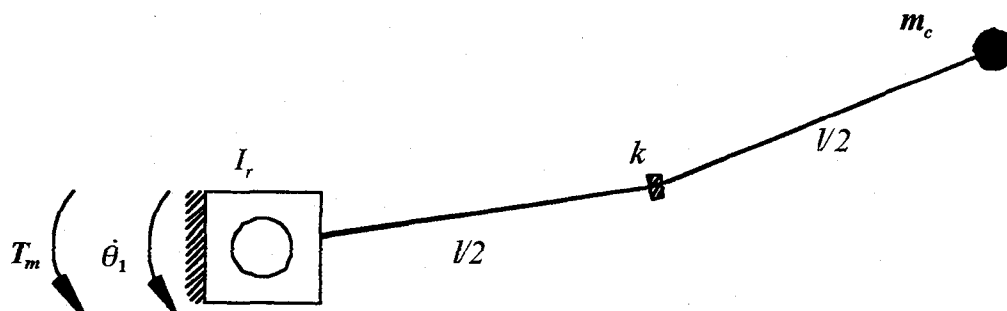


Figura 3.2 Estrutura dividida em duas partes rígidas com 1af (1 articulação fictícia).

Na Figura 3.2 I_r é a inércia e $\dot{\theta}_1$ a velocidade angular (ambos do rotor), T_m o torque aplicado no rotor e k a constante elástica dada por [Gomes e Chrétien, 1992 b]:

$$k = \frac{nEI}{l},$$

onde n é o número de articulações fictícias, EI é o módulo d'Young multiplicado pela inércia da seção reta.

O torque de atrito é sempre contrário ao movimento, sendo que no modelo considerado este é proporcional à velocidade angular, sendo c_r a constante de proporcionalidade:

$$T_a = -c_r \dot{\theta}_1.$$

As partes rígidas (elos), têm massas concentradas nos seus respectivos centros de massa, ou seja, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as coordenadas dos centros de massa dos braços de massas m_1 e m_2 , respectivamente, enquanto (x_c, y_c) são as coordenadas do centro de massa da carga de massa m_c , conforme mostra a Figura 3.3.

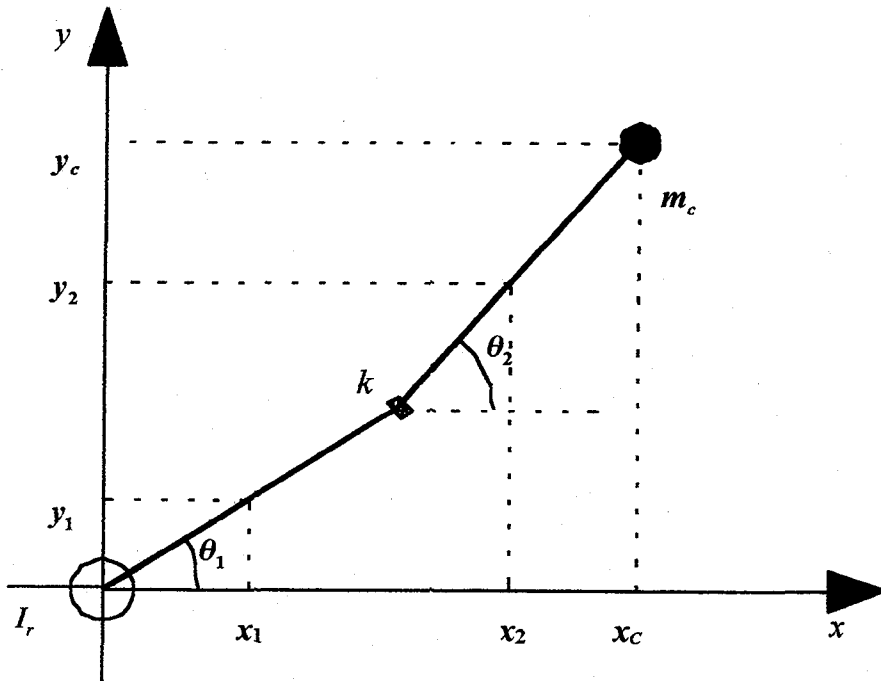


Figura 3.3 Estrutura dividida em duas partes rígidas.

No segundo caso a estrutura de comprimento l é dividida em três partes rígidas, ou seja, são colocadas duas articulações fictícias exatamente na metade de cada uma das partes rígidas do primeiro caso, conforme mostra a Figura 3.4.

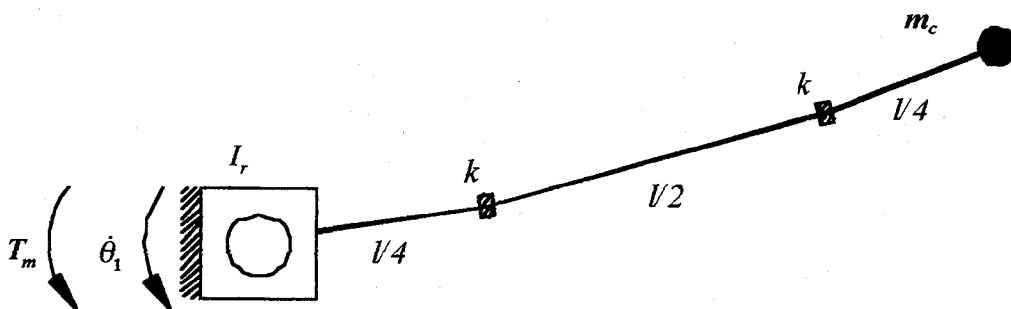


Figura 3.4 Estrutura dividida em três partes rígidas com 2af (2 articulações fictícias).

Os elos têm massas concentradas nos centros de massa, ou seja, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são as coordenadas dos centros de massa dos elos de massas m_1 , m_2 e m_3 , respectivamente, enquanto (x_c, y_c) são as coordenadas do centro de massa da carga de massa m_c , conforme mostra a Figura 3.5.

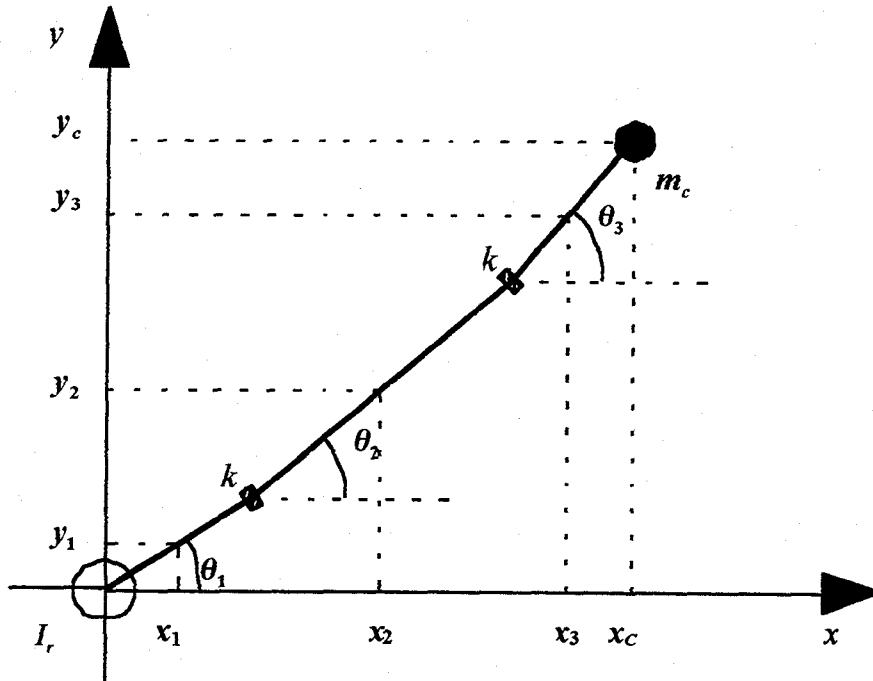


Figura 3.5 Estrutura dividida em três partes rígidas.

No terceiro caso a estrutura de comprimento l é dividida em quatro partes rígidas, ou seja, são colocadas três articulações fictícias exatamente na metade de cada uma das partes rígidas do segundo caso, conforme mostra a Figura 3.6.

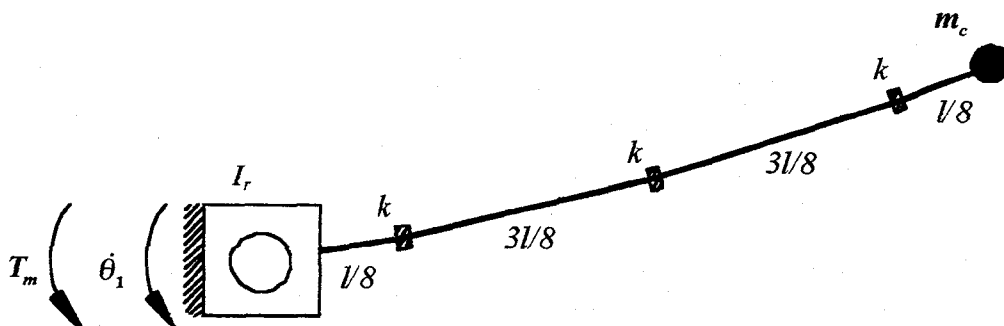


Figura 3.6 Estrutura dividida em quatro partes rígidas com 3af (3 articulações fictícias).

Os elos têm massas concentradas nos centros de massa, ou seja, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) e (x_4, y_4) são as coordenadas dos centros de massa dos elos de massas m_1 , m_2 , m_3 e m_4 respectivamente, enquanto (x_c, y_c) são as coordenadas do centro de massa da carga de massa m_c , conforme mostra a Figura 3.7. A seguir apresenta-se o modelo com um modo flexível.

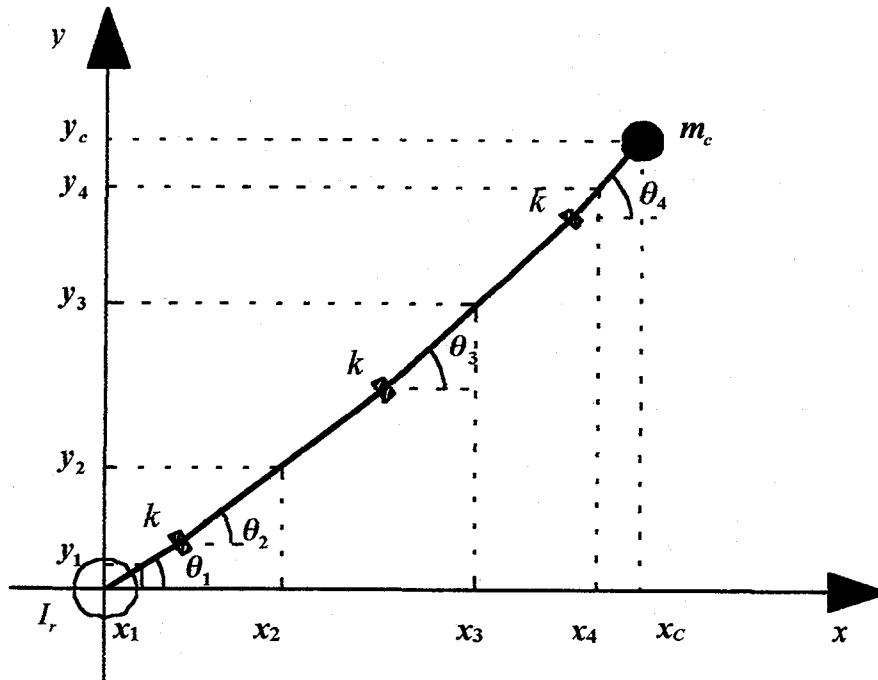


Figura 3.7 Estrutura dividida em quatro partes rígidas.

3.3 MODELO COM UM MODO FLEXÍVEL

Nesta seção será desenvolvida a modelagem matemática para o primeiro caso citado anteriormente, ou seja, para o caso em que a estrutura flexível é dividida em duas partes rígidas com uma articulação fictícia.

Neste caso a Energia Cinética é definida conforme:

$$E_c = \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2), \quad (3.1)$$

onde $\frac{1}{2} I_r \dot{\theta}_1^2$ é a energia cinética devido à velocidade angular do rotor, $\frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$ é a energia

cinética devido ao movimento da massa m_1 , $\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$ é a energia cinética devido ao movimento da massa m_2 e $\frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2)$ é a energia cinética devido ao movimento da massa m_c . Observa-se que as componentes rotacionais da energia cinética, das partes rígidas em torno dos seus respectivos centros de massa, foram negligenciadas. A hipótese aqui considerada é a de que estes termos são realmente pequenos, isto devido às pequenas velocidades angulares de rotação das partes rígidas em torno dos seus respectivos centros de massa.

Como não existe flexibilidade da estrutura no plano vertical (ver Figura 3.3), a energia potencial é dada por:

$$E_p = \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (3.2)$$

Na Figura 3.3, verifica-se que $m_1 = m_2 = \frac{m_b}{2}$, onde m_b é a massa da lâmina. As coordenadas dos centros de massa das partes rígidas e carga terminal são facilmente obtidas nas formas:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l}{4} \cos \theta_1 \\ y_1 = \frac{l}{4} \sin \theta_1 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{l}{2} \cos \theta_1 + \frac{l}{4} \cos \theta_2 \\ y_2 = \frac{l}{2} \sin \theta_1 + \frac{l}{4} \sin \theta_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

e

$$\begin{cases} x_c = \frac{l}{2} \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \cos \theta_2 \\ y_c = \frac{l}{2} \sin \theta_1 + \frac{l}{2} \sin \theta_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Sabe-se que o Lagrangeano do sistema é dado por [Meirovitch, 1967]:

$$L = E_c - E_p \quad (3.6)$$

Portanto, substituindo-se (3.1) e (3.2) em (3.6), obtém-se:

$$L = \frac{1}{2}I_r\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) - \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (3.7)$$

Derivando-se as equações (3.3), (3.4) e (3.5), tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{l}{4}\text{sen}\theta_1\dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1 = \frac{l}{4}\text{cos}\theta_1\dot{\theta}_1 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{l}{2}\text{sen}\theta_1\dot{\theta}_1 - \frac{l}{4}\text{sen}\theta_2\dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{l}{2}\text{cos}\theta_1\dot{\theta}_1 + \frac{l}{4}\text{cos}\theta_2\dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = -\frac{l}{2}\text{sen}\theta_1\dot{\theta}_1 - \frac{l}{2}\text{sen}\theta_2\dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_c = \frac{l}{2}\text{cos}\theta_1\dot{\theta}_1 + \frac{l}{2}\text{cos}\theta_2\dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Portanto, substituindo-se (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.7), e ainda considerando-se pequenas deflexões angulares na articulação fictícia, resulta:

$$L = \left[\frac{1}{2}I_r + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c \right) \right] \dot{\theta}_1^2 + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (3.11)$$

Aplicando-se a equação de Euler-Lagrange à primeira variável,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = T_m - c_r\dot{\theta}_1 - c(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2),$$

onde $-c_r\dot{\theta}_1$ é o torque de atrito no rotor e c é o coeficiente de atrito viscoso devido à deflexão angular na articulação fictícia, obtém-se:

$$\left[I_r + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c \right) \right] \ddot{\theta}_1 + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + (c_r + c)\dot{\theta}_1 - c\dot{\theta}_2 - k(\theta_2 - \theta_1) = T_m \quad (3.12)$$

Aplicando-se o mesmo procedimento a segunda variável,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -c(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1),$$

obtém-se:

$$\frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \ddot{\theta}_2 - c\dot{\theta}_1 + c\dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (3.13)$$

Portanto, tem-se o sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} \left[I_r + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c \right) \right] \ddot{\theta}_1 + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + (c_r + c) \dot{\theta}_1 - c \dot{\theta}_2 - k(\theta_2 - \theta_1) = T_m \\ \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \ddot{\theta}_2 - c \dot{\theta}_1 + c \dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases} \quad (3.14).$$

Este pode ser escrito na forma matricial

$$[I] \ddot{\bar{\theta}} + [C_a] \dot{\bar{\theta}} + [K] \bar{\theta} = \bar{T}_m, \quad (3.15)$$

onde:

$$I = \begin{bmatrix} I_r + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c \right) & \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \\ \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) & \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \end{bmatrix}$$

$$C_a = \begin{bmatrix} c_r + c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}_m = \begin{bmatrix} T_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

A fim de transformar o sistema de equações diferenciais de segunda ordem (3.14) num sistema de equações diferenciais de primeira ordem é feita a seguinte troca de variáveis:

$$x_1 = \theta_1, \quad x_2 = \theta_2, \quad x_3 = \dot{\theta}_1, \quad x_4 = \dot{\theta}_2.$$

O sistema (3.15) pode ser, então, escrito na seguinte forma de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0]_{2 \times 2} & [1]_{2 \times 2} \\ -[I]^{-1}[K] & -[I]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ [I]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} T_m, \quad (3.16)$$

ou seja, num sistema do tipo:

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + BT_m, \quad (3.17)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} [0]_{2 \times 2} & [1]_{2 \times 2} \\ -[I]^{-1}[K] & -[I]^{-1}[C] \end{bmatrix},$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ [I]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

3.3.1 GRÁFICOS DAS SIMULAÇÕES

Nas simulações apresentadas a seguir foram usados os mesmos dados já definidos no capítulo anterior. Os valores numéricos para as matrizes do sistema na forma de estado são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -135.627326 & 135.627326 & -3.590406 & 0.036299 \\ 152.993383 & -152.993383 & 3.7466002 & -0.040946 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.388323 \\ -1.447521 \end{bmatrix}.$$

As simulações foram realizadas com a rotina ode-45 no *software* MATLAB, atribuindo-se para o torque:

$$T_m = \begin{cases} 8Nm, & t < 0,2s \\ -8Nm, & 0,2s \leq t < 0,4s, \\ 0, & t \geq 0,4s \end{cases}$$

sendo o passo de integração considerado $h = 0.001s$.

Na Figura 3.8 observa-se a posição e a velocidade angular do rotor, onde se verifica o surgimento de um modo de vibração cuja frequência corresponde à parte imaginária dos pólos complexos (Autovalores da matriz A (ver Tabela 3.1 ao final do capítulo)). Verifica-se também que a posição do rotor se estabiliza em aproximadamente $2s$ e que a velocidade se aproxima de zero neste mesmo tempo. Na Figura 3.9 mostra-se a posição e a velocidade angular da carga e identifica-se que o resultado apresentado é semelhante ao apresentado na Figura 3.8, mas as oscilações não estão em fase com as observadas na velocidade do rotor, devendo-se isto à flexibilidade estrutural responsável pelo comportamento de fase não mínima a ser explicado na próxima seção.

A Figura 3.10 mostra a velocidade de deformação angular na articulação fictícia, onde se verifica a presença do mesmo modo de vibração.

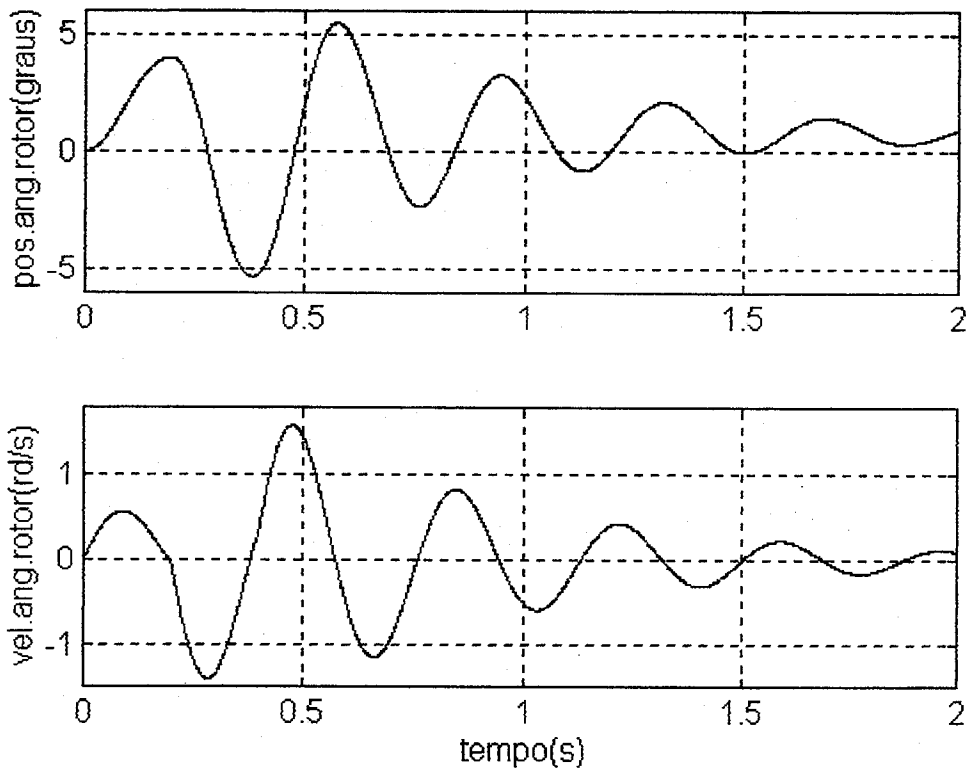


Figura 3.8 Curvas da posição e velocidade angular do rotor
(Sistema com uma articulação fictícia (1af)).

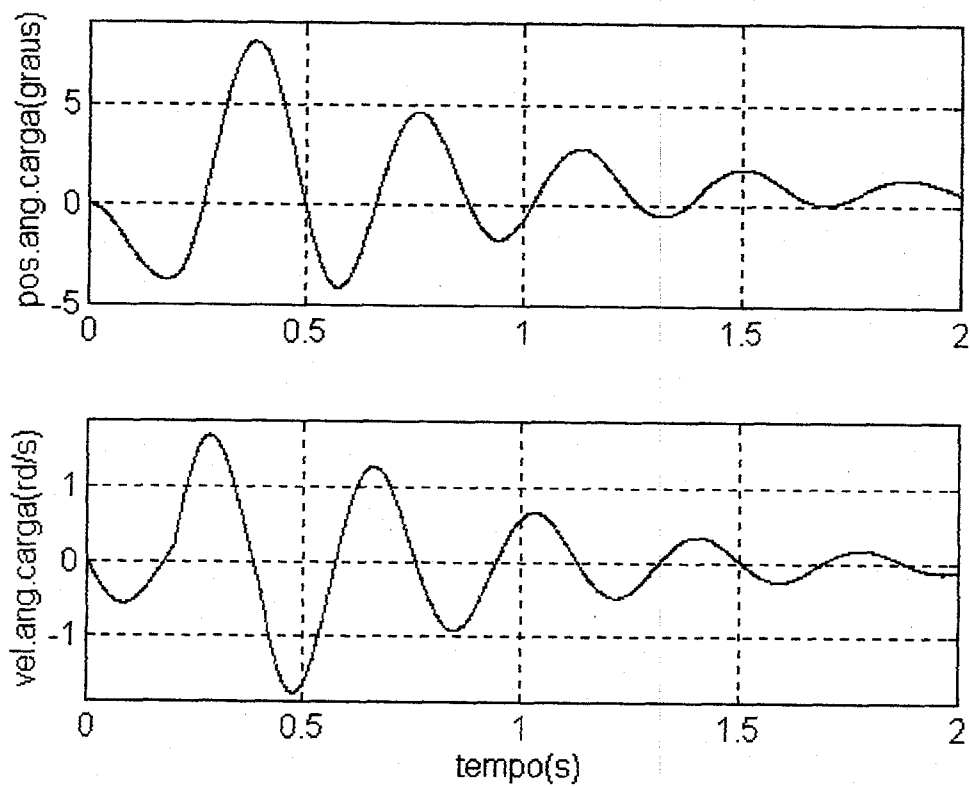


Figura 3.9 Curvas da posição e velocidade angular da carga (Sistema 1af).

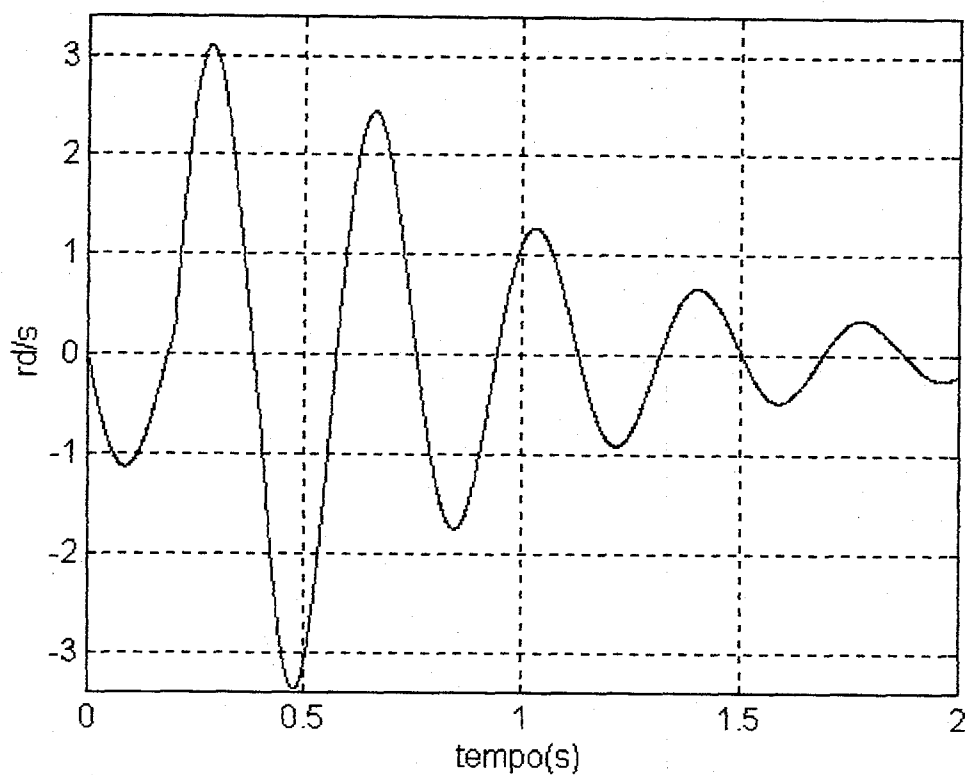


Figura 3.10 Velocidade de deformação angular na articulação fictícia(Sistema 1af).

3.3.2 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA (SISTEMA 1af)

Considerando-se o sistema de equações diferenciais e um vetor de observações

$$\dot{X} = AX + Bu ; Y = CX \quad (3.18)$$

e tomando-se a Transformada de Laplace deste sistema, obtém-se:

$$sX(s) = AX(s) + Bu(s) \Rightarrow Bu(s) = (sI - A)X(s) \Rightarrow (sI - A)^{-1} Bu(s) = X(s).$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação acima pela matriz C , obtém-se:

$$C(sI - A)^{-1} Bu(s) = CX(s),$$

mas

$$Y(s) = CX(s),$$

o que implica em

$$C(sI - A)^{-1} Bu(s) = Y(s) \Rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1} Bu(s) = G(s)u(s),$$

onde

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (3.19)$$

é a função de transferência, sendo o numerador e o denominador desta função dois polinômios em s , onde as raízes do denominador são os autovalores da matriz A , chamados de pólos da função de transferência $G(s)$, e as raízes do numerador são os zeros de $G(s)$.

CASO COLOCADO (Posição angular do rotor)

Os sistemas classificados como colocados são aqueles nos quais o torque externo de controle (atuador) é aplicado no mesmo local em que se faz a observação. Reportando-se à estrutura flexível estudada no presente trabalho, o caso colocado se configuraria com a observação, por exemplo, da posição angular do rotor, ou seja:

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

desta forma,

$$Y = CX = \theta_1 .$$

Como o torque é aplicado no próprio rotor este sistema é do tipo colocado e neste caso, possui uma única entrada e uma única saída, conforme a Figura 3.11.

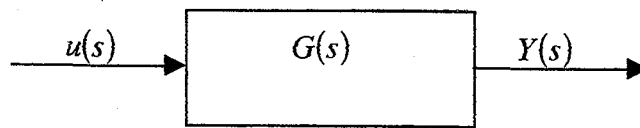


Figura 3.11 Sistema em malha aberta.

A função de transferência agora possui a forma:

$$\frac{\theta_1}{T_m}(s) = \frac{\sum_{i=0}^2 \chi_i s^i}{\sum_{j=0}^4 \gamma_j s^j} \approx \frac{1}{I_T s^2} \frac{\left(1 + \frac{s^2}{\Omega^2}\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{\omega^2}\right)}, \quad (3.20)$$

onde I_T corresponde à inércia de corpo rígido. Os valores dos coeficientes dos polinômios em s são:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 16.080857 ; \chi_1 = 0.004304 ; \chi_2 = 1.388323 ; \gamma_0 = 0 ; \gamma_1 = 41.166993 ; \\ \gamma_2 &= 288.631727 ; \gamma_3 = 3.631353 ; \gamma_4 = 1 \end{aligned}$$

Os pólos da função de transferência no caso colocado são:

$$\begin{aligned} &-1.74423890025177 + 16.88463627685490i \\ &-1.74423890025177 - 16.88463627685490i \\ &-0.14287481304070 \\ &-0.00000000000011 \end{aligned}$$

e os zeros da função de transferência no caso colocado são:

$$\begin{aligned} &-0.00155000730754 + 3.40337077597454i \\ &-0.00155000730754 - 3.40337077597454i \end{aligned}$$

CASO NÃO COLOCADO (Posição Angular da carga)

Os sistemas classificados como não colocados são aqueles nos quais o torque externo de controle (atuador) não é aplicado no mesmo local em que se faz a observação. Reportando-se à estrutura flexível estudada no presente trabalho, o caso não colocado se configuraria com a observação, por exemplo, da posição angular da carga, ou seja:

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0],$$

A função de transferência neste caso possui a forma:

$$\frac{\theta_2}{T_m}(s) = \frac{\sum_{i=0}^2 \xi_i s^i}{\sum_{j=0}^4 \psi_j s^j} \approx \frac{1}{I_T s^2} \frac{\left(1 - \frac{s^2}{\Omega^2}\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{\omega^2}\right)}, \quad (3.21)$$

onde:

$$\xi_0 = 16.080857 ; \xi_1 = 0.004304 ; \xi_2 = -1.447521; \psi_0 = 0 ; \psi_1 = 41.166993 ; \psi_2 = 288.631727 ; \\ \psi_3 = 3.631353 ; \psi_4 = 1$$

Os pólos da função de transferência no caso não colocado são:

$$\begin{aligned} & -1.74423890025177 + 16.88463627685490i \\ & -1.74423890025177 - 16.88463627685490i \\ & -0.14287481304070 \\ & -0.00000000000011 \end{aligned}$$

e os zeros da função de transferência no caso não colocado são:

$$\begin{aligned} & 3.33453949463323 \\ & -3.33156625823288 \end{aligned}$$

3.3.3 DIAGRAMAS DE BODE (SISTEMA 1af)

As figuras a seguir mostram os Diagramas de Bode para os casos colocado e não colocado, sendo no primeiro gráfico de cada uma destas figuras apresentadas, a resposta em frequência do sistema, ou seja, o módulo da função de transferência do mesmo e no segundo, tem-se os diagramas de fase.

As Figuras 3.12 e 3.13 mostram os Diagramas de Bode para a função de transferência do caso colocado, conforme equação (3.20), sendo que na Figura 3.12 a matriz de observação considerada é $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$, ou seja, a matriz que permite observar a posição angular do rotor, enquanto que na Figura 3.13 a matriz de observação considerada é $C = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$, ou seja, a matriz de observação da velocidade angular do rotor. Em ambas as figuras pode-se identificar a presença de um pico que representa o valor no qual a função de transferência tende a mais infinito equivalente, portanto, a um par de pólos complexos e conjugados em malha aberta. Percebe-se também a existência de um ponto onde a função de transferência tende a menos infinito, o qual representa um par de zeros complexos e conjugados em malha aberta.

O sistema colocado é de fase mínima devido a presença de pólos e zeros com parte imaginária não nula, tendo-se, conseqüentemente, queda nos pólos e ganhos de fase nos zeros.

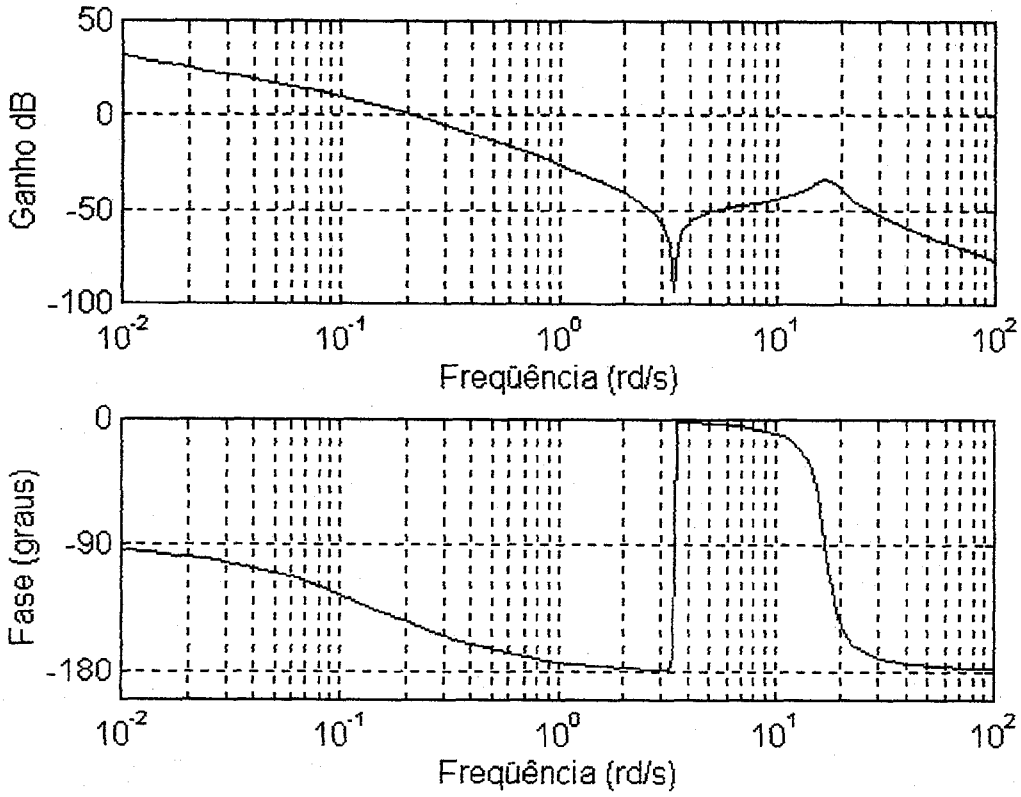


Figura 3.12 Diagrama de Bode – posição angular do rotor (caso colocado-1af).

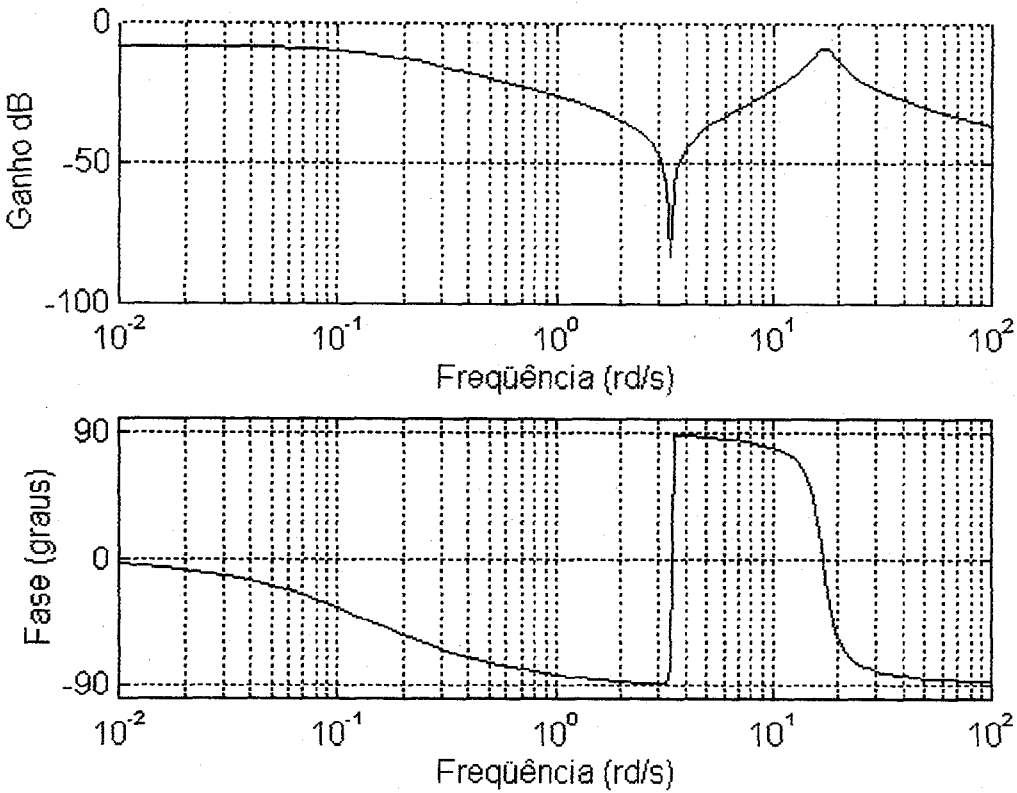


Figura 3.13 Diagrama de Bode – Velocidade angular do rotor (caso colocado-1af).

Na Figura 3.14, observa-se o primeiro modo de vibração no gráfico da função de transferência do modelo discreto com um modo flexível e verifica-se que este se aproxima bem do primeiro modo de vibração observado na função de transferência analítica. Já a posição do zero do Modelo Discreto é ligeiramente superior ao zero analítico.

No caso analítico não há a presença de esforços dissipativos, ou seja, os atritos foram negligenciados. Tomou-se, portanto, a matriz de atritos no Modelo Discreto, dada por:

$$C_{at} = \begin{bmatrix} c_r + c & -c \\ -c & c \end{bmatrix},$$

como sendo nula. A sobreposição dos Diagramas de Bode deste caso pode ser vista na Figura 3.15, sendo a curva tracejada a resposta em frequência do Modelo Discreto. Percebe-se, com maior clareza, a coincidência do pólo e a ligeira diferença no zero já citada anteriormente.

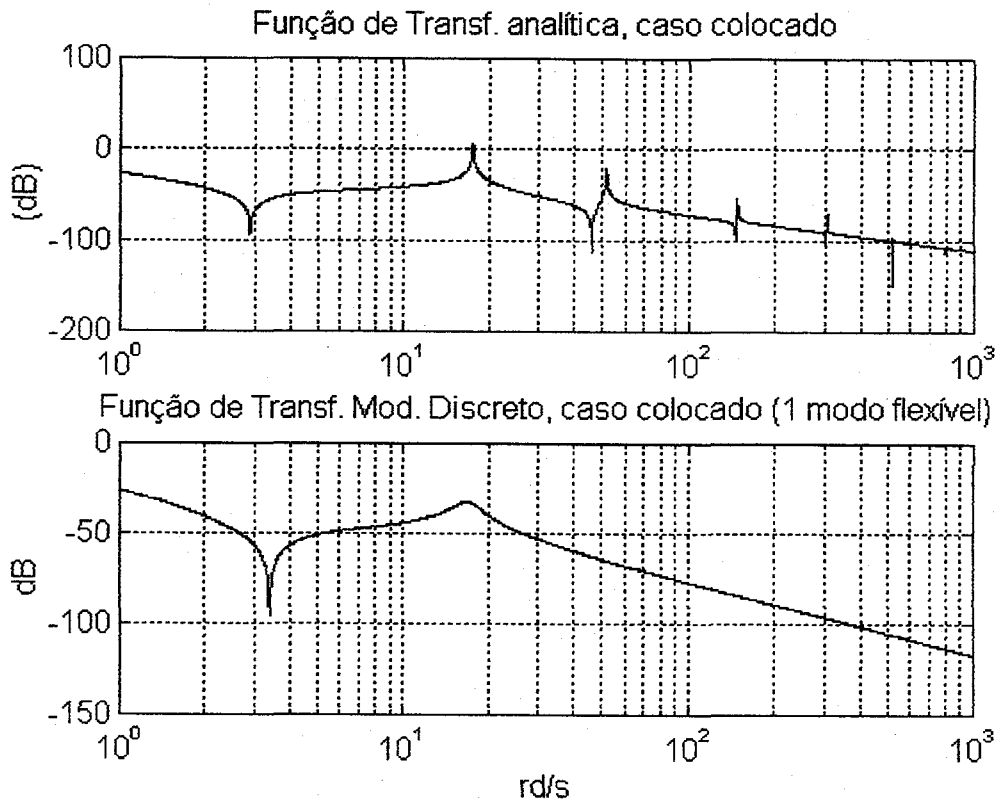


Figura 3.14 Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 1 modo flexível (caso colocado-1af).

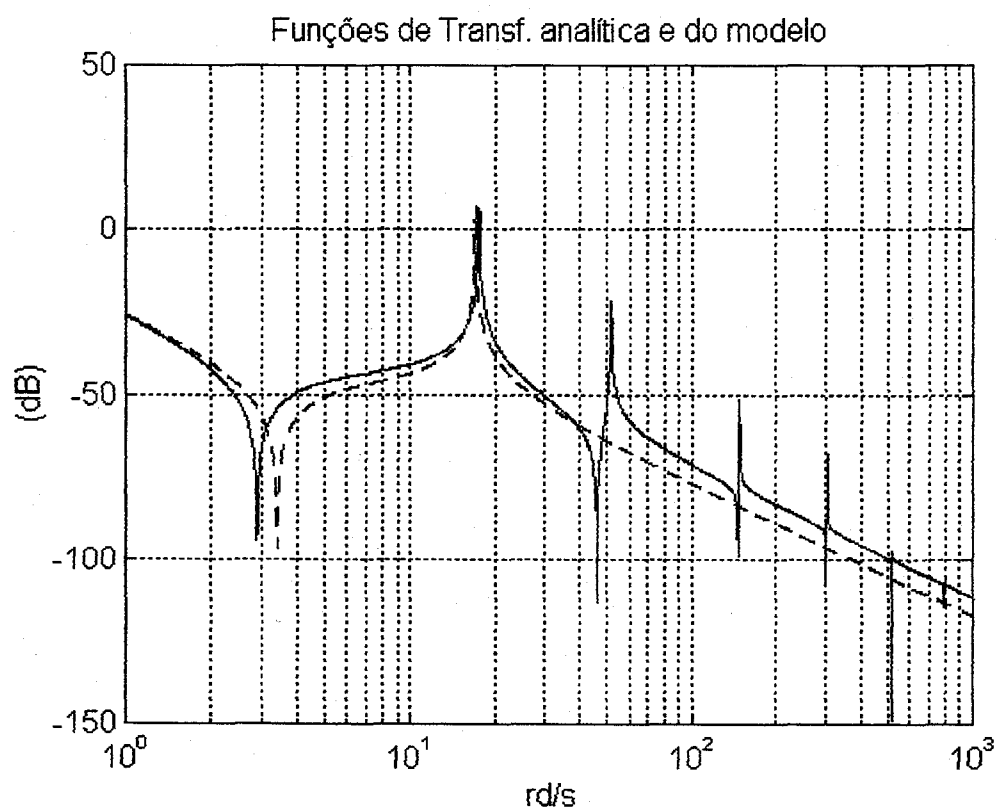


Figura 3.15 Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 1 modo flexível (caso colocado-1af), sendo negligenciados os torques de atrito no Modelo Discreto.

As Figuras 3.16 e 3.17 mostram os diagramas de Bode para a função de transferência do caso não colocado, dada pela equação (3.21), sendo que na Figura 3.16 a matriz de observação considerada é $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$, ou seja, a matriz que permite observar a posição angular da carga, enquanto que na Figura 3.17 a matriz de observação considerada é $C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$, ou seja, a matriz de observação da velocidade angular da carga. Em ambas as figuras verifica-se a presença de um pico que representa um par de pólos complexos e conjugados em malha aberta e verifica-se a ausência de zeros, pois os mesmos tem parte imaginária nula.

O sistema não colocado é de fase não mínima, pois apresenta uma diferença acentuada entre a fase inicial e a fase final, conforme pode-se observar nos diagramas de fase das Figuras 3.16 e 3.17.

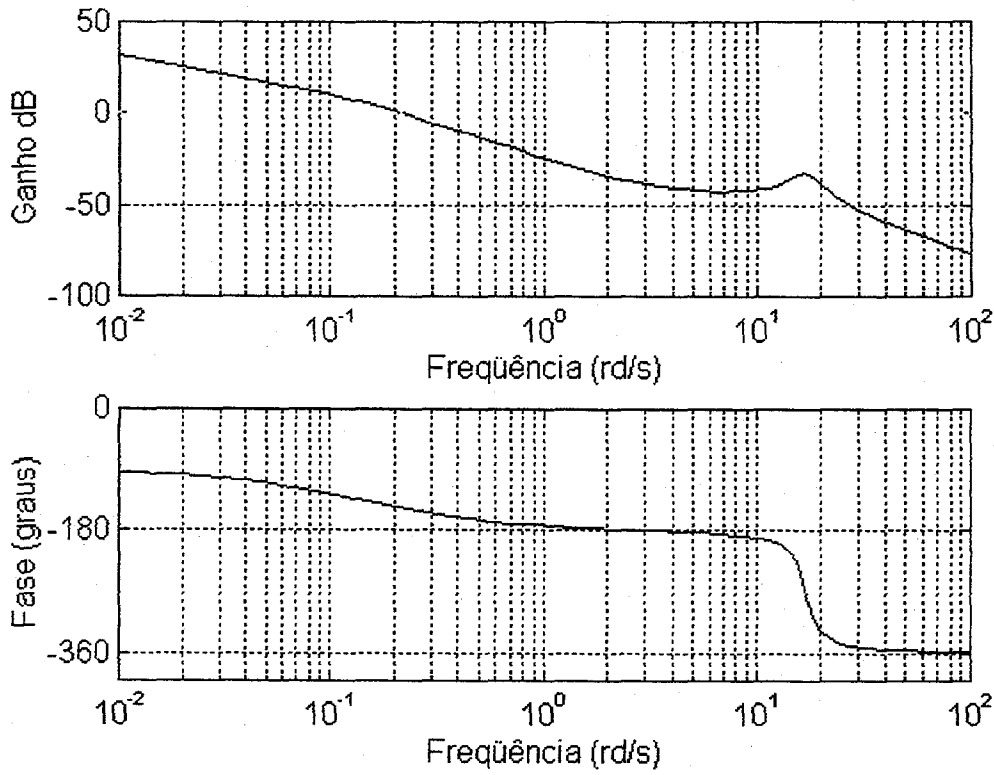


Figura 3.16 Diagrama de Bode – Posição angular da carga (caso não colocado-1af).

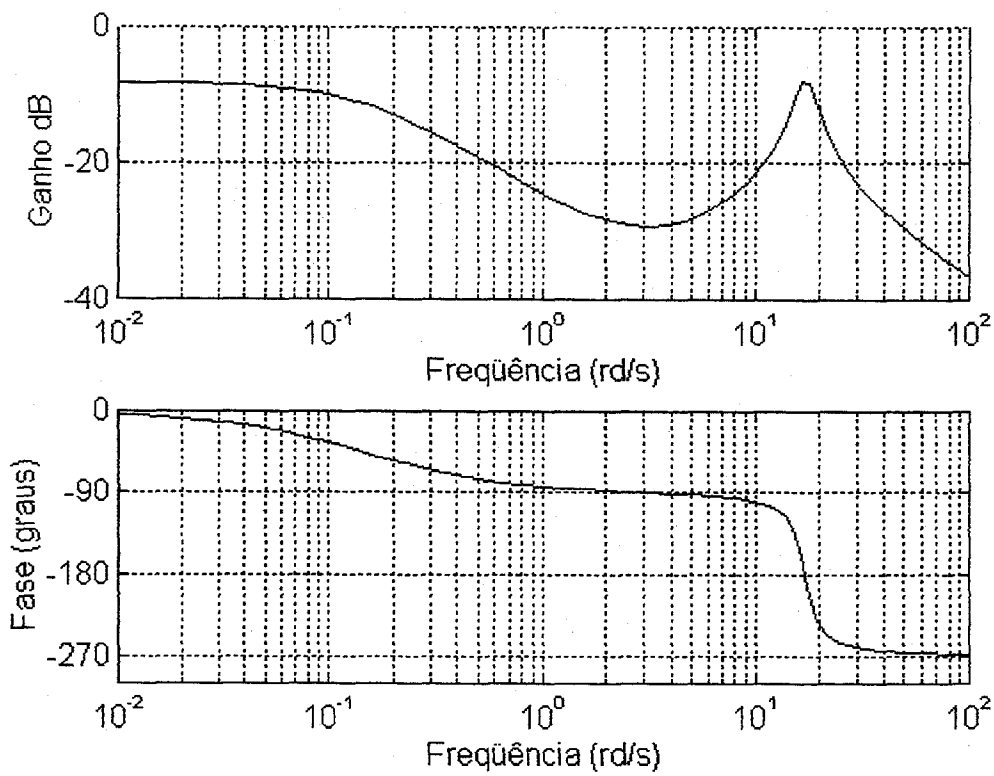


Figura 3.17 Diagrama de Bode – Velocidade Angular da carga (caso não colocado-1af).

3.4 MODELO COM DOIS MODOS FLEXÍVEIS

Será desenvolvida a modelagem matemática para o segundo caso citado, ou seja, para uma estrutura flexível de três partes rígidas com duas articulações fictícias (ver Figura 3.5).

Neste caso, as Energias Cinética e Potencial são escritas nas formas:

$$E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) \quad (3.20)$$

e

$$E_p = \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k (\theta_3 - \theta_2)^2 \quad (3.21)$$

Na Figura 3.5 verifica-se que $m_1 = m_3 = \frac{m_b}{4}$ e $m_2 = \frac{m_b}{2}$, onde m_b é a massa da estrutura. As coordenadas dos centros de massa das partes rígidas e da carga terminal são escritas na forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l}{8} \cos \theta_1 \\ y_1 = \frac{l}{8} \sin \theta_1 \end{cases}, \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{l}{4} \cos \theta_1 + \frac{l}{4} \cos \theta_2 \\ y_2 = \frac{l}{4} \sin \theta_1 + \frac{l}{4} \sin \theta_2 \end{cases}, \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{l}{4} \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \cos \theta_2 + \frac{l}{8} \cos \theta_3 \\ y_3 = \frac{l}{4} \sin \theta_1 + \frac{l}{2} \sin \theta_2 + \frac{l}{8} \sin \theta_3 \end{cases} \quad (3.24)$$

e

$$\begin{cases} x_c = \frac{l}{4} \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \cos \theta_2 + \frac{l}{4} \cos \theta_3 \\ y_c = \frac{l}{4} \sin \theta_1 + \frac{l}{2} \sin \theta_2 + \frac{l}{4} \sin \theta_3 \end{cases} \quad (3.25)$$

O Lagrangeano do sistema é dado por:

$$L = \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) - \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2} k (\theta_3 - \theta_2)^2 \quad (3.26)$$

Derivando-se as equações (3.22), (3.23), (3.24) e (3.25), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{l}{8} \text{sen } \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1 = \frac{l}{8} \text{cos } \theta_1 \dot{\theta}_1 \end{cases}, \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{l}{4} \text{sen } \theta_1 \dot{\theta}_1 - \frac{l}{4} \text{sen } \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{l}{4} \text{cos } \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{l}{4} \text{cos } \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{cases}, \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -\frac{l}{4} \text{sen } \theta_1 \dot{\theta}_1 - \frac{l}{2} \text{sen } \theta_2 \dot{\theta}_2 - \frac{l}{8} \text{sen } \theta_3 \dot{\theta}_3 \\ \dot{y}_3 = \frac{l}{4} \text{cos } \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{l}{2} \text{cos } \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{l}{8} \text{cos } \theta_3 \dot{\theta}_3 \end{cases}, \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = -\frac{l}{4} \text{sen } \theta_1 \dot{\theta}_1 - \frac{l}{2} \text{sen } \theta_2 \dot{\theta}_2 - \frac{l}{4} \text{sen } \theta_3 \dot{\theta}_3 \\ \dot{y}_c = \frac{l}{4} \text{cos } \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{l}{2} \text{cos } \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{l}{4} \text{cos } \theta_3 \dot{\theta}_3 \end{cases}. \quad (3.30)$$

Portanto, substituindo-se (3.27), (3.28), (3.29) e (3.30) em (3.26) e admitindo-se pequenas deformações angulares, obtém-se:

$$L = \frac{1}{2} \left[I_r + \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) \right] \dot{\theta}_1^2 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \dot{\theta}_2^2 + \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \frac{l^2}{32} \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \dot{\theta}_3^2 - \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2} k (\theta_3 - \theta_2)^2 \quad (3.31)$$

Sabendo-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = T_m - c_r \dot{\theta}_1 - c_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2),$$

onde $-c_r \dot{\theta}_1$ é o torque de atrito e c_1 é o coeficiente de atrito devido à deflexão angular na primeira articulação fictícia, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[I_r + \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) \right] \ddot{\theta}_1 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_3 + \\ & + (c_r + c_1) \dot{\theta}_1 - c_1 \dot{\theta}_2 - k (\theta_2 - \theta_1) = T_m \end{aligned} \quad (3.32)$$

e considerando-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -c_1(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3),$$

onde c_2 é o coeficiente de atrito devido à deflexão angular na segunda articulação fictícia, resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_3 + \\ -c_1 \dot{\theta}_1 + (c_1 + c_2) \dot{\theta}_2 - c_2 \dot{\theta}_3 + k(\theta_2 - \theta_1) - k(\theta_3 - \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Considerando-se também que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = -c_2(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2),$$

o que implica em:

$$\frac{l^2}{16} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \ddot{\theta}_3 - c_2 \dot{\theta}_2 + c_2 \dot{\theta}_3 + k(\theta_3 - \theta_2) = 0. \quad (3.34)$$

Obtém-se, então, o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[I_r + \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) \right] \ddot{\theta}_1 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_3 + (c_r + c_1) \dot{\theta}_1 + \\ -c_1 \dot{\theta}_2 - k(\theta_2 - \theta_1) = T_m \\ \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_3 - c_1 \dot{\theta}_1 + (c_1 + c_2) \dot{\theta}_2 - c_2 \dot{\theta}_3 + \\ + k(\theta_2 - \theta_1) - k(\theta_3 - \theta_2) = 0 \\ \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \ddot{\theta}_3 - c_2 \dot{\theta}_2 + c_2 \dot{\theta}_3 + k(\theta_3 - \theta_2) = 0 \end{aligned} \right. \quad (3.35)$$

Na forma matricial, o sistema acima é dado por:

$$[I] \ddot{\theta} + [C_a] \dot{\theta} + [K] \theta = \bar{T}_m, \quad (3.36)$$

onde:

$$I = \begin{bmatrix} I_r + \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) & \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) & \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \\ \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) & \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) & \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \\ \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) & \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) & \frac{l^2}{16} \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \end{bmatrix},$$

$$C_{at} = \begin{bmatrix} c_r + c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix},$$

e

$$\bar{T}_m = \begin{bmatrix} T_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Objetivando transformar o sistema de equações diferenciais de segunda ordem (3.35) num sistema de primeira ordem é feita a seguinte troca de variáveis:

$$x_1 = \theta_1, \quad x_2 = \dot{\theta}_1, \quad x_3 = \theta_2, \quad x_4 = \dot{\theta}_2, \quad x_5 = \theta_3, \quad x_6 = \dot{\theta}_3.$$

O sistema (3.36) pode ser escrito na forma de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0]_{3 \times 3} & [1]_{3 \times 3} \\ -[I]^{-1}[K] & -[I]^{-1}[C_{at}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [I]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} T_m \quad (3.37)$$

ou seja, num sistema do tipo:

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + BT_m, \quad (3.17)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} [0]_{3 \times 3} & [1]_{3 \times 3} \\ -[I]^{-1}[K] & -[I]^{-1}[C_{at}] \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [I]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Apresenta-se a seguir os gráficos das simulações.

3.4.1 GRÁFICOS DAS SIMULAÇÕES

Nas seguintes simulações os dados são os mesmos do caso anterior e a partir desses dados obtém-se as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -426.053233 & 779.272041 & -353.218808 & -6.268426 & 0.104281 & -0.047267 \\ 720.927218 & -2126.565393 & 1405.638174 & 5.287795 & -0.284573 & 0.188099 \\ -1037.929764 & 3644.216563 & -2606.286799 & -4.400992 & 0.487662 & -0.348768 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.426333 \\ -2.027859 \\ 1.664882 \end{bmatrix}$$

As simulações foram obtidas da mesma forma citada anteriormente na seção 3.3.1.

Na Figura 3.18 observa-se a posição e a velocidade angular do rotor, onde se verifica que a posição do rotor se estabiliza em aproximadamente 2s e que a velocidade se aproxima de zero neste mesmo tempo. Na Figura 3.19 observa-se a posição e a velocidade angular da carga, onde se identifica o surgimento do segundo modo de vibração e, portanto, tem-se a presença de dois pólos complexos conjugados na função de transferência do sistema (ver Tabela 3.1).

A Figura 3.20 mostra a velocidade de deformação angular na segunda articulação fictícia, onde se verifica com maior clareza a presença de dois modos de vibração.

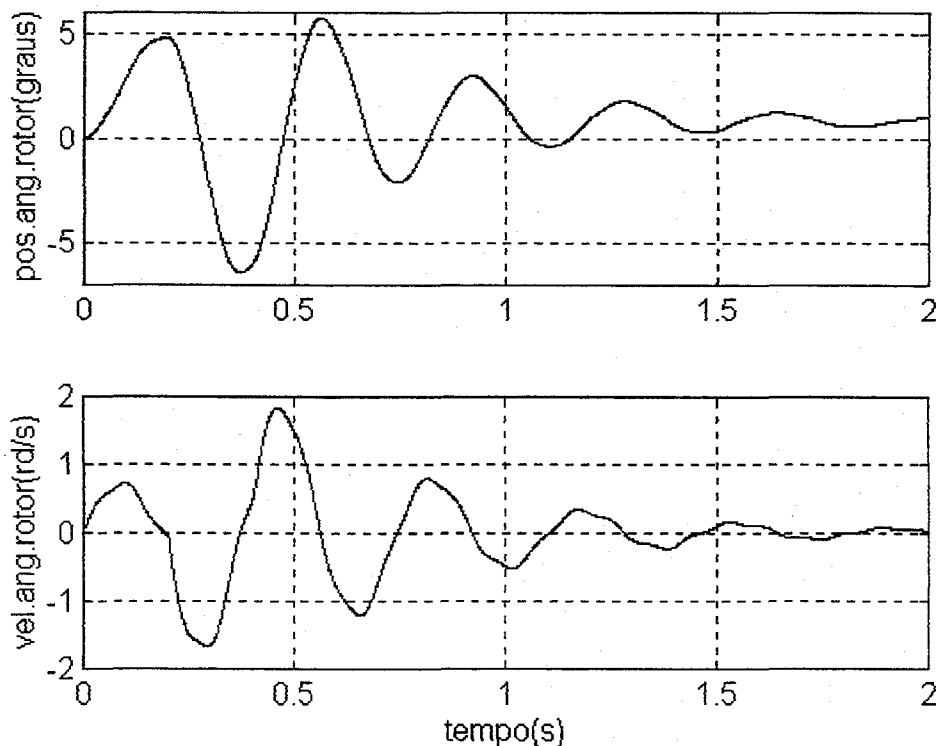


Figura 3.18 Curvas da posição e velocidade angular do rotor (Sistema com duas articulações fictícias (2af)).

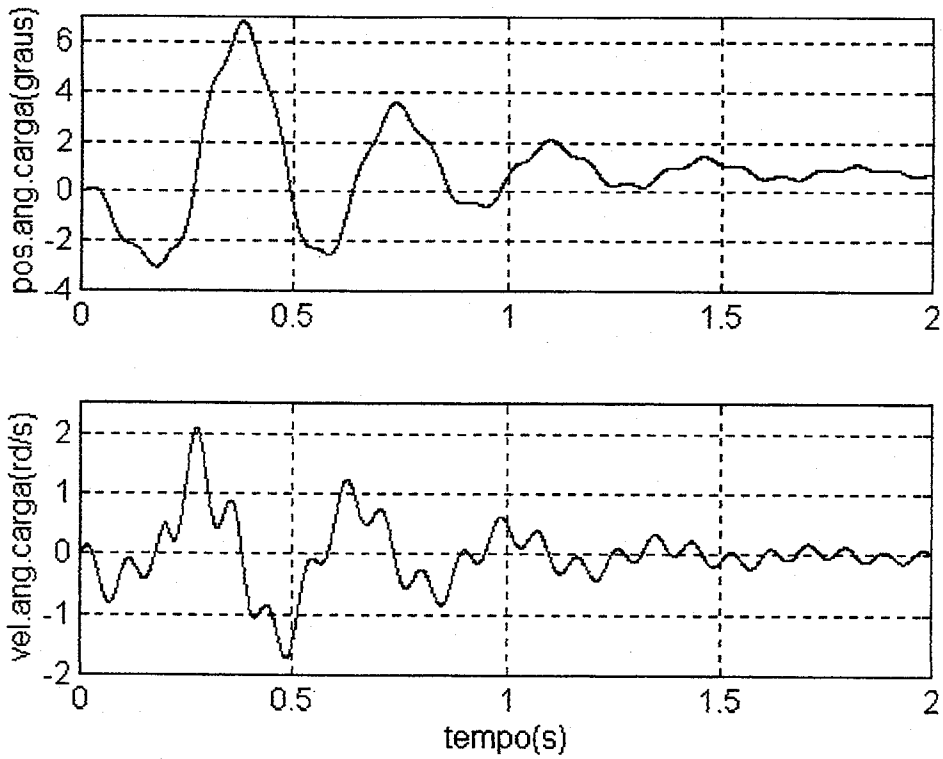


Figura 3.19 Curvas da posição e velocidade angular da carga (Sistema 2af).

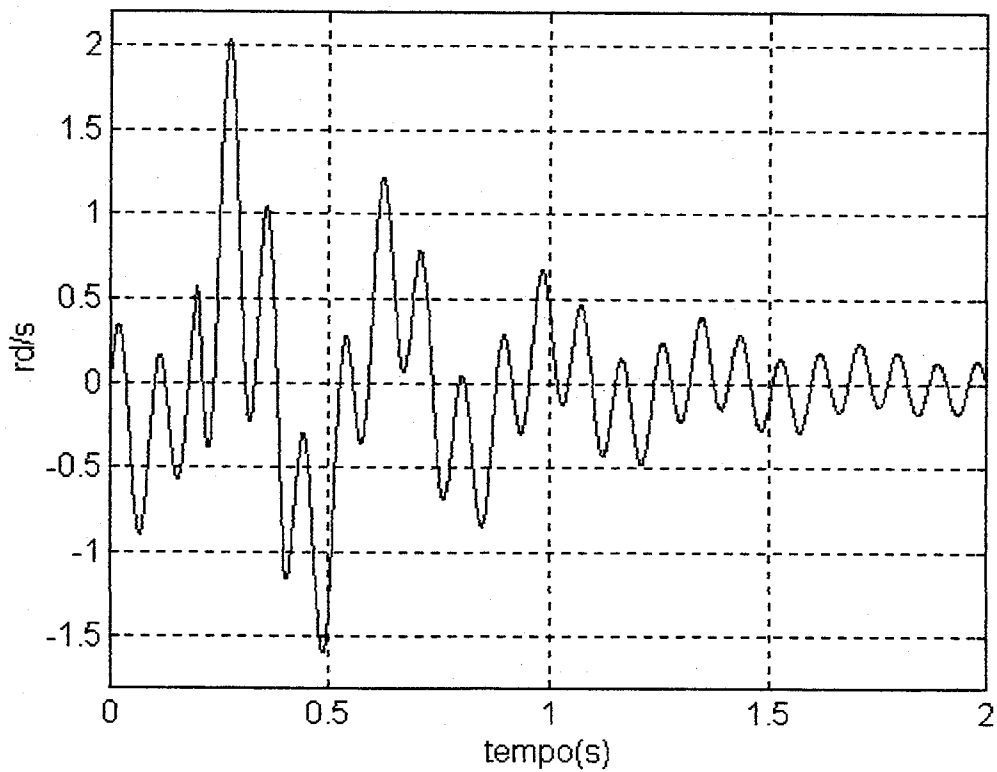


Figura 3.20 Velocidade de deformação angular na última articulação fictícia (Sistema 2af).

3.4.2 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA (SISTEMA 2af)

Descreve-se no que segue as funções de transferência com seus respectivos pólos e zeros, para os casos colocado e não colocado.

CASO COLOCADO (posição angular do rotor)

Considerando-se a matriz de observação:

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

a função de transferência possui a forma:

$$\frac{\theta_1}{T_m}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 \chi_i s^i}{\sum_{j=0}^6 \gamma_j s^j} \approx \frac{1}{I_r s^2} \frac{\left(1 + \frac{s^2}{\Omega_1^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\Omega_2^2}\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_2^2}\right)}, \quad (3.38)$$

onde:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 83815.728294; \chi_1 = 22.432137; \chi_2 = 9315.154384; \chi_3 = 1.246537; \chi_4 = 2.426333; \\ \gamma_0 &= 3.9 \times 10^{-7}; \gamma_1 = 214568.264433; \gamma_2 = 1508079.061412; \gamma_3 = 24250.39665; \\ \gamma_4 &= 5162.123564; \gamma_5 = 6.901768; \gamma_6 = 1 \end{aligned}$$

Os pólos da função de transferência no caso colocado são dados por:

$$\begin{aligned} &-1.01600602342641 + 69.56776075118312i \\ &-1.01600602342641 - 69.56776075118312i \\ &-2.36357968263382 + 17.47174786988823i \\ &-2.36357968263382 - 17.47174786988823i \\ &-0.14259623721646 \\ &-0.000000000000183 \end{aligned}$$

e os zeros da função de transferência no caso colocado são escritos como:

$$\begin{aligned} &-0.25627325484205 + 61.88784414077424i \\ &-0.25627325484205 - 61.88784414077424i \\ &-0.00060345112778 + 3.00316005367815i \\ &-0.00060345112778 - 3.00316005367815i \end{aligned}$$

CASO NÃO COLOCADO (Posição Angular da carga)

Considerando-se a matriz de observação:

$$C = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

a função de transferência resulta na forma:

$$\frac{\theta_3}{T_m}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 \xi_i s^i}{\sum_{j=0}^6 \psi_j s^j} \approx \frac{1}{I_T s^2} \frac{\left(1 - \frac{s^2}{\Omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{s^2}{\Omega_2^2}\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_2^2}\right)}, \quad (3.39)$$

onde:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 83815.728294; \quad \xi_1 = 22.432137; \quad \xi_2 = -5658.513426; \quad \xi_3 = -0.757212; \quad \xi_4 = 1.664882; \\ \psi_0 &= 3.9 \times 10^{-7}; \quad \psi_1 = 214568.264433; \quad \psi_2 = 1508079.061412; \quad \psi_3 = 24250.39665; \\ \psi_4 &= 5162.123564; \quad \psi_5 = 6.901768; \quad \psi_6 = 1 \end{aligned}$$

Os pólos da Função de Transferência no caso não colocado são dados conforme:

$$\begin{aligned} &-1.01600602342641 + 69.56776075118312i \\ &-1.01600602342641 - 69.56776075118312i \\ &-2.36357968263382 + 17.47174786988823i \\ &-2.36357968263382 - 17.47174786988823i \\ &\quad -0.14259623721646 \\ &\quad -0.00000000000183 \end{aligned}$$

e os zeros da Função de Transferência no caso não colocado são expressos por:

$$\begin{aligned} &58.39789883454064 \\ &-57.94507541636014 \\ &-3.85613348199780 \\ &3.85812435430205 \end{aligned}$$

3.4.3 DIAGRAMAS DE BODE (SISTEMA 2af)

As figuras a seguir mostram os Diagramas de Bode para os casos colocado e não colocado do sistema com dois modos de vibração.

As Figuras 3.21 e 3.22 mostram os Diagramas de Bode para a função de transferência do caso colocado, dada pela equação (3.38), sendo que na Figura 3.21 a matriz de observação considerada é $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, ou seja, uma matriz que permite a observação da posição angular do rotor. Na Figura 3.22 a matriz de observação considerada é $C = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$, ou seja, uma matriz que permite observar a velocidade angular do rotor. Em ambas as figuras pode-se identificar a presença de dois picos que representam os valores nos quais a função de transferência tende a mais infinito e, portanto, equivalem a dois pares de pólos complexos e conjugados em malha aberta.

Percebe-se também a existência de dois pontos onde a função de transferência tende a menos infinito, os quais representam dois pares de zeros complexos e conjugados em malha aberta.

O sistema colocado é de fase mínima devido a presença de pólos e zeros com parte imaginária não nula e, conseqüentemente, tem-se queda de fase nos dois pólos e ganhos de fase nos dois zeros.

Na Figura 3.23 observa-se os dois primeiros modos de vibração no gráfico da função de transferência do Modelo Discreto com dois modos flexíveis e verifica-se que o primeiro par pólo-zero se aproxima do caso analítico, o mesmo não acontecendo com o segundo par pólo-zero.

Na Figura 3.24 negligenciou-se os atritos no Modelo Discreto e sobrepôs-se ao resultado analítico. A curva tracejada corresponde à resposta em frequência do Modelo Discreto. Pode-se verificar com mais clareza que a inclusão do segundo modo de vibração fez com que o primeiro par pólo-zero se tornasse coincidente com o do caso analítico.

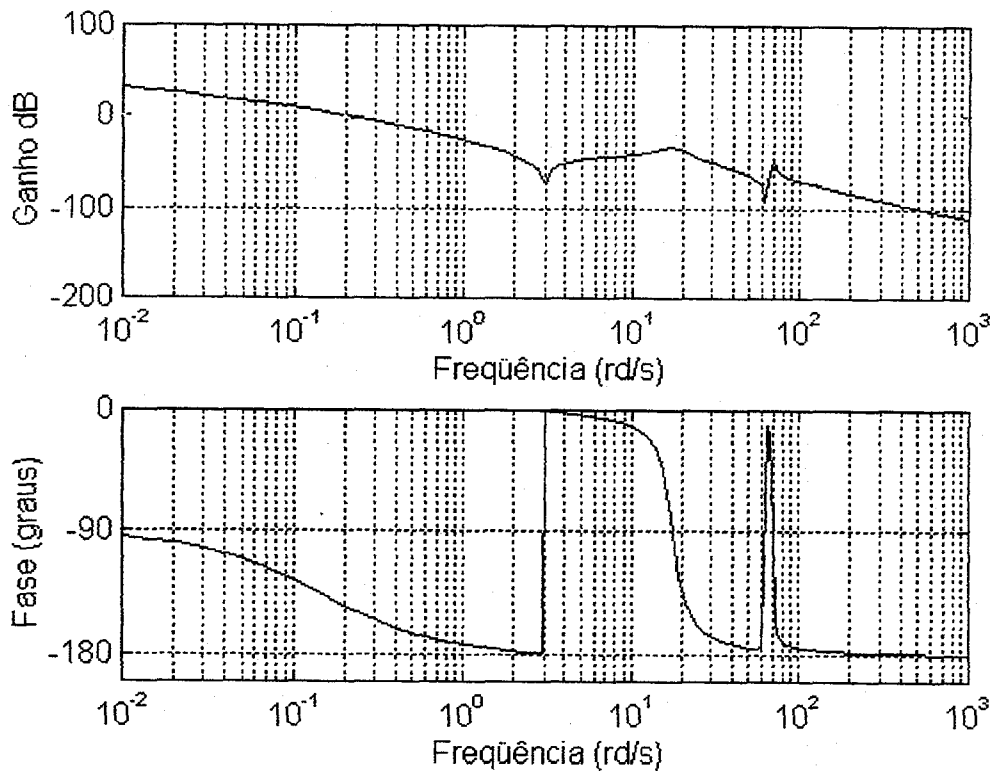


Figura 3.21 Diagrama de Bode – Posição angular do rotor (caso colocado-2af).

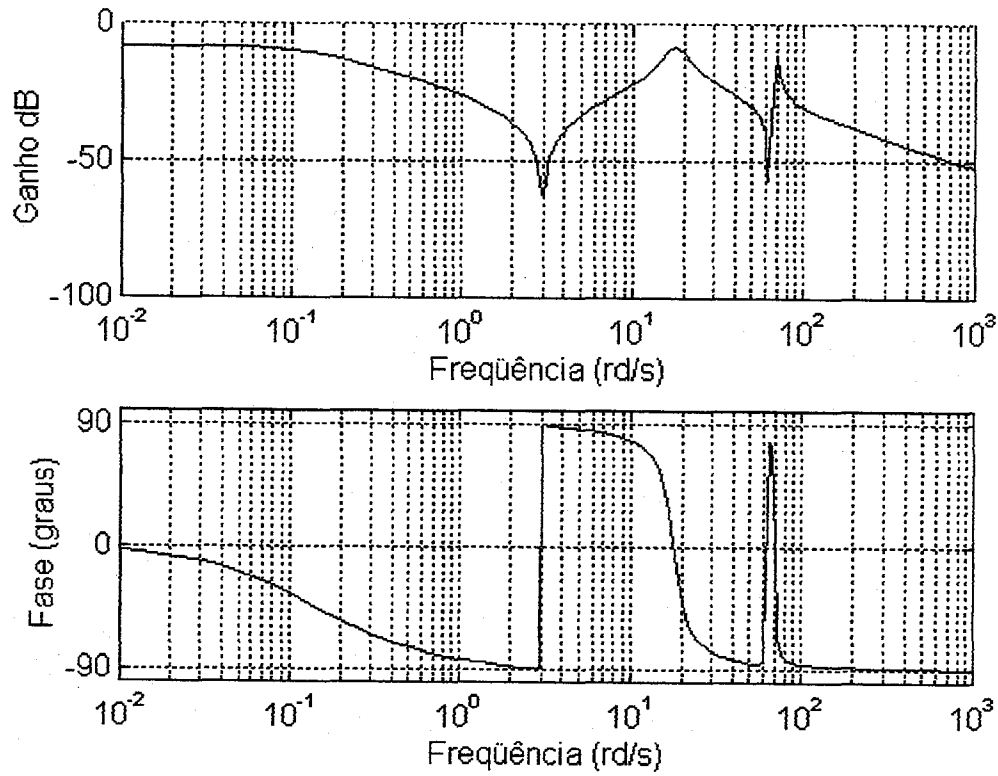


Figura 3.22 Diagrama de Bode - Velocidade angular do rotor (caso colocado-2af).

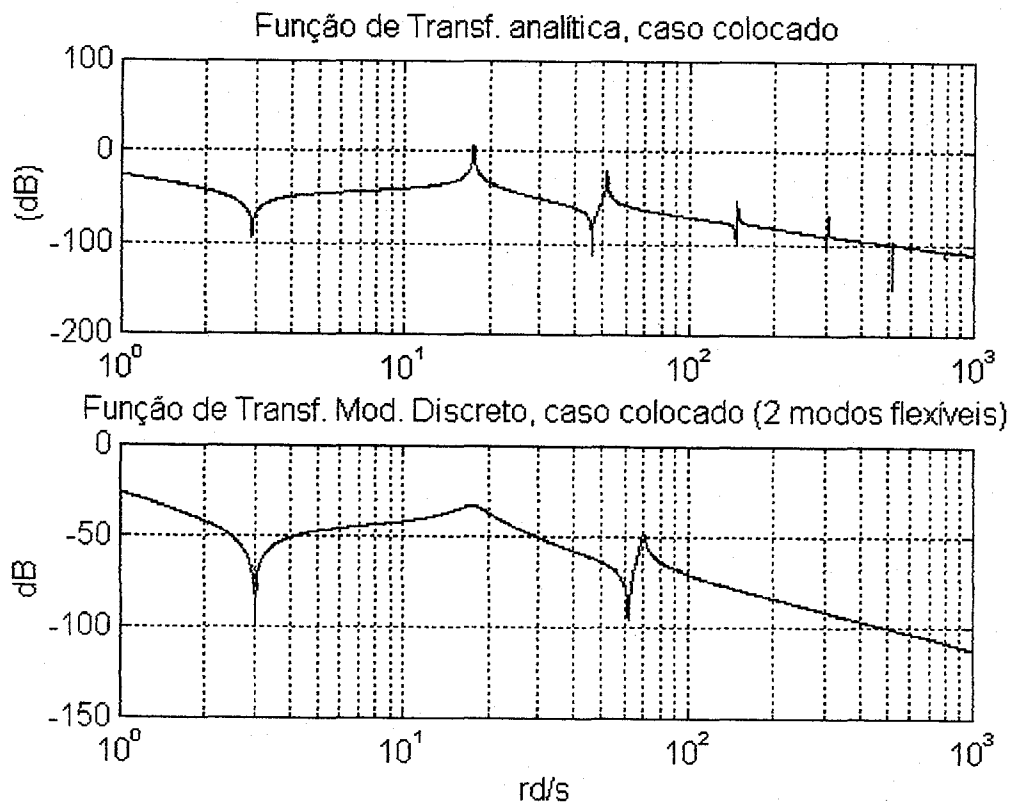


Figura 3.23 Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 2 modos flexíveis (caso colocado-2af).

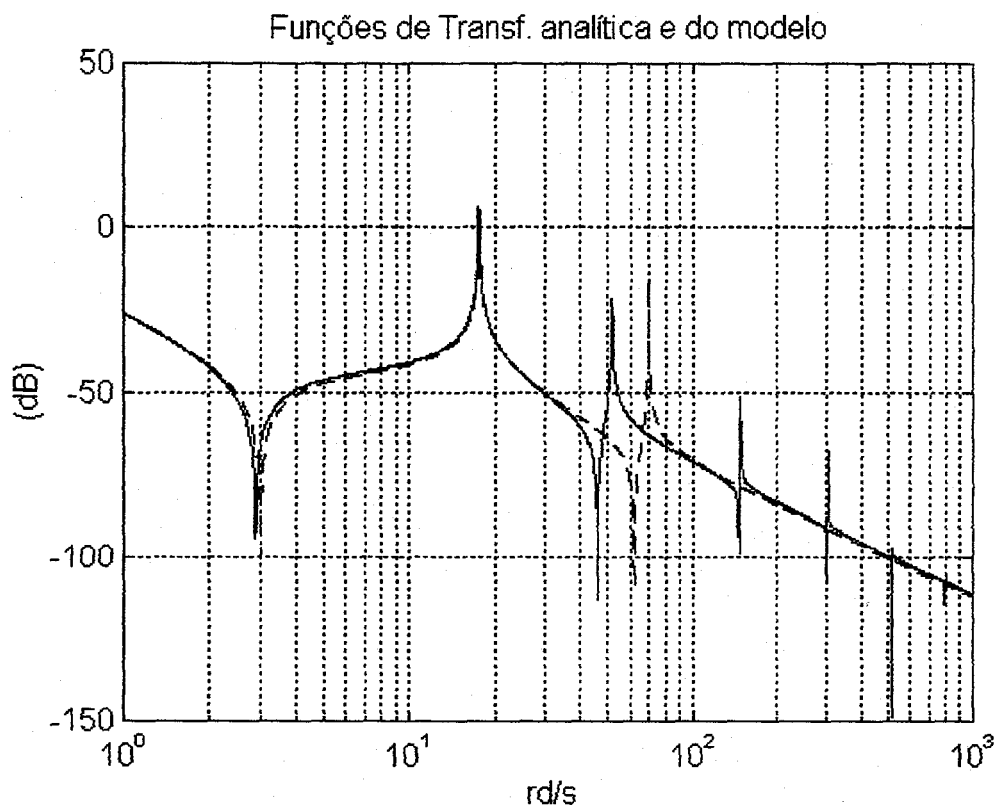


Figura 3.24 Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 2 modos flexíveis (caso colocado-2af), sendo negligenciados os torques de atrito no Modelo Discreto.

As Figura 3.25 e 3.26 mostram os diagramas de Bode para a função de transferência do caso não colocado, dada pela equação (3.39), sendo que na Figura 3.25 a matriz de observação considerada é $C = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$, ou seja, uma matriz que permite observar a posição angular da carga, enquanto que na Figura 3.26 a matriz é $C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$, ou seja, que permite verificar a velocidade angular da carga. Em ambas as figuras identifica-se a presença de dois picos, que representam dois pares de pólos complexos e conjugados em malha aberta e conclui-se a ausência de zeros, pois os mesmos têm parte imaginária nula.

O sistema não colocado é de fase não mínima, pois tem uma diferença acentuada entre a fase inicial e a final, conforme se pode observar nos diagramas de fase das Figuras 3.25 e 3.26.

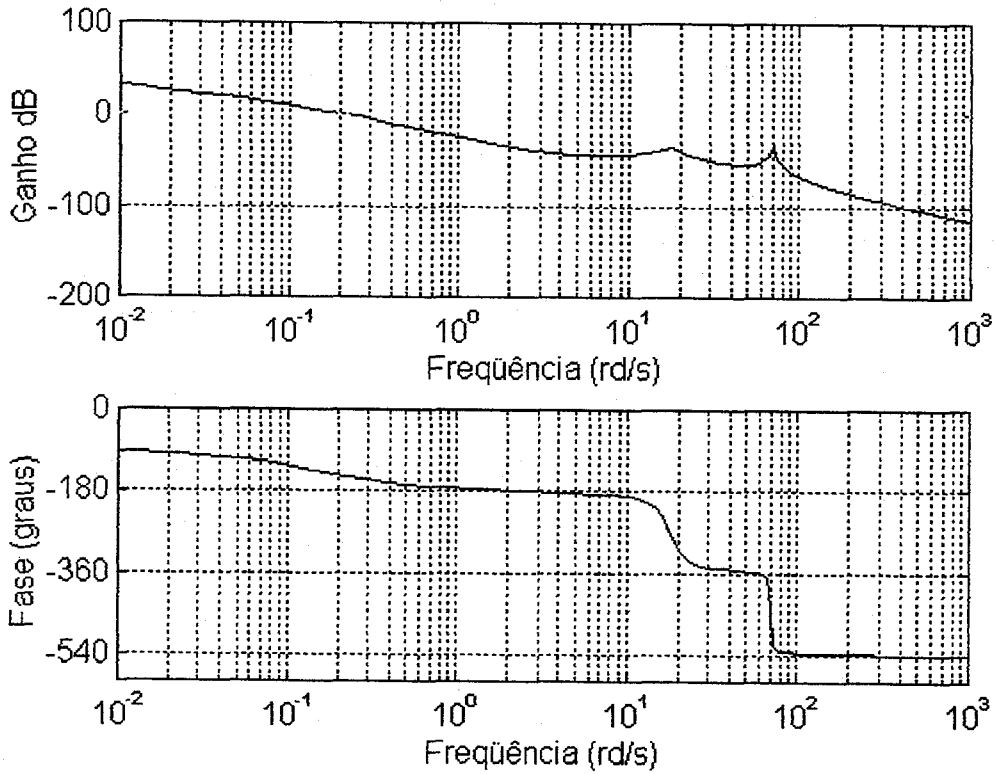


Figura 3.25 Diagrama de Bode – Posição angular da carga (caso não colocado-2af)

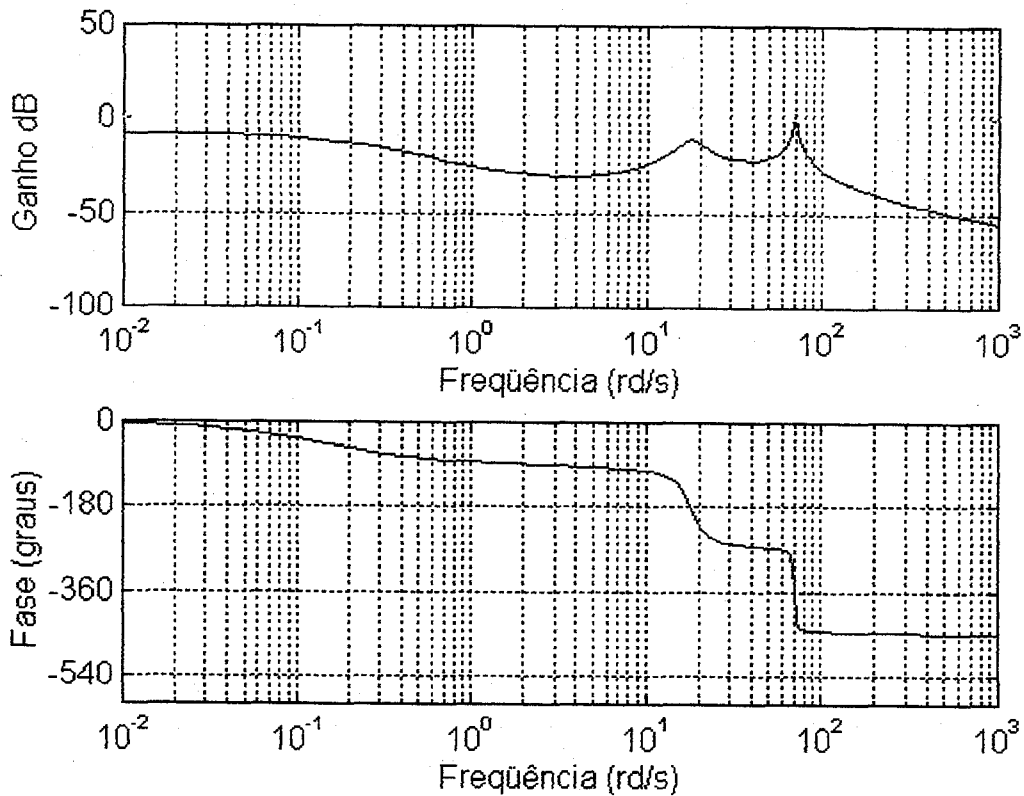


Figura 3.26 Diagrama de Bode – Velocidade angular da carga (caso não colocado-2af).

3.5 MODELO COM TRÊS MODOS FLEXÍVEIS

Será desenvolvida a modelagem matemática para o terceiro caso citado, ou seja, para uma estrutura flexível dividida em quatro partes rígidas com três articulações fictícias (ver Figura 3.7).

Neste caso as Energias Cinética e Potencial são escritas na forma:

$$E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} (\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) \quad (3.39)$$

e

$$E_p = \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k (\theta_3 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} k (\theta_4 - \theta_3)^2. \quad (3.40)$$

Na Figura 3.7 verifica-se que $m_1 = m_4 = \frac{m_b}{8}$ e $m_2 = m_3 = \frac{3m_b}{8}$, onde m_b é a massa da lâmina. As coordenadas dos centros de massa das partes rígidas e da carga terminal são:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l}{16} \cos \theta_1 \\ y_1 = \frac{l}{16} \sin \theta_1 \end{cases}, \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{l}{8} \cos \theta_1 + \frac{3l}{16} \cos \theta_2 \\ y_2 = \frac{l}{8} \sin \theta_1 + \frac{3l}{16} \sin \theta_2 \end{cases}, \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{l}{8} \cos \theta_1 + \frac{3l}{8} \cos \theta_2 + \frac{3l}{16} \cos \theta_3 \\ y_3 = \frac{l}{8} \sin \theta_1 + \frac{3l}{8} \sin \theta_2 + \frac{3l}{16} \sin \theta_3 \end{cases}, \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{l}{8} \cos \theta_1 + \frac{3l}{8} \cos \theta_2 + \frac{3l}{8} \cos \theta_3 + \frac{l}{16} \cos \theta_4 \\ y_4 = \frac{l}{8} \sin \theta_1 + \frac{3l}{8} \sin \theta_2 + \frac{3l}{8} \sin \theta_3 + \frac{l}{16} \sin \theta_4 \end{cases}, \quad (3.44)$$

e

$$\begin{cases} x_c = \frac{l}{8} \cos \theta_1 + \frac{3l}{8} \cos \theta_2 + \frac{3l}{8} \cos \theta_3 + \frac{l}{8} \cos \theta_4 \\ y_c = \frac{l}{8} \sin \theta_1 + \frac{3l}{8} \sin \theta_2 + \frac{3l}{8} \sin \theta_3 + \frac{l}{8} \sin \theta_4 \end{cases}, \quad (3.45).$$

O Lagrangeano do sistema é dado por:

$$L = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2}m_4(\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) + \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) - \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2}k(\theta_3 - \theta_2)^2 - \frac{1}{2}k(\theta_4 - \theta_3)^2 \quad (3.46)$$

Derivando-se as equações (3.41), (3.42), (3.43), (3.44) e (3.45), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{l}{16}\text{sen}\theta_1\dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1 = \frac{l}{16}\text{cos}\theta_1\dot{\theta}_1 \end{cases}, \quad (3.47)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{l}{8}\text{sen}\theta_1\dot{\theta}_1 - \frac{3l}{16}\text{sen}\theta_2\dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{l}{8}\text{cos}\theta_1\dot{\theta}_1 + \frac{3l}{16}\text{cos}\theta_2\dot{\theta}_2 \end{cases}, \quad (3.48)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -\frac{l}{8}\text{sen}\theta_1\dot{\theta}_1 - \frac{3l}{8}\text{sen}\theta_2\dot{\theta}_2 - \frac{3l}{16}\text{sen}\theta_3\dot{\theta}_3 \\ \dot{y}_3 = \frac{l}{8}\text{cos}\theta_1\dot{\theta}_1 + \frac{3l}{8}\text{cos}\theta_2\dot{\theta}_2 + \frac{3l}{16}\text{cos}\theta_3\dot{\theta}_3 \end{cases}, \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = -\frac{l}{8}\text{sen}\theta_1\dot{\theta}_1 - \frac{3l}{8}\text{sen}\theta_2\dot{\theta}_2 - \frac{3l}{8}\text{sen}\theta_3\dot{\theta}_3 - \frac{l}{16}\text{sen}\theta_4\dot{\theta}_4 \\ \dot{y}_4 = \frac{l}{8}\text{cos}\theta_1\dot{\theta}_1 + \frac{3l}{8}\text{cos}\theta_2\dot{\theta}_2 + \frac{3l}{8}\text{cos}\theta_3\dot{\theta}_3 + \frac{l}{16}\text{cos}\theta_4\dot{\theta}_4 \end{cases}, \quad (3.50)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = -\frac{l}{8}\text{sen}\theta_1\dot{\theta}_1 - \frac{3l}{8}\text{sen}\theta_2\dot{\theta}_2 - \frac{3l}{8}\text{sen}\theta_3\dot{\theta}_3 - \frac{l}{8}\text{sen}\theta_4\dot{\theta}_4 \\ \dot{y}_c = \frac{l}{8}\text{cos}\theta_1\dot{\theta}_1 + \frac{3l}{8}\text{cos}\theta_2\dot{\theta}_2 + \frac{3l}{8}\text{cos}\theta_3\dot{\theta}_3 + \frac{l}{8}\text{cos}\theta_4\dot{\theta}_4 \end{cases}. \quad (3.51)$$

Portanto, substituindo-se (3.47), (3.48), (3.49), (3.50) e (3.51) em (3.46) e admitindo-se pequenas deformações angulares, obtém-se:

$$L = \frac{1}{2}\left[I_1 + \frac{l^2}{64}\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right)\right]\dot{\theta}_1^2 + \frac{9l^2}{128}\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right)\dot{\theta}_2^2 + \frac{9l^2}{128}\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)\dot{\theta}_3^2 + \frac{l^2}{128}\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)\dot{\theta}_4^2 + \frac{3l^2}{64}\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{3l^2}{64}\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \frac{9l^2}{64}\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{l^2}{64}\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + \frac{3l^2}{64}\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4 + \frac{3l^2}{64}\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 - \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2}k(\theta_3 - \theta_2)^2 - \frac{1}{2}k(\theta_4 - \theta_3)^2 \quad (3.52)$$

Considerando-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = T_m - c_r \dot{\theta}_1 - c_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

onde $-c_r \dot{\theta}_1$ é o torque de atrito no rotor e c_1 é o coeficiente de atrito devido à deflexão angular na primeira articulação fictícia, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[I_r + \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) \right] \ddot{\theta}_1 + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \\ & + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_3 + \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_4 + (c_r + c_1) \dot{\theta}_1 - c_1 \dot{\theta}_2 + k\theta_1 + \\ & - k\theta_2 = T_m \end{aligned} \quad (3.53)$$

Para

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -c_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3),$$

onde c_2 é o coeficiente de atrito devido à deflexão angular na segunda articulação fictícia, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_3 + \\ & + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \ddot{\theta}_4 - c_1 \dot{\theta}_1 + (c_1 + c_2) \dot{\theta}_2 - c_2 \dot{\theta}_3 - k\theta_1 + 2k\theta_2 - k\theta_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Quando

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = -c_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) - c_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4),$$

onde c_3 é o coeficiente de atrito devido à deflexão angular na terceira articulação fictícia, resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_3 + \\ & + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_4 - c_2 \dot{\theta}_2 + (c_2 + c_3) \dot{\theta}_3 - c_3 \dot{\theta}_4 - k\theta_2 + 2k\theta_3 - k\theta_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

e considerando também:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_4} = -c_3 (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3),$$

tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \ddot{\theta}_3 + \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \ddot{\theta}_4 + \\ & - c_3 \dot{\theta}_3 + c_3 \dot{\theta}_4 - k\theta_3 + k\theta_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Portanto, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \left[I_r + \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) \right] \ddot{\theta}_1 + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_3 \\
 & + \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_4 + (c_r + c_1) \dot{\theta}_1 - c_1 \dot{\theta}_2 + k\theta_1 - k\theta_2 = T_m \\
 & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_3 + \\
 & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_4 - c_1 \dot{\theta}_1 + (c_1 + c_2) \dot{\theta}_2 - c_2 \dot{\theta}_3 - k\theta_1 + 2k\theta_2 - k\theta_3 = 0 \\
 & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \ddot{\theta}_3 + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_4 \\
 & - c_2 \dot{\theta}_2 + (c_2 + c_3) \dot{\theta}_3 - c_3 \dot{\theta}_4 - k\theta_2 + 2k\theta_3 - k\theta_4 = 0 \\
 & \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \ddot{\theta}_3 + \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \ddot{\theta}_4 - c_3 \dot{\theta}_3 + c_3 \dot{\theta}_4 - \\
 & k\theta_3 + k\theta_4 = 0
 \end{aligned} \right. \tag{3.57}$$

Na forma matricial este sistema pode ser escrito como:

$$[I] \ddot{\bar{\theta}} + [C_a] \dot{\bar{\theta}} + [K] \bar{\theta} = \bar{T}_m, \tag{3.58}$$

onde:

$$I = \begin{bmatrix}
 I_r + \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) & \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \\
 \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) & \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) & \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \\
 \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) & \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) & \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \\
 \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) & \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right)
 \end{bmatrix}$$

$$C_a = \begin{bmatrix}
 c_r + c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\
 -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\
 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\
 0 & 0 & -c_3 & c_3
 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix}
 k & -k & 0 & 0 \\
 -k & 2k & -k & 0 \\
 0 & -k & 2k & -k \\
 0 & 0 & -k & k
 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta} = \begin{bmatrix}
 \theta_1 \\
 \theta_2 \\
 \theta_3 \\
 \theta_4
 \end{bmatrix},$$

$$\bar{T}_m = \begin{bmatrix} T_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para transformar o sistema de equações diferenciais de segunda ordem (3.57) num sistema de primeira ordem faz-se a seguinte troca de variáveis:

$$x_1 = \theta_1, \quad x_2 = \dot{\theta}_1, \quad x_3 = \theta_2, \quad x_4 = \dot{\theta}_2, \quad x_5 = \theta_3, \quad x_6 = \dot{\theta}_3, \quad x_7 = \theta_4, \quad x_8 = \dot{\theta}_4.$$

O sistema (3.58) pode ser escrito na seguinte forma de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0]_{4 \times 4} & [1]_{4 \times 4} \\ -[I]^{-1}[K] & -[I]^{-1}[C_a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [I]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} T_m \quad (3.59)$$

ou seja, num sistema do tipo:

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + BT_m, \quad (3.17)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} [0]_{4 \times 4} & [1]_{4 \times 4} \\ -[I]^{-1}[K] & -[I]^{-1}[C_a] \end{bmatrix},$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix},$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [I]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

A seguir apresentam-se os gráficos das simulações.

3.5.1 GRÁFICOS DAS SIMULAÇÕES

Nas seguintes simulações os dados são os mesmos do caso anterior e, a partir desses, obtém-se as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -604.1739 & 1007.5132 & -810.01904 & 406.6797 & -6.7895 & 0.0899 & -0.0723 & 0.0363 \\ 1910.6999 & -6412.8897 & 10989.3697 & -6487.1799 & 4.2148 & -0.5721 & 0.9804 & -0.5787 \\ -2994.8292 & 12100.2018 & -26092.9675 & 16987.5948 & -3.4194 & 1.0795 & -2.3278 & 1.5155 \\ 3899.0305 & -18268.4326 & 47203.0487 & -32833.6466 & 4.4518 & -1.6298 & 4.2112 & -2.9292 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.6311 \\ -1.5798 \\ 1.2313 \\ -1.6031 \end{bmatrix}.$$

As simulações, cujos resultados gráficos são apresentados a seguir, foram realizadas sob as mesmas condições das já realizadas anteriormente (conforme a seção 3.3.1).

Na Figura 3.27 observa-se a posição e a velocidade angular do rotor, onde se verifica que esta se estabiliza em aproximadamente $2s$ e que a velocidade se aproxima de zero neste mesmo tempo. Na Figura 3.28 mostra-se a posição e a velocidade angular da carga, onde se nota o surgimento do terceiro modo de vibração e a presença de três pólos complexos conjugados na função de transferência do sistema (ver Tabela 3.1). Observa-se ainda a mesma defasagem entre as variáveis do rotor e carga, já citada anteriormente.

A Figura 3.29 mostra a velocidade de deformação angular na terceira articulação fictícia, onde se verifica com maior clareza a presença dos três modos de vibração.

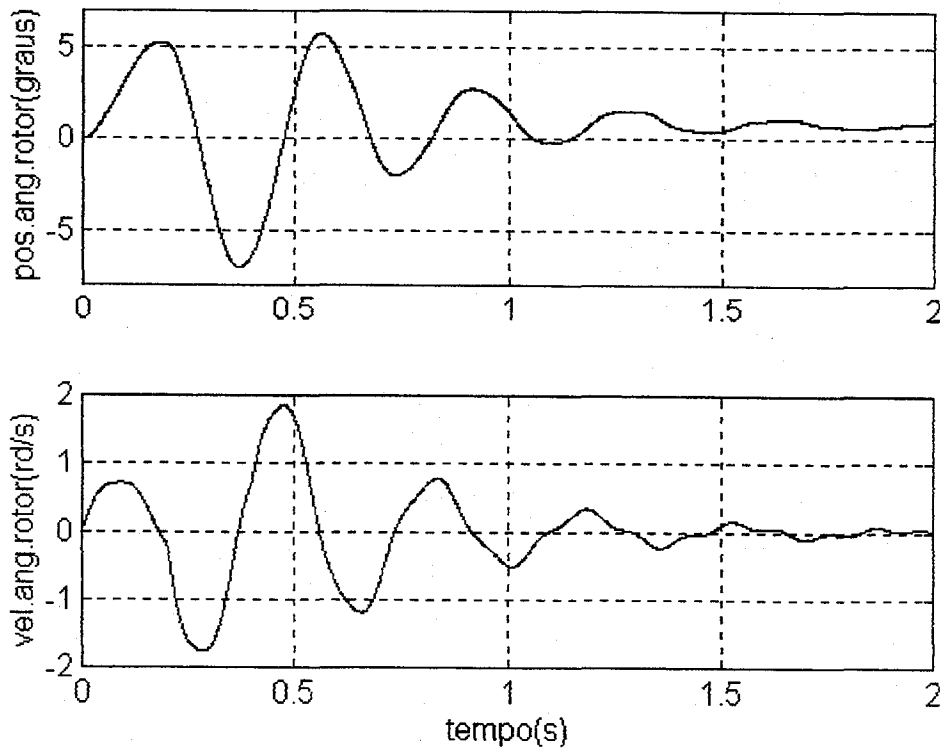


Figura 3.27 Curvas da posição e velocidade angular do rotor (Sistema 3af).

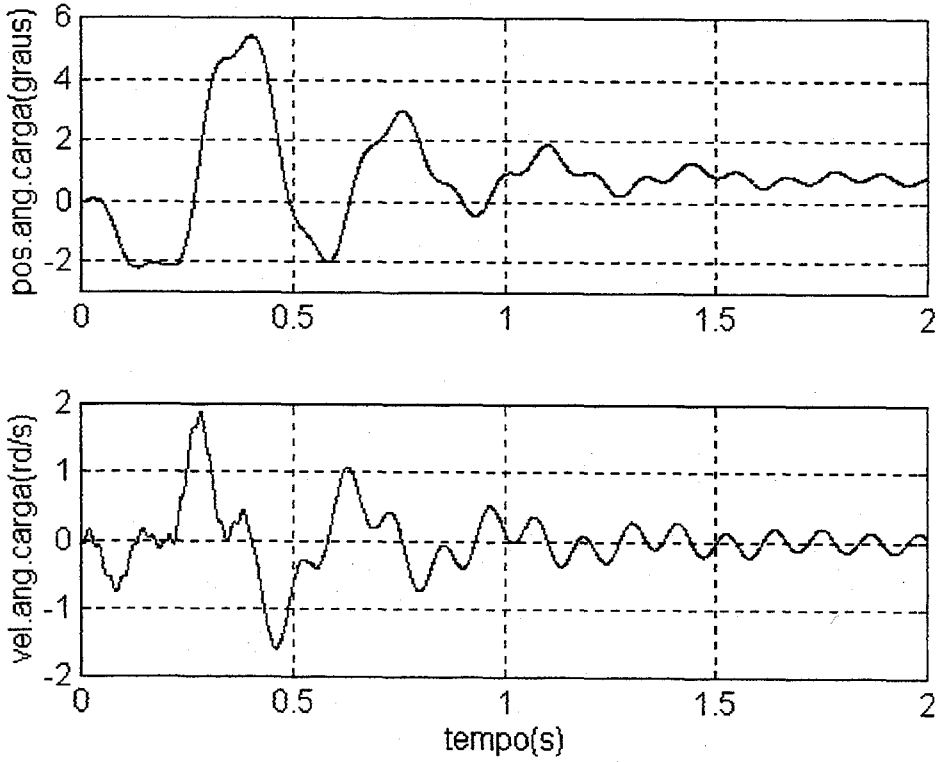


Figura 3.28 Curvas da posição e velocidade angular da carga (Sistema 3af).

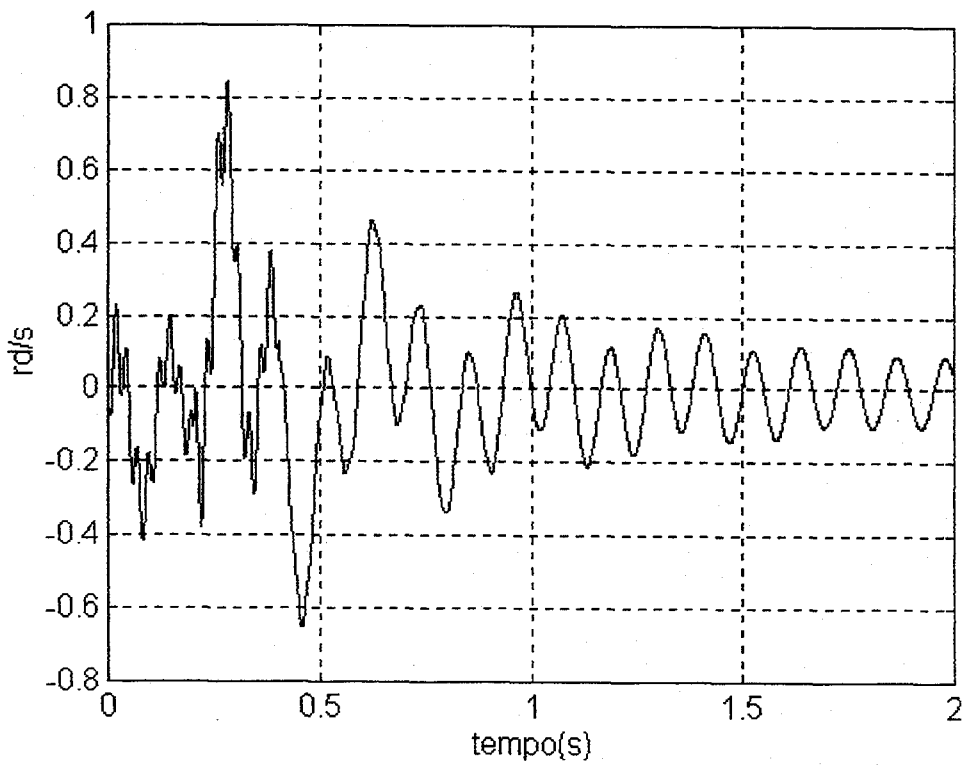


Figura 3.29 Velocidade de deformação angular na última articulação fictícia (Sistema 3af).

3.5.2 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA (SISTEMA 3af)

Descreve-se a seguir as funções de transferência com os seus respectivos pólos e zeros, para os casos colocado e não colocado.

CASO COLOCADO (Posição angular do rotor)

Considerando a matriz de observação:

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

a função de transferência tem a forma:

$$\frac{\theta_1}{T_m}(s) = \frac{\sum_{i=0}^6 \chi_i s^i}{\sum_{j=0}^8 \gamma_j s^j} \approx \frac{1}{I_T s^2} \frac{\left(1 + \frac{s^2}{\Omega_1^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\Omega_2^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\Omega_3^2}\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_3^2}\right)}, \quad (3.60)$$

onde:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 3398298360.34231; \chi_1 = 909508.21508; \chi_2 = 419828485.36846; \chi_3 = 74907.56738; \\ \chi_4 &= 168676.44462; \chi_5 = 15.04769; \chi_6 = 2.63109; \gamma_0 = -0.0246; \gamma_1 = 8699643802.4497; \\ \gamma_2 &= 61219667614.3794; \gamma_3 = 1091144908.6187; \gamma_4 = 214999745.722; \gamma_5 = 470138.4324; \\ \gamma_6 &= 65983.9093; \gamma_7 = 12.6186; \gamma_8 = 1 \end{aligned}$$

Os pólos da função de transferência no caso colocado são:

$$\begin{aligned} &-2.844028901039 + 250.029816044919i \\ &-2.844028901039 - 250.029816044919i \\ &-0.746085929194 + 55.648089505199i \\ &-0.746085929194 - 55.648089505199i \\ &-2.647940148074 + 17.559705648827i \\ &-2.647940148074 - 17.559705648827i \\ &-0.142456933118 \\ &0.000000000003 \end{aligned}$$

e os zeros da função de transferência no caso colocado resultam em:

$$\begin{aligned} &-2.743900388496 + 248.005125391236i \\ &-2.743900388496 - 248.005125391236i \\ &-0.115328412141 + 50.847558444740i \\ &-0.115328412141 - 50.847558444740i \\ &-0.000362245256 + 2.849734526798i \\ &-0.000362245256 - 2.849734526798i \end{aligned}$$

CASO NÃO COLOCADO (Posição Angular da carga)

Considerando a matriz de observação:

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

então a função de transferência tem a forma:

$$\frac{\theta_4(s)}{T_m} = \frac{\sum_{i=0}^6 \xi_i s^i}{\sum_{j=0}^8 \psi_j s^j} \approx \frac{1}{I_T s^2} \frac{\left(1 - \frac{s^2}{\Omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{s^2}{\Omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{s^2}{\Omega_3^2}\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_3^2}\right)}, \quad (3.61)$$

onde:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 3398298360.28773; \xi_1 = 909508.21459; \xi_2 = -191186410.04642; \xi_3 = -34112.30244; \\ \xi_4 &= 44162.03477; \xi_5 = 3.93992; \xi_6 = -1.6031; \psi_0 = -0.0246; \psi_1 = 8699643802.4497; \\ \psi_2 &= 61219667614.3794; \psi_3 = 1091144908.6187; \psi_4 = 214999745.722; \psi_5 = 470138.4324; \\ \psi_6 &= 65983.9093; \psi_7 = 12.6186; \psi_8 = 1 \end{aligned}$$

Os pólos da função de transferência no caso não colocado resultam em:

$$\begin{aligned} &-2.844028901039 + 250.029816044919i \\ &-2.844028901039 - 250.029816044919i \\ &-0.746085929194 + 55.648089505199i \\ &-0.746085929194 - 55.648089505199i \\ &-2.647940148074 + 17.559705648827i \\ &-2.647940148074 - 17.559705648827i \\ &-0.142456933118 \\ &0.000000000003 \end{aligned}$$

e os zeros da função de transferência no caso não colocado em:

$$\begin{aligned} &149.905182956473 \\ &-147.926903320617 \\ &-72.946103303350 \\ &73.423922446106 \\ &4.225523693864 \\ &-4.223931407201 \end{aligned}$$

3.5.3 DIAGRAMAS DE BODE (SISTEMA 3af)

As figuras a seguir mostram os Diagramas de Bode para os casos colocado e não colocado do sistema com três modos de vibração.

As Figuras 3.30 e 3.31 mostram os Diagramas de Bode para a função de transferência do caso colocado, dada pela equação (3.60), sendo que na Figura 3.30 a matriz de observação considerada é $C = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$ e na Figura 3.31, é $C = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]$. Em ambas as figuras pode-se identificar a presença de três picos que representam os valores nos quais a função de transferência tende a mais infinito e, portanto, equivalem a três pares de pólos complexos e conjugados em malha aberta. Percebe-se também a existência de três pontos nos quais a função de transferência tende a menos infinito, representando três pares de zeros complexos e conjugados em malha aberta.

O sistema colocado é de fase mínima devido a presença de pólos e zeros com parte imaginária não nula e, conseqüentemente, tem-se queda de fase nos três pólos e ganhos de fase nos três zeros.

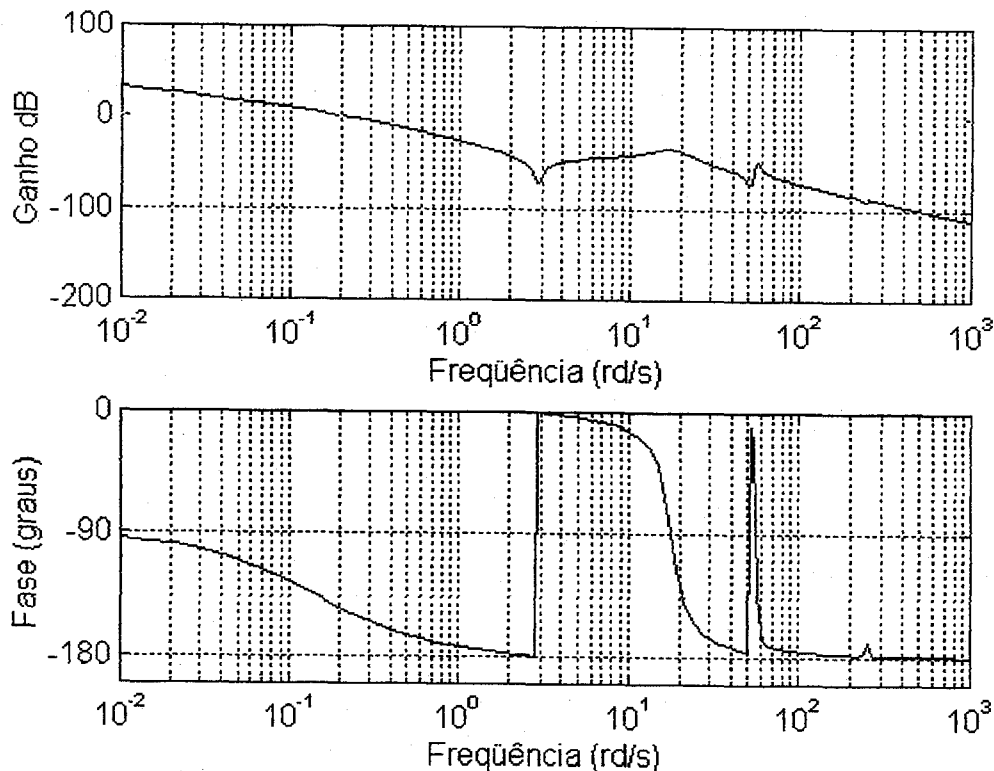


Figura 3.30 Diagrama de Bode – Posição angular do rotor (caso colocado-3af).

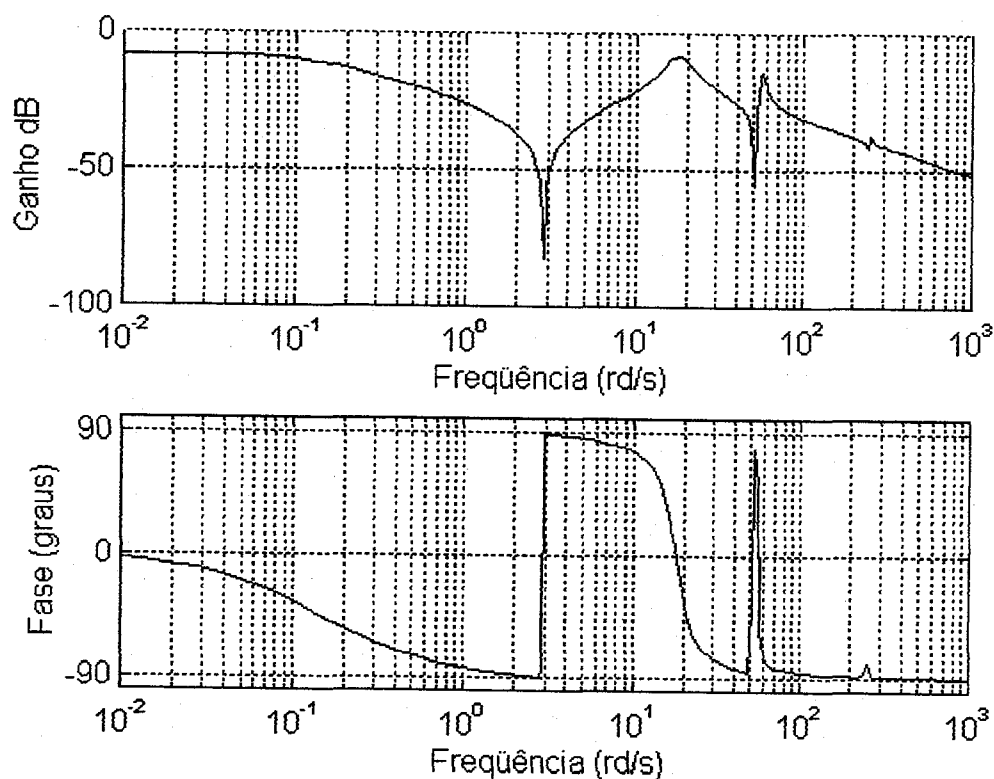


Figura 3.31 Diagrama de Bode – Velocidade angular do rotor (caso colocado-3af).

Na Figura 3.32 observa-se os três primeiros modos de vibração no gráfico da função de transferência do Modelo Discreto com três modos flexíveis. Verifica-se ainda que os dois primeiros pares de pólos e zeros se aproximam bem aos dois primeiros pares de pólos e zeros observados na Função de Transferência Analítica. Já o terceiro par pólo-zero do caso Discreto é intermediário aos terceiro e quarto pares de pólos e zeros do caso analítico.

A análise da sobreposição de gráficos presente na Figura 3.33 permite que se conclua que não há mais diferenças entre os casos Analítico e Discreto para o primeiro par pólo-zero. O segundo par, apesar de próximo, é um pouco deslocado para a direita no eixo de frequências.

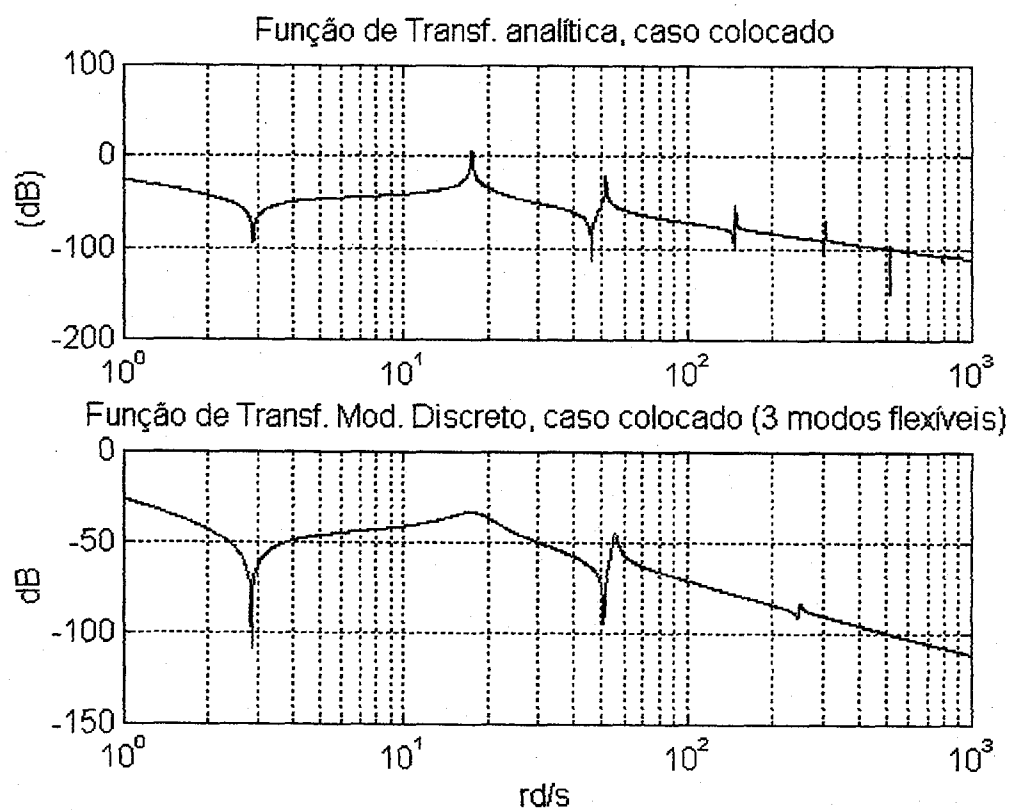


Figura 3.32 Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 3 modos flexíveis (caso colocado-3af).

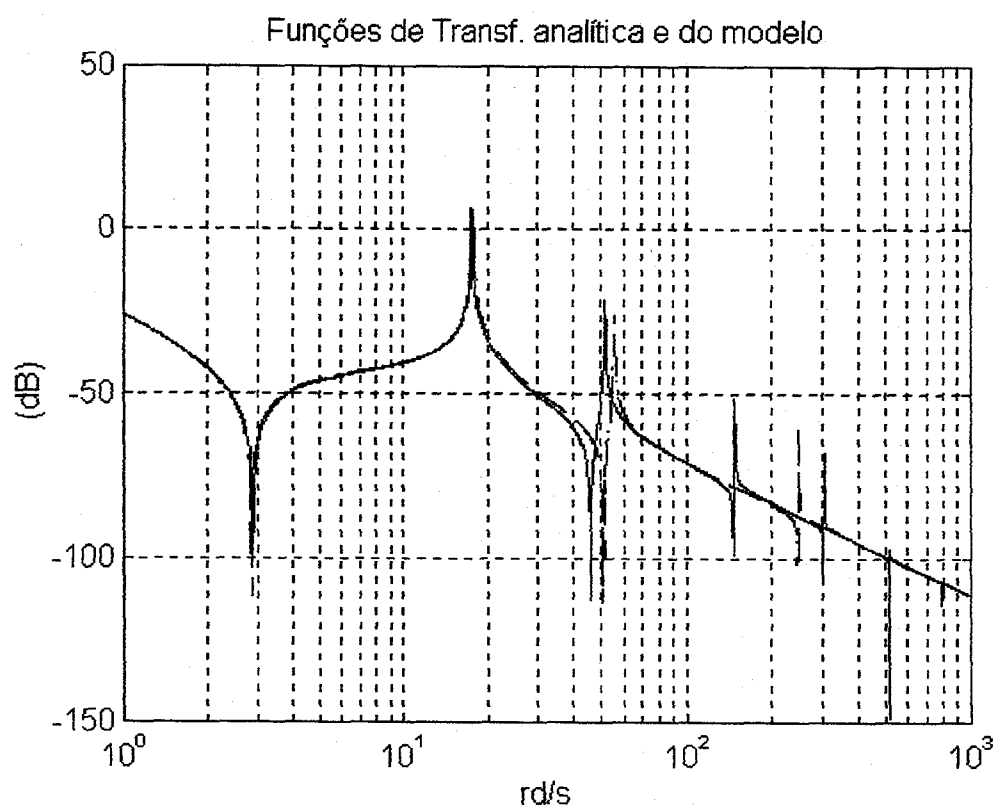
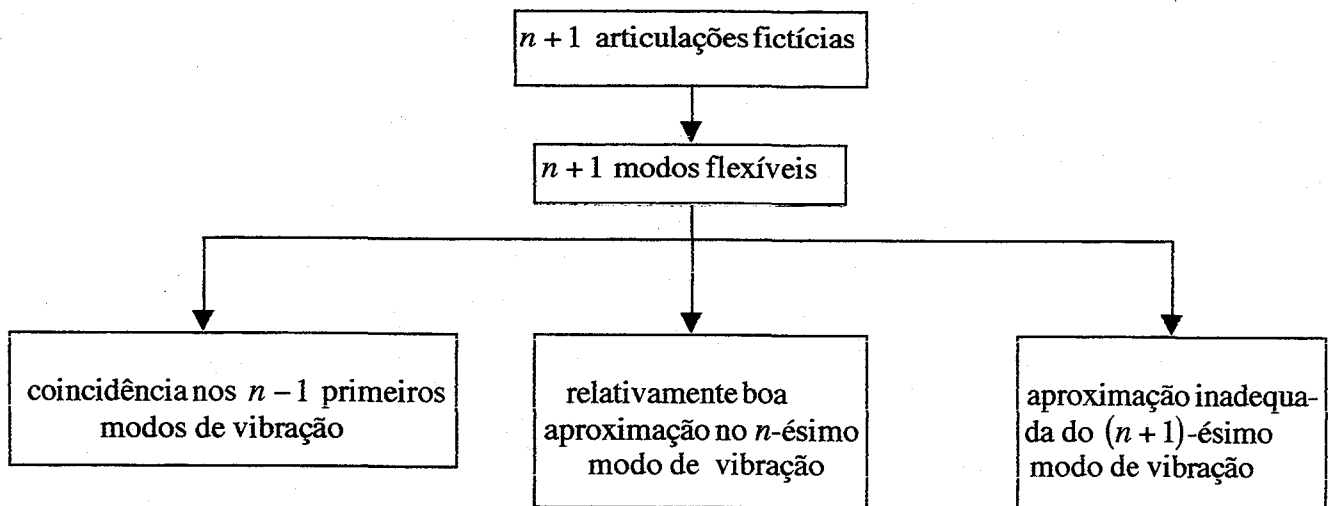


Figura 3.33 Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 3 modos flexíveis (caso colocado-3af), sendo negligenciados os torques de atrito do Modelo Discreto.

As Figuras (3.14), (3.15), (3.23), (3.24), (3.32) e (3.33) permitem uma primeira conclusão parcial sobre a técnica de articulações fictícias:



As Figura 3.34 e 3.35 mostram os diagramas de Bode para a função de transferência do caso não colocado, dada pela equação (3.61), sendo que na Figura 3.34 a matriz de observação considerada é $C = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ e na Figura 3.35 é $C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$. Em ambas as figuras observa-se a presença de três picos que representam três pares de pólos complexos e conjugados em malha aberta, verificando-se a ausência de zeros, pois os mesmos têm parte imaginária nula.

O sistema não colocado é de fase não mínima, pois apresenta uma diferença acentuada entre a fase inicial e a fase final, conforme se pode observar nos diagramas de fase das Figuras 3.34 e 3.35.

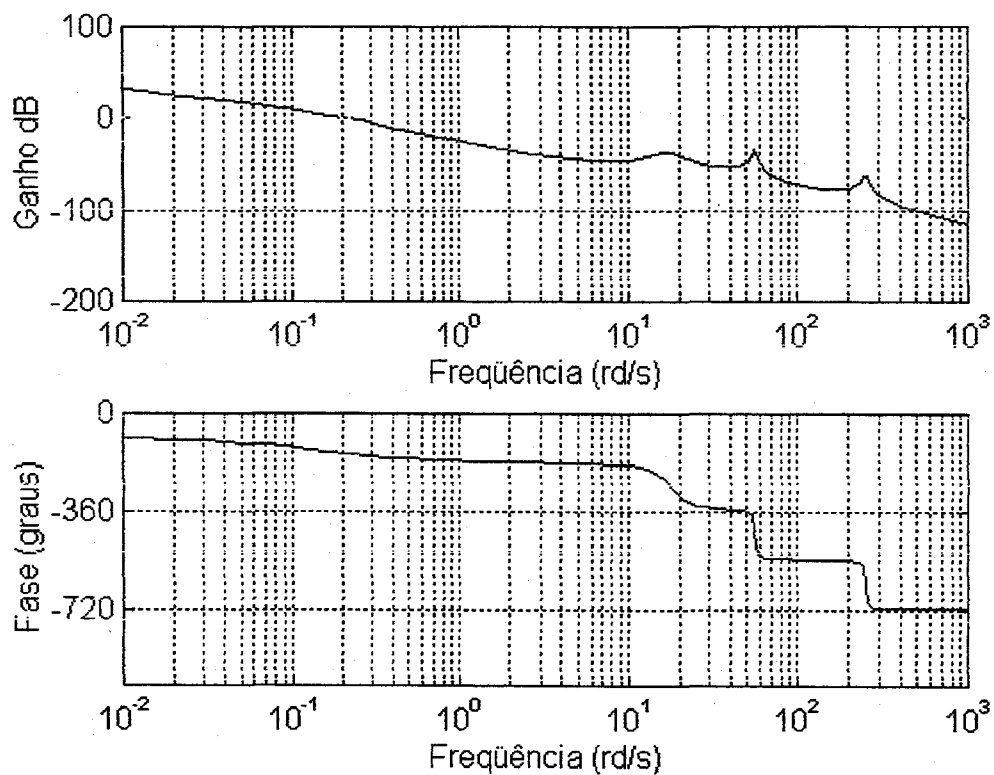


Figura 3.34 Diagrama de Bode – Posição angular da carga (caso não colocado-3af).

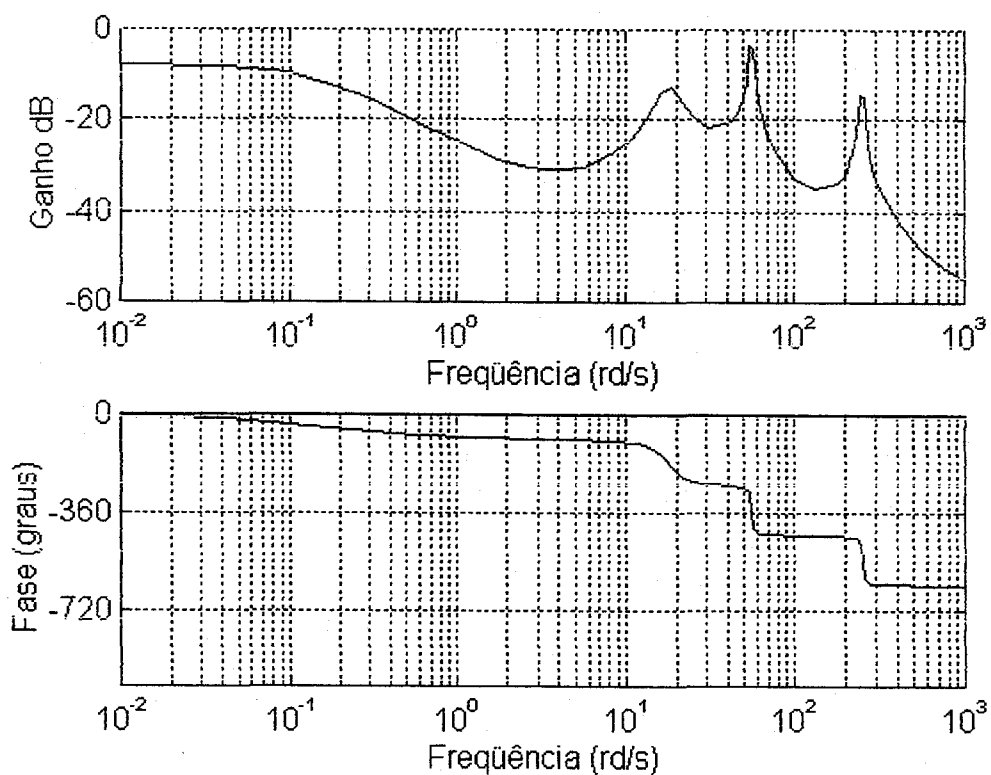


Figura 3.35 Diagrama de Bode - Velocidade angular da carga (caso não colocado-3af).

3.6 CONCLUSÕES

A Tabela 3.1, a seguir, mostra para os três casos estudados anteriormente, as funções de transferência com seus respectivos pólos e zeros, para que se possa fazer uma comparação entre eles. Nesta tabela pode-se observar que, nos respectivos sistemas com uma, duas e três articulações fictícias, os pólos não mudam para os casos colocado e não colocado. Há, entretanto, uma mudança nos zeros para cada situação, visto que no caso colocado existem zeros complexos e no caso não colocado todos os zeros são reais.

Tabela 3.1 Pólos e zeros dos sistemas

SISTEMA	PÓLOS	FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA	ZEROS
1 a f	$-1.744239 \pm 16.88464i$ -0.142875 -11×10^{-14}	Caso colocado $\frac{\theta_1}{T_m}(s)$	$-0.00155 \pm 3.40337i$
		Caso não colocado $\frac{\theta_2}{T_m}(s)$	3.33454 -3.33157
2 a f	$-1.01601 \pm 69.56776i$ $-2.36358 \pm 17.47175i$ -0.142596 183×10^{-14}	Caso colocado $\frac{\theta_1}{T_m}(s)$	$-0.2563 \pm 61.8878i$ $-0.000603 \pm 3.00316i$
		Caso não colocado $\frac{\theta_3}{T_m}(s)$	58.397899 -57.94508 -3.856133 3.858124
3 a f	$-2.84403 \pm 250.02982i$ $-0.74609 \pm 55.64809i$ $-2.64794 \pm 17.55971i$ -0.142457 3×10^{-12}	Caso colocado $\frac{\theta_1}{T_m}(s)$	$-2.7439 \pm 248.0051i$ $-0.11533 \pm 50.84756i$ $-0.000362 \pm 2.84973i$
		Caso não colocado $\frac{\theta_4}{T_m}(s)$	149.905183 -147.926903 -72.946103 73.423922 4.225524 -4.2239314

CAPÍTULO IV
O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS

4.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo é desenvolvida e analisada uma segunda técnica de modelagem dinâmica para a estrutura flexível considerada neste trabalho. Trata-se do Método dos Modos Assumidos o qual, conforme já adiantado no capítulo de introdução, é muito utilizado, principalmente em aplicações relativas à robótica flexível (robôs com elos flexíveis). Inicialmente, toda a teoria é desenvolvida detalhadamente até a determinação das formas próprias para cada modo de vibração. O conhecimento das frequências naturais e das formas de cada modo possibilita a determinação das equações da dinâmica do sistema. As funções de transferência, nos casos colocado e não colocado, são obtidas e suas respostas frequenciais são, então, comparadas com as respostas obtidas analiticamente (Capítulo II). Ao final do capítulo conclusões na forma resumida são extraídas dos resultados.

4.2 DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Considere as equações, vistas no Capítulo II, representando a dinâmica da estrutura flexível, escritas na forma

$$(I_r + I_B)\ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx + m_c l (\ddot{w}(l, t) + l\ddot{\theta}) = T_m \quad (2.17)$$

e

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0, \quad (2.18)$$

com suas respectivas condições de contorno:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=0} + T_m - I_r \ddot{\theta} &= 0 \\ w(x, t) \Big|_{x=0} &= w(0, t) = 0 \\ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=l} &= EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0 \\ EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x, t) \Big|_{x=l} &= m_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + x \ddot{\theta} \right) \Big|_{x=l} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Conforme se mostrou no Capítulo II, através da substituição (2.20), transforma-se estas equações em:

$$I_r \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + m_c \ddot{y}(l, t) = T_m \quad (2.23)$$

e

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (2.24)$$

com as respectivas condições de contorno:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=0} + T_m - I_r \ddot{\theta} &= 0 \\ y(x, t) \Big|_{x=0} = y(0, t) = w(0, t) + 0. \theta(t) &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=l} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) &= 0 \\ EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) \Big|_{x=l} = m_c \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \Big|_{x=l} & \end{aligned} \quad (2.25)$$

Uma forma de resolver as equações (2.23) e (2.24) é através do Método dos Modos Assumidos, ou seja, a partir da expansão da função $y(x, t)$ como uma série finita na forma [Schmitz, 1985]:

$$y(x, t) = \sum_{i=0}^n \phi_i(x) q_i(t), \quad (4.1)$$

sendo

$$\theta(t) = \sum_{i=0}^n \theta_i q_i(t) \quad (4.2)$$

e

$$\theta_i = \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{x=0} \quad (4.3)$$

Aqui $\phi_i(x)$ são as funções de forma, $q_i(t)$ são as coordenada generalizadas dependentes do tempo, $\theta_i(t)$ são as amplitudes modais do movimento rotacional da estrutura e n é um número finito igual ao número dos modos de vibração que se deseja incluir no modelo.

As funções $\phi_i(x)$ utilizadas neste trabalho, devem satisfazer as condições de contorno e a equação diferencial associada ao problema. Portanto, essas funções dependem das hipóteses adotadas para a solução do problema.

De (4.1) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y}{\partial x} &= \sum_{i=0}^n \frac{d\phi_i}{dx} q_i(t), \\
 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \sum_{i=0}^n \frac{d^2\phi_i}{dx^2} q_i(t), \\
 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} &= \sum_{i=0}^n \frac{d^3\phi_i}{dx^3} q_i(t), \\
 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &= \sum_{i=0}^n \frac{d^4\phi_i}{dx^4} q_i(t), \\
 \frac{\partial y}{\partial t} &= \sum_{i=0}^n \phi_i(x) \frac{dq_i}{dt}, \\
 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \sum_{i=0}^n \phi_i(x) \frac{d^2q_i}{dt^2},
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Substituindo-se (4.4) em (2.25), tem-se:

$$EI \sum_{i=0}^n \frac{d^4\phi_i}{dx^4} q_i(t) + \rho \sum_{i=0}^n \phi_i(x) \frac{d^2q_i}{dt^2} = 0,$$

ou

$$EI \frac{d^4\phi_i}{dx^4} q_i(t) + \rho \phi_i(x) \frac{d^2q_i}{dt^2} = 0.$$

Desta forma, obtém-se:

$$\frac{1}{\phi_i(x)} \frac{d^4\phi_i}{dx^4} = - \frac{\rho}{EI} \frac{1}{q_i(t)} \frac{d^2q_i}{dt^2}.$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação anterior por l^4 , resulta:

$$\frac{l^4}{\phi_i(x)} \frac{d^4\phi_i}{dx^4} = - \frac{\rho l^4}{EI} \frac{1}{q_i(t)} \frac{d^2q_i}{dt^2}. \tag{4.5}$$

O membro esquerdo da equação (4.5) depende somente de x e o membro direito depende somente de t . Como x e t são variáveis independentes, existirá solução se ambos os membros da equação forem constantes, isto é:

$$\frac{l^4}{\phi_i(x)} \frac{d^4\phi_i}{dx^4} = - \frac{\rho l^4}{EI} \frac{1}{q_i(t)} \frac{d^2q_i}{dt^2} = \lambda_i^4. \tag{4.6}$$

Dessa forma, separa-se o problema em dois do tipo desacoplado, um somente temporal e o outro espacial, descritos pelas seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{l^4}{\phi_i(x)} \frac{d^4\phi_i}{dx^4} = \lambda_i^4 \Rightarrow \frac{d^4\phi_i}{dx^4} = \frac{\lambda_i^4}{l^4} \phi_i(x),$$

ou ainda,

$$\frac{d^4 \phi_i}{dx^4} - \frac{\lambda_i^4}{l^4} \phi_i(x) = 0,$$

Definindo-se

$$\lambda_i = \beta_i l \Rightarrow \beta_i = \frac{\lambda_i}{l},$$

resulta

$$\frac{d^4 \phi_i}{dx^4} - \beta_i^4 \phi_i(x) = 0. \quad (4.7)$$

De (4.6), pode ainda ser escrito o problema temporal

$$-\frac{\rho l^4}{EI} \frac{1}{q_i(t)} \frac{d^2 q_i}{dt^2} = \lambda_i^4 \Rightarrow \frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\frac{EI}{\rho l^4} \lambda_i^4 q_i(t)$$

e definindo-se

$$w_i^2 = \frac{EI}{\rho l^4} \lambda_i^4,$$

resulta em

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -w_i^2 q_i(t),$$

ou ainda,

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} + w_i^2 q_i(t) = 0. \quad (4.8)$$

A parte temporal do problema, dada pela equação (4.8), admite solução na forma:

$$q_i(t) = C e^{j w_i t}, \quad (4.9)$$

sendo C uma constante e a parte espacial do problema, dada pela equação (4.7), admite solução na forma:

$$\phi_i(x) = C_{1i} \text{sen}(\beta_i x) + C_{2i} \cos(\beta_i x) + C_{3i} \text{senh}(\beta_i x) + C_{4i} \cosh(\beta_i x), \quad (4.10)$$

sendo as constantes C_{1i} , C_{2i} , C_{3i} e C_{4i} determinadas pelas condições de contorno (2.26), expressas agora na variável $\phi_i(x)$.

A primeira condição de contorno é dada por:

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + T_m - I_r \ddot{\theta} = 0,$$

então, fazendo-se $T_m = 0$ (dinâmica livre de esforços externos), na equação (4.2), obtém-se:

$$\dot{\theta}(t) = \sum_{i=0}^n \theta_i \dot{q}_i(t) \text{ e } \ddot{\theta}(t) = \sum_{i=0}^n \theta_i \ddot{q}_i(t).$$

Da equação (4.9) resulta:

$$\dot{q}_i(t) = C_j w_i e^{j w_i t} \text{ e } \ddot{q}_i(t) = -C w_i^2 e^{j w_i t}. \quad (4.11)$$

Desta forma, a primeira condição de contorno se transforma em:

$$\sum_{i=0}^n EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \Big|_{x=0} C e^{j w_i t} - \sum_{i=0}^n I_r \theta_i (-C w_i^2 e^{j w_i t}) = 0.$$

Substituindo-se (4.3) nesta última equação, fica-se com:

$$EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \Big|_{x=0} + I_r w_i^2 \frac{d \phi_i}{dx} \Big|_{x=0} = 0,$$

ou seja:

$$\left[EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} + I_r w_i^2 \frac{d \phi_i}{dx} \right]_{x=0} = 0. \quad (4.12)$$

A segunda condição de contorno é dada por:

$$y(0, t) = 0.$$

Portanto, de (4.1) obtém-se:

$$y(0, t) = \sum_{i=0}^n \phi_i(0) q_i(t) = 0,$$

ou ainda,

$$\phi_i(0) = 0. \quad (4.13)$$

A terceira condição de contorno pode ser escrita na forma:

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0.$$

Então de (4.4) obtém-se:

$$EI \sum_{i=1}^n \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \Big|_{x=l} q_i(t) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0. \quad (4.14)$$

A quarta condição de contorno possui a forma

$$EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = m_c \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=l}.$$

Conseqüentemente, de (4.4), resulta

$$EI \sum_{i=1}^n \frac{d^3 \phi_i}{dx^3} \Big|_{x=l} q_i(t) = m_c \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \frac{d^2 q_i}{dt^2} \Big|_{x=l}.$$

Substituindo-se (4.9) e (4.11) na equação anterior, obtém-se:

$$EI \frac{d^3 \phi_i}{dx^3} \Big|_{x=l} C e^{j\omega_i t} = m_c \phi_i(l) (-C \omega_i^2 e^{j\omega_i t}),$$

a qual pode ser reescrita na forma:

$$\left[EI \frac{d^3 \phi_i}{dx^3} + m_c \omega_i^2 \phi_i(x) \right]_{x=l} C e^{j\omega_i t} = 0,$$

ou ainda,

$$\left[EI \frac{d^3 \phi_i}{dx^3} + m_c \omega_i^2 \phi_i(x) \right]_{x=l} = 0. \quad (4.15)$$

Portanto, pode-se aplicar as condições de contorno (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15), as quais são agrupadas a seguir:

$$\left(EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} + I_r \omega_i^2 \frac{d\phi_i}{dx} \right) \Big|_{x=0} = 0,$$

$$\phi_i(0) = 0,$$

$$\frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0,$$

$$\left[EI \frac{d^3 \phi_i}{dx^3} + m_c \omega_i^2 \phi_i(x) \right]_{x=l} = 0.$$

Com (4.10), pode-se escrever a solução geral de (4.6) como

$$\phi_i(x) = C_{1i} \operatorname{sen}(\beta_i x) + C_{2i} \cos(\beta_i x) + C_{3i} \operatorname{senh}(\beta_i x) + C_{4i} \operatorname{cosh}(\beta_i x),$$

o que implica em:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dx} &= \beta_i [C_{1i} \cos(\beta_i x) - C_{2i} \operatorname{sen}(\beta_i x) + C_{3i} \operatorname{cosh}(\beta_i x) + C_{4i} \operatorname{senh}(\beta_i x)] \\ \frac{d^2\phi_i}{dx^2} &= \beta_i^2 [-C_{1i} \operatorname{sen}(\beta_i x) - C_{2i} \cos(\beta_i x) + C_{3i} \operatorname{senh}(\beta_i x) + C_{4i} \operatorname{cosh}(\beta_i x)] \\ \frac{d^3\phi_i}{dx^3} &= \beta_i^3 [-C_{1i} \cos(\beta_i x) + C_{2i} \operatorname{sen}(\beta_i x) + C_{3i} \operatorname{cosh}(\beta_i x) + C_{4i} \operatorname{senh}(\beta_i x)] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Então, a partir da condição de contorno (4.12), obtém-se:

$$EI\beta_i(C_{4i} - C_{2i}) + I_H w_i^2(C_{1i} + C_{3i}) = 0. \quad (4.17)$$

A aplicação da condição de contorno (4.13), conduz a:

$$C_{2i} + C_{4i} = 0 \Rightarrow C_{2i} = -C_{4i}, \quad (4.18)$$

enquanto que a aplicação da condição (4.14) resulta em

$$-C_{1i} \operatorname{sen}(\beta_i l) - C_{2i} \cos(\beta_i l) + C_{3i} \operatorname{senh}(\beta_i l) + C_{4i} \operatorname{cosh}(\beta_i l) = 0. \quad (4.19)$$

Aplicando-se a condição (4.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} C_{1i}(-EI\beta_i^3 \cos(\beta_i l) + m_i w_i^2 \operatorname{sen}(\beta_i l)) + C_{2i}(EI\beta_i^3 \operatorname{sen}(\beta_i l) + m_i w_i^2 \cos(\beta_i l)) + \\ + C_{3i}(EI\beta_i^3 \operatorname{cosh}(\beta_i l) + m_i w_i^2 \operatorname{senh}(\beta_i l)) + C_{4i}(EI\beta_i^3 \operatorname{senh}(\beta_i l) + m_i w_i^2 \operatorname{cosh}(\beta_i l)) = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

As quatro equações resultantes da aplicação das condições de contorno formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} EI\beta_i(C_{4i} - C_{2i}) + I_H w_i^2(C_{1i} + C_{3i}) = 0 \\ C_{2i} + C_{4i} = 0 \\ -C_{1i} \operatorname{sen}(\beta_i l) - C_{2i} \cos(\beta_i l) + C_{3i} \operatorname{senh}(\beta_i l) + C_{4i} \operatorname{cosh}(\beta_i l) = 0 \\ C_{1i}(-EI\beta_i^3 \cos(\beta_i l) + m_c w_i^2 \operatorname{sen}(\beta_i l)) + C_{2i}(EI\beta_i^3 \operatorname{sen}(\beta_i l) + m_c w_i^2 \cos(\beta_i l)) + \\ + C_{3i}(EI\beta_i^3 \operatorname{cosh}(\beta_i l) + m_c w_i^2 \operatorname{senh}(\beta_i l)) + C_{4i}(EI\beta_i^3 \operatorname{senh}(\beta_i l) + m_c w_i^2 \operatorname{cosh}(\beta_i l)) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Substituindo-se (4.18) em (4.19),

$$-C_{1i} \operatorname{sen}(\beta_i l) + C_{3i} \operatorname{senh}(\beta_i l) + C_{4i}(\cos(\beta_i l) + \operatorname{cosh}(\beta_i l)) = 0, \quad (4.22)$$

(4.18) em (4.17),

$$2C_{4i}EI\beta_i + I_H w_i^2(C_{1i} + C_{3i}) = 0, \quad (4.23)$$

e (4.18) em (4.20), resulta

$$C_{1i}(-EI\beta_i^3 \cos(\beta_i l) + m_c w_i^2 \text{sen}(\beta_i l)) + C_{3i}(EI\beta_i^3 \cosh(\beta_i l) + m_c w_i^2 \text{senh}(\beta_i l)) + C_{4i}(EI\beta_i^3 (\text{senh}(\beta_i l) - \text{sen}(\beta_i l)) + m_c w_i^2 (\cosh(\beta_i l) - \cos(\beta_i l))) = 0 \quad (4.24)$$

Isolando-se C_{1i} em (4.23), obtém-se:

$$C_{1i} = -C_{3i} - \frac{2EI\beta_i}{I_r w_i^2} C_{4i}. \quad (4.25)$$

Então, substituindo-se (4.25) em (4.22), fica-se com:

$$C_{3i} = -\frac{(2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))} C_{4i}, \quad (4.26)$$

e, finalmente, substituindo-se (4.25) e (4.26) em (4.24), obtém-se:

$$\left[\left(\frac{2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))} - \frac{2EI\beta_i}{I_r w_i^2} \right) (-EI\beta_i^3 \cos(\beta_i l) + m_c w_i^2 \text{sen}(\beta_i l)) + \left(\frac{2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))} \right) (EI\beta_i^3 \cosh(\beta_i l) + m_c w_i^2 \text{senh}(\beta_i l)) + EI\beta_i^3 (\text{senh}(\beta_i l) - \text{sen}(\beta_i l)) + m_c w_i^2 (\cosh(\beta_i l) - \cos(\beta_i l)) \right] C_{4i} = 0 \quad (4.27)$$

Portanto, para que C_{4i} seja diferente de zero (solução não trivial) é necessário que:

$$\left(\frac{2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))} - \frac{2EI\beta_i}{I_r w_i^2} \right) (-EI\beta_i^3 \cos(\beta_i l) + m_c w_i^2 \text{sen}(\beta_i l)) + \left(\frac{2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))} \right) (EI\beta_i^3 \cosh(\beta_i l) + m_c w_i^2 \text{senh}(\beta_i l)) + EI\beta_i^3 (\text{senh}(\beta_i l) - \text{sen}(\beta_i l)) + m_c w_i^2 (\cosh(\beta_i l) - \cos(\beta_i l)) = 0 \quad (4.28)$$

sendo a equação (4.28) usada para determinar os valores dos β_i e, a partir destes valores, determina-se os λ_i , pois $\lambda_i = \beta_i l$. As primeiras três raízes não nulas da equação (4.28) foram encontradas utilizando-se o Método Numérico da Bissecção, com oito dígitos significativos de precisão conforme:

$$\beta_1 = 1.522638; \beta_2 = 2.615733; \beta_3 = 4.432305,$$

o que implica em

$$\lambda_1 = 2.45144718; \lambda_2 = 4.21133013; \lambda_3 = 7.13601105.$$

As demais constantes presentes na equação (4.28) são relativas aos parâmetros estruturais, tendo-se utilizado os mesmos valores numéricos já definidos no Capítulo II. Como

$$w_i = \pm \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda_i^2,$$

as frequências dos três primeiros modos de vibração são:

$$w_1 = 17.50942188 \text{ rds}; w_2 = 51.67329338 \text{ rds}; w_3 = 148.36715 \text{ rds}$$

A partir das equações (4.18), (4.25) e (4.26) pode-se escrever $\phi_i(x)$ em função somente da constante C_{4i} como segue:

$$\phi_i(x) = \left(\frac{(2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))} - \frac{2EI\beta_i}{I_r w_i^2} \right) C_{4i} \text{sen}(\beta_i x) - C_{4i} \cos(\beta_i x) + \\ - \frac{(2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))} C_{4i} \text{senh}(\beta_i x) + C_{4i} \cosh(\beta_i x)$$

ou seja,

$$\phi_i(x) = C_{4i} \left[\left(\frac{(2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))} - \frac{2EI\beta_i}{I_r w_i^2} \right) \text{sen}(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) + \right. \\ \left. - \frac{(2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))} \text{senh}(\beta_i x) + \cosh(\beta_i x) \right]$$

Definindo-se ainda

$$M = \frac{(2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))} - \frac{2EI\beta_i}{I_r w_i^2} \quad (4.29)$$

e

$$N = - \frac{(2EI\beta_i \text{sen}(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)))}{I_r w_i^2 (\text{sen}(\beta_i l) + \text{senh}(\beta_i l))}, \quad (4.30)$$

pode-se escrever $\phi_i(x)$ como:

$$\phi_i(x) = C_{4i} [M \text{sen}(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) + N \text{senh}(\beta_i x) + \cosh(\beta_i x)]. \quad (4.31)$$

Porém, $\phi_i(x)$ deve satisfazer a seguinte condição de ortogonalidade [Schmitz, 1985]:

$$\int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) \rho dx + I_r \frac{d\phi_i}{dx}(0) \frac{d\phi_j}{dx}(0) + m_c \phi_i(l) \phi_j(l) = I_r \delta_{ij}, \quad (4.32)$$

onde :

$$I_T = I_r + I_B + m_c l^2 \quad e \quad I_B = \frac{\rho l^3}{3},$$

sendo I_T correspondente à inércia total de corpo rígido da estrutura.

Trabalhando-se com $i = j$ na equação (4.32) e sabendo-se que:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

esta equação transforma-se em:

$$\int_0^l [\phi_i(x)]^2 \rho dx + I_r \left[\frac{d\phi_i}{dx}(0) \right]^2 + m_c [\phi_i(l)]^2 = I_T. \quad (4.34)$$

De (4.31), via derivação em relação à x , obtém-se:

$$\frac{d\phi_i}{dx} = C_{4i} \beta_i [M \cos(\beta_i x) + \text{sen}(\beta_i x) + N \cosh(\beta_i x) + \text{senh}(\beta_i x)]$$

o que implica em

$$\frac{d\phi_i}{dx}(0) = C_{4i} \beta_i (M + N). \quad (4.35)$$

Substituindo-se (4.31) e (4.35) em (4.34), obtém-se:

$$\int_0^l C_{4i}^2 [M \text{sen}(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) + N \text{senh}(\beta_i x) + \cosh(\beta_i x)]^2 \rho dx + I_r [C_{4i} \beta_i (M + N)]^2 + m_c C_{4i}^2 [M \text{sen}(\beta_i l) - \cos(\beta_i l) + N \text{senh}(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)]^2 = I_T$$

ou seja,

$$\int_0^l C_{4i}^2 \left[(M \text{sen}(\beta_i x) - \cos(\beta_i x))^2 + 2(M \text{sen}(\beta_i x) - \cos(\beta_i x))(N \text{senh}(\beta_i x) + \cosh(\beta_i x)) + (N \text{senh}(\beta_i x) + \cosh(\beta_i x))^2 \right] \rho dx + I_r C_{4i}^2 \beta_i^2 (M + N)^2 + m_c C_{4i}^2 (M \text{sen}(\beta_i l) - \cos(\beta_i l) + N \text{senh}(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))^2 = I_T$$

Portanto pode-se escrever:

$$C_{4i}^2 \left\{ \rho \int_0^l \left[(M \text{sen}(\beta_i x) - \cos(\beta_i x))^2 + 2(M \text{sen}(\beta_i x) - \cos(\beta_i x))(N \text{senh}(\beta_i x) + \cosh(\beta_i x)) + (N \text{senh}(\beta_i x) + \cosh(\beta_i x))^2 \right] dx + I_r \beta_i^2 (M + N)^2 + m_c (M \text{sen}(\beta_i l) - \cos(\beta_i l) + N \text{senh}(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))^2 \right\} = I_T$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
C_{4i}^2 \left\{ \rho \int_0^l \left[M^2 \operatorname{sen}^2(\beta_i x) - 2M \operatorname{sen}(\beta_i x) \cos(\beta_i x) + \cos^2(\beta_i x) + \right. \right. \\
+ 2MN \operatorname{sen}(\beta_i x) \operatorname{senh}(\beta_i x) + 2M \operatorname{sen}(\beta_i x) \cosh(\beta_i x) - \\
+ 2N \cos(\beta_i x) \operatorname{senh}(\beta_i x) - 2 \cos(\beta_i x) \cosh(\beta_i x) + N^2 \operatorname{senh}^2(\beta_i x) + \\
+ 2N \operatorname{senh}(\beta_i x) \cosh(\beta_i x) + \cosh^2(\beta_i x) \left. \right] dx + I_r \beta_i^2 (M + N)^2 + \\
\left. + m_c \left(M \operatorname{sen}(\beta_i l) - \cos(\beta_i l) + N \operatorname{senh}(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l) \right)^2 \right\} = I_T
\end{aligned} \quad (4.36)$$

Resolvendo-se as integrais por partes que aparecem na equação (4.36), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^l \operatorname{sen}^2(\beta_i x) dx &= \frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{sen}(2\beta_i l), \\
\int_0^l 2 \operatorname{sen}(\beta_i x) \cos(\beta_i x) dx &= \int_0^l \operatorname{sen}(2\beta_i x) dx = \frac{1}{2\beta_i} (1 - \cos(2\beta_i l)), \\
\int_0^l \cos^2(\beta_i x) dx &= \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{sen}(2\beta_i l), \\
\int_0^l \operatorname{sen}(\beta_i x) \operatorname{senh}(\beta_i x) dx &= \frac{1}{2\beta_i} (\cosh(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) - \operatorname{senh}(\beta_i l) \cos(\beta_i l)), \\
\int_0^l \operatorname{sen}(\beta_i x) \cosh(\beta_i x) dx &= \frac{1}{2\beta_i} (1 + \operatorname{senh}(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) - \cosh(\beta_i l) \cos(\beta_i l)), \\
\int_0^l \cos(\beta_i x) \operatorname{senh}(\beta_i x) dx &= \frac{1}{2\beta_i} (\operatorname{senh}(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l) \cos(\beta_i l) - 1), \\
\int_0^l \cos(\beta_i x) \cosh(\beta_i x) dx &= \frac{1}{2\beta_i} (\operatorname{sen}(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) + \operatorname{senh}(\beta_i l) \cos(\beta_i l)), \\
\int_0^l \operatorname{senh}^2(\beta_i x) dx &= -\frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{senh}(2\beta_i l), \\
\int_0^l 2 \operatorname{senh}(\beta_i x) \cosh(\beta_i x) dx &= \int_0^l \operatorname{senh}(2\beta_i x) dx = \frac{1}{2\beta_i} (\cosh(2\beta_i l) - 1), \\
\int_0^l \cosh^2(\beta_i x) dx &= \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{senh}(2\beta_i l).
\end{aligned}$$

Então, substiuindo-se os resultados das integrais por partes acima na equação (4.36), obtém-se:

$$\begin{aligned}
C_{4i}^2 \left\{ \rho \left[M^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{sen}(2\beta_i l) \right) - \frac{M}{2\beta_i} (1 - \cos(2\beta_i l)) + \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{sen}(2\beta_i l) + \right. \right. \\
+ \frac{MN}{\beta_i} (\cosh(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) - \operatorname{senh}(\beta_i l) \cos(\beta_i l)) + \frac{M}{\beta_i} (1 + \operatorname{senh}(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) - \cosh(\beta_i l) \cos(\beta_i l)) + \\
- \frac{N}{\beta_i} (\operatorname{senh}(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) + \cos(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) - 1) - \frac{1}{\beta_i} (\operatorname{sen}(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) + \operatorname{senh}(\beta_i l) \cos(\beta_i l)) + \\
+ N^2 \left(-\frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{senh}(2\beta_i l) \right) + \frac{N}{2\beta_i} (\cosh(2\beta_i l) - 1) + \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{senh}(2\beta_i l) \left. \right] + I_T \beta_i^2 (M + N)^2 + \\
+ m_c (M \operatorname{sen}(\beta_i l) - \cos(\beta_i l) + N \operatorname{senh}(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))^2 \left. \right\} = I_T
\end{aligned}$$

Portanto, a partir da equação acima, pode-se determinar analiticamente o valor da constante

C_{4i} . Definindo-se:

$$\begin{aligned}
K_i = \rho \left[M^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{sen}(2\beta_i l) \right) - \frac{M}{2\beta_i} (1 - \cos(2\beta_i l)) + \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{sen}(2\beta_i l) + \right. \\
+ \frac{MN}{\beta_i} (\cosh(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) - \operatorname{senh}(\beta_i l) \cos(\beta_i l)) + \frac{M}{\beta_i} (1 + \operatorname{senh}(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) - \cosh(\beta_i l) \cos(\beta_i l)) + \\
- \frac{N}{\beta_i} (\operatorname{senh}(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) + \cos(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) - 1) - \frac{1}{\beta_i} (\operatorname{sen}(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) + \operatorname{senh}(\beta_i l) \cos(\beta_i l)) + \\
+ N^2 \left(-\frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{senh}(2\beta_i l) \right) + \frac{N}{2\beta_i} (\cosh(2\beta_i l) - 1) + \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{senh}(2\beta_i l) \left. \right] + I_T \beta_i^2 (M + N)^2 + \\
+ m_c (M \operatorname{sen}(\beta_i l) - \cos(\beta_i l) + N \operatorname{senh}(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))^2
\end{aligned}$$

obtem-se:

$$C_{4i}^2 K_i = I_T \Rightarrow C_{4i} = \pm \sqrt{\frac{I_T}{K_i}}, \quad (4.37)$$

ou seja, para cada β_i tem-se um K_i e uma conseqüente constante C_{4i} . Foram encontrados os seguintes valores numéricos para as constantes C_{41} , C_{42} e C_{43} :

$$C_{41} = 1.8912 ; C_{42} = 3.1696 ; C_{43} = 2.9715,$$

sendo, a partir destas constantes e dos valores dos β_i , $i = 1, 2, 3$, determinadas as seguintes funções de forma:

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= C_{41} [M \operatorname{sen}(\beta_1 x) - \cos(\beta_1 x) + N \operatorname{senh}(\beta_1 x) + \cosh(\beta_1 x)], \\
\phi_2(x) &= C_{42} [M \operatorname{sen}(\beta_2 x) - \cos(\beta_2 x) + N \operatorname{senh}(\beta_2 x) + \cosh(\beta_2 x)], \\
\phi_3(x) &= C_{43} [M \operatorname{sen}(\beta_3 x) - \cos(\beta_3 x) + N \operatorname{senh}(\beta_3 x) + \cosh(\beta_3 x)].
\end{aligned}$$

cujos gráficos são mostrados na Figura 4.1.

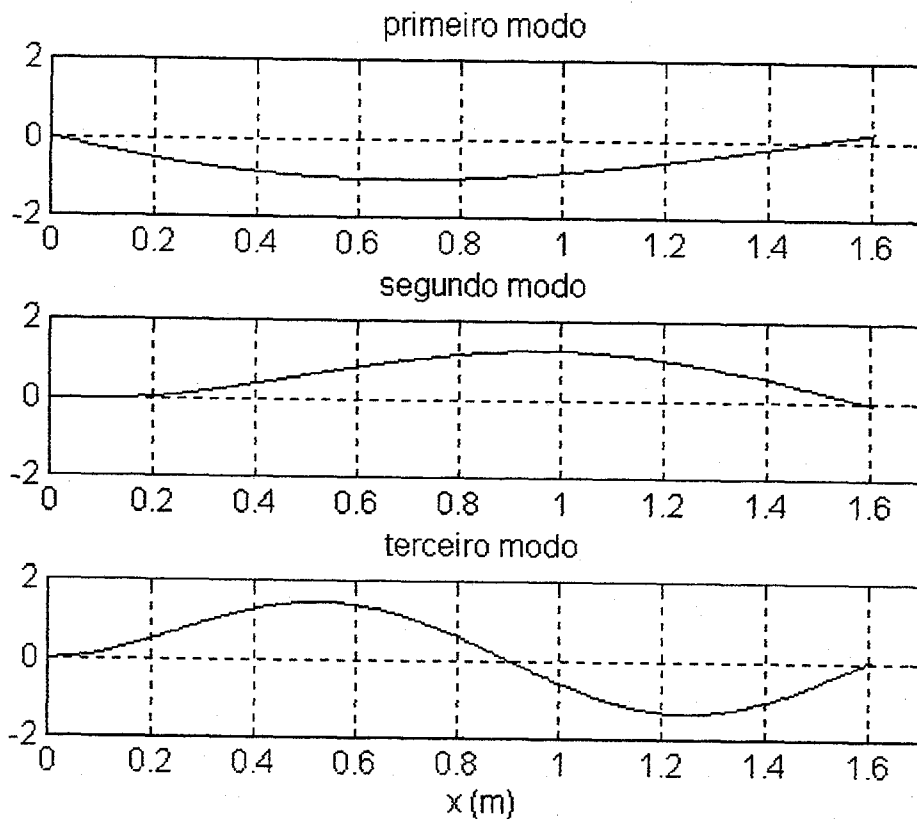


Figura 4.1 Gráficos das funções de forma

4.3 OBTENÇÃO DO MODELO DINÂMICO

Uma vez determinadas as formas $\phi_i(x)$ e as frequências w_i , a equação dinâmica, para três modos flexíveis, pode ser escrita conforme

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + BT_m, \quad (4.38)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w_1^2 & 0 & 0 & 0 & -2\xi_1 w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_2^2 & 0 & 0 & 0 & -2\xi_2 w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_3^2 & 0 & 0 & 0 & -2\xi_3 w_3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{d\phi_1}{dx}(0) \\ \frac{d\phi_2}{dx}(0) \\ \frac{d\phi_3}{dx}(0) \end{bmatrix},$$

$$X = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dot{q}_0 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]^T$$

e ξ_i , $i = 1, 2, 3$, correspondem às razões de amortecimento, as quais serão diferentes de zero caso se considere o amortecimento natural da estrutura. Este modelo dinâmico pode ser obtido diretamente da aplicação das equações de Euler-Lagrange, sendo o Lagrangeano, para o caso de três modos flexíveis, definido sob a forma [Schmitz, 1985]:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 I_T \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 I_T \omega_i^2 q_i^2 + T_m \left(\sum_{i=0}^3 \frac{d\phi_i(0)}{dx} q_i \right), \quad (4.39)$$

onde T_m é o torque motor, e $\phi_0(x) = x$ (modo rígido).

A matriz de observação, para o caso colocado, possui a seguinte forma (observa-se a velocidade do rotor):

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{d\phi_1}{dx}(0) & \frac{d\phi_2}{dx}(0) & \frac{d\phi_3}{dx}(0) \end{bmatrix},$$

sendo que esta matriz decorre do fato de que, da equação (4.2), a velocidade do rotor é obtida como:

$$\dot{\theta}_r = \dot{q}_0 + \frac{d\phi_1}{dx}(0)\dot{q}_1 + \frac{d\phi_2}{dx}(0)\dot{q}_2 + \frac{d\phi_3}{dx}(0)\dot{q}_3.$$

Para o caso não colocado, observa-se a posição $y(l, t)$ da carga terminal, a qual possui a forma:

$$y(l,t) = y_T = lq_0 + \phi_1(l)q_{t1} + \phi_2(l)q_{t2} + \phi_3(l)q_{t3}.$$

Portanto a matriz de observação será:

$$C_{nc} = [l \quad \phi_1(l) \quad \phi_2(l) \quad \phi_3(l) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

4.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

De acordo com a equação (3.19) (Capítulo III), as funções de transferência, nos casos colocado e não colocado, são descritas respectivamente pelas equações:

$$F_c(s) = C_c (sI - A)^{-1} B$$

e

$$F_{nc}(s) = C_{nc} (sI - A)^{-1} B,$$

onde I é a matriz identidade.

A Figura 4.2 contém as respostas em frequência das funções de transferência Analítica (Capítulo II) e por Modos Assumidos para o caso colocado.

A fim de garantir uma comparação mais efetiva com o resultado analítico, o amortecimento estrutural foi negligenciado, assumindo-se as razões de amortecimento (ξ_i , $i = 1, 2, 3$) nulas na equação (4.38) (em casos práticos estas razões de amortecimento poderiam ser identificadas a partir de experimentos em malha aberta). Analizando-se esta figura, observa-se a perfeita coincidência com o resultado analítico, ou seja, os três primeiros zeros e pólos são idênticos nos dois resultados. A Figura 4.3 contém também respostas em frequência das funções de transferência Analítica e por Modos Assumidos, agora para o caso não colocado. O resultado é semelhante ao anterior, ou seja, há uma coincidência, em termos de frequência, para os três primeiros modos flexíveis considerados no modelo.

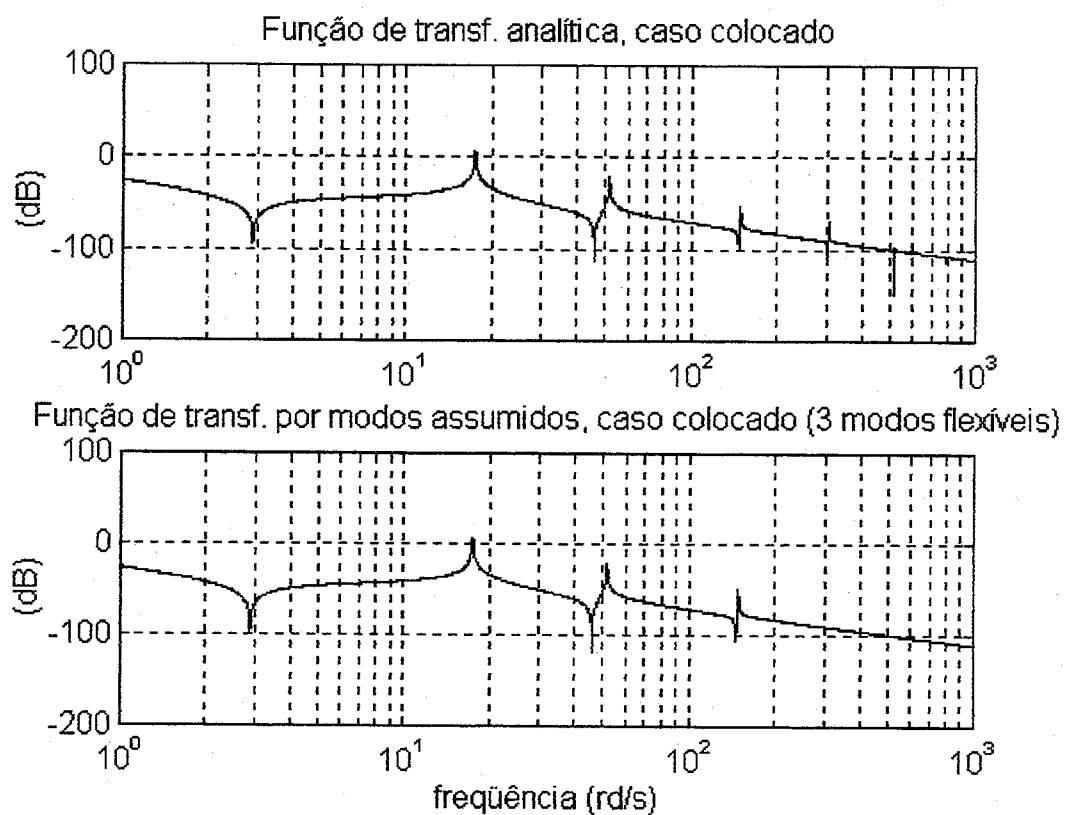


Figura 4.2 Funções de Transferência Analítica e por Modos Assumidos (caso colocado).

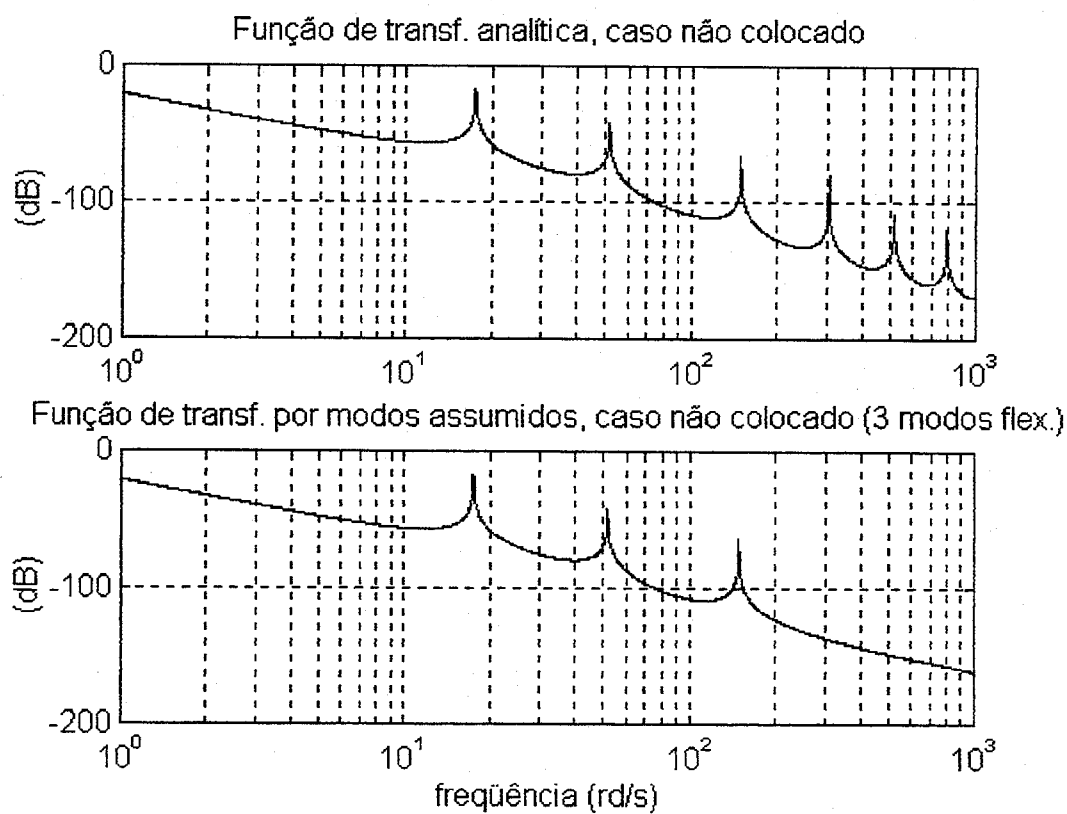


Figura 4.3 Funções de Transferência Analítica e por Modos Assumidos (caso não colocado).

CAPÍTULO V
O MÉTODO DAS DEFORMAÇÕES
POLINOMIAIS

5.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo é apresentada a modelagem matemática para a dinâmica da estrutura flexível a partir do Método das Deformações Polinomiais, o qual pode ser considerado como um dos derivados dos Elementos Finitos. Com um procedimento semelhante ao apresentado nos capítulos anteriores faz-se, inicialmente, o desenvolvimento teórico. Posteriormente são realizadas comparações com o estudo analítico apresentado no Capítulo II.

5.2 DESCRIÇÃO DO MÉTODO

O Método das Deformações Polinomiais sugere que a deformação da estrutura tenha um formato polinomial. A Figura 5.1 mostra um desenho de um elemento da estrutura flexível, que dentro do caso clássico dos Elementos Finitos, é de terceira ordem na forma:

$$w(x,t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3, \quad (5.1)$$

obedecendo as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} a) \quad & w(0,t) = q_1(t); \\ b) \quad & \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = q_2(t); \\ c) \quad & w(l,t) = q_3(t); \\ d) \quad & \frac{\partial w}{\partial x}(l,t) = q_4(t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

O caso clássico consiste em conectar diversos elementos de terceira ordem entre si. Desenvolve-se, a seguir, as equações para um único elemento isoladamente, guardando-se a informação de que o formalismo seria o mesmo para os diversos elementos, excetuando-se o primeiro e o último elementos uma vez que suas condições de contorno são diferenciadas.

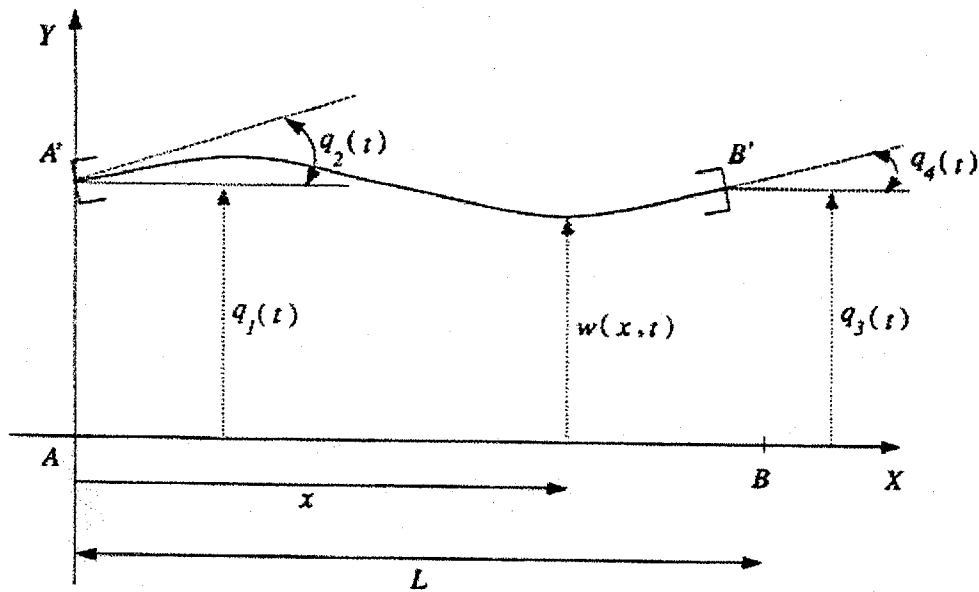


Figura 5.1 Elemento clássico da estrutura

Aplicando-se as condições:

a)

$$w(0,t) = a_0(t) \Rightarrow a_0(t) = q_1(t); \quad (5.3)$$

b)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = a_1(t) + 2a_2(t)x + 3a_3(t)x^2 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = a_1(t),$$

implica em

$$a_1(t) = q_2(t); \quad (5.4)$$

c)

$$w(l,t) = a_0(t) + a_1(t)l + a_2(t)l^2 + a_3(t)l^3 = q_3(t);$$

mas de (5.3) e (5.4), obtém-se:

$$q_1(t) + q_2(t)l + a_2(t)l^2 + a_3(t)l^3 = q_3(t) \Rightarrow a_2(t)l^2 + a_3(t)l^3 = q_3(t) - q_1(t) - q_2(t)l; \quad (5.5)$$

d)

$$\frac{\partial w}{\partial x}(l,t) = a_1(t) + 2a_2(t)l + 3a_3(t)l^2 = q_4(t).$$

De (5.4), resulta:

$$q_2(t) + 2a_2(t)l + 3a_3(t)l^2 = q_4(t) \Rightarrow 2a_2(t)l + 3a_3(t)l^2 = q_4(t) - q_2(t). \quad (5.6)$$

Logo, de (5.5) e (5.6), obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_2(t)l^2 + a_3(t)l^3 = q_3(t) - q_1(t) - q_2(t)l \\ 2a_2(t)l + 3a_3(t)l^2 = q_4(t) - q_2(t) \end{cases},$$

cuja solução é:

$$a_2(t) = \frac{3 [q_3(t) - q_1(t)] - l [2q_2(t) + q_4(t)]}{l^2} \quad (5.7)$$

e

$$a_3(t) = \frac{l [q_2(t) + q_4(t)] + 2 [q_1(t) - q_3(t)]}{l^3}. \quad (5.8)$$

Substituindo-se (5.3), (5.4), (5.7) e (5.8) em (5.1), obtém-se:

$$w(x,t) = q_1(t) + q_2(t)x + \frac{3 [q_3(t) - q_1(t)] - l [2q_2(t) + q_4(t)]}{l^2} x^2 + \\ + \frac{l [q_2(t) + q_4(t)] + 2 [q_1(t) - q_3(t)]}{l^3} x^3,$$

e agrupando-se os termos da equação acima, resulta:

$$w(x,t) = \left(1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3\right)q_1(t) + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)q_2(t) + \\ + \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right)q_3(t) + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)q_4(t) \quad (5.9)$$

Portanto, a deformação pode ser escrita como:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^4 \phi_i(x)q_i(t),$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, \\ \phi_2(x) &= x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \\ \phi_3(x) &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, \\ \phi_4(x) &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Como não há inércia no rotor nem na carga terminal, a Energia Cinética é escrita na forma:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \rho dx = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [m] [\dot{q}], \quad (5.11)$$

onde ρ é a massa por unidade de comprimento da linha elástica. A equação da Energia Potencial é a mesma já utilizada em capítulos anteriores, ou seja:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 dx = \frac{1}{2} [q]^T [k] [q], \quad (5.12)$$

onde

$$[q] = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T. \quad (5.13)$$

Os elementos das matrizes $[m]$ e $[k]$ são escritos, respectivamente, como:

$$m_{ij} = \int_0^l \rho \phi_i(x) \phi_j(x) dx; \quad i = 1, \dots, 4 \quad j = 1, \dots, 4 \quad (5.14)$$

e

$$k_{ij} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} dx; \quad i = 1, \dots, 4 \quad j = 1, \dots, 4. \quad (5.15)$$

As equações (5.14) e (5.15) são igualmente válidas para todas as outras estruturas elementares. Reunindo-se todas as equações obtém-se o Lagrangeano total do sistema, que permite determinar as equações diferenciais ordinárias que descrevem a dinâmica da estrutura flexível na forma:

$$[M] [\ddot{Q}] + [K] [Q] = [S], \quad (5.16)$$

onde $[S]$ é o vetor das forças generalizadas, $[Q]$ é o vetor formado por todos os vetores dos parâmetros cinemáticos $[q]$, e $[M]$ e $[K]$ são formadas pelas matrizes $[m]$ e $[k]$, respectivamente, $l = 1, \dots, N$ (N é o número de elementos).

Segundo [Chrétien, 1990], esta técnica é inconveniente por necessitar de um número grande de elementos, a fim de minimizar o efeito de uma modelagem incorreta das deformações correspondentes ao primeiro elemento finito (conectado ao rotor) e ao último (conectado à carga). Isto aumenta consideravelmente o tamanho das matrizes $[M]$ e $[K]$, ampliando assim a complexidade do modelo.

5.3 UTILIZAÇÃO DE UMA APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DO QUINTO GRAU

Para superar as dificuldades do método clássico citado anteriormente, Chrétien [Chrétien, 1990] propôs a utilização de um único elemento finito, mas com uma deformação aproximada por um polinômio do quinto grau.

Considere ainda uma estrutura elementar, conforme mostra a Figura 5.2. Este elemento possui o comprimento total da estrutura flexível, pois se considera um único elemento finito. Dois novos parâmetros cinemáticos são introduzidos:

$$q_3(t) = \frac{M_{fA}}{EI}; \quad q_6(t) = \frac{M_{fB}}{EI}, \quad (5.17)$$

onde M_{fA} e M_{fB} são os momentos fletores nas extremidades da estrutura elementar.

O desenvolvimento das equações neste caso é idêntico ao caso anterior e, portanto, a expressão da deformação é dada por:

$$w(x,t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 + a_4(t)x^4 + a_5(t)x^5, \quad (5.18)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} a) \quad & w(0,t) = q_1(t); \\ b) \quad & \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = q_2(t); \\ c) \quad & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = q_3(t); \\ d) \quad & w(l,t) = q_4(t); \\ e) \quad & \frac{\partial w}{\partial x}(l,t) = q_5(t); \\ f) \quad & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = q_6(t). \end{aligned} \quad (5.19)$$

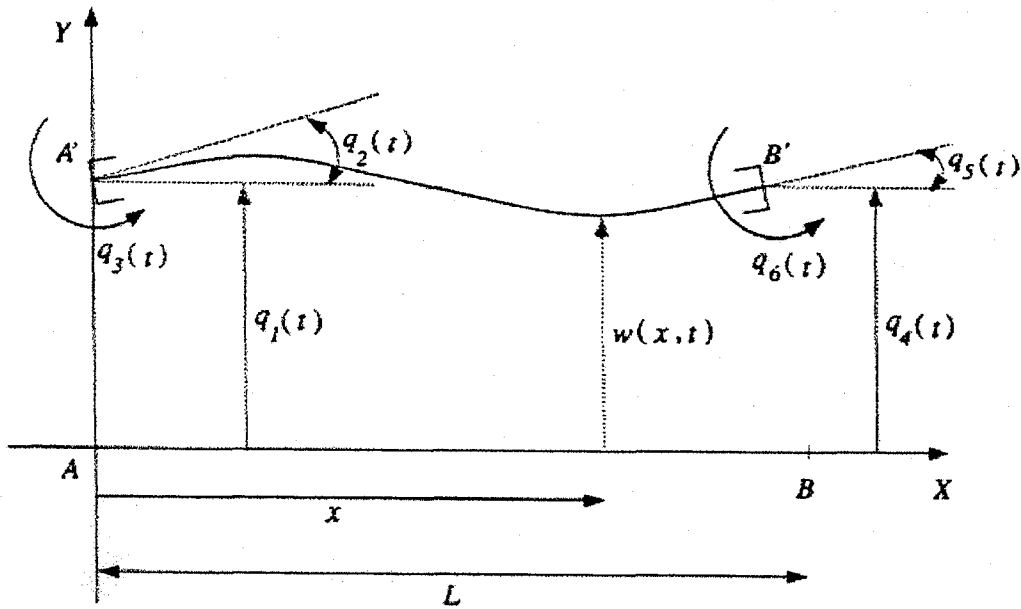


Figura 5.2 Estrutura elementar com a representação de seis parâmetros cinemáticos

Aplicando-se as condições de contorno:

a)

$$w(0,t) = a_0(t) \Rightarrow a_0(t) = q_1(t); \quad (5.20)$$

b)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = a_1(t) + 2a_2(t)x + 3a_3(t)x^2 + 4a_4(t)x^3 + 5a_5(t)x^4 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = a_1(t),$$

implica em

$$a_1(t) = q_2(t); \quad (5.21)$$

c)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2a_2(t) + 6a_3(t)x + 12a_4(t)x^2 + 20a_5(t)x^3 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = 2a_2(t),$$

logo

$$2a_2(t) = q_3(t) \Rightarrow a_2(t) = \frac{q_3(t)}{2}; \quad (5.22)$$

d)

$$w(l,t) = a_0(t) + a_1(t)l + a_2(t)l^2 + a_3(t)l^3 + a_4(t)l^4 + a_5(t)l^5 = q_4(t).$$

Substituindo-se (5.20), (5.21) e (5.22) na equação acima, tem-se:

$$q_1(t) + q_2(t)l + \frac{q_3(t)}{2}l^2 + a_3(t)l^3 + a_4(t)l^4 + a_5(t)l^5 = q_4(t),$$

ou ainda,

$$a_3(t)l^3 + a_4(t)l^4 + a_5(t)l^5 = q_4(t) - q_1(t) - q_2(t)l - \frac{q_3(t)}{2}l^2. \quad (5.23)$$

Da condição e) resulta:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(l,t) = a_1(t) + 2a_2(t)l + 3a_3(t)l^2 + 4a_4(t)l^3 + 5a_5(t)l^4 = q_5(t).$$

Substituindo-se (5.21) e (5.22) na equação acima, obtém-se:

$$q_2(t) + q_3(t)l + 3a_3(t)l^2 + 4a_4(t)l^3 + 5a_5(t)l^4 = q_5(t),$$

ou ainda,

$$3a_3(t)l^2 + 4a_4(t)l^3 + 5a_5(t)l^4 = q_5(t) - q_2(t) - q_3(t)l. \quad (5.24)$$

Finalmente da condição f) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 2a_2(t) + 6a_3(t)l + 12a_4(t)l^2 + 20a_5(t)l^3 = q_6(t).$$

Substituindo-se (5.22) na equação anterior, resulta:

$$q_3(t) + 6a_3(t)l + 12a_4(t)l^2 + 20a_5(t)l^3 = q_6(t),$$

ou seja,

$$6a_3(t)l + 12a_4(t)l^2 + 20a_5(t)l^3 = q_6(t) - q_3(t). \quad (5.25)$$

Portanto, das equações (5.23), (5.24) e (5.25), obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_3(t)l^3 + a_4(t)l^4 + a_5(t)l^5 = q_4(t) - q_1(t) - q_2(t)l - \frac{q_3(t)}{2}l^2 \\ 3a_3(t)l^2 + 4a_4(t)l^3 + 5a_5(t)l^4 = q_5(t) - q_2(t) - q_3(t)l \\ 6a_3(t)l + 12a_4(t)l^2 + 20a_5(t)l^3 = q_6(t) - q_3(t) \end{cases}, \quad (5.26)$$

cuja solução é:

$$a_3(t) = \frac{q_6(t)}{2l} - \frac{4q_5(t)}{l^2} + \frac{10q_4(t)}{l^3} - \frac{3q_3(t)}{2l} - \frac{6q_2(t)}{l^2} - \frac{10q_1(t)}{l^3}, \quad (5.27)$$

$$a_4(t) = -\frac{q_6(t)}{l^2} + \frac{7q_5(t)}{l^3} - \frac{15q_4(t)}{l^4} + \frac{3q_3(t)}{2l^2} + \frac{8q_2(t)}{l^3} + \frac{15q_1(t)}{l^4}, \quad (5.28)$$

$$a_5(t) = \frac{q_6(t)}{2l^3} - \frac{3q_5(t)}{l^4} + \frac{16q_4(t)}{l^5} - \frac{q_3(t)}{2l^3} - \frac{3q_2(t)}{l^4} - \frac{6q_1(t)}{l^5}. \quad (5.29)$$

Substituindo agora (5.20), (5.21), (5.22), (5.27), (5.28) e (5.29) em (5.18), obtém-se para a deformação:

$$\begin{aligned} w(x,t) = & q_1(t) + q_2(t)x + \frac{q_3(t)}{2}x^2 + \left[\frac{q_6(t)}{2l} - \frac{4q_5(t)}{l^2} + \frac{10q_4(t)}{l^3} - \frac{3q_3(t)}{2l} - \frac{6q_2(t)}{l^2} - \frac{10q_1(t)}{l^3} \right] x^3 + \\ & + \left[-\frac{q_6(t)}{l^2} + \frac{7q_5(t)}{l^3} - \frac{15q_4(t)}{l^4} + \frac{3q_3(t)}{2l^2} + \frac{8q_2(t)}{l^3} + \frac{15q_1(t)}{l^4} \right] x^4 + \\ & + \left[\frac{q_6(t)}{2l^3} - \frac{3q_5(t)}{l^4} + \frac{16q_4(t)}{l^5} - \frac{q_3(t)}{2l^3} - \frac{3q_2(t)}{l^4} - \frac{6q_1(t)}{l^5} \right] x^5 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} w(x,t) = & \left[1 - \frac{10x^3}{l^3} + \frac{15x^4}{l^4} - \frac{6x^5}{l^5} \right] q_1(t) + \left[x - \frac{6x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right] q_2(t) + \\ & + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2l} + \frac{3x^4}{2l^2} - \frac{x^5}{2l^3} \right] q_3(t) + \left[\frac{10x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} + \frac{6x^5}{l^5} \right] q_4(t) + \\ & + \left[-\frac{4x^3}{l^2} + \frac{7x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right] q_5(t) + \left[\frac{x^3}{2l} - \frac{x^4}{l^2} + \frac{x^5}{2l^3} \right] q_6(t) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Como a deformação pode ser escrita na forma:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^6 \phi_i(x) q_i(t),$$

então de (5.30) resulta

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - \frac{10x^3}{l^3} + \frac{15x^4}{l^4} - \frac{6x^5}{l^5}; \\ \phi_2(x) &= x - \frac{6x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4}; \\ \phi_3(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2l} + \frac{3x^4}{2l^2} - \frac{x^5}{2l^3}; \\ \phi_4(x) &= \frac{10x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} + \frac{6x^5}{l^5}; \\ \phi_5(x) &= -\frac{4x^3}{l^2} + \frac{7x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4}; \\ \phi_6(x) &= \frac{x^3}{2l} - \frac{x^4}{l^2} + \frac{x^5}{2l^3}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

As expressões para calcular as energias cinética e potencial são as mesmas do Capítulo II (equações (2.1) e (2.2)), ou seja,

$$E_c = \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x\dot{\theta} \right)^2 \rho dx + \frac{m_c}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x\dot{\theta} \right)^2 \Big|_{x=l} \quad (2.1)$$

e

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 dx, \quad (2.2)$$

as quais podem ser escritas ainda na forma:

$$E_c = \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x\dot{\theta} \right)^2 \rho dx + \frac{m_c}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x\dot{\theta} \right)^2 \Big|_{x=l} = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [m] [\dot{q}],$$

mas considerando que $\theta = q_2$, tem-se:

$$E_c = \frac{1}{2} I_r \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x\dot{q}_2 \right)^2 \rho dx + \frac{m_c}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x\dot{q}_2 \right)^2 \Big|_{x=l} = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [m] [\dot{q}] \quad (5.32)$$

e

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 dx = \frac{1}{2} [q]^T [k] [q], \quad (5.33)$$

onde

$$[q] = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T. \quad (5.34)$$

Os elementos da matriz $[m]$ são dados por:

$$m_{11} = \int_0^l \rho [\phi_1(x)]^2 dx + m_c \left[\underbrace{\phi_1(l)}_0 \right]^2 = \int_0^l \rho \left(1 - \frac{10x^3}{l^3} + \frac{15x^4}{l^4} - \frac{6x^5}{l^5} \right)^2 dx = \frac{121}{42} \rho l$$

$$\begin{aligned} m_{12} &= \int_0^l \rho \phi_1(x) [\phi_2(x) + x] dx + m_c \phi_1(l) \left[\underbrace{\phi_2(l)}_0 + l \right] = \\ &= \int_0^l \rho \left(1 - \frac{10x^3}{l^3} + \frac{15x^4}{l^4} - \frac{6x^5}{l^5} \right) \left(2x - \frac{6x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) dx = \frac{971}{4620} \rho l^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{13} &= \int_0^l \rho \phi_1(x) \phi_3(x) dx + m_c \underbrace{\phi_1(l) \phi_3(l)}_0 = \\ &= \int_0^l \rho \left(1 - \frac{10x^3}{l^3} + \frac{15x^4}{l^4} - \frac{6x^5}{l^5} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2l} + \frac{3x^4}{2l^2} - \frac{x^5}{2l^3} \right) dx = \frac{281}{55440} \rho l^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{14} &= \int_0^l \rho \phi_1(x) \phi_4(x) dx + m_c \underbrace{\phi_1(l) \phi_4(l)}_0 = \\
 &= \int_0^l \rho \left(1 - \frac{10x^3}{l^3} + \frac{15x^4}{l^4} - \frac{6x^5}{l^5} \right) \left(\frac{10x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} + \frac{6x^5}{l^5} \right) dx = \frac{25}{231} \rho l
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{15} &= \int_0^l \rho \phi_1(x) \phi_5(x) dx + m_c \underbrace{\phi_1(l) \phi_5(l)}_0 = \\
 &= \int_0^l \rho \left(1 - \frac{10x^3}{l^3} + \frac{15x^4}{l^4} - \frac{6x^5}{l^5} \right) \left(-\frac{4x^3}{l^2} + \frac{7x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) dx = -\frac{151}{4620} \rho l^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{16} &= \int_0^l \rho \phi_1(x) \phi_6(x) dx + m_c \underbrace{\phi_1(l) \phi_6(l)}_0 = \\
 &= \int_0^l \rho \left(1 - \frac{10x^3}{l^3} + \frac{15x^4}{l^4} - \frac{6x^5}{l^5} \right) \left(\frac{x^3}{2l} - \frac{x^4}{l^2} + \frac{x^5}{2l^3} \right) dx = \frac{181}{55440} \rho l^3
 \end{aligned}$$

$$m_{21} = \int_0^l \rho [\phi_2(x) + x] \phi_1(x) dx + m_c [\phi_2(l) + l] \phi_1(l) = m_{12} = \frac{971}{4620} \rho l^2$$

$$\begin{aligned}
 m_{22} &= \int_0^l \rho \left\{ [\phi_2(x)]^2 + 2x\phi_2(x) + x^2 \right\} dx + m_c \left\{ \underbrace{[\phi_2(l)]^2 + 2l\phi_2(l) + l^2}_0 \right\} + I_r = \\
 &= \int_0^l \rho \left\{ \left(x - \frac{6x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right)^2 + 2x \left(x - \frac{6x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) + x^2 \right\} dx + m_c l^2 + I_r = \\
 &= \frac{1471}{3465} \rho l^3 + m_c l^2 + I_r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{23} &= \int_0^l \rho [\phi_2(x) + x] \phi_3(x) dx + m_c \left[\underbrace{\phi_2(l) + l}_0 \right] \underbrace{\phi_3(l)}_0 = \\
 &= \int_0^l \rho \left(2x - \frac{6x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2l} + \frac{3x^4}{2l^2} - \frac{x^5}{2l^3} \right) dx = \frac{89}{18480} \rho l^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{24} &= \int_0^l \rho [\phi_2(x) + x] \phi_4(x) dx + m_c \left[\underbrace{\phi_2(l) + l}_0 \right] \underbrace{\phi_4(l)}_1 = \\
 &= m_{24} = \int_0^l \rho \left(2x - \frac{6x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) \left(\frac{10x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} + \frac{6x^5}{l^5} \right) dx + m_c l = \frac{1801}{4620} \rho l^2 + m_c l
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{25} &= \int_0^l \rho [\phi_2(x) + x] \phi_5(x) dx + m_c \left[\underbrace{\phi_2(l)}_0 + l \right] \underbrace{\phi_5(l)}_0 = \\
 &= \int_0^l \rho \left(2x - \frac{6x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) \left(-\frac{4x^3}{l^2} + \frac{7x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) dx = -\frac{991}{138600} \rho l^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{26} &= \int_0^l \rho [\phi_2(x) + x] \phi_6(x) dx + m_c \left[\underbrace{\phi_2(l)}_0 + l \right] \underbrace{\phi_6(l)}_0 = \\
 &= \int_0^l \rho \left(2x - \frac{6x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) \left(\frac{x^3}{2l} - \frac{x^4}{l^2} + \frac{x^5}{2l^3} \right) dx = \frac{79}{13860} \rho l^4
 \end{aligned}$$

$$m_{31} = \int_0^l \rho \phi_3(x) \phi_1(x) dx + m_c \underbrace{\phi_3(l)}_0 \underbrace{\phi_1(l)}_0 = m_{13} = \frac{281}{55440} \rho l^3$$

$$m_{32} = \int_0^l \rho \phi_3(x) [\phi_2(x) + x] dx + m_c \underbrace{\phi_3(l)}_0 \left[\underbrace{\phi_2(l)}_0 + l \right] = m_{23} = \frac{89}{18480} \rho l^4$$

$$m_{33} = \int_0^l \rho [\phi_3(x)]^2 dx + m_c \left[\underbrace{\phi_3(l)}_0 \right]^2 = \int_0^l \rho \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2l} + \frac{3x^4}{2l^2} - \frac{x^5}{2l^3} \right)^2 dx = \frac{1}{9240} \rho l^5$$

$$\begin{aligned}
 m_{34} &= \int_0^l \rho \phi_3(x) \phi_4(x) dx + m_c \underbrace{\phi_3(l)}_0 \underbrace{\phi_4(l)}_1 = \\
 &= \int_0^l \rho \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2l} + \frac{3x^4}{2l^2} - \frac{x^5}{2l^3} \right) \left(\frac{10x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} + \frac{6x^5}{l^5} \right) dx = \frac{181}{55440} \rho l^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{35} &= \int_0^l \rho \phi_3(x) \phi_5(x) dx + m_c \underbrace{\phi_3(l)}_0 \underbrace{\phi_5(l)}_0 = \\
 &= \int_0^l \rho \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2l} + \frac{3x^4}{2l^2} - \frac{x^5}{2l^3} \right) \left(-\frac{4x^3}{l^2} + \frac{7x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) dx = -\frac{13}{13860} \rho l^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{36} &= \int_0^l \rho \phi_3(x) \phi_6(x) dx + m_c \underbrace{\phi_3(l)}_0 \underbrace{\phi_6(l)}_0 = \\
 &= \int_0^l \rho \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2l} + \frac{3x^4}{2l^2} - \frac{x^5}{2l^3} \right) \left(\frac{x^3}{2l} - \frac{x^4}{l^2} + \frac{x^5}{2l^3} \right) dx = \frac{1}{11088} \rho l^5
 \end{aligned}$$

$$m_{41} = \int_0^l \rho \phi_4(x) \phi_1(x) dx + m_c \underbrace{\phi_4(l)}_1 \underbrace{\phi_1(l)}_0 = m_{14} = \frac{25}{231} \rho l$$

$$m_{42} = \int_0^l \rho \phi_4(x) [\phi_2(x) + x] dx + m_c \underbrace{\phi_4(l)}_1 \left[\underbrace{\phi_2(l)}_0 + l \right] = m_{24} = \frac{1801}{4620} \rho l^2 + m_c l$$

$$m_{43} = \int_0^l \rho \phi_4(x) \phi_3(x) dx + m_c \underbrace{\phi_4(l)}_1 \underbrace{\phi_3(l)}_0 = m_{34} = \frac{181}{55440} \rho l^3$$

$$\begin{aligned} m_{44} &= \int_0^l [\phi_4(x)]^2 \rho dx + m_c \left[\underbrace{\phi_4(l)}_1 \right]^2 = \\ &= \rho \int_0^l \left(\frac{10x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} + \frac{6x^5}{l^5} \right)^2 dx + m_c = \frac{181}{462} \rho l + m_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{45} &= \int_0^l \phi_4(x) \phi_5(x) \rho dx + m_c \underbrace{\phi_4(l)}_1 \underbrace{\phi_5(l)}_0 = \\ &= \rho \int_0^l \left(\frac{10x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} + \frac{6x^5}{l^5} \right) \left(-\frac{4x^3}{l^2} + \frac{7x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) dx = -\frac{311}{4620} \rho l^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{46} &= \int_0^l \phi_4(x) \phi_6(x) \rho dx + m_c \underbrace{\phi_4(l)}_1 \underbrace{\phi_6(l)}_0 = \\ &= \rho \int_0^l \left(\frac{10x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} + \frac{6x^5}{l^5} \right) \left(\frac{x^3}{2l} - \frac{x^4}{l^2} + \frac{x^5}{2l^3} \right) dx = \frac{281}{55440} \rho l^3 \end{aligned}$$

$$m_{51} = \int_0^l \phi_5(x) \phi_1(x) \rho dx + m_c \underbrace{\phi_5(l)}_0 \underbrace{\phi_1(l)}_0 = m_{15} = -\frac{151}{4620} \rho l^2$$

$$m_{52} = \int_0^l \phi_5(x) [\phi_2(x) + x] \rho dx + m_c \underbrace{\phi_5(l)}_0 \left[\underbrace{\phi_2(l)}_0 + l \right] = m_{25} = -\frac{991}{13860} \rho l^3$$

$$m_{53} = \int_0^l \phi_5(x) \phi_3(x) \rho dx + m_c \underbrace{\phi_5(l)}_0 \underbrace{\phi_3(l)}_0 = m_{35} = -\frac{13}{13860} \rho l^4$$

$$m_{54} = \int_0^l \phi_5(x)\phi_4(x)\rho dx + m_c \underbrace{\phi_5(l)\phi_4(l)}_0 = m_{45} = -\frac{311}{4620}\rho l^2$$

$$m_{55} = \int_0^l [\phi_5(x)]^2 \rho dx + m_c \left[\underbrace{\phi_5(l)}_0 \right]^2 = \rho \int_0^l \left(-\frac{4x^3}{l^2} + \frac{7x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right)^2 dx = \frac{52}{3465}\rho l^3$$

$$\begin{aligned} m_{56} &= \int_0^l \phi_5(x)\phi_6(x)\rho dx + m_c \underbrace{\phi_5(l)\phi_6(l)}_0 = \\ &= \rho \int_0^l \left(-\frac{4x^3}{l^2} + \frac{7x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4} \right) \left(\frac{x^3}{2l} - \frac{x^4}{l^2} + \frac{x^5}{2l^3} \right) dx = -\frac{23}{18480}\rho l^4 \end{aligned}$$

$$m_{61} = \int_0^l \phi_6(x)\phi_1(x)\rho dx + m_c \underbrace{\phi_6(l)\phi_1(l)}_0 = m_{16} = \frac{181}{55440}\rho l^3$$

$$m_{62} = \int_0^l \phi_6(x)[\phi_2(x) + x]\rho dx + m_c \underbrace{\phi_6(l)}_0 \left[\underbrace{\phi_2(l)}_0 + l \right] = m_{26} = \frac{79}{13860}\rho l^4$$

$$m_{63} = \int_0^l \phi_6(x)\phi_3(x)\rho dx + m_c \underbrace{\phi_6(l)\phi_3(l)}_0 = m_{36} = \frac{1}{11088}\rho l^5$$

$$m_{64} = \int_0^l \phi_6(x)\phi_4(x)\rho dx + m_c \underbrace{\phi_6(l)\phi_4(l)}_0 = \frac{281}{55440}\rho l^3$$

$$m_{65} = \int_0^l \phi_6(x)\phi_5(x)\rho dx + m_c \underbrace{\phi_6(l)\phi_5(l)}_0 = m_{56} = -\frac{23}{18480}\rho l^4$$

$$m_{66} = \int_0^l [\phi_6(x)]^2 \rho dx + m_c \left[\underbrace{\phi_6(l)}_0 \right]^2 = \rho \int_0^l \left(\frac{x^3}{2l} - \frac{x^4}{l^2} + \frac{x^5}{2l^3} \right)^2 dx = \frac{1}{9240}\rho l^5$$

Os elementos da matriz $[k]$ são:

$$k_{ij} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_i}{dx^2} \frac{d^2\phi_j}{dx^2} dx, \quad i = 1, \dots, 6 \quad j = 1, \dots, 6.$$

As derivadas da função $\phi_i(x)$ são obtidas das equações (5.31) como segue:

$$\frac{d\phi_1}{dx} = -\frac{30x^2}{l^3} + \frac{60x^3}{l^4} - \frac{30x^4}{l^5} \Rightarrow \frac{d^2\phi_1}{dx^2} = -\frac{60x}{l^3} + \frac{180x^2}{l^4} - \frac{120x^3}{l^5};$$

$$\frac{d\phi_2}{dx} = 1 - \frac{18x^2}{l^2} + \frac{32x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} \Rightarrow \frac{d^2\phi_2}{dx^2} = -\frac{36x}{l^2} + \frac{96x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4};$$

$$\frac{d\phi_3}{dx} = x - \frac{9x^2}{2l} + \frac{12x^3}{2l^2} - \frac{5x^4}{2l^3} \Rightarrow \frac{d^2\phi_3}{dx^2} = 1 - \frac{9x}{l} + \frac{18x^2}{l^2} - \frac{10x^3}{l^3};$$

$$\frac{d\phi_4}{dx} = \frac{30x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} + \frac{30x^4}{l^5} \Rightarrow \frac{d^2\phi_4}{dx^2} = \frac{60x}{l^3} - \frac{180x^2}{l^4} + \frac{120x^3}{l^5};$$

$$\frac{d\phi_5}{dx} = -\frac{12x^2}{l^2} + \frac{28x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} \Rightarrow \frac{d^2\phi_5}{dx^2} = -\frac{24x}{l^2} + \frac{84x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4};$$

$$\frac{d\phi_6}{dx} = \frac{3x^2}{2l} - \frac{4x^3}{l^2} + \frac{5x^4}{2l^3} \Rightarrow \frac{d^2\phi_6}{dx^2} = \frac{3x}{l} - \frac{12x^2}{l^2} + \frac{10x^3}{l^3}.$$

o que implica em

$$k_{11} = \int_0^l EI \left(\frac{d^2\phi_1}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^l EI \left(-\frac{60x}{l^3} + \frac{180x^2}{l^4} - \frac{120x^3}{l^5} \right)^2 dx = \frac{120EI}{7l^3}$$

$$k_{12} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \frac{d^2\phi_2}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(-\frac{60x}{l^3} + \frac{180x^2}{l^4} - \frac{120x^3}{l^5} \right) \left(-\frac{36x}{l^2} + \frac{96x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right) dx = \frac{60EI}{7l^2}$$

$$k_{13} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \frac{d^2\phi_3}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(-\frac{60x}{l^3} + \frac{180x^2}{l^4} - \frac{120x^3}{l^5} \right) \left(1 - \frac{9x}{l} + \frac{18x^2}{l^2} - \frac{10x^3}{l^3} \right) dx = \frac{3EI}{7l}$$

$$k_{14} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \frac{d^2\phi_4}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(-\frac{60x}{l^3} + \frac{180x^2}{l^4} - \frac{120x^3}{l^5} \right) \left(\frac{60x}{l^3} - \frac{180x^2}{l^4} + \frac{120x^3}{l^5} \right) dx = -\frac{120EI}{7l^3}$$

$$k_{15} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \frac{d^2\phi_5}{dx^2} dx = \int_0^l \left(-\frac{60x}{l^3} + \frac{180x^2}{l^4} - \frac{120x^3}{l^5} \right) \left(-\frac{24x}{l^2} + \frac{84x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right) dx = \frac{60EI}{7l^2}$$

$$k_{16} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \frac{d^2\phi_6}{dx^2} dx = \int_0^l \left(-\frac{60x}{l^3} + \frac{180x^2}{l^4} - \frac{120x^3}{l^5} \right) \left(\frac{3x}{l} - \frac{12x^2}{l^2} + \frac{10x^3}{l^3} \right) dx = -\frac{3EI}{7l}$$

$$k_{21} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx = k_{12} = \frac{60EI}{7l^2}$$

$$k_{22} = \int_0^l EI \left(\frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^l EI \left(-\frac{36x}{l^2} + \frac{96x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right)^2 dx = \frac{576EI}{105l}$$

$$k_{23} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(-\frac{36x}{l^2} + \frac{96x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right) \left(1 - \frac{9x}{l} + \frac{18x^2}{l^2} - \frac{10x^3}{l^3} \right) dx = \frac{11EI}{35}$$

$$k_{24} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(-\frac{36x}{l^2} + \frac{96x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right) \left(\frac{60x}{l^3} - \frac{180x^2}{l^4} + \frac{120x^3}{l^5} \right) dx = -\frac{60EI}{7l^2}$$

$$k_{25} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_5}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(-\frac{36x}{l^2} + \frac{96x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right) \left(-\frac{24x}{l^2} + \frac{84x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right) dx = \frac{108EI}{35l}$$

$$k_{26} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_6}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(-\frac{36x}{l^2} + \frac{96x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right) \left(\frac{3x}{l} - \frac{12x^2}{l^2} + \frac{10x^3}{l^3} \right) dx = -\frac{4EI}{35}$$

$$k_{31} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx = k_{13} = \frac{3EI}{7l}$$

$$k_{32} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} dx = k_{23} = \frac{11EI}{35}$$

$$k_{33} = \int_0^l EI \left(\frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^l EI \left(1 - \frac{9x}{l} + \frac{18x^2}{l^2} - \frac{10x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{3EI}{35}$$

$$k_{34} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(1 - \frac{9x}{l} + \frac{18x^2}{l^2} - \frac{10x^3}{l^3} \right) \left(\frac{60x}{l^3} - \frac{180x^2}{l^4} + \frac{120x^3}{l^5} \right) dx = -\frac{3EI}{7l}$$

$$k_{35} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_5}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(1 - \frac{9x}{l} + \frac{18x^2}{l^2} - \frac{10x^3}{l^3} \right) \left(-\frac{24x}{l^2} + \frac{84x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right) dx = \frac{4EI}{35}$$

$$k_{36} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_3}{dx^2} \frac{d^2\phi_6}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(1 - \frac{9x}{l} + \frac{18x^2}{l^2} - \frac{10x^3}{l^3} \right) \left(\frac{3x}{l} - \frac{12x^2}{l^2} + \frac{10x^3}{l^3} \right) dx = \frac{EI}{70}$$

$$k_{41} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_4}{dx^2} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} dx = k_{14} = -\frac{120EI}{7l^3}$$

$$k_{42} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_4}{dx^2} \frac{d^2\phi_2}{dx^2} dx = k_{24} = -\frac{60EI}{7l^2}$$

$$k_{43} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_4}{dx^2} \frac{d^2\phi_3}{dx^2} dx = k_{34} = -\frac{3EI}{7l}$$

$$k_{44} = \int_0^l EI \left(\frac{d^2\phi_4}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^l EI \left(\frac{60x}{l^3} - \frac{180x^2}{l^4} + \frac{120x^3}{l^5} \right)^2 dx = \frac{120EI}{7l^3}$$

$$k_{45} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_4}{dx^2} \frac{d^2\phi_5}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(\frac{60x}{l^3} - \frac{180x^2}{l^4} + \frac{120x^3}{l^5} \right) \left(-\frac{24x}{l^2} + \frac{84x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right) dx = -\frac{60EI}{7l^2}$$

$$k_{46} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_4}{dx^2} \frac{d^2\phi_6}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(\frac{60x}{l^3} - \frac{180x^2}{l^4} + \frac{120x^3}{l^5} \right) \left(\frac{3x}{l} - \frac{12x^2}{l^2} + \frac{10x^3}{l^3} \right) dx = \frac{3EI}{7l}$$

$$k_{51} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_5}{dx^2} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} dx = k_{15} = \frac{60EI}{7l^2}$$

$$k_{52} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_5}{dx^2} \frac{d^2\phi_2}{dx^2} dx = k_{25} = \frac{108EI}{35l}$$

$$k_{53} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_5}{dx^2} \frac{d^2\phi_3}{dx^2} dx = k_{35} = \frac{4EI}{35}$$

$$k_{54} = \int_0^l EI \frac{d^2\phi_5}{dx^2} \frac{d^2\phi_4}{dx^2} dx = k_{45} = -\frac{60EI}{7l^2}$$

$$k_{55} = \int_0^l EI \left(\frac{d^2 \phi_5}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^l EI \left(-\frac{24x}{l^2} + \frac{84x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right)^2 dx = \frac{192EI}{35l}$$

$$k_{56} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_5}{dx^2} \frac{d^2 \phi_6}{dx^2} dx = \int_0^l EI \left(-\frac{24x}{l^2} + \frac{84x^2}{l^3} - \frac{60x^3}{l^4} \right) \left(\frac{3x}{l} - \frac{12x^2}{l^2} + \frac{10x^3}{l^3} \right) dx = -\frac{11EI}{35}$$

$$k_{61} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_6}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx = k_{16} = -\frac{3EI}{7l}$$

$$k_{62} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_6}{dx^2} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} dx = k_{26} = -\frac{4EI}{35}$$

$$k_{63} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_6}{dx^2} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} dx = k_{36} = \frac{EI}{70}$$

$$k_{64} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_6}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx = k_{46} = \frac{3EI}{7l}$$

$$k_{65} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_6}{dx^2} \frac{d^2 \phi_5}{dx^2} dx = k_{56} = -\frac{11EI}{35}$$

$$k_{66} = \int_0^l EI \left(\frac{d^2 \phi_6}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^l EI \left(\frac{3x}{l} - \frac{12x^2}{l^2} + \frac{10x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{3EI}{35}$$

Portanto o Lagrangeano do sistema é dado por:

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [m] [\dot{q}] - \frac{1}{2} [q]^T [k] [q]. \quad (5.35)$$

Assim, o sistema de equações diferenciais ordinárias pode ser obtido pela equação

$$[m] [\ddot{q}] + [k] [q] = [S], \quad (5.16)$$

a partir de um único elemento finito, com deformação aproximada por um polinômio do quinto grau.

5.4 APLICAÇÃO AO CASO DE UM MANIPULADOR COM UM ELO FLEXÍVEL

O desenvolvimento precedente se aplica a um elemento da lâmina. Para o caso de um manipulador flexível, conforme mostra a Figura 5.3, falta modificar a introdução do modo rígido com uma alteração nas condições de contorno. Observando-se a Figura 5.3, verifica-se que a estrutura é articulada-livre, com uma massa concentrada na extremidade (massa da carga dada por m_c).

O momento de inércia rotacional é negligenciado, logo é fácil ver que:

$$w(0,t) = q_1 = 0; \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=l} = q_6 = 0 \quad (5.36)$$

Com estas condições nulas, os parâmetros cinemáticos que intervêm no sistema de equações diferenciais (5.16) são $q_2(t)$, $q_3(t)$, $q_4(t)$ e $q_5(t)$. Este sistema é escrito na seguinte forma:

$$[M] \ddot{\bar{q}} + [K] \bar{q} = \bar{T}_m, \quad (5.37)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix},$$

$$\bar{q} = [q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5]^T,$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{T}_m = [T_m \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

A fim de transformar o sistema de equações diferenciais de segunda ordem (5.37) num sistema de primeira ordem é feita a seguinte troca de variáveis:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix},$$

e, assim, o sistema (5.37) pode ser escrito na seguinte forma de estado:

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + BT_m, \quad (5.38)$$

onde

$$\bar{X} = [q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} [0]_{4 \times 4} & [1]_{4 \times 4} \\ -[M]^{-1}[K] & [0]_{4 \times 4} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [M]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Utilizando-se $\tilde{q}_4(t)$ e $\tilde{q}_5(t)$ (Figura 5.3) no lugar de $q_4(t)$ e $q_5(t)$, respectivamente, e considerando-se o fato que

$$\theta(t) = \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = q_2(t), \quad (5.39)$$

então o sistema de equações diferenciais (5.16) resulta em

$$\tilde{M}\ddot{\tilde{X}} + \tilde{K}\tilde{X} = \tilde{S}, \quad (5.40)$$

onde

$$\begin{aligned} X &= P\tilde{X}, \\ \tilde{M} &= P^T M P, \\ \tilde{K} &= P^T K P, \\ \tilde{S} &= P^T S P, \\ X &= [q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5], \\ \tilde{X} &= [\theta \quad q_3 \quad \tilde{q}_4 \quad \tilde{q}_5] \end{aligned} \quad (5.41)$$

e P é uma matriz de transformação de base.

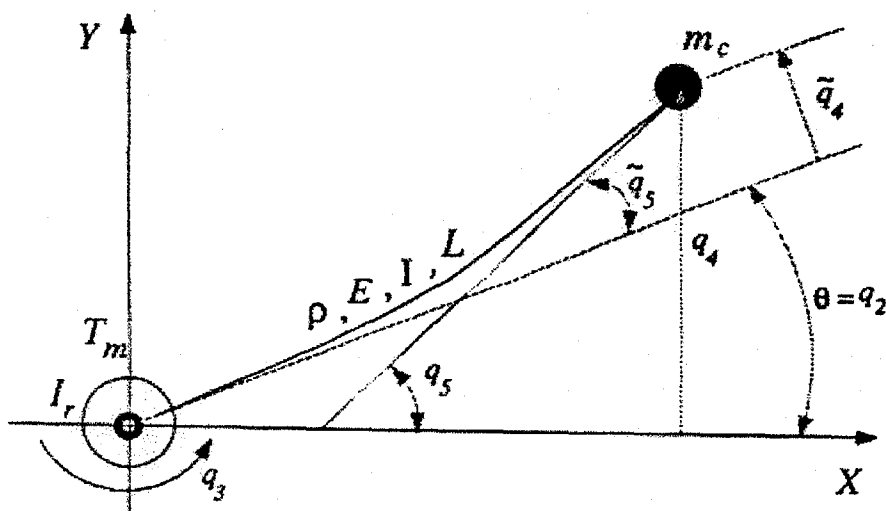


Figura 5.3 Manipulador flexível.

5.5 GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA ABERTA

De acordo com a equação (3.19) (Capítulo III) as funções de transferência, nos casos colocado e não colocado, são descritas pelas equações:

$$F_c(s) = C_c(sI - A)^{-1}B$$

e

$$F_{nc}(s) = C_{nc}(sI - A)^{-1}B,$$

onde I é a matriz identidade, sendo que os autovalores da matriz A , ou seja, os pólos da função de transferência, possuem os seguintes valores (utilizando os mesmos parâmetros estruturais definidos no Capítulo II):

$$\begin{aligned}
 &0.00 + 157.18i \\
 &0.00 - 157.18i \\
 &0.00 + 67.83i \\
 &0.00 - 67.83i \\
 &0.00 + 25.18i \\
 &0.00 - 25.18i \\
 &0.0000 \\
 &0.0000
 \end{aligned}$$

A Figura 5.4 mostra os três primeiros modos de vibração no gráfico da função de transferência do Método das Deformações Polinomiais no caso colocado, onde se verifica a presença dos três primeiros pares de pólos e zeros. Já na Figura 5.5 se observa o resultado da função de transferência no caso não colocado, onde se verifica a presença dos três pólos e a ausência dos zeros, visto que este é o caso de fase não mínima.

Na Figura 5.6 mostra-se os três primeiros modos de vibração no gráfico da função de transferência do Método das Deformações Polinomiais. Verifica-se ainda que os zeros no Método das Deformações Polinomiais são muito próximos dos três primeiros zeros encontrados na função de transferência Analítica. Percebe-se também que os dois primeiros pólos observados na Deformação Polinomial encontram-se deslocados para a direita em relação aos dois primeiros pólos analíticos e que o terceiro pólo verificado na Deformação Polinomial coincide aproximadamente com o terceiro pólo analítico. A Figura 5.7 mostra o caso não colocado para as funções de transferência analítica e do Método das Deformações Polinomiais, onde novamente percebe-se o deslocamento dos dois primeiros pólos e a coincidência do terceiro.

A análise da sobreposição dos gráficos presente na Figura 5.8 permite a conclusão de que não há praticamente diferenças entre os casos analítico e das deformações polinomiais para os três primeiros zeros das funções de transferência. Entretanto, percebe-se nitidamente a diferença entre os dois primeiros pólos, visto que no caso das deformações polinomiais, os mesmos encontram-se deslocados para a direita em relação aos dois primeiros pólos do caso analítico, mas o terceiro pólo no caso das deformações polinomiais já está bem próximo do terceiro pólo do caso analítico.

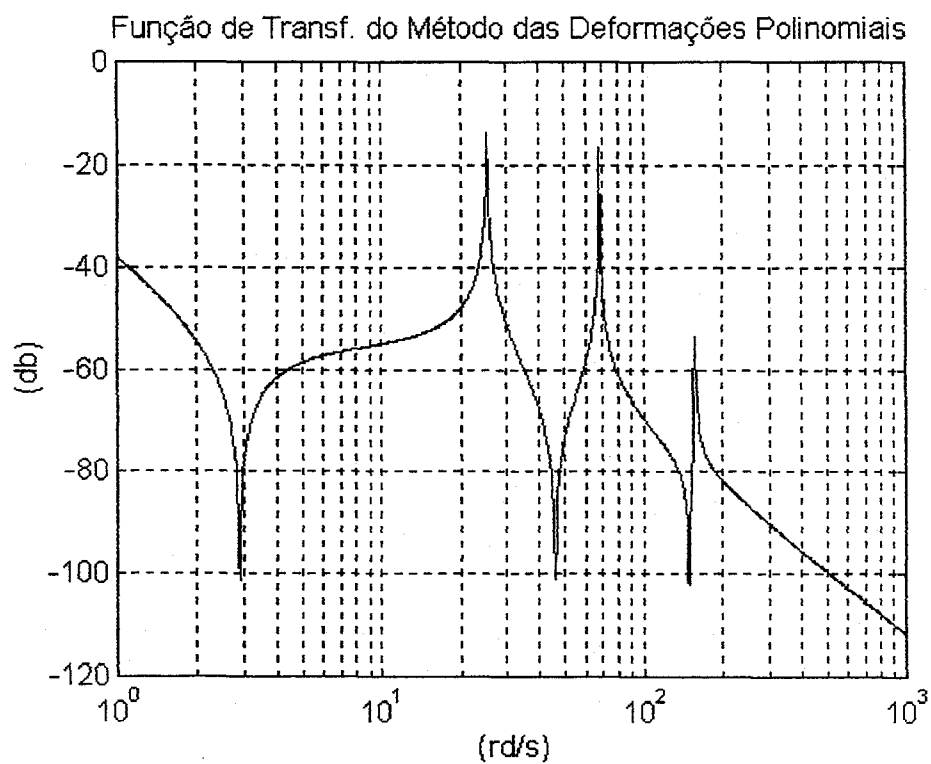


Figura 5.4 Função de Transferência do Método das Deformações Polinomiais (Caso colocado).

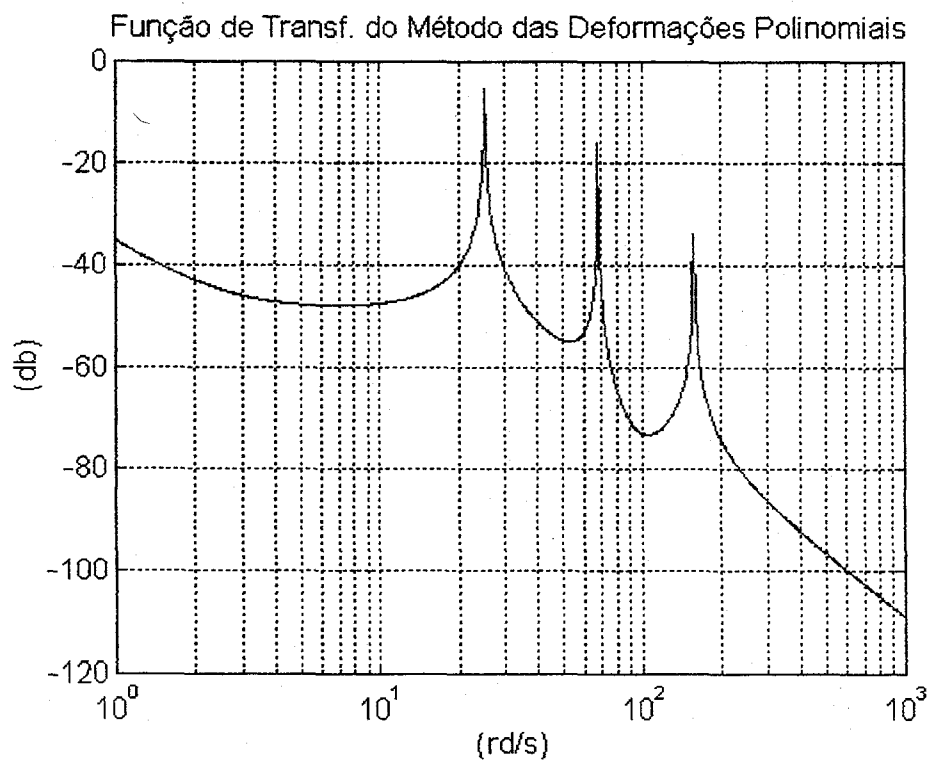


Figura 5.5 Função de Transferência do Método das Deformações Polinomiais (Caso não colocado).

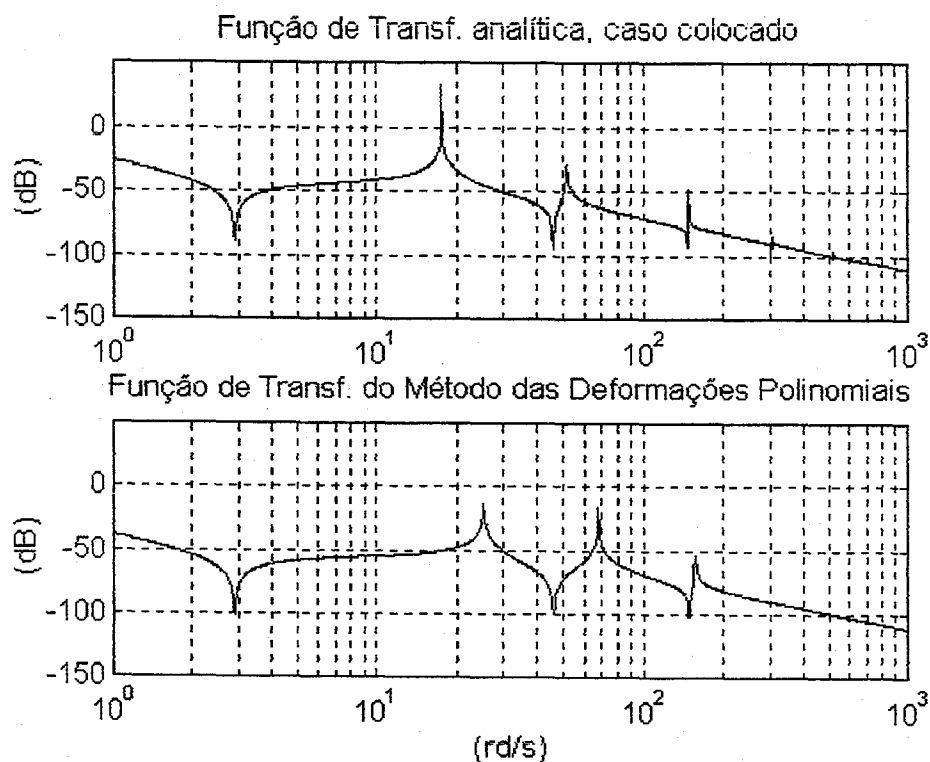


Figura 5.6 Funções de Transferência Analítica e do Método das Deformações Polinomiais (caso colocado).

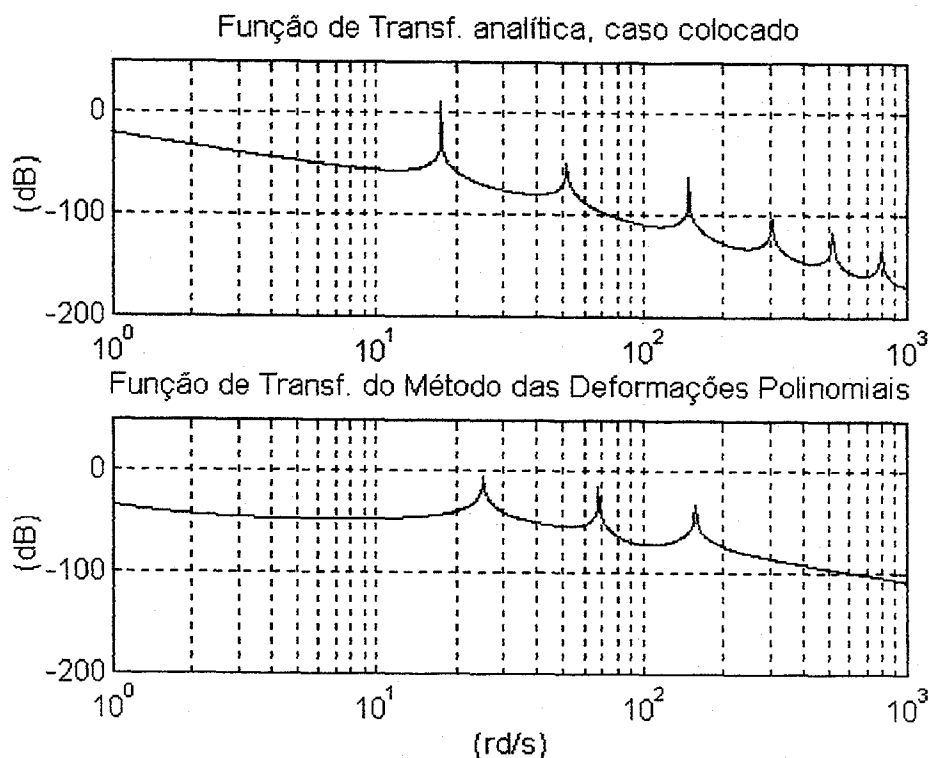


Figura 5.7 Funções de Transferência Analítica e do Método das Deformações Polinomiais (caso não colocado)

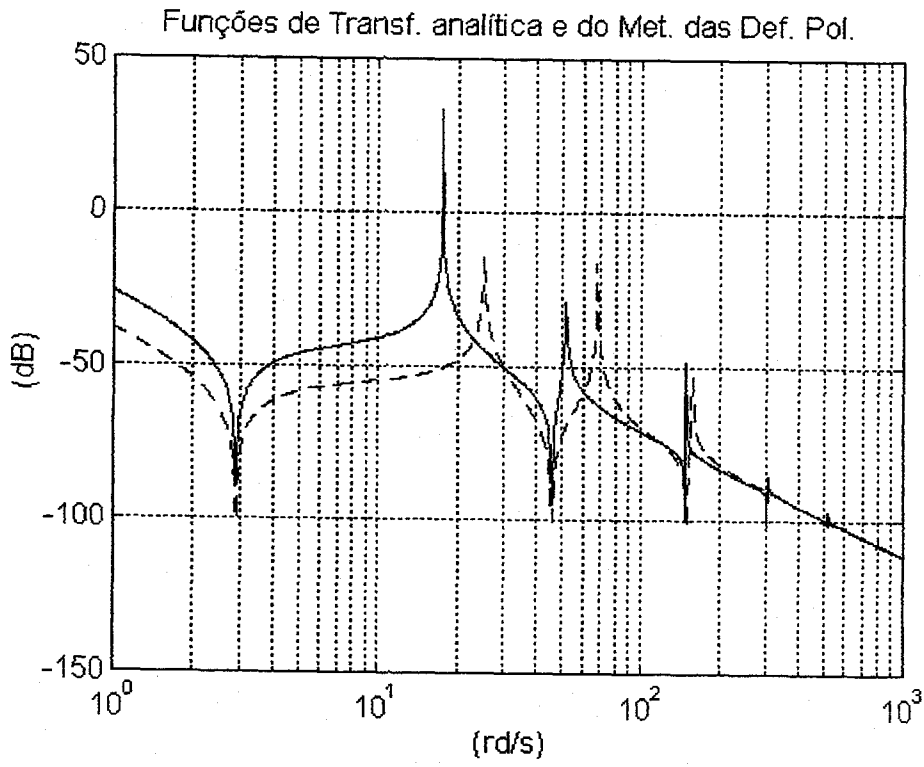


Figura 5.8 Funções de Transferência Analítica e do Método das Deformações Polinômiais (caso colocado).

CAPÍTULO VI
APLICAÇÃO A MANIPULADORES
COM ELOS FLEXÍVEIS

6.1 INTRODUÇÃO

Conforme já mencionado no Capítulo I, existem diversas aplicações envolvendo estruturas flexíveis. Dentre estas destacam-se os robôs manipuladores flexíveis. Tratam-se, na realidade, de robôs com elos flexíveis [Gomes e Chrétien, 1992b]. No presente capítulo é feito um estudo associando a teoria desenvolvida em capítulos anteriores com a aplicação no caso de um robô-manipulador com um único elo flexível. Nesta aplicação, a principal característica a ser enfatizada é a influência da dinâmica do atuador sobre a dinâmica estrutural. O atuador escolhido é do tipo motor elétrico com redutor de velocidades. No final do capítulo são extraídas conclusões gerais sobre a dinâmica e o controle de manipuladores flexíveis.

6.2 INFLUÊNCIA DA INÉRCIA DO ROTOR

O estudo apresentado neste capítulo tem como base a utilização do formalismo discreto para a obtenção das equações diferenciais da dinâmica do manipulador. Porém, as conclusões seriam as mesmas para qualquer que fosse a técnica de modelagem adotada. Apesar de intuitivamente esperada, esta afirmação foi comprovada a partir de resultados obtidos com outras técnicas de modelagem e aqui omitidos por razões de espaço.

Um primeiro resultado diz respeito à inércia do rotor. Em outras palavras, deseja-se saber o que acontece com os modos de vibração da estrutura quando se modifica a inércia do rotor. A figura seguinte mostra um desenho do manipulador, a partir do qual pode-se perceber que a estrutura está acoplada ao rotor, numa extremidade, e livre na outra, na qual se situa a carga terminal. Portanto, é de se esperar certamente que a inércia do rotor exerça uma importante influência sobre os modos de vibração da estrutura.

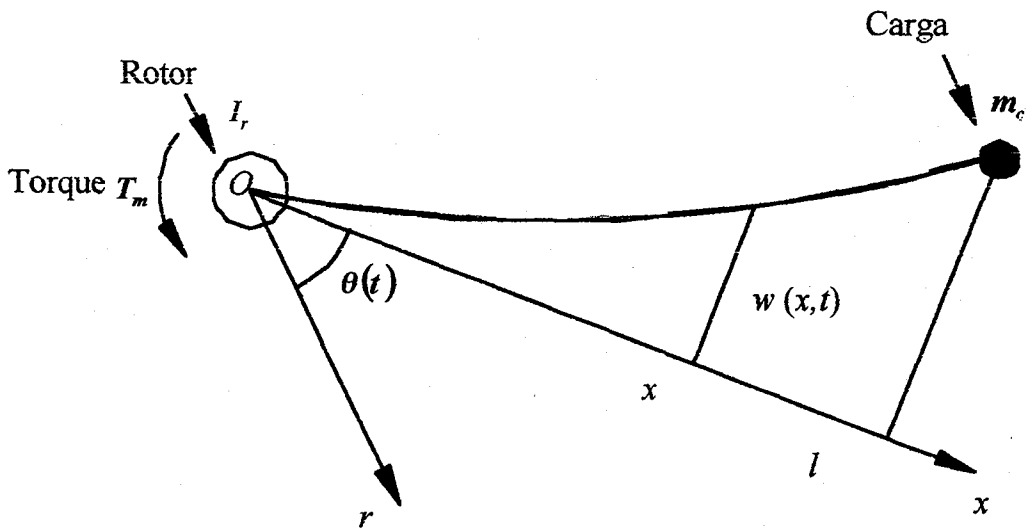


Figura 6.1 Desenho esquemático do manipulador flexível.

A equação diferencial da dinâmica do manipulador é escrita na seguinte forma de estado:

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (6.1)$$

onde a matriz A , conforme demonstrado no Capítulo III, é função da matriz de inércia do sistema, a qual por sua vez depende evidentemente da inércia do rotor (ver a equação 3.58). Fisicamente, à medida em que se aumenta a inércia do rotor, a estrutura vai deixando de ser articulada numa extremidade e livre na outra, passando a ser fixa numa extremidade e livre na outra.

A figura seguinte mostra a variação dos pólos do sistema em malha aberta, equivalentes aos autovalores da matriz A , quando a inércia do rotor varia do valor nominal até um valor muito grande (dez mil vezes maior). As posições dos pólos identificadas com "X" correspondem ao valor nominal da inércia do rotor (pólos de malha aberta do sistema nominal), enquanto que as posições dos zeros de malha aberta (sistema colocado) estão identificadas com "0". Para cada novo valor da inércia do rotor marcou-se a posição dos pólos equivalentes utilizando-se pontos, obtendo-se trajetórias no plano complexo.

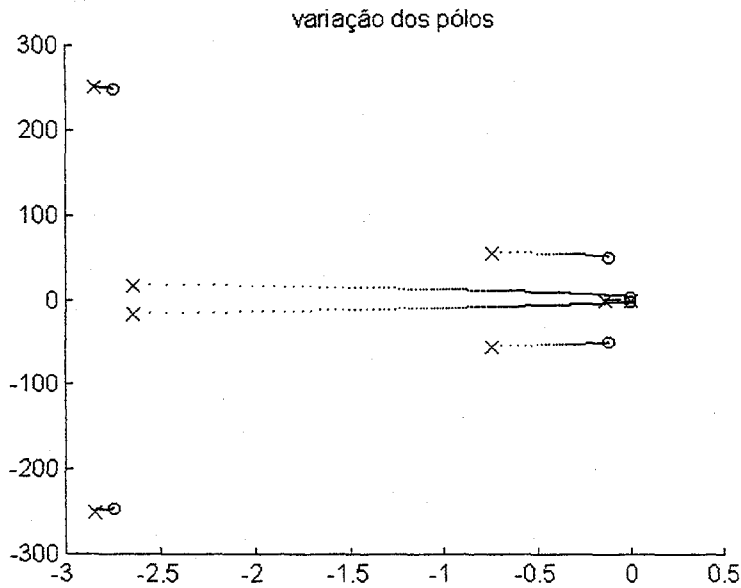


Figura 6.2 Variações dos pólos em malha aberta devidas ao acréscimo da inércia do rotor.

É perceptível que, à medida em que se aumenta a inércia do rotor, os pólos se aproximam dos zeros do sistema colocado. Devido a problemas de escala que dificultam a visualização do caminho percorrido pelos pólos, promoveu-se três ampliações de regiões da Figura 6.2, ampliações estas presentes nas Figuras 6.3, 6.4 e 6.5. Na ampliação 1 (Figura 6.3) pode-se verificar que os pólos reais (modo rígido) ficam praticamente imóveis, enquanto que os pólos relativos ao primeiro modo de vibração, cuja frequência é de aproximadamente 16 rd/s , migram ao encontro dos zeros de mais baixa frequência, em torno de 2.8 rd/s . A segunda ampliação (Figura 6.4) põe em evidência os pólos intermediários, relativos ao segundo modo de vibração, com frequência aproximada de 56 rd/s , os quais migram para os zeros de frequência 51 rd/s . A última ampliação enfatiza os pólos de mais alta frequência (aproximadamente 250 rd/s), correspondentes ao terceiro modo de vibração (Figura 6.5), pólos estes que migram para os zeros também de mais alta frequência (aproximadamente 248 rd/s).

Fisicamente, é intuitivo que o aumento da inércia do rotor corresponde à mudança no tipo de acoplamento da estrutura com a base que é fixa à Terra. De articulada em uma extremidade e livre na outra, a estrutura passa a ser fixa em uma extremidade e livre na outra; isto quando a

inércia do rotor tende a um valor muito grande. Em outras palavras, a estrutura passa a vibrar com as frequências dos zeros do sistema nominal, frequências estas que correspondem aos modos de vibração como se a estrutura fosse engastada (fixa) em uma extremidade e livre na outra.

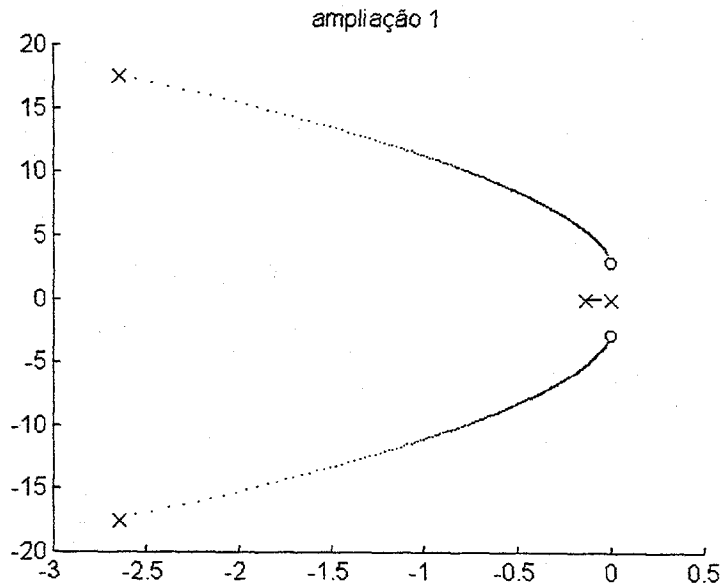


Figura 6.3 Ampliação enfatizando os deslocamentos dos pólos de mais baixa frequência.

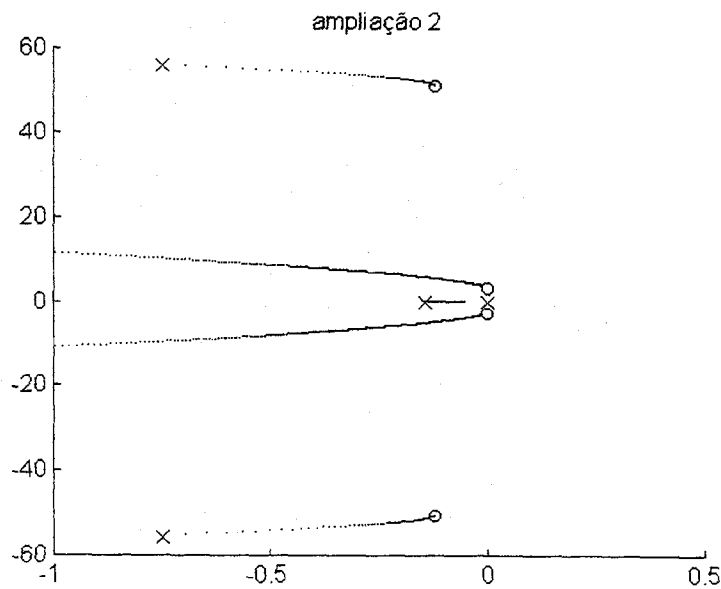


Figura 6.4 Ampliação enfatizando os deslocamentos dos pólos de frequência intermediária.

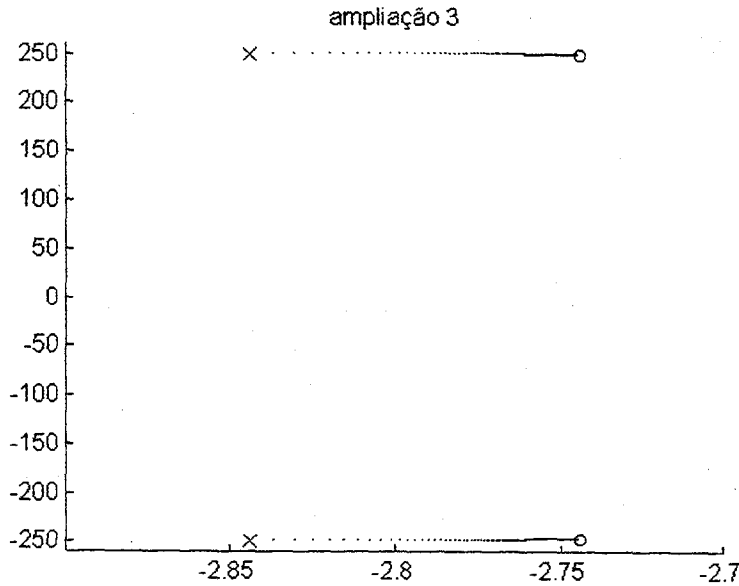


Figura 6.5 Ampliação enfatizando os deslocamentos dos pólos de alta frequência.

6.3 INFLUÊNCIA DO ATRITO LINEAR DO ATUADOR

De uma forma geral, o modelo de atrito mais utilizado é o linear, cujo torque é proporcional à velocidade do rotor $\dot{\theta}_1$:

$$T_{at} = -c_r \dot{\theta}_1. \quad (6.2)$$

Mais realista, entretanto, é o modelo que considera também a sempre presente componente não linear no torque de atrito, cujo modelo mais difundido é o de Coulomb [Armstrong, 1998], o qual corresponde a uma constante (a_s , atrito seco) se opondo ao sinal da velocidade:

$$T_{atl} = -c_r \dot{\theta}_1 - a_s \text{sign}(\dot{\theta}_1) \quad (6.3)$$

A figura seguinte contém a representação gráfica do torque de atrito da equação (6.3), a qual combina os modelos linear e não linear. Analisa-se, portanto, nesta seção o efeito do acréscimo do atrito linear sobre os modos de vibração da estrutura (acréscimo do coeficiente c_r).

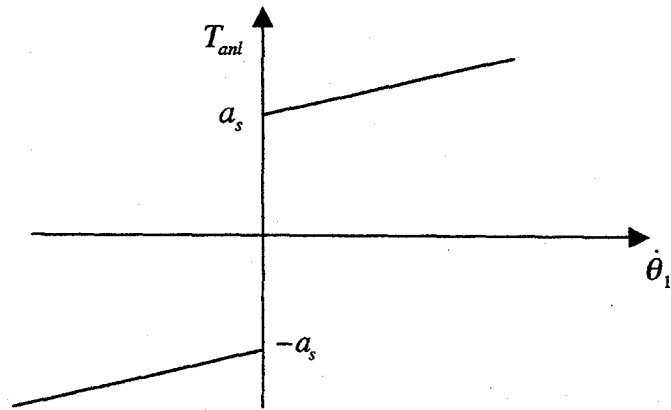


Figura 6.6 Modelo combinando os atritos viscoso e seco.

As quatro figuras seguintes (6.7 a 6.10), apesar de diferentes das quatro anteriores, conduzem a uma conclusão semelhante à extraída destas últimas. Trata-se da averiguação do que acontece com a dinâmica estrutural quando o torque de atrito linear (atrito viscoso) existente no rotor (atuador) cresce a partir do valor nominal. Como no caso anterior, os pólos e zeros do sistema nominal estão marcados com "X" e "0", respectivamente (Figura 6.7). Pode-se perceber que, a partir de caminhos diferentes dos realizados quando da variação da inércia do rotor, os pólos tendem aos zeros colocados do sistema nominal. A diferença mais significativa, a qual pode ser melhor observada na Figura 6.7, é que um dos pólos tende a menos infinito (modo rígido extremamente amortecido). Em síntese, o acréscimo do atrito no atuador, assim como o acréscimo da inércia do rotor, são fenômenos que fazem com que a estrutura vibre como se fora uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra. Uma importante conclusão a extrair desses resultados é sobre a interpretação física dos zeros de malha aberta do sistema colocado, cujas partes imaginárias representam as frequências de vibração dos chamados modos engastados (*cantilevers modes*, [Schmitz, 1985]), ao contrário dos pólos de malha aberta, cujas as partes imaginárias são as frequências dos modos livres da estrutura.

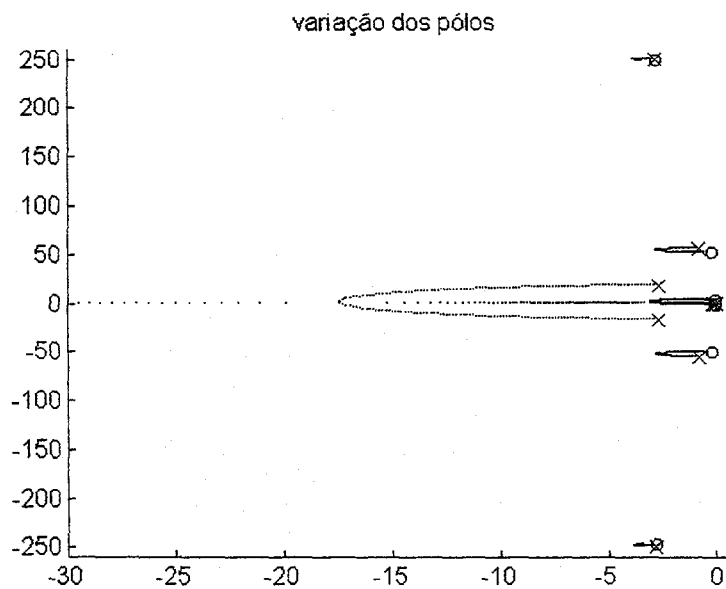


Figura 6.7 Variação dos pólos devida ao acréscimo do torque de atrito no atuador.

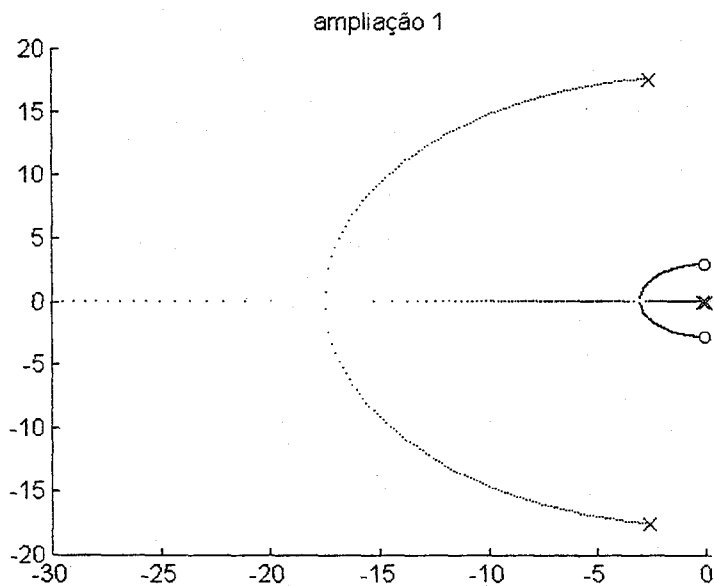


Figura 6.8 Ampliação enfatizando as trajetórias dos pólos de baixa frequência.

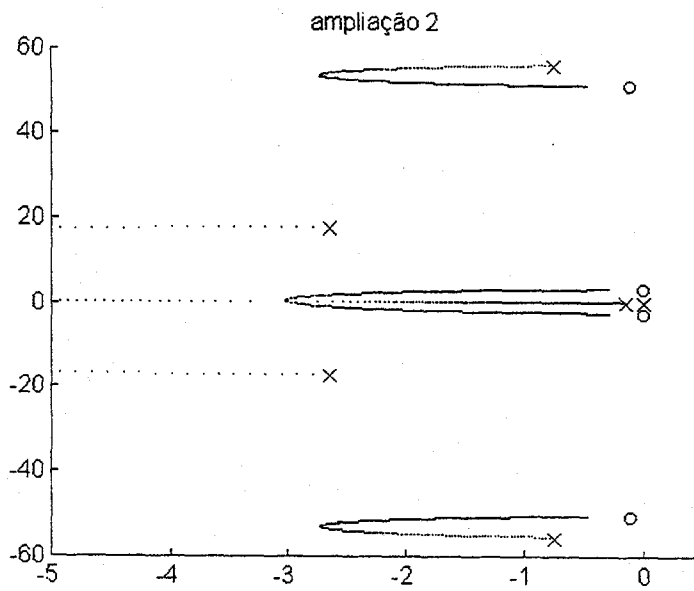


Figura 6.9 Ampliação enfatizando as trajetórias dos pólos de frequência intermediária.

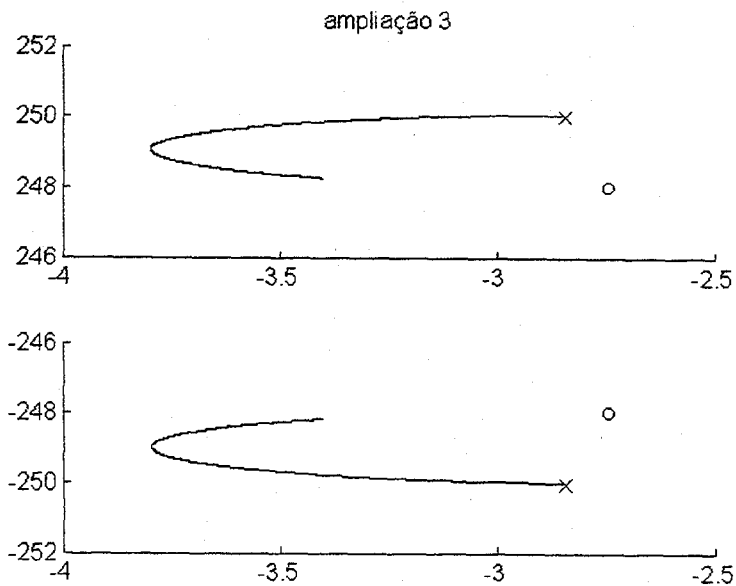


Figura 6.10 Ampliação enfatizando as trajetórias dos pólos de alta frequência.

6.4 INFLUÊNCIA DO ATRITO NÃO LINEAR DO ATUADOR

Antes da apresentação dos resultados referentes à influência do atrito não linear existente no atuador, torna-se necessária a introdução do modelo dinâmico do atuador, o qual será incorporado ao modelo estrutural já desenvolvido. Atuadores do tipo moto redutores são os mais utilizados em robótica de uma forma geral. Portanto, há o rotor do motor elétrico e acoplado a este há o redutor de velocidades. O eixo de saída do redutor é acoplado à estrutura, transmitindo a esta o torque necessário ao controle de suas vibrações. Do ponto de vista dinâmico, os atuadores são considerados elementos transmissores de movimento com uma certa elasticidade interna, devida principalmente à deformação elástica existente no interior do redutor de velocidades ([Spong, 1987], [Armstrong, 1988], [Gomes e Chrétien, 1992a], [Nicosia e Tomei, 1992], [Ghorbel e Spong, 1992], [Baillieul, 1992], [Léchevin e Sicard, 1997], [Moghaddam e Goldenberg, 1997], [Dixon et al., 1998], [De Luca et al., 1998]). Pode-se demonstrar, por formalismo Lagrangeano ou Newtoniano, que a dinâmica do rotor possui a seguinte forma [Gomes e Chrétien, 1992a]:

$$I_r \ddot{\theta}_r + c_r \dot{\theta}_r + \frac{K_e}{n^2} (\theta_r - n\theta_1) = T_m - a_s \text{sign}(\dot{\theta}_r) \quad (6.4)$$

onde I_r , n , e K_e são a inércia do rotor, o índice de redução e a constante elástica do atuador, respectivamente, sendo θ_r e θ_1 os ângulos do rotor e saída do redutor, respectivamente. A equação (6.4) é anexada ao modelo dinâmico estrutural (equação 3.58, Capítulo III). O modelo dinâmico global, incluindo atuador e estrutura, passa a ter quatro modos flexíveis, conforme pode ser visto na Figura 6.11, a qual contém o diagrama de Bode para o caso colocado.

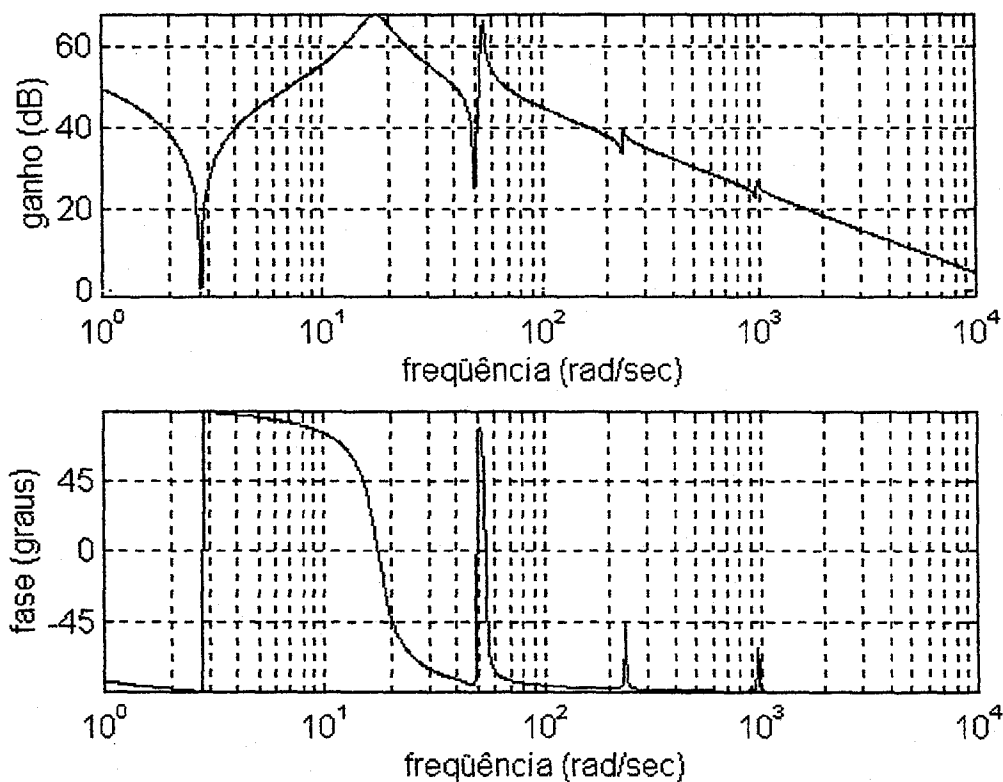


Figura 6.11 Diagrama de Bode do caso colocado (torque motor / posição angular do rotor).

Devido à existência de efeitos dinâmicos nos atuadores tais como elasticidade interna e atritos, o torque aplicado no rotor nunca é transmitido integralmente à estrutura. O torque que é efetivamente transmitido à estrutura é o torque na saída do redutor, o qual pode ser obtido a partir da seguinte equação [Gomes, 1992a]:

$$T_s = K_e \left(\theta_1 - \frac{\theta_r}{n} \right) \quad (6.5)$$

Realizou-se, então, uma simulação com o modelo dinâmico com quatro modos flexíveis, um deles sendo devido à elasticidade interna ao atuador, conforme explicado anteriormente. Considerou-se a dinâmica do atuador como sendo linear, ou seja, sem o atrito seco. Aplicou-se um torque motor igual a 20 Nm nos primeiros 0.05 s, -20 Nm nos seguintes 0.05 s e zero no restante do

tempo. Estes torques em malha aberta ativam os modos de vibração da estrutura. Os resultados da simulação podem ser vistos na Figura 6.12. Os valores numéricos da inércia do rotor, constante elástica do redutor e coeficientes de atrito foram obtidos de um atuador real do tipo *harmonic-drive* (as terminações (*sai*) e (*ent*) significam valores expressos na entrada ou na saída do redutor):

$$I_r = 5.8710^{-5} \text{ Kg}m^2 (\text{ent}), K_e = 3400 \text{ Nm} / \text{rd}(\text{sai});$$

$$c_r = 0.0004 \text{ Nms} / \text{rd}(\text{ent}) \text{ e } a_s = 0.056 \text{ Nm}(\text{ent}).$$

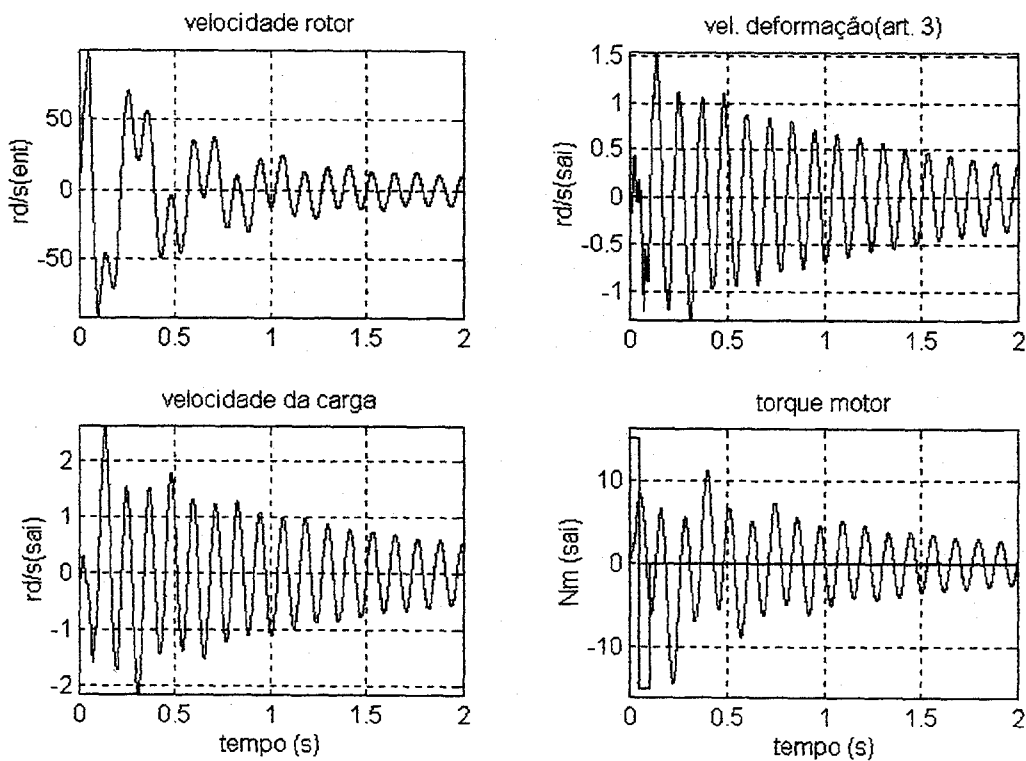


Figura 6.12 Simulação com a dinâmica global (atuador mais estrutura) do manipulador.

Percebe-se, da análise da figura 6.12, que o modo de vibração mais visível e, portanto, aquele que transporta mais energia, é o de baixa frequência (aproximadamente 16 rd/s). A questão fundamental colocada neste momento é a seguinte: qual deveria ser o nível de amplitude do torque aplicado efetivamente na estrutura ou qual poderia atenuar as vibrações decorrentes da ativação em malha aberta? A Figura 6.13 tenta responder a esta questão. Trata-se do torque na saída do redutor,

dado pela equação 6.5. Como o torque motor é nulo, o torque na saída do redutor é devido exclusivamente às vibrações da estrutura, repercutidas no eixo de saída do redutor. Portanto, o torque motor de controle necessário à atenuação das vibrações deve ter amplitudes compatíveis com as do torque de saída. A Figura 6.13 contém os gráficos dos torques motor, de saída, além conter retas tracejadas indicadoras dos níveis positivo e negativo do atrito seco (parte não linear do atrito). Observa-se que, na maior parte dos dois segundos de simulação, o torque de saída ficou, em valores absolutos, abaixo dos níveis de atrito seco. A principal conclusão a extrair desse resultado é que, caso se implementasse na prática uma lei de controle para atenuar as vibrações, a mesma teria dificuldade em atenuar as vibrações residuais da estrutura uma vez que, os torques aplicados no rotor, não passariam à estrutura por terem amplitudes menores do que os níveis de atrito seco. A estrutura ficaria vibrando como se fora uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra.

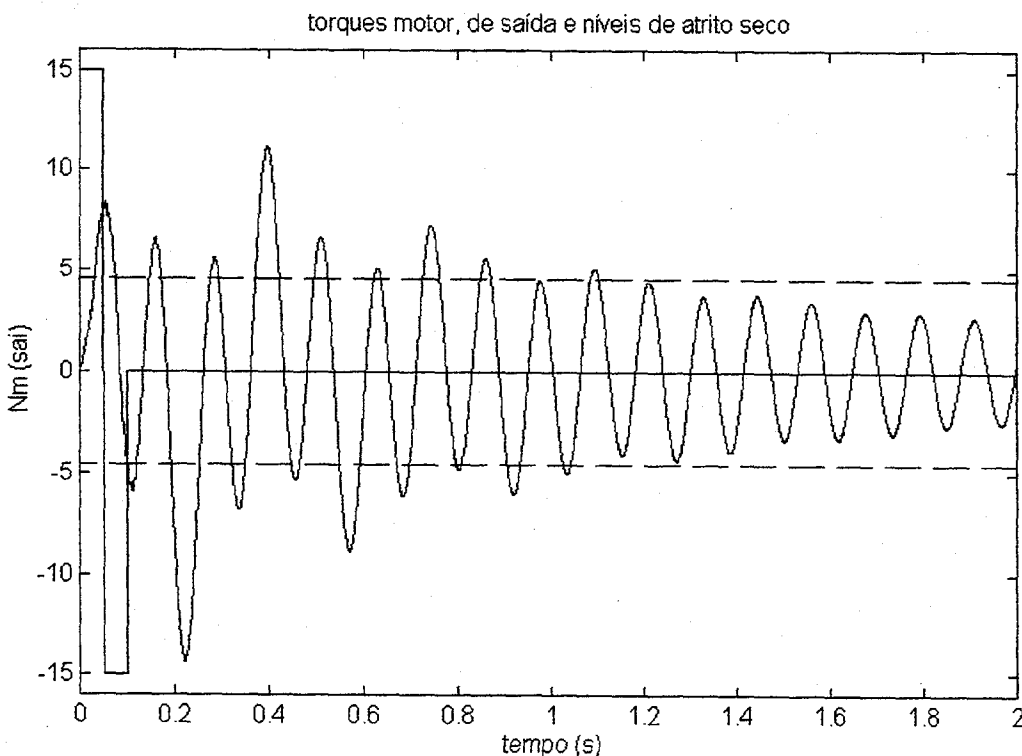


Figura 6.13 Torque motor, torque de saída do redutor e níveis de atrito seco (linhas tracejadas).

6.5 INFLUÊNCIA DA ELASTICIDADE INTERNA

Esta seção destina-se ao estudo da influência que a flexibilidade interna do atuador exerce sobre a dinâmica da estrutura flexível. Em outras palavras, tenta-se avaliar qual deve ser o comportamento dos pólos da dinâmica estrutural em presença da inclusão de mais um modo flexível (modo rotor).

A Figura 6.14 mostra resultados com os deslocamentos dos pólos, devidos à variações provocadas na constante elástica do atuador (K_e), com duas subseqüentes ampliações (Figuras 6.14, 6.16). Parte-se de uma situação rígida ($K_e = 360000 Nm / rd(sai)$), finalizando-se numa situação bastante flexível ($K_e = 200 Nm / rd(sai)$). Em todas as figuras os pólos iniciais (situação atuador rígido) estão marcados com um "X". Os pólos nominais do modelo com o símbolo "+" ($K_e = 3400 Nm / rd(sai)$) e os pólos na situação atuador muito flexível ($K_e = 200 Nm / rd(sai)$) com o símbolo "*".

Observando-se a Figura 6.14, identifica-se a existência de um modo de altíssima frequência (aproximadamente $10^4 rd/s$) tratando-se do modo rotor. Esta frequência diminui significativamente à medida em que a elasticidade interna também diminui. Os modos estruturais entretanto, estão ilegíveis nesta figura por razões de escala.

A Figura 6.15 mostra uma primeira ampliação, na qual encontram-se ressaltados os deslocamentos dos pólos relativos ao terceiro modo flexível estrutural, cuja frequência do modelo nominal é de aproximadamente $250 rd/s$. Observa-se uma variação muito menor do que a ocorrida com os pólos do modo rotor, porém mais significativa do que a ocorrida com os pólos dos modos estruturais de mais baixa frequência ainda.

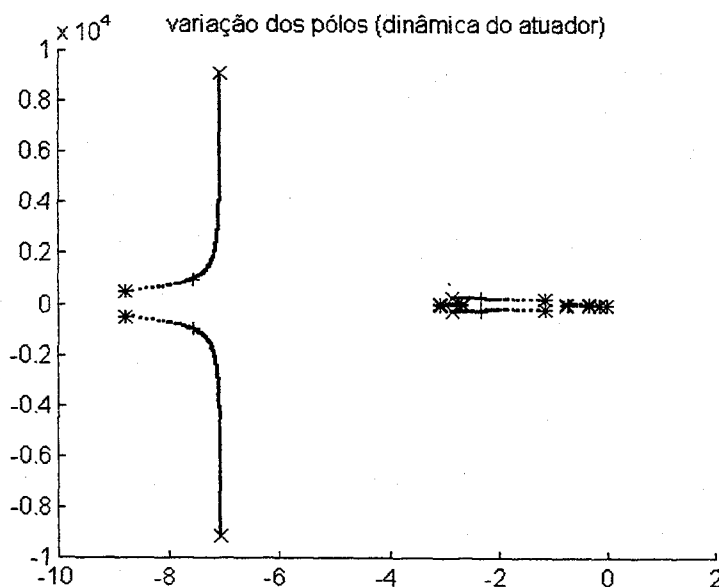


Figura 6.14 Trajetórias dos pólos devido às variações na constante elástica do atuador.

A figura 6.16 contém a segunda ampliação, enfatizando desta feita os deslocamentos dos pólos dos modos estruturais de frequência intermediária e de mais baixa frequência. Percebe-se que os deslocamentos são menores e que os pólos reais (modo estrutural rígido) não se deslocam.

Pode-se concluir finalmente, que variações na elasticidade interna ao atuador provocam variações nos modos de vibração da estrutura, ou seja, o modo rotor influencia os modos estruturais. Também conclui-se que, quanto maior a frequência do modo estrutural, mais este sofrerá influência do modo rotor, sendo que esta influência é sempre no sentido de diminuições na frequência do modo rotor induzindo diminuições nas frequências dos modos estruturais.

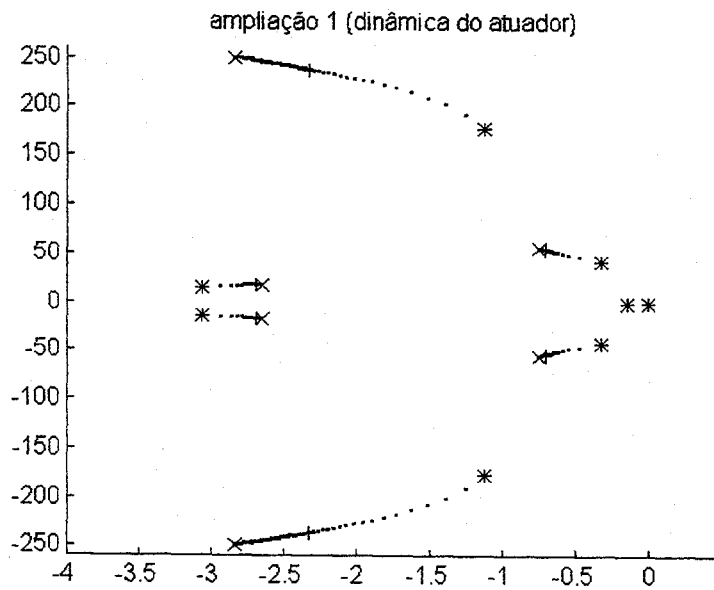


Figura 6.15 Primeira ampliação ressaltando as variações dos pólos dos modos estruturais.

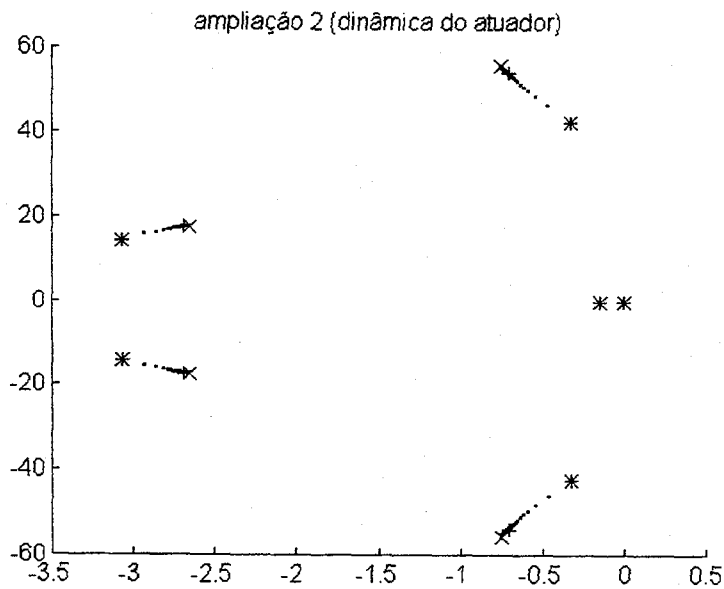


Figura 6.16 Segunda ampliação ressaltando as variações dos pólos dos modos estruturais de frequência intermediária e de mais baixa frequência.

CAPÍTULO VII
CONCLUSÕES

7. CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentam-se as conclusões gerais e ainda se indicam sugestões para trabalhos futuros como possíveis continuações da pesquisa realizada na presente dissertação. É importante enfatizar inicialmente, que todos os desenvolvimentos matemáticos contidos neste trabalho foram feitos manualmente, ou seja, sem o auxílio de *softwares* de manipulação simbólica. A razão para isto é que, para manipulações algébricas complexas, os *softwares* testados (MATLAB, MAPLE), não se mostraram muito eficientes com relação às simplificações para a devolução do resultado final. Após cada desenvolvimento matemático, foram realizados exaustivos testes de conferência antes de aceitá-lo como correto.

Conforme já comentado no capítulo de introdução, não se encontrou, entre os trabalhos consultados durante a revisão bibliográfica, trabalho semelhante a este, dando ênfase especificamente à modelagem dinâmica. A grande maioria dos artigos versam sobre o controle ativo de estruturas flexíveis e todos fizeram uso de um modelo dinâmico, desenvolvido por uma das técnicas analisadas nos capítulos anteriores. Mas, normalmente, estes artigos abordam aspectos do modelo de forma superficial, até porque o principal objetivo destes é o controle e não a modelagem. Neste sentido, a presente dissertação pretende ser uma contribuição para futuros usuários que necessitem desenvolver modelos dinâmicos em aplicações específicas, permitindo-lhes uma escolha consciente sobre qual técnica de modelagem utilizar.

Outra característica que vale a pena enfatizar na presente dissertação é que, sempre que possível, os desenvolvimentos matemáticos se deram de forma analítica, chegando-se a expressões finais fáceis de serem manipuladas e aproveitadas em trabalhos futuros. Este é o caso, por exemplo, das funções de forma no método dos modos assumidos, cujas expressões foram desenvolvidas de forma totalmente analítica, as quais dependem fundamentalmente das condições de contorno.

Diversas conclusões sobre as teorias desenvolvidas na presente dissertação já foram apresentadas à medida em que as respectivas teorias iam sendo desenvolvidas e apresentadas ao longo dos diversos capítulos. Apresentam-se, entretanto, resumos sobre as principais conclusões extraídas de todo o trabalho realizado, acrescidas de comentários que objetivam elucidar melhor a interpretação dos resultados.

Sobre o Estudo Analítico (Capítulo II)

Desenvolveu-se, no Capítulo II, as chamadas funções de transferência analíticas, para os casos colocado e não colocado. É importante ressaltar que:

- Existe uma hipótese simplificadora na origem do equacionamento, consistindo na consideração de que não há esforços de cisalhamento na estrutura quando esta se deforma. Apesar de aparentemente restritiva, esta hipótese é bastante razoável quando a estrutura é delgada, como é o caso da lâmina flexível considerada neste trabalho;
- Estas funções de transferência são exatas e com elas obtém-se as respostas freqüenciais as quais revelam os pólos (comum aos casos colocado e não colocado) e os zeros (específicos para cada caso);
- Obtê-las foi de fundamental importância uma vez que as mesmas servem de referência à validação dos modelos obtidos por diferentes técnicas. A partir das mesmas pode-se obter um número infinito de pólos e zeros analíticos, fato que permite testar modelos de qualquer ordem;

Sobre o Formalismo Discreto (*Lumped Mass Approach*, Capítulo III)

- Esta técnica consiste em aproximar a flexibilidade contínua da estrutura por uma forma discreta, constituída de partes rígidas conectadas por elementos flexíveis chamados de articulações fictícias;
- Trata-se da mais simples das técnicas em termos matemáticos, uma vez que não há a necessidade de trabalhar com equações diferenciais parciais, nem, obviamente, com as conseqüentes condições de contorno;
- Esta técnica mostrou ser bem representativa. Deve-se, entretanto, tomar um importante cuidado. Trata-se do último par pólo-zero. Caso se deseje um bom desempenho do modelo em n modos de vibração, faz-se necessário considerar-se $n+1$ modos na dinâmica (no mínimo);
- Embora não se tenha explorado na presente dissertação os aspectos mencionados a seguir, o formalismo discreto possui grande vantagem com relação aos demais, vantagem esta relativa a: encontrar modelos dinâmicos para estruturas com vários elos flexíveis; encontrar os modelos cinemáticos direto e inverso [Canudas de Wit et al., 1997]. Estes fatos se devem à não necessidade de trabalhar com as condições de contorno. Espera-se, entretanto, quantificar melhor esta afirmação em trabalhos futuros;

Sobre o Método dos Modos Assumidos (Capítulo IV)

- Trata-se da técnica que apresentou o melhor desempenho: não há erros com relação ao resultado exato (funções de transferência analíticas);

- Encontrar as funções de forma não é um processo exatamente simples, principalmente porquê o mesmo não depende somente das condições de contorno uma vez que há a necessidade da utilização também de uma condição de transversalidade. Porém, um processo totalmente analítico e extremamente detalhado foi formulado na presente dissertação, de forma que eventuais futuros usuários precisarão apenas substituir os valores dos parâmetros da sua estrutura para a determinação do modelo específico ao seu caso;
- Ao contrário do formalismo discreto, o método dos modos assumidos deve apresentar grande complexidade na determinação do modelo de estruturas com vários elos flexíveis, principalmente em razão de dificuldades na obtenção das funções de forma, dificuldades estas oriundas da complexidade envolvida no trabalho com as condições de contorno.

Sobre o Método das Deformações Polinomiais (Capítulo V)

- Oriunda dos elementos finitos, esta técnica apresenta um bom desempenho quando um grande número de elementos clássicos de terceira ordem é considerado [Chrétien, 1990], a fim de minimizar imprecisões devidas a deficiências nas condições de contorno dos primeiro e último elementos. Porém, este elevado número de elementos amplia em muito a complexidade do modelo.
- Testou-se, então, qual seria o desempenho de um modelo obtido a partir de um único elemento de quinta ordem. Os resultados mostraram erros muito pequenos nos zeros, mas erros significativos nos pólos, aproximadamente nas seguintes ordens: 38% no primeiro modo; 20% no segundo e 6% no terceiro;

- Algum erro já era esperado uma vez que as funções de forma (analiticamente constituídas de funções trigonométricas do tipo seno, seno hiperbólico, etc.) são aproximadas por funções polinomiais.

Sobre a Aplicação ao Caso de um Robô Flexível (Capítulo VI)

- Verificou-se, o que já era fisicamente esperado, que tanto o acréscimo da inércia do rotor quanto o acréscimo do atrito no atuador, ambos contribuem para aproximar dinamicamente a estrutura do caso engastada em uma extremidade e livre na outra, ao contrário da situação nominal articulada em uma extremidade e livre na outra;
- Quando a situação citada no item anterior acontece, os pólos da dinâmica nominal em malha aberta migram para os zeros nominais do caso colocado. Este fato indica uma importante interpretação física para os zeros do caso colocado, os quais são complexos conjugados e suas partes imaginárias são equivalentes às frequências naturais de vibração, quando a estrutura está vibrando como se fora uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra (este fenômeno já havia sido detectado por Miu, 1991).
- Talvez o efeito mais importante relativo à influência da dinâmica dos atuadores sobre a dinâmica estrutural, esteja realmente associado ao atrito não linear do atuador, conforme demonstrado no Capítulo VI. Verificou-se que os torques necessários à atenuação de forma ativa das vibrações residuais da estrutura possuem amplitudes em módulo por vezes menores do que os níveis de atrito seco. A articulação não é mais reversível em termos de torque, ou seja, torques menores do que o atrito seco não passam nem do rotor para a estrutura nem, tão pouco, da estrutura para o rotor. Não há, portanto, autonomia para o controle e a estrutura fica vibrando como se fora uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra;

- O problema citado no item anterior é particularmente crítico em aplicações espaciais (manipulador espacial como o da Figura 1.1, por exemplo), uma vez que, no espaço, podem existir grandes variações de temperatura: de baixas temperaturas quando o manipulador está na sombra da Terra projetada no espaço a altas quando o mesmo está iluminado pelo Sol. Estas condições praticamente inviabilizam a utilização de lubrificantes convencionais nos atuadores, podendo assim elevar os níveis dos já citados atritos não lineares.

Como continuações futuras do presente trabalho tem-se a intenção de estudar mais detalhadamente a influência da dinâmica dos atuadores sobre a dinâmica estrutural, principalmente no que concerne aos atritos não lineares internos aos atuadores. Intenta-se, ainda, pesquisar sobre a aplicação das técnicas de modelagem dinâmica a estruturas com vários elos flexíveis. Um exemplo de uma estrutura como esta última seria um robô-manipulador com vários elos flexíveis.

Finalmente, pode ser dito que, apesar de acadêmico, o problema estudado na presente dissertação pode ser, conforme evidenciado ainda na introdução, adaptado a diversos problemas de aplicação, como por exemplo, nos domínios da robótica e ciência espacial.

CAPÍTULO VIII
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Armstrong, B. S.R., *Dynamics for robot control: friction modeling and ensuring excitation during parameter identification*. PhD thesis, Stanford University, California, 1988.
- Baillieul, J., *Kinematic Redundancy and the Control Robots with Flexible Components*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Nice, France, May 1992.
- Canudas de Wit, C., Siciliano, B. and Bastin, G. *Theory of Robot Control*, Springer, Great Britain, 1997.
- Chevallereau, C. and Aoustin, Y., *Nonlinear Control of a 2 Flexible Link Robot: Experimental and Theoretical Comparisons*, European Control Conference, pp. 1051-1056, Grenoble, France, July 1991.
- Chrétien, J. P. *Modélisation des chaînes polyarticulées flexibles: Synthèse bibliographique*. Rapport D.R.E.T./D.E.R.A. n-1/7735, Octobre 1990.
- De Luca, A. , Panzieri, S. and Ulivi, G., *Stable Inversion Control for Flexible Link Manipulators*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium, May 1998.
- Dixon, W. E., Zergeroglu, E., de Queiroz, M. S. and Dawson, D. M., *Global Output Feedback Tracking Control for Rigid-Link Flexible-Joint Robots*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium, May 1998.
- Fonseca, R. A. and Góes, L. C. S., *Adaptive Control of a One-link Robotic Elastic Manipulator*, COBEM-CIDIM, 1995.
- Ghorbel, F. and Spong, M. W., *Adaptive Integral Manifold Control of Flexible Joint Robot Manipulator*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Nice, France, May 1992.

- Gomes, S. C. P. and Chrétien, J. P., *Dynamic modeling and friction compensated control of a robot manipulator joint*. IEEE –International Conference on Robotic and Automation, 1992a.
- Gomes, S. C. P. and Chrétien, J. P., *Dynamic modeling and friction compensated control of a 1 d.o.f. rigid or flexible manipulator*. In *Microdynamic et Pointage de Grande Précision*, CNES, 1er Symposium Internacional, 1992b.
- Gomes, S. C. P., *Modelagem e Controle de Manipuladores Flexíveis*, 10° Congresso Brasileiro de Automática/6° Congresso Latino Americano de Controle Automático, Vol.2, pp.710-715, Rio de Janeiro, 1994.
- Isogai, M., Arai, F. and Fukuda, T., *Modeling and Vibration Control with Neural Network for Flexible Multi-Link Structures*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Detroit, Michigan, May 1999.
- Khorrami, F. and Jain, S., *Experimental Results on an Inner/Outer Loop Controller for a Two-Link Flexible Manipulator*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Nice, France, May 1992.
- Kim, J., Suzuki, K., Yamano, M. and Uchiyama M., *Vibration Suppression Control of Constrained Spatial Flexible Manipulators*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, April 1997.
- Komatsu, T., Uenohara, M., Iikura, S., Miura, H. and Shimoyama I., *Active vibration control of a multi-link space flexible manipulator with torque feedback*, Journal Robotics Society of Japan, Vol. 6, No. 1, pp.23-39, 1992.
- Léchevin, N. and Sicard, P., *Observer Design for Flexible Joint Manipulators with Parameter Uncertainties*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, April 1997.
- Meirovitch, L., *Analytical methods in vibrations*, The Macmillan Company, New York, 1967.

- Miu, D.K., *Physical Interpretation of Transfer Function Zeros for Simple Control Systems With Mechanical Flexibilities*, Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 113, pp.419-424, 1991.
- Moghaddam, M. M. and Goldenberg, A. A., *Nonlinear Modeling and Robust H_{∞} - Based Control of Flexible Joint Robots with Harmonic Drives*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, April 1997.
- Nicosia, S. and Tomei P., *A Method to Design Adaptive Controllers for Flexible Joint Robots*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Nice, France, May 1992.
- Park, J. and Asada, H., *Integrated Structure/Control Design of a Two-Link Nonrigid Robot Arm for High Speed Positioning*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Nice, France, May 1992.
- Schmitz, E., *Experiments on the End-Point Control of a very Flexible One-link Manipulator*, Ph.D. Thesis, Stanford, California, United States, 1985.
- Soares, A. M. S., *Modelagem e identificação experimental de estruturas flexíveis*. Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos, Brasil, 1997.
- Spong, M. W., *Modeling and control of elastic joint robots*. ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 109:310-19, December 1987.
- Sridhar, B., Aubrun, J. and Lorell, R. K., *Identification Experiment for Control of Flexible Structures*, IEEE Control Systems Magazine, pp. 29-35, May 1985.
- Tahk, M. and Speyer, L. J., *A parameter robust LQG synthesis with applications to control of flexible structures*, IEEE Trans. Automatic Control, 30, 1987.
- Talebi, H. A., Khorasani, K. and Patel, R. V., *Experimental Evaluation of Neural Network based Controllers for Tracking the Tip Position of a Flexible-Link Manipulator*, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, April 1997.

Yoshida, Y. and Tanaka, M. ,*Tip Position Control of a Flexible Robot Arm Considering the Reduction Gear's Friction*, Journal of Robotics & Mechatronics, Vol. 2, No. 2, pp. 91-96, 1990.