

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

EXTENSÕES DE ORE: IDEAIS MAXIMAIS E OUTRAS  
QUESTÕES

por

WAGNER DE OLIVEIRA CORTES

Porto Alegre, dezembro de 2003

Tese submetida por Wagner de Oliveira Cortes\* como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Banca Examinadora:

Dra. Ada Maria de Souza Doering

Dr. Alveri Alves Sant'Ana

Dr. Antonio Paques (UNICAMP)

Dr. Francisco Cesar Polcino Milies (IME-USP)

Data de Defesa: 12 de dezembro de 2003.

---

\* Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

”Posso tudo naquele que me fortalece” (Fl 4:13)

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pois se não fosse por Ele nada disso teria sido possível.

Agradeço ao Miguel, pela orientação, paciência, amizade, e os seus conselhos valorosos que me ajudarão no meu futuro.

Meus agradecimentos aos meus amigos, Virginia, Marlon, Flávia, Flávia (aplicada), Luciano, Barbára, Simone Cruz, Leonardo, Rafael, Joana, Claus Haentinger, Linéia, Cléber, Ari, Janice, Isabel (ex-secretaria da pós), Rosane, Isabelzinha e a todos os meus amigos e professores da pós-graduação. Aos meus pais muito obrigado pelo incentivo e carinho em todos os momentos e a minha esposa Susana, pela paciência, amizade e compreensão nos momentos que estive ausente.

Também agradeço aos meus amigos da igreja Adventista em especial, Edu, Eliana e família, Fabiana e Luciana, e também a Charlene, Darlene e família pela amizade e força desde que cheguei pela primeira vez no Rio Grande do Sul. E à todos os meus amigos não citados, tanto de longe ou de perto, muito obrigado pelo incentivo e amizade.

# Resumo

Sejam  $R$  um anel,  $\sigma$  um automorfismo e  $d$  uma  $\sigma$  derivação de  $R$ . A presente tese discorre sobre diferentes tipos de problemas em skew anel de polinômios. Obtivemos condições necessárias e suficientes para a existência de ideais maximais e demos uma caracterização completa do radical de Brown McCoy em  $R[x; \sigma]$ . Para o caso  $R[x; d]$  fizemos o mesmo estudo e obtemos resultados completos para o caso em que  $R$  é um anel comutativo, ou  $R$  é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra. Estudamos condições necessárias e condições suficientes para que um ideal seja principal em  $R[x; \sigma, d]$ . Finalmente, demos uma completa caracterização do centróide estendido de imagens homomórficas de skew anel de polinômios.

# Abstract

Let  $R$  be a ring,  $\sigma$  an automorphism of  $R$  and  $d$  a  $\sigma$ -derivation of  $R$ . In this thesis, we studied different questions in skew polynomial rings. We obtained necessary and sufficient conditions for the existence of maximal ideals and a complete characterization of Brown McCoy radical of  $R[x; \sigma]$  and  $R[x; d]$ . We studied necessary and sufficient conditions for an ideal is principal in  $R[x; \sigma, d]$ . Finishing this thesis, we gave a complete characterization of extended centroid of homomorphic images in skew polynomial rings of automorphism and derivation type.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Pré-requisitos</b>	<b>5</b>
1.1 Anéis de quocientes de Martindale. . . . .	5
1.2 Extensões de Ore . . . . .	9
<b>2 Ideais Maximais em skew anel de Polinômios</b>	<b>16</b>
2.1 Skew Anel de Polinômios de Tipo Automorfismo	16
2.2 Skew anel de Polinômios de Tipo Derivação . . . . .	28
<b>3 Ideais Principais em Skew Anel de Polinômios</b>	<b>40</b>
3.1 Extensões de Ore . . . . .	40
3.2 Ideais Principais em anéis que tem condição de fatoração única . . . . .	49
<b>4 Centróides Estendidos em Skew Anel de Polinômios</b>	<b>56</b>
4.1 Skew Anel de Polinômios de Tipo Automorfismo	56
4.2 Skew Anel de Polinômios de Tipo Derivação . . . . .	61
<b>Bibliografia</b>	<b>66</b>

# Introdução

O recente progresso nos estudos de grupos quânticos, renovou o interesse em skew anel de polinômios do tipo  $R[x; \sigma, d]$ , onde  $\sigma$  é um automorfismo e  $d$  é uma  $\sigma$ -derivação de  $R$ . Os casos  $d = 0$  ou  $\sigma = id$  tem sido extensivamente estudados.

Nesta tese estudamos algumas questões sobre skew anel de polinômios. Ela é constituída de quatro capítulos.

No capítulo 1, apresentamos alguns pré-requisitos necessários para a leitura do que segue. Em particular, lembramos os resultados sobre anéis de quocientes, ideais  $R$ -disjuntos em skew anel de polinômios, ideais fechados e ideais primos.

O estudo de ideais maximais em anéis de polinômios foi iniciado por Ferrero, ver [6]. Neste trabalho são obtidos condições para a existência de ideais maximais em  $R[x]$ . Seguindo esta linha Matzuck, em [18], iniciou o estudo de ideais maximais em skew anel de polinômios de tipo automorfismo.

Posteriormente, Puczyłowski e Smoktunowicz em [20, Corollary 2] completaram a caracterização de Ferrero sobre ideais maximais em anéis de polinômios. Isto deu como consequência uma descrição completa do radical de Brown-McCoy de  $R[x]$ , ver [20, Corollary 4].

No segundo capítulo, apresentamos os principais resultados no que se refere ao estudo de ideais maximais e o radical de Brown-McCoy em skew anel de polinômios.

Na primeira seção estudamos ideais maximais e o radical de Brown-McCoy em skew anel de polinômios de tipo automorfismo.



No Teorema 2.1.13 obtivemos condições necessárias e suficientes para a existência de ideais maximais. Com isto no Teorema 2.1.20, determinamos completamente o radical de Brown-McCoy de skew anel de polinômios de tipo automorfismo.

Estes resultados generalizam os resultados de [20]. Além disso, mostramos que se  $R$  é um anel nil, então  $R[x; \sigma]$  é radical de Brown-McCoy, o que generaliza [20, Corollary 3 ii)].

Na segunda seção, estudamos ideais maximais em skew anel de polinômios do tipo  $R[x; d]$ , onde  $d$  é uma derivação de  $R$ . Quando  $R$  é um anel comutativo, ou  $R$  é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra, obtemos condições necessárias e suficientes para a existência de ideais maximais. Com isto, nestes casos, obtemos uma descrição completa do radical de Brown-McCoy de  $R[x; d]$ . O problema geral ainda está aberto.

Se  $K$  é um corpo, então  $K[x]$  é um anel de ideais principais. Sharma, em [22], estudou condições para que ideais primos  $R$ -disjuntos em  $R[x]$ , onde  $R$  é um domínio comutativo, fossem principais. Nesse trabalho, ele introduziu polinômios especiais que denominamos polinômios de Sharma. Posteriormente, Kanemitsu e Yoshida generalizaram os resultados de Sharma.

Estas questões também foram estudadas em [23] e [19] para extensões de Ore, mas quando  $R$  é um domínio comutativo.

No terceiro capítulo, apresentamos resultados no que se refere ao estudo de ideais principais em skew anel de polinômios sobre anéis não comutativos.

Na primeira seção, estudamos condições necessárias e condições suficientes para que um ideal em extensões de Ore seja

principal e os principais resultados são os Teoremas 3.1.7 e 3.1.8.

Com os teoremas acima mencionados, obtivemos condições necessárias e suficientes para que um ideal seja principal em  $R[x; \sigma](R[x; d])$ , onde  $R$  é um anel  $\sigma$ -primo ( $d$ -primo). Na segunda seção, estudamos anéis com condições de fatoração única e obtemos condições necessárias para que um ideal seja principal em skew anéis de polinômios com condições de fatoração única.

O estudo de centróides estendidos de skew anel de polinômios de tipo automorfismo e derivação foi completamente estudado por Matczuk, ver [16, Theorem 3.3].

No quarto capítulo, apresentamos resultados no que se refere ao estudo de centróides estendidos em imagens homomórficas de skew anel de polinômios. Os principais resultados determinam o centróide estendido de  $R[x; \sigma]/J$  ( $R[x; d]/J$ ), onde  $J$  é um ideal primo  $R$ -disjunto tal que  $x \notin J$ , obtendo resultados semelhantes aos de [16], neste caso.

# Capítulo 1

## Pré-requisitos

Este capítulo contém alguns pré-requisitos necessários à compreensão do que segue.

### 1.1 Anéis de quocientes de Martindale.

Seja  $R$  um anel qualquer. Um ideal  $P$  de  $R$  é dito um ideal primo de  $R$ , se para quaisquer ideais  $A$  e  $B$  de  $R$  temos que  $AB \subseteq P$  implica que  $A \subseteq P$  ou  $B \subseteq P$ . Um anel  $R$  é dito primo se  $(0)$  é um ideal primo de  $R$ .

Seja  $R$  um anel primo não necessariamente com unidade. Se  $I$  é um ideal de  $R$  diremos que uma aplicação  $f : I \rightarrow R$  é um  $R$ -homomorfismo à esquerda se  $f$  é aditiva e  $f(ra) = rf(a)$ , para todo  $a \in I$  e  $r \in R$ . No que segue, consideramos ideais não-nulos  $I$  de  $R$  e  $R$ -homomorfismos  $f : I \rightarrow R$ . O conjunto dos ideais não nulos de  $R$  será denotado por  $\mathcal{I}$ . Note que, se  $I, J \in \mathcal{I}$ , então  $IJ \in \mathcal{I}$  e  $I \cap J \in \mathcal{I}$ .

Denotamos por  $\Omega$  o conjunto de todos os pares  $(I, f)$ , onde  $I \in \mathcal{I}$  e  $f : I \rightarrow R$  é um homomorfismo de  $R$ -módulos à es-

querda. Em  $\Omega$ , definimos a relação de equivalência como segue: sejam  $(I, f), (J, g) \in \Omega$ , dizemos que  $(I, f)$  é equivalente a  $(J, g)$  ( $(I, f) \sim (J, g)$ ), se existir um ideal não-nulo  $H \subseteq I \cap J$  tal que  $f|_H = g|_H$ . Podemos verificar facilmente que é uma relação de equivalência e que pode ser definida equivalentemente como segue:  $(I, f) \sim (J, g)$  se, e somente se,  $f|_{I \cap J} = g|_{I \cap J}$ .

Denotamos por  $Q$  o conjunto quociente  $\Omega / \sim$  e por  $[I, f]$  a classe de equivalência de  $(I, f)$ , onde  $(I, f) \in \Omega$ . No que segue, damos a  $Q$  uma estrutura de anel de modo a podermos considerar  $R \subseteq Q$ . Sejam  $[I, f], [J, g]$  dois elementos de  $Q$ . Definimos a soma e o produto em  $Q$  por:

i)  $[I, f] + [J, g] = [I \cap J, f + g]$ , onde  $f + g : I \cap J \rightarrow R$  é definido de modo natural:  $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ , para todo  $a \in I \cap J$ .

ii)  $[I, f] \cdot [J, g] = [IJ, f \circ g]$ , onde  $f \circ g : IJ \rightarrow R$  é definido por  $f \circ g(a) = f(g(a))$  para todo  $a \in IJ$  (note que esta definição está bem dada, pois  $g(IJ) \subseteq I$ ) e assim,  $f(g(a)) \in R$ .

É fácil de verificar que estas operações estão bem definidas em  $Q$  e provar o seguinte.

**Teorema 1.1.1.**  *$(Q, +, \cdot)$  é um anel com unidade.*

O anel  $Q$  do teorema acima é denominado o anel de quocientes à esquerda de Martindale de  $R$ . Os próximos dois lemas nos dão propriedades importantes de  $Q$ .

**Lema 1.1.2.** *Sejam  $R$  um anel primo e  $Q$  o anel de quocientes à esquerda de Martindale de  $R$ . As seguintes condições são válidas:*

i)  $R \subseteq Q$ .

ii) Se  $I$  é um ideal não-nulo de  $R$  e  $f : I \rightarrow R$  um homomorfismo de  $R$ -módulos à esquerda, então existe  $q \in Q$  tal que  $f(i) = iq$  para todo  $i \in I$ .

iii) Para todo  $q_1, \dots, q_n$  em  $Q$  existe um ideal não-nulo  $J$  de  $R$  tal que  $Jq_i \subset R$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

iv) Se  $Jq = 0$ , para algum ideal não-nulo  $J$  de  $R$ , então  $q = 0$ .

**Lema 1.1.3.** *Seja  $q \in Q$ . Se  $qR = Rq$ , então  $q$  é invertível em  $Q$ .*

Prova. É evidente que  $I = qR \cap R$  é um ideal de  $R$ . Se  $rq = 0$ , para algum  $r \in R$ , então  $rI = 0$ . Logo,  $r = 0$ , pois  $R$  é um anel primo. Assim, a aplicação  $f : I \rightarrow R$  definida por  $f(rq) = r$  é um homomorfismo (bem definido) de  $R$ -módulos à esquerda. Então o correspondente a  $f$  em  $Q$  é o elemento inverso de  $q$ . ■

O centro de  $Q$  é chamado o centróide estendido de  $R$ , e é denotado por  $C$ . O próximo lema é um caso particular do Lema 2.2 de [1].

**Lema 1.1.4.** *i)  $Q$  é um anel primo.*

ii)  $q \in C$  se, e somente se, existe um ideal não-nulo  $I$  de  $R$  e um homomorfismo de  $R$ -bimódulo  $f : I \rightarrow R$  tal que  $f(r) = rq$ .

iii)  $C$  é um corpo.

Seja  $R$  um anel qualquer não necessariamente com unidade e  $\sigma$  um automorfismo de  $R$ . Dizemos que um ideal  $I$  de  $R$  é um  $\sigma$ -ideal se  $\sigma(I) = I$ .

Um  $\sigma$ -ideal  $J$  de  $R$  é dito  $\sigma$ -primo se para quaisquer  $\sigma$ -ideais  $L$  e  $K$  de  $R$  temos que  $LK \subseteq J$  implica que  $L \subseteq J$  ou  $K \subseteq J$ . Um anel  $R$  é dito  $\sigma$ -primo se o ideal  $(0)$  é um ideal  $\sigma$ -primo.

Seja  $R$  um anel  $\sigma$ -primo. Denotamos por  $\mathcal{I}_\sigma$  o conjunto dos  $\sigma$ -ideais não-nulos de  $R$ . Note que se  $I, J \in \mathcal{I}_\sigma$ , então  $IJ \in \mathcal{I}$  e  $I \cap J \in \mathcal{I}$ . A construção do anel de  $\sigma$ -quocientes à esquerda de Martindale de  $Q_\sigma(R)$  de  $R$  segue análoga a construção do anel de quocientes à esquerda de Martindale de  $R$  feito anteriormente. Não é difícil ver que o automorfismo  $\sigma$  se estende unicamente a  $Q_\sigma(R)$  o qual denotaremos ainda por  $\sigma$ . Seja  $C_\sigma(R) = \{c \in Z(Q_\sigma(R)) : \sigma(c) = c\}$  o  $\sigma$ -centróide estendido de  $R$ .

O seguinte lema nos dá algumas das propriedades importantes de  $Q_\sigma(R)$  ([3, Lemma 1.1]).

**Lema 1.1.5.** *Seja  $R$  um anel  $\sigma$ -primo. As seguintes condições são válidas:*

*i)  $R \subseteq Q_\sigma(R)$ .*

*ii) Se  $I$  é um  $\sigma$ -ideal não-nulo de  $R$  e  $f : I \rightarrow R$  um homomorfismo de  $R$ -módulos à esquerda, então existe  $q \in Q_\sigma(R)$  tal que,  $f(i) = iq$  para todo  $i \in I$ .*

*iii) Para todo  $q_1, \dots, q_n$  em  $Q_\sigma(R)$  existe um  $\sigma$ -ideal não-nulo  $J$  de  $R$ , tal que  $Jq_i \subset R$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

*iv) Se  $Jq = 0$ , para algum  $\sigma$ -ideal não-nulo  $J$  de  $R$ , então  $q = 0$ .*

A prova do seguinte lema é análoga a de [3, Lemma 2.2].

**Lema 1.1.6.** *Seja  $R$  um anel  $\sigma$ -primo. Seja  $q \in Q_\sigma(R)$ , tal que  $qR = Rq$  e  $\sigma(q) = yq$ , onde  $y$  é um elemento invertível de  $R$ , então  $q$  é invertível em  $Q_\sigma(R)$ . Em particular,  $C_\sigma(R)$  é um corpo.*

Seja  $d$  uma derivação de  $R$ , i.e.,  $d$  é uma aplicação aditiva e  $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ . Um ideal  $J$  de  $R$  é dito um  $d$ -ideal de  $R$ ,

se  $d(J) \subseteq J$ .

Seja  $P$  um ideal de  $R$ . Dizemos que o ideal  $P$  é um ideal  $d$ -primo, se  $P$  é um  $d$ -ideal e se dados quaisquer  $d$ -ideais  $J, K$  de  $R$  tais que  $JK \subseteq P$  implica  $J \subseteq P$  ou  $K \subseteq P$ . Um anel  $R$  é dito  $d$ -primo, se o ideal  $(0)$  é um ideal  $d$ -primo.

A construção do anel de  $d$ -quocientes à esquerda de Martindale  $Q_d(R)$  de  $R$  segue análoga à construção do anel de quociente à esquerda de Martindale, e neste caso considerando o conjunto  $\mathcal{I}_d$  dos  $d$ -ideais não nulos de  $R$ . A derivação  $d$  se estende unicamente a  $Q_d(R)$  e denotamos esta extensão ainda por  $d$ . Seja  $C_d(R) = \{c \in Z(Q_d(R)) : d(c) = 0\}$ , o  $d$ -centróide estendido de  $R$ .

As propriedades básicas do anel de  $d$ -quocientes à esquerda de Martindale de  $R$  são análogas à do Lema 1.1.2. O próximo resultado nos dá uma propriedade do  $d$ -centroide estendido de  $R$  e a prova é análoga a feita em [3, Lemma 2.2].

**Lema 1.1.7.** *Seja  $q \in Q_d(R)$  tal que  $qR = Rq$  e  $d(q) = zq$ , para algum  $z \in Q_d(R)$ . Então  $q$  é invertível em  $Q_d(R)$ . Em particular,  $C_d(R)$  é um corpo.*

## 1.2 Extensões de Ore

Sejam  $R$  um anel,  $\sigma$  um automorfismo de  $R$ ,  $d$  uma  $\sigma$ -derivação de  $R$ , isto é,  $d$  é uma aplicação aditiva tal que  $d(ab) = d(a)b + \sigma(a)d(b)$ , para todo  $a, b \in R$ . O skew anel de polinômios  $R[x; \sigma, d]$ , (denominado também extensão de Ore) é definido como o con-

junto dos polinômios da forma da  $\sum_{i=0}^s a_i x^i$  com  $a_i \in R$ , onde a soma é a usual e a multiplicação é definida pela fórmula  $xa = \sigma(a)x + d(a)$ .

O grau de um polinômio  $f$  se define como usualmente e se denotará por  $\delta(f)$ . Um ideal  $I$  de  $R[x; \sigma, d]$  é dito  $R$ -disjunto se  $I \cap R = 0$ .

Se  $d\sigma = \sigma d$ , então  $\sigma$  se estende a um automorfismo de  $R[x; \sigma, d]$  definido por  $\sigma(\sum_{i=0}^n a_i x^i) = \sum_{i=0}^n \sigma(a_i) x^i$  e  $d$  se estende a uma  $\sigma$ -derivação de  $R[x; \sigma, d]$  definida por  $d(f) = xf - \sigma(f)x$ .

O skew anel de polinômios de tipo automorfismo, que denotamos por  $R[x; \sigma]$ , é o caso particular do anterior no caso em que  $d = 0$ . Neste caso, os elementos são como acima e a multiplicação é definida pela fórmula  $xa = \sigma(a)x$ . De maneira análoga, temos o skew anel de polinômios de tipo derivação, que denotamos por  $R[x; d]$ , é o caso particular da extensão de Ore no caso em que  $\sigma = id_R$ . Neste caso, os elementos são definidos como acima e a multiplicação é definida pela fórmula  $xa = ax + d(a)$ .

Um ideal  $I$  de  $R$  é dito um  $(\sigma, d)$ -ideal se  $\sigma(I) = I$  e  $d(I) \subseteq I$ .

**Definição 1.2.1.** *Sejam  $R$  um anel,  $\sigma$  um automorfismo de  $R$ ,  $d$  uma  $\sigma$ -derivação de  $R$ . Um  $(\sigma, d)$ -ideal  $P$  de  $R$  é dito um ideal  $(\sigma, d)$ -primo se para quaisquer  $(\sigma, d)$ -ideais  $I$  e  $J$  de  $R$  temos que  $IJ \subseteq P$  implica que  $I \subseteq P$  ou  $J \subseteq P$ . Um anel  $R$  é dito  $(\sigma, d)$ -primo se o ideal  $(0)$  é um ideal  $(\sigma, d)$ -primo.*

**Definição 1.2.2.** *Um elemento  $a \in R$  é dito  $(\sigma, d)$ -invariante, se  $\sigma(a) = a$  e  $d(a) = 0$ .*

A seguinte proposição aparece em [15, Proposition 2.1].



**Proposição 1.2.3.** *Seja  $R$  um anel primo e  $Q$  o anel de quocientes à esquerda de Martindale de  $R$ . Para um ideal  $I$  de  $R[x; \sigma, d]$  existe um polinômio mônico e invariante*

$$f_I(x) \in Q[x; \sigma, d]$$

*tendo as seguintes propriedades:*

*i)  $\delta(f_I) = \min\{\delta(f(x)) : f(x) \in I \setminus \{0\}\} = n$ , e todo polinômio  $g(x) \in I$  de grau  $n$  pode ser escrito como  $f_I(x)a$  para algum  $a \in R$ .*

*ii)  $I \subseteq Q[x; \sigma, d]f_I(x) \cap R[x; \sigma, d]$ .*

O polinômio  $f_I$  da Proposição 1.2.3, é denominado o polinômio canônico associado à  $I$ . É fácil ver que  $f_I$  é normal em  $Q[x; \sigma, d]$  (i.e.,  $f_I Q[x; \sigma, d] = Q[x; \sigma, d]f_I$ ). Assim,  $Q[x; \sigma, d]f_I$  é um ideal.

**Definição 1.2.4.** *Para um ideal  $R$ -disjunto  $I$  de  $R[x; \sigma, d]$  definimos o fecho  $[I]$  de  $I$  como  $[I] = f_I Q[x; \sigma, d] \cap R[x; \sigma, d]$  se  $I$  não é nulo, onde  $f_I$  é o polinômio canônico de  $I$ , e  $[I] = (0)$  se  $I$  é o ideal nulo. Dizemos que um ideal  $R$ -disjunto  $I$  de  $R[x; \sigma, d]$  é um ideal fechado se  $[I] = I$ .*

Seja  $P$  um ideal primo de  $R[x; \sigma]$ . Se  $x \in P$  então  $P = P \cap R + R[x; \sigma]x$ . Se  $x \notin P$ , então  $P \cap R$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R$ . Podemos considerar  $\pi(P)$  em  $(R/P \cap R)[x; \sigma]$ , e neste caso  $\pi(P)$  é um ideal primo  $(R/P \cap R)$ -disjunto, onde  $\pi : R[x; \sigma] \rightarrow (R/P \cap R)[x; \sigma]$  é a projeção canônica. Em [3], foram descritos completamente os ideais primos de  $R[x; \sigma]$ .

**Definição 1.2.5.** *Sejam  $R$  um anel e  $\sigma$  um automorfismo de  $R$ . Dizemos que um ideal  $I$  de  $R[x; \sigma]$  é regular módulo  $x$ , se ocorrem as seguintes condições:*

- i) Se  $xf \in I$ , então  $f \in I$ .
- ii) Se  $fx \in I$ , então  $f \in I$ .

Um ideal primo  $R$ -disjunto  $P$  de  $R[x; \sigma]$  com  $x \notin P$ , é claramente regular módulo  $x$ . Não é difícil ver que para todo ideal  $I$  de  $R[x; \sigma]$  tal que  $I$  é regular módulo  $x$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R[x; \sigma]$ .

O seguinte lema é fácil de ser verificado.

**Lema 1.2.6.** *Se  $P$  é um ideal  $\sigma$ -primo de  $R$ , onde  $\sigma$  é um automorfismo de  $R$ , então  $P[x; \sigma]$  é um ideal primo de  $R[x; \sigma]$ .*

O seguinte lema é uma consequência do Teorema 4.4 de [13].

**Lema 1.2.7.** *Sejam  $R$  um anel e  $\sigma$  um automorfismo de  $R$ . Então,  $R$  é um anel  $\sigma$ -primo se, e somente se,  $R[x; \sigma]$  é um anel primo.*

A seguinte proposição é um caso particular de [3, Proposition 2.1].

**Proposição 1.2.8.** *Sejam  $R$  um anel  $\sigma$ -primo,  $Q_\sigma(R)$  o anel de  $\sigma$ -quocientes à esquerda de Martindale de  $R$ . Para um ideal não-nulo  $I$  de  $R[x; \sigma]$  tal que  $I$  é regular módulo  $x$ , existe um polinômio mônico  $f_I(x) \in Q_\sigma(R)[x; \sigma]$  tendo as seguintes propriedades:*

i)  $\delta(f_I) = \min\{\delta(f(x)) : f(x) \in I \setminus \{0\}\} = n$ , e todo polinômio  $g(x) \in I$  de grau  $n$  pode ser escrito como  $af_I(x)$  para algum  $a \in R$ .

ii)  $\sigma^{\delta(f_I)}(b)f_I(x) = f_I(x)b$ , para todo  $b \in Q_\sigma(R)$  e  $\sigma(f_I) = f_I$ .

A próxima proposição descreve completamente os ideais primos  $R$ -disjuntos de  $R[x; \sigma]$  que não contém  $x$  e sua prova é uma fácil consequência de [3, Lemma 2.1] e [3, Lemma 3.1].

**Teorema 1.2.9.** *Seja  $R$  um anel  $\sigma$ -primo, onde  $\sigma$  é um automorfismo de  $R$  e  $P$  um ideal  $R$ -disjunto não-nulo de  $R[x; \sigma]$  tal que  $x \notin P$ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- i)  $P$  é um ideal primo.*
- ii)  $P = f_P Q_\sigma(R)[x; \sigma] \cap R[x; \sigma]$ , onde  $f_P$  é um polinômio irredutível em  $Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma])$ .*
- iii) Existe um ideal primo não-nulo  $Q_\sigma(R)$ -disjunto  $P^*$  de  $Q_\sigma(R)[x; \sigma]$  tal que  $P = P^* \cap R[x; \sigma]$ .*

Se  $I$  é um  $d$ -ideal de  $R$ , é claro que  $I[x; d]$  é um ideal de  $R[x; d]$ . O próximo lema é de fácil verificação.

**Definição 1.2.10.** *Sejam  $R$  um anel e  $d$  uma derivação de  $R$ . Dizemos que  $d$  é uma derivação interna se existe  $a \in R$  tal que  $d(r) = ar - ra$ , para todo  $r \in R$ .*

A próxima proposição aparece em ([4, Proposition 1.2]).

**Proposição 1.2.11.** *Sejam  $R$  um anel  $d$ -primo,  $d$  uma derivação de  $R$ ,  $Q_d(R)$  o anel de  $d$ -quocientes à esquerda de Martindale de  $R$  e  $C_d(R)$  o  $d$ -centróide estendido de  $R$ . Então,  $Z(Q_d(R)[x; d]) = C_d(R)$  ou  $Z(Q_d(R)[x; d]) = C_d[z]$ , onde  $z$  tem uma das seguintes formas:*

- (i)  $z = x - a$ , se  $\text{char} R = 0$ , e  $d(q) = aq - qa$ .

- (ii) *Existem  $c_i \in C_d(R)$ , tais que  $z = x^{p^m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^{p^i} - a$ , se  $\text{char} R = p \neq 0$ , onde  $d(a) = 0$  e  $d^{p^m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i d^{p^i}(q) = aq - qa$ .*

A próxima proposição esclarece quando o centro é trivial (i.e,  $C_d(R)$ ) ou não é trivial ([4, Lemma 1.3]).

**Proposição 1.2.12.** *Seja  $R$  um anel  $d$ -primo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) Existe um ideal  $R$ -disjunto não-nulo de  $R[x; d]$ .*
- ii) O centro de  $Q_d(R)[x; d]$  não é trivial, ou seja,  $Z(Q_d(R)[x; d])$  é diferente de  $C_d(R)$ .*

*Além disso, para todo ideal  $R$ -disjunto não-nulo  $I$  de  $R[x; d]$ , existe um único polinômio mônico  $f_I \in Z(Q_d(R)[x; d])$  tal que todo polinômio de grau mínimo  $f \in I$ , pode ser escrito como  $f = lc(f)f_I$ .*

**Lema 1.2.13.** *Sejam  $R$  um anel e  $d$  uma derivação de  $R$ .*

- i) Se  $P$  é um ideal primo de  $R[x; d]$ , então  $P \cap R$  é um ideal  $d$ -primo de  $R$ .*
- ii) Se  $J$  é um ideal  $d$ -primo de  $R$ , então  $J[x; d]$  é um ideal primo de  $R[x; d]$ .*

O próximo resultado aparece em [4, Theorem 1.6].

**Teorema 1.2.14.** *Seja  $P$  um ideal  $R$ -disjunto não-nulo de  $R[x; d]$ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- i)  $P$  é um ideal primo.*

ii)  $P = f_P Q_d(R)[x; d] \cap R[x; d]$ , onde  $f_P$  é um polinômio irredutível em  $Z(Q_d(R)[x; d])$ .

iii) Existe um ideal primo não-nulo  $Q$ -disjunto  $P^*$  de  $Q_d(R)[x; d]$  tal que  $P = P^* \cap R[x; d]$ .

## Capítulo 2

# Ideais Maximais em skew anel de Polinômios

Neste capítulo, os anéis não tem necessariamente unidade. O objetivo principal é determinar ideais maximais em skew anel de polinômios e descrever os seus radicais de Brown-McCoy. Isso foi feito para polinômios usuais em [20], e seguiremos aqui as principais linhas desse trabalho.

### 2.1 Skew Anel de Polinômios de Tipo Automorfismo

Os principais teoremas desta seção caracterizam os ideais maximais e o radical de Brown-McCoy de skew anel de polinômios de tipo automorfismo, respectivamente. Nesta seção,  $R$  é um anel não necessariamente com unidade e  $\sigma$  é um automorfismo de  $R$ . A seguinte definição estende para o nosso caso, a definição dada em [20, pg. 2474].

**Definição 2.1.1.** *Seja  $\varphi : R[x; \sigma] \rightarrow T$  um homomorfismo sobrejetor, onde  $T$  é um anel simples com identidade. Dizemos que  $\varphi$  é um homomorfismo  $\sigma$ -próprio se para todo  $\sigma$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$ , temos que  $\varphi(I[x; \sigma]x) = T$ .*

**Lema 2.1.2.** *Seja  $R$  um anel  $\sigma$ -primo. Dados dois  $\sigma$ -ideais à esquerda  $I, J$  de  $R$ , tais que  $IJ = 0$ , temos  $I = 0$  ou  $J = 0$ .*

Prova. Temos que  $IRJR = 0$ , e usando o fato que  $R$  é um anel  $\sigma$ -primo, segue que  $IR = 0$  ou  $JR = 0$ . Logo,  $I = 0$  ou  $J = 0$ . ■

No próximo lema, vemos que o núcleo de um homomorfismo  $\sigma$ -próprio é um  $\sigma$ -ideal.

**Lema 2.1.3.** *Seja  $\varphi : R[x; \sigma] \rightarrow T$  um homomorfismo  $\sigma$ -próprio de anéis, onde  $T$  é um anel simples com identidade. Então,  $\ker \varphi$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R[x; \sigma]$ . Além disso, se  $w(x) \in R[x; \sigma]x$ , é tal que  $\varphi(w(x)) = 1$ , então*

$$\varphi(\sigma^i(w(x))) = 1,$$

para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

Prova. Afirmamos que  $\ker \varphi$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R[x; \sigma]$ . De fato, dado  $f \in \ker \varphi$ , temos que

$$R[x; \sigma]\sigma(f)R[x; \sigma]x = R[x; \sigma]x f R[x; \sigma] \subseteq \ker \varphi.$$

Logo,  $R[x; \sigma]\sigma(f) \subseteq \ker \varphi$ , pois  $R[x; \sigma]x \not\subseteq \ker \varphi$  e  $\ker \varphi$  é um ideal primo. Assim,  $\sigma(f) \in \ker \varphi$ . Observando que

$$R[x; \sigma]x\sigma^{-1}(f)R[x; \sigma] = R[x; \sigma]fR[x; \sigma]x \subseteq \ker \varphi,$$

de maneira análoga, se mostra que  $\sigma^{-1}(f) \in \ker \varphi$ . Logo,  $\ker \varphi$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R[x; \sigma]$ .

Do anterior, segue que  $\sigma$  induz um automorfismo de

$$R[x; \sigma]/\ker \varphi \rightarrow R[x; \sigma]/\ker \varphi.$$

Sendo que  $w(x) + \ker \varphi$  é a unidade de  $R[x; \sigma]/\ker \varphi$ , o resultado segue facilmente. ■

A próxima definição aparece em [18, pg 908].

**Definição 2.1.4.** *Sejam  $R$  um anel e  $\sigma$  um automorfismo de  $R$ . Um elemento não-nulo  $a \in R$  é dito  $\sigma^j$ -normalizante se  $ra = a\sigma^j(r)$ , para todo  $r \in R$ .*

**Lema 2.1.5.** *Sejam  $R$  um anel  $\sigma$ -primo e  $a$  um elemento não-nulo de  $R$ . Se  $a$  é  $\sigma^j$ -normalizante e  $\sigma$ -invariante, então  $a$  é um elemento regular.*

*Prova.* Suponhamos que exista  $c \in R$  tal que  $ac = 0$ . Consideremos o  $\sigma$ -ideal a esquerda  $J$  gerado por  $c$ . Não é difícil ver que  $RaJ = 0$ . Usando o fato que  $R$  é um anel  $\sigma$ -primo, temos que  $Ra = 0$  ou  $J = 0$ . Assim,  $J = 0$ , e logo  $c = 0$ . O outro caso é análogo. ■

A classe a seguir é correspondente à classe usada em [20], para polinômios usuais.

**Definição 2.1.6.** *Seja  $\mathcal{A}$  a classe de todos os anéis com automorfismos que satisfazem a seguinte propriedade: Um par  $(R, \sigma) \in \mathcal{A}$  se  $R$  é um anel  $\sigma$ -primo, onde  $\sigma$  é um automorfismo de  $R$ , e para todo  $\sigma$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$  existem  $a \in I$  e  $j \geq 1$ , tais que  $\sigma(a) = a$  e  $ra = a\sigma^j(r)$  para todo  $r \in R$ .*



**Definição 2.1.7.** Dado  $w(x) \in R[x; \sigma]x$ , definimos o comprimento de  $w(x)$  por  $l(w(x)) = \delta(w(x)) - \min w(x) + 1$ , onde  $\min w(x)$  é o expoente da menor potência de  $x$  em  $w(x)$  com coeficiente não-nulo.

O lema que segue generaliza [20, Lemma 1].

**Lema 2.1.8.** Suponhamos que  $\varphi : R[x; \sigma] \rightarrow T$  é um homomorfismo  $\sigma$ -próprio sobre um anel simples com identidade e seja  $w(x) \in R[x; \sigma]x$ , tal que  $\varphi(w(x)) = 1$ . Então para todo  $\sigma$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$ , existe  $t(x) \in I[x; \sigma]x$  com  $\varphi(t(x)) = 1$ ,  $\min t(x) \geq \delta(w(x))$  e  $l(t(x)) \leq \delta(w(x))$ .

Prova. Seja  $p(x) = i_n x^n + \dots + i_m x^m \in I[x; \sigma]x$  com  $i_n \neq 0$  e  $n \leq m$  tal que  $\varphi(p(x)) = 1$ .

Definimos  $p^*(x) = i_n x^n w(x) + i_{n+1} x^{n+1} + \dots + i_m x^m$ , não é difícil ver que  $\min p^*(x) \geq n + 1$  e  $\varphi(p^*(x)) = 1$ .

Se  $\delta(i_n x^n w(x)) \leq m$ , então  $l(p^*(x)) \leq l(p(x)) - 1$ .

Se  $\delta(i_n x^n w(x)) \geq m$ , então

$$\begin{aligned} l(p^*(x)) &= -\min(p^*(x)) + \delta(p^*(x)) + 1 \leq \\ &= -n - 1 + \delta(w(x)) + n + 1 = \delta(w(x)), \end{aligned}$$

conseqüentemente  $l(p^*(x)) \leq \max\{\delta(w(x)), l(p(x)) - 1\}$ . Repetindo o processo anteriormente feito um número suficiente de vezes, obtemos o desejado. ■

A proposição que segue generaliza [20, Proposition 1 ] e é fundamental na prova dos principais teoremas desta seção.

**Proposição 2.1.9.** Seja  $\varphi : R[x; \sigma] \rightarrow T$  um homomorfismo sobrejetor  $\sigma$ -próprio, onde  $T$  é um anel simples com identidade.

Se  $w(x) = a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x; \sigma]$ , onde  $a_n \neq 0$ , é de comprimento minimal no conjunto dos polinômios em  $R[x; \sigma]$  tais que  $\varphi(w(x)) = 1$ , então  $a_n$  é  $\sigma^n$ -normalizante e  $\sigma(a_n) = a_n$ .

Prova. Suponhamos que  $a_n$  não seja  $\sigma^n$ -normalizante. Então existe  $r \in R$  tal que  $c = ra_n - a_n\sigma^n(r) \neq 0$ . Consideremos  $g(x) = rw(x) - w(x)r$ . Seja  $I$  o  $\sigma$ -ideal gerado por  $c$ , isto é,  $I = \sum_{i \in \mathbb{Z}} R\sigma^i(c)R$ . Como  $\varphi$  é um homomorfismo  $\sigma$ -próprio, então  $\varphi(I[x; \sigma]) = T$ . Notamos que  $\varphi(I^m[x; \sigma]) \supseteq \varphi(I[x; \sigma])^m = T$ . Pelo Lema 2.1.8, existe  $t_m(x) \in I^m[x; \sigma]$  tal que  $\varphi(t_m(x)) = 1$ , onde  $\min t_m(x) \geq \delta(w(x))$  e  $l(t_m(x)) \leq \delta(w(x))$ . Para cada  $m \geq 2$ , escolha  $t_m$  de comprimento minimal  $l_m$ . Claramente, pela minimalidade do comprimento de  $w(x)$ ,  $l_m \geq l(w(x))$ , para todo  $m \geq 1$ .

Fixemos  $m \geq 1$ . Denotemos por  $b$  o coeficiente líder de  $t_m(x)$ , o qual está em  $I^m$ . Então, existem  $l_i \in I^{m-1}$  e  $m_i \in R^1$ , onde  $R^1$  é o anel  $R$  adjuntado com uma unidade, tais que

$$b = \sum_{i=1}^s l_i \sigma^{q_i}(c) m_i,$$

onde  $q_i \in \mathbb{Z}$ , para  $i \in \{1, \dots, s\}$ , e  $c$  é o coeficiente líder de  $g(x)$ . Consideremos o polinômio

$$\begin{aligned} \bar{t}_m(x) &= t_m(x) - (l_1 \sigma^{q_1}(g(x)) \sigma^{-n}(m_1) + \\ &+ \dots + l_s \sigma^{q_s}(g(x)) \sigma^{-n}(m_s)) x^{\delta(t_m(x)) - \delta(g(x))} \in I^{m-1}[x; \sigma]. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.3, temos que  $\varphi(\sigma^i(w(x))) = 1$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Conseqüentemente,  $\varphi(\sigma^i(g(x))) = 0$ . Assim,  $\varphi(\bar{t}_m(x)) = 1$  e

$$\begin{aligned} l(t_m(x)) &\geq l(\sigma^i(w(x))) \geq l(\sigma^i(g(x))) \geq \\ &l((l_1 \sigma^{q_1}(g(x)) \sigma^{-n}(m_1) + \dots + (l_s \sigma^{q_s}(g(x)) \sigma^{-n}(m_s))). \end{aligned}$$

Mostraremos que  $\min t_m(x) \leq \delta(t_m(x)) - \delta(w(x)) + 1$ . De fato, se  $\delta(t_m(x)) - \delta(w(x)) + 1 < \min t_m(x)$ , então  $\delta(t_m(x)) - \min t_m(x) + 1 < \delta(w(x))$ . Com isso, temos que  $l(t_m(x)) < \delta(w(x))$ . Como  $l(w(x)) = \delta(w(x)) - \min(w(x)) + 1 = \delta(w(x))$ , então  $l(t_m(x)) < l(w(x))$ , e isto contradiz o fato que  $l(w(x))$  é de comprimento minimal. Logo,  $\delta(t_m(x)) - \delta(w(x)) + 1 \geq \min t_m(x)$ , e portanto,  $\min \bar{t}_m(x) \geq \min t_m(x)$ . Finalmente, usando o fato que os coeficientes líderes de  $t_m(x)$  e

$$l_1 \sigma^{q_1}(g(x)) \sigma^{-n}(m_1) + \dots + l_s \sigma^{q_s}(g(x)) \sigma^{-n}(m_s)$$

coincidem, segue que  $l(\bar{t}_m(x)) < l(t_m(x))$ . Logo,  $l_{m-1} < l_m$  para todo  $m \geq 2$ , o que não pode ocorrer, pois  $l_m \leq \delta(w(x))$  para todo  $m$ . Isto conclui a primeira parte da demonstração.

Suponhamos que  $\sigma(a_n) \neq a_n$  e consideremos  $g(x) = \sigma(w(x)) - w(x)$ . Agora, seguindo os mesmos passos da demonstração da primeira parte, chegaremos também a uma contradição. ■

**Corolário 2.1.10.** *Se  $\varphi : R[x; \sigma] \rightarrow T$  é um homomorfismo sobrejetor  $\sigma$ -próprio, onde  $T$  é um anel simples com identidade, então  $(R, \sigma) \in \mathcal{A}$ .*

Prova. Sejam  $I, J$   $\sigma$ -ideais não-nulos de  $R$ . Como

$$\varphi(IJ[x; \sigma]) = \varphi(I[x; \sigma])\varphi(J[x; \sigma]) = T,$$

então  $IJ \neq (0)$ . Portanto,  $R$  é um anel  $\sigma$ -primo.

Mostraremos que  $\varphi|_{I[x; \sigma]}$  é um homomorfismo  $\sigma$ -próprio, para todo  $\sigma$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$ . De fato, dado um  $\sigma$ -ideal não-nulo  $J$  de  $I$  temos que  $IJI$  é um  $\sigma$ -ideal não-nulo de  $R$ , pois  $R$  é um anel  $\sigma$ -primo. Logo,  $T = \varphi(IJI[x; \sigma]) \subseteq \varphi(J[x; \sigma])$ .

Assim, pela Proposição 2.1.9, existem  $a \in I$  e  $j \geq 1$ , tais que  $a$  é  $\sigma^j$ -normalizante em  $I$  e  $\sigma(a) = a$ . Afirmamos que  $a$  é  $\sigma^j$ -normalizante em  $R$ . De fato, dado  $i \in I$  e  $r \in R$  temos que

$$i(ra - a\sigma^j(r)) = a\sigma^j(i)\sigma^j(r) - a\sigma^j(i)\sigma^j(r) = 0,$$

segue que  $I(ra - a\sigma^j(r)) = 0$ . Logo, pelo Lema 2.1.2,  $ra - a\sigma^j(r) = 0$ . ■

Seja  $R$  um anel  $\sigma$ -primo. Primeiro, consideremos  $R$  como uma  $\mathbb{Z}$ -álgebra e  $S = R \oplus \mathbb{Z}$ , onde a soma é definida usualmente e a multiplicação é dada por  $(r, z)(r_1, z_1) = (rr_1 + rz_1 + zr_1, zz_1)$ . O automorfismo  $\sigma$  pode ser estendido a  $S$  definido por  $\bar{\sigma}(r, z) = (\sigma(r), z)$ . Denotamos ainda  $\bar{\sigma}$  por  $\sigma$ . Seja  $I = \text{ann}_S R = \{t \in S : Rt = 0\}$ . Afirmamos que  $I$  é um  $\sigma$ -ideal de  $S$ . De fato, para todo  $t \in S$  e  $r \in R$  temos que  $\sigma(r)\sigma(t) = 0$ . Assim,  $R\sigma(t) = 0$ . De maneira análoga, é fácil ver que  $R\sigma^{-1}(t) = 0$ . Temos que  $I \cap R = (0)$ , pois  $R(I \cap R) = (0)$  e  $R$  é um anel  $\sigma$ -primo. Definimos  $R^\# = S/I$ . É claro que  $R \subseteq R^\#$ ,  $R$  é um ideal  $\sigma$ -essencial de  $R^\#$  (i. e., para todo  $\sigma$ -ideal não nulo  $H$  de  $R^\#$ ,  $H \cap R \neq 0$ ), e  $R^\#$  é um anel  $\sigma$ -primo com unidade.

O  $\sigma$ -pseudo radical  $P_\sigma(R)$  de  $R$ , é definido como a intersecção de todos os ideais  $\sigma$ -primos não-nulos de  $R$ . O seguinte lema, será usado no Teorema 2.1.13.

**Lema 2.1.11.** *Sejam  $R$  um anel,  $\sigma$  um automorfismo de  $R$ , e  $R^\#$  como na observação anterior. Se  $(R, \sigma) \in \mathcal{A}$  e  $P_\sigma(R) \neq 0$ , então  $(R^\#, \sigma) \in \mathcal{A}$  e  $P_\sigma(R^\#) \neq 0$ .*

*Prova.* Dado um  $\sigma$ -ideal não-nulo  $J$  de  $R^\#$  temos que  $J \cap R$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R$ . Como  $R$  é  $\sigma$ -essencial em  $R^\#$ , então  $J \cap R \neq 0$ .

Por hipótese, existe  $a \in J \cap R$  tal que  $a$  é  $\sigma^j$ -normalizante para algum  $j \geq 1$  e  $\sigma(a) = a$ . Não é difícil ver que  $a$  é  $\sigma^j$ -normalizante em  $R^\#$ . Sendo assim,  $(R^\#, \sigma) \in \mathcal{A}$ .

Seja  $P$  um ideal  $\sigma$ -primo não-nulo de  $R^\#$ . Vejamos que  $P \cap R$  é um ideal  $\sigma$ -primo não-nulo de  $R$ . De fato, sejam  $\sigma$ -ideais  $U, V$  de  $R$  com  $UV \subseteq P \cap R$ . Temos que  $U$  e  $V$  são  $\sigma$ -ideais de  $R^\#$ . Sendo  $P$  um ideal  $\sigma$ -primo de  $R^\#$ , segue que  $U \subseteq P$  ou  $V \subseteq P$ , e concluímos que  $U \subseteq P \cap R$  ou  $V \subseteq P \cap R$ . Assim,  $P_\sigma(R) \subseteq P \cap R$ . Logo,  $P_\sigma(R^\#) \neq (0)$ . ■

A seguinte proposição foi provada para anéis com unidade em [18, Lemma 3.2 (1)]. A prova para o caso geral é a mesma, e por isso não iremos inclui-la aqui.

**Proposição 2.1.12.** *Sejam  $R$  um anel e  $M$  um ideal  $R$ -disjunto tal que  $R[x; \sigma]/M$  é simples com identidade. Então  $P_\sigma(R) \neq (0)$ .*

Estamos em condições de provar o teorema a seguir, que generaliza o resultado de [20, Corollary 2].

**Teorema 2.1.13.** *Sejam  $R$  um anel e  $\sigma$  um automorfismo de  $R$ . Então  $R[x; \sigma]$  possui um ideal  $R$ -disjunto  $M$  tal que  $R[x; \sigma]x \not\subseteq M$  e  $R[x; \sigma]/M$  é simples com identidade se, e somente se,  $(R, \sigma) \in \mathcal{A}$  e  $P_\sigma(R) \neq (0)$ .*

Prova. Suponhamos que  $(R, \sigma) \in \mathcal{A}$  e  $P_\sigma(R) \neq (0)$ . Pelo Lema 2.1.11, temos que  $(R^\#, \sigma) \in \mathcal{A}$  e  $P_\sigma(R^\#) \neq (0)$ .

Seja  $0 \neq a \in P_\sigma(R^\#)$  tal que  $a$  é  $\sigma^j$ -normalizante para algum  $j \geq 1$  e  $\sigma(a) = a$ . Consideremos o polinômio  $f(x) = ax^j + 1$ . O ideal  $R^\#[x; \sigma]f$  é um ideal bilateral próprio, pois  $f$  é central

em  $R^\# [x; \sigma]$  e o coeficiente líder de  $f$  é regular em  $R^\#$ . Assim, existe um ideal maximal  $M$  de  $R^\# [x; \sigma]$  tal que  $f(x) \in M$ .

Se  $M \cap R^\# \neq (0)$ , então  $P_\sigma(R^\#) \subseteq M$  e portanto,  $1 \in M$ . Segue que,  $M \cap R^\# = (0)$ .

Se  $x \in M$ , então  $1 \in M$ . Usando o fato que  $R[x; \sigma]/M \cap R[x; \sigma]$  é um ideal de  $R^\# [x; \sigma]/M$ , segue que  $R[x; \sigma]/M \cap R[x; \sigma] = R^\# [x; \sigma]/M$ . Portanto,  $M \cap R[x; \sigma]$  é um ideal com a propriedade que  $R[x; \sigma]/M \cap R[x; \sigma]$  é simples com identidade,  $R[x; \sigma]x \not\subseteq M \cap R[x; \sigma]$ , e é  $R$ -disjunto.

Reciprocamente, seja  $M$  um ideal  $R$ -disjunto de  $R[x; \sigma]$  tal que  $R[x; \sigma]/M$  é simples com identidade e  $R[x; \sigma]x \not\subseteq M$ . Então a projeção canônica  $f : R[x; \sigma] \rightarrow R[x; \sigma]/M$  é um homomorfismo  $\sigma$ -próprio, como é fácil de verificar. Pelo Corolário 2.1.10, segue que  $(R, \sigma) \in \mathcal{A}$ . Além disso, pela Proposição 2.1.12, temos  $P_\sigma(R) \neq (0)$ . ■

**Observação 2.1.14.** *O teorema anterior permite descrever completamente quando existe um ideal  $R$ -disjunto  $M$  de  $R[x; \sigma]$  tal que  $R[x; \sigma]/M$  é simples com identidade. De fato, ou temos  $(R, \sigma) \in \mathcal{A}$  e  $P_\sigma(R) \neq 0$  ou então  $M$  contém  $R[x; \sigma]x$ . Neste último caso  $M = R[x; \sigma]x$  e segue que  $R$  deve ser um anel simples com identidade.*

Se  $R$  é um anel com automorfismo  $\sigma$  e  $I$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R$ , então  $\sigma$  induz um automorfismo em  $R/I$  que vamos denotar ainda por  $\sigma$ . Assim, com essa notação, podemos considerar o par  $(R/I, \sigma)$  com automorfismo  $\sigma$ . A próxima proposição é uma extensão de [20, Corollary 1 (ii)].

**Proposição 2.1.15.** *Seja  $\varphi : R[x; \sigma] \rightarrow T$  um homomorfismo sobrejetor, onde  $T$  é um anel simples com identidade tal que  $R[x; \sigma]x \not\subseteq \ker \varphi$ . Então  $(R/R \cap \ker \varphi, \sigma) \in \mathcal{A}$ .*

Prova. Pelo Lema 2.1.3, temos que  $\ker \varphi \cap R$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R$ . Assim, é fácil verificar que  $\varphi$  induz o homomorfismo  $\sigma$ -próprio

$$(R/\ker \varphi \cap R)[x; \sigma] \rightarrow T.$$

Logo, pelo Corolário 2.1.10,  $(R/R \cap \ker \varphi, \sigma) \in \mathcal{A}$ . ■

O radical de Brown-McCoy  $U(R)$  de  $R$ , é definido como a intersecção de todos os ideais  $M$  de  $R$  tais que  $R/M$  é simples com identidade. Note que se  $R$  é um anel que possui identidade, então  $U(R)$  coincide com a intersecção de todos os ideais maximais. Um anel  $R$  é chamado anel radical de Brown-McCoy se  $U(R) = R$ . É fácil ver que  $R$  é um anel radical de Brown-McCoy se, e somente se, não existe um epimorfismo  $\varphi : R \rightarrow S$ , onde  $S$  é um anel simples com identidade. Os próximos dois corolários generalizam [20, Corollary 3 (ii)] e [20, Corollary 3 (i)], respectivamente.

**Corolário 2.1.16.** *Se  $R$  é um anel nil, então  $R[x; \sigma]$  é um anel radical de Brown-McCoy.*

Prova. Suponhamos que exista um homomorfismo sobrejetor  $\varphi : R[x; \sigma] \rightarrow T$ , onde  $T$  é um anel simples com identidade.

Se  $R[x; \sigma]x \subseteq \ker \varphi$ , então  $\varphi$  induz um isomorfismo  $R/(\ker \varphi \cap R) \rightarrow T$ . Isto é uma contradição, pois  $T$  tem identidade e  $R/\ker \varphi \cap R$  é um anel nil.

Se  $R[x; \sigma]x \not\subseteq \ker \varphi$  então, pela Proposição 2.1.15, existe um ideal  $\sigma$ -primo  $I$  de  $R$  tal que  $(R/I, \sigma) \in \mathcal{A}$ . Portanto,  $R/I$  é um

anel nil que contém um elemento regular, contradição. Logo,  $R[x; \sigma]$  é um anel radical de Brown-McCoy. ■

**Corolário 2.1.17.** *Se  $R$  é um anel simples sem identidade, então  $R[x; \sigma]$  é um anel radical de Brown-McCoy.*

Prova. Suponhamos que exista um homomorfismo sobrejetor  $\varphi : R[x; \sigma] \rightarrow T$ , onde  $T$  é um anel simples com identidade. É claro que  $\ker \varphi \cap R = 0$ , pois  $R$  é um anel simples. Se  $R[x; \sigma]x \subset \ker \varphi$ , então  $R \cong T$ , o qual é uma contradição.

Se  $R[x; \sigma]x \not\subset \ker \varphi$  então, pela Proposição 2.1.5, existe um elemento não-nulo  $a \in R$ , tal que  $a$  é  $\sigma^j$ -normalizante para algum  $j \geq 1$  e  $\sigma(a) = a$ . Então  $Ra$  é um ideal bilateral de  $R$  e segue que  $Ra = R$ . Pelo Lema 2.1.5,  $a$  é um elemento regular e existe  $r \in R$ , tal que  $a = ra = a\sigma^j(r)$ . Mostramos que  $r$  é a unidade de  $R$ , o que contradiz o fato de que  $R$  não possui unidade. De fato, dado  $y \in R$ , temos que  $y = wa = a\sigma^j(w)$ , onde  $w \in R$ . É claro que,  $ry = rwa = a\sigma^j(r)\sigma^j(w) = a\sigma^j(w) = wa = y$ . Por outro lado,  $yr = war = w\sigma^{-j}(r)a = wa = y$ . Isto completa a prova. ■

**Definição 2.1.18.** *Seja  $\mathcal{A}'$  a classe dos anéis com automorfismos que satisfazem as seguintes condições: Um par  $(R, \sigma) \in \mathcal{A}'$ , se  $R$  é um anel e  $\sigma$  é um automorfismo de  $R$  tal que  $(R, \sigma) \in \mathcal{A}$  e  $P_\sigma(R) \neq (0)$ .*

**Definição 2.1.19.** *Dado um anel  $R$  com automorfismo  $\sigma$ , definimos  $S_\sigma(R)$  como a intersecção de todos os  $\sigma$ -ideais  $P$  de  $R$  tais que  $(R/P, \sigma) \in \mathcal{A}'$ .*

Estamos agora em condições de dar a descrição completa do radical de Brown-McCoy de  $R[x; \sigma]$ . Em [5], foi mostrado que



$$U(R[x; \sigma]) = U(R[x; \sigma]) \cap R \oplus B[x; \sigma]x,$$

onde  $B = \{b \in R : bx \in U(R[x; \sigma])\}$ .

**Teorema 2.1.20.** *Sejam  $R$  um anel e  $\sigma$  um automorfismo de  $R$ . Então  $U(R[x; \sigma]) = S_\sigma(R) \cap U(R) \oplus xS_\sigma(R)[x; \sigma]$ .*

Prova. Sejam  $A = \{M : R[x; \sigma]/M \text{ é simples com identidade e } R[x; \sigma]x \not\subseteq M\}$  e  $A' = \{M : R[x; \sigma]/M \text{ é simples com identidade e } R[x; \sigma]x \subseteq M\}$ . Mostramos que o ideal  $B$  definido acima é igual a  $S_\sigma(R)$ . De fato, dado um  $\sigma$ -ideal  $P$  de  $R$  tal que  $(R/P, \sigma) \in \mathcal{A}'$ , pelo Teorema 2.1.13, existe um ideal  $M$  de  $(R/P)[x; \sigma]$  tal que é  $R/P$ -disjunto,  $(R/P)[x; \sigma]x \not\subseteq M$  e  $(R/P)[x; \sigma]/M$  é simples com identidade. Consideremos o isomorfismo canônico  $\varphi : (R/P)[x; \sigma] \rightarrow R[x; \sigma]/P[x; \sigma]$ , não é difícil ver que  $\varphi(M) = M_1/P[x; \sigma]$ , onde  $M_1$  tem a propriedade que  $M_1 \cap R = P$  e  $M_1 \in A$ . Assim,  $(\bigcap_{M \in A} M) \cap R \subseteq S_\sigma(R)$ . Agora dado  $b \in B$ , temos que  $bx \in U(R[x; \sigma])$ . Como  $R[x; \sigma]x \not\subseteq M_1$ , então  $b \in M_1 \cap R = P$ . Logo,  $b \in S_\sigma(R)$ . Assim,  $B \subset S_\sigma(R)$ .

Por outro lado, dado  $b \in S_\sigma(R)$  temos que  $bx \in M'$ , para todo  $M' \in A'$ . Seja  $M \in A$ , pela Proposição 2.1.15,  $(R/(M \cap R), \sigma) \in \mathcal{A}'$ . Assim,  $S_\sigma(R) \subseteq M \cap R$ . Deste fato, temos que  $(\bigcap_{M \in A} M \cap R) \supseteq S_\sigma(R)$  e  $bx \in M$  para todo  $M \in A$ . Logo,  $b \in B$ . Conseqüentemente,  $S_\sigma(R) \subseteq B$  e portanto,  $(\bigcap_{M \in A} M) \cap R = S_\sigma(R) = B$ .

Para concluir a prova mostramos que  $(\bigcap_{M' \in A'} M') \cap R = U(R)$ . De fato, dado um ideal  $M \in A'$ , não é difícil ver que  $R/M \cap R \simeq R[x; \sigma]/M$ . Assim,  $(\bigcap_{M' \in A'} M') \cap R \supseteq U(R)$ . A outra inclusão é clara. Com isso, temos que  $U(R[x; \sigma]) \cap R = S_\sigma(R) \cap U(R)$ . A

prova esta completa. ■

## 2.2 Skew anel de Polinômios de Tipo Derivação

Os principais resultados desta seção determinam os ideais maximais e o radical de Brown-McCoy em  $R[x; d]$ , para os casos em que  $R$  é um anel comutativo ou  $R$  é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra. O problema geral ainda está em aberto.

Se  $(R, d)$  é um anel com uma derivação  $d$  e  $I$  é um  $d$ -ideal de  $R$ , então  $d$  induz uma derivação em  $R/I$  que vamos denotar ainda por  $d$ . Assim, com esta notação, podemos considerar o par  $(R/I, d)$  com derivação  $d$ .

**Definição 2.2.1.** *Seja  $\varphi : R[x; d] \rightarrow T$  um homomorfismo sobrejetor, onde  $T$  é um anel simples com identidade. A aplicação  $\varphi$  é dita  $d$ -própria, se para qualquer  $d$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$ , temos que  $\varphi(I[x; d]) = T$ .*

**Lema 2.2.2.** *Sejam  $\varphi : R[x; d] \rightarrow T$  um homomorfismo  $d$ -próprio sobre um anel simples com identidade e  $w(x) \in R[x; d]$  tal que  $\varphi(w(x)) = 1$ . Então  $\varphi(d^i(w(x))) = 0$ , para todo  $i \geq 1$ .*

Prova. Seja  $M = \ker \varphi$ . Se  $f \in M$ , então  $R[x; d]fxR[x; d] \subset M$ . Como  $R[x; d] \not\subseteq M$ , então  $fx \in M$ , e de maneira análoga, se mostra que  $xf \in M$ . Usaremos estes fatos nesta prova.

Mostraremos que  $d(w(x)) \in M$ . De fato, é claro que para todo  $r \in R$ , temos que  $w(x)rx - rxw(x) \in M$ . Assim,

$$w(x)rx - rxw(x) = w(x)rx - rw(x)x - rd(w(x)) \in M \quad (1),$$

e também temos  $w(x)rx - rx \in M$  (2). Fazendo (1)-(2), obtemos que  $rx - rw(x)x - rd(w(x)) \in M$ . Como  $rw(x) - r \in M$ , então  $rw(x)x - rx \in M$ . Assim,  $rd(w(x)) \in M$ , para todo  $r \in R$ .

Por indução, se mostra que  $rd^i(w(x)) \in M$ , para todo  $i \geq 0$ . Como  $rx d(w(x)) = rd(w(x))x + rd^2(w(x)) \in M$ , então

$$rx d(w(x)) \in M,$$

para todo  $r \in R$ . Procedendo indutivamente, obtemos que  $rx^j d(w(x)) \in M$ , para todo  $j \geq 0$ , e daí,  $R[x; d]d(w(x)) \subset M$ . Assim,  $d(w(x)) \in M$ . Logo,  $\varphi(d(w(x))) = 0$ . A prova se completa facilmente por indução.  $\blacksquare$

Como na seção anterior, dado  $w(x) \in R[x; d]x$ , definimos o comprimento de  $w(x)$  por  $l(w(x)) = \delta(w(x)) - \min w(x) + 1$  onde  $\min w(x)$  é o expoente da menor potência de  $x$  em  $w(x)$  com coeficiente não-nulo.

A classe a seguir é a que corresponde à classe  $\mathcal{A}$  da seção anterior.

Denotamos por  $\mathcal{B}$  a seguinte classe de anéis com derivações: Um par  $(R, d) \in \mathcal{B}$  se  $R$  é um anel  $d$ -primo,  $d$  é uma derivação de  $R$ , e para todo  $d$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$  existe  $a \in I$ , tal que  $d(a) = 0$ , e  $ra = ar$  para todo  $r \in R$ .

**Lema 2.2.3.** *Suponhamos que  $\varphi : R[x; d] \rightarrow T$  é um homomorfismo  $d$ -próprio sobre um anel simples com identidade e seja  $w(x) \in R[x; d]x$  tal que  $\varphi(w(x)) = 1$ . Então para todo  $d$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$  existe  $t(x) \in I[x; d]x$  com  $\varphi(t(x)) = 1$ ,  $\min t(x) \geq \delta(w(x))$  e  $l(t(x)) \leq \delta(w(x))$ .*

Prova. Sejam  $w(x) = a_1x + \dots + a_qx^q$ ,  $p(x) = i_nx^n + \dots + i_mx^m \in I[x; d]x$ , onde  $i_n \neq 0$ ,  $n \leq m$  e  $\varphi(p(x)) = 1$ . Definimos  $p^*(x) = i_nw(x)x^n + i_{n+1}x^{n+1} + \dots + i_mx^m$ . Notamos que  $\min p^*(x) \geq n+1$ . Mostraremos que  $\varphi(i_nw(x)x^n) = \varphi(i_nx^n)$ . Como  $R[x; d](i_nw(x) - i_nx^n)R[x; d] \subset \ker \varphi$ , e  $R[x; d] \not\subseteq \ker \varphi$ , então  $i_nw(x)x^n - i_nx^n \in \ker \varphi$ . Segue facilmente que  $\varphi(p^*(x)) = 1$ .

Se  $\delta(i_nw(x)x^n) \leq m$ , então  $l(p^*(x)) \leq l(p(x)) - 1$ .

Se  $\delta(i_nw(x)x^n) \geq m$ , então

$$l(p^*(x)) = -\min(p^*(x)) + \delta(p^*(x)) + 1 \leq -n - 1 + \delta(w(x)) + n + 1 = \delta(w(x)),$$

conseqüentemente  $l(p^*(x)) \leq \max\{\delta(w(x)), l(p(x)) - 1\}$ . Repetindo o processo um número suficiente de vezes, obtemos o desejado. ■

A proposição que corresponde a Proposição 2.1.9 pode ser obtida neste caso, sempre que  $R$  seja um anel comutativo.

**Proposição 2.2.4.** *Suponhamos que  $R$  é um anel comutativo. Seja  $\varphi : R[x; d] \rightarrow T$  um homomorfismo sobrejetor  $d$ -próprio, onde  $T$  é um anel simples com identidade. Se  $w(x) = a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x, d]x$ , onde  $a_n \neq 0$ , é um polinômio de comprimento minimal no conjunto dos polinômios em  $R[x; d]x$  tais que  $\varphi(w(x)) = 1$ , então  $d(a_n) = 0$ .*

Prova. Suponhamos que  $c = d(a_n) \neq 0$ . Consideremos  $g(x) = d(w(x))$ . Seja  $I$  o  $d$ -ideal gerado por  $c$ , isto é,  $I = \sum_{i \geq 0} Rd^i(c)$ . Como  $\varphi$  é um homomorfismo  $d$ -próprio, então  $\varphi(I[x; d]x) = T$ . Não é difícil ver que  $\varphi(I^m[x; d]x) \supseteq \varphi(I[x; d]x)^m = T$ . Pelo Lema 2.2.3, existe  $t_m(x) \in I^m[x; d]x$  tal que  $\varphi(t_m(x)) = 1$ , onde

$\min t_m(x) \geq \delta(w(x))$  e  $l(t_m(x)) \leq \delta(w(x))$ . Para cada  $m \geq 1$ , escolha  $t_m$  de comprimento minimal  $l_m$ . Claramente, pela minimalidade do comprimento de  $w(x)$ ,  $l_m \geq l(w(x))$ , para todo  $m \geq 2$ .

Fixemos  $m \geq 2$ . Denotamos por  $b$  o coeficiente líder de  $t_m(x)$ , o qual está em  $I^m$ . Então existem  $l_i \in I^{m-1}$  tais que

$$b = \sum_{i=1}^s l_i d^{q_i}(c),$$

onde  $q_i \geq 0$  para  $i \in \{1, \dots, s\}$  e  $c$  é o coeficiente líder de  $g$ . Consideremos o polinômio

$$\begin{aligned} \bar{t}_m(x) = & t_m(x) - (l_1 d^{q_1}(g(x)) + \\ & + \dots + l_s d^{q_s}(g(x))) x^{\delta(t_m(x)) - \delta(g(x))} \in I^{m-1}[x; d]x. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.2, temos que  $\varphi(d^i(w(x))) = 0$ , para todo  $i \geq 1$ . Conseqüentemente,  $\varphi(d^i(g(x))) = 0$ . Assim,  $\varphi(\bar{t}_m(x)) = 1$  e

$$\begin{aligned} l(t_m(x)) \geq & l(d^i(w(x))) \geq l(d^i(g(x))) \geq \\ & l((l_1 d^{q_1}(g(x)) + \dots + l_s d^{q_s}(g(x)))). \end{aligned}$$

Mostraremos que  $\min t_m(x) \leq \delta(t_m(x)) - \delta(w(x)) + 1$ . De fato, se  $\delta(t_m(x)) - \delta(w(x)) + 1 < \min t_m(x)$ , então  $\delta(t_m(x)) - \min t_m(x) + 1 < \delta(w(x))$ , e segue que  $l(t_m(x)) < \delta(w(x))$ . Como  $l(w(x)) = \delta(w(x)) - \min(w(x)) + 1 = \delta(w(x))$ , então  $l(t_m(x)) < l(w(x))$ , e isto contradiz o fato que  $l(w(x))$  é de comprimento minimal. Logo,  $\delta(t_m(x)) - \delta(w(x)) + 1 \geq \min t_m(x)$ , e portanto,  $\min \bar{t}_m(x) \geq \min t_m(x)$ . Finalmente usando o fato que os coeficientes líderes de  $t_m(x)$  e

$$l_1 d^{q_1}(g(x)) + \dots + l_s d^{q_s}(g(x))$$

coincidem, segue que  $l(\bar{t}_m(x)) < l(t_m(x))$ . Logo,  $l_{m-1} < l_m$  para todo  $m \geq 2$ , o que é um absurdo, pois  $l_m \leq \delta(w(x))$  para todo  $m$ . Isto conclui a prova. ■

A Proposição 2.2.5 será fundamental para provarmos o Teorema 2.2.8.

**Proposição 2.2.5.** *Seja  $\varphi : R[x; d] \rightarrow T$  um homomorfismo  $d$ -próprio sobre um anel simples com identidade, onde  $R$  é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra ou  $R$  é um anel comutativo. Então  $(R, d) \in \mathcal{B}$ .*

Prova. Suponhamos que  $R$  é um anel comutativo. Sejam  $I, J$   $d$ -ideais não-nulos de  $R$ . Como

$$\varphi(IJ[x; d]) = \varphi(I[x; d])\varphi(J[x; d]) = T,$$

então  $IJ \neq (0)$ . Portanto,  $R$  é um anel  $d$ -primo.

Mostraremos agora que  $\varphi|_{I[x; d]}$  é um homomorfismo  $d$ -próprio, para todo  $d$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$ . De fato, dado um  $d$ -ideal não-nulo  $J$  de  $I$  temos que  $IJI$  é um  $d$ -ideal não-nulo de  $R$ , pois  $R$  é um anel  $d$ -primo. Desta maneira,  $T = \varphi(IJI[x; d]) \subseteq \varphi(J[x; d])$ . Logo, pela Proposição 2.2.4, existe  $a \in I$  tal que  $d(a) = 0$ .

Mostraremos agora que quando  $R$  é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra, temos que

$(R, d) \in \mathcal{B}$ . Desde que  $R$  é um anel  $d$ -primo, pois  $\ker \varphi \cap R = 0$ , então podemos construir o anel de  $d$ -quocientes a esquerda de Martindale  $Q_d(R)$  de  $R$ , como no capítulo 1. Pela Proposição 1.2.11, temos que  $d$  é uma derivação interna de  $Q_d(R)$ , isto é, existe  $a \in Q_d(R)$  tal que  $d(q) = aq - qa$ , para todo  $q \in Q_d(R)$ .

Assim,  $Q_d(R)[x; d]$  é isomorfo à  $Q_d(R)[x + a]$  por [9, Exercise 1S], e denotamos por  $\zeta$  este isomorfismo. É fácil verificar que  $\zeta(R[x; d]) = R[x + a]$ . Como  $\zeta(\ker \varphi)$  é um ideal  $R$ -disjunto de  $R[x + a]$ , tal que  $R[x + a]/\zeta(\ker \varphi)$  é simples com identidade, então, pelo Corolário 2 de [20], temos que todo ideal não-nulo  $J$  de  $R$  contém um elemento não-nulo central  $s$ . Além disso,  $d(s) = 0$ , pois  $d$  é uma derivação interna em  $Q_d(R)$ . Em particular, isto vale para todo  $d$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$ , o que completa a prova. ■

Consideremos  $R$  como uma  $\mathbb{Z}$ -álgebra e  $S = R \oplus \mathbb{Z}$ , onde a soma é definida como usualmente e a multiplicação é dada por  $(r, z)(r_1, z_1) = (rr_1 + rz_1 + zr_1, zz_1)$ . A derivação  $d$  pode ser estendida à  $S$  da seguinte maneira:  $\bar{d}((r, z)) = (d(r), 0)$ . Denotamos  $\bar{d}$  ainda por  $d$ . Seja  $I = \text{ann}_S R = \{t \in S : Rt = 0\}$ . Afirmamos que  $I$  é um  $d$ -ideal de  $S$ . De fato, para todo  $t \in S$  e  $r \in R$ , temos que  $0 = d(rt) = d(r)t + rd(t) = rd(t)$ . Assim,  $Rd(t) = 0$ . Logo,  $I \cap R = (0)$ , pois  $R(I \cap R) = (0)$  e  $R$  é um anel  $d$ -primo. Definimos  $R^\# = S/I$ . É claro que  $R \subseteq R^\#$ ,  $R$  é um ideal  $d$ -essencial de  $R^\#$  (i.e., para todo  $d$ -ideal não nulo  $H$  de  $R^\#$ , temos que  $H \cap R \neq 0$ ) e  $R^\#$  é um anel  $d$ -primo com unidade .

O  $d$ -pseudo radical  $P_d(R)$  de  $R$  é definido como a intersecção de todos os ideais  $d$ -primos não-nulos de  $R$ . O seguinte lema será usado no Teorema 2.2.8.

**Lema 2.2.6.** *Sejam  $R$  e  $R^\#$  como mencionados acima. Se  $(R, d) \in \mathcal{B}$  e  $P_d(R) \neq 0$ , então  $(R^\#, d) \in \mathcal{B}$  e  $P_d(R^\#) \neq 0$ .*

*Prova.* A prova é semelhante à prova do Lema 2.1.11. ■

**Proposição 2.2.7.** *Sejam  $R$  um anel e  $M$  um ideal  $R$ -disjunto tal que  $R[x; d]/M$  é simples com identidade, onde  $d$  é uma derivação de  $R$ . Então  $P_d(R) \neq (0)$ .*

Prova. Seja  $L$  um ideal  $d$ -primo não-nulo de  $R$ . Então  $M + L[x; d] = R$ . Logo, pelo Lema 2.4 de [4],  $P_d(R) \neq (0)$ . ■

Estamos em condições de provar o teorema a seguir que generaliza o resultado de [21, Corollary 2] para os casos em que  $R$  é um anel comutativo ou  $R$  é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra. Até este momento não foi possível responder a condição suficiente do Teorema 2.2.8, para o caso em que  $R$  tenha característica não nula.

**Teorema 2.2.8.** *Seja  $d$  uma derivação não nula de  $R$ . Suponhamos que  $(R, d) \in \mathcal{B}$ ,  $P_d(R) \neq (0)$  e que  $d$  satisfaz uma das seguintes propriedades:*

- (i)  $d(q) = aq - qa$ , para todo  $q \in Q_d(R)$ , se  $\text{char} R = 0$ .
- (ii) *Existem  $c_i \in C_d(R)$  tais que  $(d^{p^m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i d^i)$  é uma derivação interna em  $Q_d(R)$  adjuntado a um elemento  $a \in Q_d(R)$ , onde  $d(a) = 0$ , se  $\text{char} R = p \neq 0$ .*

Então,  $R[x; d]$  possui um ideal  $R$ -disjunto não-nulo  $M$ , tal que  $R[x; d]/M$  é simples com identidade e  $R[x; d]x \not\subseteq M$ .

Além disso, se  $R$  é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra ou um anel comutativo, então a recíproca é verdadeira, i.e., se  $R[x; d]$  possui um ideal  $M$  tal que  $R[x; d]/M$  é simples com identidade,  $R[x; d]x \not\subseteq M$  e  $M \cap R = 0$ , então  $(R, d) \in \mathcal{B}$ ,  $P_d(R) \neq 0$  e que  $d$  satisfaz uma das propriedades (i) ou (ii) acima.



Prova. Suponhamos que  $(R, d) \in \mathcal{B}$ ,  $P_d(R) \neq (0)$  e que  $d$  satisfaça uma das propriedades mencionadas acima. Pelo Lema 2.2.6,  $(R^\#, d) \in \mathcal{B}$  e  $P_d(R^\#) \neq (0)$ . Por [4, Proposition 1.2], temos que se  $\text{char} R = p \neq 0$ , então  $z = x^{p^s} + c_{s-1}x^{p^{s-1}} + \dots + c_0x - a \in Z(Q_d(R)[x; d])$ , ou se  $\text{char} R = (0)$ , então  $z_1 = x - a \in Z(Q_d(R)[x; d])$ .

Mostraremos que  $R^\#[x; d]$ , possui um ideal maximal  $R^\#$ -disjuntivo. De fato, consideramos  $h(x) = z$  se  $\text{char} R^\# = 0$  ou  $h(x) = z_1$  se  $\text{char} R^\# = p \neq 0$ . Seja  $I$  um  $d$ -ideal não nulo de  $R^\#$  tal que  $Iz_1 \subset R^\#[x; d]$  se  $\text{char} R^\# = p \neq 0$ , ou  $Iz \subset R^\#[x; d]$  se  $\text{char} R^\# = 0$ . Como  $R^\#$  é um anel  $d$ -primo, então  $I \cap P_d(R^\#) \neq 0$ . Sendo que  $(R^\#, d) \in \mathcal{B}$ , então existe  $0 \neq b \in I \cap P_d(R^\#)$ , um elemento central não-nulo tal que  $d(b) = 0$ . Consideremos o polinômio  $l(x) = b^2h(x) + 1$ . Não é difícil ver que os coeficientes de  $b^2h(x)$  estão em  $P_d(R^\#)$ . O ideal gerado por  $l(x)$  é próprio em  $R^\#[x; d]$ , pois  $l(x)$  é central em  $R^\#[x; d]$ , e o coeficiente líder de  $l(x)$  é regular em  $R^\#$ .

Seja  $M$  um ideal maximal de  $R^\#[x; d]$  que contém  $l(x)$ . Se  $M \cap R^\# \neq (0)$ , então  $M \cap R^\# \supseteq P_d(R^\#)$  e portanto,  $1 \in M$ . Segue que  $M \cap R^\# = (0)$ . Logo,  $x \notin M$ . Usando o fato que  $R[x; d]/M \cap R[x; d]$  é um ideal de  $R^\#[x; d]/M$ , então  $R[x; d]/M \cap R[x; d] = R^\#[x; d]/M$ . Portanto,  $M \cap R[x; d]$  é um ideal com a propriedade que  $R[x; d]/M \cap R[x; d]$  é simples com identidade e é  $R$ -disjunto.

Reciprocamente, seja  $M$  um ideal  $R$ -disjunto de  $R[x; d]$  tal que  $R[x; d]/M$  é simples com identidade. Então a projeção canônica

$\varphi : R[x; d] \rightarrow R[x; d]/M$  é um homomorfismo  $d$ -próprio, como é fácil de verificar. Pela Proposição 2.2.5, segue que  $(R, d) \in \mathcal{B}$ . Além disso, como  $M$  é um ideal maximal  $R$ -disjunto de  $R[x; d]$ , então, pela Proposição 2.2.7, temos que  $P_d(R) \neq (0)$ . Pelas Proposições 1.2.12 e 1.2.11,  $d$  satisfaz a propriedade (i) ou (ii), conforme o caso. ■

A seguinte proposição é necessária na prova do Corolário 2.2.10.

**Proposição 2.2.9.** *Seja  $\varphi : R[x; d] \rightarrow T$  um homomorfismo sobrejetor, onde  $T$  é um anel simples com identidade. Se  $R[x; d]x \not\subseteq \ker \varphi$  e  $R$  é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra qualquer ou é um anel comutativo, então  $(R/\ker \varphi \cap R, d) \in \mathcal{B}$ .*

*Prova.* Claramente vemos que  $\ker \varphi \cap R$  é um  $d$ -ideal de  $R$ . Assim,  $\varphi$  induz um homomorfismo  $d$ -próprio de  $(R/\ker \varphi \cap R)[x; d] \rightarrow T$ . Logo, pela proposição 2.2.5,  $(R/R \cap \ker \varphi, d) \in \mathcal{B}$ . ■

**Corolário 2.2.10.** *Seja  $R$  uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra qualquer ou um anel comutativo. Se  $R$  é um anel nil, então  $R[x; d]$  é um anel radical de Brown-McCoy.*

*Prova.* Suponhamos que exista um homomorfismo sobrejetor  $\varphi : R[x; d] \rightarrow T$ , onde  $T$  é um anel simples com identidade.

Se  $R[x; d]x \subseteq \ker \varphi$ , então  $\varphi$  induz um isomorfismo  $R/(\ker \varphi \cap R) \rightarrow T$ . Isto é uma contradição, pois  $T$  tem identidade, e  $R/\ker \varphi \cap R$  é um anel nil.

Se  $R[x; \sigma]x \not\subseteq \ker \varphi$ , então pela Proposição 2.2.9, existe um ideal  $d$ -primo  $I$  de  $R$  tal que  $(R/I, d) \in \mathcal{B}$ . Portanto,  $R/I$  é um

anel nil que contém um elemento central cuja derivada é zero, logo é regular, contradição. Assim,  $R[x; d]$  é um anel radical de Brown-McCoy. ■

Denotamos por  $\mathcal{B}'$  a seguinte classe de anéis com derivações: Um par  $(R, d) \in \mathcal{B}'$ , se  $R$  é um anel e  $d$  é uma derivação de  $R$  tal que  $(R, d) \in \mathcal{B}$ ,  $P_d(R) \neq (0)$ , e  $d$  satisfaz uma das seguintes propriedades:

(i)  $d(q) = aq - qa$ , para todo  $q \in Q_d(R)$ , se  $\text{char} R = 0$ .

(ii) Existem  $c_i \in C_d(R)$  tais que  $d^{p^m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i d^{p^i}$  é uma derivação interna em  $Q_d(R)$  adjuntado a um elemento  $a \in Q_d(R)$ , onde  $d(a) = 0$ , se  $\text{char} R = p \neq 0$ .

Dado um anel  $R$  com uma derivação  $d$ , definimos  $S_d(R)$  a intersecção de todos os  $d$ -ideais  $P$  de  $R$ , tais que  $(R/P, d) \in \mathcal{B}'$ . Além disso, denotamos por  $U_d(R)$  a intersecção de todos os ideais  $M$  de  $R$  tais que  $d(M) \subseteq M$  e  $R/M$  é  $d$ -simples com identidade.

O próximo resultado pode ser encontrado [12, Theorem 3.15].

**Teorema 2.2.11.** *Para qualquer  $\mathbb{Q}$ -álgebra  $R$  com uma derivação  $d$ , temos que  $R[x; d]$  é um anel simples com identidade se, e somente se,  $R$  é um anel  $d$ -simples com identidade, e  $d$  não é uma derivação interna de  $R$ .*

**Exemplo 2.2.12.** *Sejam  $K$  um corpo qualquer de característica zero, e  $\delta = d/dx$  a derivação usual de polinômios em  $K[x]$ . É bem conhecido que  $K[x]$  é  $\delta$ -simples. Além disso, é claro que  $\delta$  não é uma derivação interna em  $K[x]$ . Então, pelo Teorema 2.2.11,  $K[x][y; \delta]$  é claramente um anel simples com identidade.*

Logo, o radical de Brown-McCoy de  $K[x][y; \delta]$  é nulo e  $\delta$  não satisfaz nenhuma das condições (i) ou (ii) mencionadas acima .

Estamos agora em condições de dar a descrição completa do radical de Brown-McCoy de  $R[x; d]$ , quando  $R$  é um anel comutativo, ou  $R$  é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra qualquer. Em [8], foi mostrado que  $U(R[x; d]) = (U(R[x; d]) \cap R)[x; d]$ . Com o Teorema 2.2.8, temos condições de descrever o ideal  $U(R[x; d]) \cap R$ .

**Teorema 2.2.13.** *Se  $R$  é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra qualquer ou  $R$  é um anel comutativo, então  $U(R[x; d]) = (S_d(R) \cap U_d(R))[x; d]$ .*

Prova. Mostraremos que  $S_d(R) \cap U_d(R) = U(R[x; d]) \cap R$ . De fato, seja  $I$  um  $d$ -ideal de  $R$  tal que  $R/I$  é um anel  $d$ -simples com identidade. Então  $I[x; d]$  é um ideal de  $R[x; d]$ . Assim, existe um ideal próprio  $N$  de  $R[x; d]$  tal que é maximal no sentido de conter  $I[x; d]$  e  $N \cap R = I$ . É fácil ver que  $R[x; d]/N$  é um anel simples com identidade. Logo,  $U(R[x; d]) \cap R \subseteq U_d(R)$ .

Além disso, seja  $J$  um  $d$ -ideal de  $R$  tal que  $(R/J, d) \in \mathcal{B}'$ . Então, pelo Teorema 2.2.8, existe um ideal  $\overline{M}$  de  $(R/J)[x; d]$  tal que  $(R/J)[x; d]/\overline{M}$  é simples com identidade e  $\overline{M} \cap R/J = (0)$ . Consideremos o isomorfismo canônico  $\vartheta : (R/J)[x; d] \rightarrow R[x; d]/J[x; d]$ . Logo,  $R[x; d]/M \simeq (R/J)[x; d]/\overline{M}$ , onde  $\vartheta(\overline{M}) = M/J[x; d]$  e portanto,  $M \cap R = J$ . Desta maneira,  $U(R[x; d]) \cap R \subseteq U_d(R) \cap S_d(R)$ .

Por outro lado, seja  $M$  um ideal de  $R[x; d]$  tal que  $R[x; d]/M$  é simples com identidade e  $I = M \cap R$ . Temos dois casos a considerar:

i) Se  $R[x; d]x \not\subseteq M$  então, pelo Teorema 2.2.8,  $(R/I \cap R, d) \in$

$\mathcal{B}'$ .

ii) Se  $R[x; d]x \subseteq M$ , então  $R/I \cong R[x; d]/M$  e assim,  $R/I$  é um anel simples com identidade. Em particular,  $R/I$  é um anel  $d$ -simples com identidade.

Portanto,  $S_d(R) \cap U_d(R) \subseteq U(R[x; d]) \cap R$ . Isto completa a prova. ■

# Capítulo 3

## Ideais Principais em Skew Anel de Polinômios

### 3.1 Extensões de Ore

Nesta seção estudamos condições para que um ideal em  $R[x; \sigma, d]$  seja principal, onde  $\sigma$  é um automorfismo de  $R$  e  $d$  é uma  $\sigma$ -derivação de  $R$  tal que  $d\sigma = \sigma d$ .  $R$  é sempre um anel primo com unidade, salvo quando for explicitamente mencionado.

Um elemento não-nulo  $a \in R$  é dito normal se  $aR = Ra$ . Em particular, a definição de um elemento normal em  $R[x; \sigma, d]$  segue analogamente. Dizemos que um polinômio  $f \in R[x; \sigma, d]$  normaliza  $R$  se  $fR = Rf$ .

**Definição 3.1.1.** *Seja  $a$  um elemento não-nulo de  $R$ . Dizemos que o elemento  $a$  gera um  $(\sigma, d)$ -ideal de  $R$ , se  $RaR$  é um  $(\sigma, d)$ -ideal de  $R$ . Em particular, se além disto,  $a$  é um elemento normal de  $R$ , então  $aR$  é um  $(\sigma, d)$ -ideal de  $R$ .*

**Proposição 3.1.2.** *Sejam  $R$  um anel  $(\sigma, d)$ -primo e  $a$  um elemento normal que gera um  $(\sigma, d)$ -ideal de  $R$ . Então  $a$  é um*

*elemento regular.*

Prova. Suponhamos que exista  $b \in R$  tal que  $ab = 0$ . Como  $a$  é um elemento normal, segue que  $aRb = 0$ . Portanto, por hipótese,  $b = 0$ . A prova de que  $a$  é regular à esquerda é análoga.

■

O próximo resultado generaliza [19, Lemma 3.5] e [11, Lemma 2].

**Lema 3.1.3.** *Sejam  $R$  um anel não necessariamente primo,  $f \in R[x; \sigma, d]$  um polinômio que normaliza  $R$ . Então, existe  $h \in R[x; \sigma, d]$  tal que  $hf = 0$  se, e somente se, existe um elemento não-nulo  $b \in R$  tal que  $bf = 0$ .*

Prova. Seja  $h \in R[x; \sigma, d]$  tal que  $hf = 0$ , onde  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  e  $b_m$  é o coeficiente líder de  $h$ . Podemos escolher  $h$  de grau minimal que satisfaça a propriedade mencionada. Então  $ha_n f = h f a'_n = 0$ , para certo  $a'_n \in R$ . Desde que  $\delta(ha_n) < \delta(h)$ , segue que  $ha_n = 0$ . Logo,  $b_m \sigma^{\delta(h(x))}(a_n) = 0$ , e temos que  $h(f - a_n x^n) = 0$ . Sendo que  $ha_{n-1} f = h f a'_{n-1} = 0$  e  $\delta(ha_{n-1}) < \delta(h)$ , segue que  $ha_{n-1} = 0$ . Prosseguindo com este raciocínio, concluímos que  $ha_i = 0$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ , donde segue que  $\sigma^{-\delta(h(x))}(b_m) f = 0$ . A recíproca é trivial. ■

Sejam  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  um polinômio normal não-nulo de  $R[x; \sigma, d]$ ,  $I = R[x; \sigma, d]f$  e  $f_I$  o polinômio canônico associado ao ideal  $I$ . Lembramos que o polinômio  $f_I$  é um polinômio normal de  $Q[x; \sigma, d]$ , onde  $Q$  é o anel de quocientes à esquerda de Martindale de  $R$ , e que  $I \subseteq f_I Q[x; \sigma, d] \cap R[x; \sigma, d]$ . Definimos  $C(f) =$

$\{a_0, \dots, a_n\}$ ,  $C(f)^{-1} = \{q \in Q : qC(f) \subseteq R\}$  e  $U = \{b \in R : bf_I \in R[x; \sigma, d]\}$ .

É fácil ver que  $U$  é um ideal de  $R$ . De fato, é claro que  $U$  é um ideal à esquerda. Agora, sejam  $a \in R$  e  $b \in U$ . Então,  $baf_I = bf_I\sigma^{-\delta(f_I)}(a)$  e como  $b f_I \in R[x; \sigma, d]$  segue que  $baf_I \in R[x; \sigma, d]$ .

A definição seguinte estende as dadas em [11] e [19, Definition 1.3].

**Definição 3.1.4.** *Seja  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  um polinômio não-nulo de  $R[x; \sigma, d]$ . O polinômio  $f$  é dito de Sharma se  $f$  normaliza  $R$ , e para cada  $b \in R$  tal que  $ba_i \in a_n R$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ , temos que  $b \in a_n R$ .*

O próximo teorema generaliza os resultados de [219, Proposition 2.2] e [11, Proposition 4]. Ele fornece uma condição necessária e suficiente para que um polinômio seja de Sharma, quando o mesmo é normal e seu coeficiente líder satisfaz uma condição adicional.

Sejam  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  um polinômio normal não nulo de  $R[x; \sigma, d]$ , onde  $a_n$  é um elemento normal e o ideal por ele gerado é um  $(\sigma, d)$ -ideal de  $R$  e  $f_I = c_0 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n$  o polinômio mônico associado ao ideal  $I = R[x; \sigma, d]f$

**Teorema 3.1.5.** *Com as notações acima, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i)  $f$  é um polinômio de Sharma,*
- ii)  $C(f)^{-1} = R$ ,*
- iii)  $U = a_n R = Ra_n$ .*



Prova. Como  $a_n$  é regular e normal em  $R$ , então  $f$  normaliza  $R$ .

$i) \Rightarrow ii)$

Seja  $q \in Q$  tal que  $qC(f) \subseteq R$ . Então, para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$  existe  $r_i \in R$  com a propriedade que  $qa_i = r_i$ . Ponhamos  $r_n = r$ . Sendo que  $f$  é um polinômio de grau mínimo em  $I$ , então  $a_n f = f\sigma^{-n}(a_n)$ . É fácil verificar que

$$\begin{aligned} ra_i &= qa_n a_i = \\ &= q(a_n \binom{n}{n-i} d^{n-i}(\sigma^{-n+i}(a_n)) + a_{n-1} \binom{n-1}{n-1-i} d^{n-1-i}(\sigma^{-n+i}(a_n)) + \dots + \\ & a_{i+2} \binom{i+2}{2} d^2(\sigma^{-n+i}(a_n)) + a_{i+1} \binom{i+1}{1} d^1(\sigma^{-n+i}(a_n)) + a_i \sigma^{-n+i}(a_n)). \end{aligned}$$

Como  $\sigma^j(a_n) \in a_n R$  e  $d^k(a_n)R \subseteq a_n R$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$  e  $k \geq 0$ , então

$$ra_i = qa_n a_i = q(a_n^2 r'_n + a_{n-1} a_n r'_{n-1} + \dots + a_i a_n r'_i) \in Ra_n = a_n R.$$

Logo,  $r \in a_n R$ , pois  $f$  é um polinômio de Sharma. Assim,  $r = ta_n$ , para algum  $t \in R$ . Como  $qa_n = r$ , então  $q = t \in R$ . Portanto,  $C(f)^{-1} = R$ .

$ii) \Rightarrow iii)$

Como  $a_n f_I \in R[x; \sigma, d]$ , então  $a_n \in U$ . Assim,  $a_n R \subseteq U$ . Por outro lado, para cada  $b \in U$ , temos que  $bf_I = bx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$ , onde  $bc_i = b_i$  para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$  e  $b_n = b$ . Sendo que  $a_n$  é um elemento normal de  $R$ , então  $a_n$  é invertível em  $Q$ , pelo Lema 1.1.3, onde  $Q$  é o anel de quocientes à esquerda de Martindale de  $R$ . Então,  $ba_n^{-1}a_i = ba_n^{-1}a_n c_i = b_i$  é válida em  $Q$ . Logo,  $b \in Ra_n$ , pois  $ba_n^{-1} \in C(f)^{-1} = R$ . Portanto,  $U = a_n R$ .

$iii) \Rightarrow i)$

Seja  $b \in R$  tal que  $ba_i \in a_n R$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Sendo que  $ba_n c_i = ba_i \in a_n R$  e  $ba_n c_i = a_n z c_i$ , para algum  $z \in R$ , segue que  $a_n z c_i = a_n s_i$ , para  $s_i \in R$ . Assim,  $z c_i = s_i \in R$  e portanto,  $z f_I \in R[x; \sigma, d]$ . Logo,  $z \in a_n R$ . Como  $ba_n = a_n z$ , então  $b \in a_n R$ . Portanto,  $f$  é um polinômio de Sharma. ■

**Observação 3.1.6.** *Seja  $R$  um anel  $d$ -primo ( $\sigma$ -primo). Se  $f \in R[x; d]$  ( $f \in R[x; \sigma]$ ), é tal que  $f$  é normal em  $R[x; d]$  (em  $R[x; \sigma]$ ), onde o seu coeficiente líder gera um  $d$ -ideal ( $\sigma$ -ideal) de  $R$ . Neste caso, consideremos o anel de  $d$ -quocientes ( $\sigma$ -quocientes) à esquerda de Martindale  $Q_d(R)$  ( $Q_\sigma(R)$ ) de  $R$ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- i)  $f$  é um polinômio de Sharma,*
- ii)  $C(f)^{-1} = R$ ,*
- iii)  $U = a_n R = R a_n$ .*

*A prova é análoga a prova do Teorema 3.1.5 para os dois casos.*

Sejam  $R$  um anel primo e  $I$  um ideal de  $R[x; \sigma, d]$ . O fecho  $[I]$  de  $I$  é definido como  $[I] = Q[x; \sigma, d] f_I \cap R[x; \sigma, d]$ , onde  $Q$  é o anel de quocientes à esquerda de Martindale de  $R$  e  $f_I$  é o polinômio canônico associado à  $I$ . Dizemos que  $I$  é fechado se  $[I] = I$ .

O próximo teorema generaliza os resultados de [23, Theorem 2.1], [11, Theorem 5] e a condição suficiente de [22, Theorem 1].

**Teorema 3.1.7.** *Seja  $I$  um ideal  $R$ -disjunto de  $R[x; \sigma, d]$ . Se existe  $f \in I$  tal que  $f$  é um polinômio normal de Sharma de grau mínimo em  $I$ , onde seu coeficiente líder gera um  $(\sigma, d)$ -*

ideal de  $R$ , então  $I$  é um ideal principal, fechado e gerado por  $f$ .

Prova. Sejam  $f = ax^n + \dots + a_1x + a_0$ ,  $g \in [I]$  e  $b$  o coeficiente líder de  $g$ . Mostraremos que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $a^k g = hf$ , para algum  $h \in R[x; \sigma, d]$ . De fato, se  $\delta(g) = \delta(f)$ , então  $ag - f\sigma^{-n}(b) \in [I]$ . Como  $\delta(ag - f\sigma^{-n}(b)) < n$ , então  $ag = f\sigma^{-n}(b)$  e segue que  $ag = cf$ , para algum  $c \in R$ . Suponhamos por indução que seja válido para  $m > n$  e que  $\delta(g) = m + 1$ . Seja  $s = ag - f\sigma^{-n}(b)x^{m+1-n} \in [I]$ . Sendo que  $\delta(s) < m + 1$ , então existe  $u \in \mathbb{N}$  tal que  $a^u s = h_1 f$ , onde  $h_1 \in R[x; \sigma, d]$ . Assim,  $a^{u+1}g - a^u f\sigma^{-n}(b)x^{m+1-n} = h_1 f$  e portanto,  $a^{u+1}g = hf$ , onde  $h \in R[x; \sigma, d]$ .

Mostraremos que  $[I] = I = R[x; \sigma, d]f$ . É claro que  $R[x; \sigma, d]f \subseteq I \subseteq [I]$ . Suponhamos que exista  $g \in [I]$  tal que  $g \notin R[x; \sigma, d]f$ . Pelo raciocínio acima, existe  $l \in \mathbb{N}$  minimal tal que  $a^l g = hf$ , para algum  $h \in R[x; \sigma, d]$ , e pela suposição sobre  $g$ , temos que  $l > 0$ .

Denotamos  $R/aR = R_1$ . Em  $R_1[x; \sigma, d]$ , temos que  $\overline{hf} = \overline{0}$ , onde  $\overline{h} = h + aR[x; \sigma, d]$  e  $\overline{f} = f + aR[x; \sigma, d]$ , e além disso,  $\overline{f}$  normaliza  $R_1$ . Se  $\overline{h} = \overline{0}$  então  $h = ap(x)$ , para algum  $p(x) \in aR[x; \sigma, d] \subset R[x; \sigma, d]$ . Portanto,  $a^l g = ap(x)f$  e daí,  $a^{l-1}g = p(x)f$  e isto contradiz a minimalidade de  $l$ .

Logo,  $\overline{h} \neq \overline{0}$  e segue do Lema 3.1.3 que existe  $\overline{c} \in R_1$  não-nulo tal que  $\overline{c}\overline{f} = \overline{0}$ . Assim,  $c \in R \setminus aR$  e  $ca_i \in aR$  para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ , isto contradiz o fato de que  $f$  é um polinômio de Sharma. Logo, não existe  $g \in [I]$  que não esteja em  $R[x; \sigma, d]f$  e portanto,  $[I] = R[x; \sigma, d]f = I$ . ■

**Observação 3.1.8.** *O teorema acima é válido com o seguinte enunciado: Seja  $I$  um ideal  $R$ -disjunto de  $R[x; d]$ . Se existe  $f \in I$  tal que  $f$  é um polinômio normal de Sharma de grau mínimo em  $I$ , onde seu coeficiente líder gera um  $d$ -ideal de  $R$ , então  $I$  é um ideal principal, fechado e gerado por  $f$ . E a prova deste fato segue análoga a do teorema acima.*

*Além disso, se  $R$  um anel  $\sigma$ -primo, o mesmo teorema é válido com a mesmas idéias da prova do Teorema 3.1.7, para o caso  $R[x; \sigma]$ .*

O próximo teorema é uma recíproca parcial do Teorema 3.1.7 e generaliza os resultados [22, Theorem 1], [11, Theorem 5] e [23, Theorem 2.2].

**Teorema 3.1.9.** *Sejam  $R$  um anel primo e  $I = R[x; \sigma, d]f = fR[x; \sigma, d]$  um ideal principal e fechado, onde  $f$  é um polinômio de grau mínimo em  $I$ . Então  $f$  é um polinômio de Sharma.*

Prova. Seja  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ . Mostramos que  $f$  normaliza  $R$ . De fato, seja  $r \in R$  tal que  $rf = fg$ . Denotamos por  $b$  o coeficiente líder de  $g$ . Suponhamos que  $\delta(g) \geq 1$ . É claro que  $\delta(fb) < \delta(f)$ . Assim,  $fb = 0$ . Como  $fR[x; \sigma, d]b = R[x; \sigma, d]fb = 0$ , então  $b = 0$ , pois  $R[x; \sigma, d]$  é um anel primo pelo Teorema 4.4 de [13]. Logo,  $\delta(g) = 0$  e daí,  $f$  normaliza  $R$ .

Agora, suponhamos que exista  $t \notin a_n R$  tal que  $ta_i \in a_n R$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Seja  $\alpha = a_n^{-1}t \in Q$ . Não é difícil ver que  $\alpha \notin R$  e  $\alpha a_i \in R$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Então  $g(x) = \alpha f(x) \in R[x; \sigma, d]$  e desta maneira,  $g(x) \in J \cap R[x; \sigma, d] = I$ , onde  $J$  é um ideal de  $Q[x; \sigma, d]$  tal que  $J \cap R[x; \sigma, d] = I$  (o ideal  $J$  existe,

pois  $I$  é um ideal fechado). Assim,  $g(x) \in R[x; \sigma, d]f$  e logo,  $\alpha \in R$ , contradição. Portanto,  $f$  é um polinômio de Sharma de grau mínimo em  $I$ . ■

**Observação 3.1.10.** *O teorema acima é válido, se  $R$  é um anel  $d$ -primo ( $\sigma$ -primo) para os casos  $R[x; d]$  ( $R[x; \sigma]$ ).*

O próximo corolário fornece uma condição necessária e suficiente para que um ideal  $I$  em  $R[x; \sigma, d]$  seja principal, quando  $\sigma(I) = I$  e  $R[x; \sigma, d]$  satisfaz ACC sobre ideais bilaterais.

**Corolário 3.1.11.** *Sejam  $R$  um anel primo, tal que  $R[x; \sigma, d]$  satisfaz ACC sobre ideais bilaterais e  $I$  um ideal  $R$ -disjunto não-nulo de  $R[x; \sigma, d]$ , tal que  $\sigma(I) = I$ . Então  $I$  é fechado e gerado por um polinômio de grau mínimo se, e somente se,  $I$  contém um polinômio normal de Sharma de grau mínimo.*

Prova. Seja  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in I$ , um polinômio normal de Sharma de grau mínimo em  $I$ . Mostraremos que  $J = R[x; \sigma, d]f$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R[x; \sigma, d]$ . De fato, temos que  $xf = \sigma(f)x + d(f) \in R[x; \sigma, d]f$ . Assim,  $\sigma(a_n) = ra_n$ , para algum  $r \in R$ . Como  $f$  é um polinômio de grau mínimo em  $I$  e  $\sigma(f) \in I$ , então  $\sigma(f) - rf = 0$ . Logo,  $d(f) \in J$ .

É claro que temos a cadeia de ideais  $J \subseteq \sigma^{-1}(J) \subseteq \dots$  e, usando o fato de que  $R[x; \sigma, d]$  satisfaz ACC sobre ideais bilaterais, temos que  $\sigma(J) = J$ . Assim,  $a_n R$  é um  $(\sigma, d)$ -ideal de  $R$  e portanto, temos as hipóteses do Teorema 3.1.7 satisfeitas.

Para obter a recíproca, basta usar o Teorema 3.1.9. ■

**Corolário 3.1.12.** *Sejam  $R$  um anel  $\sigma$ -primo, onde  $\sigma$  é um automorfismo de  $R$ , e  $I$  um ideal  $R$ -disjunto de  $R[x; \sigma]$  que é*

regular módulo  $x$ . Então  $I$  é um ideal principal, fechado e gerado por um polinômio normal de grau mínimo se, e somente se,  $I$  contém um polinômio normal de Sharma de grau mínimo.

Prova. Suponhamos que exista um polinômio normal de Sharma de grau mínimo  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in I$ . Com o mesmo raciocínio do corolário anterior podemos provar que  $f$  normaliza  $R$ , então  $a_n$  é um elemento normal de  $R$ . É claro que  $x \notin I$ . Mostramos que  $a_n R$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R$ . De fato, sendo que  $xf = \sigma(f)x \in R[x; \sigma]f$ , então  $\sigma(f) \in R[x; \sigma]f$ . Logo,  $\sigma(a_n) = a_n r$ , para algum  $r \in R$ . Assim,  $\sigma(f) - f\sigma^{-n}(r) = 0$ , pois  $f$  é um polinômio de grau mínimo em  $I$ . Além disso,  $x\sigma^{-1}(f) = fx \in R[x; \sigma]f \subseteq R\langle x; \sigma \rangle f$ , onde  $R\langle x; \sigma \rangle$  denota o anel de skew polinômios de Laurent. Isto implica que  $\sigma^{-1}(f) \in R\langle x; \sigma \rangle f \cap R[x; \sigma] = R[x; \sigma]f$ , pois o termo constante de  $f$  não é nulo. Logo,  $Ra_n$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R$ . Assim, pela Observação 3.1.8, temos que  $I = R[x; \sigma]f$  e  $I$  é um ideal fechado.

A recíproca segue da Observação 3.1.10. ■

**Corolário 3.1.13.** *Sejam  $R$  um anel  $d$ -primo, onde  $d$  é uma derivação de  $R$ , e  $I$  um ideal  $R$ -disjunto de  $R[x; d]$ . Então  $I$  é um ideal fechado e principal gerado por um polinômio normal de grau mínimo se, e somente se,  $I$  contém um polinômio normal de Sharma de grau mínimo.*

Prova. Seja  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in I$  um polinômio normal de Sharma de grau mínimo em  $I$ . Afirmamos que  $f$  normaliza  $R$ . De fato, seja  $r \in R$ , então  $rf = fh$ . Se  $\delta(h) > 0$ , então  $\delta(fb) < \delta(f)$ , onde  $b$  é o coeficiente líder de  $h$ . Assim,  $fb = 0$  e daí,  $fR[x; d]b = 0$ .

Pelo Teorema 4.4 de [19],  $R[x; d]$  é um anel primo, então  $b = 0$ . Logo,  $\delta(h) = 0$ . Sendo que  $J = R[x; d]f$  é um ideal e  $f$  normaliza  $R$ , então  $a_n R$  é um  $d$ -ideal não-nulo de  $R$ . Portanto, pela Observação 3.1.8, temos que  $I$  é um ideal fechado e  $I = R[x; d]f$ .

A recíproca segue da Observação 3.1.10. ■

**Exemplo 3.1.14.** *Nem todo ideal principal contém um polinômio de Sharma. Sejam  $R$  um domínio comutativo e  $a \in R$  um elemento não-nulo e não invertível de  $R$ . Consideramos o polinômio  $f(x) = a(x + 1) \in R[x]$ . Assim,  $J = fR[x]$  é um ideal principal. Mostramos que  $J$  não é um ideal fechado. De fato, temos que*

$$[J] = R[x](x + 1) = K[x](x + 1) \cap R[x],$$

onde  $K$  é o corpo de frações de  $R$ . Logo, pelo Teorema 3.1.7, quando  $\sigma = id$  e  $d = 0$ ,  $J$  não contém nenhum polinômio de Sharma. Notamos que  $f = ax + a$  não é um polinômio de Sharma, pois temos que  $1 \in R$  e  $1a \in R$ , mas  $1 \notin aR$ .

## 3.2 Ideais Principais em anéis que tem condição de fatoração única

Nesta seção, estudamos condições para que um ideal seja principal quando o anel tem a propriedade de fatoração única.

**Definição 3.2.1.** *Sejam  $d$  uma derivação de  $R$  e  $p$  um elemento não-nulo de  $R$ . Dizemos que  $p$  é um elemento  $d$ -primo de  $R$  se  $p$  é um elemento normal e  $pR$  é um ideal  $d$ -primo.*

A seguinte definição é baseada em [2].

**Definição 3.2.2.** *Um anel  $R$  é dito um anel de  $d$ -fatoração única ( $d$ -UFR), se  $R$  é um anel  $d$ -primo e todo ideal  $d$ -primo não-nulo  $I$  de  $R$  contém um elemento  $d$ -primo.*

**Proposição 3.2.3.** *Seja  $R$  um anel  $d$ -UFR. Então todo  $d$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$  contém um produto de elementos  $d$ -primos.*

Prova. Suponhamos que exista um  $d$ -ideal não nulo  $I$  de  $R$  que não contenha um produto de elementos  $d$ -primos. Seja  $\Omega = \{ I : I \text{ é um } d\text{-ideal de } R \text{ que não contém um produto de elementos } d\text{-primos} \}$ . Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal  $J \in \Omega$ . Não é difícil ver que  $J$  é um ideal  $d$ -primo e isto contradiz o fato de que  $R$  ser um anel  $d$ -UFR, pois  $J$  não contém elementos  $d$ -primos. ■

**Definição 3.2.4.** *Sejam  $\sigma$  um automorfismo de  $R$  e  $p$  um elemento não-nulo de  $R$ . Dizemos que  $p$  é um elemento  $\sigma$ -primo se  $p$  é um elemento normal e  $pR$  é um ideal  $\sigma$ -primo.*

Sejam  $R$  um anel  $\sigma$ -primo ( $d$ -primo) e  $Q_\sigma(R)$  ( $Q_d(R)$ ) o anel de  $\sigma$ -quocientes ( $d$ -quocientes) à esquerda de Marindale de  $R$ . É bem conhecido o fato que o automorfismo  $\sigma$  ( a derivação  $d$ ) é estendido (é estendida) unicamente ao anel  $Q_\sigma(R)$  ( $Q_d(R)$ ).

**Lema 3.2.5.** *Sejam  $R$  um anel  $d$ -primo ( $\sigma$ -primo) e  $p, q$  elementos  $d$ -primos ( $\sigma$ -primos) de  $R$ . Então existe  $q' \in R$  um elemento  $d$ -primo ( $\sigma$ -primo), onde  $pq = q'p$ .*

Prova. Primeiramente, suponhamos que  $p$  e  $q$  são elementos  $d$ -primos de  $R$  e mostremos que  $q'$  é um elemento  $d$ -primo, onde



$pq = q'p$ . Como  $pR$  é um  $d$ -ideal de  $R$  e  $R$  é um anel  $d$ -primo, então  $p$  é um elemento regular de  $R$ . Desta maneira, existe um isomorfismo  $\varphi_p : R \rightarrow R$  definido por  $\varphi_p(r)p = pr$ . Não é difícil ver que  $q'R = Rq'$ .

Como  $d(p)R \subset Rp$  e  $d(q)R \subset Rq$ , então  $d(p) = rp$  e  $d(q) = r_1q$ , para alguns  $r, r_1 \in R$ . Sendo que  $d(pq) = d(q'p)$ , segue que  $d(q')p + q'd(p) = d(p)q + pd(q)$ . Assim,

$$\begin{aligned} d(q')p &= d(p)q + pd(q) - q'd(p) = rpq + pr_1q - q'rp = \\ &rq'p + r_2q'p - q'rp, \end{aligned}$$

pois  $p$  é um elemento normal de  $R$ . Usando o fato que  $p$  é um elemento regular em  $R$  e  $q'$  é um elemento normal de  $R$ , temos que  $d(q') \in q'R = Rq'$ .

Agora, verificamos que se  $I$  é um  $d$ -ideal de  $R$ , então  $\varphi_p(I)$  é um  $d$ -ideal de  $R$ . Para mostrarmos este fato, vamos analisar a aplicação  $\varphi_p$  em  $Q_d(R)$ . Neste caso, temos que  $\varphi_p(r) = prp^{-1}$ , pois  $p$  é invertível em  $Q_d(R)$ , pelo Lema 1.1.7. Não é difícil ver que  $0 = d(pp^{-1}) = d(p)p^{-1} + pd(p^{-1})$ , pois  $d$  se estende ao anel  $Q_d(R)$ . Logo,  $d(p^{-1}) = -p^{-1}d(p)p^{-1}$ . Assim, dado  $i \in I$  e  $d(p) = rp$ , para algum  $r \in R$ , temos que

$$\begin{aligned} d(\varphi_p(i)) &= d(pip^{-1}) = d(p)ip^{-1} + pd(i)p^{-1} + pid(p^{-1}) = \\ &rpip^{-1} + pd(i)p^{-1} - pip^{-1}r \in \varphi_p(I). \end{aligned}$$

Portanto, é fácil verificar que  $Rq'$  é um  $d$ -ideal  $d$ -primo.

Sejam  $p, q$  elementos  $\sigma$ -primos e  $q'$  é tal que  $pq = q'p$ . Para mostrarmos que  $q'$  é um elemento  $\sigma$ -primo, o procedimento é análogo ao feito acima. ■

A seguinte definição é baseada em [2].

**Definição 3.2.6.** *Um anel  $R$  é dito um anel de  $\sigma$ -fatoração única ( $\sigma$ -UFR), se  $R$  é um anel  $\sigma$ -primo, e todo ideal  $\sigma$ -primo não-nulo  $I$  de  $R$  contém um elemento  $\sigma$ -primo.*

**Proposição 3.2.7.** *Seja  $R$  um anel  $\sigma$ -UFR. Então todo  $\sigma$ -ideal não-nulo  $I$  de  $R$  contém um produto de elementos  $\sigma$ -primos.*

Prova. A prova é análoga à prova da Proposição 3.2.3. ■

Estamos em condições de provarmos o primeiro teorema principal desta seção.

**Teorema 3.2.8.** *Seja  $R$  um anel  $\sigma$ -UFR. Então todo ideal fechado de  $R[x; \sigma]$  é gerado por um polinômio de Sharma de grau mínimo.*

Prova. Seja  $I$  um ideal fechado de  $R[x; \sigma]$ . Então,

$$I = Q_\sigma(R)[x; \sigma]f_I \cap R[x; \sigma].$$

É claro que  $U = \{a \in R : af_I \in R[x; \sigma]\}$  é um  $\sigma$ -ideal não-nulo de  $R$ . Pela Proposição 3.2.7, existe  $a \in U$  tal que  $a = p_1 \dots p_r$ , onde  $p_i$  é um elemento  $\sigma$ -primo de  $R$ , para  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Suponhamos que  $r$  seja o mínimo com esta propriedade. Podemos escrever  $f = af_I = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in I$ . É claro que  $a$  é um elemento normal de  $R$  e  $Ra$  é um  $\sigma$ -ideal de  $R$ . Sendo que  $f$  é um polinômio de grau mínimo em  $I$ , segue que  $rf = f\sigma^{-n}(r')$ , onde  $ra = ar'$ . Assim,  $f$  normaliza  $R$ . Não é difícil ver que  $xf = sfx$ , para algum  $s \in R$ . Então  $f$  é um polinômio normal.

Afirmamos que para todo  $j \in \{1, \dots, r\}$  existe  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  tal que  $a_i \notin p_j R$ . De fato, pelo Lema 3.2.5, podemos reordenar os  $p'_i$ s e, sem perda de generalidade, mostramos que é válido para

$p_1$ . Suponhamos que para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $a_i \in p_1R$ . Desta maneira, existe  $r_i$  tal que  $a_i = p_1r_i$  para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Logo,

$$p_1p_2 \dots p_r f_I = p_1((p_2 \dots p_r)x^n + \dots + r_1x + \dots + r_0).$$

Como  $R[x; \sigma]$  é um anel primo e  $p_1$  é um elemento normal, então  $p_2 \dots p_r f_I \in R[x; \sigma]$ , o que implica  $p_2 \dots p_r \in U$ , e isto contradiz a minimalidade de  $r$ .

Para finalizar a prova, mostramos que  $f$  é um polinômio de Sharma. De fato, seja  $b \in U$  tal que  $bf_I = g \in I$ . Pelo Lema 1.1.6,  $a$  é invertível em  $Q_\sigma(R)$ . Assim,  $g = bf_I a a^{-1}$  em  $Q_\sigma(R)[x; \sigma]$ , o que implica  $ga = bf$ . Logo, para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$  existe  $s_i \in R$  tal que  $s_i p_1 \dots p_r = ba_i$  e portanto,  $ba_i \in Rp_1$ . Desde que os coeficientes de  $f_I$  são normais e  $a$  é um elemento normal de  $R$ , então  $a_i$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$  é um elemento normal de  $R$ . Como existe  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  tal que  $a_k \notin p_1R$ , e  $a_k$  é normal em  $R$  e  $p_1R$  é um ideal  $\sigma$ -primo, segue que  $b \in p_1R$ . Desta maneira,  $b_1f = p_2 \dots p_r g'$ , pois  $b = p_1b_1$ , para algum  $b_1 \in R$  e  $p_1b_1f = bf = ga = p_1 \dots p_r g'$ , com  $g' \in R[x; \sigma]$ . Logo,  $b_1a_i = p_2 \dots p_r r'_i$ . Indutivamente, obtemos que  $b_i \in Rp_{i+1}$ . Assim,  $b = p_1b_1 = p_1p_2b_2 = \dots = p_1 \dots p_r b_{r+1} \in aR$ , e segue que,  $U \subset aR$ . É claro que  $aR \subset U$ . Logo, pela Observação 3.1.6,  $f$  é um polinômio Sharma de grau mínimo em  $I$ . ■

Estamos em condições de provarmos o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.9.** *Sejam  $R$  um anel  $d$ -UFR, onde  $d$  é uma derivação de  $R$  e  $I$  um ideal fechado de  $R[x; d]$ . Então  $I$  é gerado por um polinômio de Sharma de grau mínimo.*

Prova. Seja  $I$  um ideal fechado de  $R[x; d]$ . Então

$$I = Q_d(R)[x; d]f_I \cap R[x; d].$$

É claro que  $U = \{a \in R : af_I \in R[x; d]\}$  é um  $d$ -ideal não-nulo de  $R$ . Pela Proposição 3.2.3, existe  $a \in U$  tal que  $a = p_1 \dots p_r$ , onde  $p_i$  é um elemento  $d$ -primo de  $R$ , para  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Suponhamos que  $r$  seja o mínimo com esta propriedade. Podemos escrever  $f = f_I a = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in I$ . É claro que  $a$  é um elemento normal de  $R$ , e  $Ra$  é um  $d$ -ideal de  $R$ . Sendo que  $f$  é um polinômio de grau mínimo em  $I$ , segue que  $rf = fr'$ , onde  $ra = ar'$ . Assim,  $f$  normaliza  $R$ . Não é difícil ver que  $xf = f(x + r)$ , para algum  $r \in R$ . Logo,  $f$  é um polinômio normal de  $R$ .

Mostraremos que para todo  $j \in \{1, \dots, r\}$  existe  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  tal que  $a_i \notin p_j R$ . De fato, pelo Lema 3.2.5, podemos reordenar os  $p_i$ 's e, sem perda de generalidade, mostrando que é válido para  $p_1$ . Suponhamos que para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $a_i \in p_1 R$ . Desta maneira, existe  $r_i$  tal que  $a_i = p_1 r_i$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Assim,

$$p_1 p_2 \dots p_r f_I = p_1 ((p_2 \dots p_r)x^n + \dots + r_1 x + r_0).$$

Como  $R[x; d]$  é um anel primo e  $p_1$  é normal, então  $p_2 \dots p_r f_I \in R[x; d]$ , o que implica  $p_2 \dots p_r \in U$ , e isto contradiz a minimalidade de  $r$ .

Para finalizar a prova, mostraremos que  $f$  é um polinômio de Sharma. De fato, pela Proposição 1.1.7,  $a$  é invertível em  $Q_d(R)$ . Seja  $b \in U$  tal que  $bf_I = g \in I$ . Assim,  $g = bf_I a a^{-1}$  em  $Q_d(R)[x; d]$ , o que implica  $ga = bf$ . Logo, para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$

existe  $s_i$  tal que  $s_i p_1 \dots p_r = ba_i$  e portanto,  $ba_i \in Rp_1$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Como  $bfr = baf_I r = barf_I = bsf$ , onde  $ar = sa$ , então  $b(a_i r + a_{i+1} \binom{i+1}{1} d(r) + \dots + a_{n-1} \binom{n-1}{n-i-1} d^{n-i-1}(r) + a_n \binom{n}{n-i} d^{n-i}(r)) = bsa_i$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Desta maneira, temos que  $bsa_i \in Rp_1$ , pois  $ba_i \in Rp_1$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Desde que  $\varphi : R \rightarrow R$  definido por  $\varphi(r)a = ar$  é um automorfismo de  $R$ , pois  $a$  é um elemento normal e regular em  $R$ , então  $bRa_i \subseteq Rp_1$ , para todo  $i$ . Como existe  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  tal que  $a_i \notin Rp_1$  e  $p_i R$  é um ideal  $d$ -primo, segue que  $b \in Rp_1$ . Assim,  $b = p_1 b_1$ , para algum  $b_1 \in R$ , e  $p_1 b_1 f = bf = ga = p_1 \dots p_r g'$  com  $g' \in R[x; d]$ . Logo,  $b_1 f = p_2 \dots p_r g'$  e segue que  $b_1 a_i = p_2 \dots p_r r'_i$ . Indutivamente, obtemos que  $b_i \in Rp_{i+1}$ . Assim,  $b = p_1 b_1 = p_1 p_2 b_2 = \dots = p_1 \dots p_r b_{r+1} \in aR$ , e segue que  $U \subseteq aR$ . É claro que  $aR \subseteq U$ . Portanto, pela Observação 3.1.6,  $f$  é um polinômio de Sharma de grau mínimo em  $I$ . ■

## Capítulo 4

# Centróides Estendidos em Skew Anel de Polinômios

Neste capítulo  $R$  é um anel com unidade,  $d$  uma derivação de  $R$  e  $\sigma$  um automorfismo de  $R$ . Iremos estudar centróides estendidos de imagens homomórficas de skew anel de polinômios do tipo  $R[x; \sigma]$  ( $R[x; d]$ ) por ideais primos. Quando o ideal primo é o ideal nulo, este caso já está completamente estudado por Matczuck, ver [16, Theorem 3.3], e se o ideal primo contém  $x$  é trivial. Assim, faremos o estudo de centróides estendidos de imagens homomórficas de skew anel de polinômios do tipo  $R[x; \sigma]$  ( $R[x; d]$ ) por ideais primos  $R$ -disjuntos e que não contém  $x$ .

### 4.1 Skew Anel de Polinômios de Tipo Automorfismo

Neste parágrafo,  $R$  é um anel  $\sigma$ -primo com unidade, onde  $\sigma$  é um automorfismo de  $R$ ,  $Q_\sigma(R)$  o anel de  $\sigma$ -quocientes à esquerda de Martindale de  $R$ ,  $J$  é um ideal primo de  $R[x; \sigma]$  tal que  $x \notin J$

e  $J \cap R = (0)$ . Como  $J$  é um ideal fechado, então usando a Proposição 1.2.9, temos que  $J = f_J Q_\sigma(R)[x; \sigma] \cap R[x; \sigma]$ . O ideal  $f_J Q_\sigma(R)[x; \sigma]$  será denotado por  $J^*$ . Se o grau de  $f_J$  é um, então  $Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*$  é isomorfo a  $Q_\sigma(R)$  e assim, assumimos que o grau de  $f_J$  seja maior que um. Além disso, é claro que temos as inclusões

$$\begin{aligned} R &\hookrightarrow R[x; \sigma]/J, \quad R[x; \sigma]/J \hookrightarrow Q[x; \sigma]/J^* \text{ e} \\ Q_\sigma(R) &\hookrightarrow Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*. \end{aligned}$$

Considerando estas inclusões, os elementos de  $\bar{f} \in R[x; \sigma]/J$  podem ser escritos na seguinte forma  $\bar{f} = f + J$ , para algum polinômio  $f \in Q_\sigma(R)[x; \sigma]$  e com estas identificações assumimos, sem perda de generalidade, que cada elemento  $\bar{r} = r + J^*$  ( $\bar{q} = q + J^*$ ), onde  $r \in R$  ( $q \in Q_\sigma(R)$ ), será escrito simplesmente por  $r$  (respectivamente  $q$ ). Estudamos o centróide estendido de  $R[x; \sigma]/J$ , usando os métodos de [16].

**Observação 4.1.1.** *Escrevamos  $f_J = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$ . Assim, todo elemento de  $Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*$  pode ser escrito de maneira única na forma  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i y^i$  com  $a_i \in Q_\sigma(R)$  e  $y = x + J^*$ .*

Se  $R$  é um anel primo,  $Q$  o anel de quocientes à esquerda de Martindale de  $R$  e  $C$  o centróide estendido de  $R$ , o fecho central  $RC$  de  $R$  é o anel  $RC = \left\{ \sum_{i=0}^n r_i c_i, \text{ onde } r_i \in R \text{ e } c_i \in C \right\}$ . O seguinte lema generaliza [16, Lemma 1.3].

**Lema 4.1.2.** *Seja  $v$  um elemento não-nulo no fecho central de*

$$Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*.$$

Se existe um  $\sigma$ -ideal  $I$  não-nulo de  $R$ , tal que  $Iv = 0$ , então  $v = 0$ .

Prova. Seja  $K$  um ideal não-nulo de  $Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*$  tal que

$$Kv \subseteq Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*.$$

Afirmaremos que  $I(Kv) = 0$ . De fato, dado  $w \in Kv$ , temos que  $w = kv$ , para algum  $k \in K$ , e podemos escrever  $w = \sum_{i=0}^{n-1} q_i y^i$ , onde  $q_i \in Q_\sigma(R)$ . Pelo Lema 1.1.5, existe um  $\sigma$ -ideal não-nulo  $L$  de  $R$  tal que  $Lk \subset R[x; \sigma]/J$  e  $L(kv) \subset R[x; \sigma]/J$ . Assim, para todo  $i \in I$  e  $j \in L$  não é difícil ver que  $i(jk)v = (ij)kv = 0$ . Logo,  $q_i = 0$ . Portanto,  $Kv = 0$ , o que implica  $v = 0$ . ■

Como  $J$  é um ideal  $R$ -disjunto de  $R[x; \sigma]$ , então por [3, Lemma 2.1], temos que  $\sigma^n(b)f_J = f_J b$ , para todo  $b \in Q_\sigma(R)$ , e  $\sigma(f_J) = f_J$ . É claro que o termo constante de  $f_J$  não é nulo. Assim,  $\sigma^n$  é um automorfismo interno de  $Q_\sigma(R)$  determinado por um elemento  $\sigma$ -invariante, isto é, existe  $c \in Q_\sigma(R)$ , onde  $\sigma(c) = c$ , tal que  $\sigma^n(q) = c^{-1}qc$ , para todo  $q \in Q_\sigma(R)$ .

Denotamos por  $C_\sigma(R) = \{c \in Z(Q_\sigma(R)) : \sigma(c) = c\}$  o  $\sigma$ -centróide estendido de  $R$ . Por [3, Lemma 1.3], temos que  $Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma]) = C_\sigma(R)[z]$ , onde  $z = bx^m$  e  $m$  é o menor inteiro tal que  $\sigma^m$  é um automorfismo interno determinado por um elemento  $\sigma$ -invariante  $b \in Q_\sigma(R)$ .

O lema abaixo caracteriza o centro de  $Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*$ .

**Lema 4.1.3.** *O centro de  $Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*$  é igual a  $C_\sigma(R)[by^m]$ , onde  $m$  e  $b$  são como acima, ou o centro de  $Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*$  é igual a  $C_\sigma(R)$ .*



Prova. Sejam  $m$  e  $b$  como mencionados anteriormente. É claro que  $m \leq n$ .

Seja  $f = \sum_{i=0}^{n-1} q_i y^i \in Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*)$ . Não é difícil de ver que  $\sum_{i=0}^{n-1} (\sigma(q_i) - q_i) y^{i+1} = 0$ . Como  $x \notin J^*$  e  $J^*$  é um ideal primo, então  $\sum_{i=0}^{n-1} (\sigma(q_i) - q_i) y^i = 0$ . Logo,  $\sigma(q_i) = q_i$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Além disso, dado  $q \in Q_\sigma(R)$ , temos que  $fq - qf = 0$ . Então, é claro que  $qq_i = q_i \sigma^i(q)$ , para todo  $q \in Q_\sigma(R)$ . Sendo  $q_i$  não-nulo, então  $q_i$  é invertível em  $Q_\sigma(R)$  e  $\sigma^i$  é um automorfismo interno determinado por  $q_i$ . Logo, se  $m = n$ , temos que  $q_i = 0$ , para todo  $i \geq 1$  e  $q_0 \in Z(Q_\sigma(R))$ . Portanto,  $Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma]) = C_\sigma(R)$ .

Suponhamos agora que  $m < n$ . Consideremos o polinômio  $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^i \in Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*)$ , com  $a_i \in Q_\sigma(R)$ . Podemos escrever  $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + J^*$  e denotamos  $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ . Mostraremos que  $\sigma(a_i) = a_i$  e  $qa_i = a_i \sigma^i(q)$  para todo  $q \in Q_\sigma(R)$ . Logo,  $g \in Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma]) = C_\sigma(R)[bx^m]$ . Como

$$f = \pi(g) \in \pi(C_\sigma(R)[bx^m]) = C_\sigma(R)[by^m],$$

onde  $\pi : Q_\sigma(R)[x; \sigma] \rightarrow Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*$  é a projeção canônica. Logo,  $Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*) \subseteq C_\sigma(R)[by^m]$ .

Por outro lado, é claro que

$$\pi(C_\sigma(R)[bx^m]) = C_\sigma(R)[by^m] \subseteq Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*). \quad \blacksquare$$

**Observação 4.1.4.** *É claro que  $\sigma$  pode ser estendido não só a um automorfismo de  $C(R[x; \sigma]/J)$  como também ao fecho central do mesmo.*

Para cada  $s \in C(R[x; \sigma]/J)$ , temos que  $sy = ys$ . Pelo Lema 1.1.5, existe um ideal não-nulo  $K$  de  $R[x; \sigma]/J$  tal que  $Ks \subseteq R[x; \sigma]/J$ . Seja  $h \in K$ . Então  $\sigma(s)\sigma(h)y = ysh = syh = s\sigma(h)y$  e segue que  $(s\sigma(h) - \sigma(s)\sigma(h)) = 0$ , pois  $x \notin J$ . Assim,  $(s - \sigma(s))\sigma(K) = 0$ . Logo,  $\sigma(s) = s$ .

Agora, estamos em condições de provar o principal resultado desta seção.

**Teorema 4.1.5.**  *$C(R[x; \sigma]/J)$  é igual à  $Z = Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*)$ , onde  $Z = C_\sigma(R)[by^m]$  se  $m < n$  ou à  $Z = C_\sigma(R)$  se  $m = n$ .*

Prova. Seja  $c \in C(R[x; \sigma]/J)$ . Pelo Lema 1.1.2, existe um ideal não-nulo  $I$  de  $R[x; \sigma]/J$  tal que  $Ic \subset R[x; \sigma]/J$ . Assim, existe  $0 \neq r \in R$  tal que  $rc = \sum_{i=0}^{n-1} r_i y^i$ , onde  $r_i \in R$ . Consideremos o conjunto  $J = \{a \in R : ac = \sum_{i=0}^{n-1} s_i y^i, s_i \in R\}$ . Temos que  $J$  é um  $\sigma$ -ideal não nulo de  $R$ , pois  $\sigma(c) = c$ . Para cada  $a \in J$ , podemos escrever  $ac = \sum_{i=0}^{n-1} s_i y^i$ . Então  $\alpha_i : J \rightarrow R$  definida por  $\alpha_i(a) = s_i$  para  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , é um homomorfismo (bem definido) de  $R$ -módulo à esquerda. Logo, existem  $q_{n-1}, \dots, q_0 \in Q_\sigma(R)$  tais que  $\alpha_i(a) = aq_i = s_i$ . Assim,  $ac = a(\sum_{i=0}^{n-1} q_i y^i)$  e segue que  $J(c - \sum_{i=0}^{n-1} q_i y^i) = 0$ . Portanto,  $c = \sum_{i=0}^{n-1} q_i y^i \in Q_\sigma[x; \sigma]/J^*$ . Desta maneira, não é difícil de ver que  $c \in Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*)$ .

Por outro lado, seja  $z \in Z(Q_\sigma(R)[x; \sigma]/J^*)$ . Existe um  $\sigma$ -ideal não nulo  $K$  de  $R$  tal que  $Kz \subset R[x; \sigma]/J$ . Não é difícil ver que a aplicação  $\beta : (R[x; \sigma]/J)K(R[x; \sigma]/J) \rightarrow R[x; \sigma]/J$  definida por  $\beta(\sum_{i=0}^m f_i k_i g_i) = \sum_{i=0}^m f_i k_i g_i z = \sum_{i=0}^m f_i k_i z g_i$ , onde  $f_i \in R[x; \sigma]/J$ ,  $g_i \in R[x; \sigma]/J$  e  $k_i \in K$ , é um homomorfismo de

$(R[x; \sigma], R[x; \sigma])$ -bimódulos. Logo, existe  $c \in C(R[x; \sigma]/J)$  tal que  $\beta(f) = fc = fz$ , onde  $f \in (R[x; \sigma]/J)K(R[x; \sigma]/J)$ . Em particular,  $K(z - c) = 0$ . Portanto, pelo Lema 4.1.2, temos que  $z = c \in C(R[x; \sigma]/J)$ . Isto completa a prova. ■

## 4.2 Skew Anel de Polinômios de Tipo Derivação

Nesta seção,  $R$  é um anel  $d$ -primo com unidade, onde  $d$  é uma derivação de  $R$ ,  $Q_d(R)$  o anel de  $d$ -quocientes à esquerda de Martindale de  $R$ , e  $J$  é um ideal primo de  $R[x; d]$  tal que  $x \notin J$  e  $J \cap R = (0)$ .

Pela Proposição 1.2.12, podemos escrever  $J = f_J Q_d(R)[x; d] \cap R[x; d]$ , onde  $f_J = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$ , com  $c_i \in Q_d(R)$ . Assim, todo elemento de  $Q_d(R)[x; d]/f_J Q_d(R)[x; d]$  pode ser escrito de maneira única na forma  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i y^i$  onde  $a_i \in Q_d(R)$  e  $y = x + f_J Q_d(R)[x; d]$ . A partir de agora, denotamos  $f_J Q_d(R)[x; d]$  por  $J^*$  e assumimos que  $\delta(f_J) > 1$ , pois caso contrário teríamos  $Q_d(R)[x; d]/J^*$  isomorfo à  $Q_d(R)$ , e este caso é trivial. Além disso, é claro que temos as inclusões

$$\begin{aligned} R &\hookrightarrow R[x; d]/J, \quad R[x; d]/J \hookrightarrow Q_d[x; d]/J^* \text{ e} \\ Q_d(R) &\hookrightarrow Q_d(R)[x; d]/J^*. \end{aligned}$$

Considerando estas inclusões, os elementos de  $\bar{f} \in R[x; d]/J$  podem ser escritos na forma  $\bar{f} = f + J^*$ , onde  $f \in Q_d(R)[x; d]$  e com estas identificações, assumimos sem perda de generalidade, que

cada elemento  $\bar{r} = r + J^*$  ( $\bar{q} = q + J^*$ ), onde  $r \in R$  ( $q \in Q_d(R)$ ), será escrito simplesmente por  $r$  (respectivamente  $q$ ).

Estudamos o centróide estendido de  $R[x; d]/J$ , usando os mesmos métodos da seção anterior.

O seguinte lema generaliza [16, Lemma 1.3].

**Lema 4.2.1.** *Seja  $v$  um elemento não nulo no fecho central de  $Q[x; d]/J^*$ . Se existe um  $d$ -ideal não nulo  $I$  de  $R$ , tal que  $Iv = 0$ , então  $v = 0$ .*

Prova. A prova é semelhante à prova do Lema 4.1.2. ■

**Lema 4.2.2.** *Seja  $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^i \in Z(Q_d(R)[x; d]/J^*)$ . Então  $d(f) = 0$ , ou seja  $d(a_i) = 0$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .*

Prova. Por hipótese,  $fy = yf$ . Assim,  $\sum_{i=0}^{n-1} d(a_i)y^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{i+1}$ . Logo,  $d(f) = 0$  e daí,  $d(a_i) = 0$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . ■

Seja  $C_d(R) = \{c \in Z(Q_d(R)) : d(c) = 0\}$  o  $d$ -centróide estendido de  $R$  e  $Z = Z(Q_d(R)[x; d])$ . Pela Proposição 1.2.12, temos que  $Z = C_d(R)[z]$  satisfaz uma das seguintes condições:

(i)  $z = x - a$ , se  $\text{char} R = 0$  e  $d(q) = aq - qa$ .

(ii) Existem  $c_i \in C_d(R)$  tais que  $z = x^{p^m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^{p^i} - a$ , se  $\text{char} R = p \neq 0$ , onde  $d(a) = 0$  e  $d^{p^m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i d^{p^i}(q) = aq - qa$ .

O lema abaixo determina o centro do anel  $Q_d(R)[x; d]/J^*$ .

**Lema 4.2.3.** *Uma das seguintes condições é válida:*

i) Se  $\text{char}R = 0$ , então  $Z = C_d(R)[w]$ , onde  $w = y - a$  e  $d(q) = aq - qa$ , para todo  $q \in Q_d(R)$ .

ii) Se  $\text{char}R = p \neq 0$ , então  $Z = C_d(R)$ , se  $\delta(z) = n$ , onde  $z$  é como acima, ou  $Z = C_d(R)[w]$  se  $\delta(z) < n$ , onde  $w = y^{p^m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i y^{p^i} - a$  com  $c_i \in C_d(R)$ ,  $d(a) = 0$  e  $d^{p^m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i d^{p^i}(q) = aq - qa$ , para todo  $q \in Q_d(R)$

Prova. i) Seja  $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^i \in Z(Q_d(R)[x; d]/J^*)$ , com  $a_i \in Q_d(R)$ . Podemos escrever  $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + J^*$ ,  $a_i \in Q_d(R)$  e denotamos  $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ . Como  $fq = qf$  para todo  $q \in Q_d(R)$ , então  $gq = qg$ , para todo  $q \in Q_d(R)$  e usando o Lema 4.2.2, temos que  $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$  é um elemento central de  $Q_d(R)[x; d]$ . O centro de  $Q_d(R)[x; d]$  é  $C_d(R)[z]$ , onde  $z = x - a$  e  $d(q) = aq - qa$ , para todo  $q \in Q_d(R)$ . Assim,  $g \in C_d(R)[z]$ . Como  $f = \pi(g) \in \pi(C_d(R)[z]) = C_d(R)[w]$ , onde  $w = y - a$  e  $\pi : Q_d(R)[x; d] \rightarrow Q_d(R)[x; d]/J^*$  é a projeção canônica, segue que,  $Z(Q_d(R)[x; d]/J^*) \subseteq C_d(R)[w]$ .

Por outro lado, é claro que

$$\pi(C_d(R)[z]) = C_d(R)[w] \subseteq Z(Q_d(R)[x; d]/J^*).$$

ii) Suponhamos que  $\text{char}R = p \neq 0$ . Seja  $f = \sum_{i=0}^{n-1} q_i y^i \in Z(Q_d(R)[x; d]/J^*)$ . Mas,  $Z(Q_d(R)[x; d]) = C_d(R)[z]$ , onde  $z = x^{p^m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^{p^i} - a$  com  $c_i \in C_d(R)$ ,  $d(a) = 0$  e  $d^{p^m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i d^{p^i}(q) = aq - qa$ , para todo  $q \in Q_d(R)$ . Podemos escrever  $f = \sum_{i=0}^{n-1} q_i x^i + J^*$ .

Como  $fq = qf$  e  $d(f) = 0$ , então  $g = \sum_{i=0}^{n-1} q_i x^i \in Z(Q_d(R)[x; d])$ . Suponhamos  $\delta(z) = n$ . Como  $g \in C_d(R)[z]$  e  $\delta(g) = n - 1$ , então  $a_i = 0$ , para  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ . Logo,  $f = a_0 \in Z(Q_d(R))$  e portanto,  $Z(Q_d(R)[x; d]/J^*) = C_d(R)$ .

Se  $\delta(z) < n$ , basta proceder como no item (i). ■

**Observação 4.2.4.** *É claro que  $d$  pode ser estendida não só a uma derivação de  $Q(R[x; d]/J)$  e também ao fecho central do mesmo.*

Seja  $s \in C(R[x; d]/J)$ . Então existe um ideal não nulo  $K$  de  $R[x; d]/J$  tal que  $Ks \subset R[x; d]/J$ . Seja  $f \in K$ . Não é difícil ver que  $yfs = fsy + d(fs) = fys + d(fs)$ , e que  $yfs = fys + d(f)s$ . Assim,  $d(fs) = d(f)s$ . Desde que  $d(fs) = d(f)s + fd(s)$ , então  $fd(s) = 0$ . Portanto, temos que  $d(s) = 0$ .

Estamos em condições de provar o teorema principal desta seção.

**Teorema 4.2.5.** *Uma das seguintes condições é válida:*

i)  $C(R[x; d]/J) = Z(Q_d(R)[x; d]/J^*) = C_d(R)[w]$ , onde  $w = y - a$ , se  $\text{char} R = 0$ .

ii)  $C(R[x; d]/J) = Z(Q_d(R)[x; d]) = C_d(R)$ , se  $\delta(z) = n$  ou  $C(R[x; d]/J) = Z(Q_d(R)[x; d]) = C_d(R)[w]$ , se  $\delta(z) < n$ , onde  $z = x^{p^m} + \sum_{i=0}^{i=m-1} c_i x^{p^i} - a$  e  $w = y^{p^m} + \sum_{i=0}^{i=m-1} c_i y^{p^i} - a$ , com  $c_i \in C_d(R)$  e  $d(a) = 0$ .

Prova. Seja  $c \in C(R[x; d]/J)$ . Pelo Lema 1.1.2, existe um ideal não-nulo  $I$  de  $R[x; d]/J$  tal que  $Ic \subset R[x; d]/J$ . Assim, existe  $0 \neq r \in R$  tal que  $rc = \sum_{i=0}^{n-1} r_i y^i$ , onde  $r_i \in R$ . Consideremos

o conjunto  $J = \{a \in R : ac = \sum_{i=0}^{n-1} s_i y^i, s_i \in R\}$ . Temos que  $J$  é um  $d$ -ideal não nulo de  $R$ , pois  $d(c) = 0$ . Para cada  $a \in J$ , podemos escrever  $ac = \sum_{i=0}^{n-1} s_i y^i$ . Então  $\alpha_i : J \rightarrow R$  definida por  $\alpha_i(a) = s_i$  para  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , é um homomorfismo (bem definido) de  $R$ -módulo à esquerda. Logo, existem  $q_{n-1}, \dots, q_0 \in Q_d(R)$  tais que  $\alpha_i(a) = a q_i = s_i$ . Assim,  $ac = a(\sum_{i=0}^{n-1} q_i y^i)$  e segue que  $J(c - \sum_{i=0}^{n-1} q_i y^i) = 0$ . Portanto,  $c = \sum_{i=0}^{n-1} q_i y^i \in Q_d[x; d]/J^*$ . Desta maneira, não é difícil de ver que  $c \in Z(Q_d(R)[x; d]/J^*)$ .

Por outro lado, seja  $z \in Z(Q_d(R)[x; d]/J^*)$ . Existe um  $d$ -ideal não nulo  $K$  de  $R$  tal que  $Kz \subset R[x; d]/J$ . Seja a aplicação  $\beta : (R[x; d]/J)K(R[x; d]/J) \rightarrow R[x; d]/J$  definida por

$$\beta\left(\sum_{i=0}^m f_i k_i g_i\right) = \sum_{i=0}^m f_i k_i g_i z = \sum_{i=0}^m f_i k_i z g_i,$$

onde  $f_i \in R[x; d]/J$ ,  $g_i \in R[x; d]/J$  e  $k_i \in K$ . Não é difícil de ver que  $\beta$  é um homomorfismo de  $(R[x; d]/J, R[x; d]/J)$ -bimódulos. Logo, existe  $c \in C(R[x; d]/J)$  tal que  $\sum_{i=0}^m f_i k_i g_i c = \beta\left(\sum_{i=0}^m f_i k_i g_i\right) = \sum_{i=0}^m f_i k_i g_i z$ . Assim,

$$(R[x; d]/J)K(R[x; d]/J)(z - c) = 0.$$

Em particular,  $K(z - c) = 0$ . Portanto, pelo Lema 4.1.2, temos que  $z = c \in C(R[x; d]/J)$ . Isto completa a prova. ■

## Referências.

[1] Beidar, K.I., Martindale III e W.S., Mikhlaev, A.V.; Rings With Generalized Identities, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 196 (1996).

[2] Chatters, A. W., Jordan, D. A.; Noncommutative Unique Factorisation Rings, Journal London Math. Society 33(2)(1986), 22-32.

[3] Cisneros, E., Ferrero, M. e Gonzáles, M. I.; Prime Ideals of Skew Polynomial Rings and Skew Laurent Polynomial Rings, Math. J. Okayama University 32(1990), 61-72.

[4] Ferrero, M., Mactzuc, J.; Prime Ideals in Skew Polynomial Rings of Derivation Type, Communications in Algebra, 18(3)(1989), 689-710.

[5] Ferrero, M.; Radicals of Skew Polynomial Rings And Skew Laurent Polynomial Rings, Math. Journal Okayama University, 29 (1987), 119-126.

[6] Ferrero, M.; Prime and Maximal Ideals in Polynomial Rings, Glasgow Math. Journal 37(1995), 351-362.

[7] Ferrero, M. Kishimoto, K.; On Differential Rings and Skew Polynomial Rings, Communications in algebra 13(2)1985), 285-304

[8] Ferrero, M.; Prime and Principal closed Ideals in Polynomial Rings, J. Algebra 134(1990), 45-59.

[9] Goodearl, K. R., Warfield JR., R.B.; An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings, London Mathematical society Student Texts 16(1989).

[10] Goodearl, K.R., Warfield Jr., R.B. Krull Dimension of



Differential Operator Rings, Proc. London Math. Society 45 (3)(1982), 49-70.

[11] Kanemitsu, M., Yoshida, K.; Conditions for an Ideal in a polynomial Ring to be Principal, Communications in Algebra 19(3)(1981), 749-766.

[12] Lam, T. Y.; A first Course in Noncommutative Rings, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1991).

[13] Lam, T. Y., Leroy, A., Matczuk, J.; . Primeness, Semiprimeness and Prime Radical of Ore Extensions, Communications in Algebra, 25(8)(1997), 2459-2506.

[14] Lam, T. Y.; Lectures on Modules and Rings, Graduate Texts in Mathematics 189(1999), Springer-Verlag.

[15] Leroy, A., Matczuk, J.; The Extended Centroid and X- Inner automorphisms of Ore Extensions, Journal of Algebra 145 (1992), 143-177.

[16] Matczuk, J.; Extended Centroid of Skew Polynomial Rings, Math. J. Okayama University 30(1988), 13-20.

[17] Matczuk, J., Leroy A.; Prime Ideals of Ore Extensions, Communications in Algebra 24(3)(1991), 907-917.

[18] Matczuk, J.; Maximal Ideals of Skew Polynomial Rings with Automorphism Type, Communications in Algebra 19(7)(1991), 1893-1907.

[19] Park, J. W., Chun, J.H.; Principal Ideals in Skew Polynomial Rings, Communications in Korean Math. Society, 14(4)(1999), 699-706.

[20] Puczyłowski, E. R., Smoktunowicz, A.; On Maximal Ideals and the Brown-McCoy Radical of Polynomial Rings, Com-

munications in Algebra, 26(8)(1998), 2473-2482.

[21] Robson, J. C., McConnell J. C.; Noncommutative Noetherian Rings, Series Pure and Applied Mathematics (1988)(John Wiley & Sons).

[22] Sharma, P. K.; A note on Ideals in Polynomial Rings, Arch. Math. 37 (1981), 325-329.

[23] Voskoglou, M. G., Sapançi, M.; Principal Ideals in Skew Polynomial Rings, Bulletin of The Greek Mathematical Society 36 (1994), 133-137.