

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Crescimento Econômico com Alocação Ótima de Capital Humano Científico

por

Marcelo Bohrer

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Mark Thompson
Orientador

Porto Alegre, 10 de Abril de 2014.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Bohrer, Marcelo

Crescimento Econômico com Alocação Ótima de Capital Humano Científico / Marcelo Bohrer.—Porto Alegre: PPG-MAp da UFRGS, 2014.

72 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2014.

Orientador: Thompson, Mark

Dissertação: Matemática Aplicada

Crescimento Econômico, Controle Ótimo, Princípio de Pontryagin, Alocação de Cientistas.

Crescimento Econômico com Alocação Ótima de Capital Humano Científico

por

Marcelo Bohrer

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Mark Thompson

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo
PPGMAp-UFRGS

Prof. Dr. João Luiz Becker
EA-UFRGS

Prof. Dr. Paulo Tenani
FGV-SP

Dissertação apresentada e aprovada em
10 de Abril de 2014.

Prof. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenadora

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente ao meu orientador pela oportunidade de trabalho; por acreditar em mim; e pelos comentários bem humorados, o que certamente tornou o trabalho leve e divertido.

Agradeço também ao Professor Fábio Azevedo pela ajuda fundamental a resolução do modelo desenvolvido neste trabalho.

Finalmente agradeço a minha família por todo o apoio ao longo destes anos estudando matemática.

Sumário

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE SÍMBOLOS	vii
RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
1 INTRODUÇÃO	1
2 MODELOS DE CRESCIMENTO ECONÔMICO	3
2.0.1 O modelo de Solow	3
2.0.2 O modelo de Solow com tecnologia	4
2.0.3 O modelo de Mankiw, Romer e Weil	5
2.0.4 O modelo de Romer	5
2.0.5 Modelos AK	7
2.0.6 O modelo de Lucas	7
2.1 O setor educacional	8
2.1.1 O modelo de Intriligator e Smith	8
2.1.2 O modelo de Stoikov	10
2.2 A Racionalidade dos Modelos de Crescimento	11
3 CONTROLE ÓTIMO E O PRINCÍPIO DE PONTRYAGIN	13
3.1 Controle Ótimo em Tempo Finito	13
3.2 Controle Ótimo em Tempo Infinito	23
3.2.1 O contra-exemplo de Halkin	23
3.2.2 Critérios de Otimalidade	24
3.2.3 O Princípio do Máximo	28
3.2.4 Condições Suficientes para Overtaking Optimality	29
3.3 A Abordagem por Espaços de Sobolev	31
4 O MODELO	36

4.1 O Modelo	36
4.1.1 O Setor Educacional	37
4.1.1.1 Maximização da Tecnologia	37
4.1.1.2 Tempo Mínimo	38
4.2 Solução do Modelo	39
4.2.1 Maximização da Tecnologia	39
4.2.2 Minimização do Tempo	45
4.2.3 Maximização da Utilidade	46
5 RESULTADOS NUMÉRICOS	48
6 CONCLUSÃO	62
APÊNDICE A	64
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69

LISTA DE SÍMBOLOS

Y	Produto total
y	Produto <i>per capita</i>
C	Consumo total
c	Consumo <i>per capita</i>
K	Capital total
k	Capital <i>per capita</i>
I	Investimento
r	Taxa de desconto intertemporal
n	Crescimento populacional
δ	Depreciação
L	Trabalho total
L_E	Professores
L_R	Pesquisadores
A	Tecnologia
s	Taxa de poupança
ρ	Elasticidade de Substituição
a	Fração dos cientistas alocados ao ensino
γ	Produtividade dos professores

RESUMO

Neste trabalho propomos um modelo de crescimento econômico baseado na fusão de modelos tradicionais da literatura econômica com modelos de alocação ótima de cientistas. O objetivo é destacar a importância dos cientistas (tomados como professores ou pesquisadores) na economia. Desenvolvemos dois sistemas dinâmicos com variáveis de controle. Utilizamos a técnica do Princípio do Máximo de Pontryagin, trabalhamos com horizonte de tempo finito e infinito. Encontramos soluções numéricas para uma versão simplificada do modelo proposto.

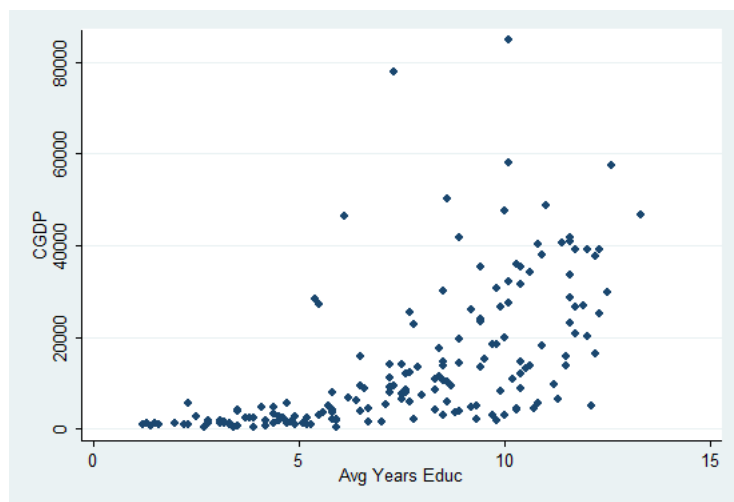
ABSTRACT

We propose a model of economic growth based on a fusion of traditional models of economic growth with models of optimal allocation of scientific personnel. The main goal is to highlight the importance of scientists (taken as professors or researchers) in the economy. We develop two dynamical systems steered by control variables. We make use of Pontryagin's maximum principle, working in finite and infinite time horizons. We find numerical solutions for a simplified version of the proposed model.

1 INTRODUÇÃO

O estudo do crescimento econômico é, de certo modo, um dos problemas mais antigos da Economia. Considerado por muitos como o primeiro tratado de Economia, o seminal trabalho de Adam Smith de 1776 - *An Inquiry into the Causes and Nature of the Wealth of Nations* - tinha por objetivo explicar o que faz uma nação rica ou pobre, ou seja, crescer ou não. Os primeiros modelos matemáticos de crescimento econômico são os de Ramsey [36], Solow [39] e Swan [43], entre outros. A partir destes, o estudo do crescimento econômico tornou-se uma das áreas mais férteis de pesquisa em Economia.

A partir dos trabalhos de Solow ([39], [40]), educação e tecnologia passaram a ganhar importância nos modelos de crescimento econômico. O impacto da educação sobre a economia é percebido em diversos canais, o trabalho de Barro ([3]) apresenta um bom resumo da importância da educação. Destacamos que existe uma correlação positiva entre anos de escolaridade e renda *per capita*, como se pode ver no gráfico a seguir, calculado para 175 países¹



É consenso hoje entre os economistas que qualquer modelo de crescimento econômico deve levar em conta a educação, isto é, a qualidade da força de trabalho, bem como a tecnologia usada nos processos de produção. Não existe, porém, um consenso quanto à modelagem tanto da educação quanto da tecnologia.

¹Dados retirados de [4] e Banco Mundial. Cálculos do autor.

O presente trabalho tem por objetivo propor um modelo matemático do impacto da educação e da tecnologia sobre o crescimento econômico, através da alocação ótima de pesquisadores e professores. O trabalho está estruturado do seguinte modo:

- Capítulo 2: fazemos uma breve revisão de alguns modelos de crescimento econômico, que pretendemos, de certo modo, generalizar a fim de incluir uma modelagem alternativa do setor educacional. Além disso, apresentamos os modelos de alocação de cientistas que pretendemos combinar com os modelos de crescimento econômico. Explicamos, ainda, a racionalidade econômica por trás desses modelos.
- Capítulo 3: desenvolvemos as ferramentas necessárias para o estudo do modelo a ser proposto. Desenvolvemos inicialmente o problema de controle ótimo em horizonte finito, através do princípio do máximo de Pontryagin. A seguir desenvolvemos o problema de controle ótimo em horizonte de tempo infinito, destacando inicialmente as dificuldades associadas a este problema, e prosseguindo, assim, para a sua solução através de técnicas de espaços de Sobolev. Referenciamos ainda abordagens alternativas.
- Capítulo 4: apresentamos formalmente um modelo altamente simplificado, bem como a solução analítica de algumas de suas equações. Discutimos, ademais, a existência de soluções
- Capítulo 5: apresentamos soluções numéricas parciais para o modelo, estudando o impacto de variações nos parâmetros.
- Conclusão: destacamos a importância dos resultados obtidos em termos de políticas públicas. Ademais, discutimos limitações do modelo, bem como possibilidades de generalização em trabalhos futuros.

2 MODELOS DE CRESCIMENTO ECONÔMICO

Apresentamos agora um breve resumo de alguns modelos de crescimento econômico, baseado em [5] e [24]. Estes não são, necessariamente, os modelos mais modernos ou refinados, mas são a base de quase todos os modelos de crescimento econômico modernos; e servirão de base para o modelo desenvolvido neste trabalho. Os modelos tem em comum, na sua acepção atual, o seguinte objetivo: maximizar o funcional de utilidade

$$\max \int_0^{\infty} U(C(t))e^{-rt} dt$$

onde o consumo $C(t)$ é restrito por

$$Y(t) = C(t) + \dot{K}(t) + \delta K(t)$$

onde $Y(t)$ denota a renda, $K(t)$ o capital e δ a taxa de depreciação. As demais restrições são dadas por cada modelo em particular. A forma da função de utilidade é indiferente neste momento.

2.0.1 O modelo de Solow

A função de produção do modelo¹ é dada por

$$Y = F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$$

onde α é um parâmetro menor que 1. Esta função, chamada de Cobb-Douglas (veja [14]), descreve como os fatores de produção, capital e trabalho, são combinados de modo a produzir o produto agregado da economia. Este produto é considerado homogêneo, isto é, existe apenas 1 produto que é consumido e investido. Esta consideração de homogeneidade é feita apenas para simplificar a análise do modelo.

O capital evolui ao longo do tempo de acordo com a equação diferencial:

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

onde K denota o capital, L o trabalho, Y o produto total e s a taxa de poupança.

¹A referência original é [39]

A forma da função de produção, particularmente o fato de $\alpha < 1$, implica que o capital e o trabalho possuem retornos decrescente à escala, isto é, ao dobrar-se o *input* dos fatores o *output* cresce, mas não o suficiente para duplicar-se. Isto faz com que invariavelmente a economia convirja a um estado estacionário onde a acumulação de capital e o crescimento cessam. O produto *per capita* no estado estacionário é dado por

$$y^* = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}$$

onde n é a taxa de crescimento populacional.

2.0.2 O modelo de Solow com tecnologia

A função de produção do modelo de Solow generalizado para incluir a tecnologia² é dada por

$$Y = F(K, AL) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$$

onde novamente $\alpha < 1$. O termo A mede a tecnologia, que aqui é considerada "aumentadora" de trabalho, isto é, um trabalhador equipado com tecnologia equivale a mais de um trabalhador sem tecnologia. A equação de acumulação de capital é a mesma do modelo sem tecnologia.

A tecnologia A cresce de acordo com uma taxa exógena g . É precisamente o progresso técnico que gera crescimento econômico de longo prazo neste modelo. A economia atinge a trajetória de crescimento balanceado, onde $g_y = g_k = g$, isto é, tanto o produto quanto o capital crescem a taxa exógena de progresso técnico g . Neste estado estacionário (crescimento balanceado) o produto por trabalhador é dado por

$$y^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}$$

ao longo do tempo este produto é reescrito como

$$y^*(t) = A(t) \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}$$

ou seja, o produto por trabalhador ao longo da trajetória de crescimento equilibrado é determinado pelo progresso técnico, poupança, crescimento populacional e depreciação (veja [24]).

²A referência original é [40]

2.0.3 O modelo de Mankiw, Romer e Weil

O modelo de Mankiw, Romer e Weil (conhecido como MRW³) é uma generalização do modelo de Solow que leva em conta a qualificação dos trabalhadores. A função de produção é dada por

$$Y = K^\alpha (AH)^{1-\alpha}$$

onde H representa o trabalho qualificado (capital humano). As pessoas acumulam capital humano dedicando tempo ao aprendizado de novas habilidades em vez de trabalhar. Denotamos por u a fração de tempo que as pessoas dedicam ao aprendizado de habilidades. Supõe-se que a mão de obra não qualificada que esteja adquirindo habilidades durante a fração de tempo u gera o trabalho qualificado H de acordo com

$$H = e^{\psi u} L$$

onde ψ é uma constante positiva. Note que fazendo $u = 0$ temos $H = L$ ou seja, a totalidade da mão de obra é não qualificada. No estado estacionário a razão produto-tecnologia é dada por

$$y^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}$$

e o produto por trabalhador ao longo tempo

$$y^*(t) = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} hA(t)$$

onde $h = \frac{H}{L}$. Este modelo mostra que quanto maior for o nível tecnológico e quanto maior for o tempo despendido acumulando habilidades, maior será a renda do país. Portanto, de acordo com este modelo, educação e tecnologia geram riqueza (veja [24]).

2.0.4 O modelo de Romer

O modelo de Romer [38] é o primeiro a tornar a produção de novas ideias endógena. Neste modelo a mão de obra divide-se de acordo com $L = L_Y + L_A$ onde L_A denota a quantidade de trabalhadores dedicados a geração de novas ideias, isto é, a quantidade de "pesquisadores". L_Y denota a quantidade de trabalhadores empregados

³a referência original é [32]

nas demais atividades produtivas. A função de produção é dada por

$$Y = K^\alpha (AL_Y)^{1-\alpha}$$

O capital se acumula de maneira idêntica àquela do modelo de Solow. A taxa a que novas ideias são geradas é dada por \bar{d} o autor sugere que a taxa de geração de novas ideias seja modelada como

$$\bar{d} = dA^\beta$$

onde d e β são constantes. A função de produção geral para ideias é dada por

$$\dot{A} = dL_A^\lambda A^\beta$$

onde β é um parâmetro entre 0 e 1.

Ao longo da trajetória de crescimento equilibrado temos $g_y = g_k = g_A$. Isto é, a razão capital trabalho e o estoque de ideias crescerão à mesma taxa ao longo da trajetória de crescimento equilibrado. Se não houver progresso tecnológico não há crescimento. O interesse portanto recai sobre qual será a taxa de progresso tecnológico. Esta é dada por

$$g_A = \frac{\lambda n}{1 - \beta}$$

assim, a taxa de crescimento da economia é determinada pelos parâmetros da função de produção de ideias e pela taxa de crescimento de pesquisadores.

Vale destacar que as ideias são geradas neste modelo por pesquisadores que buscam lucro acima da média da economia, que são garantidos por patentes. O modelo fornece ainda uma análise do valor das patentes. Após a análise do lucro dos dois setores (tecnologia e bens finais) o modelo fornece a parcela da população que trabalha no setor de pesquisa, dada por

$$s_R = \frac{1}{1 + \frac{r-n}{\alpha g_A}}$$

onde r é a taxa de juros da economia, utilizada para calcular o valor presente da pesquisa. Segundo o autor, esta fração da população que se destina a pesquisa não é ótima, argumentando que existem distorções no "mercado de ideias".

2.0.5 Modelos AK

Os modelos AK são uma família de modelos de crescimento econômico desenvolvidos principalmente por Romer e Rebelo em [37]. O diferencial destes modelos em relação aos anteriores é dar especial atenção ao capital. A função de produção mais simples de um modelo AK é

$$Y = AK$$

o que explica a origem do nome. Aqui A é tomado como constante. Nestes modelos o retorno ao capital é constante, o produto marginal de cada unidade de capital é sempre igual a A . Com simples manipulações algébricas chega-se a

$$g_y \equiv \frac{\dot{Y}}{Y} = sA - \delta$$

ou seja, a taxa de crescimento da economia é uma função crescente da taxa de investimento (poupança). Um aumento permanente na taxa de investimento aumenta permanentemente a taxa de crescimento da economia.

2.0.6 O modelo de Lucas

O modelo de Lucas, também conhecido por Uzawa-Lucas⁴, pode ser considerado um caso (um pouco mais elaborado) de um modelo AK. O destaque do modelo de Lucas é a ênfase no capital humano. Suas duas principais equações são:

A função de produção

$$Y = AK^\alpha(uH)^{1-\alpha}$$

e a equação que descreve a evolução do capital humano:

$$\dot{H} = (1 - u)H$$

onde u denota o tempo despendido com trabalho e $1 - u$ o tempo dedicado à acumulação de qualificações (isto é, tempo dedicado à formação). O restante do modelo é análogo ao modelo de Solow com tecnologia, sendo assim, sua resolução também o é. Note que o capital humano entra na função de produção como uma tecnologia aumentadora de trabalho, portanto, uma política que conduz a um aumento permanente no tempo despendido

⁴As referências originais são [30] e [44]

na obtenção de qualificações gera um aumento permanente no crescimento do produto por trabalhador.

2.1 O setor educacional

Apresentamos aqui um resumo dos modelos desenvolvidos em [23] e [41] que servem de base para a nossa modelagem do setor educacional.

2.1.1 O modelo de Intriligator e Smith

Estes autores formularam modelos que estudam a alocação ótima de cientistas entre as carreiras de docência e pesquisa. Alocação "ótima" refere-se à maximização de uma função de bem estar:

$$W = F [L_R(T), L_E(T)] + \int_0^T I [L_R(t), L_E(t), t] dt \quad (2.1)$$

onde:

W = bem-estar, a ser maximizado;

I = função arbitrária;

t = tempo;

$t = 0$ instante inicial e $t=T$ instante final, possivelmente infinito;

$L_R(t)$ = pesquisadores no tempo t ; e

$L_E(t)$ = professores no tempo t .

Pode-se notar que foi feita a suposição de que os componentes da função intermediária são independentes e aditivos. Os autores salientam o fato de que a modelagem através da função de bem-estar permite a análise sob incerteza, através do uso da utilidade esperada. A formulação da função de bem-estar acima permite a análise de três políticas distintas:

- Valor Terminal Máximo: maximiza o valor do esforço dos pesquisadores ao final do intervalo tempo.

- Tempo Mínimo: minimiza o tempo necessário para se obter um determinado número de pesquisadores e professores.
- Valor Presente Máximo: maximiza o valor presente da pesquisa ou do ensino em um dado intervalo de tempo, para alguma taxa de desconto.

O número de cientistas ao tempo t , $S(t)$, é dado pelo número de pesquisadores $L_R(t)$ mais o número de professores $L_E(t)$:

$$S(t) = L_R(t) + L_E(t). \quad (2.2)$$

O aumento na quantidade de cientistas ao tempo t é simplesmente a derivada com relação ao tempo da equação acima, isto é:

$$\dot{S}(t) = \dot{L}_R(t) + \dot{L}_E(t) \quad (2.3)$$

Faz-se a suposição bastante simplificadora de que apenas professores são necessários para gerar novos cientistas, isto é, a função de produção de cientistas é da forma:

$$f[L_E(t), t] \quad (2.4)$$

que representa o aumento bruto no número do cientistas no período t . O aumento líquido no número de cientistas é dado pelo aumento bruto menos a depreciação, isto é, morte, aposentadoria e mudança de carreira. A depreciação é denotada por $\delta S(t)$. O aumento líquido no número de cientistas é então:

$$\dot{S}(t) = f[L_E(t), t] - \delta S(t). \quad (2.5)$$

Pela hipótese do modelo cientistas são apenas pesquisadores ou professores. Então se a representa a alocação de cientistas para o ensino, $(1 - a)$ representa a fatia alocada para pesquisa. Supondo a mesma taxa de depreciação para as duas carreiras temos que as taxas de crescimento são dadas por:

$$\dot{L}_E(t) = af[L_E(t), t] - \delta L_E(t) \quad (2.6)$$

$$\dot{L}_R(t) = (1 - a)f[L_E(t), t] - \delta L_R(t). \quad (2.7)$$

Supõe-se que políticas apropriadas possam afetar as decisões iniciais de carreira, mas apenas até certo limite. Portanto,

$$0 < a_0 \leq a \leq a_1 < 1$$

Os autores não resolvem o modelo neste trabalho, apenas discutem em linhas gerais as implicações que tal modelagem podem ter sobre as políticas educacionais.

2.1.2 O modelo de Stoikov

O modelo desenvolvido por Stoikov em [41] pode ser considerado a versão discreta do modelo de Intrilligator e Smith (ainda que seja anterior a este). Apresentamos aqui, por completude, um breve resumo deste modelo.

O número total de cientistas é denotado por S_t , o número total de professores é denotado por E_t e por R_t denota-se o número total de pesquisadores. O subscrito t indica o período em que a variável é avaliada. O autor assume que cientistas dividem-se apenas entre pesquisadores e professores, ou seja, de acordo com a equação:

$$S_t = R_t + E_t \quad (2.8)$$

Não há oferta exógena de cientistas, ou seja, são todos gerados pelas variáveis do modelo. Supõe-se que a quantidade de cientistas seja proporcional à quantidade de professores, a contribuição por professor-ano para a geração de novos cientistas é dada por γ . A depreciação (morte, aposentadoria e mudança de carreira) também é tomada proporcional ao número do cientistas e denotada por δ . Com isto tem-se a equação:

$$S_{t+1} - S_t = \gamma E_t - \delta S_t. \quad (2.9)$$

A fração de cientistas recém graduados que tomam a carreira de professor é um parâmetro variável que supõe-se influenciável pela política educacional, este parâmetro é designado por α . A variação no estoque de professores ao longo de um período de tempo pode ser escrito como:

$$E_{t+1} - E_t = \alpha \gamma E_t - \delta E_t \quad (2.10)$$

A quantidade de esforço científico de pesquisa, medida em número de pesquisadores-ano, até um dado ano T é designada por Q_T , que pode ser escrita como:

$$Q_T = \sum_{t=0}^T R_t \quad (2.11)$$

Das equações (2.8), (2.9) e (2.10) pode-se obter a seguinte equação em diferenças:

$$R_{t+1} = (1 - \delta)R_t + (1 - \alpha)\gamma E_0(1 + \alpha\gamma - \delta)^t \quad (2.12)$$

onde E_0 denota o número de professores no ano zero. Denotando por R_0 o número de pesquisadores no ano zero, então a solução da equação em diferenças pode ser escrita como:

$$R_t = (1 - \delta)^t \left(R_0 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) + \frac{1 - \alpha}{\alpha} E_0 (1 + \alpha\gamma - \delta)^t \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) em (2.11) e somando, obtém-se:

$$Q_T = \frac{(1 - \delta)^{T+1} - 1}{\delta} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} E_0 - R_0 \right) + \frac{1 - \alpha}{\alpha} E_0 \frac{(1 + \alpha\gamma - \delta)^{T+1} - 1}{\alpha\gamma - \delta} \quad (2.14)$$

O problema então, como posto pelo autor, é, dado um horizonte de tempo T , como devem ser alocados os novos cientistas entre pesquisa e ensino, isto é, que valor deve tomar α de modo a maximizar o esforço de pesquisa. A questão complica-se então pelo fato de a equação (2.14) não possuir solução analítica.

2.2 A Racionalidade dos Modelos de Crescimento

Nesta seção explicamos a lógica por trás dos modelos e da forma funcional de algumas equações dos modelos.

Primeiramente é importante clarificar o que se entende por crescimento econômico. Este termo designa a variação do produto da economia (Produto Interno Bruto, por exemplo) a longo prazo, isto é, os modelos não tentam descrever flutuações de curto prazo na economia. Nos últimos anos alguns modelos tem sido desenvolvidos para tentar levar em conta os ciclos econômicos de curto prazo (veja [33]).

No estudo do crescimento econômico estamos interessados no valor do produto interno bruto relativo ao tamanho da população, isto é, no produto *per capita*. Isto se deve ao fato de que o que é relevante para o bem-estar material é a quantidade de produto disponível para cada habitante. Por exemplo, o produto interno bruto suíço é da ordem de 632,2 bilhões de dólares, bastante inferior ao brasileiro que está na ordem de 2,253 trilhões de dólares. Porém os valores *per capita* se invertem significativamente,

79052,34 para a Suíça contra 11339,52 dos brasileiros. É senso comum que a vida material de um suíço médio é muito superior à de um brasileiro médio.

O caráter bastante simples de algumas das equações merece comentário. Elas descrevem um comportamento agregado, mesmo que não sejam válidas para um caso particular, descrevem um comportamento suficientemente geral, de modo a modelar a economia em termos agregados. A simplicidade é por vezes necessária na análise estatística destes modelos, dados econômicos são disponíveis apenas em um alto grau de agregação, um alto refinamento impossibilitaria a análise empírica ⁵, que é um teste fundamental para um modelo de crescimento econômico.

O ponto que merece maior clarificação é o horizonte de tempo infinito na maximização da utilidade. Supõe-se que o agente cuja utilidade é maximizada viva infinitamente, isso é obviamente uma simplificação para o fato de que geralmente os agentes levam em conta seus descendentes no momento de suas decisões de consumo e investimento. Nas palavras de Arrow e Kurz em [1]: "O horizonte infinito é uma idealização do ponto fundamental de que as consequências do investimento têm vida muito longa; qualquer horizonte curto requer métodos de avaliação dos estoques de capital ao final do período, e a única avaliação válida é seu valor em uso no período subsequente". Mesmo que se fixe um valor final para o consumo e o capital, somos levados a perguntar de o que determina a escolha de tais valores. Certamente seriam fixados com algum programa de prazo mais longo em mente, levando adiante este argumento vê-se que a escolha sensata é de fato pelo horizonte infinito de otimização.

⁵Não faremos análise empírica neste trabalho a fim de preservar o foco matemático.

3 CONTROLE ÓTIMO E O PRINCÍPIO DE PONTRYAGIN

Neste capítulo introduzimos as ferramentas matemáticas necessárias para tratar o problema. O capítulo está estruturado em duas partes, na primeira desenvolvemos a teoria de controle em tempo finito, mostrando a existência de soluções; e na segunda parte mostramos as dificuldades associadas ao controle ótimo em horizonte de tempo infinito e apresentamos uma maneira de resolver problemas de controle neste ambiente.

O problema de controle é definido como

$$\max_{u(t) \in \mathcal{U}} J = \int_0^T F(t, u, x) dt + S[x(T)] \quad (3.1)$$

sujeito a

$$\dot{x} = f(t, u, x), \quad x(0) = x_0. \quad (3.2)$$

o problema consiste portanto em encontrar um controle admissível u^* que maximize o funcional objetivo (3.1) sujeito a restrição (3.2). A função S é continuamente diferenciável; as funções F e f são contínuas e admitem derivadas com relação a x , que, por sua vez, são contínuas em todas as variáveis (t, u, x) . Essas hipóteses são chamadas de hipóteses clássicas de regularidade em [13]. \mathcal{U} será definido a seguir.

3.1 Controle Ótimo em Tempo Finito

Optamos pela metodologia desenvolvida por [35], denominada de princípio do máximo. Esta escolha é feita por duas razões: primeiro, o princípio do máximo é uma generalização do método dos multiplicadores de Lagrange em otimização estática, amplamente utilizados em Economia; em segundo lugar, esta metodologia fornece informações acerca da forma das soluções, o que geralmente não é o caso de outras abordagens, como a equação de Bellman (veja [7] e [22]).

Apresentaremos a versão completa do princípio do máximo, seguindo [13], esta versão é mais geral que a necessária para resolver nosso modelo. Porém, antes de prosseguir com o princípio do máximo precisamos de algumas definições comuns na teoria de controle.

Definição 3.1. *Seja $U \in \mathbb{R}^m$. Uma função $u : [0, \infty) \rightarrow U$ é chamada de controle. O conjunto*

$$\mathcal{U} = \{u : [0, \infty) \rightarrow U; u(\cdot) \text{ é mensurável}\} \quad (3.3)$$

*é chamado de conjunto dos controles admissíveis.*¹

Para os nossos propósitos será suficiente tomar U como um subconjunto do cubo unitário em \mathbb{R}^m .

Definição 3.2. *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. O subconjunto do \mathbb{R}^n definido por*

$$\mathcal{A}(t) = \{x(t, u); u(\tau) \in \mathcal{U} \text{ para } \tau \in [0, t]\} \quad (3.4)$$

este conjunto é chamado de conjunto atingível em t .

Ou seja, é o conjunto que consiste de todos os possíveis valores que a solução de (3.2) pode assumir usando todos os controles admissíveis.

Definimos a função Hamiltoniana $H^\eta : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$H^\eta(t, x, p, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + \eta F(t, x, u) \quad (3.5)$$

o parâmetro η assume o valor 0 ou 1, configurando os problemas do tipo normal e anormal², respectivamente. Por simplicidade notacional omitimos o sobrescrito quando $\eta = 1$. O Hamiltoniano maximizado é a função M^η definida por

$$M^\eta(t, x, p) = \sup_{u \in \mathcal{U}} H^\eta(t, x, p, u) \quad (3.6)$$

Definição 3.3. *Seja $x \in S$. Um vetor $\zeta \in \mathbb{R}^n$ é um normal proximal ao conjunto S no ponto x se e somente se existir $\sigma = \sigma(x, \zeta) \geq 0$ tal que*

$$\langle \zeta, u - x \rangle \leq \sigma |u - x|^2 \quad \forall u \in S$$

O conjunto $N_S^P(x)$ de todos tais ζ define o cone proximal normal a S em x .

Definição 3.4. *Definimos o cone normal limitante $N_S^L(x)$ através da operação de fechamento aplicada a N_S^P :*

$$N_S^L(x) = \left\{ \zeta = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_i : \zeta_i \in N_S^P(x_i), x_i \rightarrow x, x_i \in S \right\} \quad (3.7)$$

¹Tomaremos por vezes dependente sobre o tempo t .

²Trataremos apenas do problema normal. Para o caso anormal veja [13] e referências lá listadas.

Teorema 3.1 (Princípio do Máximo). *Seja o processo (x^*, u^*) um minimizador local do problema (3.1) sob as hipóteses clássicas de regularidade com U limitado. Então existe um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um escalar η igual a 0 ou 1 satisfazendo a **condição de não-trivialidade***

$$(\eta, p(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b] \quad (3.8)$$

a **Condição de Transversalidade**

$$-p(b) \in \eta \nabla S(x^*(b)) + N_E^L(x^*(b)) \quad (3.9)$$

a **equação adjunta** para quase todo t :

$$-p'(t) = D_x H^\eta(t, x^*(t), p(t), u^*(t)) \quad (3.10)$$

e finalmente a **condição do máximo** para quase todo t

$$H^\eta(t, x^*(t), p(t), u^*(t)) = M^\eta(t, x^*(t), p(t)) \quad (3.11)$$

Se o problema for autônomo (isto é, $F(\cdot)$ e $f(\cdot)$ não dependem de t) pode-se, então, adicionar as estas conclusões a **consistência do Hamiltoniano** para alguma constante h

$$H^\eta(x^*(t), p(t), u^*(t)) = M^\eta(x^*(t), p(t)) = h \quad q.s. \quad (3.12)$$

A demonstração completa do Princípio do Máximo é bastante longa e pode ser encontrada em [13], [35] ou [18], no apêndice apresentamos um esboço de uma demonstração.

As variáveis $p(t)$ são conhecidas como variáveis de coestado, também chamadas de multiplicadores, variáveis auxiliares, variáveis adjuntas ou variáveis duais, são o análogo dinâmico dos multiplicadores de Lagrange em otimização estática.

A condição de maximizar o Hamiltoniano é mais geral que $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, pois inclui a possibilidade de ótimo na fronteira. Estes casos são bastante comuns e recebem o nome de controle *bang-bang*.

As variáveis de coestado possuem uma interpretação econômica importante. Elas descrevem a variação do máximo valor possível do funcional objetivo em consequência de uma variação marginal na variável de estado. As variáveis de coestado tem a "dimensão" de um preço (isto é, são interpretadas como um preço), chamado de preço sombra,

isto é, refletem a variação na valoração de uma quantidade (variável de estado). A qualquer problema de alocação ao longo do tempo corresponde, portanto, um problema de valoração ao longo do tempo, isto é, o problema de determinar as trajetórias das variáveis de coestado.

A condição de transversalidade também possui uma interpretação relevante em Economia. No caso em que a variável de estado é o capital, por exemplo, $p(T)$ mede o preço sombra do capital. A violação da condição de transversalidade significa que ao final do intervalo de tempo em questão, a firma está deixando de utilizar recursos com valor positivo. Isto viola o princípio de maximização de lucros que afirma que a firma faz uso dos recursos até que o custo marginal iguale o benefício marginal. Portanto, a condição de transversalidade é necessária tanto do ponto de vista econômico quanto do ponto de vista matemático. Uma interpretação completa do princípio do máximo do ponto de vista da Economia é feita em [17].

Passemos agora ao estudo da suficiência das condições para a existência de soluções ao problema de controle. O método é baseado no "método direto" do cálculo de variações (veja [16]). A ideia aqui é mostrar que qualquer sequência minimizante de pares (x_k, u_k) tem uma subsequência convergindo a um limite, o ínfimo do problema de controle. Uma questão delicada é o modo de convergência, pois necessitamos de informações acerca do comportamento da sequência u_k , para isto precisamos do seguinte lema.

Lema 3.1 (Filippov). *Dado um problema de controle num intervalo $[a, b]$ tal que*

1. $f(x, t, u)$ seja contínua em (x, u) e mensurável em t ;
2. $\mathcal{U}(\cdot)$ seja mensurável e de valor compacto; e³
3. f tenha crescimento linear: existe uma função somável M tal que

$$(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U}(t) \Rightarrow |f(x, t, u)| \leq M(t)(1 + |x|) \quad (3.13)$$

então o sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathcal{U}(t), \quad t \in [a, b] \quad q.s. \quad (3.14)$$

³variando t temos que $\mathcal{U}(\cdot)$ define uma multifunção.

é equivalente à inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in f(t, x(t), \mathcal{U}(t)), \quad t \in [a, b] \text{ q.s.} \quad (3.15)$$

Definição 3.5. Uma função $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de duas variáveis (x, y) , onde $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ é dita *LB-mensurável* em x e y quando F for mensurável com respeito à σ -álgebra gerada pelos produtos de subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de \mathbb{R}^m para x e subconjuntos Borel-mensuráveis de \mathbb{R}^n para y .

Teorema 3.2 (Seleção de Aumann). Se Γ é *LB-mensurável* então existe uma seleção mensurável para Γ , isto é, uma função γ Lebesgue-mensurável levando $\text{dom}\Gamma$ em \mathbb{R}^n tal que $\gamma(x) \in \Gamma(x)$ para quase todo $x \in \text{dom}\Gamma$.

Corolário 3.1. Seja o sistema de controle (f, \mathcal{U}) tal que $f(t, x, u)$ seja contínua em x para cada (t, u) e *LB-mensurável* em (t, u) para cada x ; e tal que $\mathcal{U}(\cdot)$ seja *LB-mensurável*. Então (3.14) e (3.15) têm a mesma trajetória.

Antes de prosseguir para o teorema que garante a existência de soluções necessitamos de alguns resultados de análise, cujas demonstrações são omitidas, podendo ser encontradas em [13] ou [45]

Resultados:

- Seja C um subconjunto convexo de X , um espaço normado. Então o fecho fraco de C coincide com o fecho forte de X . Em particular, um subconjunto convexo de X é fortemente fechado se, e somente se, for fracamente fechado.
- (Compacidade Sequencial) Qualquer subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach reflexivo é fracamente sequencialmente compacto.
- Se $1 < p < \infty$ o espaço de Banach $L^p(\Omega)$ é reflexivo.
- (Semi-continuidade Integral)⁴ Seja u_i uma sequência de funções mensuráveis em Ω com $(x, u_i(x)) \in Q$ q.s., onde Q é um subconjunto de $\Omega \times \mathbb{R}^l$, que converge quase sempre a um limite u^* . Seja z_i uma sequência de funções convergindo fracamente em $L^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ a z^* , onde $r > 1$. Então

$$J(u^*, z^*) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} J(u_i, z_i)$$

⁴Note que u e x não são, necessariamente, as variáveis de controle e estado do problema de otimização.

- (Lema de Gronwall) Seja $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua e satisfazendo

$$|x'(t)| \leq \gamma(t)|x(t)| + \beta(t), \quad t \in [a, b] \quad q.s. \quad (3.16)$$

onde $\gamma, \beta \in L^1(a, b)$, com γ não negativo. Então para todo $t \in [a, b]$ tem-se

$$|x(t) - x(a)| \leq \int_a^t \exp\left(\int_s^t \gamma(r) dr\right) \{\gamma(s)|x(a)| + \beta(s)\} ds.$$

Definição 3.6. O sistema de controle (f, \mathcal{U}) é dito finitamente gerado se f tiver a seguinte forma

$$f(x, t, u) = g_0(t, x) + G(t, x)u = g_0(t, x) + \sum_{j=1}^m g_j(t, x)u^j, \quad (3.17)$$

onde G é uma função cujos valores são matrizes $n \times m$.

Apresentamos o teorema a seguir para um problema de minimização, fazemos isto para ficar de acordo com [13]. Sabe-se que a cada problema de minimização corresponde um problema dual, de maximização, a este respeito veja [9]. Podemos, portanto, sem perda de generalidade, considerar o problema de minimização.

Considere o seguinte problema de controle definido em um intervalo fixo

$$\min J(x, u) = S(x(a), x(b)) + \int_a^b F(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.18)$$

sujeito a

$$x'(t) = g_0(t, x(t)) + \sum_{j=1}^m g_j(t, x(t), u^j(t)) \quad q.s. \quad (3.19)$$

$$u(t) \in \mathcal{U}(t) \quad q.s. \quad (3.20)$$

$$(t, x(t)) \in Q \quad \forall t \in [a, b], \quad (x(a), x(b)) \in E. \quad (3.21)$$

Teorema 3.3. Suponha que os dados do problema satisfaçam as seguintes hipóteses:

1. cada $g_j (j = 0, 1, \dots, m)$ é mensurável em t , contínua em x e tem crescimento linear, isto é, existe uma constante M tal que

$$(t, x) \in Q \Rightarrow |g_j(t, x)| \leq M(1 + |x|) \quad (3.22)$$

2. Para quase todo t o conjunto $U(t)$ é fechado e convexo;

3. Os conjuntos E e Q são fechados, e $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-contínua inferior;

4. $F(t, x, u)$ é LB-mensurável em t e (x, u) ; é semi-contínua inferior em (x, u) ; ainda, $F(t, x, \cdot)$ é convexa⁵ para cada $(t, x) \in Q$; ademais, existe uma constante λ_0 tal que

$$(t, x) \in Q, \quad u \in \mathcal{U}(t) \Rightarrow F(t, x, u) \geq \lambda_0. \quad (3.23)$$

5. A projeção $\{\alpha \in \mathbb{R}^n : (\alpha, \beta) \in E \text{ para algum } \beta \in \mathbb{R}^n\}$ de E é limitada;

6. Uma das seguintes condições é válida para $r > 1$:

(a) Existe $k \in L^r(a, b)$ tal que, para quase todo t ,

$$u \in \mathcal{U}(t) \Rightarrow |u| \leq k(t)$$

(b) Existe $\alpha > 0$ e β tal que

$$(t, x) \in Q, \quad u \in \mathcal{U}(t) \Rightarrow F(t, x, u) \geq \alpha|u|^r + \beta.$$

Então, se existe pelo menos um processo admissível (x, u) tal que $J(x, u)$ seja finito, o problema admite uma solução.

Demonstração. (Clarke) Seja (x_i, u_i) uma sequência minimizante. É fácil ver que qualquer uma das hipóteses do item 6 acima implica que a sequência u_i é limitada em $L^r(a, b)$. Como este espaço é reflexivo podemos usar a compacidade sequencial fraca e assumir (para uma subsequência) que u_i converge fracamente em $L^r(a, b)$ a um limite u^* . Segue da desigualdade de Hölder que a sequência u_i também é limitada em $L^1(a, b)$.

Usando 1 obtém-se a seguinte estimativa para a sequência x_i :

$$|x'_i(t)| \leq M(1 + |x_i(t)|)(1 + K|u_i(t)|) \quad q.s. \quad (3.24)$$

Utilizando o lema de Gronwall, visto que u_i é limitado em $L^1(a, b)$, e dada a hipótese 5 acima deduzimos desta estimativa que a sequência x_i é uniformemente limitada em $[a, b]$.

Retornando à estimativa, segue que x'_i é limitada em $L^r(a, b)$.

⁵A hipótese de convexidade pode ser relaxada, para este fim veja [11]

Podemos agora usar novamente a compacidade sequencial fraca em $L^r(a, b)$, desta vez para a sequênça x'_i . Podemos então supor que x'_i converge fracamente a um limite v^* em $L^r(a, b)$. Estabelecemos também a equicontinuidade da sequênça x_i , pela desigualdade de Hölder. Utilizando o teorema de Arzela-Ascoli (e tomando novamente subsequênças) temos que existe uma função contínua x^* que é o limite uniforme de x_i . Segue da identidade

$$x_i(t) = x_i(a) + \int_a^t x'_i(s) ds$$

tomando limites que x^* é um arco e que $x^{*'}(t) = v^*(t)$ q.s.

Até o momento temos que u_i converge fracamente em $L^r(a, b)$ a u^* , x_i converge uniformemente a um arco x^* , e x'_i converge fracamente a $x^{*'}$ em $L^r(a, b)$.

Para o passo seguinte note que o problema fica inalterado se F for substituída por $\max(F, \lambda_0)$, em vista da hipótese 4; isto preserva a convexidade e a semi-continuidade inferior, então podemos usar o teorema da semi-continuidade integral para deduzir que

$$J(x^*, u^*) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} J(x_i, u_i) = \inf J(x, u)$$

Segue que (x^*, u^*) soluciona o problema de controle, visto que (x^*, u^*) seja um processo admissível para o problema. É isto que demonstramos agora.

As restrições de estado e de fronteira são preservadas sob limite, pois E e Q são fechados. O conjunto

$$W = \{w \in L^r(a, b) : w(t) \in \mathcal{U}(t) \text{ q.s.}\}$$

é fortemente fechado em $L^r(a, b)$, pois sequênças fortemente convergentes admitem subsequênças convergentes q.s., e $\mathcal{U}(\cdot)$ tem valor fechado pela hipótese 2. W também é convexo (novamente pela hipótese 2) e portanto W é fracamente fechado. Segue que u^* (como o limite fraco da sequênça u_i) pertence a W e é portanto uma função de controle.

Resta apenas verificar que x^* é a trajetória de estado correspondente a u^* . Para isto basta mostrar que, para qualquer subconjunto mensurável A de $[a, b]$ tem-se

$$\int_A \left\{ x^{*'}(t) - g_0(t, x^*(t)) - \sum_{j=1}^m g_j(t, x^*(t)) u^{j*} \right\} dt = 0$$

Esta desigualdade permanece válida quando x^* e u^* são substituídos por x_i e u_i respectivamente. Para obter-se a conclusão desejada basta justificar a passagem ao limite quando

$i \rightarrow \infty$. Pela convergência fraca e pelo teorema da convergência dominada temos

$$\int_A x'_i(t) dt \rightarrow \int_A x'^*(t) dt \quad \text{e} \quad \int_A g_0(t, x_i(t)) dt \rightarrow \int_A g_0(t, x^*(t)) dt$$

Sabemos ainda que para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ a seguinte relação é válida

$$\int_A g_j(t, x^*(t)) u_i^j(t) dt \rightarrow \int_A g_j(t, x^*(t)) u^{j*}(t) dt \quad \text{ao} \quad i \rightarrow \infty$$

pois $g_j(t, x^*(t)) \in L^\infty(a, b)$ pela hipótese 1. Para completar a demonstração basta mostrar que

$$\int_A \{g_j(t, x_i(t)) - g_j(t, x^*(t))\} u_i^j(t) dt \rightarrow 0. \quad (3.25)$$

Pela desigualdade de Hölder a integral do lado esquerdo é limitada em valor absoluto por

$$\left\{ \int_a^b |g_j(t, x_i(t)) - g_j(t, x^*(t))|^{r^*} dt \right\}^{1/r^*} \|u_i^j\|_{L^r(a,b)}.$$

O primeiro fator neste produto tende a 0, pela convergência dominada, e o segundo é limitado independentemente de i pois a sequência u_i é limitada em $L^r(a, b)$. O resultado segue. \square

Note que se tivéssemos exigido que as funções g fossem Lipschitz teríamos, pelo teorema de Picard-Lindelöf a unicidade da solução do sistema dinâmico associado ao problema de controle. Como, porém, não podemos garantir a unicidade de controle que minimiza o funcional não impomos a hipótese de a função ser Lipschitz.

Como observado em [13] (p.446) no caso de um problema de controle finitamente gerado com os controles lineares e $x > 0$ os controles assumem valores na fronteira de U .⁶ Um interessante contra-exemplo é apresentado em [21], neste caso uma das variáveis de estado é quadrática e não há restrição de não-negatividade sobre as variáveis. Os autores seguem uma abordagem distinta da aqui apresentada, chamada de *Synthesis by Green's Theorem*. A fim de manter o foco não apresentaremos nada a este respeito no presente trabalho. De modo mais geral apresentamos o seguinte resultado⁷

⁶No caso de um problema de controle linear com o controle sendo um termo forçante na equação das variáveis de estado é possível demonstrar que os controles assumem valores na fronteira sob hipóteses menos restritivas, este resultado pode ser encontrado em [6].

⁷Este resultado é apresentado apenas por completude, não será utilizado no restante do texto. Fazemos tal escolha por duas razões, primeiro chegamos a um resultado similar com o comentário deste parágrafo; e segundo este teorema está acima de minhas atuais capacidades matemáticas.

Considere o seguinte sistema

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad |u| \leq 1. \quad (3.26)$$

A variável x pertence a uma variedade analítica M , e f e g são campos vetoriais analíticos em M . Dizemos que um sistema como acima satisfaz a *propriedade bang-bang com limite de trocas* (PBBLT) se a seguinte condição for válida: para cada subconjunto compacto K de M e todo tempo $T > 0$, existe um inteiro N positivo tal que, sempre que γ for uma trajetória ótima (temporal) que está inteiramente contida em K e vai de um ponto l de K a um ponto k de K , então existe uma trajetória ótima (temporal)⁸ de l a k que é *bang-bang* com no máximo N trocas de controle.

Um sistema da forma (3.26) é chamado analítico se o espaço de estados M for uma variedade analítica e os campos vetoriais f e g forem analíticos. Fazemos a seguinte hipótese, chamada de hipótese (Δ) : seja $[X, Y]$ o colchete de Lie dos campos vetoriais X e Y . E seja adX o operador que associa a cada campo vetorial Y o campo vetorial $[X, Y]$. Seja $l \in M$ e $m > 0$ um inteiro. Dizemos que $(\Delta_{l,m})$ vale se existir uma vizinhança V de l tal que

$$[g, (adf)^m(g)] = \sum_{i=0}^m \alpha_i (adf)^i(g) + \beta (adf)^{m+1}(g) \quad (3.27)$$

onde α_i e β_i são funções analíticas em V , e $|\beta(x)| < 1$ para todo $x \in V$. Dizemos que a hipótese (Δ) é válida se $(\Delta_{l,m})$ for satisfeita para todo l, m .

Teorema 3.4. *Se o sistema (3.26) for analítico e satisfizer a hipótese (Δ) , então (3.26) satisfaz a condição PBBLT.*

A demonstração deste resultado é bastante extensa e um tanto complicada e foi, portanto, omitida. Pode, porém, ser encontrada em [42].

O princípio do *bang-bang* foi inicialmente desenvolvido em [28], sendo generalizado em diversos trabalhos. Para o caso não linear destacamos [27] e [21].

Apresentamos ainda um conceito relevante para a solução do sistema de controle. Considere a equação diferencial $x' = f(x, t)$ onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua.

⁸isto é, para um problema de tempo mínimo. No caso de um funcional custo independente da variável de controle o resultado segue pois a condição sobre a variável de controle imposta pelo princípio do máximo depende apenas da dinâmica do sistema.

Uma solução $x(t), t \in [t_0, t_1), t_0 < t_1 < \infty$ é dita ser continuável a $t = t_1$ se existir outra solução $\hat{x}, t \in [t_0, t_2], t_2 \geq t_1$ da equação diferencial tal que $\hat{x}(t) = x(t), t \in [t_0, t_1)$. Uma solução $x(t), t \in [t_0, t_1)$ da equação é dita ser continuável a $t = t_2$ se for continuável a $t = t_1$ e sempre que assumirmos que $x(t)$ é uma solução em $[t_0, t')$, para qualquer $t' \in (t_1, t_2]$, pudermos mostrar que $x(t)$ é continuável ao ponto $t = t_2$ para qualquer $t_2 > t_1$.

Teorema 3.5. *Seja $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua e tal que $\|f(x, t)\| \leq L^9$ para todo $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$, onde L é uma constante positiva. Então qualquer solução $x(t)$ da equação diferencial acima é continuável ao ponto $t = t_1$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [26].

3.2 Controle Ótimo em Tempo Infinito

Iniciamos agora a análise do problema de controle ótimo em um horizonte infinito de tempo, isto é, quando $T = \infty$ em (3.1). Seguimos com o princípio do máximo, tentando aplicar os resultados para este novo intervalo de tempo. Apresentamos de imediato um contra-exemplo que mostra que não se pode simplesmente tomar o limite do problema em tempo finito.

3.2.1 O contra-exemplo de Halkin

O seguinte contra-exemplo, apresentado em [19], mostra que a condição de transversalidade não é válida em tempo infinito. O problema é

$$\max \int_0^{\infty} (1-x)u \, dt \tag{3.28}$$

$$\tag{3.29}$$

sujeito às restrições

$$\dot{x} = (1-x)u \tag{3.30}$$

$$x(0) = 0 \tag{3.31}$$

$$u(t) \in [0, 1] \tag{3.32}$$

⁹Norma do sup.

como o integrando e a equação de movimento são idênticas podemos reescrever a integral como

$$\int_0^{\infty} \dot{x} dt = [x(t)]_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \quad (3.33)$$

vamos procurar um limite superior para x . A equação de movimento para x é

$$\dot{x} + u(t)x = u(t)$$

ou seja, uma equação diferencial ordinária de primeira ordem com coeficiente variável. A solução definida é dada por

$$x(t) = 1 - e^{-\int_0^t u dt} \quad (3.34)$$

Como $u(t) \in [0, 1]$, $\int_0^t u dt$ é não-negativo. Então o valor de $e^{-\int_0^t u dt}$ deve pertencer a $(0, 1]$ e o valor de $x(t)$ deve pertencer a $[0, 1)$. Segue que qualquer trajetória que faça $\int_0^t u dt \rightarrow \infty$ ao $t \rightarrow \infty$ maximiza o funcional objetivo em (3.34).

Seja $u^*(t) = u_0$ para todo t e $0 < u_0 < 1$. Como u_0 é interior ao conjunto de controle, vale que $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Como o Hamiltoniano para este problema é

$$H = (1 - x)u + p(1 - x)u = (1 + p)(1 - x)u$$

a condição $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ significa $(1 + p)(1 - x) = 0$, ou simplesmente $(1 + p) = 0$. Logo $p^*(t) = -1$, o que contradiz a condição de transversalidade.

Outros contra-exemplos, como os de Karl Shell e John Pitchford, podem ser encontrados em [12].

3.2.2 Critérios de Otimalidade

Uma questão de suma importância para o problema em tempo infinito é o que se entende por otimalidade. A seguir discutimos diferentes definições encontradas na literatura matemática e econômica¹⁰.

¹⁰Esta e as duas seções subsequentes são baseadas em [10]

Definição 3.7. Um par de funções $(x, u) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamado admissível se x for absolutamente contínua, u mensurável e se:

$$x(0) = x^0, \quad (3.35)$$

$$u(t) \in \mathcal{U} \text{ q.s. } t \geq 0 \quad (3.36)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \text{ q.s. em } [0, \infty). \quad (3.37)$$

Chamamos x de trajetória admissível e u de controle admissível.

Considere o sistema de controle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $t \in [0, \infty)$.

Dada um trajetória x gerada por um controle admissível, definimos um critério de avaliação para qualquer $\theta \geq 0$ por

$$J_\theta(x, u) = \int_0^\theta F(x(t), u(t), t) \quad (3.38)$$

onde F é uma aplicação contínua de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, \infty)$ em \mathbb{R} .

Definição 3.8. Uma trajetória x^* partindo de x^0 é dita¹¹:

1. **Strongly Optimal** em x^0 se for gerada por u^* tal que

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} J_\theta(x^*, u^*) < \infty \quad (3.39)$$

e para qualquer outra trajetória x partindo de x^0 gerada por u vale que

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} (J_\theta(x^*, u^*) - J_\theta(x, u)) \geq 0. \quad (3.40)$$

2. **Overtaking** em x^0 se (3.39) não for necessariamente válida, enquanto que a condição (3.40) for substituída por

$$\liminf_{\theta \rightarrow \infty} \{J_\theta(x^*, u^*) - J_\theta(x, u)\} \geq 0. \quad (3.41)$$

3. **Weakly Overtaking** em x^0 se a condição (3.41) for substituída por

$$\limsup_{\theta \rightarrow \infty} \{J_\theta(x^*, u^*) - J_\theta(x, u)\} \geq 0. \quad (3.42)$$

¹¹Optamos por manter a nomenclatura em inglês, pois não existe uma tradução consolidada para o português, uma tentativa de livre tradução poderia deturpar os conceitos.

4. **Finitely Optimal** em x^0 se para cada $\theta > 0$ e cada par admissível (x, u) definido em $[0, \theta]$ satisfazendo $x(\theta) = x^*(\theta)$ tem-se

$$J_\theta(x^*, u^*) \geq J_\theta(x, u). \quad (3.43)$$

Note que a otimalidade foi definida com relação à maximização do critério de avaliação.

Apresentamos agora outro conceito de otimalidade, desenvolvido na literatura econômica ([20]), chamado de **Agreeable Plan**.

Definição 3.9. Dada uma trajetória \tilde{x} partindo de x^0 e gerada pelo controle \tilde{u} , a restrição de \tilde{x} ao intervalo fechado $[0, t_f]$ é chamada de t_f -abertura de \tilde{x} e é denotada por \tilde{x}^{t_f} . De maneira análoga, a restrição do controle \tilde{u} a $[0, t_f]$ é chamada de t_f -abertura de \tilde{u} e denotada por \tilde{u}^{t_f} .

Dada uma trajetória \tilde{x}^* denotamos por $\mathcal{T}(\tilde{x}^*|t_f)$ o conjunto de todas as trajetórias \tilde{x} tais que $\forall t \in [0, t_f]$ tem-se $\tilde{x}(t) = \tilde{x}^*(t)$ isto é, que têm a mesma t_f -abertura que \tilde{x}^* . Para qualquer $\theta \geq 0$ defina

$$\overline{W}^\theta = \sup \{ J_\theta(\tilde{x}, \tilde{u}); \forall \tilde{x}, \text{ trajetória partindo de } x^0 \text{ e gerada por } \tilde{u} \} \quad (3.44)$$

e para um dado \tilde{x}^* partindo de x^0 :

$$W^\theta(\tilde{x}^*|t_f) = \sup \{ J_\theta(\tilde{x}, \tilde{u}); \forall \tilde{x} \in \mathcal{T}(\tilde{x}^*|t_f) \} \quad (3.45)$$

Claramente vale a seguinte relação

$$W^\theta(\tilde{x}^*|t_f) \leq \overline{W}^\theta \quad (3.46)$$

Definição 3.10. A trajetória \tilde{x}^* partindo de x^0 e gerada por \tilde{u}^* é aceitável se

$$\forall t_f > 0 \lim_{\theta \rightarrow \infty} \{ \overline{W}^\theta - W^\theta(\tilde{x}^*|t_f) \} = 0. \quad (3.47)$$

Intuitivamente isto nos diz que a trajetória é aceitável se, dado um início "errado", o erro se tornar desprezível com a passagem ao infinito.

Provaremos a seguir um resultado análogo ao princípio de otimalidade de Bellman. Considere qualquer trajetória $x^* : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gerada por qualquer controle admissível $u^* : [0, \infty) \rightarrow U$. Para qualquer tempo t_f denotamos por Π_{t_f} o conjunto de todos os pares admissíveis satisfazendo o sistema de controle. Então vale o seguinte:

Teorema 3.6 (Princípio de Otimalidade). *Se o par $(x^*, u^*) \in \Pi_\infty$ é ótimo de acordo com qualquer um dos critérios acima, então para qualquer $t_f \geq 0$ a t_f -abertura x^{*t_f} de x^* associada à t_f -abertura u^{*t_f} de u^* maximiza $J_{t_f}(x, u)$ no conjunto $\Pi_{t_f}^*$ de todos os pares (x, u) tais que $x(0) = x^0$; e $x(t_f) = x^*(t_f)$. Isto é, (x^*, u^*) é finitely optimal.*

Demonstração. (Carlson e Haurie) Se o resultado não é válido então para algum $t_f > 0$ e algum $(x^+, u^+) \in \Pi_{t_f}^*$ tem-se

$$\int_0^{t_f} F(x^+(t), u^+(t), t) dt > \int_0^{t_f} F(x^*(t), u^*(t), t) dt \quad (3.48)$$

e

$$x^+(t_f) = x^*(t_f) \quad (3.49)$$

É claro que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\int_0^{t_f} F(x^+(t), u^+(t), t) dt > \int_0^{t_f} F(x^*(t), u^*(t), t) dt + \epsilon_0 \quad (3.50)$$

seja agora $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \Pi_\infty$ definido por

$$(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \begin{cases} (x^+(t), u^+(t)) & \text{para } t \in [0, t_f] \\ (x^*(t), u^*(t)) & \text{para } t \in [t_f, \infty) \end{cases} \quad (3.51)$$

Da otimalidade de (x^*, u^*) segue que existe $\hat{\theta} > t_f$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_0^{\hat{\theta}} F(x^*(t), u^*(t)) dt > \int_0^{\hat{\theta}} F(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt - \frac{\epsilon_0}{2} \\ &= \int_0^{t_f} F(x^+(t), u^+(t), t) dt + \int_{t_f}^{\hat{\theta}} F(x^*(t), u^*(t), t) dt - \frac{\epsilon_0}{2} \\ &> \int_0^{\hat{\theta}} F(x^*(t), u^*(t), t) dt + \epsilon_0 - \frac{\epsilon_0}{2} \\ &= \int_0^{\hat{\theta}} F(x^*(t), u^*(t), t) dt + \frac{\epsilon_0}{2} \end{aligned}$$

Podemos agora estender a demonstração para o caso o caso de uma trajetória aceitável. Suponha que o teorema não seja verdadeiro. Então, para algum t_f , é possível encontrar $\epsilon > 0$ e um par $(x^+, u^+) \in \Pi_{t_f}^*$ tal que

$$\begin{aligned} J_{t_f}(x^+, u^+) &\geq J_{t_f}(x^*, u^*) + \epsilon \\ x^+(t_f) &= x^*(t_f). \end{aligned}$$

Agora para qualquer $\tau > t_f$ tem-se

$$W^\tau(x^*|t_f) \leq W^\tau(x^+|t_f) - \epsilon \leq \overline{W}^\tau - \epsilon$$

e portanto, quando $\tau \rightarrow \infty$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \overline{W}^\tau - W^\tau(\tilde{x}^*|t_f) \geq \epsilon > 0$$

que contradiz a definição de *agreeable plan*. □

3.2.3 O Princípio do Máximo

Podemos agora enunciar e demonstrar o princípio do máximo em horizonte infinito.

Teorema 3.7 (Princípio do Máximo em Horizonte Infinito). *Se $(x^*, u^*) \in \Pi_\infty$ é ótimo de acordo com qualquer definição de otimalidade acima, então existe um número não-negativo η e uma função contínua, diferenciável por partes $p : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que*

1. $|\eta, p(0)| = 1$
2. $-\dot{p}(t) = D_x H(t, x^*(t), p(t), u^*(t))$ q.s. em $[0, \infty)$
3. $H(t, x^*(t), p(t), u^*(t)) \geq H(t, x^*(t), p(t), u(t)) \quad \forall t \in [0, \infty), \quad \forall u \in \mathcal{U}$.

Demonstração. (Carlson e Haurie) Considere uma sequência $\theta_1, \theta_2, \dots$ estritamente crescente em $[0, \infty)$ com $\theta_i \rightarrow \infty$. A θ_i -abertura de (x^*, u^*) é ótima na classe $\Pi_{\theta_i}^*$ de pares (x, u) satisfazendo $x(\theta_i) = x^*(\theta_i)$. Do princípio do máximo para horizonte finito sabe-se que existe $\eta^i \geq 0$, $p^i : [0, \theta_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$|(\eta^i, p^i(0))| \neq 0 \quad (3.52)$$

$$-\dot{p}^i(t) = D_x H(t, x^*, u^*, \eta^i, p^i(t)) \quad \text{q.s. em } [0, \theta_i] \quad (3.53)$$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \eta^i, p^i(t)) \geq H(t, x^*(t), u(t), \eta^i, p^i(t)) \quad \forall t \in [0, \theta_i], \quad \forall u \in \mathcal{U}. \quad (3.54)$$

Através de uma normalização a condição (3.52) pode ser substituída por

$$|(\eta^i, p^i(0))| = 1$$

Tomando uma subsequência apropriada pode-se assumir que $\lim_{i \rightarrow \infty} \eta^i = \eta$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} p^i(0) = p(0)$ existem.

Seja $p : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a única solução contínua, C^1 por partes do sistema

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} H(x^*(t), u^*(t), \eta, L(t))$$

com a condição inicial

$$p(0) = \lim_{i \rightarrow \infty} p^i(0).$$

Tem-se então $|(\eta, p(0))| = 1$. Ademais, tem-se

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \eta, p(t)) \geq H(t, x^*(t), \eta, p(t))$$

$\forall t \in [0, \infty)$ e $\forall u \in \mathcal{U}$, como H é linear em p e η e como para qualquer t tem-se $p(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} p^i(t)$ devido à dependência contínua das soluções de um sistema diferenciável com respeito as condições iniciais ¹². Isto estabelece o teorema. \square

3.2.4 Condições Suficientes para Overtaking Optimality

Apresentamos um resultado desenvolvido originalmente por Mangasarian em [31] e estendido por Arrow e Kurz em [1].

Teorema 3.8. *Suponha que:*

1. *o conjunto U seja compacto e que exista um conjunto compacto X tal que qualquer trajetória partindo de x^0 e gerada por um controle admissível permaneça no interior, $\text{int}X$, de X .*

2. *A função*

$$H^*(t, x, \eta, p) = \max_{u \in \mathcal{U}} H(t, x, u, \eta, p)$$

exista para quaisquer t, η, p e defina uma função côncava de x .

3. *Exista uma trajetória x^* partindo de x^0 e gerada por um controle admissível u^* que satisfaz as condições necessárias do princípio do máximo em horizonte infinito com $\eta > 0$.*

¹²A este respeito ver [15]

4. A função adjunta p satisfaça a condição de transversalidade assintótica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t)\| = 0$$

Então a trajetória x^* é *overtaking* em x^0 .

Demonstração. (Carlson e Haurie) Como $H^*(\cdot, t, \eta, p)$ é côncavo em x , satisfaz

$$H^*(x, t, \eta, p(t)) \leq H^*(x^*(t), \eta, t, p(t)) + \left. \frac{\partial H^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=x^*(t)} (x - x^*(t)) \quad \forall t \in [0, \infty), \quad \forall x \in X. \quad (3.55)$$

usando a equação adjunta no princípio do máximo em horizonte infinito e a equação (3.52) pode-se mostrar que

$$\eta \{F(x^*(t), u^*(t)) - F(x(t), u(t))\} \geq \frac{d}{dt} [p(t)(x(t) - x^*(t))] \quad (3.56)$$

para qualquer outra trajetória x partindo de x^0 e gerada por u .

Integrando (3.56) em $[0, \theta]$ obtém-se

$$\eta \{J_\theta(x^*, u^*) - J_\theta(x, u)\} \geq p(\theta)(x(\theta) - x^*(\theta))$$

Como η é positivo a condição de transversalidade assintótica juntamente com a equação anterior implicam

$$\liminf_{\theta \rightarrow \infty} \{J_\theta(x^*, u^*) - J_\theta(x, u)\} \geq 0$$

e portanto x^* é *overtaking* em x^0 . □

Este teorema é bastante útil no estudo do crescimento econômico, pois nestes problemas a concavidade de H^* com respeito a x é consequência direta da hipótese da concavidade das funções de produção e de utilidade. Ademais, quando o fator de desconto é positivo, pode-se mostrar que a condição de transversalidade assintótica pode ser garantida.

A concavidade de H^* com respeito a x pode ser relaxada como mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.9. *Seja x^* uma trajetória partindo de x^0 e gerada por um controle admissível u^* . Seja p^* uma função contínua, continuamente diferenciável por partes de $[0, \infty)$ em \mathbb{R}^n . Defina o Hamiltoniano*

$$H(x, t, u, p) = F(x, u, t) + \langle p, f(x, u, t) \rangle$$

Suponha que:

1. $H(x^*(t), t, u^*(t), p^*(t)) + \langle \dot{p}^*(t), x^*(t) \rangle \geq H(x, t, u, p^*(t)) + \langle \dot{p}^*(t), x \rangle$ para todo $x \in X$ e $u \in \mathcal{U}$ para quase todo $t \in [0, \infty)$
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p^*(t), x^*(t) \rangle$ exista; e que seja válida a relação

$$-\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} \langle p^*(t), x^*(t) \rangle \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle p^*(t), x(t) \rangle$$

para qualquer trajetória admissível \tilde{x} . Então (x^*, u^*) é overtaking em x^0 .

Demonstração. Seja $(x, u) \in \Pi_\infty$. Pela hipótese 1, para qualquer $\theta > 0$

$$\int_0^\theta \left[F(x^*(t), u^*(t), t) + \frac{d}{dt}(p^*(t)x^*(t)) \right] dt \geq \int_0^\theta \left[F(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt}(p^*(t)x(t)) \right] dt$$

Então

$$\int_0^\theta [F(x^*(t), u^*(t), t) - F(x(t), u(t), t)] dt \geq p^*(t)(x^*(t) - x(t)).$$

Logo

$$\liminf_{\theta \rightarrow \infty} \{J_\theta(x^*, u^*) - J_\theta(x, u)\} \geq \liminf_{\theta \rightarrow \infty} p^*(\theta)(x^*(\theta) - x(\theta)) \geq 0$$

pela hipótese 2. □

3.3 A Abordagem por Espaços de Sobolev

Apresentamos aqui uma solução para o problema de controle em tempo infinito. Seguimos [29], as provas aqui omitidas podem ser encontradas naquele trabalho, ou em suas referências. As demonstrações aqui apresentadas são todas de [29].

Apresentamos inicialmente algumas breves definições acerca de espaço de Sobolev, necessárias para a solução do problema.

Seja $C_c^1(\mathbb{R}_{++}, \mathbb{R}^n)$ o conjunto de funções continuamente diferenciáveis de \mathbb{R}_{++} em \mathbb{R}^n com suporte compacto.

Definição 3.11. O espaço $W^{1,1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ é o espaço de funções $x \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ tais que existe uma função $x' \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\int_0^\infty x\phi' dt = - \int_0^\infty x'\phi dt, \quad \forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R}_{++}, \mathbb{R}^n).$$

Neste caso, x' é chamada de derivada de x no sentido de distribuições.

Algumas propriedades básicas deste espaço são:

- $W^{1,1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach para a norma $\|x\|_{W^{1,1}} = \|x\|_{L^1} + \|x'\|_{L^1}$.
- Se $x \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ então existe uma aplicação contínua única \tilde{x} em \mathbb{R}_+ tal que $x = \tilde{x}$ quase sempre.
- Para todos $\tau, \tau' \in \mathbb{R}_{++}$, $\tilde{x}(\tau) - \tilde{x}(\tau') = \int_{\tau'}^{\tau} x'(t) dt$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$.

Consideramos o problema de controle:

$$\max \int_0^{\infty} F(x(t), u(t)) e^{-rt} dt$$

sujeito a

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.57)$$

$$x(0) = x_0 \quad (3.58)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$.

Denotamos por E o espaço das funções de \mathbb{R}_+ em \mathbb{R}^n tais que $xe^{-rt} \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. A norma é dada por $\|x\|_E = \int_0^{\infty} \|x\| e^{-rt} dt + \int_0^{\infty} \|x'\| e^{-rt} dt$. Por $L^1(e^{-rt})$ entende-se o conjunto de funções tais que $xe^{-rt} \in L^1$, para um dado $r > 0$. Note que $x \in E$ implica que $\|x(t)\| e^{-rt} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

São necessárias as seguintes hipóteses:

1. $x \in E$ e $u \in L^1(e^{-rt})$
2. f e F são contínuas e suas derivadas, f_x e F_x , são contínuas.
3. Se x^*, u^* são ótimos, então $f_x(x^*, u^*) \in L^1(e^{-rt})$ e $F_x(x^*, u^*) \in L^1(e^{-rt})$.

A condição $x(0) = x_0$ deve ser entendida no sentido de que a única função contínua \tilde{x} que é quase sempre igual a x satisfaz $\tilde{x}(0) = x_0$. Enunciamos agora dois lemas, cujas provas são omitidas.

Lema 3.2. *Seja $L : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $L(x) = x(0)$. A aplicação L é Lipschitz.*

Lema 3.3. *Seja $D : x(t) \rightarrow Dx(t) = \dot{x}(t)$. D é contínua de E em $L^1(e^{-rt})$.*

Definição 3.12. *Uma trajetória $(x(t), u(t)), t \in [0, \infty)$ é admissível se $x \in E$ e $u \in L^1(e^{-rt})$ satisfizerem as restrições (3.57) e (3.58); e se a integral no funcional objetivo for convergente. Uma trajetória $(x^*(t), u^*(t))$ é uma solução ótima se for admissível e se o valor do funcional objetivo correspondente a qualquer trajetória admissível não for maior que o valor de $(x^*(t), u^*(t))$.*

O problema de otimização em questão pode ser reescrito como

$$\max J(x, u) = \int_0^\infty F(x(t), u(t))e^{-rt} dt$$

sujeito a

$$Dx = f(x, u)$$

$$Lx = x_0$$

onde $J : (E \cap L_+^1(e^{-rt})) \times L^1(e^{-rt}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Apresentamos agora a última hipótese, de fundamental importância:

Hipótese 4 A trajetória ótima é sustentada no seguinte sentido. Seja $(x^*(t), u^*(t))$ uma solução ótima. Existem multiplicadores $(a, q, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times L^\infty \times \mathbb{R}^n$ tais que: $\forall x \in (E \cap L_+^1(e^{-rt}))$, $\forall u \in L_+^1(e^{-rt})$,

$$\begin{aligned} aF(x^*, u^*) - q(Dx^* - f(x^*, u^*)) - \lambda(Lx^* - x_0) &\geq \\ aF(x, u) - q(Dx - f(x, u)) - \lambda(Lx - x_0). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Proposição 3.1. *Suponha que as hipóteses 1-4 sejam satisfeitas. Suponha que $x^*(t) > 0$, $\forall t$. Então $\exists p \in L^1$ tal que:*

$$aF_x(x^*, u^*)e^{-rt} + \dot{p}(t) + p(t)f_x(x^*, u^*) = 0, \quad (3.60)$$

no sentido de distribuições.

Demonstração. Por (3.59) é claro que podemos escrever $\forall x \in (E \cap L_+^1(e^{-rt}))$,

$$\begin{aligned} a \int_0^\infty [F(x^*, u^*) - F(x, u^*)]e^{-rt} dt - \int_0^\infty q(t)[Dx^* - Dx]e^{-rt} dt \\ + \int_0^\infty q(t)[f(x^*, u^*) - f(x, u^*)]e^{-rt} dt - \lambda[x^*(0) - x(0)] \geq 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Seja $h(t) \in C_c^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. Se $x^*(t) > 0 \forall t$, como $x^*(t)$ pode ser tomado contínuo, podemos tomar μ suficientemente pequeno tal que $x(t) = x^*(t) + \mu h(t) \in E$. Obtemos

$$\int_0^\infty aF_x(x^*, u^*)e^{-rt}h(t) dt - \int_0^\infty q(t)e^{-rt}\dot{h}(t) dt + \int_0^\infty q(t)e^{-rt}f_x(x^*, u^*)h(t) dt = 0$$

e portanto, com $p(t) = q(t)e^{-rt} \in L^1$,

$$aF_x(x^*, u^*)e^{-rt} + \dot{p}(t) + p(t)f_x(x^*, u^*) = 0$$

no sentido de distribuições. □

A condição de transversalidade segue como um corolário direto:

Corolário 3.2. *Sob as hipóteses da proposição acima, se uma solução ótima $(x^*(t), u^*(t))$ existe, então, necessariamente, $p(t)e^{rt} \in L^\infty$, com $p(t) = q(t)e^{-rt}$ definido na proposição. Em particular, $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)(x^*(t) - x_0) = 0$.*

Corolário 3.3. *Se $u^*(t)$ for contínua por partes então $\dot{p}(t)$ é contínua por partes.*

Demonstração. Como $p(t) \in L^1$, segue de (3.60) que $\dot{p}(t) \in L^1$ e portanto, $p(t)$ é contínua. Isto implica que $\dot{p}(t)$ é contínua por partes. □

A próxima proposição fornece a condição de Pontryagin com respeito a variável de controle.

Proposição 3.2. *Suponha que as hipóteses 1-4 sejam satisfeitas. Suponha que $u^*(t)$ seja contínuo e portanto $\dot{x}(t)$ seja contínuo. Então tem-se, para qualquer $u \in \mathbb{R}_+^m$,*

$$aF(x^*(t), u^*(t))e^{-rt} + p(t)f(x^*(t), u^*(t)) \geq aF(x^*(t), u)e^{-rt} + p(t)f(x^*(t), u). \quad (3.62)$$

Demonstração. Por (3.59) pode-se notar que, $\forall z \in L_+^1(e^{-rt})$,

$$a \int_0^\infty [F(x^*, u^*) - F(x^*, z)]e^{-rt} dt + \int_0^\infty p(t)[f(x^*, u^*) - f(x^*, z)] dt \geq 0. \quad (3.63)$$

Assuma, ao contrário, por continuidade

$$aF(x^*(t), u^*(t))e^{-rt} + p(t)f(x^*(t), u^*(t)) < aF(x^*(t), u)e^{-rt} + p(t)f(x^*(t), u)$$

em algum intervalo I em torno de t com uma constante positiva $u \geq 0$. Seja $u'(t) = u^*(t)$, $t \notin I$ e $u'(t) = u$ quando $t \in I$. Note que $u'(t) \in L_+^1(e^{-rt})$. Mas, isto viola (3.63), o que é uma contradição. □

Para provar a suficiência fazemos uso do Hamiltoniano, através de uma hipótese adicional.

Hipótese 5 Defina o Hamiltoniano

$$H(x, u, p, t) = F(x(t), u(t))e^{-rt} + p(t)f(x(t), u(t)).$$

Suponha que $\max_{u \geq 0} H(x, u, p, t)$ seja côncavo em x e $H(x^*, u^*, p, t) \geq H(x^*, u, p, t), \forall u \geq 0$.

A próxima proposição mostra a suficiência da condição de transversalidade.

Proposição 3.3. *Sob as hipóteses 1-3 e 5, uma condição suficiente para a que $(x^*(t), u^*(t))$ seja ótimo é*

$$p(t)e^{rt} \in L^\infty$$

Demonstração. Pela hipótese 5 temos, para todo $T > 0$:

$$\int_0^T F(x^*(t), u^*(t))e^{-rt} dt - \int_0^T F(x(t), u(t))e^{-rt} dt \geq p(T)(x(T) - x^*(T)).$$

Por hipótese, $p(t)e^{rt} \in L^\infty$. Temos então

$$\begin{aligned} |p(T)(x(T) - x^*(T))| &\leq \|p(T)\| e^{rT} [\|x(T)\|e^{-rT} + \|x^*(T)\|e^{-rT}] \\ &\leq K [\|x(T)\|e^{-rT} + \|x^*(T)\|e^{-rT}] \end{aligned}$$

Como $x \in E$ e $x^* \in E$, tem-se que $K [\|x(T)\|e^{-rT} + \|x^*(T)\|e^{-rT}] \rightarrow 0$ ao $T \rightarrow \infty$. O que conclui a demonstração. \square

Outras abordagens podem se encontradas em [8]; [25]; e [2].

4 O MODELO

Neste capítulo apresentamos nosso modelo, bem como sua solução. O capítulo está estruturado em 2 partes, na primeira apresentamos o modelo; na segunda parte exibimos soluções explícitas para algumas equações do modelo.

4.1 O Modelo

O modelo descrevendo o crescimento da economia é o modelo neoclássico padrão com tecnologia. Supomos que a economia seja fechada, de modo que todo o produto seja consumido ou investido, isto é, $Y(t) = C(t) + I(t)$. O problema de maximização é

$$\max \int_0^{\infty} U(C)e^{-rt} dt \quad (4.1)$$

sujeito a

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = sY(t) - \delta K(t) \quad (4.2)$$

onde a função de produção Y é a função Cobb-Douglas

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} \quad (4.3)$$

aqui K denota o estoque de capital da economia, L o trabalho, A a tecnologia¹, r é a taxa de desconto, s a taxa de poupança e δ a taxa de depreciação. $U(C)$ é a função de utilidade, que tomamos como sendo a função conhecida na literatura econômica como CES (*Constant Elasticity of Substitution*)

$$U(C) = \frac{C^{1-\rho} - 1}{1 - \rho} \quad (4.4)$$

onde ρ é a elasticidade de substituição. A substituição refere-se a substituir o consumo de um bem (ou cesta de bens) por outro (ou outra cesta) e a elasticidade refere-se a uma variação no preço.

¹Tomamos a tecnologia como sendo aumentadora de trabalho, fazemos esta hipótese apenas a fim de poder comparar nosso modelo com o modelo de Solow, que depende desta hipótese. A argumentação acerca da forma da tecnologia pode ser encontrada em [5]

A função de produção satisfaz as seguintes condições, conhecidas como condições de Inada

$$\begin{aligned}\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial Y}{\partial K} &= \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial Y}{\partial L} = \infty \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial Y}{\partial K} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial Y}{\partial L} = 0\end{aligned}$$

4.1.1 O Setor Educacional

4.1.1.1 Maximização da Tecnologia

Passemos agora à modelagem do setor educacional. Seja $L_R(t)$ o número de cientistas empregados em pesquisa ao tempo t ; e $L_E(t)$ o número de cientistas empregados no ensino ao tempo t . A fração de novos cientistas alocados ao ensino é denotada por a ; e δ denota a taxa de depreciação, que por simplicidade assumimos que seja igual a do capital. Supomos que pesquisadores e professores sejam os únicos agentes na economia, isto é, a população total é dada por $L(t) = L_R(t) + L_E(t)$.

Por simplicidade fazemos duas hipóteses um tanto irrealistas, primeiro que um cientista não pode ser pesquisador e professor; e segundo que, uma vez que uma escolha de carreira foi feita, não é mais possível alterar-la. Ademais, supomos que as cotas inferior e superior de a são maior que zero e menor que um, respectivamente; isto é, $0 < \underline{a} \leq a \leq \bar{a} < 1$. Alocações 0,1 são vistas como inaceitáveis em sociedades democráticas.

Em nossa modelagem propomos que a tecnologia seja gerada exclusivamente por pesquisadores, ao passo que professores produzem apenas cientistas, que por sua vez podem ser alocados para a pesquisa ou para o ensino. O problema é então a determinação da alocação intertemporal ótima de cientistas entre as duas carreiras, de modo a maximizar a tecnologia, que por sua vez impulsiona o crescimento econômico.

Fazemos a suposição de que o planejador social é "míope", por isto queremos dizer que o planejador resolve primeiramente o problema de maximização da tecnologia e, a seguir, resolve o problema de maximização da tecnologia, ao invés de resolver os dois problemas de uma só vez. Tal suposição parece plausível no caso de um governo em que

diferentes agências, uma preocupada com a educação e outra com a economia, trabalham de maneira independente.

O problema de maximização é então

$$\max \int_0^{\infty} A(L_R)e^{-rt} dt \quad (4.5)$$

sujeito a

$$\begin{cases} \dot{L}_E(t) = a(t)\gamma L_E - \delta L_E \\ \dot{L}_R(t) = (1 - a(t))\gamma L_E - \delta L_R \end{cases} \quad (4.6)$$

onde γ é um parâmetro que mede a produtividade dos professores.

Seguimos [38] na modelagem da evolução tecnológica, mas permitimos formas funcionais mais complexas. O número de pesquisadores é o argumento de uma função Λ , a ser especificada, que determina parcialmente o progresso técnico. Temos

$$\dot{A} = \Lambda(L_R)[A(t)]^{\beta_1} \quad (4.7)$$

onde β_1 é um parâmetro que mede quão intensivamente o desenvolvimento tecnológico futuro depende sobre o nível técnico corrente. Impomos sobre $\Lambda(\cdot)$ a condição que $\Lambda \in AC(I)$, isto é, que Λ pertença ao espaço de funções absolutamente contínuas $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$.

Nosso modelo é então dado por dois sistemas desacoplados que podem ser resolvidos com as técnicas do capítulo anterior. Temos de resolver primeiramente o modelo do setor educacional a fim de obter a trajetória da evolução tecnológica, que será utilizada como um insumo na função de produção.

4.1.1.2 Tempo Mínimo

Apresentamos agora uma variação do modelo acima. Fixamos valores desejados para as variáveis de estado L_E e L_R , buscamos agora não mais maximizar a tecnologia, mas sim atingir estes valores desejados no menor tempo possível. Intuitivamente este modelo pode ser compreendido como o tempo mínimo para que um país tecnologicamente atrasado alcance a fronteira tecnológica mundial.

O funcional a ser maximizado é então

$$\max \int_0^T -1 dt \quad (4.8)$$

agora $T \in [0, \infty)$ é desconhecido e é o que objetivamos minimizar. As restrições são as mesmas que no modelo de maximização da tecnologia. Adicionalmente temos $L_E(T) = \overline{L_E}$ e $L_R(T) = \overline{L_R}$, que são os valores desejados das variáveis de estado.

4.2 Solução do Modelo

4.2.1 Maximização da Tecnologia

Tomamos as condições iniciais: $L_E(t_0) = \underline{L_E}$, $L_R(t_0) = \underline{L_R}$, $A(t_0) = A_0$. Note que o integrando de nosso funcional objetivo é um operador não-linear, o que certamente dificulta a análise, pois os teoremas do capítulo anterior fornecem condições apenas no caso de uma função. Para tratar deste caso fazemos uma transformação no funcional objetivo a fim de obter o problema na forma das hipóteses dos teoremas. Escreva $B(t) = \int_0^t \Lambda(L_R(\tau)) + A_0^{1-\beta_1}$. Temos então

$$\max \int_0^\infty A(L_R)e^{-rt} dt = \max \int_0^\infty [(1 - \beta_1)B(t)]^{\frac{1}{1-\beta_1}} e^{-rt} dt \quad (4.9)$$

Restrito a

$$\begin{cases} \dot{L}_E(t) = a(t)\gamma L_E - \delta L_E \\ \dot{L}_R(t) = (1 - a(t))\gamma L_E - \delta L_R \\ \dot{B}(t) = \Lambda(L_R(t)) \end{cases} \quad (4.10)$$

Antes de prosseguir com a solução do modelo, é interessante verificar que este de fato satisfaz as condições do teorema que garante a existência de solução. Lembramos que o teorema de existência foi proposto para o caso de tempo finito, a que nos restringimos momentaneamente.

A primeira condição a se verificar é a de crescimento linear nas funções g_i em (3.19). A função g_0 é dada por $(-\delta L_E, -\delta L_R + \gamma L_E, \Lambda(L_R))$. Vemos claramente que a condição é satisfeita nas duas primeiras componentes. Na terceira componente a condição

é satisfeita para algumas funções côncavas, como $\log(1+x)$, que pretendemos utilizar em trabalhos futuros. Para as funções g_i que multiplicam os controles temos $(\gamma L_E, -\gamma L_E, 0)$, que claramente satisfaz a condição de crescimento linear.

A segunda condição é verificar que $U(t)$ é fechado e convexo, o que é trivial em nosso modelo pois como o controle é unidimensional temos um intervalo fechado em \mathbb{R} .

A terceira condição é verificar a semi-continuidade inferior de S em (3.18) e que os conjuntos E, Q em (3.21) são fechados. Como em nosso modelo $S = 0$ constante, segue que S é contínua e, portanto, semi-contínua. Os conjuntos serem fechados segue de o sistema das variáveis de estado ser limitado em tempo finito.

A quarta condição é verificar a LB-mensurabilidade do integrando do funcional objetivo, bem como sua semi-continuidade inferior, convexidade (na variável de controle) e a existência de uma constante como em (3.23). Note que o teorema de existência foi postulado para a minimização do funcional objetivo, e queremos aqui a maximização deste. É um resultado conhecido que podemos alterar o sinal do integrando no funcional objetivo e obter um problema de maximização análogo ao de minimização, invertendo as relações de convexidade e concavidade das funções envolvidas. Como o integrando é contínuo, a condição de LB-mensurabilidade é satisfeita bem como a semi-continuidade; a concavidade segue diretamente de o funcional objetivo ser independente da variável de controle; para a constante que limita o integrando podemos tomar por simplicidade o maior valor que o integrando pode assumir para um intervalo finito de tempo e L_R tomado na ausência de depreciação.

A quinta hipótese segue novamente de o sistema ser limitado em tempo finito. E a sexta hipótese segue de o conjunto de controles admissíveis ser fechado.

Observe que não temos uma generalização para horizonte infinito do resultado verificado acima. A abordagem por espaços de Sobolev nos fornece condições suficientes para a existência de solução para o problema de controle. Uma das condições daquela abordagem é a concavidade do Hamiltoniano em relação a x , chamada de hipótese 5. Para

verificar esta condição montamos a matriz Hessiana, que deve ser negativa semi-definida,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 F'' & 0 \\ 0 & 0 & \beta [(1 - \beta)B(t)]^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} e^{-rt} \end{pmatrix}$$

Temos que $p_3 > 0$ e $F'' < 0$ por hipótese; e $B > 0, \beta > 0$ implicam que $\beta [(1 - \beta)B(t)]^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} e^{-rt} > 0$, portanto a matriz Hessiana é indefinida e não podemos aplicar o resultado. Como observado por Clarke ([13], p.497) isto não nos impede de tentar encontrar uma solução.

Para o caso de tempo infinito temos ainda de especificar com qual critério de otimalidade trabalhamos. Nosso critério de avaliação (veja (3.38)) é $J_\theta = \int_0^\theta [(1 - \beta_1)B(t)]^{\frac{1}{1-\beta_1}}$. Note que como utilizamos um termo de desconto e^{-rt} podemos garantir a finitude q.s. do critério de avaliação, sempre que $B(t)$ tiver crescimento menor que exponencial. Podemos portanto utilizar a *strong optimality* pois o critério de avaliação é finito quando $\theta \rightarrow \infty$. Contudo, não há perda em usar o critério mais fraco de *overtaking* que requer $\liminf \{J_\theta(x^*, u^*) - J_\theta(x, u)\} \geq 0$, ou seja,

$$\liminf_{\theta \rightarrow \infty} \int_0^\theta (1 - \beta_1)^{\frac{1}{1-\beta_1}} e^{-rt} \left((B^*)^{\frac{1}{1-\beta_1}} - B^{\frac{1}{1-\beta_1}} \right) dt \geq 0 \quad (4.11)$$

Se a solução do sistema dinâmico (neste caso da equação de \dot{B}) for única, $B^* = B$, implicando que o resultado é válido. Caso contrário não podemos garantir que a trajetória seja *overtaking*. Em nosso modelo a unicidade depende da forma da função F , se esta for Lipschitz, a solução é única. A função $\log(1 + x)$ que usaremos adiante é Lipschitz para $x \geq 0$, neste caso a trajetória é *overtaking*.

Retornemos agora à solução do problema. Formamos a função Hamiltoniana

$$H = [(1 - \beta_1)B(t)]^{\frac{1}{1-\beta_1}} e^{-rt} + p_1[a(t)\gamma L_E - \delta L_E] + p_2[\gamma(1 - a(t))L_E - \delta L_R] + p_3\Lambda(L_R(t)) \quad (4.12)$$

Como a função Hamiltoniana é linear em $a(t)$ concluímos que o controle é do tipo *Bang-Bang*, pela condição de máximo do princípio do máximo de Pontryagin devemos tomar a de modo a maximizar o Hamiltoniano. Como H é uma função linear de a esperamos que o ótimo seja na fronteira. Podemos ver isto através do Hamiltoniano, ignorando os termos que não dependem do controle, temos

$$\gamma L_E(p_1 - p_2)a \quad (4.13)$$

como $L_E > 0$ vemos facilmente que o ótimo se dá com \underline{a} e \bar{a} .

Formamos a função que determina o tempo de troca

$$S(t) := \gamma L_E(p_1 - p_2) \quad (4.14)$$

os zeros desta função fornecem os pontos de troca dos controles. Supomos que existe apenas uma troca de controles, efetuada em $t = t_s$ ². Os controles são dados por

$$\begin{cases} a(t) = \underline{a} & \text{para } S(t) > 0 \\ a(t) = \bar{a} & \text{para } S(t) < 0 \end{cases}$$

ou seja, $a(t) = \underline{a}$ para $t < t_s$ e $a(t) = \bar{a}$ para $t > t_s$. No caso de $S(t) = 0$ dizemos que o controle é singular. Do ponto de vista matemático não temos informação sobre o controle singular, mas pela interpretação econômica das variáveis de coestado temos que $p_1 = p_2$ significa que a valoração das variáveis L_E e L_R é igual, poderíamos ter, portanto, $a(t) = 0.5$ para $S(t) = 0$. De qualquer maneira, não faremos uso desta observação.

As condições de primeira ordem com respeito às variáveis de coestado são dadas por

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial L_E} = -(p_1(a(t)\gamma - \delta) + p_2\gamma(1 - a(t))) \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial L_R} = \delta p_2 - p_3\Lambda'(L_R(t)) \\ \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial B} = -[(1 - \beta_1)B(t)]^{\frac{\beta_1}{1-\beta_1}} e^{-rt} \end{cases} \quad (4.15)$$

As condições de primeira ordem com respeito às variáveis de estado são simplesmente

$$\begin{cases} \dot{L}_E(t) = a(t)\gamma L_E - \delta L_E \\ \dot{L}_R(t) = (1 - a(t))\gamma L_E - \delta L_R \\ \dot{B}(t) = \Lambda(L_R(t)) \end{cases} \quad (4.16)$$

Passemos agora à resolução destes sistemas³. Note que ambos sistemas podem ser desacoplados para a solução. Resolvemos primeiramente a equação para L_E e a seguir para L_R . Para $t \in [0, t_s)$ temos

$$\dot{L}_E = (\underline{a}\gamma - \delta)L_E$$

²Veremos adiante que o problema pode ser posto de modo que não exista um intervalo tal que $t = t_s$

³Tomamos as equações diferenciais no sentido de Caratheodory.

que é uma equação diferencial ordinária separável, cuja solução é

$$L_E(t) = \underline{L}_E e^{(\underline{a}\gamma - \delta)t} \quad (4.17)$$

de maneira análoga encontramos a solução para (t_s, ∞)

$$L_E(t) = \underline{L}_E e^{\gamma(\underline{a} - \bar{a})t_s + (\bar{a}\gamma - \delta)t} \quad (4.18)$$

Note que utilizamos (4.17) avaliado em t_s para encontrar a condição inicial para a solução da equação para $t > t_s$. Isto é, descartamos a avaliação em t_s com o controle singular. Isto se deve a natureza do problema em questão, o parâmetro γ , por exemplo, mede a produtividade dos docentes, tem portanto uma componente temporal, isto é, pode ser vista como cientistas produzidos por ano (ou período). Não faz sentido do ponto de vista físico que o tempo de transição tenha alguma duração, isto é, em um período temos um controle e no seguinte temos outro. Portanto podemos descartar o incremento exatamente em t_s , pois a "produtividade instantânea" é desprezível.

Podemos resolver agora a segunda equação. Para $t \in [0, t_s)$ temos

$$\dot{L}_R = (1 - \underline{a})\gamma L_E - \delta L_R$$

substituindo os resultados de (4.17) obtemos

$$\dot{L}_R + \delta L_R = (1 - \underline{a})\gamma \underline{L}_E e^{(\underline{a}\gamma - \delta)t}$$

cuja solução é

$$L_R(t) = \frac{(1 - \underline{a})}{\underline{a}} \underline{L}_E e^{(\underline{a}\gamma - \delta)t} + \left(L_R - \frac{(1 - \underline{a})}{\underline{a}} \underline{L}_E \right) e^{-\delta t} \quad (4.19)$$

e para $t \in (t_s, \infty)$ temos

$$\dot{L}_R + \delta L_R = (1 - \bar{a})\gamma \underline{L}_E e^{\gamma(\underline{a} - \bar{a})t_s + (\bar{a}\gamma - \delta)t}$$

cuja solução é

$$L_R(t) = \frac{(1 - \bar{a})}{\bar{a}} \underline{L}_E e^{\gamma(\underline{a} - \bar{a})t_s + (\bar{a}\gamma - \delta)t} + \left\{ \frac{(\bar{a} - \underline{a})}{\underline{a}\bar{a}} \underline{L}_E e^{(\underline{a}\gamma)t_s} e^{-\delta t} + \left(L_R - \frac{1 - \underline{a}}{\underline{a}} \underline{L}_E \right) \right\} e^{-\delta t} \quad (4.20)$$

A fim de simplificar a notação fazemos

- $\Psi_1 = \frac{(1-\bar{a})}{\underline{a}} \underline{L}_E e^{\gamma(\underline{a}-\bar{a})t_s}$
- $\Psi_2 = \frac{(\bar{a}-\underline{a})}{\underline{a}\bar{a}} \underline{L}_E e^{(\underline{a}\gamma-\delta)t_s}$
- $\Psi_3 = \left(\underline{L}_R - \frac{1-\underline{a}}{\underline{a}} \underline{L}_E \right)$

podemos então reescrever a solução da equação como

$$L_R(t) = \Psi_1 e^{\bar{a}\gamma t} + (\Psi_2 + \Psi_3) e^{-\delta t} \quad (4.21)$$

Passemos agora à terceira equação. Para $t \in (t_0, t_s)$ temos

$$B(t) = \int_{t_0}^t \Lambda \left(\frac{1-\underline{a}}{\underline{a}} \underline{L}_E e^{(\underline{a}\gamma-\delta)\tau} + \left(\underline{L}_R - \frac{1-\underline{a}}{\underline{a}} \underline{L}_E \right) e^{-\delta\tau} \right) d\tau - B(t_0) \quad (4.22)$$

onde $B(t_0) = \underline{A}^{1-\beta_1}$ como pode ser visto pela definição de $B(t)$. Para $t \in (t_s, \infty)$ temos

$$B(t) = \int_{t_s}^t \Lambda (\Psi_1 e^{\bar{a}\gamma\tau} + (\Psi_2 + \Psi_3) e^{-\delta\tau}) d\tau - B(t_s) \quad (4.23)$$

Todas as trajetórias de interesse já foram determinadas, resta apenas determinar o tempo de troca t_s , para isto temos de resolver o sistema das variáveis de coestado e calcular o zero da função de troca. Este sistema está definido como acima, equação (4.15). Note que novamente podemos desacoplar o sistema. Resolvemos inicialmente para p_3 , a solução é

$$p_3(t) = - \int_{t_s}^t [(1-\beta_1)B(\tau)]^{\frac{\beta_1}{1-\beta_1}} e^{-r\tau} d\tau + C_3 \quad (4.24)$$

para p_2 temos

$$p_2(t) = -e^{\delta t} \int e^{-\delta t} p_3 \Lambda'(L_R(t)) + C_1 e^{\delta t} \quad (4.25)$$

para p_1 temos

$$p_1(t) = e^{(\bar{a}\gamma-\delta)t} \left[- \int p_2 \gamma (1-\bar{a}) e^{(\bar{a}\gamma-\delta)t} dt + C_2 \right] \quad (4.26)$$

para $t \in (t_s, \infty)$, onde C_1 e C_2 são constantes, esta escolha de t ficará clara a seguir.

Note que não temos condições iniciais para as variáveis de coestado, portanto não podemos obter uma solução única para o problema. Temos de usar a condição de transversalidade e resolver a equação para trás no tempo. Note porém que a taxa de desconto faz com que as soluções tenham decaimento exponencial, implicando que a condição de transversalidade não nos fornece informações adicionais. Temos portanto de

desenvolver um método numérico para resolver tal problema, que é o objeto do próximo capítulo. Porém antes disso vamos resolver os problemas de minimização do tempo e de maximização da utilidade. Mostramos ainda que o controle é não-singular.

Proposição 4.1. *Existe uma escolha de parâmetros de modo que o controle seja não-singular.*

Demonstração. Para que o controle seja singular devemos ter um intervalo tal que a função de troca seja nula. Como $L_E > 0$ temos que $S(t) = 0$ se, e somente se, $p_1 = p_2$, como buscamos um intervalo, devemos ter também $\dot{p}_1 = \dot{p}_2$. Nos referiremos a p_1, p_2 momentaneamente por p . Das condições de primeira ordem com respeito as variáveis de coestado temos

$$\begin{aligned} -p_1(a\gamma - \delta) - p_2\gamma(1 - a) &= \delta p_2 - p_3\Lambda'(L_R) \\ -p(\gamma - \delta) &= \delta p - p_3\Lambda'(L_R) \\ \gamma &= \frac{p_3\Lambda'(L_R)}{p} \end{aligned}$$

tomando γ diferente da relação acima temos que o controle é não-singular⁴. □

4.2.2 Minimização do Tempo

A função Hamiltoniana é

$$H = -1 + p_1[a(t)\gamma L_E - \delta L_E] + p_2[\gamma(1 - a(t))L_E - \delta L_R] \quad (4.27)$$

Usando as equações (4.18) e (4.21) obtemos o sistema

$$\overline{L_E} = \underline{L_E} e^{\gamma(\underline{a} - \bar{a})t_s + (\bar{a}\gamma - \delta)T} \quad (4.28)$$

$$\overline{L_R} = \Psi_1 e^{\bar{a}\gamma T} + (\Psi_2 + \Psi_3) e^{-\delta T} \quad (4.29)$$

Resolvendo este sistema obtemos os valores de t_s e T , estes valores, por sua vez, são utilizados na resolução do problema de maximização da utilidade.

⁴Isto é possível neste trabalho pois não faremos uma análise empírica, isto é, existe a possibilidade prática de que os parâmetros sejam tais que o controle é singular, mas não abordaremos esta possibilidade aqui.

4.2.3 Maximização da Utilidade

Como destacamos no capítulo 2, estamos interessados no crescimento *per capita*. Para transformar nossas variáveis para valores *per capita* dividimos a função de produção por L e usamos a propriedade de retornos constantes a escala da função Cobb-Douglas. A função de produção pode ser então reescrita como

$$y = k^\alpha (Al_R)^{(1-\alpha)} \quad (4.30)$$

Para a equação do capital temos

$$\dot{K}/L = sy - \delta k$$

note que do lado direito da igualdade temos variáveis *per capita*, ao passo que do lado esquerdo não, portanto não temos uma equação diferencial usual. Para obter o lado direito em valores *per capita* tomamos a derivada de $k = K/L$ com respeito ao tempo, assim temos

$$\dot{k} = \frac{d(K/L)}{dt} = \frac{\dot{K}}{L} - nk \quad (4.31)$$

onde n denota o crescimento populacional. Combinando as equações temos

$$\dot{k} = sy - (n + \delta)k \quad (4.32)$$

O crescimento populacional é dado por

$$n = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{L}_R + \dot{L}_E}{L} \quad (4.33)$$

usando as equações para \dot{L}_R e \dot{L}_E obtemos

$$n(t) = \gamma \frac{L_E}{L_E + L_R} - \delta \quad (4.34)$$

l_R é dado por $\frac{L_R}{L_R + L_E}$.

Para este problema não faremos a análise da existência das soluções, pois trata-se de um modelo já bem estabelecido e estudado em profundidade na literatura. Notamos apenas que pode-se fazer a análise através de espaços de Sobolev, como mostrado em [29]. Naquele trabalho os autores impõem duas condições adicionais que garantem a existência da solução, a saber, que $U \in C^1$ seja estritamente côncava, crescente com

$U'(0) \leq \infty$; e que $y \in C^1$ com $y'(0) > \delta$, $y'(0) < \infty$, $y'(\infty) = 0$. Estas condições são facilmente verificadas para as funções CES e Cobb-Douglas.

Formamos a função Hamiltoniana

$$H = U(c)e^{-rt} + \mu [k^\alpha (Al_R)^{1-\alpha} - c - (n + \delta)k] \quad (4.35)$$

A condição de primeira ordem com respeito à variável de controle é

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U' e^{-rt} - \mu = 0 \quad (4.36)$$

A condição com respeito à variável de coestado é

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\mu (\alpha k^{\alpha-1} (Al_R)^{1-\alpha} - (n + \delta)) \quad (4.37)$$

e a condição com respeito à variável de estado é

$$\dot{k} = k^\alpha (Al_R)^{1-\alpha} - c - (n + \delta)k \quad (4.38)$$

temos portanto o sistema

$$\begin{cases} \dot{k} = k^\alpha (Al_R)^{1-\alpha} - c - (n + \delta)k \\ \dot{\mu} = -\alpha k^{\alpha-1} (Al_R)^{1-\alpha} + (n + \delta)\mu \end{cases} \quad (4.39)$$

Observe que uma solução no plano $k\mu$ é destituída de significado, pois os valores de μ são de pouca importância, buscamos com efeito uma solução no plano kc . Portanto efetuamos uma manipulação algébrica padrão (na literatura econômica) na equação (4.36), a saber, tomamos a derivada com relação ao tempo

$$\dot{\mu} = [U'' \dot{c} - rU'] e^{-rt}$$

de modo que substituindo no sistema acima tenhamos

$$\begin{cases} \dot{k} = k^\alpha (Al_R)^{1-\alpha} - c - (n + \delta)k \\ \dot{c} = \frac{c}{\rho} [\alpha k^{\alpha-1} (Al_R)^{1-\alpha} - (n + \delta + r)] \end{cases} \quad (4.40)$$

que está no plano kc como queríamos.

Tradicionalmente na literatura econômica procura-se por um estado estacionário das variáveis k e c , porém, como desenvolveremos soluções numéricas para o setor educacional, é interessante desenvolver também soluções numéricas para este sistema, de modo que possam ser combinadas com as soluções do setor educacional.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentamos a solução numérica do modelo. Infelizmente não conseguimos desenvolver ainda um esquema numérico capaz de lidar com a maximização da tecnologia, principalmente devido ao fato de um dos sistemas ser para frente no tempo e o outro para trás.

Conseguimos, no entanto, resolver numericamente os problemas de minimização do tempo e maximização da utilidade. Trabalhamos no horizonte de tempo definido pelo problema de minimização de tempo, isto é, resolvemos o problema de minimização do tempo, determinando T e t_s e, a seguir, utilizamos estes valores no problema de maximização da utilidade, ou seja, utilizamos o horizonte de tempo T . Estes resultados são apresentados a seguir. Note que como não temos progresso técnico neste modelo, tomamos $A = 1$ constante.

A resolução foi feita através do software Maple 16, utilizando suas próprias ferramentas internas. Para a resolução do sistema algébrico não-linear que determina o tempo mínimo e o tempo de troca o algoritmo padrão é Newton-Raphson. Para a resolução do sistema de equações diferenciais o algoritmo padrão é Runge-Kutta de ordem 4.

Consideraremos sempre o mesmo problema e variaremos os parâmetros. O problema é levar L_E de 100 a 200 e L_R de 80 a 240 no menor tempo possível. A primeira resolução utiliza os seguintes parâmetros e condições iniciais:

- $\underline{a} = 0.9$ e $\bar{a} = 0.1$;
- $\gamma = 0.14$;
- $\delta = 0.02$;
- $\alpha = 0.5$;
- $\rho = 0.8$;
- $r = 0.02$;
- $k(0) = 0.75$; e

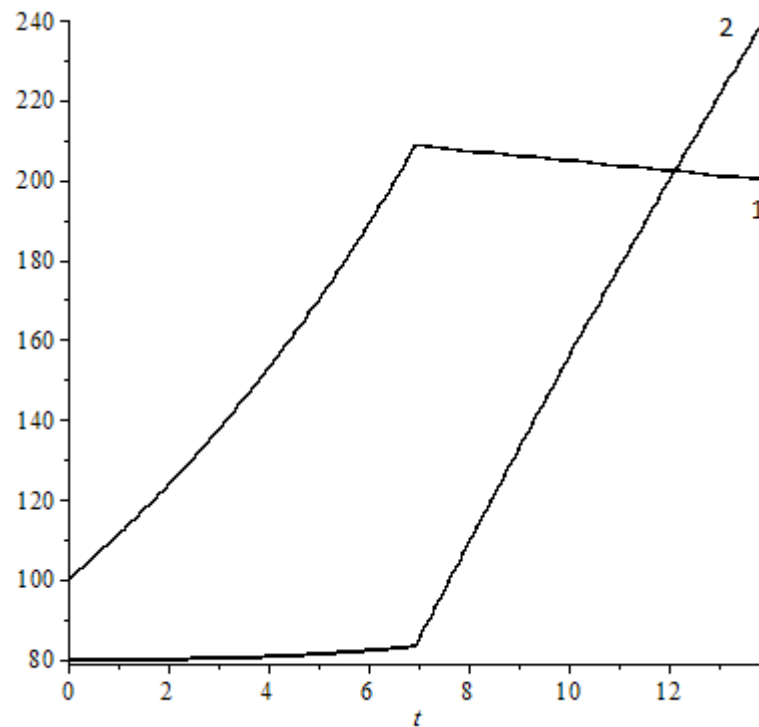


Figura 5.1: Quantidade de professores (curva 1) e pesquisadores (curva 2) ao longo do tempo

- $c(0) = 0.15$

O tempo até atingir a condição final é 13.91998396 e a troca de controles ocorre ao tempo $t = 6.934527538$. A evolução de L_E e L_R é dada na figura 5.1, onde a linha 1 representa a quantidade de professores e a linha 2 a quantidade de pesquisadores. Alternativamente, a evolução destas variáveis pode ser vista na figura 5.2.

Capital e consumo evoluem de acordo com a figura 5.3, onde a linha 3 representa o capital e a linha 4 o consumo¹. É interessante notar que com esta configuração temos uma trajetória crescente para as duas variáveis, o que nem sempre é o caso, como veremos adiante. Finalmente, o produto da economia evolui de acordo com a figura 5.4.

Note que com esta configuração a economia cresce rapidamente, o produto *per capita* mais que dobra em 13 anos. É interessante observar que para $t \in (0, t_s)$ o produto da economia evolui de maneira semelhante ao previsto pelo modelo de Solow. Já a partir de t_s a evolução da economia aproxima-se ao previsto por modelos AK. Isto pode

¹Manteremos esta numeração das curvas de cada variável no restante do texto a fim de facilitar a leitura.

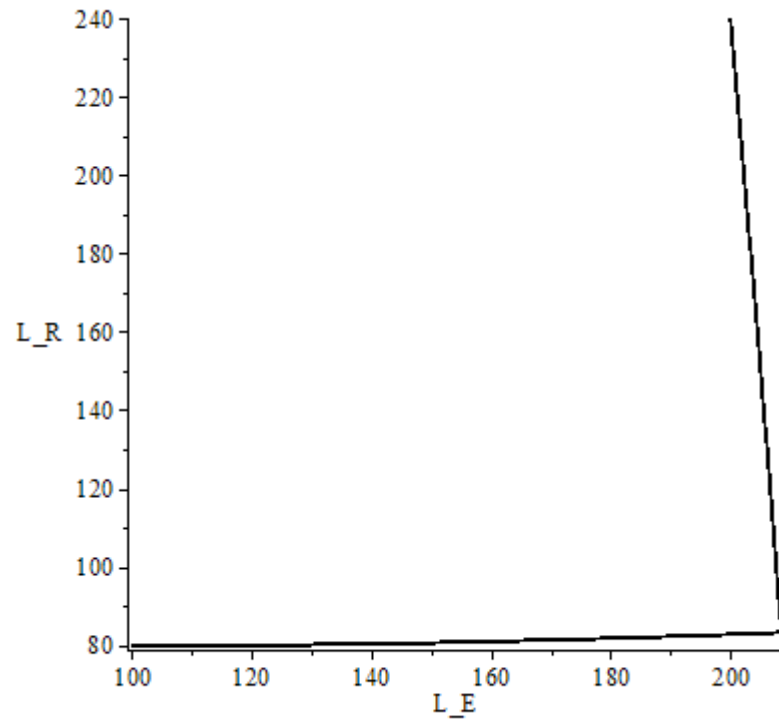


Figura 5.2: Quantidade de professores e pesquisadores

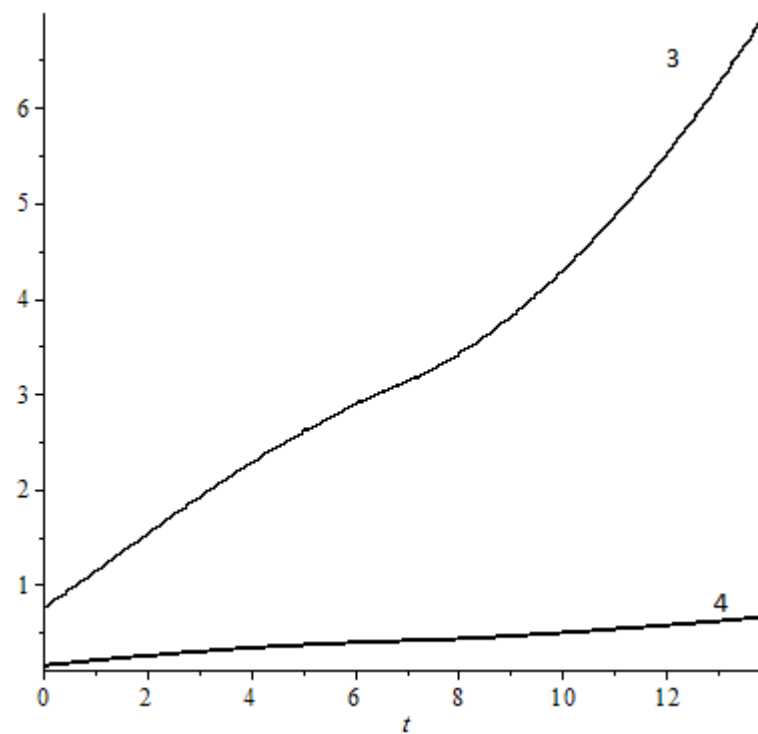


Figura 5.3: Capital (curva 3) e consumo (curva 4) ao longo do tempo

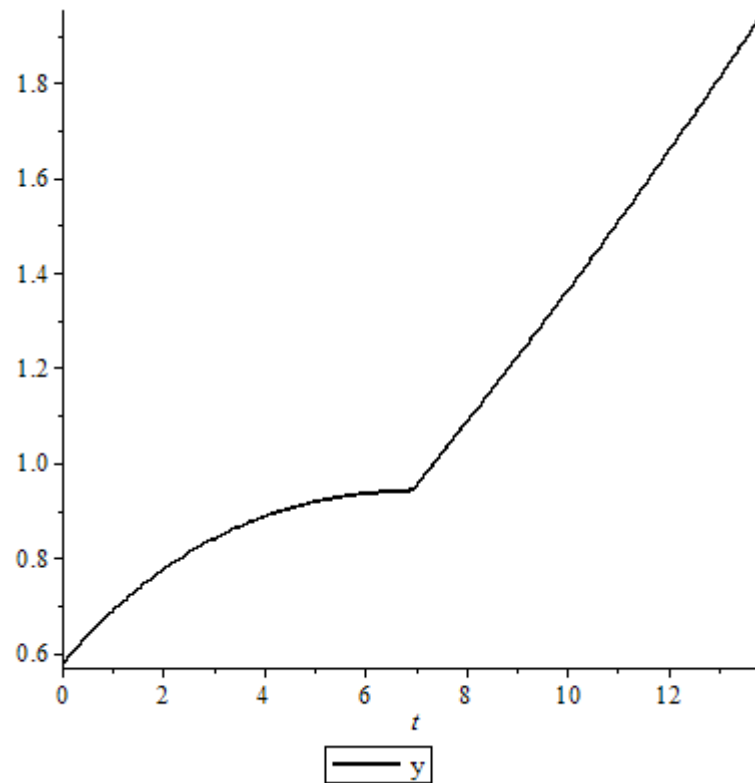


Figura 5.4: Produto da economia ao longo do tempo

refletir, de certo modo, uma tecnologia cuja produtividade cresce rapidamente uma vez que atinge-se um nível mínimo de determinado insumo.

Consideramos o mesmo problema agora, reduzindo a produtividade dos professores (γ) de 0.14 a 0.09. Com isto o tempo para atingir a condição final é de 25.03730838 e a troca de controles ocorre ao tempo $t = 13.45218851$. A evolução de L_E e L_R pode ser vista na figura 5.5, ou ainda na figura 5.6.

Destacamos inicialmente como uma moderada variação na produtividade (35% aproximadamente) praticamente dobra o tempo para a obtenção dos valores finais desejados. Este impacto repercute na economia como vemos nos gráficos 5.7 e 5.8. Note que a redução da produtividade dos professores reduz o crescimento econômico. Aqui tomamos a produtividade exógena e constante, mas se pensarmos que a baixa produtividade dos professores pode, por sua vez, gerar novos professores de baixa qualidade, levando assim a economia a uma trajetória de baixo crescimento, vemos de modo ainda mais latente a importância da qualidade dos docentes na economia.

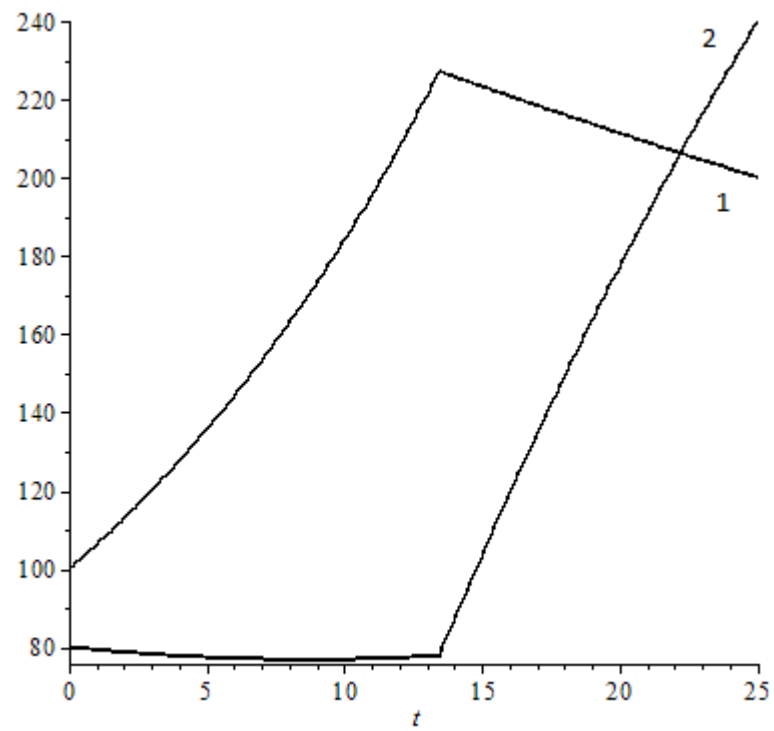


Figura 5.5: Quantidade de professores (curva 1) e pesquisadores (curva 2) ao longo do tempo

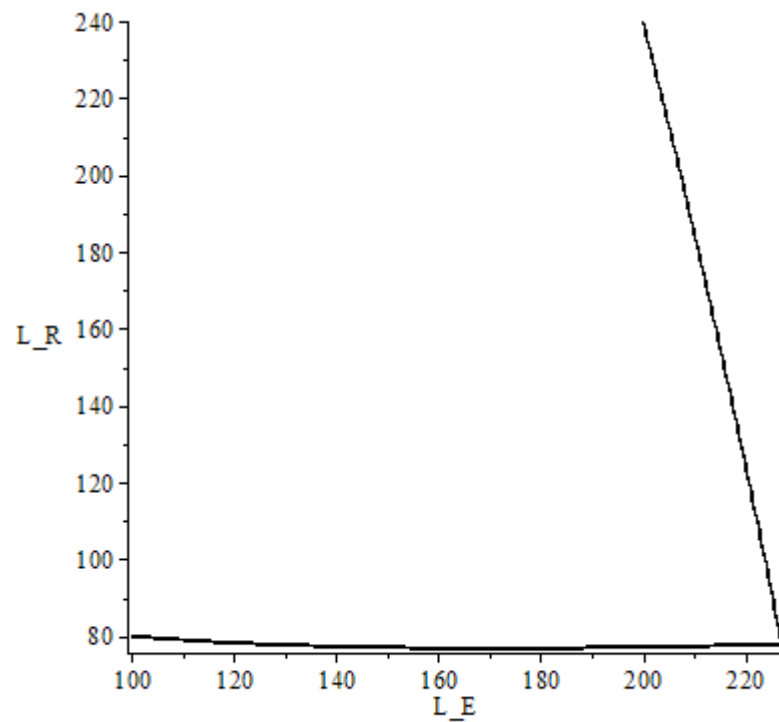


Figura 5.6: Quantidade de professores e pesquisadores

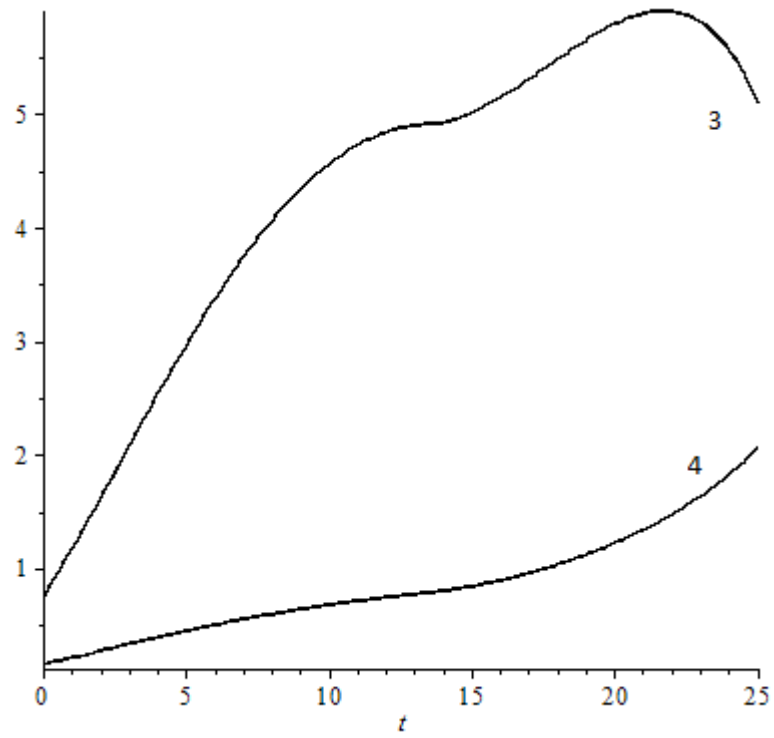


Figura 5.7: Capital (curva 3) e consumo (curva 4) ao longo do tempo

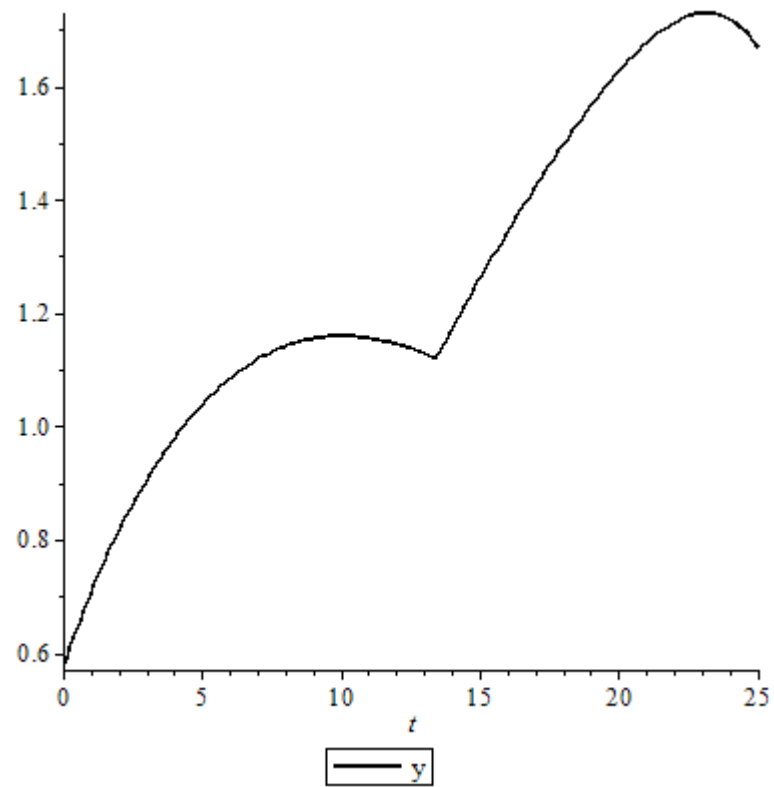


Figura 5.8: Produto da economia ao longo do tempo

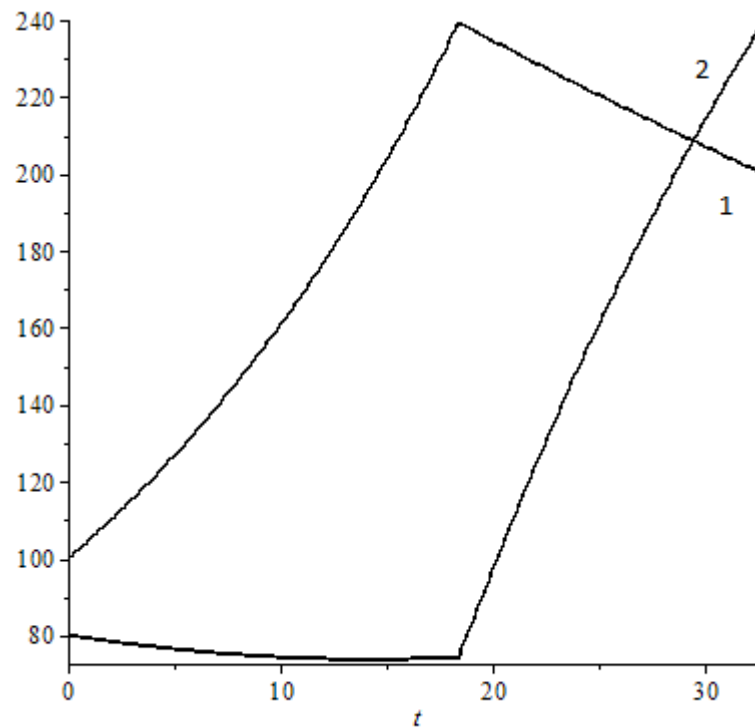


Figura 5.9: Quantidade de professores (curva 1) e pesquisadores (curva 2) ao longo do tempo

Obtemos um resultado bastante interessante ao reduzir ainda mais a produtividade dos professores, tomamos $\gamma = 0.075$. O tempo para atingir o estado final é de 32.78450424 e a troca de controles ocorre em $t = 18.38255806$. A evolução das variáveis em questão é mostrada nas figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12

Note que com esta configuração o crescimento não é forte o suficiente para sustentar o aumento do consumo, levando a destruição da economia. Novamente vemos a importância da qualidade dos docentes.

Consideremos a seguir o caso em que o planejador social não consegue desenvolver incentivos tão eficientes quanto anteriormente para direcionar os cientistas, isto é, reduzimos \underline{a} e aumentamos \bar{a} . Os novos valores são $\underline{a} = 0.6$ e $\bar{a} = 0.2$.

Neste caso o tempo para atingir a condição final é 15.74053290 e a troca de controles ocorre em $t = 10.12898067$. Os gráficos correspondentes são 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16. Note que neste caso a alteração de controles tem um impacto mais suave sobre a economia, como seria possível prever.

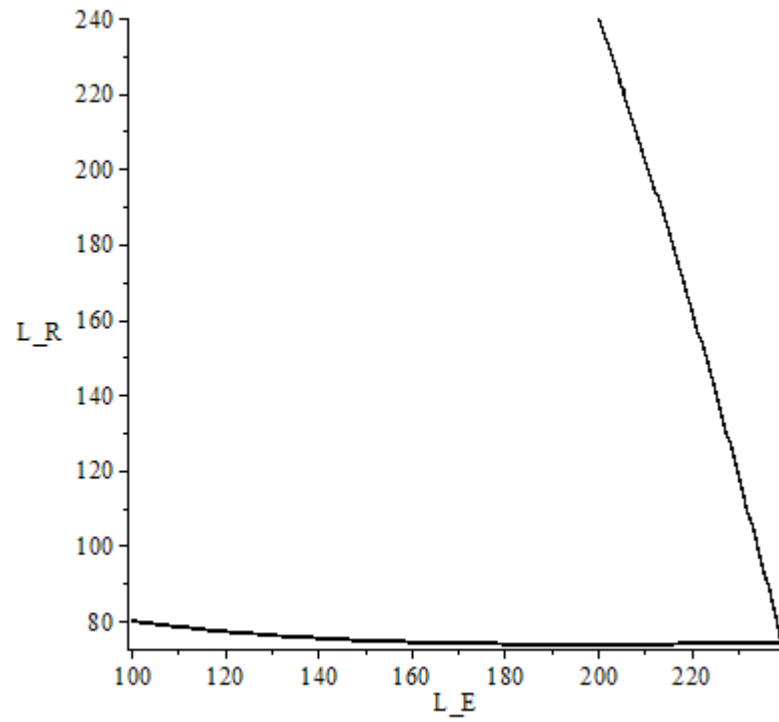


Figura 5.10: Quantidade de professores e pesquisadores

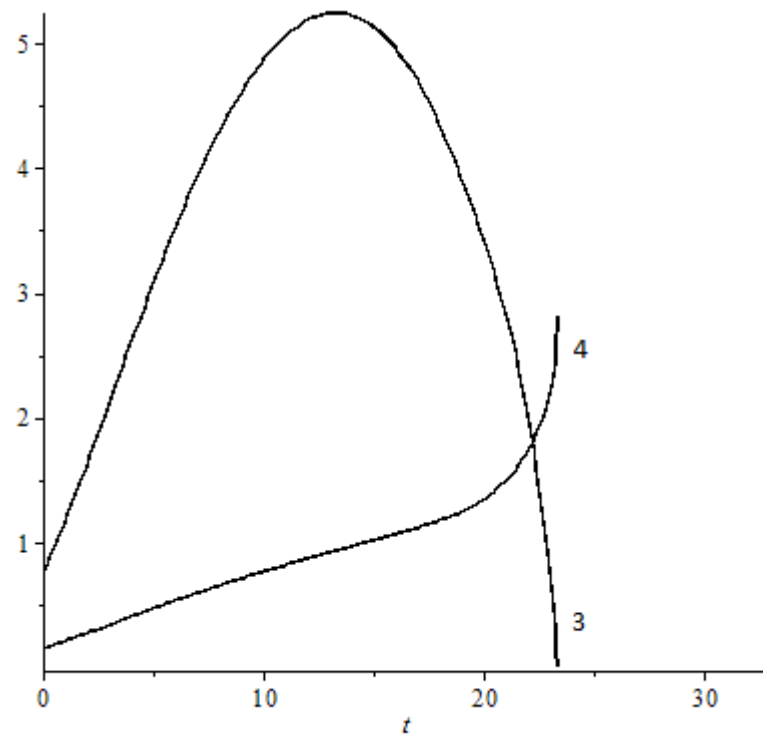


Figura 5.11: Capital (curva 3) e consumo (curva 4) ao longo do tempo

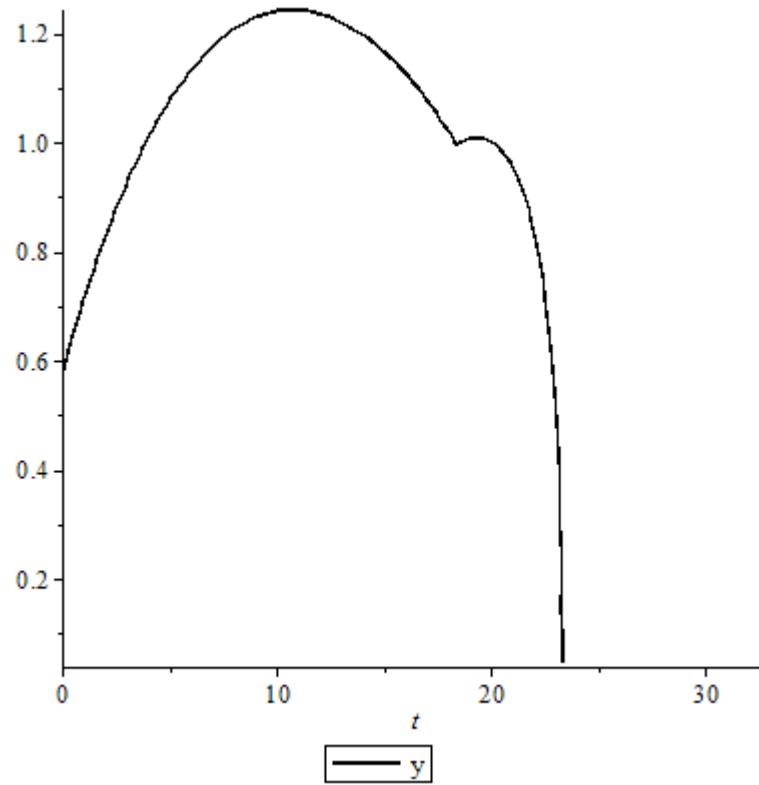


Figura 5.12: Produto da economia ao longo do tempo

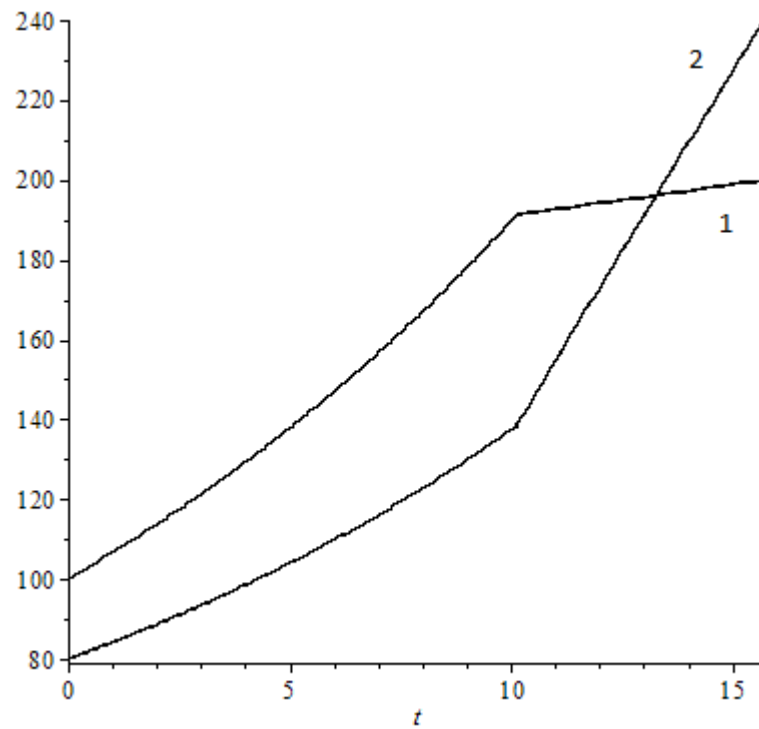


Figura 5.13: Quantidade de professores (curva 1) e pesquisadores (curva 2) ao longo do tempo

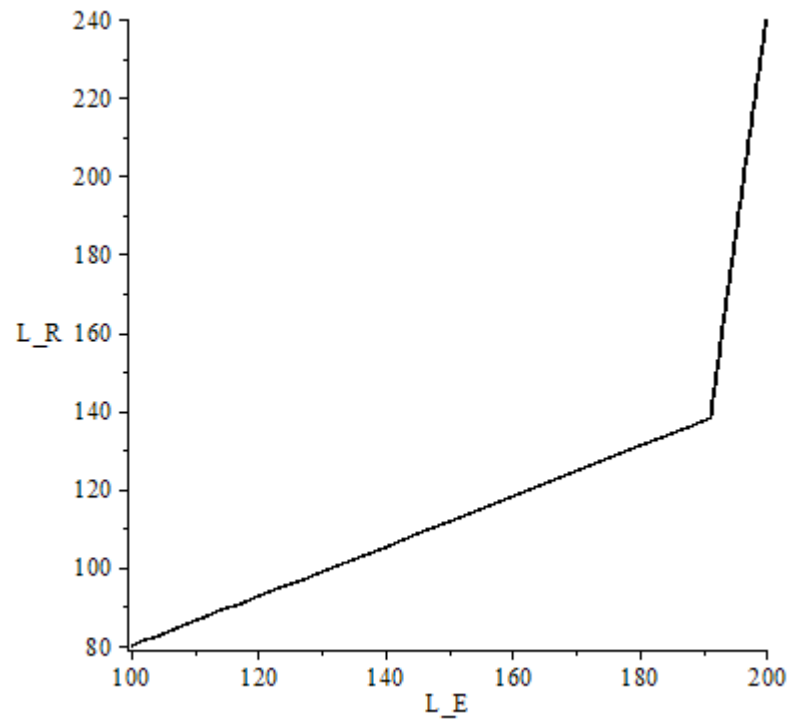


Figura 5.14: Quantidade de professores e pesquisadores

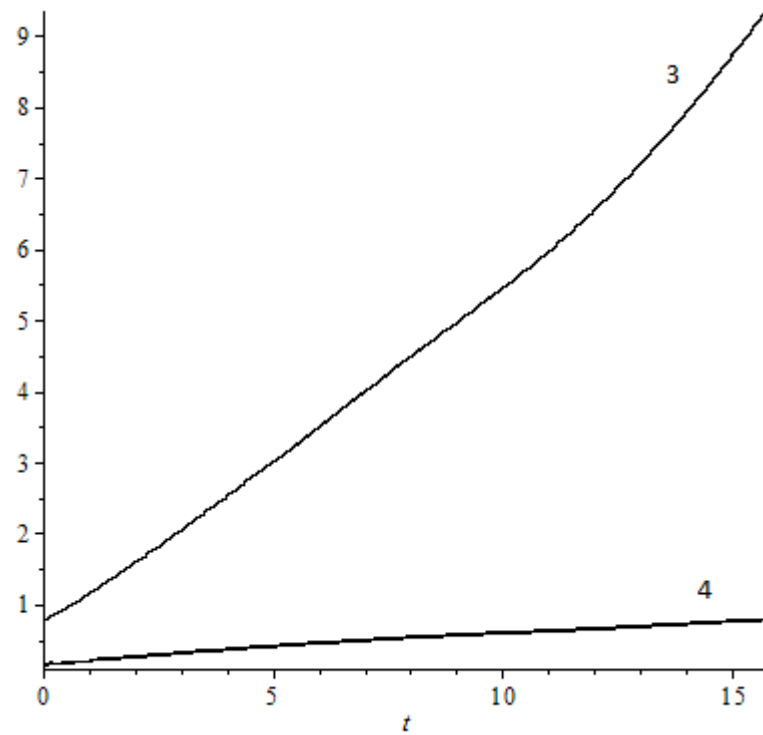


Figura 5.15: Capital (curva 3) e consumo (curva 4) ao longo do tempo

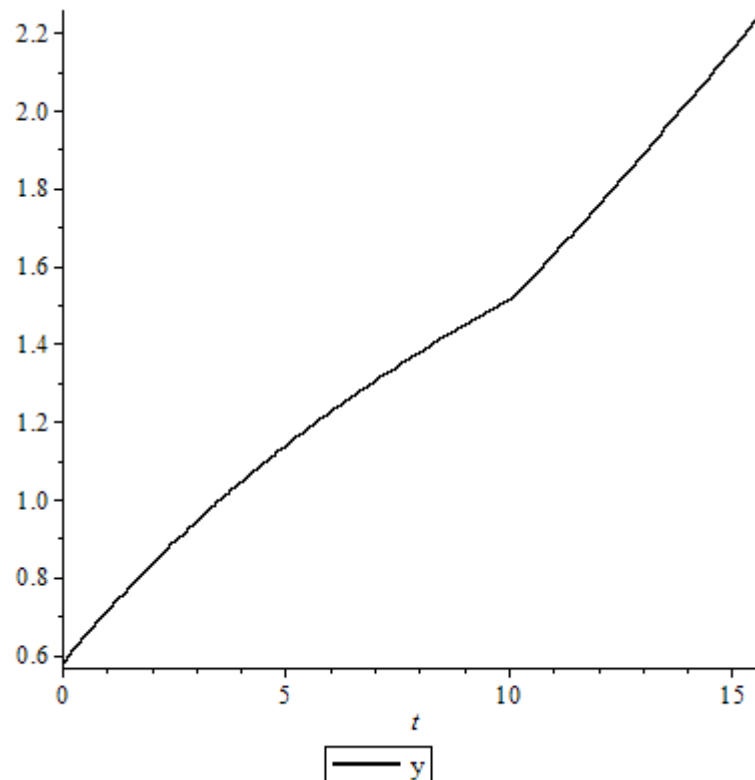


Figura 5.16: Produto da economia ao longo do tempo

É interessante também considerar uma alteração na função de produção, particularmente na intensidade de utilização de cada fator, dado por α , reduzindo este de 0.5 a 0.25 temos que o tempo não se altera. A economia evolui como mostra a figura 5.12.

O aumento da intensidade de utilização dos pesquisadores faz com que a economia cresça rapidamente após a alteração no controle. O valor inicial alto do consumo (relativamente ao capital) faz com que o capital não consiga crescer suficientemente rápido para que a economia cresça, levando a redução do produto, como visto no gráfico 5.17. O consumo segue a trajetória mostrada na figura 5.18.

É notável que mesmo com o crescimento da economia o consumo reduz-se ao longo do tempo.

Outra análise interessante é estudar o comportamento de uma economia que inicialmente consome demais. Para isto fazemos $c(0) = 0.35$. Com esta configuração o consumo cresce rapidamente, fazendo com que o capital se reduza (como visto na figura 5.19), o que invariavelmente leva a economia à destruição, como mostra a figura 5.20.

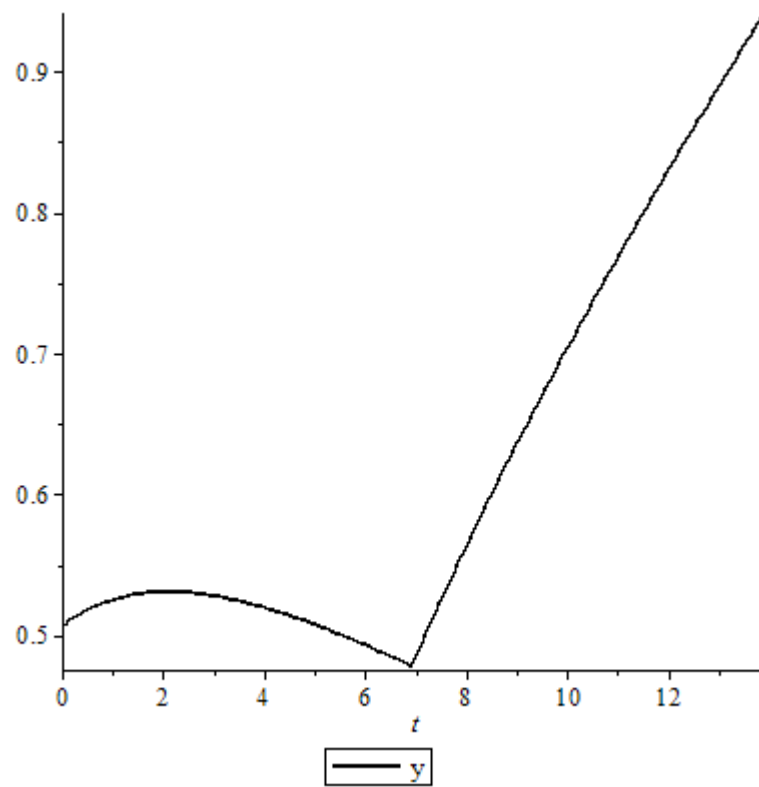


Figura 5.17: Produto da economia ao longo do tempo

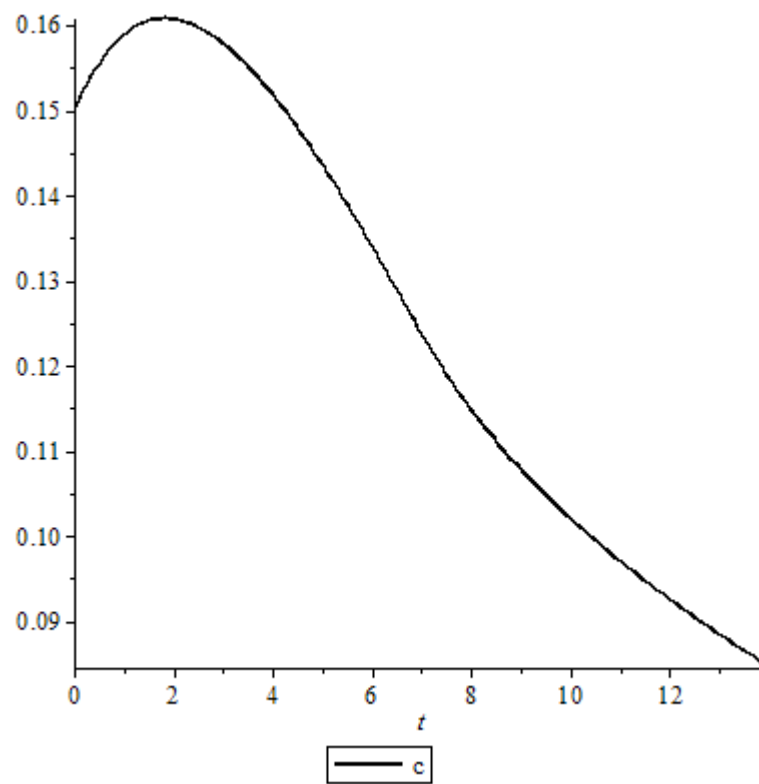


Figura 5.18: Consumo ao longo do tempo

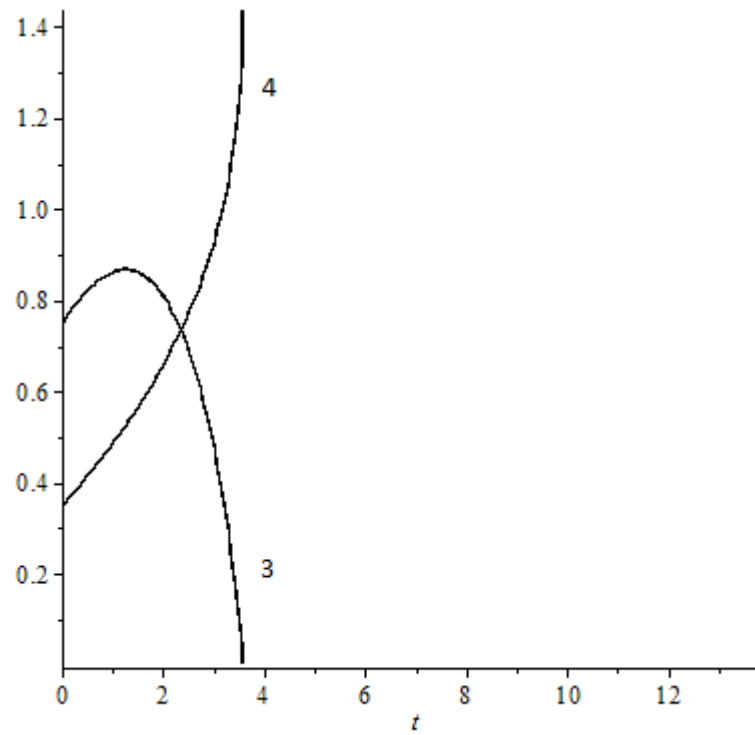


Figura 5.19: Capital (curva 3) e consumo (curva 4) ao longo do tempo

Note que não há tempo suficiente para se observar o comportamento após a troca de controles, pois o produto total é levado a zero em $t < t_s$.

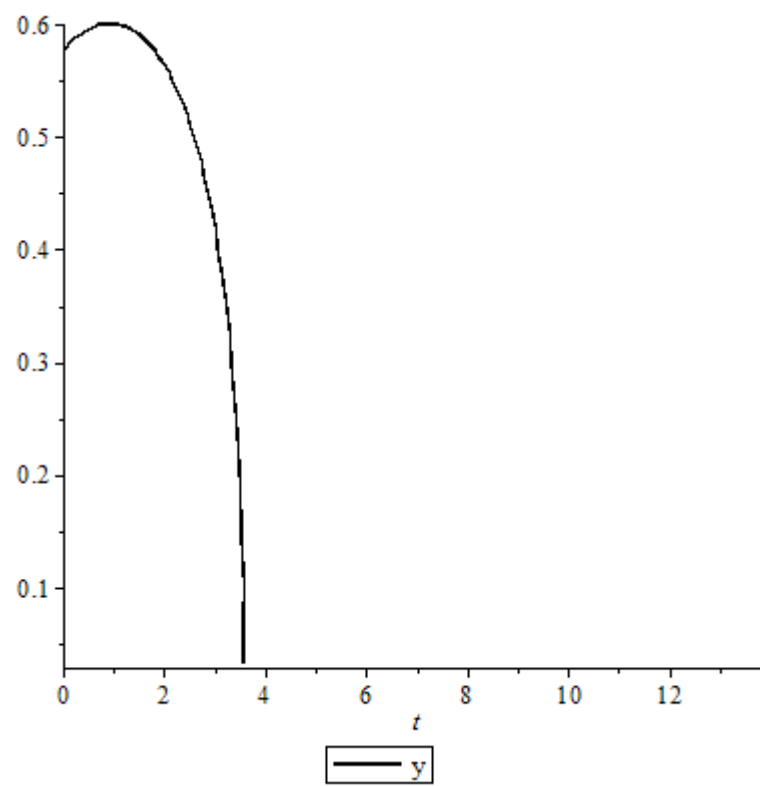


Figura 5.20: Produto da economia ao longo do tempo

6 CONCLUSÃO

Os resultados do capítulo 5 nos permitem fazer uma análise do modelo proposto neste trabalho. De maneira geral, o modelo comporta-se como os demais modelos de crescimento econômico disponíveis na literatura. Isto vale tanto para configurações que geraram crescimento quanto para as que previram a destruição da economia.

Vale destacar a capacidade do modelo em combinar resultados de diferentes modelos, como mostrou a primeira análise do capítulo anterior, que gerou um tipo de combinação entre o modelo do Solow e os modelos AK. Isto é particularmente interessante para analisar economias que "alteraram" sua trajetória de crescimento, o que não pode ser captado por cada modelo separado.

Do ponto de vista negativo destacamos que o crescimento populacional endógeno aqui utilizado não encontra respaldo nas teorias econômicas de fertilidade. Destacamos também que o fato de não fazer análise empírica e atribuir valores não necessariamente realistas as variáveis reduz de certo modo a confiabilidade do modelo.

Tratando de implicações em termos de políticas públicas dois resultados são notáveis: primeiro, a qualidade dos docentes é de fundamental importância ao funcionamento da economia; e segundo, o gradualismo não parece ser a maneira acertada de conduzir uma política educacional.

O modelo apresentado neste trabalho permite diversas generalizações e modificações, que serão objeto de trabalhos futuros. Discutimos brevemente algumas delas. Primeiramente temos por objetivo desenvolver um esquema numérico capaz de lidar com o modelo de maximização da tecnologia. Ademais, temos por objetivo imediato permitir mais de uma troca de controles.

Uma generalização direta é inserir cientistas de diferentes qualidades, isto é, professores e pesquisadores de alta e baixa produtividade. Permitindo que professores de alta produtividade gerem tecnologia obtemos um resultado interessante sobre a penalização devido a baixa qualidade de professores.

Pensamos também em unificar os dois problemas de otimização, com o objetivo final de maximizar o crescimento econômico. Neste caso tem-se um impacto diferenciado da alocação de cientistas devido a função de produção da economia.

Gostaríamos também de propor diferentes modelagens para a tecnologia, principalmente modelagens probabilísticas, como Martingales. Tal modelagem parece mais apropriada para capturar a natureza do progresso técnico que muitas vezes se dá em saltos e ondas.

No modelo de crescimento econômico é interessante inserir preços e lucros e analisar o modelo do ponto de vista do livre mercado e não mais do planejador social. Buscar com isto uma análise de equilíbrio e comparar as vantagens e desvantagens de cada modelo.

Seria interessante ainda formular um modelo em que a economia não seja populada apenas por cientistas, permitir a existência de trabalhadores não qualificados para salientar ainda mais a importância da educação.

Do ponto de vista matemático gostaríamos de expandir os resultados de existência de soluções, bem como resultados de unicidade e estabilidade assintótica. Idealmente conseguiríamos enfraquecer as restrições de concavidade e convexidade.

Apêndice A

Apresentamos aqui um breve esboço da demonstração do princípio do máximo de Pontryagin em horizonte de tempo finito. A demonstração deve-se a [34], apresentamos porém a versão adaptada por [10].

Considere o problema

$$\max g_0(x(t_f)) \quad (\text{A.1})$$

sobre todos os pares admissíveis $(x, u) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ satisfazendo o sistema de controle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad \text{q.s. em } [0, t_f]; \quad (\text{A.2})$$

com condições iniciais $x(0) = x^0$; restrição de controle $u(t) \in U$ q.s. em $[0, t_f]$. Ademais, temos as condições terminais

$$g_j(x(t_f)) \geq 0 \quad 1 \leq j \leq p \quad (\text{A.3})$$

$$g_j(x(t_f)) = 0 \quad p + 1 \leq j \leq q \quad (\text{A.4})$$

Assumiu-se que $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, t_f$ fixo, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e tem derivada parcial de primeira ordem contínua com relação a x ; $U \subset \mathbb{R}^m$ é fechado; e $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável para $j = 0, 1, \dots, q$. Adicionalmente, impomos a seguinte restrição de qualificação:

Dizemos que a restrição de qualificação (RQ) é válida em $x \in \mathbb{R}^n$ se o sistema

$$c_j \geq 0, \quad 0 \leq j \leq p \quad (\text{A.5})$$

$$c_j g_j(x) = 0 \quad 1 \leq j \leq p \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{j=0}^q c_j \nabla g_j(x) = 0 \quad (\text{A.7})$$

admitir apenas solução trivial.

Nosso objetivo é estabelecer o seguinte teorema:

Teorema A.1. *Se a restrição de qualificação (RQ) é válida em $x^*(t_f)$ e se (x^*, u^*) for uma solução ótima para o problema de controle acima, então existem números $\mu_j, 0 \leq j \leq q$ e*

uma função contínua $\lambda : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ não todos nulos, tais que para $H(x, u, t, \lambda)$ definida por

$$H(x, u, t, \lambda) = \langle \lambda, f(x, u, t) \rangle \quad (\text{A.8})$$

1. os μ_j satisfazem: $\mu_j \geq 0$ para $0 \leq j \leq p$, e $\mu_j g_j(x^*(t_f)) = 0$ para $1 \leq j \leq p$

2. λ é uma solução da equação diferencial

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_x H(\lambda^*(t), u^*(t), t, \lambda(t)) \quad \text{q.s. } 0 \leq t \leq t_f \quad (\text{A.9})$$

3. $H(x^*(t), u^*(t), t, \lambda(t)) = \max_{u \in U} H(x^*(t), u, t, \lambda(t))$ q.s. $0 \leq t \leq t_f$

4. $\lambda(t_f) = \sum_{j=0}^q \mu_j \nabla g_j(x^*(t_f))$.

Para tornar este teorema de acordo com os problemas tratados no presente trabalho temos

Teorema A.2 (Princípio de Pontryagin em Horizonte Finito e Critério de Avaliação Integral). *Se (x^*, u^*) maximiza o funcional*

$$J_{t_f}(x, u) = \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{A.10})$$

onde $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua com derivada parcial de primeira ordem com respeito a x contínua. Sobre todos os pares admissíveis (x, u) satisfazendo o sistema dinâmico acima e a (RQ), existem multiplicadores $\mu_j, 0 \leq j \leq q$ e uma função absolutamente contínua $\lambda : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que se definirmos o Hamiltoniano

$$H(x, u, t, \lambda, \mu) = \mu f_0(x, u, t) + \langle \lambda, f(x, u, t) \rangle \quad (\text{A.11})$$

vale

1. $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_q, \lambda(0)) \neq 0$

2. $\dot{\lambda}(t) = -\nabla_x H(x, u^*(t), t, \mu_0, \lambda(t)) \Big|_{x=x^*(t)}$ q.s. em $[0, t_f]$

3. $H(x^*(t), u^*(t), t, \lambda(t), \mu_0) = \max_{u \in U} H(x^*(t), u, t, \lambda(t), \mu_0)$ q.s. em $[0, t_f]$

4. $\lambda(t_f) = \sum_{i=1}^q \mu_i \nabla g_i(x^*(t_f))$

Demonstração. Introduzimos a variável aumentada $\hat{x} = [x_0, x]^T \in \mathbb{R}^{1+n}$ e definimos as seguintes funções: $G_0(\hat{x}) = x_0$; $G_j(\hat{x}) = g_j(x)$, $1 \leq j \leq q$; e $\hat{F}(\hat{x}, u, t) = [f_0(x, u, t) \ f(x, u, t)]^T$. Com esta notação é fácil ver que o problema de controle ótimo com critério de avaliação integral é equivalente a

$$\max G_0(\hat{x}(t_f))$$

sobre todos os pares admissíveis (\hat{x}, u) satisfazendo

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= [x_0(t) \ x(t)]^T = F(\hat{x}(t), u(t), t) \quad \text{q.s. em } [0, t_f] \\ \hat{x}(0) &= [0 \ x^0]^T \\ u(t) &\in U \quad \text{q.s. em } [0, t_f] \\ G_j(\hat{x}(t_f)) &\geq 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq p \\ G_j(\hat{x}(t_f)) &= 0 \quad \text{para } p+1 \leq j \leq q. \end{aligned}$$

Denote por (\hat{x}^*, u^*) uma solução para o problema de controle ótimo acima. Então a restrição de qualificação é precisamente (QR). Então, aplicando o primeiro teorema deste apêndice, existem multiplicadores $\mu_j, 0 \leq j \leq q$ e uma função $\hat{\lambda} : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{1+n}$ tal que para

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{x}, u, t, \hat{\lambda}) &= \langle \hat{\lambda}, F(\hat{x}, u, t) \rangle \\ &= \langle \lambda_0, f_0(\hat{x}, u, t) \rangle \langle \lambda, f(x, u, t) \rangle \\ &= H(x, u, t, \lambda_0, \lambda) \end{aligned}$$

tem-se

1. $\mu_j \geq 0$ para $0 \leq j \leq p$ e $\mu_j G_j(\hat{x}^*(t_f)) = 0$ para $1 \leq j \leq p$
2. $\hat{\lambda}$ é uma solução da equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\lambda}}(t) &= (\lambda_0(t), \lambda) = -\nabla_{\hat{x}} \hat{H}(\hat{x}, u^*(t), t, \hat{\lambda}(t)) \Big|_{\hat{x}=\hat{x}^*(t)} \\ &= (0, -\nabla_x H(x, u^*(t), t, \lambda_0(t), \hat{\lambda}(t))) \Big|_{x=x^*(t)} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

q.s. em $[0, t_f]$,

3. $H(x^*(t), u^*(t), t, \lambda_0(t), \lambda(t)) = \max_{u \in U} H(x^*(t), u, t, \lambda_0(t), \lambda(t))$ q.s. em $[0, t_f]$;

e

4.

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}(t_f) &= (\lambda_0(t_f), \lambda(t_f)) = \sum_{j=0}^q \mu_j \nabla_{\hat{x}} G_j(\hat{x}^*(t_f)) \\ &= \left[\mu_0, \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla g_j(x^*(t_f)) \right].\end{aligned}\tag{A.13}$$

Das condições acima é fácil ver que $\lambda_0(t) = \mu_0$ para todo $t \in [0, t_f]$ e as conclusões desejadas seguem. \square

Apresentamos agora alguns lemas necessários para a demonstração do primeiro teorema deste apêndice. As demonstrações destes lemas são omitidas e podem ser encontradas em [10].

Seja N um inteiro positivo fixado e seja S o seguinte conjunto:

$$S = \{(t_i, v_i) : 0 < t_i \leq t_2 \leq \dots \leq t_N < t_f\}$$

onde cada t_i é um ponto regular da aplicação $t \mapsto f(t, x^*(t), u^*(t))$ e onde $v_i \in U$ para $1 \leq i \leq N$.

Lema A.1. *Para S fixo existe uma vizinhança convexa V_S de 0 em \mathbb{R}^N tal que para todo $a \in V_S \cap A_N$ o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t; a)) \quad \text{q.s. em } [0, t_f] \\ x(0) &= x^0\end{aligned}$$

tem solução única, digamos $x(\cdot; a)$, e seu valor em t_f é contínuo em a e diferenciável em 0. Ademais, temos que para $1 \leq i \leq N$

$$\left. \frac{\partial x(T; a)}{\partial a_i} \right|_{a=0} = D(T, t_i)[f(t_i, x^*(t_i), v_i) - f(t_i, x^*(t_i), u^*(t_i))]$$

onde $D(t, s)$ é o resolvente da equação linear

$$\dot{y}(t) = -\nabla_x H(x^*, u^*(t), t, y(t))|_{x=x^*(t)}$$

Lema A.2. *Para S fixo, se (x^*, u^*) é uma solução ótima do problema de maximização (A.1), então existem números $\mu_j, 0 \leq j \leq q$ satisfazendo*

$$1. \sum_{j=0}^q |\mu_j| = 1$$

$$2. \mu_j \geq 0 \text{ para } 0 \leq j \leq p \text{ e } \mu_j g_j(x^*(t_f)) = 0 \text{ para } 1 \leq j \leq p$$

$$3. d(\mu)D(T, t_j)[f(x^*(t_j), v_j, t_j) - f(x^*(t_j), u^*(t_j), t_j)] \leq 0$$

para $1 \leq j \leq N$, onde $d(\mu) = \sum_{j=0}^q \mu_j \nabla g_j(x^*(t_f))$.

Lema A.3. Se $x(x^*, u^*)$ é uma solução ótima para o problema de controle em questão, então existem números $\mu_j, 0 \leq j \leq q$ satisfazendo as condições (1) e (2) do lema anterior tais que (3) seja válida para quase todo $t \in [0, T]$ e todo $v \in U$.

Teorema 1. Seja $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_q)$ satisfazendo as conclusões do lema acima e defina $\lambda : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\lambda(t) = d(\mu)D(t_f, t).$$

Temos então

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= -\nabla_x H(x, u^*(t), t, \lambda(t))|_{x=x^*} \quad q.s. \text{ em } [0, t_f] \\ \lambda(t_f) &= d(\mu) = \left[\sum_{i=0}^q \mu_i \nabla g_i(x^*(t_f)) \right]. \end{aligned}$$

Ademais, $\lambda(t_f) = 0$ se e somente se $d(\mu) = 0$ e esta possibilidade é excluída pela restrição de qualificação. Finalmente, a condição (3) do lema acima nos dá

$$\lambda(t)[f(x^*(t), v, t) - f(x^*(t), u^*(t), t)] \leq 0$$

quase sempre em $[0, t_f]$ para todo $v \in U$ e então

$$H(x^*(t), u^*(t), t, \lambda(t)) = \max_{v \in U} H(x^*(t), v, t, \lambda(t))$$

como desejávamos. □

Referências Bibliográficas

- [1] Kenneth Arrow and M. Kurz. *Public Investment, The Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*. The Johns Hopkins Press, 1970.
- [2] S. Aseev and A. Kryazhinskii. The Pontryagin maximum principle for infinite-horizon optimal control. Technical report, IIASA, 2003.
- [3] Robert Barro. *Determinants of Economic Growth: A Cross-Country Empirical Study*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1997.
- [4] Robert Barro and Lee Jong-Wha. A new data set of educational attainment in the world,1950-2010. *Journal of Development Economics*, page Forthcoming.
- [5] Robert Barro and Xavier Sala-i Martin. *Economic Growth*. MIT Press, Cambridge, MA, 2004.
- [6] Johann Baumeister and Antonio Leitao. *Introducao a Teoria de Controle e Programacao Dinamica*. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [7] Richard Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [8] L.M. Benveniste and J.A. Scheinkman. Duality theory for dynamic optimization models of economics: the continuous time case. *Journal of Economic Theory*, 27(1):1–19, 1982.
- [9] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [10] D.A. Carlson and A. Haurie. *Infinite Horizon Optimal Control*. Springer, Berlin, 1987.
- [11] Arrigo Cellina and Antonio Ornelas. Existence of solutions to differential inclusions and to time optimal control problems in the autonomous case. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(1):260–265, 2002.

- [12] Alpha Chiang. *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill, New York, 1992.
- [13] Francis Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal control*. Springer, London, 2013.
- [14] C.W. Cobb and P.H. Douglas. A theory of production. *American Economic Review*, 18(Supplement):139–165, 1928.
- [15] Earl Coddington and Norman Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [16] Bernard Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer, Berlin, 1989.
- [17] Robert Dorfman. An economic interpretation of optimal control theory. *The American Economic Review*, 59(5):817–831, 1969.
- [18] Wendell Fleming and Raymond Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer, Berlin, 1975.
- [19] Hubert Halkin. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. *Econometrica*, 42(2):262–272, 1974.
- [20] P. Hammond. Agreeable plans with many capital goods. *Review of Economic Studies*, 42(129):1–14, 1975.
- [21] Henry Hermes and J.P. LaSalle. *Functional Analysis and Time Optimal control*. Academic Press, New York, 1969.
- [22] Michael Intriligator. *Mathematical Optimization and Economic Theory*. SIAM, Philadelphia, PA, 1971.
- [23] Michael Intriligator and Bruce Smith. Some aspects of the allocation of scientific effort between teaching and research. *American Economic Review*, 56(2):494–518, 1966.
- [24] Charles Jones. *Introdução a Teoria do Crescimento Economico*. elsevier, Rio de Janeiro, 2000.

- [25] T. Kamihigashi. Necessity of transversality conditions for infinite horizon problems. *Econometrica*, 69(4):995–1012, 2001.
- [26] Athanassios Karsatos. *Advanced Ordinary Differential Equations*. Mariner, Tampa, FL, 1980.
- [27] A.J. Krener. A generalization of Chow’s theorem and the bang-bang theorem to nonlinear control problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, (1):43–51, 1974.
- [28] J.P. LaSalle. The time optimal control problem. In *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations volume V*, pages 25–36. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1960.
- [29] Coung Le Van, Raouf Boucekkine, and Cagri Saglam. Optimal control in infinite horizon problems: a Sobolev space approach. *Economic Theory*, 32(3):497–509, 2007.
- [30] Robert E. Jr. Lucas. On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22:3–42, 1988.
- [31] O.L. Mangasarian. Sufficient conditions for the optimal control of non-linear systems. *SIAM Journal on Control*, 4(1):139–152, 1966.
- [32] N. Gregory Mankiw, David Romer, and David N. Weil. A contribution to the empirics of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 107:407–437, 1992.
- [33] Philippe Martin and Carol Ann Rogers. Long term growth and short term instability. *European Economic Review*, 44(2):359–381, 2000.
- [34] P. Michel. Une demonstration elementaire du principe du maximum de pontryagin. *Bulletin de Mathematiques Economiques*, 14:9–23, 1977.
- [35] L.S. Pontryagin et al. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience, New York, 1962.
- [36] Frank Ramsey. A mathematical theory of saving. *Economic Journal*, 38(December):543–559, 1928.

- [37] Sergio Rebelo. Long-run policy analysis and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 99:500–521, 1991.
- [38] Paul M. Romer. Endogenous technological change. *Journal of Political Economy*, 98:S71–S102, 1990.
- [39] Robert Solow. A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70:65–94, 1956.
- [40] Robert Solow. Technical change and the aggregate production function. *Review of Economics and Statistics*, 39:312–320, 1957.
- [41] Vladimir Stoikov. The allocation of scientific effort: some important aspects. *Quarterly Journal of Economics*, 78(2):307–323, 1964.
- [42] Hector Sussmann. A bang-bang theorem with bounds on the number of switchings. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 17(5):629–651, 1979.
- [43] Trevor Swan. Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, 32:334–361, 1956.
- [44] Hirofumi Uzawa. Optimal technical change in an agregative model of economic growth. *International Economic Review*, 6:18–31, 1965.
- [45] Kosaku Yosida. *Functional Analysis*. Springer, Berlin, 1980.