

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

## **Simulação do diodo de Pierce com feixe de elétrons térmico**

Alexandre Silveira

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a orientação do Prof. Dr. Renato Pakter, apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Porto Alegre, 3 de julho de 2014

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a minha família por todo apoio.  
A todos meus amigos e colegas de curso.  
Ao professor Renato Pakter pela atenção e paciência.

# Resumo

Este trabalho trata da dinâmica do diodo de Pierce com um feixe de elétrons térmico. O uso do termo térmico está relacionado ao aumento da dispersão em velocidade, em relação à velocidade média, ou seja, a partir da distribuição de velocidades do feixe, é possível se verificar o aumento na dispersão. Utilizando, por exemplo, o desvio padrão da média, quanto maior for o desvio, maior será a dispersão de velocidades em torno da média. Quando se refere à temperatura para um sistema com muitas partículas, é possível associar ao estado de equilíbrio do sistema uma certa distribuição de velocidades. Quanto maior é a temperatura do sistema no estado de equilíbrio, maior é a dispersão de velocidades da distribuição. No entanto, o diodo de Pierce é um sistema que nunca relaxa para um equilíbrio, sendo o conceito de temperatura não definido para este sistema, mas o uso do termo térmico pode ser utilizado como um artifício didático, para facilitar a compreensão do leitor, de que a dispersão de velocidades no feixe é aumentada ou diminuída. O diodo de Pierce é um modelo teórico muito utilizado para o estudo de plasmas confinados. Consiste em um sistema unidimensional, em que nas fronteiras encontram-se placas paralelas aterradas, com espaçamento  $L$  entre si. No seu interior, há uma distribuição uniforme de íons, com densidade  $n_0$ , onde um feixe de elétrons de mesma densidade  $n_0$  e velocidade inicial  $v_0$  é injetado constantemente. Para seu estudo, é possível a utilização da teoria de plasmas como fluidos. O sistema apresenta diferentes regimes de funcionamento, dada a uma mudança nos parâmetros  $L$ ,  $v_0$ ,  $n_0$  do sistema. Ao invés de se modificar todos estes parâmetros, toda vez que se quer estudar um novo comportamento do sistema, é criado um novo parâmetro chamado  $\alpha$ . Cada valor de  $\alpha$  corresponde a um conjunto de valores de  $L$ ,  $v_0$  e  $n_0$ , onde todos valores deste conjunto correspondem ao mesmo comportamento do sistema. De modo que  $\alpha = \omega_p \frac{L}{v_0}$ , onde  $\omega_p$  corresponde a frequência de plasma. Em certos valores de  $\alpha$ , o sistema apresenta um comportamento estável frente a perturbações, e em outros valores de  $\alpha$ , apresenta um comportamento instável. Existem valores que correspondem a um estado intermediário entre estável e instável. Os valores de  $\alpha$ , que correspondem a estes estados intermediários, são referidos como valores críticos, denominados  $\alpha_c$ . Numa abordagem inicial, foi feito um cálculo teórico, para o sistema com feixe de elétrons com dispersão de velocidades. Esse cálculo mostra a existência de uma mudança em relação ao caso com feixe de elétrons sem dispersão de velocidades. As transições entre regimes de estabilidade para instabilidade não ocorrem mais para os mesmos valores do parâmetro  $\alpha_c$  como aqueles do caso de um feixe sem dispersão de velocidades. Para melhor compreender a dinâmica deste sistema, foi desenvolvida uma simulação em código FORTRAN. A interação entre as partículas nesta simulação ocorre apenas por meio de forças elétricas, desconsiderando-se colisões. Os resultados obtidos com esta simulação demonstram esta mudança nos valores críticos e, também, salientam efeitos produzidos pela modificação no feixe.

**Palavras-chave:** plasmas, diodo de Pierce, feixe térmico, simulação.

## Abstract

This work treats the dynamics of the Pierce diode with a thermal electron beam. The use of the term thermal is related to the increase of the dispersion in the velocity, in relation to the mean velocity, in other words, from the velocity distribution of the beam, it is possible to verify the increase in dispersion. Using, for example, the standard deviation of the mean, the higher the standard deviation, the higher will be the dispersion of the velocities around the mean. When one regards to temperature for a system with many particles, it is possible to relate to the equilibrium state of the system a certain velocity distribution. The higher the temperature of the system in the equilibrium state, the higher the dispersion of velocities of the distribution. However, the Pierce diode is a system which never relax to an equilibrium, being the concept of temperature not defined for this system, but the use of the term thermal can be used as a didactic artifice, to ease the comprehension of the reader, of which the dispersion of velocities in the beam is increased or decreased. The Pierce diode is a theoretical model widely used to study bounded plasmas. It consists of a one-dimensional system, in which there are parallel plates grounded in the boundaries, with spacing  $L$  among them. Inside it there is a uniform ion distribution, with density  $n_0$ , where an electron beam at the same density  $n_0$  and initial velocity  $v_0$  is constantly injected. For its study, it is possible to use a plasma fluid approximation. The system presents different operating regimes, given a change in the parameters  $L$ ,  $v_0$ ,  $n_0$  of the system. Instead of modifying all these parameters, every time one wants to study a new behaviour of the system, is created a new parameter called  $\alpha$ . Each value of  $\alpha$  corresponds to a set of values of  $L$ ,  $v_0$  and  $n_0$ , wherein all values of this set match the same behaviour of the system. So that  $\alpha = \omega_p \frac{L}{v_0}$ , wherein  $\omega_p$  corresponds to the plasma frequency. In certain values of  $\alpha$ , the system presents a stable behaviour against perturbations, and in other values of  $\alpha$ , presents an unstable behaviour. There are values which correspond to an intermediate state between stable and unstable. The values of  $\alpha$ , that correspond to these intermediate states, are referred to as critical values, denominated  $\alpha_c$ . In a first approach, a theoretical calculation was made, for the system with an electron beam with dispersion in velocities. This calculation shows the existence of a change in relation to the case with the electron beam without dispersion in velocities. The transitions between regimes of stability to instability no longer occur for the same values of the parameter  $\alpha_c$  like those of the case with a beam without dispersion in velocities. To better understand the dynamics of the system, it was developed a simulation in FORTRAN code. The interaction among the particles in this simulation occurs only by electrical forces, neglecting collisions. The results obtained with the simulation prove the change in the critical values and, also, stress effects produced by the modification of the beam.

**Keywords:** plasmas, Pierce diode, thermal beam, simulation.

# Lista de Figuras

1.1	Parte imaginária. Gráfico retirado de [1]. . . . .	10
1.2	Parte real. Gráfico retirado de [1]. . . . .	10
2.1	Não perturbado . . . . .	13
2.2	Perturbado . . . . .	14
4.1	Campo no cátodo $\alpha = 0.7\pi$ . . . . .	22
4.2	Espaço de fase $\alpha = 0.7\pi$ . . . . .	23
4.3	Espaço de fase $\alpha = 0.7\pi$ . . . . .	23
4.4	Campo no cátodo $\alpha = 1.05\pi$ . . . . .	24
4.5	Campo por posição $\alpha = 1.05\pi$ . . . . .	24
4.6	Espaço de fases $\alpha = 1.05\pi$ . . . . .	25
4.7	Campo no cátodo $\alpha = 0.7\pi$ . . . . .	25
4.8	$\delta = 0.01, \delta = 0.04, \delta = 0.3, \delta = 0.6$ . . . . .	26
4.9	Campo no cátodo $\alpha = 0.9\pi$ . . . . .	27
4.10	Espaço de fases $\alpha = 0.9\pi$ . . . . .	27

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	O diodo de Pierce . . . . .	1
1.2	Equação característica para o caso de feixe sem dispersão de velocidades . . . .	3
<b>2</b>	<b>Teoria para um feixe com dispersão de velocidades</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Simulação</b>	<b>16</b>
3.1	Condições iniciais . . . . .	16
3.2	Interação . . . . .	18
3.3	Cálculo do campo elétrico . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Resultados da Simulação</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>28</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Para entender um pouco sobre o sistema em estudo, será feita uma revisão teórica sobre o diodo de Pierce, com feixe de dispersão nula em velocidade. Dentro dessa revisão será deduzida uma relação para as frequências características do sistema, com a qual é possível visualizar os diferentes regimes de comportamento deste dispositivo, dependendo do parâmetro  $\alpha$  escolhido. No capítulo 2, através de um modelo teórico, será derivada uma relação que mostra a existência de uma mudança nos valores de  $\alpha$  do sistema, para os quais há transição entre regimes, quando há dispersão de velocidades no feixe. No capítulo 3, será explicada, de forma detalhada a simulação numérica, onde foi utilizado o método da função de Green pra calcular o campo elétrico do sistema. Por fim, no capítulo 4, serão mostrados os resultados da simulação, os quais serão utilizados para melhor visualizar a dinâmica do sistema em seus possíveis regimes.

### 1.1 O diodo de Pierce

O diodo de Pierce consiste em um modelo para o estudo de plasmas confinados [1, 2, 3]. O objetivo inicial de Pierce, era analisar qual a corrente elétrica máxima dentro de um sistema envolvido por superfícies equipotenciais, contendo uma distribuição de cargas neutralizadoras dentro [2].

O sistema é composto por duas placas paralelas aterradas (potencial elétrico nulo)

$$\phi(x = 0, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\phi(x = L, t) = 0, \quad (1.2)$$

sendo  $L$  a distância entre as placas. Dentro desta região, há uma distribuição uniforme de íons estáticos com densidade  $n_0$ . Esta suposição baseia-se no fato de que os íons são muito massivos, quando comparados aos elétrons [1, 2, 3], ficando qualquer modificação de suas posições rapidamente compensada pelo movimento dos elétrons.

Em um dado momento, um feixe de elétrons monoenergéticos, com velocidade

$$v_e(x = 0, t) = v_0, \quad (1.3)$$

e densidade

$$n_e(x = 0, t) = n_0, \quad (1.4)$$

é injetado no diodo. Apesar do movimento dos elétrons, a carga total deste dispositivo é mantida aproximadamente neutra, pois a distribuição de íons age de modo a neutralizar o feixe de elétrons incidente. Considerando esta quase-neutralidade e o comportamento coletivo<sup>1</sup> destes portadores de carga (elétrons e íons), devido à interação coulombiana, pode-se classificar o diodo de Pierce como um plasma<sup>2</sup> [4]. A utilização da aproximação de plasmas como fluidos para este sistema, juntamente com as condições de contorno (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4), permite a obtenção de uma relação, a partir da qual é possível mapear o comportamento do diodo de Pierce, em função de seu parâmetro  $\alpha$ , em que esse é definido por:

$$\alpha = \omega_p \frac{L}{v_0}, \quad (1.5)$$

em que

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}, \quad (1.6)$$

é a frequência de oscilações dos elétrons no plasma, e  $\frac{L}{v_0}$  é o tempo médio que um elétron leva para atravessar o diodo. Para cada valor deste parâmetro  $\alpha$  o sistema assumirá diferentes valores de  $L$ ,  $v_0$  e  $n_0$ .

Por exemplo, se esse diodo fosse construído, e o espaçamento de suas placas fosse de  $L = 1\text{m}$ , a velocidade inicial dos elétrons do feixe configurada para  $v_0 = 10^{-4}\text{m/s}$  e se sua densidade fosse de  $n_0 = 10^{29}\text{m}^3$ , ele apresentaria um certo comportamento. O sistema poderia alcançar um estado de equilíbrio, em que o feixe flui continuamente sem haver interrupções em seu fluxo. Para produzir esse tipo de dispositivo, é interessante que sejam identificados para quais parâmetros de construção desse sistema, haverá evolução para um estado de fluxo estável.

---

<sup>1</sup>Este comportamento é justamente devido as partículas interagirem à distância, qualquer modificação no movimento de uma carga afetará partículas distantes da mesma.

<sup>2</sup> O plasma é um gás ionizado, no qual a energia térmica disponível para as partículas constituintes dos átomos (elétrons e íons), é muito maior do que a energia de ionização. Apesar de possuir cargas livres o plasma é macroscopicamente neutro. Quando são aplicados campos externos o plasma reorganiza sua distribuição de cargas mantendo a sua neutralidade. Isso está de acordo com a etimologia da palavra plasma, que do grego significa 'algo que se molda'. Dois modelos conhecidos para o estudo de plasmas são o modelo de fluido e o modelo cinético. O modelo de fluido trata de variáveis macroscópicas do plasma como velocidade, densidade e campos. O modelo cinético utiliza uma função distribuição do tipo  $f = f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  para descrever o comportamento das partículas do plasma.

## 1.2 Equação característica para o caso de feixe sem dispersão de velocidades

Quando não há dispersão de velocidades no feixe de elétrons, é possível tratar o sistema utilizando a aproximação de plasmas como um fluido carregado. Utilizando o método de teoria de perturbação, pode-se obter, a partir das equações de fluido para um plasma, uma equação característica que relaciona um valor específico de  $\alpha$  a um certo comportamento do sistema frente a uma perturbação.

As equações de fluido para um plasma unidimensional são [1, 2, 3, 4, 5]

$$\frac{\partial v_\nu(x, t)}{\partial t} + v_\nu(x, t) \frac{\partial v_\nu(x, t)}{\partial x} = -\frac{q}{m_\nu} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}, \quad (1.7)$$

$$\rho(x, t) = \rho_i(x, t) + \rho_e(x, t) = e(n_i(x, t) - n_e(x, t)), \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x, t)}{\epsilon_0}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \rho_\nu(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_\nu(x, t) v_\nu(x, t))}{\partial x} = 0. \quad (1.10)$$

As quantidades estudadas são: o campo de velocidades dos elétrons  $v_\nu(x, t)$ , o potencial elétrico  $\phi(x, t)$  e a densidade de elétrons  $\rho_\nu(x, t)$ .

Os subíndices  $\nu$  referem-se as espécies de portadores de carga, sendo  $i$  reservado para portadores de carga positiva (íons) e  $e$  para os de carga negativa (elétrons).

A equação (1.7) refere-se à força que um portador sofre devido à ação de um campo elétrico. Neste dispositivo, não há campos externos, logo o termo do lado direito da equação refere-se apenas ao campo elétrico produzido pelas cargas constituintes do sistema. (Adicionar justificativa para desprezar o efeito do campo magnético produzido pelo fluxo de elétrons, sobre o movimento dos constituintes do sistema.)

A relação (1.9) é a equação de Poisson, a qual permite obter o potencial elétrico dada uma distribuição de cargas (1.8) em uma certa região.

A expressão (1.10) é a equação da continuidade, a qual estabelece que a quantidade de carga num elemento de volume  $d^3r$ , em um instante de tempo, é proporcional a variação espacial do fluxo de carga.

Com este conjunto de equações é possível determinar as variáveis  $\rho$ ,  $\phi$  e  $v$  para a compreensão do comportamento do sistema.

Assumindo íons estáticos ( $v_i = 0$ ), com densidade constante ( $n_i(x, t) = n_0$ ), pode-se reescrever o conjunto de equações acima, de forma a contabilizar apenas efeitos devidos ao movimento dos elétrons.

O conjunto de equações a ser resolvido passa a ser

$$\frac{\partial v_e(x, t)}{\partial t} + v_e(x, t) \frac{\partial v_e(x, t)}{\partial x} = \frac{e}{m_e} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = -e \frac{(n_0 - n_e(x, t))}{\epsilon_0}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial n_e(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial (n_e(x, t) v_e(x, t))}{\partial x} = 0, \quad (1.13)$$

com as condições de contorno estabelecidas nas equações (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4).

Antes de proceder com a resolução do sistema de equações diferenciais acima, será apresentado brevemente o método de teoria de perturbação e será mostrado, também, uma condição de equilíbrio do sistema.

Um sistema é considerado em equilíbrio, quando todas as forças agindo sobre ele são completamente balanceadas umas pelas outras. Para o sistema estudado, o estado de equilíbrio pode ser alcançado, quando a distribuição espacial do feixe de elétrons for equivalente à distribuição de carga iônica no diodo, ou seja:

$$n_e(x, t) = n_0. \quad (1.14)$$

Aplicando esta suposição na equação (1.12)

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1.15)$$

resultando em um potencial linear do tipo

$$\phi(x, t) = C_1 x + C_2. \quad (1.16)$$

Com as condições de contorno estabelecidas em (1.1) e (1.2), podemos determinar as constantes  $C_1 = C_2 = 0$ . Logo, o potencial elétrico é nulo

$$\phi(x, t) = 0. \quad (1.17)$$

A suposição de que a densidade de elétrons seja uniforme ao longo do diodo (1.14), permite, através de (1.13), concluir:

$$\frac{\partial (v_e(x, t))}{\partial x} = 0, \quad (1.18)$$

logo por (1.11)

$$\frac{\partial v_e(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (1.19)$$

então  $v_e(x, t) = v_0$ .

Caso a distribuição do feixe seja uniforme, ele tende a manter-se assim, pois o campo elétrico resultante sobre ele é nulo e por consequência sua velocidade fica constante, o que cria um vínculo sobre a posição relativa dos elétrons, sustentando, assim, a primeira suposição de  $n_e(x, t) = n_0$ . Essa situação caracteriza um estado de equilíbrio, porém ainda não é conhecido nada sobre sua estabilidade. Para tal, é necessário perturbar levemente o sistema do equilíbrio e analisar se o sistema retorna ao estado inicial. Caso isto ocorra, pode-se classificar esse equilíbrio como estável. No entanto, se esta perturbação levar este sistema a um estado que sustente a perturbação inicial e adquira um novo regime, no qual não há balanceamento de forças, considera-se este um estado instável. Adiante, quando apresentados os resultados da simulação, será ilustrada a ocorrência de estados de equilíbrio instáveis.

Uma técnica amplamente utilizada no estudo de sistemas dinâmicos é a de encontrar o estado de equilíbrio e analisar como ele se comporta sob a ação de uma perturbação.

Uma perturbação pode ser escrita como:

$$f(x, t) = f_0(x) + f_1(x, t), \quad (1.20)$$

em que

$$f_0(x), \quad (1.21)$$

caracteriza um estado de equilíbrio e

$$f_1(x, t), \quad (1.22)$$

uma pequena perturbação em torno desse.

É importante que

$$| f_1(x, t) | \ll | f_0(x) |, \quad (1.23)$$

de modo que o valor absoluto dessa perturbação seja pequeno, pois não se sabe qual o comportamento do sistema em torno desse equilíbrio e o objetivo é mapear completamente as adjacências desse. As equações (1.11), (1.13) possuem termos não-lineares. Se (1.23) for satisfeita, pode-se desconsiderar produtos de quantidades perturbadas

$$| n_1(x, t)v_1(x, t) | \ll 1, \quad (1.24)$$

$$| v_1(x, t) \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} | \ll 1, \quad (1.25)$$

transformando o sistema de equações num sistema de equações lineares.

A seguir é feito um processo de adimensionalizar as quantidades

$$x \rightarrow xL, \quad (1.26)$$

$$t \rightarrow \frac{L}{v_0}t, \quad (1.27)$$

$$v_e(x, t) \rightarrow v_0v_e(x, t), \quad (1.28)$$

$$n_e(x, t) \rightarrow n_0 n_e(x, t). \quad (1.29)$$

Procede-se desta forma, para que as soluções das equações fiquem em termos do parâmetro  $\alpha$ . Será assumido que todas as variáveis serão sempre adimensionais no restante do trabalho.

Aplicando essas modificações em (1.11), (1.12) e (1.13), obtém-se

$$\frac{v_0^2}{L} \frac{\partial v_e(x, t)}{\partial t} + \frac{v_0^2}{L} v_e(x, t) \frac{\partial v_e(x, t)}{\partial x} = \frac{e}{m_e L} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}, \quad (1.30)$$

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = -n_0 e \frac{1 - n_e(x, t)}{\epsilon_0}, \quad (1.31)$$

$$\frac{n_0 e v_0}{L} \frac{\partial(1 - n_e(x, t))}{\partial t} + \frac{n_0 e v_0}{L} \frac{\partial((1 - n_e(x, t))v_e(x, t))}{\partial x} = 0. \quad (1.32)$$

Observando (1.30), verifica-se que o potencial pode ser adimensionalizado por:

$$\phi \rightarrow \phi \frac{m_e v_0^2}{e}, \quad (1.33)$$

logo

$$\frac{\partial v_e(x, t)}{\partial t} + v_e(x, t) \frac{\partial v_e(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{n_0 e^2 L^2}{m_e v_0^2} \frac{1 - n_e(x, t)}{\epsilon_0}. \quad (1.35)$$

Onde na equação (1.35), a constante à esquerda do termo da direita da igualdade é  $\alpha^2$ . Logo, o sistema adquire a forma:

$$\frac{\partial v_e(x, t)}{\partial t} + v_e(x, t) \frac{\partial v_e(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = -\alpha^2 (1 - n_e(x, t)), \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial n_e(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial(n_e(x, t)v_e(x, t))}{\partial x} = 0. \quad (1.38)$$

Fazendo-se uso da teoria de perturbação para as variáveis densidade, potencial elétrico e velocidade:

$$n_e(x, t) = 1 + n_1(x, t), \quad (1.39)$$

$$\phi(x, t) = \phi_0 + \phi_1(x, t). \quad (1.40)$$

Como estudado anteriormente,  $\phi_0$  é a solução para o sistema em equilíbrio. Logo,  $\phi_0 = 0$

$$\phi(x, t) = \phi_1(x, t), \quad (1.41)$$

$$v_e(x, t) = 1 + v_1(x, t). \quad (1.42)$$

Aplicando (1.39), (1.42), (1.40) e utilizando (1.24), (1.25), obtém-se:

$$\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1(x, t)}{\partial x}, \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1(x, t)}{\partial x^2} = \alpha^2 n_1(x, t), \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial n_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial n_1(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (1.45)$$

Ficou-se então com um sistema de equações lineares para as variáveis perturbadas (1.43), (1.44) e (1.45). Essas equações devem ser resolvidas respeitando as condições (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4). Logo, pode-se derivar condições de contorno equivalentes para as quantidades perturbadas:

$$n_e(x = 0, t) = 1 \rightarrow n_1(x = 0, t) = 0, \quad (1.46)$$

$$v_e(x = 0, t) = 1 \rightarrow v_1(x = 0, t) = 0, \quad (1.47)$$

$$\phi(x = 0, t) = 0 \rightarrow \phi_1(x = 0, t) = 0, \quad (1.48)$$

$$\phi(x = 1, t) = 0 \rightarrow \phi_1(x = 1, t) = 0. \quad (1.49)$$

Avaliando-se (1.43), (1.44), (1.45) em  $x = 0$ :

$$\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \phi_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial n_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \alpha^2 n_1(x, t) \Big|_{x=0}. \quad (1.52)$$

Pela condição (1.46) sob a equação (1.52):

$$\frac{\partial^2 \phi_1(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.53)$$

Substituindo-se (1.50) em (1.51):

$$\frac{\partial n_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{\partial \phi_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.54)$$

Derivando com respeito a  $x$  a relação (1.44):

$$\frac{\partial n_1(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^3 \phi_1(x, t)}{\partial x^3}.$$

Então, as condições de contorno ficam:

$$\frac{\partial^3 \phi_1(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} + \alpha^2 \frac{\partial \phi_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.56)$$

$$\phi_1(x = 0, t) = 0, \quad (1.57)$$

$$\phi_1(x = 1, t) = 0. \quad (1.58)$$

Supondo uma perturbação de formato:

$$n_1(x, t) \propto v_1(x, t) \propto \phi_1(x, t) \propto e^{i(kx - \omega t)}, \quad (1.59)$$

onde a frequência e o número de onda foram adimensionalizados

$$\omega \rightarrow \omega \frac{v_0}{L}, \quad (1.60)$$

$$k \rightarrow \frac{k}{L}. \quad (1.61)$$

No conjunto (1.44), (1.45), (1.43) e considerando (1.24) e (1.25)

$$-i\omega v_1(x, t) + ikv_1(x, t) = ik\phi_1(x, t), \quad (1.62)$$

$$-i\omega n_1(x, t) + kn_1(x, t) + ikv_1(x, t) = 0, \quad (1.63)$$

$$-k^2 \phi_1(x, t) = \alpha^2 n_1(x, t). \quad (1.64)$$

Manipulando estas equações obtém-se:

$$(\omega - k) \frac{k^2}{\alpha^2} \phi_1(x, t) - k^2 \frac{\phi_1(x, t)}{(\omega - k)} = 0. \quad (1.65)$$

Onde  $k = 0$  é uma raiz dupla.

Para  $k \neq 0$

$$(\omega - k)^2 = \alpha^2, \quad (1.66)$$

$$k_+ = \omega + \alpha, \quad (1.67)$$

$$k_- = \omega - \alpha. \quad (1.68)$$

Desta forma, é possível escrever uma função completa para a parte espacial do potencial elétrico perturbado:

$$\phi_1(x) = Ax + B + Ce^{i(\omega+\alpha)x} + De^{i(\omega-\alpha)x}. \quad (1.69)$$

Aplicando-se as condições de contorno (1.55), (1.56), (1.57) e (1.58) obtém-se:

$$(\omega + \alpha)^2 C + (\omega - \alpha)^2 D = 0, \quad (1.70)$$

$$-i(\omega + \alpha)^3 C - i(\omega - \alpha)^3 D + \alpha^2 A + i\alpha^2(\omega + \alpha)C + i\alpha^2(\omega - \alpha)D = 0, \quad (1.71)$$

$$B + C + D = 0, \quad (1.72)$$

$$A + B + Ce^{i(\omega+\alpha)} + De^{i(\omega-\alpha)} = 0. \quad (1.73)$$

Resolvendo este sistema de equações para as constantes  $A, B, C, D$ , obtém-se a equação característica:

$$2\omega^2(\omega^2 - \alpha^2) + i\alpha\{(\omega + \alpha)^2[e^{i(\omega-\alpha)} - 1] - (\omega - \alpha)^2[e^{i(\omega+\alpha)} - 1]\} = 0. \quad (1.74)$$

Esta relação fornece conhecimento sobre o comportamento que o sistema adquire, frente a uma perturbação, dependendo da escolha de  $\alpha$ .

Fazendo-se o uso de uma ferramenta computacional, é possível resolver (1.74). Porém, como o intuito deste trabalho é fazer uma simulação, tomou-se a liberdade de utilizar os gráficos produzidos em [1], meramente para ilustrar os regimes de comportamento deste sistema, conforme mostrado nas figuras (1.1) e (1.2) abaixo.

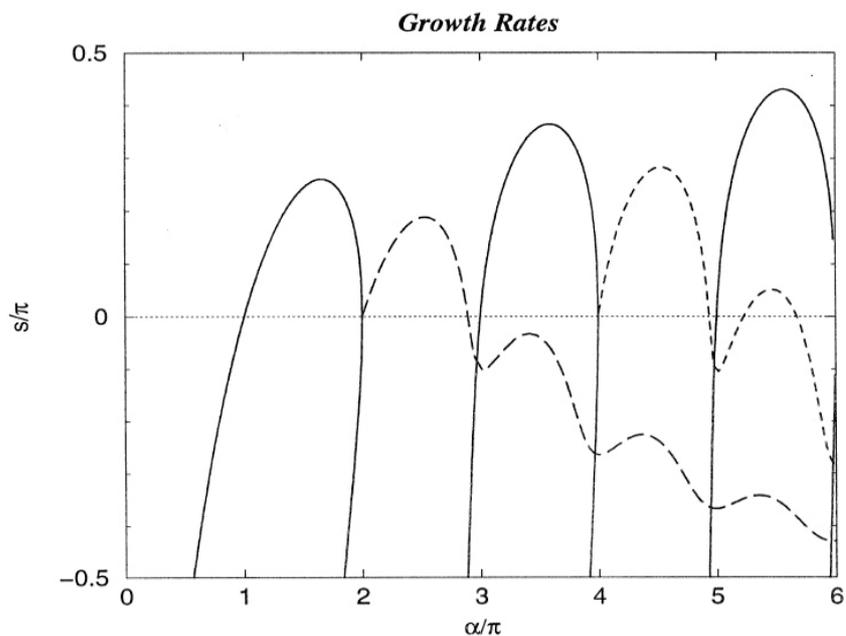


Figura 1.1: Parte imaginária. Gráfico retirado de [1].

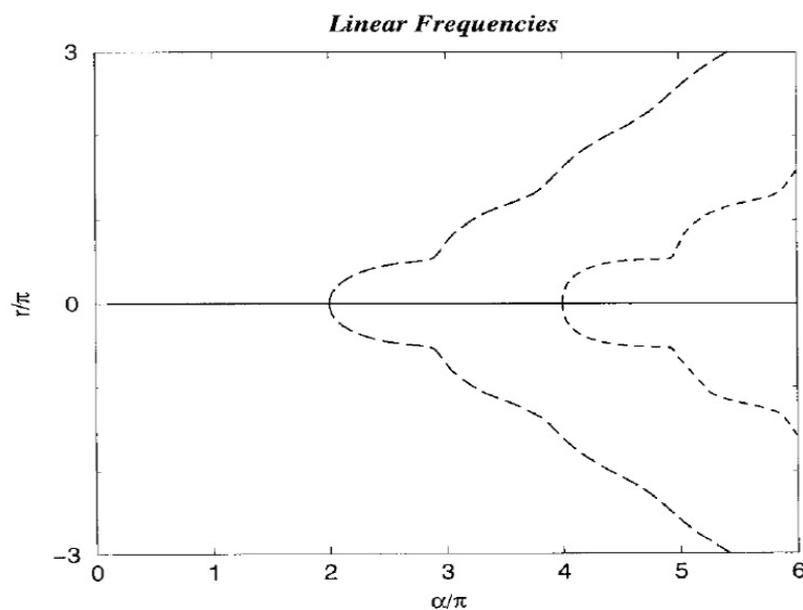


Figura 1.2: Parte real. Gráfico retirado de [1].

Onde  $\omega = r + is$ .

Por exemplo, para valores de  $\alpha$  entre

$$0 < \frac{\alpha}{\pi} < 1, \tag{1.75}$$

tem-se uma frequência puramente imaginária:

$$\frac{s}{\pi} < 0. \tag{1.76}$$

Como foi suposto que a parte temporal para as quantidades perturbadas é uma função do tipo:

$$e^{-i\omega t}, \quad (1.77)$$

obtem-se uma condição de amortecimento:

$$n_1(x, t) \propto e^{-st}, \quad (1.78)$$

$$v_1(x, t) \propto e^{-st}, \quad (1.79)$$

$$\phi_1(x, t) \propto e^{-st}. \quad (1.80)$$

Ou seja, se uma perturbação for aplicada ao sistema, que se encontra em um dado estado, cujos parâmetros de estrutura estão no intervalo dado por (1.75), ele tende a retornar ao estado inicial. Isto caracteriza um estado de equilíbrio estável.

Entretanto para valores entre:

$$1 < \frac{\alpha}{\pi} < 2, \quad (1.81)$$

tem-se uma frequência imaginária positiva:

$$\frac{s}{\pi} > 0. \quad (1.82)$$

Logo,

$$n_1(x, t) \propto e^{st}, \quad (1.83)$$

$$v_1(x, t) \propto e^{st}, \quad (1.84)$$

$$\phi_1(x, t) \propto e^{st}, \quad (1.85)$$

as variáveis tendem a crescer exponencialmente, ou seja, o estado que o sistema se encontrava antes do início na perturbação era instável.

O ponto  $\alpha_c = \pi$  é o limiar de transição entre um regime estável para um regime de operação instável. Para valores maiores de  $\alpha$  o sistema pode exibir comportamento variado. Por exemplo, em valores acima de  $\alpha > 2\pi$  há ocorrência de oscilações das variáveis e outros comportamentos [1, 3].

Neste trabalho, o foco será mantido para valores no intervalo

$$0 \leq \frac{\alpha}{\pi} \leq 2, \quad (1.86)$$

e apenas as transições de regime estável para instável serão estudadas.

## Capítulo 2

# Teoria para um feixe com dispersão de velocidades

Como estudado no capítulo 1, para o caso de um feixe sem dispersão de velocidades, em certos valores  $\alpha_c$ , o sistema encontra-se num estado de transição entre regimes estáveis (para valores de  $\alpha$  correspondentes a frequências imaginárias negativas) e instáveis (para valores de frequência imaginária positiva). Através de uma análise, será demonstrado que os valores correspondentes a estes estados de transição são modificados, quando o feixe de elétrons possui uma dispersão de velocidades. Observando a figura (1.1) percebe-se que a primeira transição ocorre para  $\alpha = \pi$ . Neste estado,  $\omega = 0$ , logo, o estado do sistema é estacionário (se este sistema for perturbado, ele manterá esta perturbação). Pode-se agora fazer uso de uma perturbação com dependência apenas espacial para estudar o sistema nestes estados de transição. As variáveis perturbadas serão:

$$n(x) = n_0 + n_1(x), \quad (2.1)$$

$$\phi(x) = \phi_0 + \phi_1(x). \quad (2.2)$$

Como o sistema é estacionário, pode-se escrever a conservação de energia para uma partícula que entra no diodo com velocidade inicial  $1 + \delta$  e para outra que entra com  $1 - \delta$

$$\frac{1}{2}(1 + \delta)^2 = \frac{1}{2}v_+^2 - \phi_1(x), \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \delta)^2 = \frac{1}{2}v_-^2 - \phi_1(x), \quad (2.4)$$

$v_+$  e  $v_-$  são as velocidades que elas assumem em uma dada posição devido à interação com o potencial eletrostático estabelecido. Reescrevendo para  $v_+$  e  $v_-$ :

$$v_+ = \sqrt{(1 + \delta)^2 + 2\phi_1(x)}, \quad (2.5)$$

$$v_- = \sqrt{(1 - \delta)^2 + 2\phi_1(x)}. \quad (2.6)$$

Como mencionado no capítulo 1, supõe-se  $\phi_1(x)$  pequeno, logo, pode-se expandir (2.5) e (2.6) em Taylor, desprezando os termos de 2ª ordem em diante:

$$v_+ = (1 + \delta) + \frac{\phi_1(x)}{(1 + \delta)}, \quad (2.7)$$

$$v_- = (1 - \delta) + \frac{\phi_1(x)}{(1 - \delta)}. \quad (2.8)$$

Para calcular a densidade eletrônica, será feita uma análise do espaço de fases para dois casos:

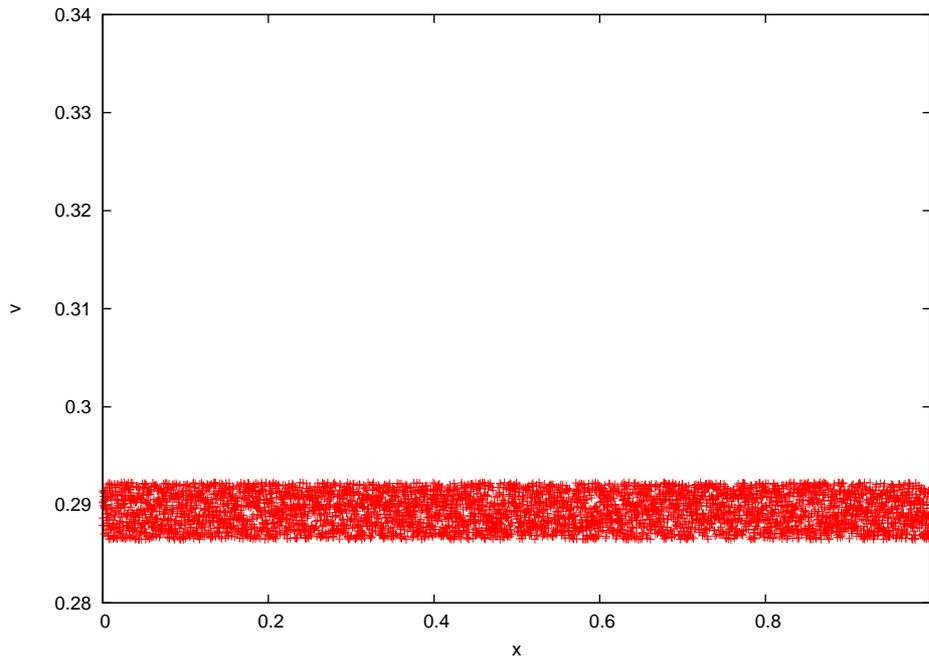


Figura 2.1: Não perturbado

A figura (2.1) mostra o espaço de fases num tempo  $t$  para um caso não perturbado  $\phi_1(x) = 0$ . O número de partículas entre um ponto  $x$  e  $x + \Delta x$  é:

$$N = 2\delta \Delta x. \quad (2.9)$$

Logo, a densidade é:

$$n(x) = 2\delta. \quad (2.10)$$

Normalizando (2.10) por  $\frac{1}{2\delta}$ , para obter equivalência com a densidade de íons,  $n_i(x, t) = 1$ , quando o sistema se encontra em um estado de equilíbrio:

$$n(x) = 1. \quad (2.11)$$

Para um caso perturbado  $\phi_1(x) \neq 0$ , a distribuição de velocidades no espaço de fases é modificada, assim como a densidade, como sugere a figura (2.2):

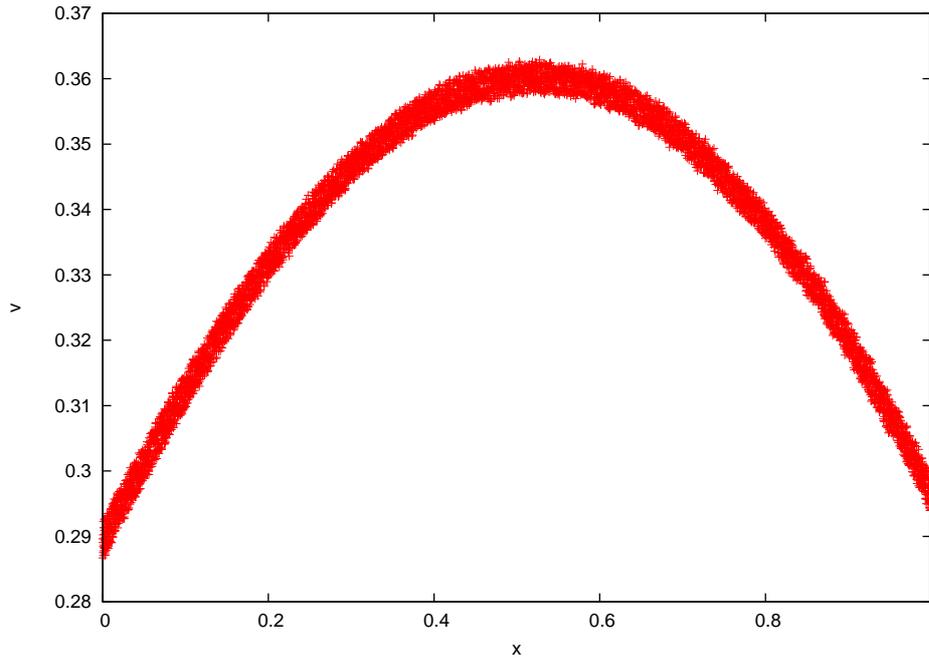


Figura 2.2: Perturbado

Utilizando o mesmo raciocínio que em (2.9), a densidade de elétrons para um estado perturbado fica:

$$n(x) = v_+ - v_- \quad (2.12)$$

Normalizando  $n(x)$

$$n(x) = \frac{v_+ - v_-}{2\delta}, \quad (2.13)$$

e substituindo (2.7) e (2.8), tem-se:

$$n(x) = 1 - \frac{\phi_1(x)}{(1 - \delta^2)}, \quad (2.14)$$

onde o termo a direita da igualdade de (2.14) refere-se a densidade para um caso não perturbado  $n_0 = 1$ , adicionado de um termo de perturbação  $-\frac{\phi_1(x)}{(1-\delta^2)}$ .

Considerando a equação de Poisson adimensionalizada, juntamente com as expressões (2.1) e (2.2):

$$\frac{\partial^2 \phi_0(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} = \alpha^2 (n_0 + n_1(x) - n_i), \quad (2.15)$$

onde  $n(x) = n_0 + n_1(x) = 1 - \frac{\phi_1(x)}{(1-\delta^2)}$ . Quando  $n_i = 1$ , o potencial elétrico  $\phi_0 = 0$ , é nulo, como demonstrado anteriormente no capítulo 1 pela equação (1.17).

De modo que a relação (2.15) fica:

$$\frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2 \frac{\phi_1(x)}{(1 - \delta^2)}, \quad (2.16)$$

resolvendo esta equação diferencial, obtém-se:

$$\phi_1(x) = Ae^{i(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\delta^2}})x} + Be^{-i(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\delta^2}})x}. \quad (2.17)$$

Aplicando a condição de contorno para o potencial:

$$\phi_1(x=0) = 0, \quad (2.18)$$

tem-se

$$\phi_1(x) = C \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\delta^2}}x\right), \quad (2.19)$$

onde  $C$  é uma constante complexa.

Utilizando

$$\phi_1(x=1) = 0, \quad (2.20)$$

tem-se:

$$C \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) = 0. \quad (2.21)$$

Para obter-se uma solução não-trivial:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1-\delta^2}} = n\pi, \quad (2.22)$$

$$\alpha_c = n\pi\sqrt{1-\delta^2}. \quad (2.23)$$

Como o foco deste trabalho está na primeira transição,  $n = 1$ , tem-se:

$$\alpha_c = \pi\sqrt{1-\delta^2}. \quad (2.24)$$

Então, os valores para os quais o sistema sofre uma mudança de regime ( $\alpha_c$ ), agora dependem do aumento da dispersão de velocidades do feixe ( $\delta$ ).

Tomando  $\lim_{\delta \rightarrow 0}$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha_c = \pi\sqrt{1-\delta^2}, \quad (2.25)$$

retorna-se ao resultado para o caso do feixe sem dispersão:

$$\alpha_c = \pi. \quad (2.26)$$

# Capítulo 3

## Simulação

Uma simulação computacional tem como objetivo fornecer um melhor entendimento do sistema que está sendo estudado. Sua aplicação é de grande utilidade, quando se deseja abordar um problema analiticamente muito complicado, ou se ganhar algum conhecimento do sistema físico, antes de se fazer uma montagem experimental. Neste estudo, a simulação computacional foi utilizada para melhor compreender como um feixe com dispersão de velocidade pode modificar a dinâmica do diodo de Pierce.

### 3.1 Condições iniciais

Para adicionar dispersão à velocidade de injeção dos elétrons, a velocidade inicial de cada elétron foi modificada de maneira a conceder valores entre:

$$v_{min} = v_0(1 - \delta), \quad (3.1)$$

$$v_{max} = v_0(1 + \delta). \quad (3.2)$$

Uma condição do diodo de Pierce é que o feixe seja inserido continuamente. Para reproduzir essa condição na simulação, foi criada uma região de comprimento variável, localizada à esquerda do catodo, a qual denominaremos bolsão de partículas. Dentro do bolsão, as partículas não interagem, apenas fluem em direção ao diodo. Inicialmente, elas são ordenadas de forma uniforme espacialmente no comprimento definido para o bolsão. Através de um gerador de números aleatórios, atribui-se, a cada partícula, uma velocidade entre (3.1) e (3.2). À medida que o sistema evolui por um passo de tempo  $\tau$  definido, faz-se a atualização da posição de cada partícula no bolsão por:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i. \quad (3.3)$$

Onde  $v_i$  é a velocidade inicial da  $i$ -ésima partícula entre (3.1) e (3.2). Como não há força resultante sobre as partículas no bolsão

$$\frac{dv_i}{dt} = 0, \quad (3.4)$$

as velocidades permanecem constantes.

A região de interação do diodo é definida por um intervalo de comprimento entre:

$$0 \leq x < 1. \quad (3.5)$$

Para simular as fronteiras do diodo, é feito uso do argumento 'if' em programação. Num passo de tempo  $\tau_n$ , o programa contabiliza a nova posição de todas as partículas do sistema. Caso alguma encontre-se em  $x \geq 0$ , é considerado que ela está dentro do diodo; se ela possuir posição  $x \geq 1$ , é considerado que está fora desse (ou está sobre o anodo ou passou dele), sendo então reinserida numa posição vaga do bolsão, com uma nova velocidade atribuída dentro do intervalo permitido.

O número de partículas da simulação é definido pelo parâmetro  $N_{par}$ . No entanto, uma fração desse número é reservada para a carga real do sistema:

$$N_e = valor N_{par}, \quad (3.6)$$

onde *valor* é um parâmetro que define a porcentagem de partículas a ser reservada para cada tarefa. Sua faixa de valores é  $0 < valor < 1$ . O restante,

$$N_{Bolsão} = N_{par} - N_e, \quad (3.7)$$

ficará no bolsão como partículas fictícias, tornando-se elétrons interagentes, no momento que entram na região de interação. Não há interesse que todas as  $N_{par}$  sejam utilizadas dentro do diodo ao mesmo tempo, pois, se fossem utilizadas seria necessário um número maior que  $N_{par}$  para construir o feixe, e o fluxo de partículas para dentro do diodo também seria limitado pelo número que saiu, violado, assim, a condição de feixe continuamente injetado. O interesse é manter sempre um feixe fluindo para dentro do diodo, independente da condição na qual o sistema se encontra .

Como se supôs íons estáticos, é necessário considerá-los na simulação, apenas introduzindo um termo no campo elétrico total do sistema, como será demonstrado adiante. No entanto, é preciso normalizar a carga de  $N_e$  para ser equivalente a de uma distribuição de íons com densidade  $n_i = 1$ , para então cumprir a condição de neutralidade. Como tem-se um número finito de elétrons, considerar-se-á que  $N_e$  equivale ao total de carga dentro do sistema. Normalizando, então, o número de partículas dentro do diodo num dado passo de tempo  $\tau_n$ <sup>1</sup> por

$$\frac{N_e(\tau_n)}{N_e}, \quad (3.8)$$

ficando assim:

$$\frac{N_e(\tau_n)}{valor N_{par}}. \quad (3.9)$$

Por exemplo, caso seja definido  $N_{par} = 10000$  e  $valor = 0.8$ , o número de partículas no bolsão será  $N_{Bolsão} = 2000$ , e o número de elétrons  $N_e = 8000$ . De modo que, a carga total do sistema será neutra se:

$$\frac{N_e(\tau_n)}{8000} - 1 = 0. \quad (3.10)$$

---

<sup>1</sup>Apesar de se colocar todas variáveis físicas em função do passo de tempo na qual simulação se encontra, estas são variáveis de tempo contínuo

## 3.2 Interação

O ciclo de operações que o programa executa para atualizar as variáveis é:

- entrada dos valores dos parâmetros de estudo  $\alpha$  e  $\delta$ ;
- escolha do número de partículas  $N_{par}$ , de *valor* e do passo de tempo  $\tau$ ;
- distribuição espacial das partículas nas regiões: bolsão, diodo e anodo em diante;
- atribuição de uma velocidade para cada partícula entre (3.1) e (3.2);
- organização das partículas por posição;
- contagem do número de partículas em cada região;
- cálculo do valor da posição média<sup>2</sup>;
- integração das equações de movimento com as condições iniciais atribuídas, pelo método de Runge-Kutta-Verner de 5ª e 6ª ordem;<sup>3</sup>
- saídas: Campo no catodo  $E(x = 0, \tau_n)$ , posição  $x_i$ , velocidade  $v_i$ , campo por posição  $E(x, \tau_n)$

O computador executa o cálculo da nova posição no passo  $\tau_n$  de cada i-partícula do sistema, pela equação (3.3) e, então, atualiza-se a velocidade de cada i-partícula para o próximo passo  $\tau_{n+1}$ . Para se atualizar a velocidade de uma partícula dentro do diodo, é necessário conhecer o campo elétrico total sobre esta no passo  $\tau_n$ , para o qual existe um número de elétrons  $N_e(\tau_n)$  dentro do diodo. Este campo será composto pela contribuição do campo, devido à distribuição de íons estáticos sobre aquele elétron, adicionado a contribuição do campo elétrico dos  $N_e(\tau_n)$  elétrons existentes no diodo no tempo  $\tau_n$ :

$$E_{TOTAL} = E_i(x_i, \tau) + E_e(x_i, \tau). \quad (3.11)$$

Com esta informação, a velocidade de cada partícula será atualizada pela relação:

$$\frac{dv_i(\tau_{n+1})}{dt} = E(x_i, \tau_n). \quad (3.12)$$

---

<sup>2</sup>Na seção 3.3 será mostrado a utilidade disto

<sup>3</sup>Neste trabalho, não será explicado tal método, sendo que o mesmo foi utilizado apenas para realizar o procedimento de integração.

### 3.3 Cálculo do campo elétrico

A dinâmica do sistema torna necessário calcular o campo elétrico para cada mudança na distribuição espacial de elétrons. Logo, seria preciso resolver a equação de Poisson para todo  $n_e(x, \tau_n)$ , e para as condições de contorno (1.1) e (1.2), o que adicionaria mais tempo de computação. Para contornar o problema, pode-se fazer uso de funções de Green. O método permite calcular  $\phi_\nu(x, \tau_n)$  para qualquer  $n_\nu(x, \tau_n)$ , através de:

$$\phi_\nu(x, t) = \int G(x, x_i; \tau_n) n_\nu(x_i, \tau_n) dx_i. \quad (3.13)$$

Sendo que  $n_\nu(x, \tau_n)$  é positivo para ( $\nu = i$ ) e negativo para  $\nu = e$ .  $G(x, x_i; \tau_n)$  é uma função de Green que é solução para:

$$\frac{\partial^2 G(x, x_i; \tau_n)}{\partial x^2} = -\alpha^2 \delta(x - x_i; \tau_n), \quad (3.14)$$

em que

$$n(x, \tau_n) = \delta(x - x_i; \tau_n). \quad (3.15)$$

Ou seja,  $G(x, x_i; \tau_n)$  é a solução para o potencial elétrico de uma carga localizada no espaço unidimensional, dadas às condições de contorno sob este potencial.

De acordo com (1.1) e (1.2), as condições de contorno para a função de Green são:

$$G(x = 0, x_i; \tau_n) = 0, \quad (3.16)$$

$$G(x = 1, x_i; \tau_n) = 0. \quad (3.17)$$

Resolvendo:

$$\frac{\partial^2 G_1(x, x_i; \tau_n)}{\partial x^2} = 0, \quad \text{para } x < x_i, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 G_2(x, x_i; \tau_n)}{\partial x^2} = 0, \quad \text{para } x > x_i, \quad (3.19)$$

$$G_1(x, x_i; \tau_n) = Ax + B, \quad (3.20)$$

$$G_2(x, x_i; \tau_n) = Cx + D, \quad (3.21)$$

por (3.16) e (3.17)

$$G_1(x = 0, x_i; \tau_n) = B = 0, \quad \text{logo, } B=0, \quad (3.22)$$

$$G_2(x = 1, x_i; \tau_n) = C + D = 0, \quad \text{logo, } D = -C. \quad (3.23)$$

É necessário que a função de Green seja contínua:

$$G_1(x = x_i, x_i; \tau_n) = G_2(x = x_i, x_i; \tau_n), \quad (3.24)$$

$$Ax_i = C(x_i - 1). \quad (3.25)$$

Tomando a integral da equação (3.14) entre  $x_i + \varepsilon$  e  $x_i - \varepsilon$  no  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{\partial G(x, x_i; \tau_n)}{\partial x} \right|_{x=x_i+\varepsilon} - \left. \frac{\partial G(x, x_i; \tau_n)}{\partial x} \right|_{x=x_i-\varepsilon} = -\alpha^2, \quad (3.26)$$

$$C - A = -\alpha^2.$$

logo,

$$\begin{cases} Ax_i = C(x_i - 1), \\ C - A = -\alpha^2, \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2(1 - x_i), \\ C &= -\alpha^2 x_i, \end{aligned}$$

obtendo

$$G(x, x_i; \tau_n) = \begin{cases} \alpha^2(1 - x_i)x, & x < x_i, \\ -\alpha^2 x_i(x - 1), & x > x_i, \end{cases}$$

substituindo isto em (3.13)

$$\phi_\nu(x, \tau_n) = \alpha^2 x \int_{x_i=0}^x (1 - x_i) n_\nu(x_i, \tau_n) dx_i - \alpha^2 (x - 1) \int_{x_i=x}^1 x_i n_\nu(x_i, \tau_n) dx_i, \quad (3.27)$$

pela relação:

$$E_\nu(x, t) = -\frac{\partial \phi_\nu(x, t)}{\partial x}, \quad (3.28)$$

o campo elétrico fica:

$$E_\nu(x, \tau_n) = -\alpha^2 \int_{x_i=0}^x (1 - x_i) n_\nu(x_i, \tau_n) dx_i + \alpha^2 \int_{x_i=x}^1 x_i n_\nu(x_i, \tau_n) dx_i. \quad (3.29)$$

Calculando o campo para uma distribuição de íons uniformes espacialmente

$$n_\nu(x_i, \tau_n) = 1,$$

$$E_i(x, \tau_n) = \alpha^2 \left( \frac{1}{2} - x \right). \quad (3.30)$$

Para uma distribuição de elétrons com densidade qualquer  $n_\nu(x_i, \tau_n) = -n_e(x_i, \tau_n)$

$$E_e(x, \tau_n) = \alpha^2 \int_{x_i=0}^x n_e(x_i, \tau_n) dx_i - \alpha^2 \int_{x_i=x}^1 x_i n_e(x_i, \tau_n) dx_i, \quad (3.31)$$

adicionando um termo nulo à expressão

$$\alpha^2 \int_{x_i=x}^1 n_e(x_i, \tau_n) dx_i - \alpha^2 \int_{x_i=x}^1 n_e(x_i, \tau_n) dx_i,$$

$$E(x, \tau_n) = \alpha^2 \int_{x_i=0}^1 n_e(x_i, \tau_n) dx_i - \alpha^2 \int_{x_i=0}^1 x_i n_e(x_i, \tau_n) dx_i - \alpha^2 \int_{x_i=x}^1 n_e(x_i, \tau_n) dx_i, \quad (3.32)$$

$$E(x, \tau_n) = \alpha^2 \int_{x_i=0}^1 n_e(x_i, \tau_n) dx_i \left(1 - \frac{\alpha^2 \int_{x_i=0}^1 x_i n_e(x_i, \tau_n) dx_i}{\alpha^2 \int_{x_i=0}^1 n_e(x_i, \tau_n) dx_i}\right) - \alpha^2 \int_{x_i=x}^1 n_e(x_i, \tau_n) dx_i, \quad (3.33)$$

$$E(x, \tau_n) = \alpha^2 N_e(\tau_n)(1 - \bar{x}) - \alpha^2 N_{>}(x, \tau_n), \quad (3.34)$$

em que  $N_{>}(x, \tau_n)$  é o número de partículas a direita do ponto  $x$ .

Logo, o campo total fica:

$$E(x, \tau_n) = \alpha^2 N_e(\tau_n)(1 - \bar{x}) - \alpha^2 N_{>}(x, \tau_n) + \alpha^2 \left(\frac{1}{2} - x\right). \quad (3.35)$$

Normalizando, para se obter a equivalência entre a carga dos  $N_e(\tau_n)$  elétrons no diodo e a carga da distribuição de íons

$$\frac{1}{valor N_{par}}, \quad (3.36)$$

tem-se

$$E(x, \tau_n) = \alpha^2 \frac{N_e(\tau_n)}{N_{par} valor} (1 - \bar{x}) - \alpha^2 \frac{N_{>}(x, \tau_n)}{N_{par} valor} + \alpha^2 \left(\frac{1}{2} - x\right). \quad (3.37)$$

Com esta expressão para o campo elétrico total num passo  $\tau_n$  inserida na equação (3.12,) tem-se o conjunto de equações

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(\tau_n), \quad (3.38)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \alpha^2 \frac{N_e(\tau_n)}{N_{par} valor} (1 - \bar{x}) - \alpha^2 \frac{N_{>}(x, \tau_n)}{N_{par} valor} + \alpha^2 \left(\frac{1}{2} - x\right). \quad (3.39)$$

o qual é resolvido a cada passo de tempo para todas as partículas dentro do diodo, com a utilização do método de integração numérico Runge-Kutta-Verner.

# Capítulo 4

## Resultados da Simulação

Com o objetivo de mostrar a mudança nos valores de (2.24), devido ao aumento na dispersão de velocidades, foram realizadas, primeiramente, duas simulações para o mesmo valor  $\delta = 0.01$ , baixa dispersão, em dois valores diferentes  $\alpha = 0.7\pi$  e  $\alpha = 1.05\pi$ . O tamanho do passo de tempo escolhido foi  $\tau = 0.1$ , o número de partículas foi  $N_{par} = 10000$  e  $valor = 0.8$ .

A condição inicial para todas as simulações foi uma perturbação, que foi adicionada, colocando-se um número extra de elétrons dentro do diodo.

A figura (4.1) mostra o campo elétrico no cátodo  $E(x = 0, \tau_n)$ , em função dos passos de tempo para  $\alpha = 0.7\pi$ .

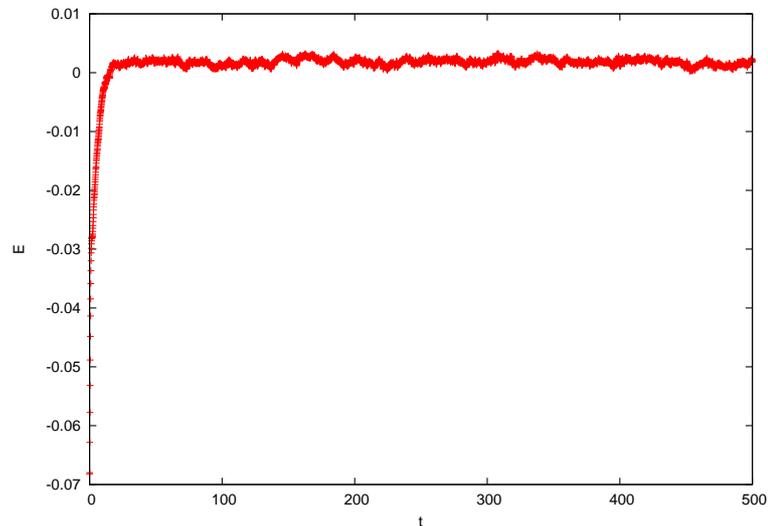
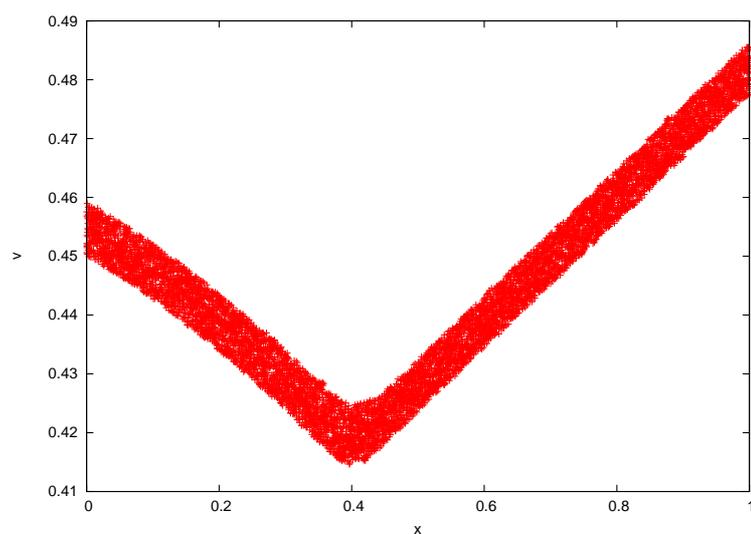


Figura 4.1: Campo no cátodo  $\alpha = 0.7\pi$

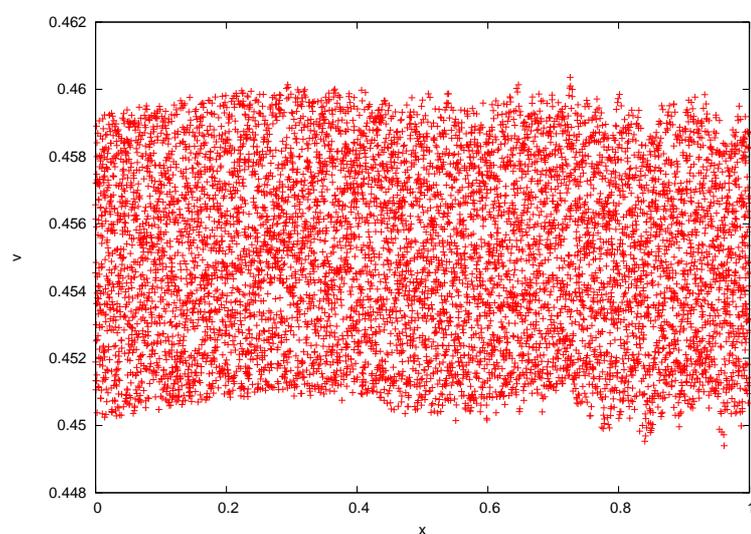
Para um tempo  $t \approx 1$ , visualiza-se um valor negativo no campo. Isso é devido ao excesso de elétrons colocados.

Correspondentemente ao mesmo tempo  $t$ , no espaço de fases:

Figura 4.2: Espaço de fase  $\alpha = 0.7\pi$ 

Observa-se, ao redor de  $x = 0.4$ , um acúmulo de elétrons. Pode-se visualizar, também, uma diminuição nos valores da velocidade.

Para um  $t = 100$ , o fluxo de elétrons evolui de forma que o acúmulo original de carga se dissipa, recuperando-se assim da perturbação fornecida, como mostrado a seguir na figura (4.3).

Figura 4.3: Espaço de fase  $\alpha = 0.7\pi$ 

Classificando, assim, este estado alcançado como um estado estável.

Pela equação (2.24), quando  $\delta = 0.01$ , tem-se  $\alpha_c \approx 0.99\pi$ . Rodando uma simulação para  $\alpha = 1.05\pi$ , obtiveram-se os seguintes resultados:

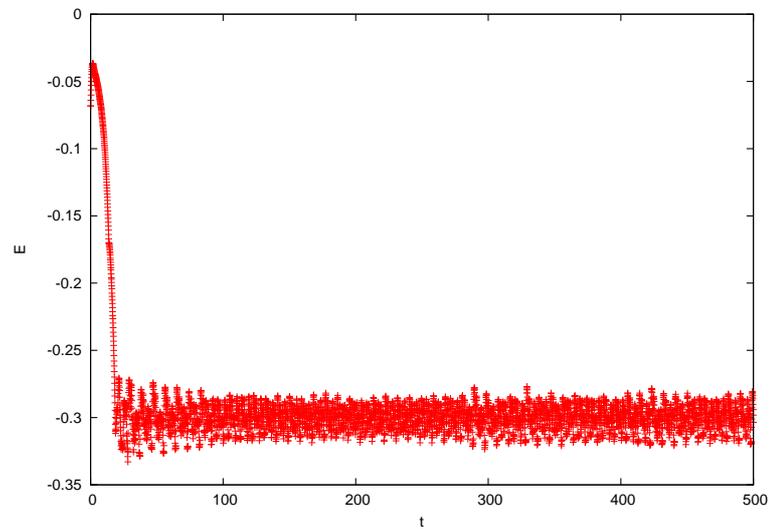


Figura 4.4: Campo no cátodo  $\alpha = 1.05\pi$

Observa-se que o campo no cátodo se mantém negativo. Para melhor se entender isso, abaixo encontra-se um gráfico do campo elétrico, ao longo do diodo para um  $t = 20$

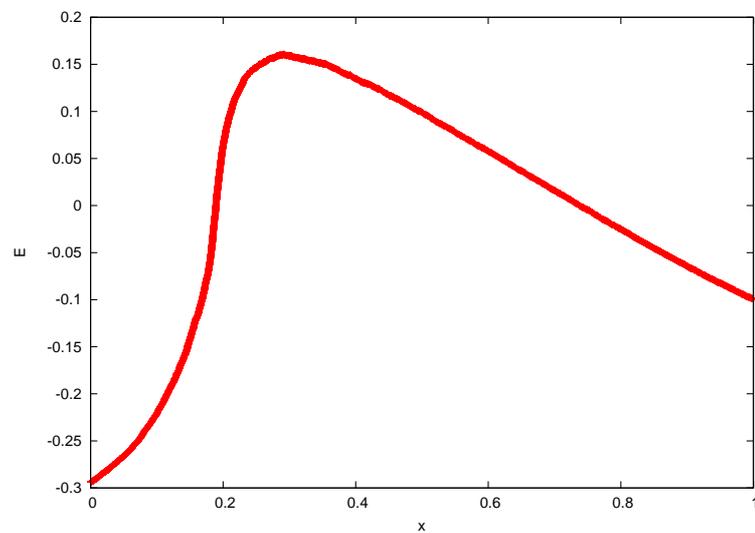


Figura 4.5: Campo por posição  $\alpha = 1.05\pi$

O efeito no movimento dos elétrons pode ser visualizado pelo espaço de fases.

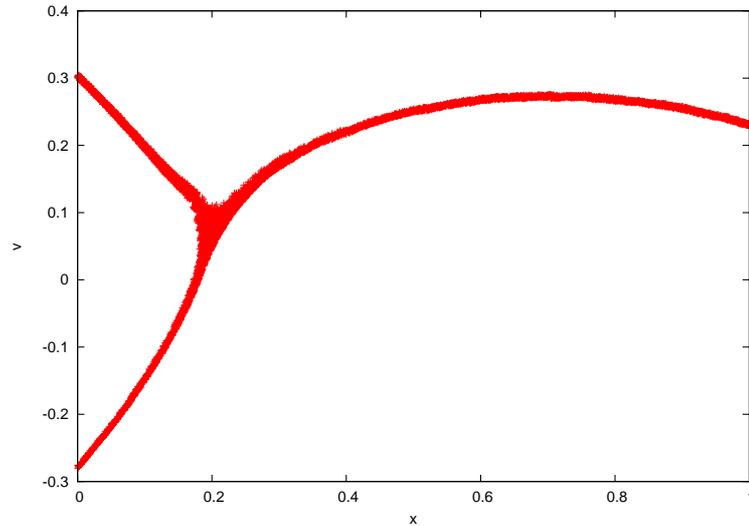


Figura 4.6: Espaço de fases  $\alpha = 1.05\pi$

A figura (4.5) mostra um campo elétrico negativo em  $0 < x < 0.2$ . Isso significa que há um excesso de elétrons, o que, de acordo com a figura (4.6), ocorre em  $x \approx 0.2$ . Em  $x > 0.2$ , o campo torna-se positivo, alcançando o valor máximo em  $x \approx 0.28$ , ou seja, há carga positiva concentrada. O efeito resultante é um aprisionamento dos elétrons numa região à esquerda de  $x \approx 0.28$  e, logo à direita, uma ausência dos mesmos. Pela figura (4.6), nota-se que, a partir desse ponto, a velocidade dos elétrons cresce, atingindo o máximo em  $x \approx 0.7$ . Conclui-se, então, que a dinâmica favorece a permanência desse efeito. A curva de retorno em direção a  $x = 0$ , em (4.6), representa os elétrons que são injetados pelo feixe sendo repelidos de volta ao cátodo, devido ao acúmulo de elétrons em  $x = 0.2$ .

A seguir estão os resultados de uma simulação com um feixe de dispersão mais elevada,  $\delta = 0.6$ , cujo valor de  $\alpha_c = 0.8\pi$ . Inicialmente, foi feita uma simulação com  $\alpha = 0.7\pi$ .

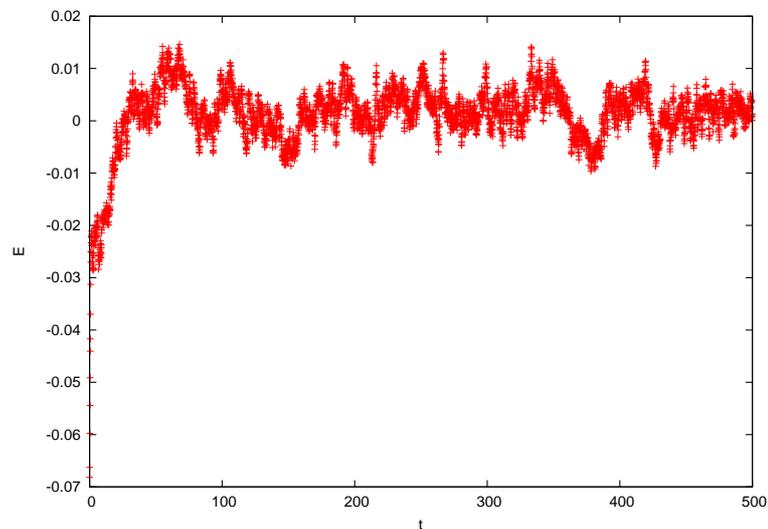


Figura 4.7: Campo no cátodo  $\alpha = 0.7\pi$

Apesar do comportamento do sistema ter evoluído da mesma maneira que em (4.1), observam-se oscilações acentuadas do campo elétrico.

Para melhor visualizar como estas oscilações começam a aparecer com crescimento de  $\delta$ , foram feitas simulações para um valor fixo de  $\alpha = 0.7\pi$  e diferentes  $\delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.04$ ,  $\delta = 0.3$  e  $\delta = 0.6$ .

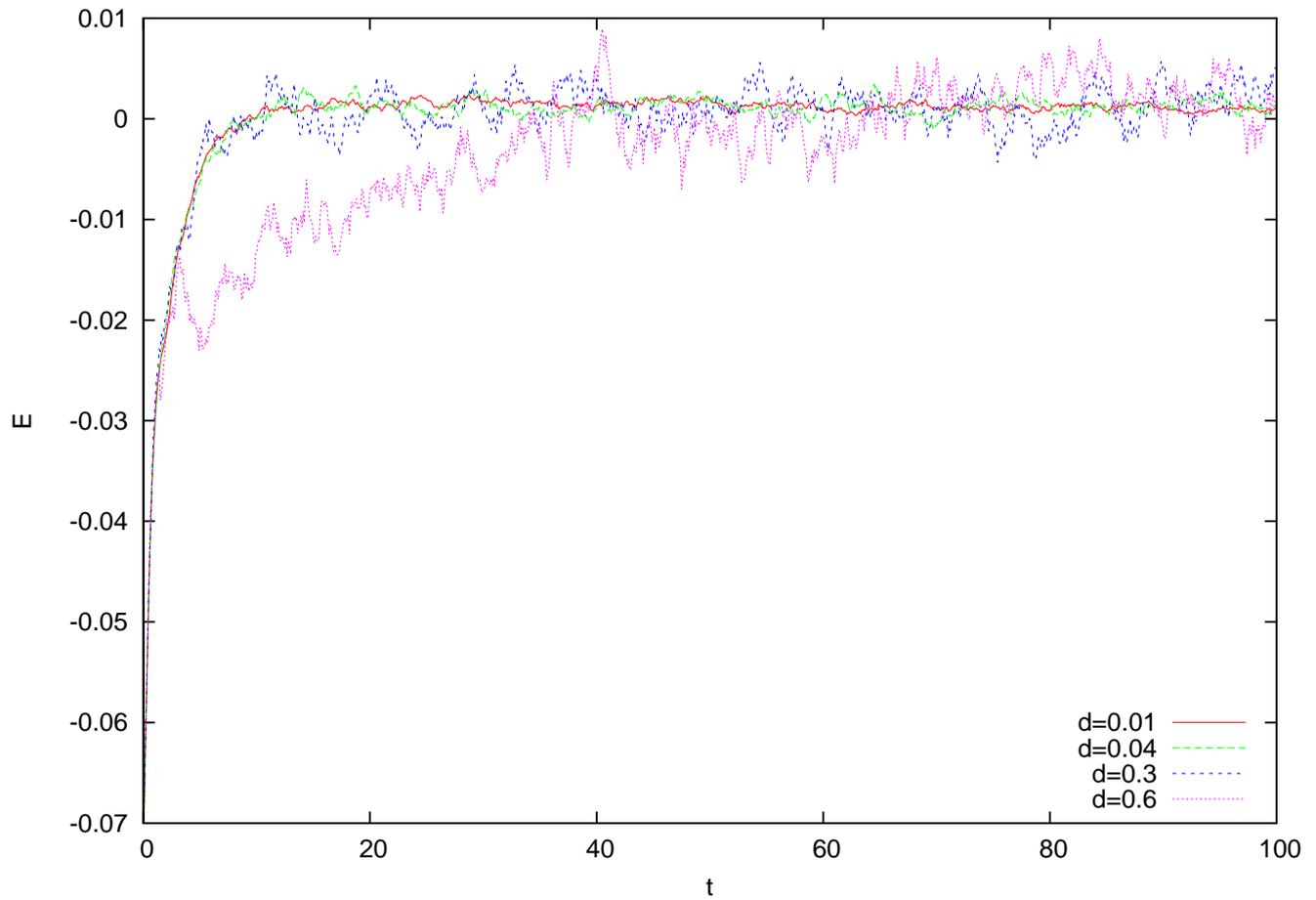


Figura 4.8:  $\delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.04$ ,  $\delta = 0.3$ ,  $\delta = 0.6$

Para comprovar a teoria desenvolvida no capítulo 2, fez-se uma simulação com  $\alpha = 0.9\pi$ , onde se esperava encontrar uma instabilidade.

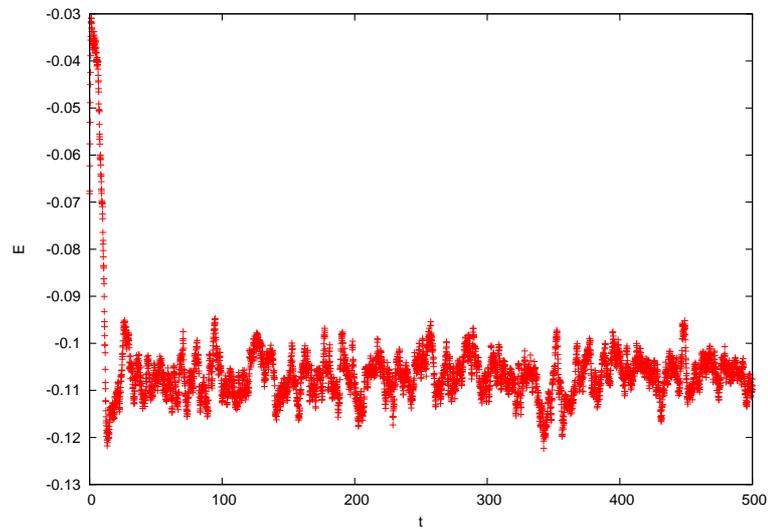


Figura 4.9: Campo no cátodo  $\alpha = 0.9\pi$

O efeito no campo elétrico no cátodo é similar ao encontrado na figura (4.4). Correspondentemente observando o espaço de fases na figura (4.10):

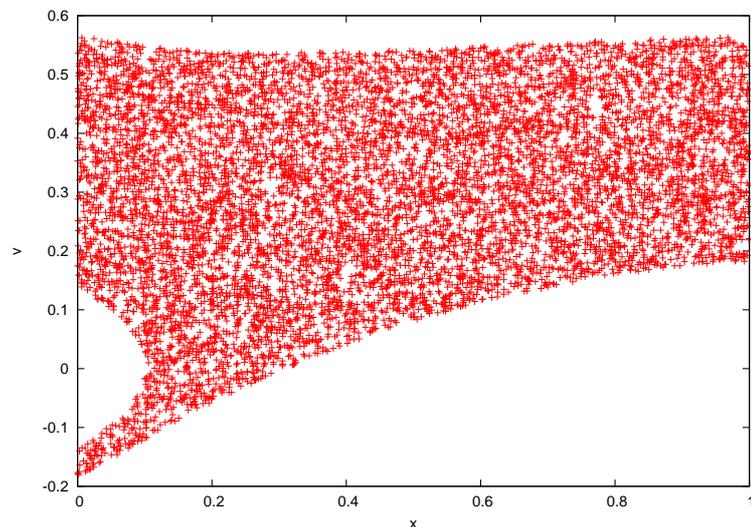


Figura 4.10: Espaço de fases  $\alpha = 0.9\pi$

Logo, os estados de instabilidade sofrerem uma transição, ocorrendo agora para valores de  $\alpha$  numa faixa a partir de  $0.9\pi$ . Pode-se inferir que a dispersão de velocidades age como uma perturbação sobre o sistema tornando o sistema cada vez mais instável a medida que  $\delta$  é aumentada.

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho, inicialmente foi demonstrado o diodo de Pierce com um feixe de elétrons que não possui dispersão de velocidades. Utilizando a aproximação de plasmas como fluido carregado, obteve-se uma relação para os regimes de funcionamento do sistema. A partir desta relação, foi mostrado um pouco do comportamento do sistema, para valores de  $\alpha$  dentro do intervalo  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ . Mostrou-se que em certos valores  $\alpha_c$  o sistema encontra-se num estado estacionário, que é intermediário entre estados estáveis e instáveis respectivamente. Fazendo-se uma teoria para o caso de um feixe com dispersão de velocidades, obteve-se um resultado que mostra uma variação nos valores de transição de regimes  $\alpha_c$  do sistema. Para comprovar esta mudança sob  $a_c$ , foi desenvolvido um algoritmo numérico para simular este sistema. Os resultados da simulação ajudam a entender melhor a dinâmica desse sistema, através do estudo desses resultados foi possível visualizar a transição nos valores de  $\alpha_c$  previstos teoricamente. Desta forma o objetivo do trabalho foi alcançado de forma satisfatória. Para um trabalho posterior, é possível utilizar a simulação para estudar o comportamento desse sistema com um feixe com dispersão de velocidades, para valores de  $\alpha > 2\pi$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] BARROSO, J. J.; TERRA, M. O.; MACAU, E. E. N. Bifurcation and chaos in the second oscillatory window of the classical pierce diode. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 11, n. 1, p. 2579–2586, Dec. 2000.
- [2] PIERCE, J. R. Limiting stable current in electron beams in the presence of ions. *Journal of Applied Physics*, New York, v. 15, n. 1, p. 721–726, Oct. 1944.
- [3] GODFREY, B. B. Oscillatory nonlinear electron flow in a pierce diode. *American Institute of Physics*, Washington, D.C., v. 30, n. 5, p. 1553–1560, May 1987.
- [4] CHEN, F. F. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. 2. ed. New York: Plenum Press, 1984.
- [5] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. New York: Pergamon Press, 1986.